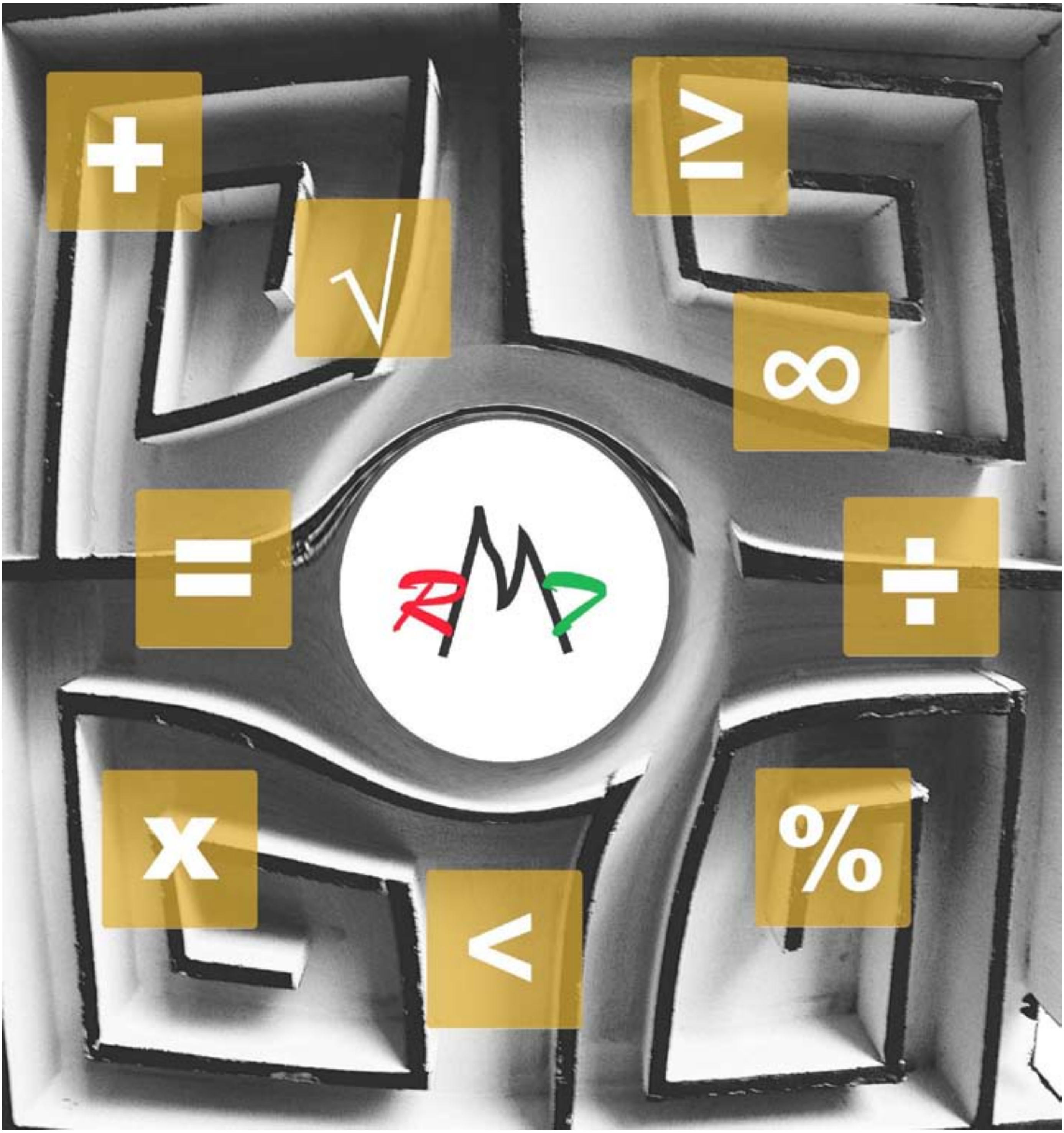
La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 15 décembre / dicembre 2024



Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.eu

ISSN 223
4-9596

TABLE DES MATIÈRES / INDICE

Numéro 15, décembre 2024 / Numero 15, dicembre 2024

Études / Approfondimenti

Et pour terminer / E per finire

ÉDITORIAL : LA BANQUE DE PROBLÈMES DEVIENT PROTAGONISTE

Lucia Grugnetti et François Jaquet

L'« ARMT » a perdu son « A » à la suite de la dissolution de l'Association.

Pour ceux qui ont animé l'ARMT, il reste la mémoire d'un engagement collectif intense, sur une trentaine d'années, qui a généré des liens d'amitié, des souvenirs lumineux et de grands pas dans les connaissances de chacun sur l'apprentissage des mathématiques par les élèves comme dans leur formation professionnelle, qui se poursuit même après la retraite. Nous sommes quelques centaines, à avoir participé à nos rencontres internationales, à avoir attribué des points aux copies rendues par les groupes d'élèves, à avoir conduit des analyses a priori, puis a posteriori, à avoir participé activement aux tâches d'organisation des épreuves. Cette mémoire ne peut pas être mieux exprimée que par le témoignage suivant reçu d'une participante à l'un de nos groupes de travail : *Carissimi, grazie di cuore per il vostro lavoro, i vostri suggerimenti e le vostre riflessioni che hanno supportato il mio lavoro di insegnante negli ultimi 15 anni. Siete stati un punto di riferimento continuo, uno stimolo a migliorarsi sempre, che mi ha reso un'insegnante più consapevole e attenta ai bisogni dei miei alunni. (Chers amis, un grand merci pour votre travail, vos suggestions et vos réflexions qui ont soutenu mon travail d'enseignante au cours des 15 dernières années. Vous avez été un point de référence continu, un stimulant pour toujours m'améliorer, ce qui a fait de moi une enseignante plus consciente et attentive aux besoins de mes élèves)*.

Pour les élèves, il reste les souvenirs de résolution de problèmes en équipes sans aucune aide extérieure ; pour leurs enseignants, la découverte d'une nouvelle modalité de travail en mathématiques.

Pour la communauté de tous ceux qui sont intéressés par la « résolution de problèmes », 1550 énoncés sont à disposition, dont plus de la moitié sont accompagnés de relevés statistique après avoir été proposés dans nos épreuves à des milliers de classes et évalués selon des critères communs, ainsi que deux ou trois centaines d'analyses a posteriori par nos groupes de travail thématiques, une centaine d'articles développant les analyses précédentes.

Tous ces résultats, fruit du travail de toutes les personnes engagées dans l'ARMT sont regroupés dans notre « Banque de données du RMT » dont le nom conserve les trois lettres « R », « M » et « T ».

Le « **R**allye », pour la lettre « R », restera un « concours » dans l'imaginaire collectif, même s'il ne s'agissait que d'une activité de résolution de problèmes par classes. Paradoxalement, la nécessité d'un classement pour limiter le nombre des finalistes de chaque section s'est révélée positive car elle a conduit à des analyses a priori pour élaborer des critères d'attribution de points qui, à leur tour, ont fourni des indices statistiques pour les analyses a posteriori des procédures de résolution adoptées par les groupes d'élèves.

Avec le recul notre rallye restera une recherche coordonnée, à très grande échelle, de la manière dont les élèves affrontent une situation problématique dans le but d'améliorer l'apprentissage des mathématiques.

Cette recherche a été conçue comme une entreprise collective et participative :

- avec des journées d'études, groupes thématiques,
- avec des conditions de résolution bien précises : même durée, hors de la présence de l'enseignant, critères communs d'évaluation,
- avec analyses a priori de la tâche en fonction des observations antérieures (aspect cyclique),
- où les élèves décrivent leurs procédures qui sont conservées, analysées a posteriori, et largement publiées.

On peut la considérer comme une « **R**echerche en didactique des mathématiques », pour retrouver le « R », respectant les conditions d'une démarche scientifique, qui a exigé de ses animateurs de très grands investissements en temps et énergie mais a abouti à un précieux et abondant recueil de données : la Banque de problèmes du RMT.

Il est possible de dissoudre une association, de renoncer à poursuivre les épreuves du rallye, mais il est impossible d'ignorer les résultats de 30 ans de cette recherche en didactique.

Au moment d'envisager son avenir, il nous paraît intéressant de remonter encore plus loin dans ses origines et d'évoquer le fameux **trio « élève - enseignant – savoirs »**.

Tout a commencé, au milieu du vingtième siècle, lorsqu'on a modifié la représentation graphique de ce trio : d'un segment (de l'espace à une dimension) à un triangle (de l'espace à deux dimensions) ; c'est-à-dire du modèle linéaire traditionnel des savoirs mathématiques que l'enseignant va transmettre à l'élève-récepteur, à un triangle où chaque sommet - élément du trio - est directement lié à chacun des deux autres. Il s'agissait d'une innovation essentielle, une vraie révolution. Ce triangle est le schéma d'une conception constructiviste de l'apprentissage, et si le sommet « élève » du triangle devient « groupe d'élèves », on arrive au socio-constructivisme.

C'est sur ce lien direct des savoirs à l'élève que se situe l'activité de construction des connaissances par l'élève et, en particulier, la résolution de problèmes. C'est aussi sur ce lien direct qu'est née la confusion bien naturelle entre les actions de « résoudre des problèmes » et de « faire des mathématiques », comme si la première entraînait automatiquement la seconde. On s'est vite rendu compte que, là aussi, il fallait se méfier des formules réductrices.

On peut penser a priori que les « savoirs » sont ceux des « mathématiques constituées », élaborées progressivement depuis plus de 2000 ans par la communauté des mathématiciens et que l'envie, pour l'enseignant, est de faire en sorte que l'élève s'en rapproche le plus rapidement possible, (comme ont tenté de le faire les *Mathématiques modernes*).

Notre longue pratique d'analyse des réponses et descriptions d'élèves nous a montré le fossé entre ces savoirs du mathématicien, indépendants des contraintes matérielles, et les savoirs de l'élève enracinés dans son activité quotidienne, ses gestes, ses déplacements, son environnement.

Nous avons compris, en lisant et relisant ce que l'élève nous raconte, combien ses savoirs sont fragiles, combien d'obstacles il doit surmonter pour les reconstruire à un niveau supérieur. La construction par petites marches (du behaviorisme) proposée par une vision logico-déductive de l'édifice des mathématiques, n'est plus possible car la marche précédente n'est pas encore stable et devra être renforcée encore et encore. Nous nous sommes aussi rendu compte que nos propres savoirs mathématiques sont encore en construction, le seront toujours et se situent – sur une échelle de maîtrise, solidité, efficacité – légèrement au-dessus de ceux de nos élèves, qu'on soit enseignant d'école élémentaire, de collège, de lycée, d'université. Nous sommes là au cœur de l'enseignement de **M**athématiques, dont le « M » est à conserver.

L'élève et l'enseignant sont les deux personnages du triangle précédent. On s'est beaucoup intéressé au lien représenté par le côté entre le premier et les savoirs mathématiques. Il est temps de passer à l'enseignant, sur son sommet qui paraît bien éloigné du côté précédent.

De son sommet du triangle, notre enseignant est en lien direct avec les savoirs mathématiques, les siens, qu'il enrichit en permanence au fur et à mesure qu'il observe ceux de ses élèves et, simultanément, il agit sur la construction des savoirs de l'élève, sans toutefois en être l'initiateur. Il n'est ni le créateur ni l'acteur, mais le « metteur en scène ».

Pour tenir ce rôle délicat, l'enseignant doit connaître ou reconnaître les savoirs mathématiques que l'activité proposée par l'énoncé d'un problème va développer chez l'élève. Il doit ensuite avoir des points de référence issus d'expérimentations précédentes, par d'autres élèves que les siens, (pour éviter de choisir des activités trop « difficiles », trop « faciles » ou dont on n'a pas pu déterminer l'intérêt). Il doit encore savoir jusqu'à quel point il peut encourager le débat entre élèves (sans viser trop haut), puis ce qu'il faut « institutionaliser » et contrôler ensuite.

On revient ainsi à la banque de problèmes et ses résultats potentiellement intéressants pour le rôle de l'enseignant dans le futur.

Ces dernières années, nos groupes de travail se sont lancés dans la réflexion sur les « parcours didactiques » que l'on peut imaginer à partir de nos problèmes. Plusieurs de leurs membres s'y sont engagés , comme en témoignent les nombreux articles de la Gazette de Transalpie.

Le projet va être lancé prochainement de poursuivre notre **R**echerche en didactique des **M**athématiques à partir de la Banque de problèmes du RMT, qui deviendra un espace de travail coopératif destiné aux enseignants et dont ils seront les animateurs responsables. Son but est de tirer profit des problèmes, que nous avons expérimentés durant 30 ans, pour les intégrer dans un programme de classe.

L'avenir nous dira si, pour conserver le « T », des enseignants de la **T**ransalpie accepteront de s'insérer dans ce projet.

EDITORIALE: LA BANCA DI PROBLEMI DIVENTA PROTAGONISTA

Lucia Grugnetti e François Jaquet

L'«ARMT» ha perso la sua «A» a seguito della dissoluzione della Associazione.

Per coloro che hanno animato l'ARMT resta il ricordo di un intenso impegno collettivo, su un periodo di oltre trent'anni, che ha generato legami di amicizia, ricordi luminosi e grandi passi nella conoscenza di tutti sull'apprendimento della matematica da parte degli allievi, e anche nella formazione professionale, che continua anche dopo il pensionamento. Siamo poche centinaia ad aver partecipato ai nostri convegni internazionali, ad aver assegnato punteggi agli elaborati presentati dai gruppi di allievi, ad aver condotto analisi a priori, poi a posteriori, ad aver partecipato attivamente ai compiti organizzativi delle prove. Questo ricordo non può essere espresso meglio della testimonianza che segue ricevuta da una insegnante, membro di uno dei nostri gruppi di lavoro:

Carissimi, grazie di cuore per il vostro lavoro, i vostri suggerimenti e le vostre riflessioni che hanno supportato il mio lavoro di insegnante negli ultimi 15 anni. Siete stati un punto di riferimento continuo, uno stimolo a migliorarsi sempre, che mi ha reso un'insegnante più consapevole e attenta ai bisogni dei miei alunni.

Per gli allievi rimangono i ricordi di come hanno risolto problemi in gruppo senza alcun aiuto esterno; per i loro insegnanti, la scoperta di una nuova modalità di lavoro in matematica.

Per la comunità di tutti coloro che sono interessati alla "risoluzione di problemi" sono a disposizione 1550 enunciati, più della metà dei quali corredati da risultati statistici dopo essere state proposti nelle nostre prove a migliaia di classi e valutate secondo criteri comuni, due o trecento analisi a posteriori dei nostri gruppi di lavoro tematici, un centinaio di articoli che sviluppano analisi precedenti.

Tutti questi risultati, frutto del lavoro di tutte le persone coinvolte nell'ARMT, sono raggruppati nella nostra "Banca Dati RMT" il cui nome conserva le tre lettere "R", "M" e "T".

Il "Rally", per la lettera "R", resterà nell'immaginario collettivo una "competizione", anche se si trattava soltanto di un'attività di risoluzione di problemi per classi. Paradossalmente, la necessità di una classificazione per limitare il numero dei finalisti in ciascuna sezione si è rivelata positiva perché ha portato ad analisi a priori per elaborare criteri di assegnazione dei punteggi che, a loro volta, hanno fornito indici statistici per analisi a posteriori delle procedure di soluzione adottate dai gruppi di allievi.

Col senno di poi, il nostro rally rimarrà una ricerca coordinata, su scala molto ampia, del modo in cui gli allievi affrontano una situazione problematica con l'obiettivo di migliorare l'apprendimento della matematica.

Questa ricerca è stata concepita come un'impresa collettiva e partecipativa:

- con giornate di studio, gruppi tematici,
- con condizioni di risoluzione ben precise: stessa durata, senza la presenza del docente, criteri di valutazione comuni,
- con analisi a priori del compito basate su osservazioni antecedenti (aspetto ciclico),
- dove gli allievi descrivono le loro procedure che vengono conservate, analizzate a posteriori e ampiamente pubblicate.

Possiamo considerarla come una "**R**icerca in didattica della matematica"; per ritrovare la "R" rispettando le condizioni dell'approccio scientifico, che ha richiesto ingenti investimenti di tempo ed energie da parte dei suoi responsabili ma ha dato come risultato una preziosa e abbondante raccolta di dati: Banca dei problemi RMT.

È possibile sciogliere un'associazione, rinunciare a continuare la gara, ma è impossibile ignorare i risultati di 30 anni di questa ricerca in didattica.

Nel pensare al suo futuro, ci sembra interessante risalire ancora più indietro, per quel che riguarda le origini della ricerca in didattica ed evocare il famoso **trio** "**allievo** – **insegnante** –**saperi**".

Tutto ebbe inizio, a metà del Novecento, quando è stata modificata la rappresentazione grafica di questo trio: da un segmento (dello spazio unidimensionale) a un triangolo (dello spazio bidimensionale); vale a dire dal tradizionale modello lineare del sapere matematico che l'insegnante trasmette all'allievo-ricevente, a un triangolo dove ogni elemento del trio è direttamente collegato a ciascuno degli altri due. Si tratta di un'innovazione essenziale, una vera rivoluzione. Questo triangolo è lo schema di una concezione costruttivista dell'apprendimento, e se il vertice "allievi" del triangolo diventa "gruppo di allievi", si arriva al socio-costruttivismo.

È su questo collegamento diretto dei saperi all'allievo che si colloca l'attività di costruzione delle sue conoscenze e, in particolare, la risoluzione dei problemi. È anche su questo legame diretto che è nata la naturale confusione tra le azioni del risolvere problemi e fare matematica, come se la prima portasse automaticamente alla seconda. Ci siamo presto accorti che anche in questo caso bisognava diffidare delle formule riduttive.

Possiamo pensare a priori che i "saperi" siano quelli della "matematica costituita", progressivamente da più di 2000 anni, dalla comunità dei matematici e il desiderio, per l'insegnante, è quello di far sì che l'allievo si avvicini ad essa il più rapidamente possibile (come ha cercato di fare la matematica moderna).

La nostra lunga pratica di analisi delle risposte e delle descrizioni degli allievi ci ha mostrato il divario tra questi saperi del matematico, indipendenti dai vincoli materiali, e la conoscenza dell'allievo radicati nella sua attività quotidiana, nei suoi gesti, nei suoi spostamenti, nel suo ambiente.

Abbiamo capito, leggendo e rileggendo ciò che ci racconta l'allievo, quanto siano fragili i suoi saperi, quanti ostacoli debba superare per ricostruirli ad un livello superiore. La costruzione per piccoli passi (del behaviorismo) proposto da una visione logico-deduttiva dell'edificio della matematica non è più possibile perché il passo precedente non è ancora stabile e dovrà essere continuamente rafforzato. Ci siamo anche resi conto che i nostri saperi matematici sono ancora in costruzione, lo saranno sempre e si collocano – su una scala di padronanza, solidità, efficienza – leggermente al di sopra di quello dei nostri allievi, che si sia insegnanti di scuola elementare, media, scuola superiore, università. Siamo qui nel cuore dell'insegnamento della **M**atematica, di cui va mantenuta la "M".

L'allievo e l'insegnante sono i due personaggi del triangolo precedente. Ci siamo interessati molto al legame tra il lato del primo e i saperi matematici. È tempo di passare all'insegnante, al suo vertice che sembra lontanissimo dal lato precedente.

Dal suo vertice del triangolo, il nostro insegnante è in contatto diretto con i saperi matematici, i propri, che arricchisce costantemente mentre osserva quelli dei suoi allievi e, contemporaneamente, agisce sulla costruzione della conoscenza dell'allievo, senza però esserne l'iniziatore. Non è né il creatore né l'attore, ma il "regista".

Per svolgere questo delicato ruolo, l'insegnante deve conoscere o riconoscere i saperi matematici che l'attività proposta dall'enunciato di un problema svilupperà nei riguardi dell'allievo. Deve poi avere punti di riferimento provenienti da sperimentazioni precedenti con allievi diversi dai propri (per evitare di scegliere attività troppo "difficili", troppo "facili" o di cui non è possibile determinare l'interesse). Deve ancora sapere fino a che punto si può incoraggiare il dibattito tra gli allievi (senza puntare troppo in alto), poi che cosa "istituzionalizzare" e controllare.

E torniamo alla banca dei problemi e ai suoi risultati potenzialmente interessanti per il ruolo dell'insegnante nel futuro.

Negli ultimi anni i nostri gruppi di lavoro hanno iniziato a pensare ai "percorsi didattici" che possiamo immaginare a partire dai nostri problemi. Molti dei loro membri si impegnano in questo senso, come testimoniano i numerosi articoli della Gazzetta de Transalpino.

A breve verrà lanciato il progetto per continuare la nostra **R**icerca in didattica della **M**atematica a partire dalla Banca di problemi del RMT che diventerà uno spazio di lavoro cooperativo destinato agli insegnanti e di cui saranno gli animatori responsabili. Il suo obiettivo è trarre profitto dai problemi che abbiamo sperimentato durante 30 anni per integrarli in un programma di classe.

L'avvenire ci dirà se, per conservare la "T", alcuni insegnanti del **T**ransalpino accetteranno di partecipare a questo progetto.

PRESENTAZIONE DEL NUMERO

Questo numero 15 de La Gazzetta di Transalpino presenta dapprima gli articoli relativi alle due conferenze plenarie, rispettivamente di apertura e di chiusura dell'ultimo convegno internazionale dell'ARMT, seguiti da un articolo incentrato su aspetti storici e didattici della "spirale" che ha stimolato anche la proposta di alcuni problemi RMT. Sono poi dedicati alla terza finale internazionale due articoli, uno incentrato sui sei problemi proposti e il loro uso in classe e l'altro sulle attività svolte dalle bambine e i bambini delle nove classi presenti. Non mancano alcuni articoli di Gruppi di lavoro, uno di geometria piana, uno sulla numerazione e uno sulle funzioni. In chiusura figura un documento per immagini dei nostri due ultimi convegni.
Questo numero 15 è l'ultimo della Gazzetta di Transalpino, ma sul sito rinnovato e di prossima consultazione della Banca di problemi figureranno tutti i 16 numeri che, dal 2010, hanno presentato le conferenze dei nostri incontri internazionali, i ricchi e condivisi lavori dei nostri Gruppi tematici, altri articoli puntuali su analisi a posteriori e sperimentazioni in classe e i poster illustrati durante i nostri incontri.

- **Michel Henry,** nel suo articolo dal titolo **Problemi anche per la formazione degli insegnanti**, si propone di discutere il ruolo costruttivo dei problemi RMT e il loro contributo alla formazione degli insegnanti. Gli ambiti della matematica elementare impliciti nelle conoscenze utilizzate per risolvere i problemi RMT sono molto varie: logica, numerazione, aritmetica, conteggio, proporzionalità, operazioni semplici, geometria piana e dello spazio, pre-algebra, successioni e funzioni. La formulazione dei problemi deve essere ben scelta da un punto di vista culturale, in modo che la domanda posta e il tipo di risposta attesa siano chiaramente compresi da tutti gli alunni.

- **François Jaquet** presenta l'articolo il cui titolo **Gli apporti del RMT.** la frase introduttiva "Non possiamo perdere gli apporti di 31 anni di attività" è già molto esplicativa. Tali apporti vengono esemplificati tramite una ricca analisi di tre problemi dal punto di vista personale dell'autore dopo 31 anni di impegno nell'impresa RMT, nel tentativo di mettersi "nella pelle" dell'insegnante che è stato nel corso di tanti anni, molto tempo fa.

- **Affascinante, ricca di storia e di saperi matematici, eppur a scuola "dimenticata",** è il titolo dell'articolo nel quale **Lucia Grugnetti** propone una rilettura personale della storia di una curva suggestiva, la spirale, che diventa tante spirali diverse e che incontra sul suo lungo e ricco cammino, fra gli altri "oggetti matematici", le successioni, a partire dalla famosa successione di Fibonacci. Gli aspetti storici, peraltro, si coniugano bene con diversi aspetti didattici, nell'articolo esemplificati, che dalla storia possono prendere spunto e svilupparsi.

- **I problemi della finale internazionale dell'ARMT 2024** è il titolo dell'articolo di **François Jaquet** nel quale sono presentati i sei problemi della finale che possono diventare sei attività da sviluppare in classe. In merito a uno dei sei problemi, in allegato figura l'attività proposta da Brunella Brogi nella sua classe di scuola secondaria di primo grado.

- **Lucia Grugnetti e Rita Spatoloni** presentano l'articolo dal titolo **La finale internazionale tra una torre e non solo** dove figurano disegni dei bambini e immagini salienti della festa in onore delle nove classi partecipanti.

Études / Approfondimenti

- **Clara Bisso e Lucia Grugnetti, con il Gruppo Geometria piana** presentano una sintesi dell'attività svolta a 2005, quando furono istituiti i Gruppi di lavoro dell'ARMT.
- **Annie Henry, Michel Henry, Mathias Front, Angela Rizza e il Gruppo Funzioni e successioni**, presentano un'analisi relativi agli aspetti didattici del problema *Olimpiadi di calcolo* (I), per il quale gli studenti possono lavorare utilizzando tre diverse procedure, come descritto nell'analisi a priori.
- **Carla Crociani e Rita Spatoloni, con il Gruppo Numerazione** presentano la storia del Gruppo a partire dal 2005

Et pour terminer / E per finire

- **Lucia Grugnetti e Rita Spatoloni** presentano un documento dal titolo **I nostri due ultimi convegni per immagini.**

PRÉSENTATION DU NUMÉRO

Ce numéro 15 de La Gazette di Transalpie, présente d'abord les articles relatifs aux deux conférences plénières, respectivement d'ouverture et de clôture, de la dernière rencontre internationale de l'ARMT, suivis d'un article axé sur les aspects historiques et didactiques de la « spirale » qui a également stimulé la proposition de quelques problèmes du RMT. Deux articles sont ensuite consacrés à la troisième finale internationale, l'un axé sur les six problèmes proposés et leurs utilisation en classe et l'autre sur les activités réalisées par les filles et garçons des neuf classes présentes. Les articles des groupes de travail ne manquent pas, un sur la géométrie plane, un sur la numérotation et un sur les fonctions. À la fin, il y a un document image de nos deux dernières conférences.
Ce numéro 15 est le dernier de la Gazette de Transalpie, qu'on trouvera bientôt sur le site renouvelé de la Banque des Problèmes où apparaîtront les 16 numéros qui, depuis 2010, ont présenté les conférences de nos rencontres internationales, les travaux de nos Groupes thématiques, d'autres articles spécifiques sur les analyses a posteriori et les expérimentations en classe et les posters illustrés lors de nos rencontres.

- **Michel Henry**, dans son article **Des problèmes aussi pour la formation des enseignants** aborde le rôle constructif des problèmes du RMT et leur contribution à la formation des enseignants. Les domaines des mathématiques élémentaires comme cadres implicites des connaissances intervenant dans la résolution des problèmes du RMT, sont d'une grande variété : logique, numération, arithmétique, dénombrements, proportionnalité, opérations simples, géométrie plane et de l'espace, pré-algèbre, suites et fonctions. Les habillages des énoncés de problèmes doivent être bien choisis du point de vue culturel pour que la question posée et le type de la réponse attendue soit bien compris par tous les enfants.

- **François Jaquet** propose un article dont le titre est **Les apports du RMT.** La phrase introductive « On ne peut pas perdre les apports de 31 ans d'activités » est déjà très explicative. Ces apports sont illustrées par une riche analyse de trois problèmes, du point de vue personnel de l'auteur après 31 ans d'engagement dans l'entreprise RMT, dans une tentative de se mettre « dans la peau » de l'enseignant qu'il a été de nombreuses années, il y a très longtemps.

- **Affascinante, ricca di storia e di saperi matematici, eppur a scuola "dimenticata" - (Fascinant, riche en histoire et en connaissances mathématiques, pourtant « oubliée » á l'école)**, est le titre de l'article dans lequel **Lucia Grugnetti** propose une relecture personnelle de l'histoire d'une courbe suggestive, la spirale, qui devient de multiples spirales différentes et qui rencontre sur son long et riche chemin, entre autres "objets mathématiques", les successions, à partir de la célèbre séquence de Fibonacci. En outre, les aspects historiques se combinent bien avec divers aspects didactiques, illustrés dans l'article, qui peuvent s'inspirer et se développer à partir de l'histoire.

- **Les problèmes de la finale internationale de l'ARMT 2024** est le titre de l'article de **François Jaquet** dans lequel sont présentés les six problèmes de la finale qui peuvent conduire à des activités en classe. Concernant l'un de ces problèmes, Brunella Brogi rend compte d'une activité conduite dans sa classe de collège.

- **Lucia Grugnetti e Rita Spatoloni** ont choisi des dessins des filles et garçons des neuf classes de la finale internationale et certaines de leurs activités en images.

Études / Approfondimenti

- **Clara Bisso e Lucia Grugnetti,** avec **le Groupe Géométrie plane** présentent une synthèse de l'activité menée depuis 2005, date de création des groupes de travail de l'ARMT.
- **Annie Henry, Michel Henry, Mathias Front, Angela Rizza** et le **Groupe fonctions et suites**, présentent des réflexion didactique sur le problème 31.I.10 *Olympiade de calcul* (I), que les élèves peuvent traiter selon trois procédures différentes comme le décrit l'analyse a priori.
- **Carla Crociani e Rita Spatoloni,** avec **le Groupe Numération** présentent l'histoire du Groupe à partir de l'année 2005.

Et pour terminer / E per finire

- **Lucia Grugnetti et Rita Spatoloni** ont préparé un document sur **Nos deux dernières rencontres en image.**

DES PROBLÈMES AUSSI POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS[1]

Michel Henry

Dans cet exposé, je souhaite aborder le rôle constructif des problèmes du RMT et leur contribution à la formation des enseignants. Les domaines des mathématiques élémentaires comme cadres implicites des connaissances intervenant dans la résolution des problèmes du RMT, sont d'une grande variété : logique, numération, arithmétique, dénombrements, proportionnalité, opérations simples, géométrie plane et de l'espace, pré-algèbre, suites et fonctions. Les habillages des énoncés de problèmes doivent être bien choisis du point de vue culturel pour que la question posée et le type de la réponse attendue soit bien compris par tous les enfants. Le respect de cette contrainte est un premier enjeu pour les enseignants appelés à proposer des problèmes et à préciser les procédures et démarches qu'ils en attendent de la part des élèves. La recherche de problèmes pour construire une épreuve du RMT agit comme un véritable moteur pour la formation pédagogique et didactique des enseignant de mathématiques dans les écoles et les collèges, elle contribue donc à leur formation.

En proposant des problèmes pour une épreuve du RMT, on ne peut éviter de se poser ces questions :
- Pourquoi donner aux élèves des problèmes à résoudre ?
- Qu'est-ce qu'un problème en mathématiques ?
- Et qu'est-ce qu'un bon problème pour le RMT ?

Mais un souci récurrent des enseignants est de rester dans le cadre des instructions officielles qu'ils reçoivent de leurs hiérarchies respectives. La référence en France est le site Eduscol qui, sous le titre *La résolution de problèmes mathématiques au collège*, indique : « *Les activités de résolution de problèmes offrent la possibilité de mobiliser et de bénéficier des quatre piliers de l'apprentissage que sont : l'attention, l'engagement actif, le retour sur l'erreur, la consolidation* ».

Jean Brun, spécialiste en psychologie génétique à Genève écrivait :

« *Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation, où la situation n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est-à-dire qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple »*.

Cette citation rappelle que l'enseignant est le seul à connaître suffisamment ses élèves pour pouvoir choisir le problème qu'il convient de leur proposer. Il n'y a pas de recettes, d'une classe à l'autre, d'une année à l'autre, d'un groupe d'élèves à l'autre, la recherche du problème qui convient est sans cesse renouvelée.

Notre amie du RMT, Catherine Houdement, enseignante-chercheuse en didactique des mathématiques à l'université de Rouen a proposé une courte classification des problèmes en
- Problèmes élémentaires : *L'élève induit directement à partir de l'énoncé l'opération en s'appuyant sur sa mémoire de problèmes (selon Jean Julo) et en effectuant des contrôles-vérifications ;*
- Problèmes complexes : *agrégat de problèmes élémentaires qui nécessite une qualification des résultats intermédiaires*
- Problèmes atypiques : *pour lesquels il faut inventer une nouvelle stratégie.*

L'expérience nous a montré que les problèmes « réussis » du RMT sont les problèmes :
- plaisants et originaux ;
- qui développent des compétences ;
- qui permettent d'utiliser des connaissances ;
- qui permettent de repérer des obstacles.

Ainsi, un bon énoncé d'un problème du RMT suppose de bien travailler :
- le récit ou le contexte ;
- le langage utilisé ;
- les illustrations et les exemples ;
- la formulation des questions ;
- les demandes d'explications.

Pour illustrer ces propos liminaires, je souhaite présenter deux problèmes atypiques :

---

[1] Conférence présentée à Sinalunga le 4 octobre 2024, 27e rencontre internationale de l'ARMT.

- Les pots de bonbons, RMT 14.I en 2006, cat. 5, 6, 7, 8, 9, 10 (analyse *a posteriori* par François Jaquet et Michel Henry, dans la Gazette de Transalpie n° 2, pp. 47-70).
- Les grilles, du RMT 25.I.6, 2017, cat. 4, 5, 6 (analyse *a posteriori* par Angela Rizza et Michel Henry dans la Gazette de Transalpie n° 9, pp. 125-140).

LES POTS DE BONBONS (cat 5 à 10)

Dans un premier pot, Grand-mère met 6 bonbons à l'orange et 10 au citron.
Dans un deuxième pot, elle met 8 bonbons à l'orange et 14 au citron. Les bonbons sont de même forme et enveloppés de la même façon.
Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit :

Tu peux prendre un bonbon. Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur.

Julien réfléchit bien et choisit enfin le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange.
À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ?
Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.

Ce problème, où les élèves doivent faire un choix de nature probabiliste, permet de découvrir différentes stratégies de résolution dans un contexte de choix au hasard. Il a été proposé à près de 1 200 classes de 6 pays différents pour les catégories 5 à 9.
Les stratégies de résolution qui apparaissent à la lecture des copies se répartissent en cinq catégories parfaitement identifiables A, B, C, D_1 et D_2, révélatrices des représentations des élèves à propos de la probabilité en fonction de leurs âges.

Quelques exemples d'extraits de copies :
A. Comparaison des nombres de bonbons au citron, d'un pot à l'autre
- « Le pot n° 2 a beaucoup de bonbons au citron. Le pot n° 1 a moins de bonbons au citron. Il y a plus de chance d'en prendre un à l'orange dans le pot n° 1, » (Cat. 6)
- « À la place de Julien je choisirais le pot I car il y a moins de bonbons au citron car il n'aime pas. » (Cat. 8)

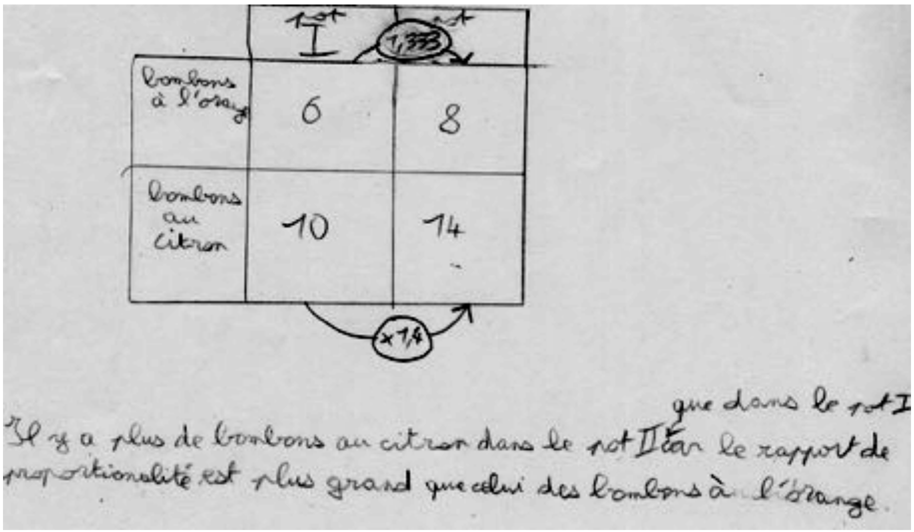
B. Comparaisons des différences internes d'un pot à l'autre
- « Nous avons choisi le n° 1 car il n'y a que 4 bonbons à l'orange de moins qu'au citron tandis que dans le n°2 il y a 6 bonbons de moins, donc il y a plus de chances. » (Cat. 6).
- « À la place de Julien, j'aurais choisi le pot n° 1 car l'écart des bonbons au citron et à l'orange est de 4 et l'autre pot est de 6 donc il y a moins de risque de prendre un bonbon au citron. » (Cat. 8).

C. Comparaison des variations d'un pot à l'autre
- « Nous avons choisi le pot I car : dans le pot II il y a que 2 bonbons de plus à l'orange mais 4 de plus au citron. » (Cat 6).
- « Il faut prendre le premier pot car 6 + 2 = 8 et que 10 + 4 = 14, comme 2 < 4 donc on rajoute plus de citron que d'orange. » (Cat. 6).

Il faudrait interroger les élèves de vive voix pour savoir s'ils ont été conscients d'une variation des rapports entre les nombres de bonbons de chaque sorte, d'un pot à l'autre et percevoir l'existence éventuelle d'une intuition pré-probabiliste.

D. Fractions ou rapports : deux procédures
D.1 Comparaison des rapports entre les nombres de bonbons à l'orange sur ceux au citron (6/10 et 8/14) ou sur le nombre total des bonbons dans le même pot 6/16 et 8/22 pour ceux qui sont à l'orange ; 10/16 et 14/22 pour ceux au citron).
- « Dans le premier pot il y a 60 % de chance qu'il y ait un bonbon à l'orange car 6 orange/10 citron alors que dans le deuxième il n'y aura que : 8 x 100/14 ≈ 57,142 857 %.
Julien prendra le 1er pot. » (Cat. 8).

D.2 Comparaison des rapports entre les nombres de bonbons de chaque sorte d'un pot à l'autre.



Aux niveaux 6, 7, 8, aucune copie ne choisit le pot I, sous prétexte qu'il y a 8 « chances » dans le pot II de prendre un bonbon à l'orange au lieu de 6 dans le pot I. Position généralement défendue par les plus jeunes enfants qui assimilent « chances » au « nombre de possibilités » de gagner.

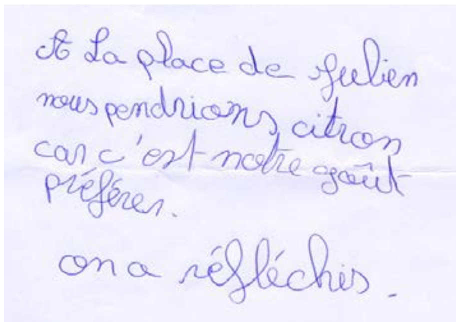
La différence des deux nombres :

- « Dans le pot 1, il y a 4 bonbons au citron de plus que de bonbons à l'orange. Dans le pot II, il y a 6 bonbons au citron de plus que de bonbons à l'orange. Donc nous choisissons le pot I. ... car il y a moins de bonbons au citron en plus dans le pot I. » (Cat. 7)
- « ... Il faut prendre le pot n° 1 car il y a moins de différence entre les bonbons à l'orange et au citron. » (Cat. 6)

Le rapport des deux nombres

- « Dans le pot I, il y a 6/10 bonbons. Dans le pot II, il y a 8/14 bonbons.
  6/10 = 42/70 <—— bonbons à l'orange
  8/14 = 40/70 <—— bonbons à l'orange
  « 42 > 40. Donc j'aurais choisi le pot I car quand on met au même dénominateur 6/10 et 8/14 le nombre de bonbons à l'orange dans le pot I est de 42 et dans le pot II de 40. » (Cat. 8)

L'analyse de ces copies montre une certaine progression cognitive :
- 1. Aspect affectif aucune référence numérique :
- 2. Un seul nombre pris en compte : le plus grand,
  8, pour ceux qui aiment ce goût (8 « chances »),
  14, pour ceux qui n'aiment pas (risque).
- 3. La différence des deux nombres.
- 4. Le rapport de deux nombres.



Ce problème nous amène à poser cette question de nature didactique :

Peut-on proposer une approche de la notion de probabilité dans l'enseignement des mathématiques, et à quel âge ?

Ce domaine des mathématiques suscite beaucoup de résistances. Il a été totalement absent des programmes des collèges français, jusqu'à l'introduction en 2008-2009 de quelques notions élémentaires en classe de troisième (14-15 ans, niveau 9).

Nos jeunes élèves ont pourtant des intuitions à propos des probabilités. Dans leur langage, ils utilisent couramment des expressions comme « *j'ai plus de chances de ... que de ...* ».

Ils ont aussi des certitudes et des stratégies dans des situations où le hasard intervient.
L'étude *a posteriori* montre qu'il faut attendre l'âge de 14 à 15 ans pour voir apparaître le concept adéquat, reposant sur un rapport (la probabilité) alors que, précédemment, les procédures de choix reposent majoritairement sur les écarts entre les grandeurs en jeu.
Les problèmes de proportionnalité font apparaître le même conflit, au même âge, entre les procédures additives (écarts) et multiplicatives (rapport).
Nos résultats montrent que le passage d'une structure à l'autre dépend de l'âge des élèves et nous conduit à l'interpréter en termes de saut épistémologique.
Dans cette analyse, on observe un grand nombre de comportements très variés. Seule l'acquisition du concept de probabilité pourra clarifier les idées et produire des réponses argumentées correctement.

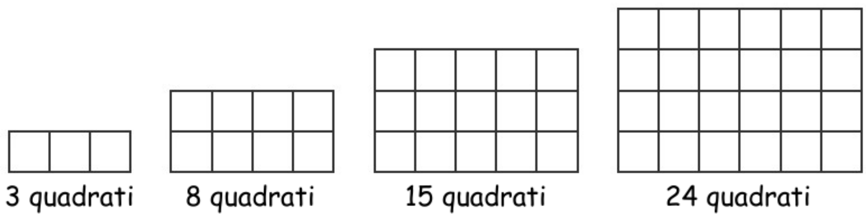
Ce problème des Pots de bonbons s'est révélé très difficile globalement et nous a incités à approfondir l'analyse *a posteriori* pour chercher à déterminer la nature des obstacles à sa résolution. On constate qu'une très faible minorité d'élèves de catégorie 5 et 6 (12 % et 6 %) arrivent à résoudre le problème, qu'une moitié y parvient en catégorie 8 (52 %) et qu'il faut attendre la catégorie 9 (72 %) pour obtenir une majorité de réussites.

Ce problème et son analyse constituent une belle ressource pour la formation des enseignants de mathématiques.
La relation entre le niveau des classes (âge) et l'utilisation d'un rapport pour interpréter une notion intuitive de probabilité est flagrante dans ce contexte des pots de bonbons, inspiré d'un modèle d'urne. Ce modèle par sa simplicité, est le plus propice à l'introduction de la notion de probabilité qui peut fonctionner implicitement dans des situations de comparaison.
Nous sommes partis d'une interrogation : « *peut-on proposer une approche de la notion de probabilité dans l'enseignement des mathématiques, et à quel âge ?* »
Nous avons pu constater que ce passage des procédures additives aux procédures multiplicatives (au sens de Gérard Vergnaud) se fait très précisément au même âge pour un problème de proportionnalité (*Les confitures*) sur des nombres entiers du même ordre de grandeur.
Nous avons été surpris de la simultanéité de la maîtrise du concept de rapport dans le contexte probabiliste (le nombre des cas favorables sur le nombre des cas possibles) et dans celui de la proportionnalité.
Nous savions encore que, selon Piaget (*La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, 1951), ce n'est pas avant le stade des opérations formelles que l'élève peut envisager des raisonnements probabilistes, qui requièrent les opérations combinatoires et les proportions.
Pour revenir à notre interrogation sur l'âge auquel on pourrait envisager d'aborder la notion de probabilité, nous avons donc une limite d'âge clairement déterminée par nos résultats, nos analyses du concept de rapport et par les recherches en psychologie génétique.
Les pots de bonbons et les autres problèmes de cette famille ont une caractéristique que nous n'avons pas encore prise en compte dans cette présentation : ils permettent à tous les groupes d'élèves de s'approprier la situation, d'en percevoir les enjeux, de faire intervenir des relations entre les nombres donnés pour expliquer leur stratégie.
Un indice incontestable : nous n'avons pas trouvé de « feuille blanche » parmi les copies examinées.

LES GRILLES (cat 4, 5, 6)

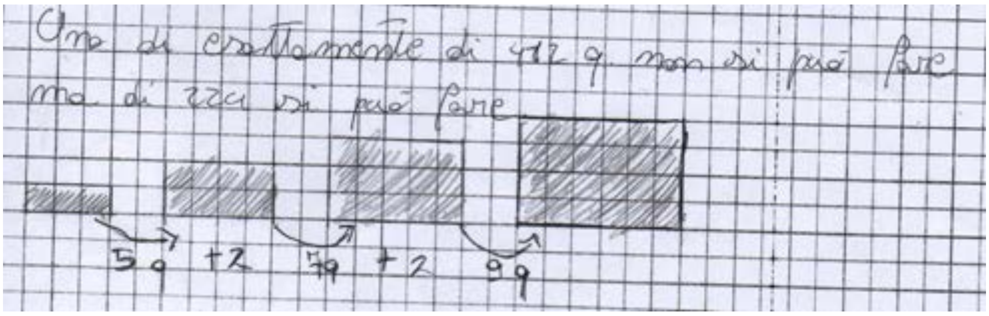
Ce problème est une introduction à la notion de suite de nombres entiers à partir de l'étude d'une suite de grilles donnée par quatre premiers dessins.

Asmine dessine une suite de grilles selon cette règle : pour chaque nouvelle grille il ajoute une rangée et une colonne de carrés à la grille précédente.
Voici les quatre grilles qu'il a déjà dessinées :



En continuant à construire des grilles en respectant la même règle, pourra-t-il construire une grille avec exactement 112 carrés ? Et une grille avec exactement 224 ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

L'analyse des copies a montré l'évolution de l’argumentation que les élèves présentent dans leurs explications, en fonction de leur niveau scolaire.
Une suite de dessins successifs :

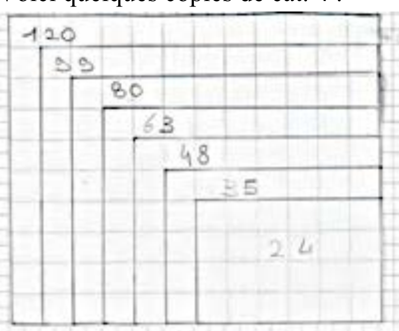


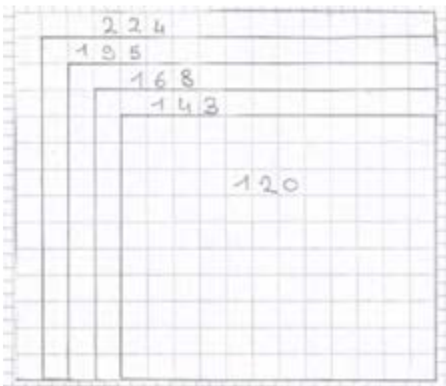
Celle des 112 q ne peut pas être réalisée, mais de 224 peut l'être
Ou des grilles incluses l'une dans l'autre :

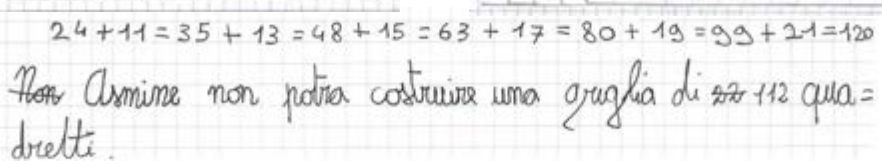
En continuant à construire la grille avec la même règle on voit qu’il n’est pas possible de la faire avec 112 carrés, mais c’est possible de la faire avec 224

Cette représentation (cat. 6) est plus efficace et économique en termes de place, en outre le risque d’erreur est moindre.

Voici quelques copies de cat. 4 :







Asmine ne pourra pas construire une grille de ~~22~~ 112 petits carrés

Quelques élèves réussissent à découvrir une régularité et à faire un commentaire pertinent.
Cette copie présente des calculs et une verbalisation très simple du raisonnement :

4X6=24 ABBIAMO LETTO IL PROBLEMA E
5X7=35 ABBIAMO CAPITO CHE DOVEVAMO AGGIUNGERE
6X8=48 UNA COLONNA E UNA RIGA, AL POSTO
7X9=63 DI CONTINUARE A FARE IL DISEGNO
8X10=80 ABBIAMO FATTO LE OPERAZIONI: 4X6=24
9X11=99 CHE ERA L'ULTIMA GRIGLIA CHE HA FATTO ASMINE,
10X12 120 5X7=35, 6X8=48, 7X9=63, 8X10=80, 9X11=
11X13=143 99, 10X12=120 E ARRIVANDO A QUESTO
12X14=168 NUMERO ABBIAMO CAPITO CHE ASMINE,
13X15=195 NON POTEVA FARE UNA GRIGLIA CON
14X16=224 PRECISI 112 QUADRETTI E ABBIAMO GIÀ
RISPOSTO ALLA PRIMA DOMANDA.
SIAMO ANDATI AVANTI FACENDO LE
OPERAZIONI: 11X13=143, 12X14=168,
13X15=195 E 14X16=224 E INFATTI
ARRIVANDO A QUESTO NUMERO
RISPOSTO ALLA SECONDA DOMANDA.
IN CONCLUSIONE SIAMO RIUSCITI A RISPONDERE A TUTTE
DUE LE DOMANDE: ASMIN NON PUÒ COSTRUIRE
UNA GRIGLIA DA 112 QUADRETTI MA PUÒ COSTRUIRNE
UNA DA 224.

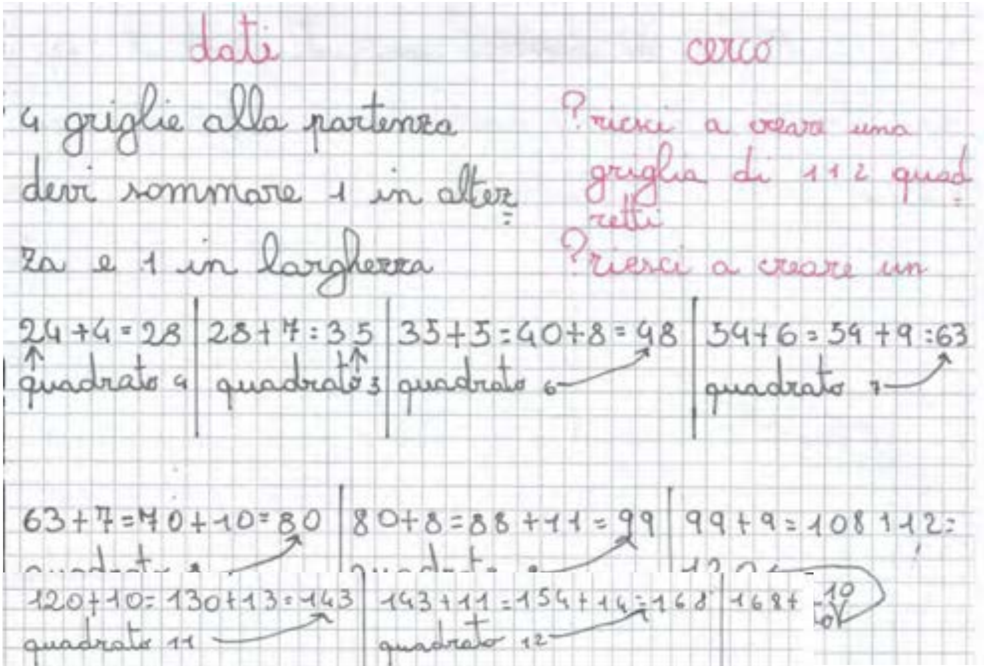
Nous avons lu le problème et nous avons compris qu'il fallait ajouter une colonne et une ligne ; au lieu de continuer à dessiner, nous avons fait les opérations suivantes : 4×6=24 qui était la dernière grille faite par Asmine, 5×7=35, 6×8=48, 7×9=63, 8×10=80, 9×11=99, 10×12=120 et en arrivant à ce nombre nous avons compris qu'Asmine ne pouvait pas faire une grille avec 112 carrés et nous avons déjà répondu à la première question.
Nous avons continué en faisant les opérations : 11×13=143, 12×14=168, 13×15=195 et 14×16=224 et en fait en arrivant à ce nombre nous avons réalisé qu'Asmine peut dessiner une grille avec 224 carrés exactement et nous avons répondu à la deuxième question.
En conclusion, nous avons pu répondre aux deux questions : Asmine ne peut pas construire une grille de 112 carrés, mais il peut en construire une de 224.
Dans quelques cas, on trouve des explications verbales. Cette copie présente un raisonnement correct mais inachevé.

ABBIAMO OSSERVATO LE 4 GRIGLIE E ABBIAMO
NOTATO CHE AGGIUNGENDO I QUADRATI IL
NUMERO AUMENTAVA SEMPRE DI 2.
ABBIAMO SOMMATO 24 A 11 E CONTINUANDO
SOMMAVAMO IL RISULTATO (1° ADDENDO) AL
2° ADDENDO CHE AUMENTAVA SEMPRE DI 2.
112 NON L'ABBIAMO TROVATO, MA ABBIAMO TRO=
VATO 224.

Nous avons regardé les 4 grilles et remarqué qu'en ajoutant les carrés, le nombre [de carrés ajoutés] augmentait toujours de 2.
Nous avons ajouté 24 à 11 et continué à ajouter le résultat (1er terme) au 2^{e} terme qui augmentait toujours de 2.
Nous n'avons pas trouvé 112, mais nous avons trouvé 224.
Interprétation : 3 (+5) 8 (+7) 15 (+9) 24 (+11) … 99 (+21) 120 (+23) … 195 (+29) 224

Quelques copies de cat. 5 :

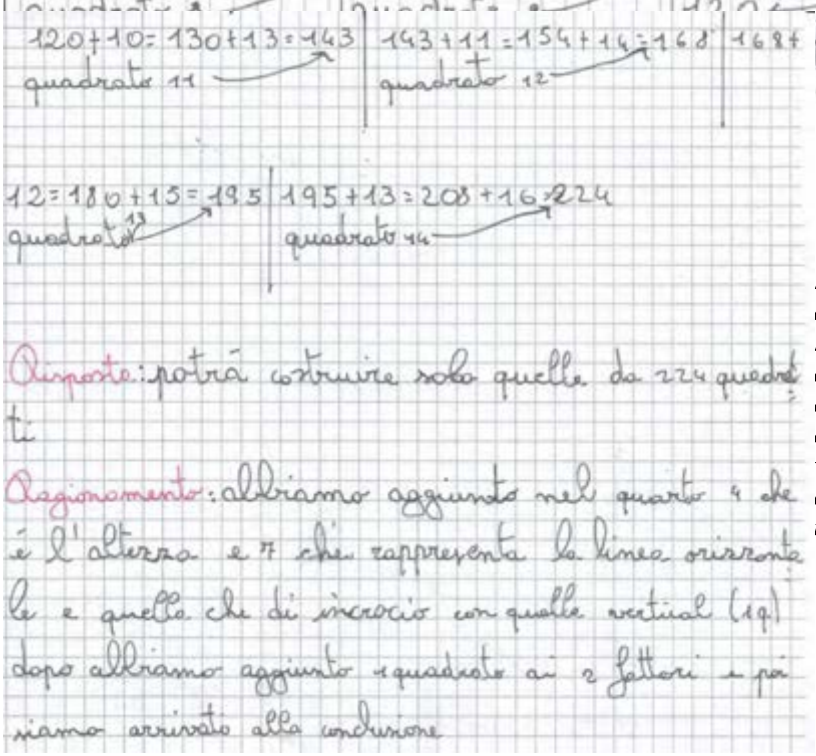
Dans cette catégorie, les explications verbales apparaissent plus détaillées, souvent accolées aux dessins des grilles, avec une coordination plus précise entre les deux représentations. Au moins deux types d'explications commencent à se présenter : description avec graphique et explication procédurale avec les calculs.



Données

À partir de 4 grilles On doit ajouter 1 en hauteur et 1 en largeur.

? réussir à créer une grille de 112 carrés

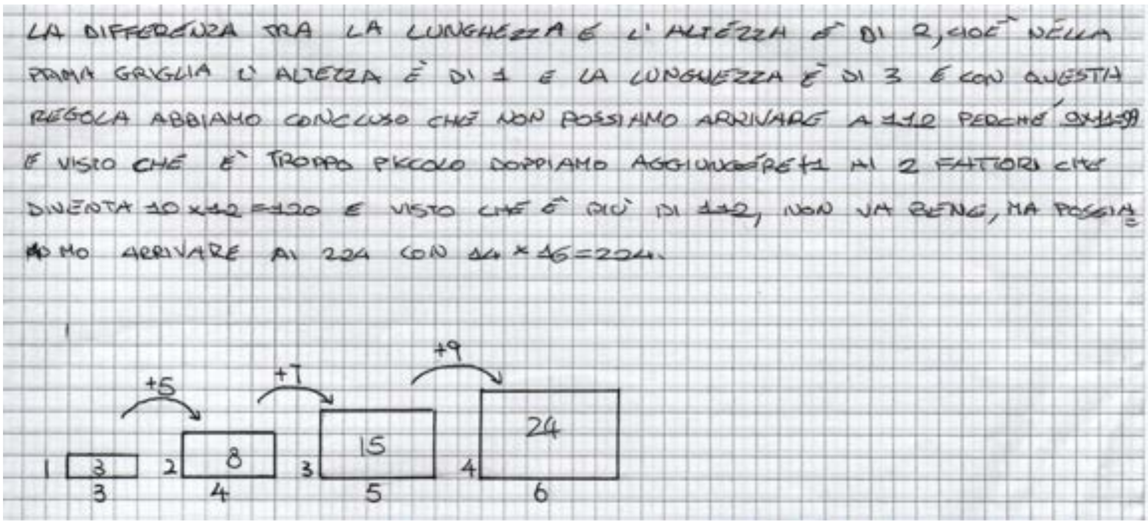


Réponse : on ne pourra construire que celle à 224 carrés.
Raisonnement : nous avons ajouté dans le quatrième 4 qui est la hauteur et 7 qui représente la ligne d'horizon et ceux qui se croisent avec les verticaux (1 q) ensuite nous avons ajouté 1 carré aux 2 facteurs et puis nous sommes arrivés à la conclusion.

Quelques copies de cat. 6 :

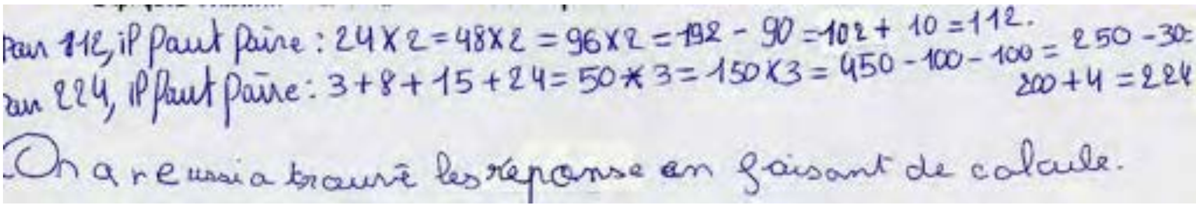
Des élèves commencent à avoir une vision fonctionnelle du problème, ils reconnaissent la variabilité des dimensions des grilles.

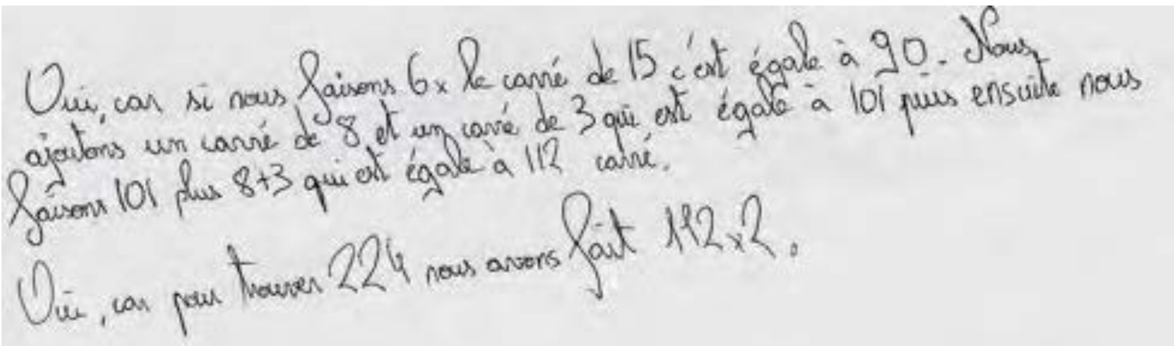
Cette copie met bien en évidence la suite des nombres de carrés ajoutés d'une grille à l'autre : +5, +7, +9, … cette suite de nombres impairs donne la clé pour obtenir la suite des aires des grilles.


LA DIFFERENZA TRA LA LUNGHEZZA E L'ALTEZZA È DI 2, CIOÈ NELLA PRIMA GRIGLIA L'ALTEZZA È DI 1 E LA LUNGHEZZA È DI 3 E CON QUESTA REGOLA ABBIAMO CONCLUSO CHE NON POSSIAMO ARRIVARE A 112 PERCHÉ 9×11=99 E VISTO CHE È TROPPO PICCOLO DOPPIAMO AGGIUNGERE +1 AI 2 FATTORI CHE DIVENTA 10×12=120 E VISTO CHE È PIÙ DI 112, NON VA BENE, MA POSSIAMO ARRIVARE AI 224 CON 14×16=224.

La différence entre la longueur et la hauteur est de 2, et dans la première grille la hauteur est de 1 et la longueur est de 3 et avec cette règle nous avons conclu qu'il n'est pas possible d'arriver à 112 car 9×11 = 99, on voit que c'est trop petit, il faudrait ajouter +1 aux 2 facteurs qui deviennent 10×12 = 120 et on voit que c'est plus que 112, ça ne va pas bien, mais c'est possible d'arriver à 224 avec 14×16 = 224.

Parfois les élèves tentent seulement d'obtenir les nombres 112 et 224 par une décomposition sans tenir compte de la règle de construction, comme en classe avec certains exercices.


Pour 112, il faut faire : 24×2=48×2=96×2=192 - 90 =102 + 10 =112.
Pour 224, il faut faire : 3+8+15+24=50*3=150×3=450-100-100=250-30=
200+4=224
On a reussi a trouvé les reponse en faisant de calcule.

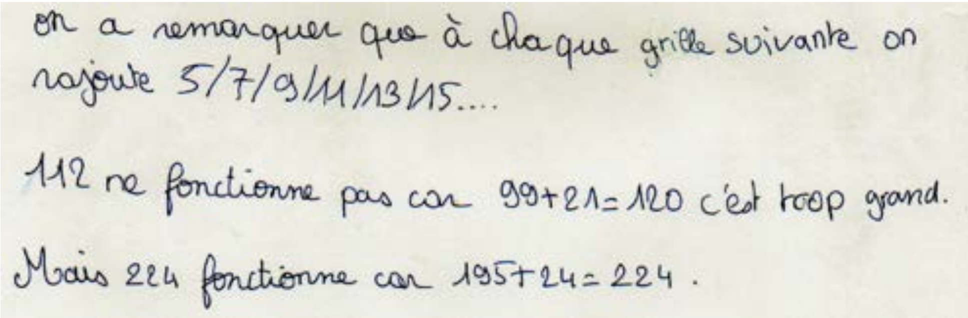

Oui, car si nous faisons 6× le carré de 15 c'est égale à 90. Nous ajoutons un carré de 8 et un carré de 3 qui est égale à 101 puis ensuite nous faisons 101 plus 8+3 qui est égale à 112 carré.
Oui, car pour trouver 224 nous avons fait 112×2.

La clé du problème consiste à trouver deux nombres entiers dont la différence est 2 et le produit 112 puis 224.

Cette copie l'a bien comprise :


1 Non elle ne pourrat pas faire le nombreu 112 car 11×9=99 et 12×10=120.
2 Oui elle pourrat faire le nombreu 224 car 16×14=224.

Puis on trouve une bonne solution au problème :


on a remarquer que à chaque grille suivante on rajoute 5/7/9/11/13/15....

112 ne fonctionne pas car 99+21=120 c'est troop grand.

Mais 224 fonctionne car 195+24=224 .

Deux types de procédures apparaissent dans les copies :

- une procédure graphique qui présente une succession de grilles jusqu'à celle qui contient 224 carrés, dans deux présentations possibles : soit des grilles séparées, soit des grilles incluses les unes dans les autres ;
- une description du passage d'une grille à la suivante présentant une suite numérique de dénombrement des nombres de carreaux comptés soit en largeur, soit en longueur, soit en aire.

Pour conclure :

Ce problème pourrait être considéré comme une introduction à la notion de fonction et de suite numérique, à condition que la recherche d'une formule pour exprimer le passage d'une grille à l'autre soit nécessaire pour pouvoir répondre à la question.
Ce n'est pas le cas comme on l'a vu avec les nombres 112 et 224, trop petits, qui peuvent être traités par une suite de dessins même schématiques ou par des grilles emboîtées. Cette variable didactique est donc essentielle et détermine l'objectif mathématique du problème.
Posons donc la question suivante : en continuant à construire des grilles en respectant la même règle, pourrait-on construire une grille avec exactement 1 224 carrés ?
Cette valeur rend impossible une solution par dessins. Il n'est guère possible non plus de donner la suite numérique des 34 aires des grilles successives en nombres de carrés.
La réponse suppose alors un bon niveau en algèbre, comme on peut le voir (solution experte) :
Si n est le rang de la grille cherchée, égal à la largeur de cette grille, on a : $A(n) = n\,(n + 2)$.
Pour des valeurs de n assez grandes, ce nombre est proche de n^2.
Si N est le nombre de carrés demandé, la recherche d'un produit possible peut se faire par essais à partir de l'entier précédant $\sqrt{N}$.
Dans l'exemple proposé, avec $1\,156 < N < 1\,225$, cela donne $34 < \sqrt{N} < 35$, d'où le produit $A(N) = 34 \times 36 = 1\,224$.

Dans l'enseignement secondaire, les notions de suite numérique ou de fonction sont le plus souvent introduites par des formules pour calculer les valeurs images u_n ou $f(x)$ associées aux valeurs n ou x de la variable. Cette remarque souligne l'importance d'un minimum de formation en didactique des mathématiques pour tous les enseignants afin de pouvoir évaluer et accepter sans jugement les véritables états des niveaux de construction des connaissances des élèves.
Pour les enseignants en formation, nous avons un bel exemple d'une recommandation de nature didactique : certains problèmes peuvent avoir pour objectif l'introduction d'un nouvel outil de résolution, à condition qu'il soit plus économique et efficace qu'une ancienne connaissance.

La banque de problèmes, toujours vivante, contient un très grand nombre de problèmes méritant de telles analyses *a posteriori.*
Et surtout, n'oubliez pas que nous voulons donner aux enfants le plaisir de la recherche et de la découverte !

Un immense merci à notre traductrice de toujours !

Michel Henry, le 4 octobre 2024

PROBLEMI ANCHE PER LA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI[1]

Michel Henry

In questa presentazione vorrei discutere il ruolo costruttivo dei problemi RMT e il loro contributo alla formazione degli insegnanti. Gli ambiti della matematica elementare impliciti nelle conoscenze utilizzate per risolvere i problemi RMT sono molto varie: logica, numerazione, aritmetica, conteggio, proporzionalità, operazioni semplici, geometria piana e dello spazio, pre-algebra, successioni e funzioni. La formulazione dei problemi deve essere ben scelta da un punto di vista culturale, in modo che la domanda posta e il tipo di risposta attesa siano chiaramente compresi da tutti gli alunni. Rispettare questo vincolo è la prima sfida per gli insegnanti che devono proporre problemi e specificare le procedure e gli approcci che si aspettano dagli alunni. La ricerca di problemi per la costruzione di una prova RMT funge da vero e proprio motore per la formazione pedagogica e didattica degli insegnanti di matematica nelle scuole di vario grado, contribuendo così alla loro formazione.

Quando si propongono problemi per una prova RMT, non possiamo evitare di porci queste domande:
- Perché proporre agli allievi problemi da risolvere?
- Che cos'è un problema in matematica?
- E che cos'è un buon problema per il RMT?

Una preoccupazione ricorrente degli insegnanti è però quella di rimanere nell'ambito delle istruzioni ufficiali che ricevono dalle rispettive istituzioni. Il riferimento in Francia è il sito web Eduscol che, alla voce *La résolution de problèmes mathématiques au collège*, afferma: "*Le attività di problem solving offrono l'opportunità di mobilitare e beneficiare dei quattro pilastri dell'apprendimento attenzione, coinvolgimento attivo, feedback sugli errori e consolidamento*".

Jean Brun, specialista in psicologia genetica a Ginevra, ha scritto:

> "*Esiste un problema solo in un rapporto soggetto/situazione, dove la situazione non è immediatamente disponibile, ma è possibile costruirla. Cioè, un problema per un certo soggetto può non essere un problema per un altro, in funzione del loro livello di sviluppo intellettuale, ad esempio".*

Questa citazione ricorda che l'insegnante è il solo in grado di conoscere sufficientemente i propri allievi al fine di poter scegliere il problema opportuno da proporre loro. Non ci sono ricette, da una classe all'altra, da un anno all'altro, da un gruppo di allievi all'altro, la ricerca del problema opportuno si rinnova costantemente.

La nostra amica del RMT, Catherine Houdement, insegnante-ricercatrice in didattica della matematica all'Università di Rouen, ha proposto una breve classificazione dei problemi in
- Problemi elementari: *l'allievo deduce direttamente dall'enunciato l'operazione appoggiandosi sulla memoria dei problemi (Jean Julo) ed effettuando controlli e verifiche,*
- Problemi complessi: gruppo di problemi elementari che richiedono *un ricorso a risultati intermedi,*
- Problemi atipici: *inventare una nuova strategia.*

L'esperienza ci insegna che i problemi «validi» del RMT sono i problemi:
- Piacevoli e originali,
- Che sviluppano competenze,
- Che permettono di utilizzare conoscenze,
- Che permettono di reperire ostacoli.

Un buon enunciato di un problema del RMT presuppone un buon lavoro su:
- la «storia» o il contesto
- il linguaggio utilizzato
- le illustrazioni e gli esempi

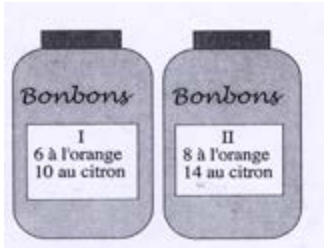
[1] Conferenza presentata a Sinalunga il 4 ottobre 2024, 27° incontro internazionale dell'ARMT.

- la formulazione delle domande
- le richieste di spiegazioni

Per illustrare queste osservazioni introduttive, vorrei presentare due problemi atipici:

- I barattoli di caramelle, RMT 14.I.10, 2006, cat. 5, 6, 7, 8, 9, 10 (analisi *a posteriori* a cura di François Jaquet e Michel Henry, in Gazzetta di Transalpino n° 2, pp. 47-70).
- Le griglie, RMT 25.I.6, 2017, cat. 4, 5, 6 (analisi *a posteriori* a cura di Angela Rizza e Michel Henry in Gazzetta di Transalpino n° 9, pp. 125-140).

I BARATTOLI DI CARAMELLE (cat 5 à 10)



Nonna Matilde mette in un barattolo 6 caramelle all'arancia e 10 al limone.
In un secondo barattolo mette 8 caramelle all'arancia e 14 al limone. Le caramelle hanno la stessa forma e sono incartate nello stesso modo.
La nonna sa che a Giulio non piacciono le caramelle al limone e quindi gli dice:

- *Puoi prendere una caramella. Ti lascio scegliere il barattolo nel quale puoi infilare la mano, senza guardare dentro.*

Giulio ci pensa un po' e sceglie infine il barattolo che, secondo lui, gli offre più possibilità di prendere una caramella all'arancia.
Al posto di Giulio quale barattolo scegliereste?
Spiegate il vostro ragionamento.

Questo problema, in cui gli allievi devono fare una scelta probabilistica, permette loro di scoprire diverse strategie per risolvere il problema in un contesto di scelta casuale.
Questo problema è stato proposto a 1200 classi di 6 paesi diversi, per le categorie da 5 a 9.
Le strategie risolutive che appaiono alla lettura di questi elaborati si possono ripartire in cinque categorie perfettamente identificabili A, B, C, D_1 e D_2, rivelatrici delle rappresentazioni degli allievi a proposito della probabilità in funzione delle loro età.

Alcuni esempi di estratti di elaborati:

A. Confronto dei numeri di caramelle al limone, da un barattolo all'altro
- "Il barattolo n° 2 ha molte caramelle al limone. Il barattolo n° 1 ha meno caramelle al limone. Ci sono maggiori possibilità di prenderne una all'arancia nel barattolo n° 1" (Cat. 6)
- "Al posto di Julien sceglierei il barattolo I perché ci sono meno caramelle al limone perché non gli piacciono" (Cat. 8)

B. Confronto delle differenze interne da un barattolo all'altro
- "Abbiamo scelto il n°1 perché ci sono solo 4 caramelle all'arancia in meno di quelle al limone mentre nel n°2 ci sono 6 caramelle in meno, dunque ci sono più possibilità." (Cat 6)
- "Al posto di Julien, avrei scelto il barattolo n°1 perché lo scarto delle caramelle al limone e all'arancia è di 4 e nell'altro barattolo è di 6 dunque c'è meno rischio di prendere una caramella al limone." (Cat. 8)

C. Confronto delle variazioni da un barattolo all'altro
- "Abbiamo scelto il barattolo I in quanto: nel barattolo II ci sono solo 2 caramelle in più all'arancia ma 4 in più al limone." (Cat. 6)
- "Bisogna prendere il primo barattolo perché 6+2=8 e 10+4=14, poiché 2 < 4 allora si aggiunge più limone che arancia." (Cat. 6)

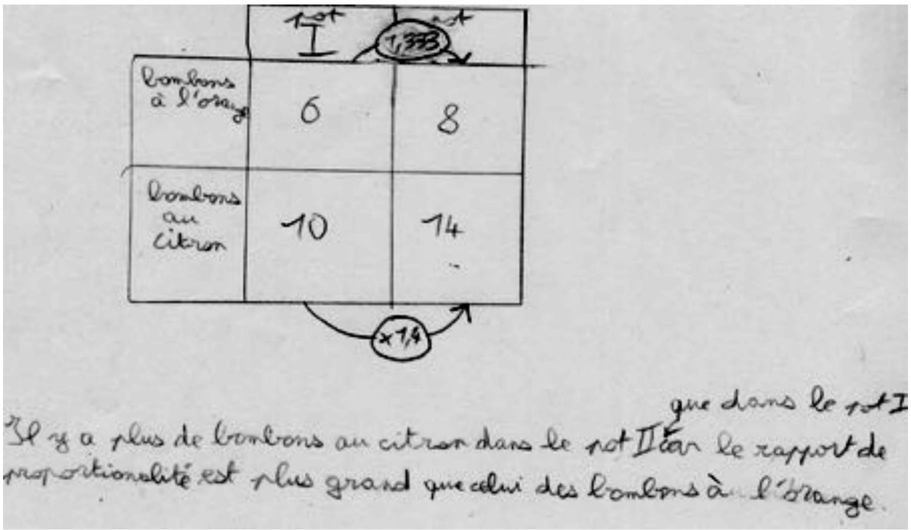
Bisognerebbe interrogare gli allievi per cercare di capire se fossero coscienti di una variazione di rapporti tra i numeri di caramelle di ciascun tipo, da un barattolo all'altro e percepire così l'esistenza eventuale di una intuizione pre-probabilistica.

D. Frazioni o rapporti: due procedure

D.1 rapporti tra i numeri di caramelle all'arancia e quelli al limone (6/10 e 8/14) o sul numero totale di caramelle nello stesso barattolo (6/16 e 8/22 per le caramelle all'arancia; 10/16 e 14/22 per le caramelle al limone) ...

- "Nel primo barattolo c'è il 60% di possibilità che ci sia una caramella all'arancia in quanto 6 arancia/10 limone mentre nel secondo ci sarà solo: 8x100/14 ≈ 57,142857%. Julien prenderà il 1° barattolo." (Cat. 8).

D.2 Confronto tra i rapporti tra il numero di caramelle di ogni tipo in ogni barattolo.



Nel barattolo II ci sono più caramelle al limone che nel barattolo I perché il rapporto di proporzionalità è maggiore di quello delle caramelle all'arancia

A livello 6, 7, 8, in nessun elaborato appare al scelta del barattolo I con l'idea che nel barattolo II ci sono 8 «possibilità» di prendere una caramella all'arancia al posto di 6 nel barattolo I. Posizione difesa generalmente dagli allievi più giovani che equiparano «possibilità» e numero di possibilità di vincere.

La differenza dei due numeri

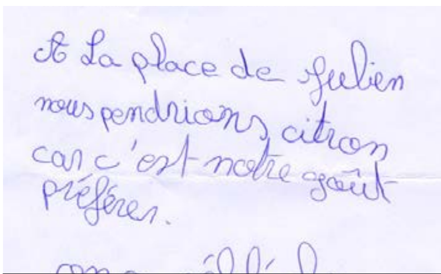
- "Nel barattolo 1, ci sono 4 caramelle al limone in più di quelle all'arancia. Nel barattolo II, ci sono 6 caramelle al limone in più di quelle all'arancia. Dunque noi scegliamo il barattolo I…perché ci sono meno caramelle al limone in più nel barattolo I." (Cat. 7).
- "… Bisogna prendere il barattolo n° 1 perché c'è una differenza più piccola tra le caramelle all'arancia e quelle al limone." (Cat, 6).

Il rapporto dei due numeri

- "Nel barattolo I ci sono 6/10 caramelle. Nel barattolo II, ci sono 8/14 caramelle.
  6/10 = 42/70 <—— caramelle all'arancia
  8/14 = 40/70 <—— caramelle all'arancia
  "42 > 40. Dunque avrei scelto il barattolo I perché quando si mettono con lo stesso denominatore 6/10 e 8/14 il numero di caramelle all'arancia nel barattolo I è 42 e nel barattolo II è 40." (Cat. 8).

L'analisi di queste copie mostra un certo grado di progresso cognitivo:

- 1. Aspetto affettivo nessun riferimento numerico.
- 2. Un solo numero considerato: il più grande,
  8 per coloro a quali piace quel gusto
  (8 possibilità),
  14 per coloro che non lo amano (rischio).
- 3. La differenza fra i due numeri.
- 4. Il rapporto dei due numeri.



Al posto di Giulio noi prenderemmo limone perché è il nostro gusto preferito. Abbiamo riflettuto

Questo problema ci porta a porre una domanda di natura didattica:

È possibile proporre un approccio alla nozione di probabilità nell'insegnamento della matematica e a quale età?

Questo tema suscita molte resistenze. È stato totalmente assente dai programmi dei «collèges» francesi fino all'introduzione nel 2008-2009 di qualche nozione elementare nel livello 9 (14-15 anni).
Peraltro, i nostri giovani allievi hanno delle intuizioni a proposito della probabilità.
Usano correntemente espressioni come "*ho più possibilità di... che di...*".
Hanno anche certezze e strategie nelle situazioni dove interviene il caso.
L'analisi *a posteriori* mostra che bisogna aspettare i 14-15 anni per veder apparire il concetto adeguato che riposa su un rapporto (la probabilità) mentre in stadi precedenti le procedure di scelta riposano maggioritariamente su scarti tra le grandezze in gioco.

I problemi di proporzionalità evidenziano il medesimo conflitto, alla stessa età, tra le procedure additive (scarti) e moltiplicative (rapporti).
I risultati mostrano che il passaggio da una struttura all'altra dipende dall'età degli allievi e ci conduce a interpretarlo in termini di salto epistemologico.
L'analisi evidenzia un gran numero di comportamenti molto variegati. Solo l'acquisizione del concetto di probabilità potrà chiarire le idee e produrre risposte argomentate correttamente.

Questo problema, *I barattoli di caramelle*, si è rivelato globalmente molto difficile e ci ha incitati ad approfondire l'analisi *a posteriori* per cercare di determinare la natura degli ostacoli alla sua risoluzione. Una piccola minoranza di allievi di categoria 5 e 6 (12% e 6%) riesce a risolvere il problema, circa la metà vi riesce in categoria 8 (52%) e bisogna aspettare la categoria 9 (72%) per ottenere una maggioranza di riuscite.
Questo problema e la sua analisi costituiscono una buona sorgente per la formazione degli insegnanti di matematica.

La relazione tra il livello delle classi (età) e l'uso di un rapporto per interpretare una nozione intuitiva di probabilità è evidente nel caso de I barattoli di caramelle, che si ispira ad un modello di urna. Questo modello, per la sua semplicità, è il più propizio all'introduzione della nozione di probabilità che può funzionare implicitamente nelle situazioni di confronto.
Siamo partiti da una domanda: "*È possibile proporre un approccio alla nozione di probabilità nell'insegnamento della matematica e a quale età?*"
Abbiamo potuto constatare che questo passaggio da procedure additive a procedure moltiplicative (secondo Gérard Vergnaud) avviene precisamente alla stessa età in cui avviene per ciò che riguarda la proporzionalità (*Le marmellate*) su numeri interi dello stesso ordine di grandezza.

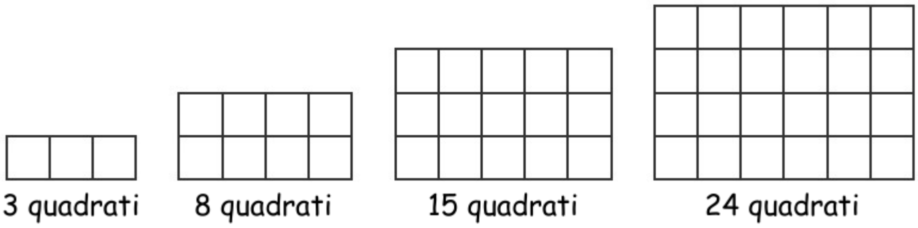
Siamo rimasti sorpresi della simultaneità della padronanza del concetto di rapporto nel contesto probabilistico (numero di casi favorevoli su numero di casi possibili) e in quello della proporzionalità.
Sapevamo, ben inteso, che secondo Piaget (*La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant,* 1951), prima dello stadio delle operazioni formali l'allievo non può accedere ai ragionamenti probabilistici che richiedono le operazioni della combinatoria e le proporzioni.
Per tornare al nostro interrogativo sull'età alla quale si può pensare di affrontare la nozione di probabilità, abbiamo dunque una soglia iniziale di età chiaramente determinata dai nostri risultati, le nostre analisi del concetto di rapporto e la ricerca in psicologia genetica.

I barattoli di caramelle e gli altri problemi di questa famiglia hanno una caratteristica di cui non abbiamo ancora tenuto conto: essi permettono a tutti i gruppi di allievi di appropriarsi della situazione, di percepirne le sfide, di fare intervenire relazioni tra i numeri dati per spiegare le loro strategie.
Un indice incontestabile: non abbiamo trovato "fogli bianchi" tra gli elaborati esaminati.

LE GRIGLIE (cat 4, 5, 6)

Questo problema è un'introduzione alla nozione di sequenza di numeri interi, basata sullo studio di una sequenza di griglie data da quattro disegni iniziali.

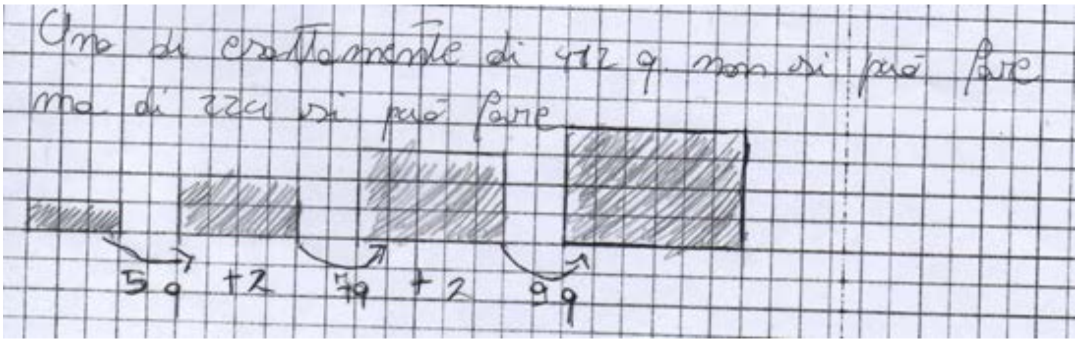
Asmine disegna una serie di griglie rispettando la seguente regola: per ogni nuova griglia aggiunge una riga e una colonna di quadretti alla griglia precedente.
Queste sono le quattro griglie che ha già disegnato:



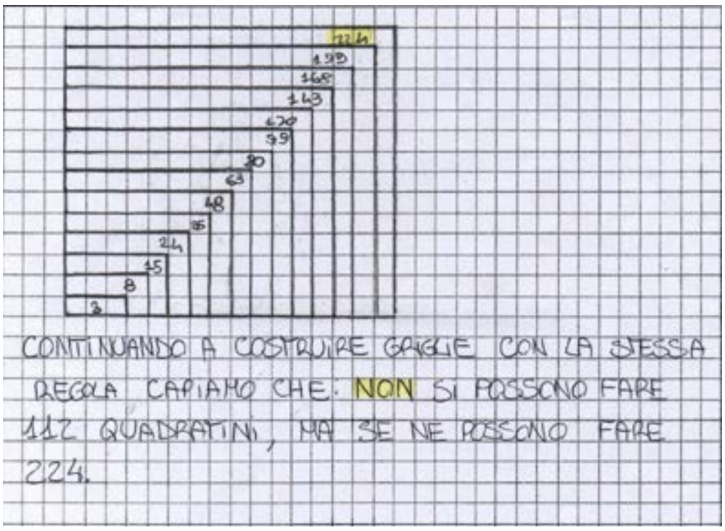
Continuando a costruire griglie rispettando la stessa regola, potrà costruire una griglia di esattamente 112 quadratini? E una di esattamente 224?
Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

L'analisi degli elaborati ha evidenziato l'evoluzione dell'argomentazione che gli alunni presentano nelle loro spiegazioni in funzione del loro livello scolare.

Una serie di disegni successivi:

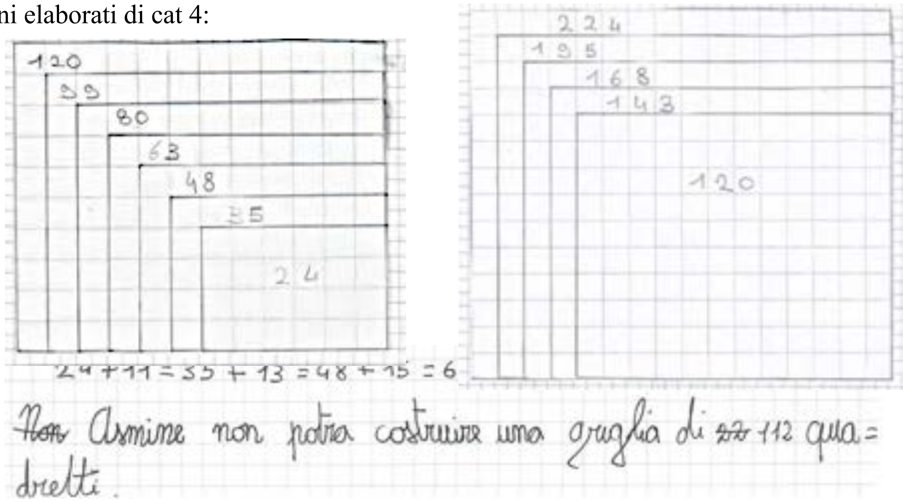


O Griglie incluse l'una nell'altra:

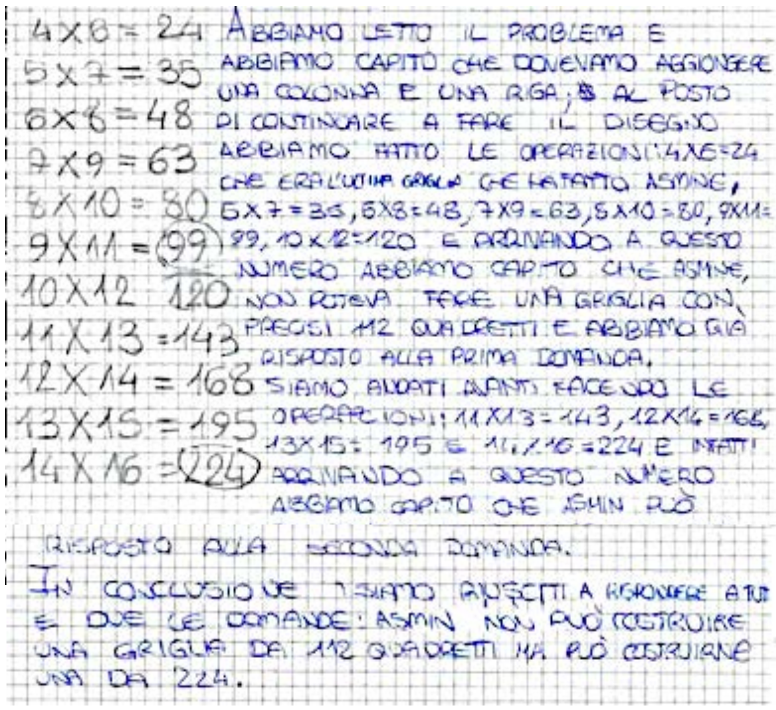


Questa rappresentazione (cat. 6) risulta più efficace ed economica in termini di spazio; inoltre, il rischio di errore è minore.

Alcuni elaborati di cat 4:



Alcuni riescono a scoprire regolarità e fare commenti opportuni.
Questo elaborato mostra i calcoli e una verbalizzazione molto semplice del ragionamento:



In alcuni casi vi sono spiegazioni a parole. L'elaborato seguente presenta un ragionamento corretto ma incompiuto.

ABBIAMO OSSERVATO LE 4 GRIGLIE E ABBIAMO
NOTATO CHE AGGIUNGENDO I QUADRATI IL
NUMERO AUMENTAVA SEMPRE DI 2.
ABBIAMO SOMMATO 24 A 11 E CONTINUANDO
SOMMAVAMO IL RISULTATO (1° ADDENDO) AL
2° ADDENDO CHE AUMENTAVA SEMPRE DI 2.
112 NON ABBIAMO TROVATO, MA ABBIAMO TRO=
VATO 224.

Interpretazione: 3 (+5) 8 (+7) 15 (+9) 24 (+11) … 99 (+21) 120 (+23) … 195 (+29) 224

Alcuni elaborati di cat. 5.
In questa categoria le spiegazioni verbali sono più dettagliate, spesso accompagnate da disegni delle griglie, in questo caso con un maggiore coordinamento tra le due rappresentazioni. In questa categoria cominciano a coesistere almeno due tipologie di spiegazioni, per lo più verbale e grafica, oppure verbale e procedurale con i calcoli.

dati | cerco

4 griglie alla partenza
devi sommare 1 in altez=
za e 1 in larghezza

?riesci a creare una
griglia di 112 quad=
retti
?riesci a creare un

24+4=28 quadrato 4 | 28+7=35 quadrato 5 | 35+5=40+8=48 quadrato 6 | 54+6=59+9=63 quadrato 7

63+7=70+10=80 quadrato 8 | 80+8=88+11=99 quadrato 9 | 99+9=108+12=120 quadrato 10

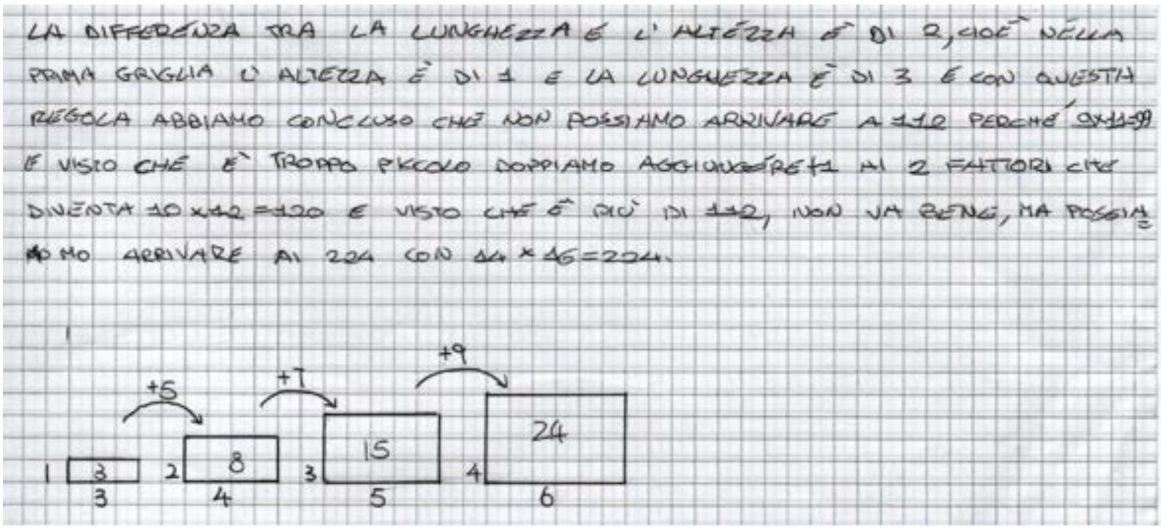
120+10=130+13=143 quadrato 11 | 143+11=154+14=168 quadrato 12 | 168+12=180+15=195 quadrato 13 | 195+13=208+16=224 quadrato 14

Risposta: potrà costruire solo quella da 224 quadra=
ti

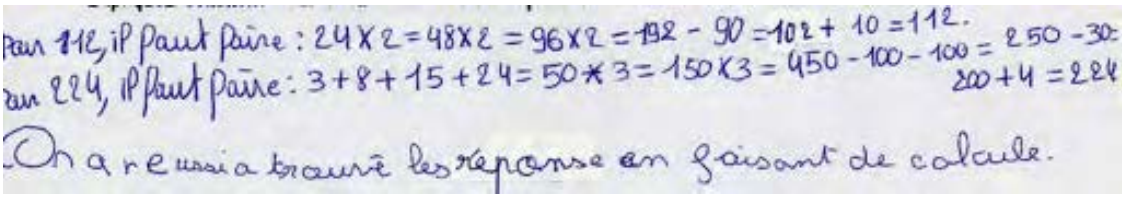
Ragionamento: abbiamo aggiunto nel quarto 4 che
è l'altezza e 7 che rappresenta la linea orizzonta=
le e quella che di incrocio con quelle vertical (19)
dopo abbiamo aggiunto i quadrati ai 2 fattori e poi
siamo arrivato alla conclusione

Alcuni elaborati di cat. 6 evidenziano che gli allievi cominciano ad avere una visione funzionale del problema, riconoscono la variabilità correlata delle dimensioni della griglia.

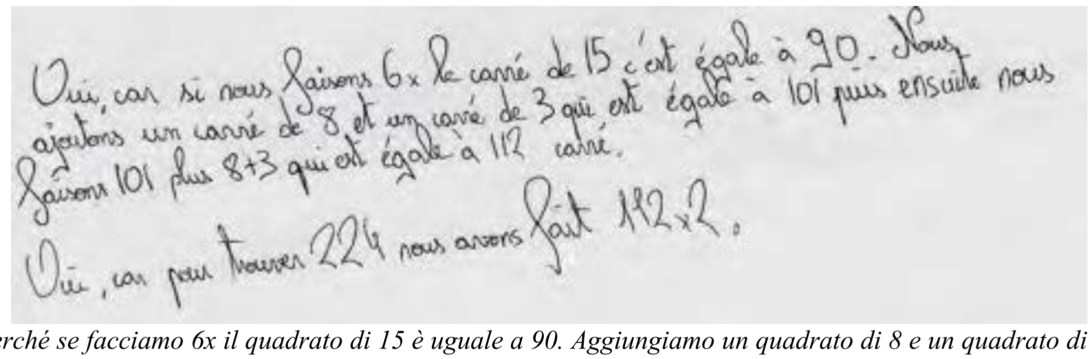
Questo elaborato mostra chiaramente la successione di numeri di quadrati aggiunti da una griglia all'altra: +5, +7, +9, ecc. Questa successione di numeri dispari è la chiave per ottenere la successione delle aree delle griglie.



A volte gli alunni cercano semplicemente di ottenere i numeri 112 e 224 per decomposizione senza tenere conto della regola di costruzione, come in classe in alcuni esercizi.



Siamo riusciti a trovare le risposte facendo alcuni calcoli



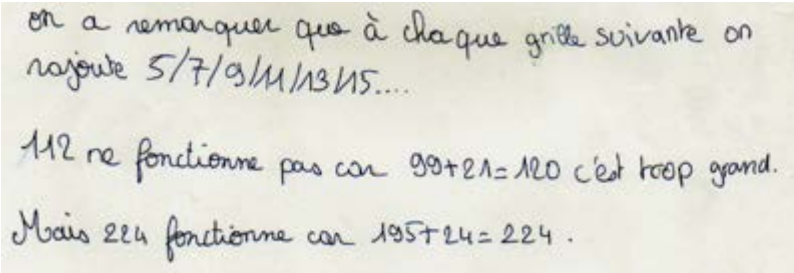
Sì, perché se facciamo 6x il quadrato di 15 è uguale a 90. Aggiungiamo un quadrato di 8 e un quadrato di 3 che è uguale a 101 e poi facciamo 101 più 8+3 che è uguale a 112 quadrati.

Sì, possiamo trovare 224 facendo 112 × 2.

La chiave del problema consiste nel trovare due numeri interi la cui differenza è 2 e il cui prodotto è 112 e successivamente 224. In questo elaborato è stato compreso chiaramente.

Questo elaborato è stato realizzato in modo corretto:

E poi si trova una buona soluzione del problema:



Abbiamo notato che ad ogni griglia successiva aggiungiamo 5/7/9/11/13/15...
112 non funziona perché 99+21 = 120 è troppo grande
Ma 224 funziona perché 195+24 = 224

Negli elaborati si trovano due tipi di procedure:

- una procedura grafica con la rappresentazione di tutta la successione delle griglie fino a quella di 224 quadretti, disegnate separatamente oppure incasellate una dentro l'altra in un unico disegno;
- la descrizione del passaggio da una griglia alla successiva mediante la successione numerica del numero di quadretti contati in larghezza, in lunghezza oppure in area.

Per concludere:

Questo problema potrebbe essere considerato come un'introduzione alla nozione di funzione e di successione numerica, a condizione che la ricerca di una formula per esprimere il passaggio da una griglia all'altra sia necessaria per poter rispondere alla domanda.

A questo scopo i numeri 112 e 224 si rivelano troppo piccoli, in quanto possono essere trattati con una successione di disegni schematici o di griglie incasellate. La variabile didattica del numero totale di quadretti risulta dunque essenziale per determinare l'obiettivo matematico del problema.
Potremmo porre la seguente domanda: continuando a costruire griglie che rispettano la stessa regola, potremo costruire una griglia con esattamente 1 224 quadretti?
Questo dato rende impossibile una soluzione grafica. Non è neppure possibile dare la successione numerica delle 34 aree delle griglie successive espresse in quadretti.
La risposta richiede un buon livello in algebra, come si può vedere (soluzione dell'esperto):

> Così, se n indica la posizione della griglia cercata, che corrisponde anche alla larghezza di tale griglia, si ha: $A(n) = n\,(n + 2)$. Per valori abbastanza grandi di n, tale numero è vicino a n^2.
> Se N è il numero dato di quadretti totali, la ricerca di un prodotto possibile si può fare per tentativi a partire dall'intero precedente $\sqrt{N}$.
> Nell'esempio proposto, con $1\,156 < N < 1\,225$, si ottiene $34 < \sqrt{N} < 35$,
> da cui il prodotto $A(N) = 34 \times 36 = 1\,224$.

Nell'istruzione secondaria, i concetti di successione numerica o di funzione sono spesso introdotti da formule per calcolare i valori dell'immagine u_n o $f(x)$ associati ai valori n o x della variabile. Questo commento sottolinea l'importanza di un minimo di formazione in didattica della matematica per tutti gli insegnanti, in modo che possano capire e accettare il vero stato dei livelli di costruzione delle conoscenze degli allievi.
Per gli insegnanti in formazione, abbiamo un buon esempio di raccomandazione di natura didattica: alcuni problemi possono avere come obiettivo l'introduzione di un nuovo strumento risolutivo, a condizione che sia più economico ed efficiente delle vecchie conoscenze.

La Banca dei problemi, sempre viva, contiene un gran numero di problemi che meritano delle analisi *a posteriori* di questo tipo. Avviso ai coraggiosi.
E soprattutto non dimenticate che vogliamo! Dare agli allievi il piacere della ricerca e della scoperta!

Un enorme grazie alla nostra traduttrice di lunga data!

Michel Henry, 4 ottobre 2024

LES APPORTS DU RMT[1]

François Jaquet

Préambule

On ne peut pas perdre les apports de 31 ans d'activités.
Les propos que j'ai tenus lors de la clôture de la dernière rencontre de l'ARMT ont été présentés sous le nom de « conférence » devant un auditoire qui a participé activement au recueil des données en 30 ans d'activités, que j'appelle ici *les apports du RMT*. L'exposé était illustré par des diapos, parfois complétés de commentaires oraux supplémentaires, gestes et intonations. Le texte qui suit, sous forme d'article, comprend ces compléments et quelques mots de liaison pour le lecteur de l'article.

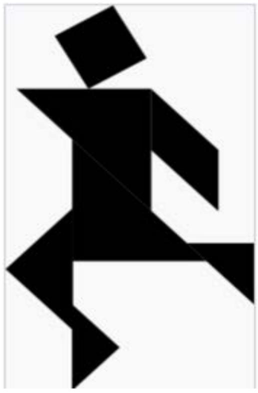
Je me suis limité à trois exemples récents de ces apports :

- une première activité à propos du Tangram, un jeu où il n'y a pas de perdant ;
- une deuxième sur la division par 7 et le coloriage de ses restes ;
- une troisième à partir d'un pot de confiture renversé ;

de mon point de vue personnel après 31 ans dans l'entreprise RMT ;
en tentant de me placer « dans la peau » de l'enseignant que j'ai été durant de longues années, il y a très longtemps.
(Dans le texte qui suit, ce personnage-clé est désigné par la lettre **E** et ses propos, fictifs, sont en italique.)

Exemple 1. Une activité à propos du Tangram

Le Chinois légendaire qui a "inventé" le tangram se doutait-il de son intérêt pour l'enseignement ?
Selon Wikipedia : « Le tangram se compose de sept pièces qui peuvent se juxtaposer pour former un grand carré de surface 16 :



- cinq triangles isocèles rectangles de trois tailles différentes :
  - deux petits de surface 1,
  - un moyen de surface 2 (longueurs des côtés multipliées par $\sqrt{2}$ par rapport aux petits, son petit côté correspond à l'hypoténuse des petits triangles),
  - deux de surface 4 (longueurs des côtés multipliées par $\sqrt{2}$ par rapport au moyen ou par 2 par rapport aux petits) ;
- un carré, de surface 2, dont le côté correspond aux petits côtés d'un petit triangle ;
- un parallélogramme (ni rectangle ni losange), de surface 2, dont les côtés correspondent, par rapport au petit triangle, dans un sens au petit côté et dans l'autre sens à l'hypoténuse.

Chaque pièce peut se faire recouvrir par un nombre entier d'exemplaires du petit triangle, qui est donc l'unité de base du découpage. L'aire totale du tangram est 16 fois l'aire de ce petit triangle. »

E. *J'ai lu quelque part que proposer aux élèves de résoudre, par groupes, des problèmes de mathématiques va leur permettre d'améliorer leur apprentissage des mathématiques.*
J'ai une classe de catégorie 6 et j'ai donc décidé de proposer ce problème, choisi dans la Banque du RMT, à mes élèves en leur demandant de travailler par groupes, sans aucune intervention de ma part, et de rendre une copie avec la réponse et la description de leur résolution.

[1] Conférence présentée à Trequanda le 6 octobre 2024, 27e rencontre internationale de l'ARMT.

LE TANGRAM DU MENUISIER (I) (Cat. 6, 7)

Un menuisier construit des Tangram en bois.

Un jour, un client lui commande un Tangram dont le côté du petit carré mesure 6 cm.

Combien mesurera le côté du Tangram, quand le menuisier aura fini son travail ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et décrivez en détail comment vous avez procédé.

(Problème 10 du 29e RMT (2022) version I, catégories 6 et 7. La version II de la même épreuve, proposée aux élèves de catégories 8 à 10 est presque identique, « 6 cm » est remplacé par « *u* ».)

E. *J'ai recueilli les copies des neuf groupes de mes élèves et les ai examinées :*
deux arrivent à une solution proche de 17 cm, avec des explications plus ou moins claires, mais les sept autres… une vraie catastrophe !

Mes élèves sont-ils vraiment nuls ? Effectivement, le niveau de ma classe n'est pas des meilleurs mais tout de même !!
Suis-je responsable ?

Mes élèves savaient déjà calculer l'aire d'un rectangle et d'un carré, je leur ai montré la formule $A = c^2$ et ils l'ont appliquée sur une bonne dizaine d'exercices. Pour le parallélogramme, avec $A = b \times h$; je leur ai bien expliqué qu'il suffit de découper un triangle à droite de le déplacer vers la gauche pour obtenir un rectangle. Puis pour les triangles j'ai fait une belle leçon pour expliquer pourquoi il y a une division par 2 dans la formule, parce que le triangle est la moitié d'un parallélogramme, … et on a fait beaucoup d'exercices.

Le problème est-il vraiment trop difficile ?

Je vais aller voir dans la banque de problèmes.

Rubrique « Résultats » de la fiche « Le tangram du menuisier (I) » :
Points attribués, sur 1812 classes de 18 sections

Points :	0	1	2	3	4	Nb. cl.	M
Cat 6	465 (47%)	289 (29%)	100 (10%)	35 (4%)	92 (9%)	981	0.98
Cat 7	254 (31%)	128 (15%)	95 (11%)	109 (13%)	245 (29%)	831	1.96
Total	719 (40%)	417 (23%)	195 (11%)	144 (8%)	337 (19%)	1812	1.43

selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

4 Réponse correcte (la mesure du côté du Tangram est, en cm, $\sqrt{288}$, ou une valeur numérique de 16,9 à 17,1cm en cas de détermination par dessin - avec présentation du dessin - ou ≈ 17 ou 16,97 … par la calculatrice ou encore $12\sqrt{2}$ - pour ceux qui auraient retenu la formule $c\sqrt{2}$), avec le détail de toutes les mesures intermédiaires trouvées - d'aires ou de longueurs - et quelques mots pour décrire la démarche comme, par exemple : les petits triangles sont la moitié du petit carré ou le côté du Tangram mesure le double de la diagonale du petit carré interne, avec une justification

3 Réponse correcte avec le détail de certaines mesures et description peu claire

2 Réponse correcte sans aucune explication ni détails de la procédure
ou réponse erronée (par exemple avec des erreurs de calcul), avec le détail de certaines mesures intermédiaires et description claire

1 Réponse qui se limite à l'aire du Tangram (288 cm^2)
ou mesure proche de 17 (inférieure à 16,8 ou supérieure à 17,1) sans présentation du dessin sur lequel a été prise la mesure
ou début de recherche cohérent avec quelques mesures ou relations trouvées entre les aires ou les côtés des figures

0 Incompréhension du problème

E. *Ah, je suis soulagé, mes élèves sont comme ceux des 981 autres classes !*
Mais … on m'avait dit que ce problème sur le tangram est un problème du RMT et, par conséquent un « bon problème » ;
… et que la Banque de problèmes du RMT est aussi, par conséquent une « bonne Banque de problèmes » !

Notre enseignant, malgré ses doutes, a reconnu un premier apport du RMT : il n'est pas le seul à se désespérer du niveau de ses élèves !
Il a aussi remarqué que les jugements « bon problème » ou « bonne Banque » n'ont rien de définitif sans expérimentation répétée. Il ne s'agit ici que de sources de données qui, même si elles ne sont pas tombées du ciel, doivent être validées par une longue pratique.

Toujours à propos de la Banque de problèmes :

E. *J'ai fait une courte visite de la Banque de problèmes.*
Toutes les fiches ne sont pas complétées.
Et les familles … un vrai fouillis ?

Sur la fiche du Tangram je vois deux domaines « Géométrie plane » et « Grandeurs et mesures » *et trois familles : CA - Comparer des aires CA/P ; QUA - Comparer des aires sur un quadrillage ; LA - Utiliser des mesures de longueurs et aires.*
Selon moi il faudrait regrouper les problèmes par notion : les problèmes de calcul de l'aire du rectangle connaissant les deux dimensions ; les problèmes de calcul d'une dimension d'un rectangle dont on connaît l'aire et l'autre dimension…
Il faudrait aussi séparer les problèmes d'aires de ceux de périmètres, …

Ce qui est désigné par « apport » dans cette présentation n'est pas une simplification, ni une facilitation, ni un résultat définitif ; c'est le plus souvent une ouverture vers la complexité et le besoin d'en savoir plus.

Les analyses a posteriori des copies, conduites par les membres du Groupe de travail géométrie plane relèvent la multiplicité des procédures de résolution et les nombreux obstacles qui empêchent la grande majorité des groupes d'élèves d'arriver à la solution. Dans un récent article de la Gazette de Transalpie[2] le Groupe Géométrie plane propose d'insérer le Tangram dans un parcours didactiques sur le conflit aire-périmètre.

E. *Cet article parle d'une procédure par pavage en 16 petits triangles ou 8 carrés dont l'aire est* $6 \times 6 = 36$ *cm*^{2} *conduisant à l'aire totale du tangram de 288 cm*^{2} *puis à une mesure du côté très proche de 17 cm, car* $17 \times 17 = 289$*.*
C'est vrai, je n'y avais pas pensé.

Ce sont les élèves qui, par l'intermédiaire de leurs copies, nous apprennent ce que nous devrions savoir. Il faut donc lire ces copies, en tirer les « analyses a posteriori », puis (pour ceux qui n'ont pas participé à l'analyse), lire ces textes si l'on veut connaître un peu mieux ce qui se passe dans la tête de l'élève.

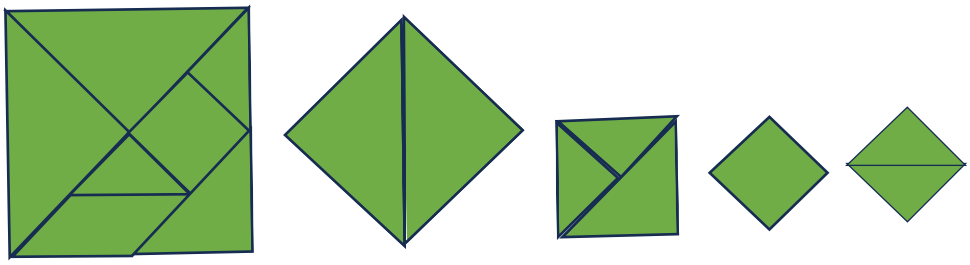
E. *Mes élèves réussissent bien les problèmes de pavage. Dans la famille « Comparer des aires » de la Banque de problème, je vois que la réussite est élevée pour ce type de tâche (par exemple « Coupe et découpe » (15.I) « La rosace de Julie » (15.II.07)….*
Selon les suggestions de la fiche et des articles, je vais leur faire dessiner le tangram, en vraie grandeur, découper les pièces, les manipuler puis, toujours selon ces suggestions, je vais leur demander d'exprimer l'aire de chacune des 7 pièces en utilisant le petit triangle comme unité.

Après l'activité :

---

[2] Groupe Géométrie plane de l'ARMT. 2024. Percorsi didattici per la geometria piana con problemi RMT. Parcours didactiques pour la géométrie plane par des problèmes RMT. *La Gazette de Transalpie 14.* (pp 85-122)

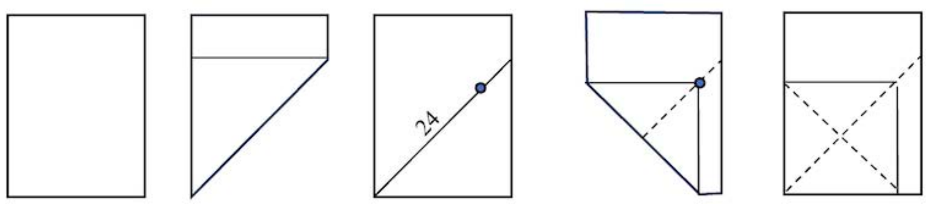
E. *Il a fallu une heure de travail individuel pour que chacun dessine son tangram en vraie grandeur puis, après une mise en commun, on a pu s'accorder sur les résultats.*
Petit triangle : 1 unité ; carré, parallélogramme et triangle moyen : 2 unités ; grand triangle ; 4 unités ; le tangram entier : 16 unités.
Ils ont utilisé la règle et l'équerre pour la construction et certains ont remarqué qu'il y avait beaucoup de côtés de pièces qui mesuraient 6 cm ou 12 cm, beaucoup d'angles droits, d'angles de 45 degrés, de parallèles…
On a ainsi pu rappeler de nombreuses connaissances.
Ce n'était pas du temps perdu.
Je vais encore proposer certaines des activités de la rubrique « pour aller plus loin *» de la fiche. Celle des quatre carrés et de son tableau récapitulatif me plaît beaucoup.*



	Mesures des côtés (cm)	Aire (petit T)	Aire (cm^2)
petit triangle	?	1	18
petit carré	6	2	36
deuxième carré	$\sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$	4	72
troisième carré	12	8	144
tangram	$\sqrt{288} = 12\sqrt{2} \approx 17{,}0$	16	288

J'espère que mes élèves percevront que la progression des aires d'une ligne à la suivante n'est pas proportionnelle à celle des mesures des côtés. Pour les écritures «$6\sqrt{2}$ » et « $12\sqrt{2}$ », je ne me fais pas trop d'illusions, j'y reviendrai lorsqu'ils seront en catégorie 8 ou 9 !

C'est en découpant les pièces et en les manipulant que les élèves s'approprient leurs formes, les longueurs de leurs côtés ou diagonale (de dimension 1), leurs aires (de dimension 2), leurs angles et les rapports qu'elles entretiennent. Le menuisier a acquis ces connaissances par sa pratique professionnelle, son œil professionnel lui a fait constater immédiatement que la diagonale du tangram mesure 24 cm (quatre côtés du petit carré) ; le dessin lui suffit ou, éventuellement s'il suit les propositions de Brunella Brogi sur les origamis (complément de l'article cité précédemment) il crée son modèle en deux pliages d'une feuille rectangulaire :



En partant de la gauche :
1. une feuille rectangulaire
2. la feuille pliée comme (le pli est la bissectrice de l'angle inférieur gauche) ;
3. un point est marqué à 24,0 cm du sommet de l'angle inférieur gauche, au mm près ;
4. second pliage, le sommet inférieur gauche va sur le point marqué ;
5. les deux plis sont les deux diagonales du tangram, la mesure du côté du carré est 17,0 cm.

Synthèse de ce premier exemple : d'une question sur le côté d'un tangram à un problème pour la classe
Des 50 minutes de recherche par un groupe d'élèves on passe à deux semaines au moins d'activités en classe, avec l'enseignant comme gestionnaire des apprentissages de ses élèves. Les apports du RMT pour l'enseignant concernent :
- les concepts d'aire (2D) et de longueur (1D) qu'on rencontre dans de nombreuses activités du RMT sous l'appellation « conflit aire-périmètre », où il apparaît absolument nécessaire d'aborder simultanément les deux concepts pour que les élèves puissent les distinguer et différencier progressivement ;
- les nombres naturels, décimaux, mais aussi les rationnels (fractions) et irrationnels, de la pire des réputations pour des générations d'élèves ;
- l'obstacle des mesures assimilées à des nombres en écriture décimale, que l'élève considère comme des certitudes avant de comprendre qu'il s'agit de nombres qu'on ne peut pas déterminer univoquement mais qu'on peut situer dans des intervalles de nombres réels : les approximations !
- la proportionnalité entre les mesures du côté et de la diagonale d'un carré (qui deviendra $d = c\sqrt{2}$ en écriture algébrique mais qui devrait être perçue pratiquement comme « la mesure de la diagonale est environ 1,4 fois celle du côté », pour n'importe quel carré !
- le nombre $\sqrt{2}$, impossible à écrire au moyen des nombres décimaux de l'affichage d'une calculatrice mais qu'il faut envisager en relation avec l'opération réciproque de « l'élévation au carré » ;
- les propriétés des polygones élémentaires, dont la manipulation des pièces du *Tangram* favorise l'assimilation, vont permettre de savoir non seulement combien mesurera le côté du tangram du menuisier si le petit carré a 6 cm de côté mais encore beaucoup plus ;
- les isométries, les agrandissement et réductions qui conduiront aux concepts d'homothéties et similitudes …
Les deux ou trois semaines passées sur le tangram abordent tous les savoirs au programme de géométrie des catégories 5 à 10 du RMT, si elles sont répétées plusieurs fois par année et d'année en année à propos d'autres problèmes de la Banque du RMT ; il n'est pas exclu que notre enseignant **E** puisse abandonner le manuel et ses exercices répétitifs.

Exemple 2. A propos de division par 7

Cette deuxième activité est récente, elle a été proposée aux élèves de catégories 5, 6 et 7 après avoir suscité bien des doutes au sein du « Groupe problèmes » qui considérait qu'on n'aborde pas les classes de restes avant le lycée. C'est la première partie, celle du coloriage ci-dessous, qui a permis de la faire passer.

ARC-EN-CIEL

Joseph et Marie demandent à leurs amis :

Coloriez les nombres de ce tableau avec les couleurs de l'arc-en-ciel …

… en rouge lorsque le reste de leur division par 7 est 0,
… en orange, lorsque le reste de leur division par 7 est 1
… en jaune, lorsque le reste de leur division par 7 est 2,
… en vert, lorsque le reste de leur division par 7 est 3,
… en bleu, lorsque le reste de leur division par 7 est 4,
… en indigo, lorsque le reste de leur division par 7 est 5,
… en violet, lorsque le reste de leur division par 7 est 6

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
30	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**
40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**
50	**51**								

Pour cette première partie, l'intention des auteurs est une suggestion d'aborder, au sein du groupe puis entre groupes lorsque le problème sera repris en classe, les relations entre l'algorithme de la « division par 7 avec reste », les opérations de multiplication, de soustraction et les multiples de 7.

La deuxième partie demande de trouver la couleur d'un nombre qui est la somme d'un nombre jaune et d'un nombre vert. (Elle se révèle aussi très intéressante, on la trouve dans l'article *À propos de division euclidienne* de François Jaquet et Rita Spatoloni, Gazette no 14, pp.25-45).

Voici le coloriage, attendu par l'adulte, qui figure dans l'analyse a priori du problème.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51								

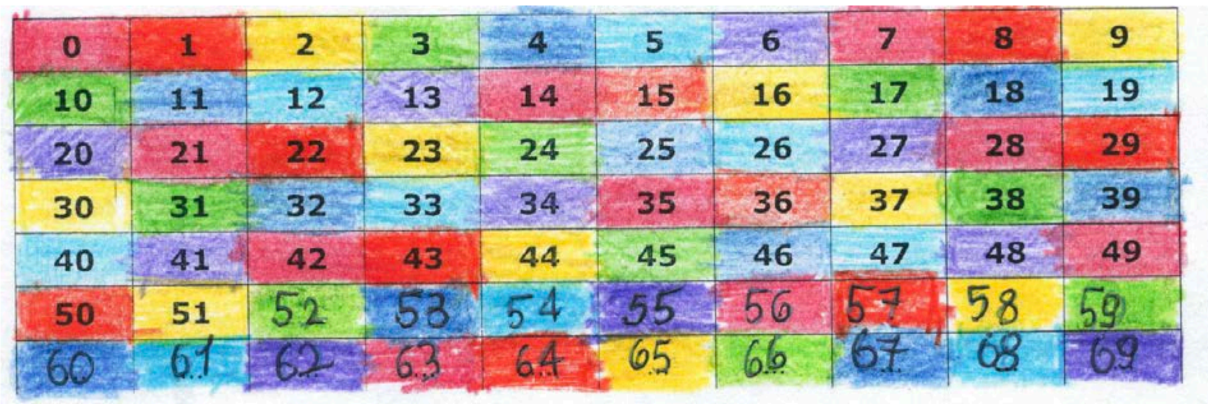
N'est-il pas beau ?

Pour cet exemple récent, les apports du RMT se situent déjà dans l'énoncé du problème car les analyses de nombreux autres problèmes ont montré des lacunes sur la division, ce qui reste, ce qui manque pour arriver au quotient suivant …

E. *Non, ce n'est pas un problème, c'est un simple exercice de division élémentaire. On ne va pas perdre son temps à colorier tout un tableau alors qu'on sait déjà que ce sont les multiples de 7 qui donneront un reste de 0 lorsqu'on les divise par 7, puis les nombres qui valent un de plus qu'un multiple de 7 qui donneront un reste de 1, etc*

Notre enseignant n'est pas le seul de cet avis. L'algorithme est entraîné dès les catégories 3 et 4.

Un des meilleurs coloriages (cat 5).

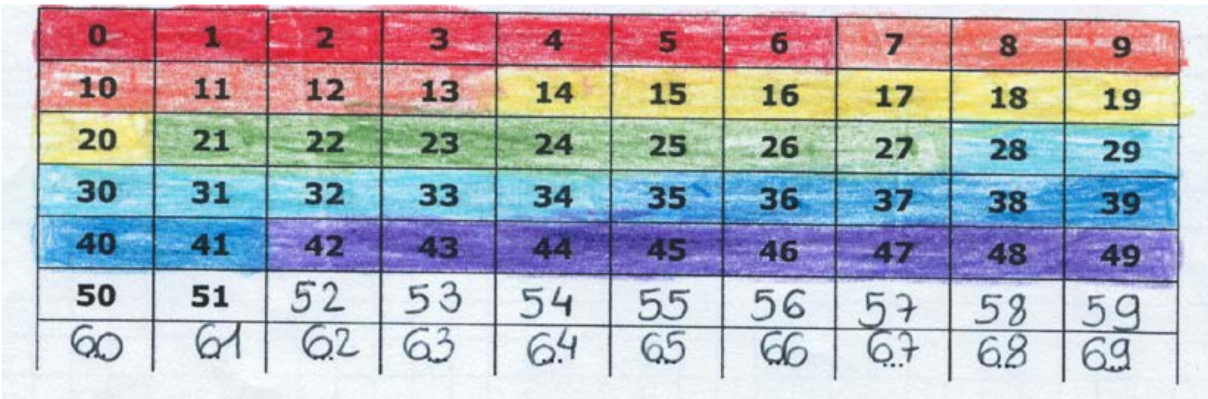


Les élèves sont allés au-delà de 51. Pensent-ils que l'on peut continuer au-delà de 69 ?

Autre type de coloriage, avec cases blanches de 0 à 6 : **première surprise, de taille !!**

Fréquence de ce type de réponse, sur près de 300 copies analysées : Cat 5: 35% ; cat 6: 28 % ; cat 7: 27% ;

Pourquoi ? Ne faut-il pas chercher les causes du côté de l'algorithme mécanique de la division ? « *Si le premier chiffre du dividende est plus petit que 7, on ne peut pas et on part des deux premiers chiffres* »
Autre type de coloriage (rencontré une bonne dizaine de fois), (cat 6) avec une confusion reste/quotient : rouge : 0 fois 7 ; orange : 1 fois 7 ; jaune : 2 fois 7 ;…



Surprises ??

E. *Je ne pensais pas que la grande majorité des groupes « calculeraient » le reste, (avec l'algorithme de la division avec reste) très souvent pour chaque nombre du tableau ! que les cases 0 à 6 ne seraient pas coloriés dans 30 % des copies!*
Ce coloriage ne serait-il donc pas inutile ?

Que nous disent les élèves : (à lire attentivement)

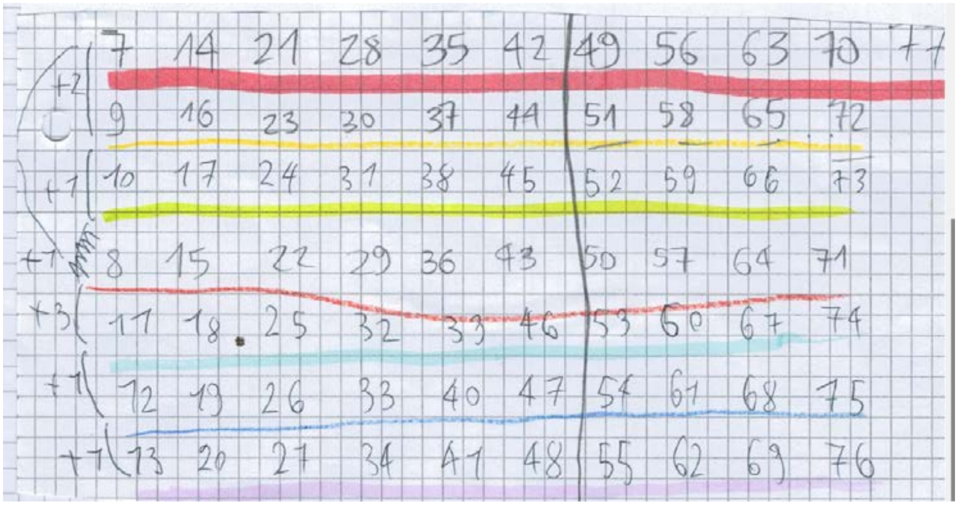
Exemple de catégorie 6, avec coloriage correct dès les cases 7, 8, …

Nous sommes partis de la couleur rouge pour obtenir ceux de couleur rouge. Il suffit de colorier les multiples de 7. Pour trouver l'orange, nous avons divisé les nombres qui suivaient ceux colorés en rouge par 7 et nous avons obtenu pour chacun un reste de un. Pour trouver les nombres jaunes, nous avons divisé les nombres qui venaient après les nombres orange par 7 et avons obtenu pour tous un reste de 2 ... (les mêmes phrases sont répétées pour les couleurs suivantes).

Autres exemples (toujours à lire attentivement car ce sont les élèves qui nous apprennent ce qui se passe dans leur tête et personne d'autre ne peut le faire !!)

De catégorie 5 : *Au début nous avons divisé tous les nombres de 0 à 14 par 7. Ensuite vu que les couleurs des nombres se répétaient nous avons colorié le tableau.*
Les algorithmes des 14 premières divisions ont été « posés » un à un !

Une idée d'un groupe d'élèves (cat 7)
Et si l'on disposait les nombres en lignes à partir de 7 ; 14 ; 21 ; … au lieu de partir des dizaines comme dans le tableau proposé ?



Cette nouvelle disposition témoigne d'une « découverte » que tous les nombres (à partir de 7) peuvent se regrouper en sept familles mieux visibles que dans le tableau d'origine, avec des passages de « +1 » d'une famille à la suivante.

Autres exemples d'explications :
(Cat 7) *Nous avons commencé en calculant les nombres avec les couleurs justes du reste en utilisant le livret du 7).*
Ici, on ne se réfère pas aux multiples de 7 mais seulement à ceux du « livret du 7 ».

(Cat 7). *Au début nous avons regardé un à un les nombres qui donnent un reste de 0, 1 et 2 puis en coloriant le tableau nous avons compris qu'il y avait une séquence.*
Apparition des régularités, découverte essentielle.

Ce que nous avons appris des élèves :

- Une partie d'entre eux (plus de la moitié) a vu une relation entre les nombres (rouges) dont le reste de la division par 7 est 0 et les premiers multiples de 7, et parfois tous les multiples de 7. (L'autre partie l'a peut-être découverte lors de la mise en commun ou de la phase d'institutionnalisation.)
- Environ 30 % de ceux qui ont perçu la propriété « multiple de 7 » n'ont toutefois pas pu définir un reste pour les nombres inférieurs à 7.
- Les coloriages sont encore insuffisants pour une partie des élèves, en particulier pour la catégorie 7 où ils s'approchent de 50 %.

Ce sont des données objectives, destinées aux enseignants.

Une proposition de la fiche de la Banque de Problèemes

E. *Quelle bonne idée, mes élèves n'auront pas seulement colorié! Merci Euclide.*

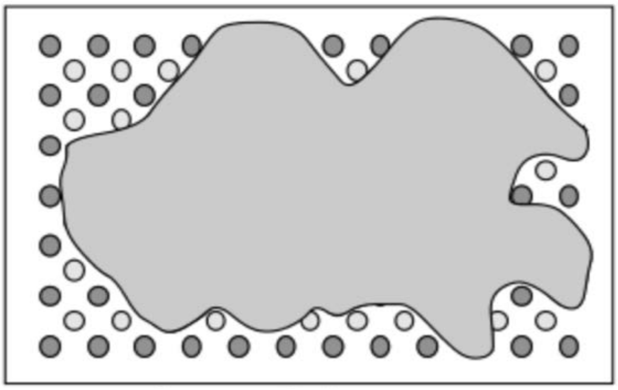
0 **$7 \times 0 + 0$**	**1** **$7 \times 0 + 1$**	**2** **$7 \times 0 + 2$**	**3** **$7 \times 0 + 3$**	**4** **$7 \times 0 + 4$**	**5** **$7 \times 0 + 2$**	**6** **$7 \times 0 + 2$**
7 **$7 \times 1 + 0$**	**8** **$7 \times 1 + 1$**	**9** **$7 \times 1 + 2$**	**10** **$7 \times 1 + 3$**	**11** **$7 \times 1 + 4$**	**12** **$7 \times 1 + 5$**	**13** **$7 \times 1 + 2$**
…	…	…	…	…	…	…

L'enseignant peut (ou doit) en particulier noter en langage arithmétique les relations fondamentales entre les nombres et les multiples de 7.

Synthèse de ce deuxième exemple : sur les liens entre la division par 7 et les multiples de 7
Les apports sont ici des surprises : les cases de 0 à 6 non colorées et le besoin de répéter l'algorithme pour tous les nombres ou au moins une grande partie d'entre eux. Ce sont les élèves qui les ont révélées, aux personnes qui ont examinées leurs copies, qui sont des enseignants. Il y a ici une double ignorance : les élèves ne connaissent pas tous les liens entre division, reste et multiples ; les enseignants ne savent pas tous que les élèves les ignorent encore. Après le travail en classe, qui doit aller au-delà du tableau à colorier correctement, les élèves auront progressé dans la construction des concepts de division et multiples, les enseignants auront pris conscience de la nécessité d'aller, avec leurs élèves, au-delà des aspects algorithmiques de ce qui était considéré comme des savoirs acquis définitivement.

Exemple 3. A propos de points cachés

LA TACHE
Toto a renversé la marmite de confiture sur la belle nappe à pois de la cuisine
Combien y a-t-il de pois entièrement
recouverts par la confiture ?

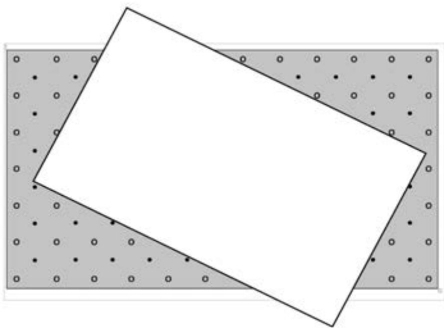


Il y a longtemps, en 1995, ce problème a été proposé lors du 3e rallye mathématique romand, avec une première participation de classes italiennes, à l'origine de l'appellation « transalpin ». Mais c'est aussi et surtout la première analyse a posteriori, encore élémentaire, mais publiée ! (In *L'educazione Matematica.* Octobre 1995).

E. *Un joli « problème de concours », plaisant,* ***sympathique****, mais …*
comment pourrais-je l'insérer dans le programme de ma classe ?

Comme notre enseignant, **E**, les anciens énoncés de notre Banque incitent à chercher des confirmations ou à en savoir plus. Une nouvelle version du problème a ainsi été proposée 28 ans plus tard **:**

POINTS CACHÉS (31.II.06 cat 4- 5):
On a posé une feuille blanche sur un rectangle gris décoré avec deux sortes de points : des blancs (o) et des points noirs (•)
Combien y a-t-il, en tout, de points cachés par la feuille blanche …

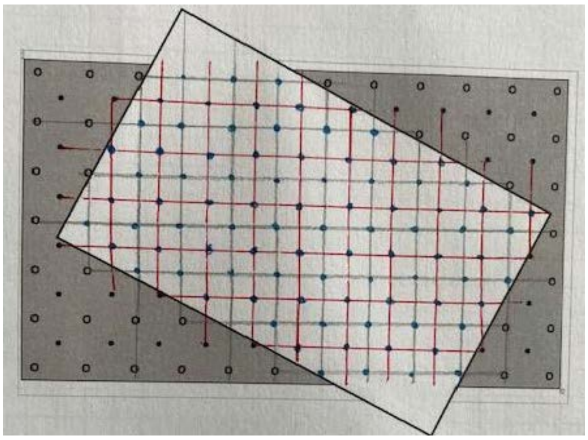


E. *L'analyse a priori parle du dessin des points cachés et de leur comptage un à un ou de deux multiplications : (7 × 12) blancs et (6 × 11) noirs ; 150 au total ; 150 - 61 points visibles : 89 points cachés. Je ne vais pas y passer une semaine avec ma classe de catégorie 6 sur des opérations aussi élémentaires, j'ai le programme à faire !*

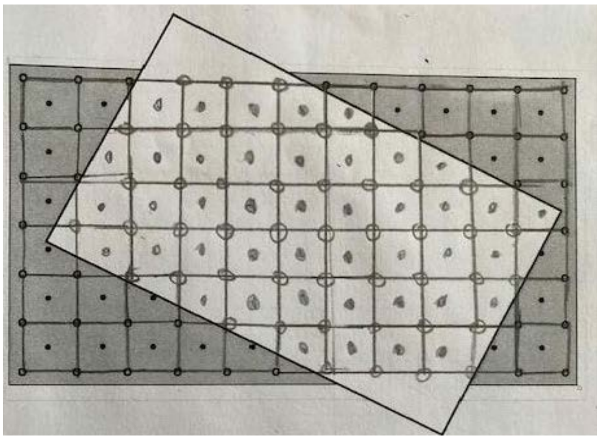
Et en effet, puisque la première analyse a posteriori de 1995 n'avait rien signalé d'autre, on reste au « joli problème de concours ». Mais en 2024, nous avons appris à mieux lire ce que nous montrent les élèves.

Procédures par dessin comme on les attend :

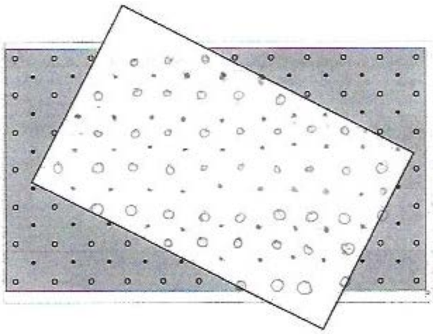
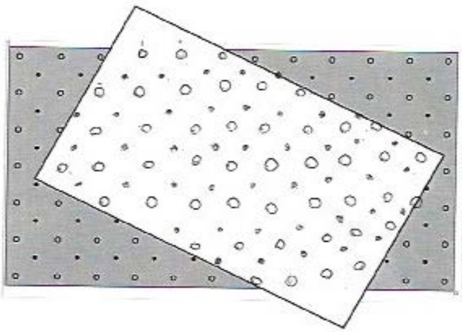
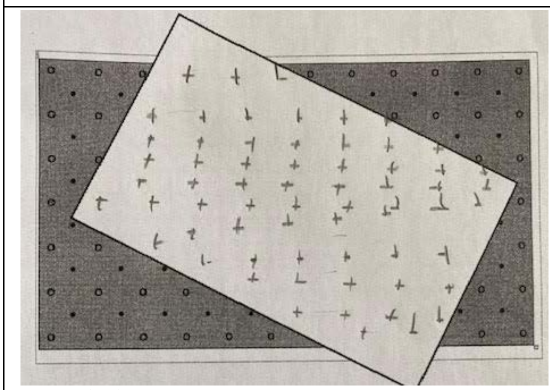
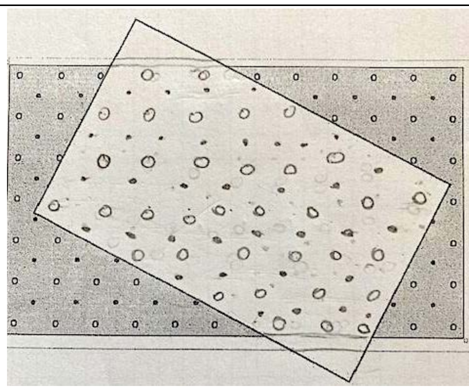
Nous avons tracé les lignes perpendiculaires aux deux types de points avec une règle et une équerre... 89 points



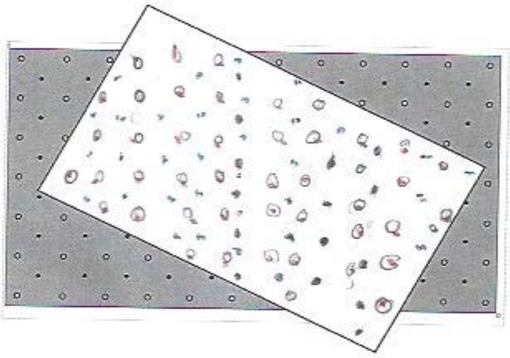
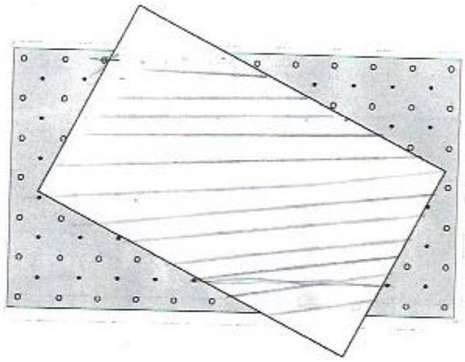
En faisant des carrés composés de 5 points, nous avons découvert que ci-dessous il y a 46 points vides et 43 points noirs, 89 points en tout



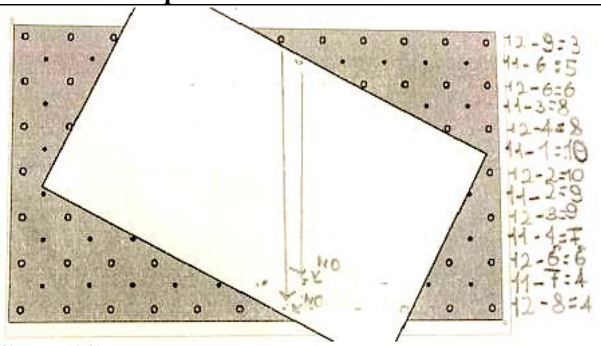
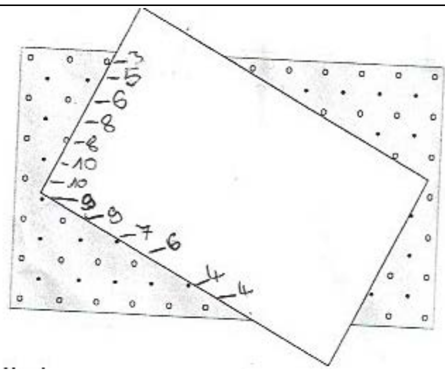
Réponses les plus fréquentes !!

 Cat 4 (89 points cachés)	 Cat 4 (89)
 Cat 5 (64)	 Cat 4 (76)

Réponses les plus fréquentes (suite) !!

 **Cat 5 (90)**	 **Cat 4 (36)**

Procédures non prévues

 **Cat 5 (89)**	 **Cat 4 (89)** *On a compté les 3 de la première ligne puis ceux de la ligne du dessous... Les points cachés sont 89*

« Savoirs » oubliés ou ignorés ?

(Commentaire de la fiche de la Banque de problèmes) : … *Les résultats ont montré que, malgré la simplicité du choix des procédures, ce sont les erreurs qui sont révélatrices des obstacles rencontrés car seulement 20 % des copies donnent la réponse exacte « 89 points cachés » et environ 15 % de réponses avec 87, 88, 90 ou 91 points cachés.*

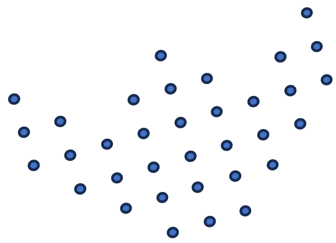
Les procédures par dessin des points cachés (qui apparaissent dans environ la moitié des copies examinées révèlent un obstacles sous-estimé lors de l'analyse a priori du problème et aussi lors de sa première version d'il y a près de 30 ans La tache (03.II.06, cat 3, 4, 5): le concept de réseau "quadrillé" de points est loin d'être construit en catégories 4 et 5. Les concepteurs du problème n'imaginaient pas l'ampleur du travail de construction des deux réseaux qui montrent le niveau de construction des savoirs en jeu.)

Les copies précédentes montrent que, pour une majorité d'élèves de catégories 4 et 5, la construction des savoirs suivants est encore inachevée :

- un alignement (visuel) repose sur une droite,
- les points sont à la même distance d'un de l'autre,
- les droites du réseau sont parallèles et /ou perpendiculaires.

Suffit-il de laisser passer le temps pour que ces savoirs « mûrissent », spontanément ?

E. *Je viens de lire le paragraphe « Procédures, obstacles et erreurs relevés » de la fiche. Je ne suis pas entièrement convaincu mais je vais proposer l'activité à mes élèves, puis après la discussion collective, chacun devra rédiger une solution personnelle, et faire un dessin précis de tous les points cachés.*
Comme devoirs à domicile.
La « Banque », me propose encore une activité dans la rubrique « Pour aller plus loin »
:

«Jules a dessiné une belle figure composée de beaucoup de points. ***Reproduisez-la sur une feuille blanche.»***	

E. *Les élèves devraient choisir un point de départ, reporter des distances (au compas ; si possible sans mesurer), utiliser la règle pour les droites, construire des parallèles, des perpendiculaires … .*
Je ne suis pas convaincu, ils verront cela plus tard, lorsqu'ils aborderont les systèmes de coordonnées ; ces savoirs pourraient aussi apparaître naturellement avec le temps.

Synthèse de ce troisième exemple : sur ce qui se cache derrière un réseau quadrillé de points
Ici encore, les apports sont une grande surprise, pour ceux qui ont imaginé la nouvelle version de l'énoncé et pour l'enseignant, lecteur des analyses. On aborde le débat entre l'inné et l'acquis. Suffit-il de laisser passer le temps pour que ces savoirs « mûrissent », spontanément ou pour les confier aux degrés suivants de la scolarité ?
Notre enseignant **E** ne se fait-il pas d'illusions ? ses collègues des degrés suivants, au-delà de la catégorie 6, vont-ils faire construire un réseau de points ? Se rendront-ils compte de l'importance des propriétés d'un quadrillage pour les concepts de distance, de périmètre et d'aire, de mesure de longueur, comme l'ont constaté les membres de notre Groupe géométrie plane en analysant les réponses d'élèves de catégories suivantes, de 7 à 10 ?

Quelques réflexions conclusives

Des apports pour l'enseignement ?

Les « savoirs » favorisés par le Tangram, des liens entre multiples et algorithme de division, des droites dissimulées derrière des alignements, et beaucoup d'autres remises en question … sont-ils de nature à « améliorer » l'enseignement ?

Le débat est ouvert et chacun a son point de vue à ce propos, dépendant de sa propre formation, de son expérience et de ses conceptions didactiques.

Notre enseignant **E** semble avoir fait quelques pas vers l'utilisation des propositions du RMT en classe. Mais le chemin est long, pour lui comme pour nous tous.

Si les élèves ont beaucoup à faire pour construire leurs « savoirs » mathématiques, pour nous, enseignants, il nous reste aussi beaucoup à faire pour construire nos « savoirs » en didactique des mathématiques ou améliorer notre manière « d'apprendre à apprendre ».

Dans ce débat, il faut se rendre compte que la formation au métier d'enseignant ne se limite pas aux quelques « leçons » de « didactique des mathématiques » des dernières années de ses études mais qu'elle commence dès son plus jeune âge et se poursuit durant toute sa scolarité, avec des conceptions de l'apprentissage qui sont loin d'être celles du socio-constructivisme à la base de toutes nos réflexions et observations de nos recherches du RMT.

Un changement de paradigme est-il nécessaire

Le tableau suivant, loin d'être exhaustif, illustre quelques caractéristiques qui distinguent un enseignement dit « traditionnel » des mathématiques dans lequel a été plongé l'enseignant durant sa scolarité et ses premières années de pratiques, et celles d'une conception issue de nos 30 ans d'observation et d'analyses de la manière dont « les élèves construisent » leurs connaissances.

L'élève qui écoute bien, qui reçoit des savoirs de l'extérieur, qui les répète et les applique	L'élève qui construit ses savoirs progressivement à partir de ses expériences personnelles et des situations d'apprentissage qu'on lui propose
L'enseignant qui explique bien, transmet les savoirs du programme de mathématique, les fait répéter et entraîner	L'enseignant « metteur en scène »,
Le bel édifice des mathématiciens achevé à construire par petites marches de manière linéaire	Une accumulation de connaissances provisoires à réorganiser en permanence
Les obstacles, les conflits, les erreurs à éviter et éliminer	Les obstacles, les conflits, l'erreur à déceler pour les exploiter et les faire surmonter par l'élève
Les exercices répétitifs pour l'acquisition de compétences définitives	Des activités variées et une construction progressive de savoirs qu'on pourra toujours améliorer
…	…

Cet inventaire, même très partiel, montre clairement que le changement de paradigme proposé ne peut pas s'opérer rapidement ou sans expérimentations. Le chemin pour y arriver est long.

Vers l'avenir: les parcours d'apprentissage

Les apports de nos anciens « problèmes de concours » nous engagent à nous intéresser maintenant …

- aux savoirs
- à l'état de leur construction par l'élève
- aux obstacles à leur construction
- aux activités propices à cette construction
- à leur statut dans l'apprentissage des mathématiques
- à leur reconnaissance par l'enseignant

Des souvenirs d'une merveilleuse entreprise coopérative, d'un engagement collectif intense et des amitiés qui en sont issues, la satisfaction d'avoir lu ce que les élèves,
les copies d'élèves, pour nos 1600 problèmes dont plus de la moitié sont encore à lire et analyser,
nos publications (Actes des rencontres et Gazette de Transalpie)
nous incitent à dire que **la Banque de problèmes du RMT est notre avenir**

Merci à toutes et à tous :
l'inventeur du Tangram,
Rita e Euclide per la division par 7
les élèves pour *Les points cachés* et tous les autres problèmes,
GPIL (Graziella, Clara, Daniela, Georges, AnnaMaria, Angela),
CG (Comité de gestion) (Clara, Florence, Gabriella, Licia, Lucia, Rita, …Lucia D, les deux Philippe, Roland, Laurent),
Lucia et la Gazette, Luc, sine qua non, pour la Banque
et tous les autres, qui resteront toujours dans nos cœurs.

GLI APPORTI DEL RMT[1]

François Jaquet

Preambolo

Non possiamo perdere gli apporti di 31 anni di attività.
Le considerazioni che ho esposto in chiusura dell'ultimo incontro dell'ARMT sono state presentate sotto il nome di "conferenza" davanti ad un pubblico che ha partecipato attivamente alla raccolta dei dati in 31 anni di attività, che qui indico come *gli apporti del RMT*. La presentazione è stata illustrata con diapositive, talvolta integrate con ulteriori commenti orali, gesti e intonazioni. Il testo che segue, in forma di articolo, comprende queste aggiunte e alcune parole di collegamento per il lettore.

Mi sono limitato a tre esempi recenti di tali apporti:

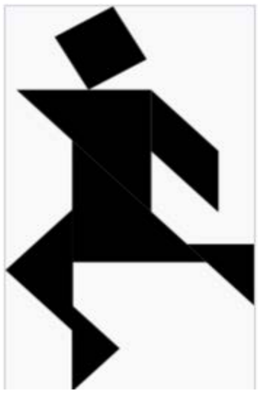
- una prima attività sul Tangram, un gioco dove non c'è nessun perdente;
- una seconda sulla divisione per 7 e la colorazione dei suoi resti;
- una terza basata su un barattolo di marmellata rovesciato;

dal mio punto di vista personale dopo 31 anni di impegno nell'impresa RMT, nel tentativo di mettermi "nella pelle" dell'insegnante che sono stato nel corso di tanti anni, molto tempo fa.
(Nel testo che segue, questo personaggio chiave è designato con la lettera I e le sue considerazioni fittizie sono in corsivo.)

Esempio 1. Un'attività sul Tangram

Il cinese leggendario che ha inventato il Tangram, pensava che potesse essere interessante per l'insegnamento?
Secondo Wikipedia: "È costituito da sette tavolette (dette *tan*) inizialmente disposte a formare un quadrato.:

• cinque triangoli isosceli rettangoli di tre diverse dimensioni:
 • due piccoli di superficie 1,
 • uno medio della superficie 2 (lunghezze dei lati moltiplicate per √2 rispetto a quelle piccole, il suo lato piccolo corrisponde all'ipotenusa dei triangoli piccoli),
 • due di superficie 4 (lunghezze dei lati moltiplicate per √2 rispetto al medio o per 2 rispetto ai piccoli);
• un quadrato, di superficie 2, il cui lato corrisponde ai lati corti di un piccolo triangolo;
• un parallelogramma (né rettangolo né rombo), di superficie 2, i cui lati corrispondono, rispetto al triangolino, in una direzione al cateto piccolo e nell'altra direzione all'ipotenusa.
Ogni pezzo può essere ricoperto da un numero intero di copie del triangolino, che è quindi l'unità base del ritaglio. L'area totale del Tangram è 16 volte l'area di questo piccolo triangolo."



I*. Ho letto da qualche parte che chiedere agli allievi di risolvere problemi di matematica in gruppo permetterà loro di migliorare il proprio apprendimento della matematica.*
Ho una classe di categoria 6 e ho quindi deciso di proporre questo problema, scelto dalla Banca RMT, ai miei allievi chiedendo loro di lavorare in gruppo, senza alcun intervento da parte mia, e di restituirne un elaborato con la risposta e la descrizione della loro risoluzione del problema.

[1] Conferenza presentata a Trequanda il 6 ottobre 2024, 27° incontro internazionale dell'ARMT.

IL TANGRAM DEL FALEGNAME (I) (Cat. 6, 7)

Un falegname costruisce Tangram in legno.

Un giorno, un cliente gli ordina un Tangram che abbia il quadrato piccolo di lato 6 cm.

Quanto misurerà il lato del Tangram quando il falegname avrà finito di costruirlo?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta e descrivete in dettaglio la procedura che avete seguito.

(Problema 10 del 29° RMT (2022) versione I, categorie 6 e 7. La versione II del problema, proposta agli allievi delle categorie da 8 a 10, è similare, ma dove "6 cm" è sostituito da "u".)

I. *Ho raccolto gli elaborati dei 9 gruppi dei miei allievi e li ho esaminati.*
Due arrivano a una soluzione vicina ai 17 cm, con spiegazioni più o meno chiare, ma gli altri sette… un vero disastro!
I miei allievi sono davvero nulli?
Effettivamente il livello della mia classe non è dei migliori, ma comunque!!
Sono io il responsabile?

I miei allievi sapevano già calcolare l'area di un rettangolo e di un quadrato, ho mostrato loro la formula $A= c^2$ e l'hanno applicata in una dozzina di esercizi… . Per il parallelogramma, con $A = b \times h$; ho ben spiegato loro che è sufficiente ritagliare un triangolo a destra e spostarlo verso sinistra per ottenere un rettangolo.
Poi per i triangoli ho fatto una bella lezione per spiegare perché nella formula c'è la divisione per 2, perché il triangolo è la metà di un parallelogramma,... e abbiamo fatto tanti esercizi.

Il problema è davvero troppo difficile?
Vado a dare un'occhiata alla banca di problemi

Rubrica «Risultati» della scheda «Il Tangram del falegname (I)»:

Punteggi attribuiti su1812 classes di 18 sezioni

Punteggi:	0	1	2	3	4	Nb. cl.	M
Cat 6	465 (47%)	289 (29%)	100 (10%)	35 (4%)	92 (9%)	981	0.98
Cat 7	254 (31%)	128 (15%)	95 (11%)	109 (13%)	245 (29%)	831	1.96
Total	719 (40%)	417 (23%)	195 (11%)	144 (8%)	337 (19%)	1812	1.43

Secondo i criteri determinati nell'analisi a priori:

- 4 punti: Risposta corretta: la misura del lato del Tangram è, in cm, √288, oppure un valore numerico da 16,8 a 17,1, cm nel caso di determinazione con il disegno, (con presentazione del disegno), oppure ≈17≈17 o 16,97... con la calcolatrice o ancora 12√2, per coloro che conoscono la formula c√2c2), con il dettaglio di tutte le misure intermedie trovate – di area o di lunghezza – e qualche parola per descrivere la procedura come, ad esempio: i triangoli piccoli sono la metà del quadrato piccolo, oppure il lato del Tangram è il doppio della diagonale del quadratino interno con una giustificazione.
- 3 punti: Risposta corretta con il dettaglio di qualche misura intermedia trovata e descrizione poco chiara.
- 2 punti: Risposta corretta senza alcuna spiegazione né dettagli della procedura

  oppure risposta "non corretta" (per esempio con errori di calcolo), ma con il dettaglio di qualche misura intermedia trovata e descrizione chiara.
- 1 punto: Risposta con ricerca corretta che si ferma all'area del Tangram (288 cm^2) oppure misura prossima a 17 (inferiore a 16,8 e maggiore di 17,1) senza alcuna presentazione di un disegno sul quale tale misura è stata presa
- oppure inizio corretto di ricerca con qualche misura o relazione trovata tra le aree o tra i lati delle figure.

- 0 punto: Incomprensione del problema.

I. *Ah, sono sollevato, i miei allievi sono come quelli delle altre 981 classi!*

Ma… mi era stato detto che questo problema sul Tangram è un problema del RMT e, quindi, un "buon problema"??
… e che la Banca di problemi del RMT è anch'essa, di conseguenza, una «buona Banca di problemi !

L'insegnante **I**, malgrado i suoi dubbi, ha riconosciuto un primo apporto del RMT; non è l'unico a disperarsi per il livello dei suoi allievi!
"Buon Problema" o "buona Banca" non sono in alcun modo definitivi senza ripetute sperimentazioni. Queste sono solo fonti di dati che, anche se non cadono dal cielo, devono essere convalidate da una lunga pratica.

Ancora a proposito della Banca di problemi.

I. *Ho fatto un breve giro sulla Banca dei Problemi. Non tutte le schede sono complete!*
E le famiglie… un vero pasticcio!!
Sulla scheda Tangram vedo due ambiti "Geometria piana" e "Dimensioni e misure" e tre famiglie: CA - Confrontare aree, CA/P - Confrontare le aree su una quadrettatura; LA - Utilizzare le misurazioni di lunghezza e area.
Secondo me i problemi dovrebbero essere raggruppati per concetti: problemi di calcolo dell'area del rettangolo conoscendo le due dimensioni; problemi per calcolare una dimensione di un rettangolo di cui conosciamo l'area e l'altra dimensione... Dovrebbero anche separare i problemi delle aree da quelli dei perimetri,...

Ciò che in questa presentazione viene designato con "apporto" non è una semplificazione, né una facilitazione, né un risultato definitivo; molto spesso è un'apertura verso la complessità e il bisogno di saperne di più.
Le analisi a posteriori degli elaborati, effettuate dai membri del Gruppo di Lavoro Geometria Piana, rivelano la molteplicità delle procedure risolutive e i numerosi ostacoli che impediscono alla stragrande maggioranza dei gruppi di allievi di arrivare alla soluzione: sulla Gazzetta di Transalpino il Gruppo di Geometria Piana propone di inserire il Tangram in un percorso didattico sul conflitto area-perimetro.

I. *In questo articolo si parla di un procedimento per piastrellatura in 12 piccoli triangoli o 8 quadrati la cui area è $6 \times 6 = 36$ (in cm^2) portando all'area totale del Tangram di 288 cm^2 quindi ad una misura del lato molto vicino di 17 cm, perché $17 \times 17 = 289$.*
È vero, non ci avevo pensato.

Sono gli allievi che, attraverso i loro elaborati, ci insegnano quello che dovremmo sapere. Dobbiamo quindi leggere tali elaborati, fare delle "analisi a posteriori", poi (per chi non ha partecipato all'analisi), leggere questi testi se vogliamo conoscere un po' meglio che cosa succede nella testa dell'allievo.

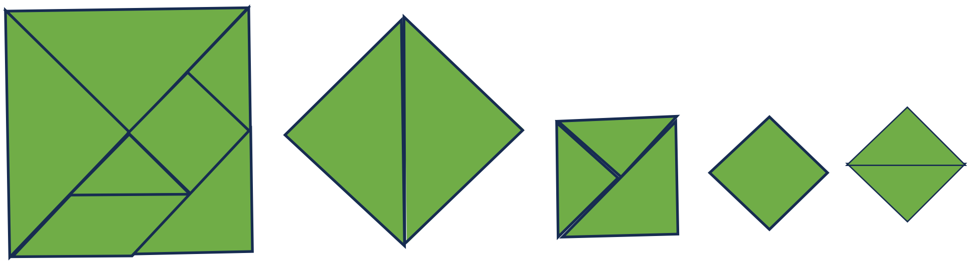
I. *I miei allievi vanno bene con i problemi di piastrellatura. Nella famiglia «Confrontare aree» della Banca dei problemi, vedo un buon successo per questo tipo di attività (ad es. "Taglia e ritaglia" (15.I.10), «La rosa di Julie» (15.II. 07)...*
Secondo i suggerimenti del GTGP, farò disegnare il Tangram, ritagliare i pezzi a grandezza reale, manipolarli, poi chiederò loro di esprimere l'area di ciascuno dei 7 pezzi utilizzando il triangolino come unità

Dopo l'attività:

I. *Ci è voluta un'ora di lavoro individuale affinché ognuno disegnasse il proprio Tangram a grandezza naturale e poi, dopo la condivisione, siamo riusciti ad accordarci sui risultati. Un'ora di lavoro per il disegno e le aree:*
Piccolo triangolo: 1 unità ; quadrato, parallelogramma e triangolo medio 2 unità ; triangolo ; 4 unità ; il tangram intero: 16 unità.

… uso di strumenti di disegno geometrico, molti angoli retti… molti lati di 6 e di 12…
Abbiamo così potuto ricordare molte conoscenze. Non è stato tempo sprecato

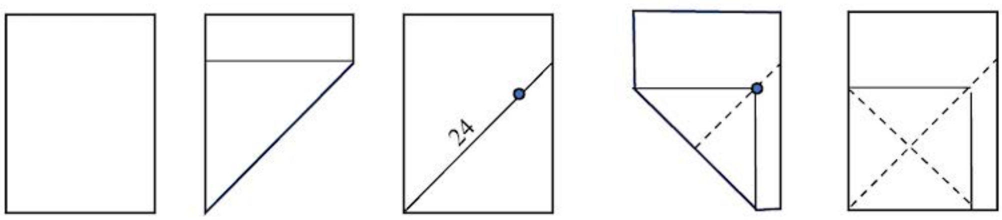
Proporrò ancora una delle attività proposte nella rubrica "Per andare più lontano" della relativa scheda. Quello dei quattro quadrati e della sua tabella riassuntiva che mi piace molto.



	Mesures des côtés (cm)	Aire (petit T)	Aire (cm^2)
petit triangle	?	1	18
petit carré	6	2	36
deuxième carré	$\sqrt{72} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$	4	72
troisième carré	12	8	144
tangram	$\sqrt{288} = 12\sqrt{2} \approx 17{,}0$	16	288

I. *Spero che i miei allievi vedano che la progressione delle aree da una linea alla successive non è proporzionale a quella delle misure dei lati. Per le scritte "6√2" e "12√2" non mi faccio troppe illusioni, ci tornerò quando saranno nella categoria 8 o 9!*

È nel ritagliare i pezzi e nel manipolarli che gli allievi si appropriano delle loro forme, delle lunghezze dei loro lati o diagonali (di dimensione 1), delle loro aree (di dimensione 2), dei loro angoli e delle relazioni che mantengono. Il falegname ha acquisito questa conoscenza attraverso la pratica professionale, il suo occhio professionale gli ha fatto subito notare che la diagonale del Tangram misura 24 cm (quattro lati del quadratino); gli basta il disegno o, eventualmente se segue i suggerimenti di Brunella Brogi sugli origami (complemento all'articolo citato in precedenza) crea il suo modello in due pieghe di un foglio rettangolare:



Partendo da sinistra:
1. un foglio rettangolare
2. il foglio piegato così (la piega è la bisettrice dell'angolo inferiore sinistro);
3. viene segnato un punto a 24,0 cm dalla sommità dell'angolo inferiore sinistro, al mm;
4. seconda piegatura, il vertice inferiore sinistro va al punto segnato;
5. le due pieghe sono le due diagonali del Tangram, la misura del lato del quadrato è 17,0 cm.

Sintesi di questo primo esempio: da una domanda sul lato di un Tangram a un problema per la classe

Da 50 minuti di ricerca da parte di un gruppo di allievi si passa ad almeno due settimane di attività in classe, con l'insegnante come gestore dell'apprendimento dei propri allievi. Gli apporti del RMT per l'insegnante riguardano:

-. i concetti di area (2D) e lunghezze (1D) che incontriamo in molte attività RMT sotto il nome di "conflitto area-perimetro", dove appare assolutamente necessario affrontare i due concetti contemporaneamente affinché gli allievi possano gradualmente distinguerli e differenziarli ;

- numeri naturali, decimali, ma anche razionali (frazioni) e irrazionali della peggiore reputazione per generazioni di allievi;
- l'ostacolo del passaggio di misure assimilate a numeri in scrittura decimale che l'allievo considera "certi" prima di comprendere che si tratta di numeri non determinabili inequivocabilmente ma localizzabili in intervalli di numeri reali: le approssimazioni!
- la proporzionalità tra le misure del lato e della diagonale di un quadrato (che diventerà $d = c\sqrt{2}$ in scrittura algebrica ma che andrebbe percepita praticamente come "la misura della diagonale è circa 1,4 volte quella del lato", per qualsiasi quadrato!
- il numero $\sqrt{2}$, impossibile da scrivere utilizzando i numeri decimali sul display di una calcolatrice ma che deve essere considerato in relazione alla reciproca operazione di "elevamento al quadrato";
- le proprietà dei poligoni elementari, che la manipolazione dei pezzi del Tangram ci permette di sapere non solo quanto misurerà il lato del Tangram del falegname se il quadratino ha un lato di 6 cm ma anche molto di più;
- isometrie, ingrandimenti e riduzioni che porteranno ai concetti di omotetia e similitudine…

Le due o tre settimane trascorse sul Tangram coprono tutte le conoscenze del programma di geometria dalle categorie da 5 a 10 del RMT, se vengono ripetute più volte all'anno e di anno in anno riguardo ad altri problemi della Banca del RMT, non è escluso che il nostro insegnante **I** possa abbandonare il libro di testo e i suoi esercizi ripetitivi.

Esempio 2. A proposito della divisione per 7

Questa seconda attività è recente, è stata proposta agli allievi delle categorie 5, 6 e 7 dopo aver sollevato molti dubbi all'interno del "Gruppo Problemi" che riteneva che non dovessero essere affrontate le classi di resto prima del liceo. È stata la prima parte, quella della colorazione sottostante, che ha permesso di proporle.

ARCOBALENO

Giuseppe e Maria chiedono ai loro amici:

"Colorate i numeri di questa tabella con i colori dell'arcobaleno…

… in rosso quando il resto della loro divisione per 7 è 0, …

… in arancione, quando il resto della loro divisione per 7 è 1,

… in giallo, quando il resto della loro divisione per 7 è 2,

… in verde, quando il resto della loro divisione per 7 è 3,

… in blu, quando il resto della loro divisione per 7 è 4,

… in indaco, quando il resto della loro divisione per 7 è 5,

… in violetto, quando il resto della loro divisione per 7 è 6."

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
30	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**
40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**
50	**51**								

Per questa prima parte, l'intenzione degli autori è un suggerimento per discutere, in gruppo e poi tra gruppi quando il problema verrà ripreso in classe, le relazioni tra l'algoritmo della "divisione per 7 con resto", le operazioni di moltiplicazione, sottrazione e i multipli di 7.

La seconda parte chiede di trovare il colore di un numero che è la somma di un numero giallo e di un numero verde. (Risulta anche molto interessante, lo si trova nell'articolo "Sulla divisione euclidea" di François Jaquet e Rita Spatoloni, Gazzetta n. 14, pp 25-45).

Ecco la colorazione, attesa dall'adulto, che appare nell'analisi a priori del problema.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51								

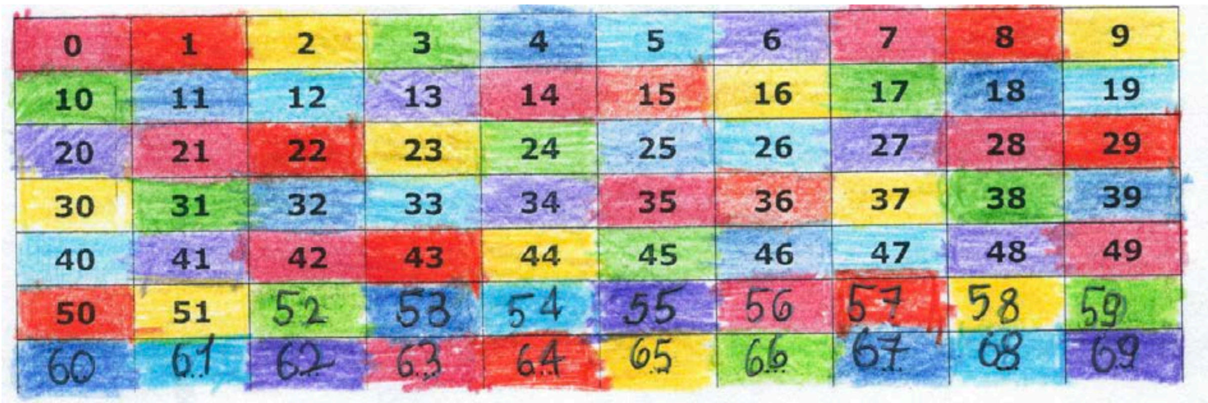
Non è bellissimo?

Per questo recente esempio, gli apporti del RMT si trovano già nell'enunciato del problema perché l'analisi di numerosi problemi ha mostrato le lacune nella divisione, cosa resta, cosa manca per arrivare al quoziente successivo...

I. *Non è un* ***problema****, è un semplice esercizio di divisione per 7. Non perderemo tempo a colorare un'intera tabella quando sappiamo già che sono i multipli di 7 i quali, divisi per 7, daranno 0, poi i numeri che valgono uno più di un multiplo di 7 che daranno un resto di 1, ecc.*

Il nostro insegnante non è l'unico a pensarla così. L'algoritmo viene proposto dalle categorie 3 e 4.

Una delle migliori colorazioni (cat 5).



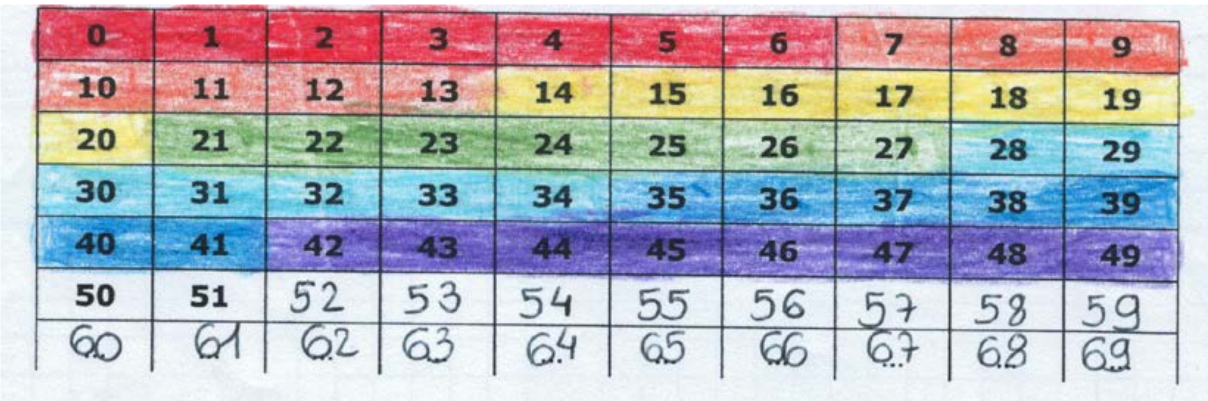
Gli allievi sono andati oltre 51. Pensano che si possa continuare oltre 69?

Un altro tipo di colorazione con caselle bianche da 0 à 6: **prima grande sorpresa!!**

Frequenza di questo tipo di risposta, su quasi 300 copie analizzate: Cat 5: 35%; categoria 6: 28%; categoria 7: 27%;

Perché? Non dovremmo forse ricercarne le cause nell'algoritmo meccanico della divisione? *Se la prima cifra del dividendo è minore di 7 non possiamo e partiamo dalle prime due cifre*.

Altro tipo di colorazione (incontrata una buona dozzina di volte), (cat 6) con confusione resto/quoziente: rosso: 0 volte 7; arancione: 1 volte 7; giallo: 2 volte 7;…



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69

Sorpresa?

Che cosa ci dicono gli allievi (da leggere con attenzione).

I. *Non pensavo che la stragrande maggioranza dei gruppi "avrebbe calcolato" il resto, (con l'algoritmo della divisione con resto) alcune volte per ogni numero della tabella! Che le caselle da 0 a 6 non sarebbero state colorate nel 30% degli elaborati!*
Questa colorazione allora non sarebbe inutile?

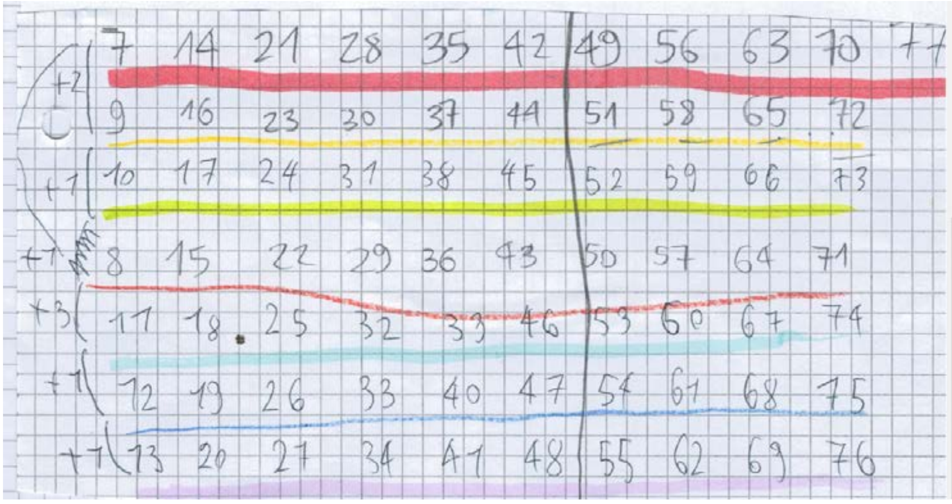
Esempio di categoria 6, con colorazione corretta delle caselle 7, 8, …

Siamo partiti con il colore rosso per ottenere quelle colorate di rosso. Basta colorare i multipli di 7. Per trovare l'arancione abbiamo diviso per 7 i numeri che venivano dopo quelli colorati di rosso e tutti sono risultati con il resto di uno. Per trovare i numeri gialli abbiamo diviso per 7 i numeri che venivano dopo quelli colorati di arancione e tutti sono risultati con il resto di 2. … (le stesse frasi sono ripetute per i colori successivi).

Altri esempi (da leggere sempre con attenzione perché sono gli allievi che ci mostrano che cosa passa nella loro testa e nessun altro può farlo!!)

Dalla categoria 5: *all'inizio abbiamo diviso tutti i numeri da 0 a 14 per 7. Poi vedendo che i colori dei numeri si ripetevano abbiamo colorato la tabella.*

Un'idea di un gruppo di allievi (cat 7)
E se disponessimo i numeri in righe a partire da 7; 14; 21; …invece di partire dalle decine come nella tabella proposta?



Questa nuova disposizione testimonia la “scoperta” che tutti i numeri (dal 7) possono essere raggruppati in sette famiglie meglio visibili in particolare nella tavola originaria, con passaggi di “+1” da una famiglia alla successiva.

Altri esempi di spiegazioni:

(Cat 7) *Abbiamo iniziato calcolando i numeri con i colori corretti del resto utilizzando la tabellina del 7.*
Qui non ci si riferisce ai multipli di 7, ma solo a quelli presenti nel “nella tabellina del 7”.

(Cat. 7). *All'inizio abbiamo guardato uno per uno i numeri che danno resto 0, 1 e 2 poi colorando la tabella abbiamo capito che c'era una sequenza.*
Appaiono regolarità, scoperta essenziale.

Che cosa abbiamo imparato dagli allievi
- Alcuni di loro (più della metà) hanno visto una relazione tra i numeri (rossi) il cui resto della divisione per 7 è 0 e i primi multipli di 7, e talvolta tutti i multipli di 7. (l'altra parte potrebbe averla scoperta durante la fase della messa in comune o dell’istituzionalizzazione).
- Circa il 30% di coloro che percepivano la proprietà “multiplo di 7” non erano però in grado di definire un resto per i numeri inferiori a 7.
- La colorazione è ancora insufficiente per alcuni allievi, in particolare per la categoria 7 dove si avvicinano al 50%.

Si tratta di dati oggettivi, destinati agli insegnanti.

Una proposta dalla scheda della Banca di problemi

I. *Che bella idea, i miei allievi non avranno solo colorato! Grazie Euclide.*

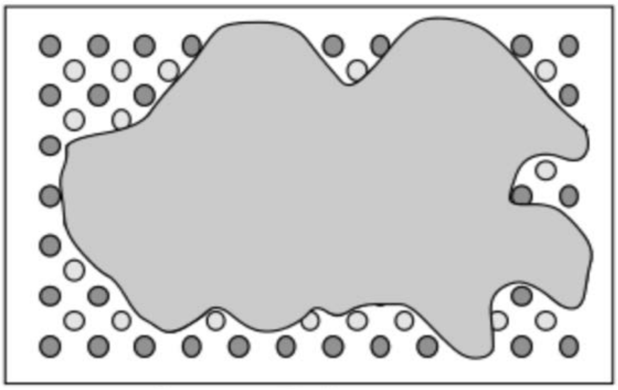
0 **$7 \times 0 + 0$**	**1** **$7 \times 0 + 1$**	**2** **$7 \times 0 + 2$**	**3** **$7 \times 0 + 3$**	**4** **$7 \times 0 + 4$**	**5** **$7 \times 0 + 2$**	**6** **$7 \times 0 + 2$**
7 **$7 \times 1 + 0$**	**8** **$7 \times 1 + 1$**	**9** **$7 \times 1 + 2$**	**10** **$7 \times 1 + 3$**	**11** **$7 \times 1 + 4$**	**12** **$7 \times 1 + 5$**	**13** **$7 \times 1 + 2$**
…	…	…	…	…	…	…

L'insegnante può (o deve) annotare in particolare nel linguaggio aritmetico le relazioni fondamentali tra numeri e multipli di 7.

Sintesi di questo secondo esempio: **sui legami tra divisione per 7 e multipli di 7**
Gli apporti qui sono delle sorprese: le caselle non colorate da 0 a 6, la necessità di ripetere l'algoritmo per tutti i numeri o almeno per gran parte di essi. Sono stati gli allievi a rivelarli alle persone che ne hanno esaminato gli elaborati, che sono insegnanti. C'è qui una doppia “ignoranza”: gli allievi non conoscono tutti i legami tra divisione, resto e multipli; non tutti gli insegnanti sanno che gli allievi continuano a ignorarli. Dopo il lavoro in classe, che deve andare oltre la tavola da colorare correttamente, gli allievi avranno fatto progressi nella costruzione dei concetti di divisione e di multipli, gli insegnanti avranno preso coscienza della necessità di andare, con i loro allievi, oltre il aspetti algoritmici di quella che era considerata conoscenza definitivamente acquisita.

Esempio 3. A proposito di punti nascosti

LA MACCHIA
Toto ha rovesciato il vasetto della marmellata sulla bella tovaglia a pois della cucina.
Quanti pois sono completamente ricoperti dalla marmellata?

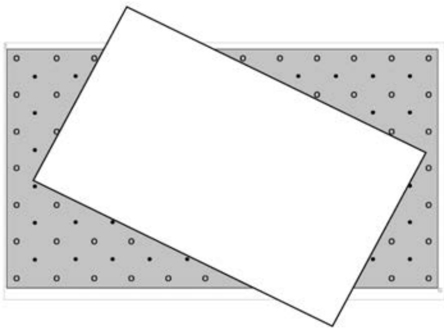


Parecchio tempo fa, nel 1995, questo problema fu proposto nel 3° rally matematico romando, con una prima partecipazione di classi italiane, da cui l’appellativo “transalpino”. Ma rappresenta anche e soprattutto la prima analisi a posteriori, ancora elementare, ma pubblicata! (In L’educazione Matematica. Ottobre 1995).

I. *Un bel “problema di gara”, **simpatico**, piacevole, ma… come potrei inserirlo nel programma della mia classe?*

Come il nostro insegnante, **I**, i vecchi enunciati della nostra Banca incitano ad andare alla ricerca di conferme o di notizie ulteriori. Un nuova versione del problema è stata così proposta 28 anni dopo**:**

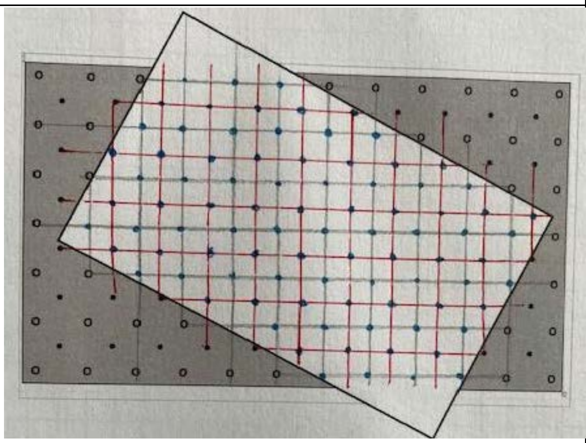
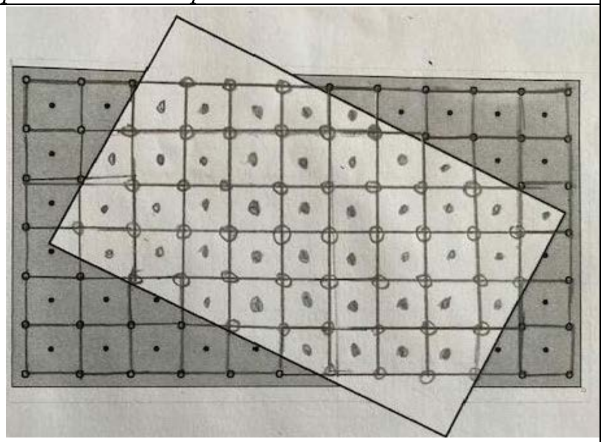
PUNTI NASCOSTI (31.II.06 cat 4- 5):
È stato posto un foglio bianco su di un rettangolo grigio decorato con due tipi di punti: bianchi (o) e neri (•)
Quanti sono, in tutto, i punti nascosti dal foglio bianco?...



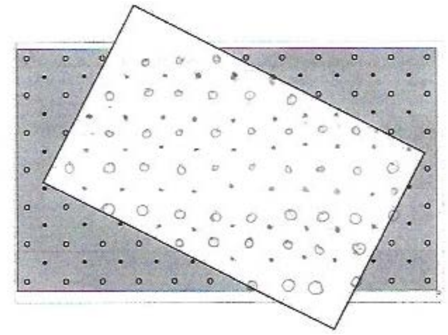
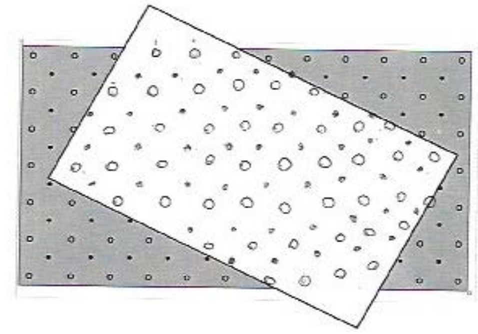
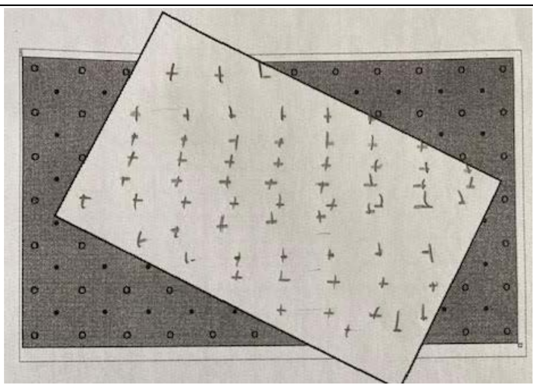
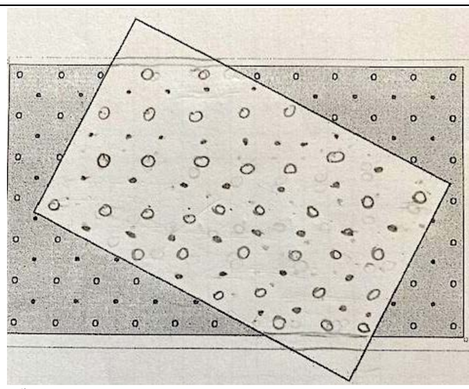
I. *L’analisi a priori prevede il disegno dei punti nascosti e prevede di contarli uno ad uno o con due moltiplicazioni: (7×12) bianco e (6×11) nero; 150 in totale; 150 - 61 punti visibili: 89 punti nascosti. Non passerò una settimana lì con la mia classe, ho il programma da fare!*

E infatti, la prima analisi a posteriori del 1995 non aveva segnalato altro, rimaniamo con il “bel problema della gara”.
Ma nel 2024 abbiamo imparato a leggere meglio ciò che gli allievi ci mostrano.

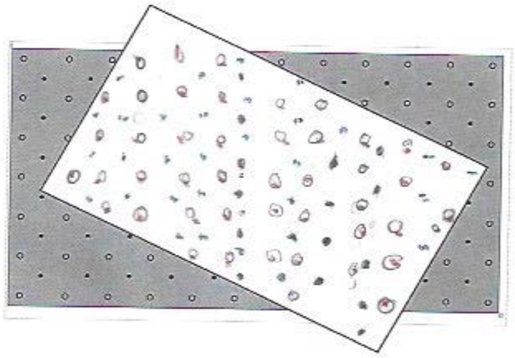
Procedure con disegno, come ce le aspettiamo:

Abbiamo tracciato le linee perpendicolari ai due tipi di punti con un righello e una squadra... 89 punti	*Facendo dei quadrati composti da 5 puntini, abbiamo scoperto che sotto… ci sono 46 puntini vuoti e 43 puntini neri… 89 puntini in tutto.*
	

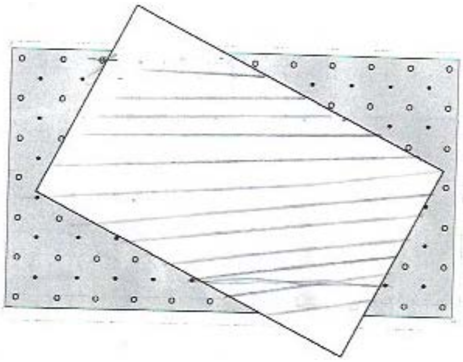
Risposte più frequenti!!

 Cat 4 (89 punti)	 Cat 4 (89)
 Cat 5 (64)	 Cat 4 (76)

Risposte più frequenti (seguito)!!

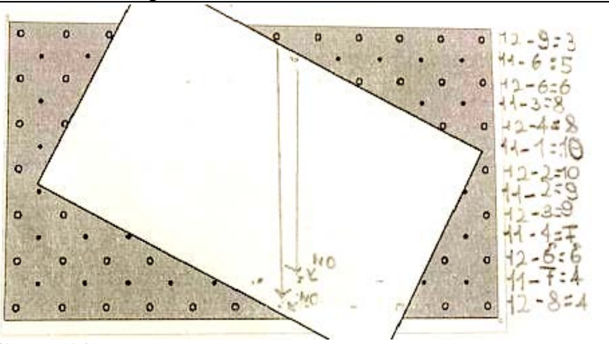


Cat 5 (90)

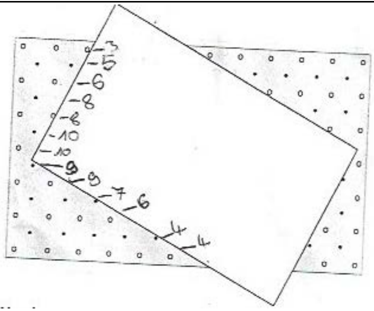


Cat 4 (36)

Procedure non previste



Cat 5 (89)



Cat 4 (89)
Abbiamo contato i 3 della prima riga poi quelli della riga sotto
... I punti nascosti, sono 89

«Saperi» dimenticati o ignorati?

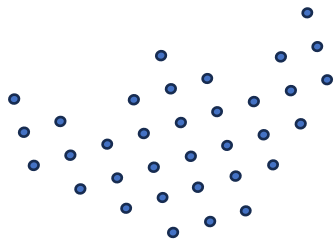
(Commento nella scheda della Banca Problemi): ... *I risultati hanno mostrato che, nonostante la semplicità della scelta delle procedure, sono gli errori che rivelano gli ostacoli incontrati perché solo il 20% degli elaborati dà la risposta esatta "89 punti nascosti " e circa il 15% delle risposte con 87, 88, 90 o 91 punti nascosti.*

Le procedure mediante il disegno dei punti nascosti (che compaiono in circa la metà degli elaborati esaminati rivelano un ostacolo sottovalutato durante l'analisi a priori del problema e anche nella sua prima versione quasi 30 anni fa LA MACCHIA (03.II.06, cat 3, 4, 5): il concetto di rete di punti "a griglia" è lungi dall'essere costruito nelle categorie 4 e 5. Coloro che avevano progettato il problema non immaginavano l'entità del lavoro di costruzione di questa rete. Delle due reti che mostrano il livello di costruzione della conoscenza in gioco.)

Gli elaborati precedenti mostrano che, per la maggior parte degli allievi delle categorie 4 e 5, la costruzione delle seguenti conoscenze è ancora incompleta:
- un allineamento (visivo) "poggia" su una linea retta,
- i punti sono alla stessa distanza l'uno dall'altro,
- le rette della rete sono parallele e/o perpendicolari.

È sufficiente lasciar passare il tempo perché questa conoscenza "maturi", spontaneamente?

I. *Ho appena letto nella scheda il paragrafo "Procedure, ostacoli ed errori individuati" non sono del tutto convinto ma ho intenzione di proporre l'attività ai miei allievi, poi dopo la discussione collettiva, ognuno dovrà scrivere una soluzione personale e fare un disegno preciso di tutti i punti nascosti.*
Come compito a casa.
La "Banca" mi propone un'altra attività nella sezione "Per andare più lontano":

"Jules ha disegnato una bellissima figura composta da tanti punti. ***Riproducete su un foglio di carta bianco".***	

I. *Gli allievi dovrebbero scegliere un punto di partenza, riportare le distanze (usando un compasso, se possibile senza misurare), usare il righello per le rette, costruire paralleli, perpendicolari, ecc.*
Non ne sono convinto, lo vedranno più tardi, quando discuteranno dei sistemi di coordinate; questa conoscenza potrebbe anche apparire naturalmente nel tempo.

Sintesi del terzo esempio: su ciò che si nasconda dietro una griglia quadrettata di punti
Anche in questo caso gli apporti rappresentano una grande sorpresa, per chi ha immaginato la nuova versione dell'enunciato e per l'insegnante, lettore delle analisi. Affrontiamo il dibattito tra innato e acquisito. È sufficiente lasciar passare il tempo perché queste conoscenze "maturino", spontaneamente, o affidarle alle fasi successive del percorso scolastico?

Il nostro insegnante **I** non si fa illusioni? I suoi colleghi dei livelli successivi, oltre la categoria 6, avranno costruito una griglia di punti? Si renderanno conto dell'importanza delle proprietà di una griglia per i concetti di distanza, perimetro e area, misura di lunghezza, come hanno osservato i membri del nostro Gruppo di Geometria Piana analizzando le risposte degli allievi delle categorie seguenti, da 7 a 10?

Qualche riflessione conclusiva

Apporti per l'insegnamento ?
I "saperi" favoriti dal Tangram, i collegamenti tra multipli e algoritmi di divisione, le linee nascoste dietro gli allineamenti e molte altre domande… potrebbero "migliorare" l'insegnamento?

Il dibattito è aperto e ognuno ha il proprio punto di vista su questo argomento, a seconda della propria formazione, esperienza e idee didattiche.

Sembra che il nostro insegnante **I** abbia fatto alcuni passi avanti verso l'utilizzo delle proposte del RMT in classe. Ma la strada è lunga, per lei o per lui come per tutti noi.

Se gli allievi hanno molto da fare per costruire la propria "conoscenza" matematica, anche noi insegnanti abbiamo molto da fare per costruire la nostra "conoscenza" nell'insegnamento della matematica o migliorare il nostro modo di "imparare a imparare".

In questo dibattito bisogna rendersi conto che la formazione al mestiere di insegnante non si limita a qualche "lezione" di "didattica della matematica" degli ultimi anni di studi, ma inizia fin dalla più tenera età e prosegue durante tutto il percorso scolastico, con concezioni sull'apprendimento lontane da quelle del sociocostruttivismo alla base di tutte le nostre riflessioni e osservazioni delle nostra ricerche del RMT.

È necessario un cambiamento di paradigma

La tabella che segue, lungi dall'essere esaustiva, illustra alcune caratteristiche che distinguono l'insegnamento della matematica cosiddetta "tradizionale" in cui l'insegnante è stato immerso durante il suo percorso scolastico e i suoi primi anni di pratica, e quelle di una concezione frutto dei nostri 30 anni di osservazione e analisi del modo in cui "gli allievi costruiscono" la loro conoscenza.

L’allievo che ascolta bene, che riceve i saperi dall'esterno, che li ripete e li applica	L’allievo che costruisce gradualmente le proprie conoscenze sulla base delle sue esperienze personali e delle situazioni di apprendimento che gli vengono offerte
L'insegnante che spiega bene, trasmette i saperi del programma di matematica, li fa ripetere e praticare	L’insegnante “regista”
Il bell’edificio dei matematici ultimato per essere costruito a piccoli passi in maniera lineare	Un accumulo di conoscenze provvisorie da riorganizzare costantemente
Ostacoli, conflitti, errori da evitare ed eliminare	Ostacoli, conflitti, l’errori da individuare per sfruttarli e aiutare l’allievo a superarli
Esercizi ripetitivi per acquisire competenze definitive	Attività diversificate e una progressiva costruzione di conoscenze sempre migliorabili

Questo inventario, anche se molto parziale, mostra chiaramente che il cambiamento di paradigma proposto non può avvenire rapidamente o senza sperimentazione. La strada per arrivarci è lunga.

Verso l’avvenire: i percorsi di apprendimento

Gli apporti dei nostri vecchi “problemi della gara” ci incoraggiano a interessarci ora…

- ai saperi,
- allo stato della loro costruzione da parte dell’allievo
- agli ostacoli alla loro costruzione
- alle attività favorevoli a questa costruzione
- al loro statuto nell’apprendimento della matematica
- al loro riconoscimento da parte dell'insegnante

Il ricordo di una bellissima impresa cooperativa, dell'intenso impegno collettivo e delle amicizie che ne sono derivate, la soddisfazione di aver letto quello che ci raccontano gli allievi;
tanti elaborati, per i nostri 1600 problemi, più della metà dei quali ancora da leggere e analizzare;
le nostre pubblicazioni (Atti dei convegni e Gazzetta di transalpino);
sono apporti che ci spingono a dire che **la Banca di problemi del RMT è il nostro avvenire.**

Grazie a tutte e a tutti:
L’inventore del Tangram,
Rita ed Euclide per la divisione per 7,
gli allievi per i Punti nascosti e tutti gli altri problemi,
GPIL (Graziella, Clara, Daniela, Georges, AnnaMaria, Angela),
CG (Clara, Florence, Gabriella, Licia, Lucia, Rita, … Lucia D, i due Philippe, Roland, Laurent),
Lucia e la Gazzetta, Luc, sine qua non, per la Banca,
e tutti gli altri, che rimarranno sempre nei nostri cuori.

AFFASCINANTE, RICCA DI STORIA E DI SAPERI MATEMATICI, EPPUR A SCUOLA "DIMENTICATA"

DA ARCHIMEDE ALLE GALASSIE

La bellezza nella matematica[1]

FASCINANTE, RICHE EN HISTOIRE ET EN CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES, POURTANT « OUBLIÉE » Á L'ÉCOLE

D'ARCHIMÈDE AUX GALAXIES

La beauté en mathématiques

Lucia Grugnetti

Riassunto

Questo articolo propone una rilettura personale della storia di una curva suggestiva, la spirale, che diventa tante spirali diverse e che incontra sul suo lungo e ricco cammino, fra gli altri "oggetti matematici", le successioni, a partire dalla famosa successione di Fibonacci. Gli aspetti storici, peraltro, si coniugano bene con diversi aspetti didattici, nell'articolo esemplificati, che dalla storia possono prendere spunto e svilupparsi.

Résumé

Cet article propose une relecture personnelle de l'histoire d'une courbe suggestive, la spirale, qui devient de multiples spirales différentes et qui rencontre sur son long et riche chemin, entre autres "objets mathématiques", les successions, à partir de la célèbre séquence de Fibonacci. En outre, les aspects historiques se combinent bien avec divers aspects pédagogiques, illustrés dans l'article, qui peuvent s'inspirer et se développer à partir de l'histoire.

Introduzione

Il sottotitolo di questa presentazione nell'andare da Archimede alle Galassie è indubbiamente piuttosto "presuntuoso", ma forse si riscatta laddove nel suo viaggio planetario richiama la bellezza nella matematica.

Gli antichi cinesi sembra dicessero che "un grande viaggio comincia dal primo passo" e questo è spesso anche vero, ma nel caso della protagonista di questa presentazione il primo passo si perde nella notte dei tempi. Si tratta peraltro di una protagonista ricca di fascino.

Il poeta Alfonso Carotenuto ce la presenta con questa sua poesia del 2013[2]:

È come un gioco, ma non troppo,
quello della spirale, simbolo intrigante,
ineffabile ed inestricabile:
dal nulla alla volta celeste,
alle galassie e ritorno;
dalle immensità del tutto al niente,
dall'infinito al buco nero.

Nascere nel grembo materno
e poi morire e svanire nel nulla:
dall'essere al non essere,
vorticando, di onda in onda,
nel mistero della vita e del mondo.

Roma, 20 novembre 2013

---

[1] Conferenza dell'autrice presentata nell'ambito dell'incontro del Grimed tenutosi a Siena nel marzo 2023.

[2] https://unideadivita.blogspot.com/2013/11/il-mistero-della-spirale.html

Le spirali possiedono una bellezza “semplice” che ha portato gli esseri umani a riprodurle con particolare attenzione all’arte e che la natura ha utilizzato in strutture vitali, come mostrano, fra tanti altri, questi esempi:

Incisioni celtiche

Incisioni delle popolazioni sarde

Vaso etrusco (collezione Pallavicini-Trequanda)

Musei Vaticani

Germoglio di felce

Conchiglia di Nautilus

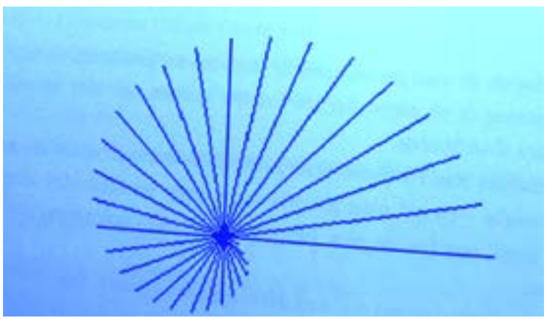
Galassia

Nel suo lungo cammino la spirale, che si declinerà in diverse spirali, incontra innumerevoli “oggetti matematici” e, in questa presentazione lo sguardo si sofferma in particolare sulle successioni che, in un gioco di *fil rouge*, si intersecano e si alimentano a vicenda.

Questo viaggio esplorativo sarà compiuto sotto l’egida di alcune “guide”:

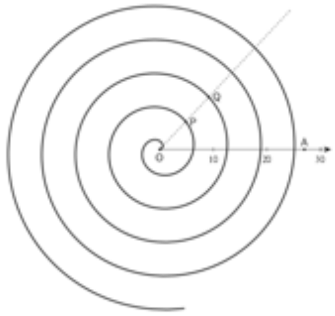
Archimede (ca 287 a. C.-ca 212 a. C.) **e la sua spirale**

Il termine **spirale** è spesso utilizzato in maniera generica per descrivere una curva geometrica piana che si arrotola intorno a un asse o a un punto centrale dal quale si allontana sempre di più.
Dal punto di vista strettamente matematico è necessario fare riferimento al trattato *Sulle spirali* (225 a. C.) di Archimede.
Per descrivere una spirale, Archimede ricorre a un doppio movimento: una semiretta che ruota con movimento uniforme intorno alla sua origine, mentre un punto si sposta sulla semiretta con movimento uniforme a partire dall'origine.
Se si segue il movimento del punto mobile che indichiamo con P, lo si vede ruotare intorno all'origine O mentre se ne allontana. Se il punto lascia una traccia al suo passaggio, viene descritta la spirale di Archimede.



La spirale di Archimede si caratterizza per le spire equidistanti l'una dall'altra, come si può osservare in una corda arrotolata su se stessa. In natura, ne è un buon esempio il germoglio di felce.

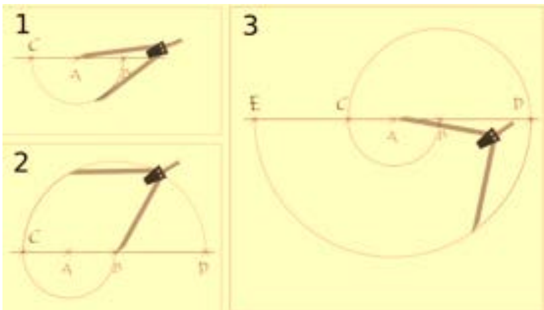
Questa spirale può essere espressa tramite l'equazione in coordinate polari *(introdotte nel XVII secolo)*[3] $\rho = k\,\theta$
La distanza ρ di *P* da *O* è ogni volta direttamente proporzionale all'ampiezza θ dell'angolo, di cui è ruotata la semiretta.



***Spunto didattico**: "apriamo" gli orizzonti della geometria*

Spirale a scuola, perché tralasciarla?
Nei vari ordini di scuola la geometria è prevalentemente una geometria di "linee chiuse".
Lo sguardo resta fissato su contorni e parti di piano racchiuse da tali contorni e non si spinge verso orizzonti aperti che in qualche modo consentono di andare lontano, molto lontano.

Da semicirconferenze alle spire di una spirale, con allievi di scuola secondaria di primo grado



dove, ogni volta, si raddoppia il raggio precedente.

Perché non spostarsi poi anche nell'ambito della botanica e vedere il nesso tra matematica e natura? E la natura, come peraltro è noto e come comunque vedremo più avanti, è molto prodiga di affascinanti esempi di spirali, più che di esempi di poligoni e di altre figura geometriche.
Se ci spingessimo all'indietro fino per esempio al tempo di Archimede?
In queste classi si parla del teorema di Pitagora, d'accordo, ma chi erano questi antichi sapienti? Pitagora è solo un "teorema" o è stato anche un uomo in carne e ossa? E così Archimede?
Si possono cominciare a gettare le basi per far vivere la matematica come parte della storia dell'umanità e in questo modo la matematica si umanizza e forse intimorisce di meno. E' una parte di noi.
Si potrebbe pensare in tal modo che gli oggetti matematici formalizzino l'operare umano (E. Giusti, 1999, p.26) [4].

Apparente intermezzo dove i conigli diventano protagonisti

I conigli sono quelli ben noti dei quali ci parla Leonardo Pisano detto Fibonacci (Pisa 1180-1250) nel suo *Liber Abaci* (1202) nel problema:

---

[3] Piccolo memento: le coordinate polari costituiscono un sistema di coordinate nel piano della forma (r, θ) in cui ogni punto P del piano viene individuato univocamente dalla distanza r da un punto fisso O, detto polo, e dall'ampiezza in radianti θ dell'angolo avente vertice nel polo.

[4] Cfr.Bibliografia.

fotocopia da *Scritti di Leonardo Pisano: mathematico del secolo decimoterzo*, pubblicati da Baldassarre Boncompagni, Roma, 1857.


parium
1
primus
2
secundus
3
tercius
5
Quartus
8
Quintus
13
Sextus
21
Septimus
34
Octauus
55
Nonus
89
Decimus
144
Undecimus
233
Duodecimus
377

parium
1
primus
2
secundus
3
tercius
5
quartus
8
quintus
13
sestus
21
septimus
34
octauus
55
nonus
89
decimus
144
undecimus
233
duodecimus
377

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.
Qvidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense geminat; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense; ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria 8; ex quibus paria 5 geminant alia paria 5: quibus additis cum parijs 8, faciunt paria 13 in quinto mense; ex quibus paria 5, que geminata fuerunt in ipso mense, non concipiunt in ipso mense, sed alia 8 paria pregnantur; et sic sunt in sexto mense paria 21; cum quibus additis parijs 13, que geminantur in septimo, erunt in ipso paria 34; cum quibus additis parijs 21, que geminantur in octauo mense, erunt in ipso paria 55; cum quibus additis parjis [sic] 34, que geminantur in nono mense, erunt in ipso paria 89; cum quibus additis rursum parijs 55, que geminantur in decimo mense 144; cum quibus additis rursum parijs 89, que geminantur in undecimo mense, erunt in ipso paria 233. Cum quibus etiam additis parijs 144, que geminantur in ultimo mense, erunt paria 377; et tot paria peperit suprascriptum par in prefato loco in capite unius anni.
Potes enim uidere in hac margine, qualiter hoc operati fuimus, scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, uidelicet 1 cum 2; et secundum cum tercio; et tercium cum quarto; et quartum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cum undecimo, uidelicet 144 cum 233; et habuimus suprascriptorum cuniculorum summam, uidelicet 377; et sic posses facere per ordinem de infinitis numeris mensibus.

Traduzione
Quante coppie di conigli discendono in un anno da una coppia.
Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita. Poiché la suddetta coppia si riproduce nel primo mese, devi raddoppiarla: nel primo mese le coppie saranno 2.
Di queste, la prima, nel secondo mese ne genera un'altra: quindi nel secondo mese ci sono 3 coppie. Di queste, durante il mese, due si riproducono e nel terzo mese, generano 2 coppie: quindi, nel terzo mese, ci sono 5 coppie di conigli. Di queste, durante il mese, 3 si riproducono e nel quarto mese ci sono 8 coppie. Di queste, al quinto mese, 5 coppie ne generano altre 5 che aggiunte alle 8 coppie esistenti fanno 13 coppie. Di queste, le 5 generate nel mese precedente non generano nel sesto mese, ma le altre 8 si riproducono, quindi nel sesto mese ci sono 21 coppie. Aggiungendo a queste altre 13 coppie generate nel settimo mese, ci saranno in quel mese 34 coppie. Aggiungendo a queste altre 21 coppie generate nell'ottavo mese, ci saranno in quel mese 55 coppie. Aggiungendo a queste, altre 34 coppie generate nel nono mese, ci saranno in quel mese 89 coppie. Aggiungendo nuovamente a queste altre 55 coppie generate, nel decimo ci saranno 144 coppie.

Aggiungendo nuovamente a queste altre 89 coppie generate nell' undicesimo mese, ci saranno in quel mese 233 coppie.
Aggiungendo nuovamente a queste anche 144 coppie generate nell'ultimo mese, ci saranno 377 coppie. Tante sono le coppie generate dalla coppia iniziale in quel luogo in capo ad un anno. Puoi inoltre vedere in questo margine (vedi sotto) come abbiamo operato: abbiamo sommato il primo numero con il secondo, cioè 1 e 2; il secondo con il terzo, il terzo con il quarto, il quarto con il quinto e così via finché abbiamo sommato il decimo con l'undicesimo, cioè 144 con 233 ed abbiamo ottenuto la somma dei suddetti conigli, cioè 377; e così si può fare per un numero infinito di mesi.

In sintesi

Immaginiamo di chiudere una coppia di conigli in un recinto. Sappiamo che ogni coppia di conigli:
- inizia a generare dal secondo mese di età;
- genera una nuova coppia ogni mese;
- non muore mai. Quanti conigli ci saranno nel recinto dopo un anno?

E si arriva così alla famosa successione:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

A partire dalla quale troviamo degli interessanti ***FIL ROUGE che SI INTERSECANO.***

Dopo quasi tre secoli dal Liber Abaci, nel 1498 il famoso trattato *De Divina proportione* (in forma manoscritta[5])

del frate francescano e matematico Luca Pacioli (Borgo San Sepolcro 1445 ca – Venezia 1514 o 1517), riprende in maniera magistrale lo studio della sezione aurea, che già aveva affascinato matematici e filosofi dell'antichità classica.

Tale prezioso trattato verrà poi pubblicato a Venezia nel 1509.
Le magnifiche figure sono di mano di Leonardo da Vinci.
Si legge in *Storia delle Matematiche* di Gino Loria (1950) che il tema del trattato è *la divisione in media ed estrema ragione, proporzione divina secondo Pacioli, divisione aurea secondo alcuni moderni…* dove Pacioli *espone buon numero di teoremi relativi ad essa, rinviando per le dimostrazioni a Euclide e Campano, limitandosi a illustrarli sopra esempi numerici.*

È avviato in un certo senso, l'incontro tra gli aspetti prettamente geometrici della sezione aurea degli antichi greci e quelli numerici con il *rapporto aureo,* che verrà poi detto *numero d'oro*, in relazione anche alla successione di Fibonacci e a quella che prenderà il nome di *spirale di Fibonacci.*

La storia cammina con i suoi passi e il legame fra i numeri della successione di Fibonacci e il *numero d'oro* fu

scoperta solo nel 1611, da Johannes Kepler (1571-1630); il suo vivo interesse per la sezione aurea è testimoniato, fra l'altro, dalla sua opera *Mysterium Cosmographicum*. In una sua lettera, riportata da Mario Livio[6] , lo scienziato

[5] Una delle due sole copie manoscritte è custodita nella Biblioteca Ambrosiana. L'altra nella *Bibliothèque Publique et Universitaire* di Ginevra.
[6] *La sezione aurea*, Milano, Rizzoli 2003, pag. 226

scrive: *Questa proporzione [...] che gli odierni [...] chiamano divina [...] è congegnata in modo tale che i due termini minori di una serie nascente presi insieme formino il terzo, e gli ultimi due addizionati, il termine [a loro] successivo, e così via indefinitamente, dato che la stessa proporzione si conserva inalterata. [...]* ***Più si va avanti a partire dal numero 1, più l'esempio diventa perfetto***.

Si può osservare, infatti, che il quoziente tra un termine qualsiasi della successione e il suo precedente si approssima a Φ (1,618033...) sempre più.

1:1 = 1	89:55 = 1,61818181
2:1 = 2	144:89 = 1,61797752
3:2 = 1,5	233:144 = 1,61805555
5:3 = 1,66666666 8:5 = 1,6	377:233 = 1,61802575
13:8 = 1,625	610:377 = 1,61803713
21:13 = 1,61538461	987:610 = 1,61803278
34:21 = 1,61904761	...
55:34 = 1,61764705	

Dal *Liber Abaci* di Fibonacci del 1202 all'opera di Keplero del 1611 corrono quattro secoli e sarebbe interessante a scuola non comprimere i risultati, qualsiasi essi siano, senza darne la dimensione temporale che è quella percorsa dall'umanità.

La matematica come un continuo sforzo di ripensamento e di miglioramento da parte dell'uomo piuttosto che come un edificio che raccoglie verità certe e immutabili.

Seguendo l'itinerario del suo pensiero, i suoi tentennamenti, i suoi progressi, ne potremmo rendere più obiettivo il cammino e più significativi i concetti.

FIL ROUGE che SI INTERSECANO. **La successione di Fibonacci e… una spirale particolare attraverso il rettangolo aureo e il numero d'oro, adatta anche ai nostri allievi!**

Spunto didattico

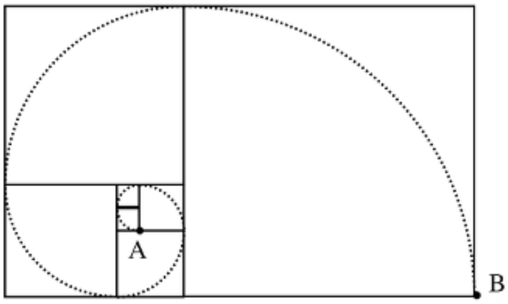
La spirale (Rally: 19.F.17 ; categorie: 8, 9, 10)

Leonardo forma dei rettangoli accostando dei quadrati. Ha cominciato con due piccoli quadrati, uno dei quali ha un vertice nel punto A, poi ha continuato accostando un quadrato sulla destra, poi uno sotto, poi uno a sinistra, poi uno sopra, poi di nuovo uno a destra e così via.

Nella figura è rappresentato il rettangolo formato dai primi sette quadrati, che ha un vertice nel punto B.

Leonardo ha poi disegnato un quarto di circonferenza all'interno di ciascuno dei sette quadrati; ciascun quarto di circonferenza congiunge due vertici opposti di un quadrato ed ha il centro in un altro vertice dello stesso quadrato.

I primi sette quarti di circonferenza formano una "spirale" che va da A a B.



Il perimetro del rettangolo formato dai primi sette quadrati misura136 cm.

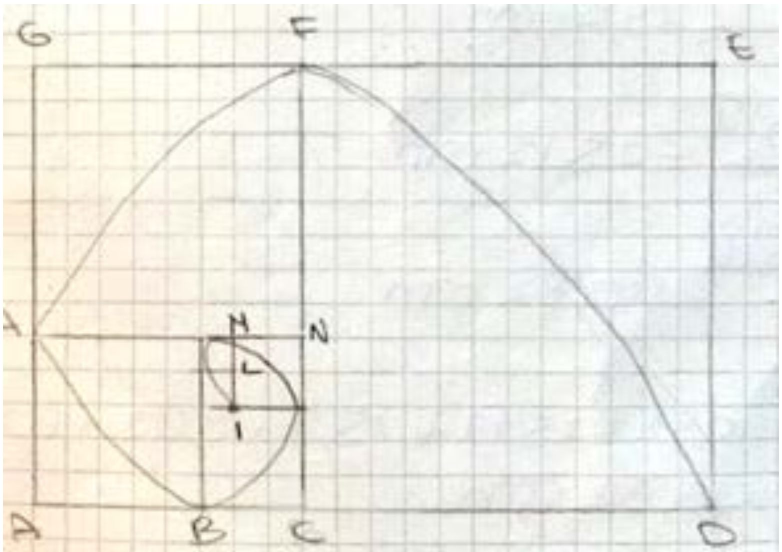
Qual è la lunghezza della spirale da A a B? Scrivete la misura con l'aiuto di π o con un'approssimazione al millimetro.

Spiegate come avete trovato la risposta.

Contenuto matematico

Determinare la lunghezza di una spirale costituita da quarti di circonferenza, inscritti in quadrati, che tutti insieme formano un rettangolo di perimetro 136 cm.

Categoria 8 (terza di scuola secondaria di primo grado)



BC = 1+2 = 3 u
AB = 3+2 = 5 u
HG = 5+3 = 8 u
FC = 8+2+3 = 13 u
FE ≅ FC
GE = 8+13 = 21 u
GA = 8+5 = 13 u
Perimetro in parti = 21+21+13+13 = 68
1 unità = 136 : 68 = 2 cm
~~BC~~ = IL = 1·2 = 2 cm
MN = 2·2 = 4 cm
BC = 3·2 = 6 cm
AB = 5·2 = 10 cm
HG = 8·2 = 16 cm
FE = 13·2 = 26 cm
Semicirconferenza = 2·3,14 = 6,28 cm
$\frac{4r \cdot \pi}{4}$ = π = 3,14·2 = 6,28 cm
$\frac{6 \cdot 3,14}{4}$ = 9,42 cm
$\frac{10 \cdot 2 \cdot 3,14}{4}$ = 15,7 cm
$\frac{16 \cdot 2 \cdot 3,14}{4}$ = 25,12 cm
$\frac{26 \cdot 2 \cdot 3,14}{4}$ = 40,82 cm
Spirale = 40,82 + 25,12 + 15,7 + 9,42 + 6,28 = ~~97,34 cm~~
+ 6,28 = 103,62 cm

SPIEGAZIONE:
Inizialmente abbiamo trovato il perimetro in parti partendo da un quadrato avente il lato di una unità. Poi abbiamo ~~trovato~~ sommato i due lati dei primi due quadrati e abbiamo trovato il lato del terzo quadrato che è uguale a 1+1 = 2 unità. ~~Non mano~~ Abbiamo trovato tutti i lati in unità e sommandoli li abbiamo divisi al perimetro trovando il valore di un unità.
Sapendo che una parte della spirale avente il raggio come lato di uno dei quadrati abbiamo utilizzato la formula della circonferenza dividendola per 4. Infine abbiamo sommato i risultati trovando la misura della spirale.

Gli allievi, che nella loro spiegazione parlano esplicitamente di "spirale", hanno seguito una delle procedure descritta nell'analisi a priori del problema:
- Osservare il disegno e i quadrati che si susseguono: due quadrati "unità", poi quadrati di 2, 3, 5, 8, 13, … di lato (successione di Fibonacci). Ciò permette di constatare che la larghezza e la lunghezza del rettangolo sono rispettivamente 13 e 21=13 + 8 e il perimetro è 2(13 + 21) = 68 (in lati di quadrato-unità). Per questo calcolo occorre far ricorso sistematicamente all'addizione dei segmenti e al riporto delle misure di un lato nei quadrati successivi.
- Calcolare il valore del lato del quadrato-unità facendo il rapporto136/68 = 2 (in cm).

Categoria 10 (secondo anno di scuola secondaria di secondo grado)

Il ragionamento parte dal trovare la misura di ogni lato dei quadrati.
Attribuendo l'incognita x ai lati dei due primi quadratini centrali e procedendo quindi di questo passo, ricaviamo che il lato sovrastante B misura 13x, mentre l'altro adiacente a B 21x. Impostiamo così una semplice equazione
$\frac{136}{2} = 13x + 21x \rightarrow 68 = 34x \rightarrow x = \frac{68}{34} \rightarrow x = 2$
Abbiamo così sostituito alla x il suo valore effettivo. Dato che il lato di ogni quadrato costituisce il raggio del quarto di circonferenza, la formula che abbiamo applicato è la seguente:
$\frac{r \cdot \pi}{2}$
Il risultato ricavato è di 33π.

Il ragionamento parte dal trovare la misura di ogni lato dei quadrati.
Attribuendo l'incognita x ai lati dei due primi quadratini centrali e procedendo quindi di questo passo, ricaviamo che il lato sovrastante B misura 13 *x*, mentre l'altro adiacente a B, 21 *x*. Impostiamo così una semplice equazione 136/2 = 13 x + 21 x → 68 = 34 x → x = 68/34 → x = 2.Abbiamo così sostituito alla x il suo valore effettivo. Dato che ogni quadrato costituisce il raggio del quarto di circonferenza, la formula che abbiamo applicato è la seguente r π / 2
Il risultato ricavato è di 33 π

Categoria 10

Abbiamo indicato con x la misura del primo quadrato più piccolo, quello con vertice in A. Il secondo quadrato, avendo un lato in comune al primo quadrato, ha il lato uguale a x. Il terzo quadrato ha il lato che coincide con la somma dei lati precedenti, quindi 2x. Il quarto quadrato procedendo in modo analogo ha il lato uguale a 3x, poiché è la somma di un lato del primo e del terzo quadrato. Sempre per lo stesso procedimento otteniamo:

5° quadrato, lato = 5x = (3x+x+x)

6° quadrato, lato = 8x = (5x+2x+x)

7° quadrato, lato = 13x = (8x+2x+3x)

Abbiamo sommato i lati dei quadrati esterni (7° quadrato, 6° quadrat[o] 5° quadrato, 4° quadrato) = 8x+13x+13x+13x+8x+5x+5x+3x=68x otteniamo il perimetro secondo x, quindi 136=68x x=2

Sostituiamo alle x dei lati dei quadrati il numero 2. Calcoliamo la spirale così:

$$\frac{4\pi+4\pi+8\pi+12\pi+20\pi+32\pi+52\pi}{4} = 33\pi$$

La misura della circonferenza della spirale per π è uguale a 33π

In questi due esempi gli allievi hanno seguito l'altra procedura indicata nell'analisi a priori, in effetti più consona alle loro conoscenze:

- per via algebrica, indicando, ad es. con x il lato del quadrato-unità, ed esprimendo così con 2x la misura del lato del secondo quadrato, con 3x del terzo e così via fino a 13x come misura del lato dell'ultimo quadrato.
- Impostare l'equazione 2(21x+ 13x) = 136, che ha come soluzione x = 2.
- Calcolare le lunghezze dei quarti di circonferenza e sommarle: $\pi/2 + \pi/2 + 2\pi/2 + 3\pi/2 + 5\pi/2 + 8\pi/2 + 13\pi/2 = 33\pi/2 = 16{,}5\ \pi$ (in lato del quadrato-unità) o 33π (in cm) o un'approssimazione come 103,7 in cm o 1037 mm (si accetterà anche 103,6 cm o 1036 mm per gli allievi che utilizzano 3,14 come approssimazione).

Laddove questo problema venga ripreso in classe, al di là della gara del Rally Matematico Transalpino, potrebbe consentire di vedere "la matematica che si specchia nella natura", o "la natura che si specchia nella matematica", come ne è un esempio la conchiglia del nautilus.

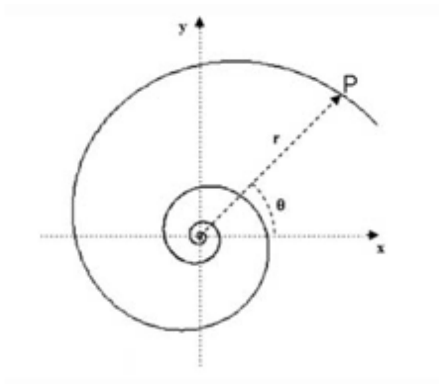
Non solo però, visto che, com'è ben noto, la sezione aurea, che porta con sé anche la spirale aurea, è foriera di armonia nelle diverse manifestazioni dell'arte.

Rimettiamoci in cammino: il XVII secolo

La spirale aurea, legata al rettangolo aureo e alla successione di Fibonacci, apre la strada, in qualche modo, allo studio di un tipo di spirale (spirale logaritmica) diverso dalla spirale di Archimede e che verrà studiata formalmente nel 1638 da René Descartes (1596 – 1650) che ne dà una prima definizione, anche se potrebbe essere stata presa in considerazione già dagli antichi.

Verrà detta Spira Mirabilis da Jakob Bernoulli (1654 – 1705) che fu un grande ammiratore, se così possiamo dire, di tale spirale al punto da disporre che venisse scolpita sulla sua tomba accompagnata dalla frase "*Eadem mutata resurgo*" (benché cambiato, risorgo). Sulla sua tomba, però, si trova scolpita una spirale di Archimede, forse perché era più semplice da scolpire!

Mentre nella spirale di Archimede le distanze dai bracci sono costanti, nella spirale logaritmica o equiangolare le distanze dai bracci della spirale aumentano secondo una progressione geometrica. È detta equiangolare in virtù del fatto che se si traccia una linea retta dal polo a un suo punto qualunque, si forma sempre lo stesso angolo.
E la sua equazione, in coordinate polari è del tipo $r = a \cdot b^{\theta}$ (l'angolo tra il raggio vettore e l'asse polare è proporzionale al logaritmo della lunghezza del vettore stesso).



Tante spirali nella storia della matematica, una delle quali è la *spirale di Fermat*

Sempre nel secolo XVII, un altro grande matematico, Pierre de Fermat (1601-1665), presenta nella sua opera *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*, un'altra spirale, detta poi *spirale di Fermat* o spirale parabolica.
Si tratta di una curva simmetrica rispetto all'origine e la sua equazione in coordinate polari può essere scritta nella forma $r = \sqrt{\theta}$

Per quanto riguarda le successioni, i numeri della successione di Fibonacci (definita per ricorrenza) o numeri di Fibonacci, godono di un insieme vastissimo di proprietà, ma bisogna presumibilmente aspettare l'opera *Geometria*

speciosa del 1659 nella quale il bolognese, matematico e uomo di chiesa, Pietro Mengoli (1625-1686) tenta di dare ordine a concetti quali successioni e serie.

Peraltro, per la definizione compiuta del concetto di successione, unitamente a quello di limite, bisognerà aspettare l'inizio dell'800.

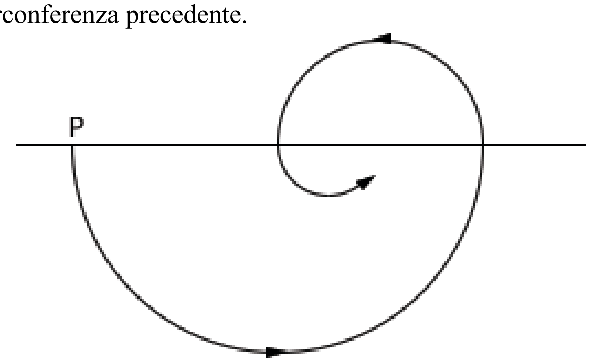
Come si è già detto, la storia, anche quella della matematica, ha i suoi tempi che spesso tendiamo a comprimere e a disumanizzare.
I numeri della successione di Fibonacci continuano peraltro a essere d'attualità, si incontrano nei modelli matematici di svariati fenomeni, sono utilizzabili per molti procedimenti computazionali, posseggono inoltre varie generalizzazioni interessanti e sono utilizzati in ambiti non puramente matematici, financo nell'arte.
A questi argomenti viene addirittura espressamente dedicato un periodico scientifico, *The Fibonacci Quarterly.*

Spunto didattico: una strana spirale **che coniuga spirale e successione**

Da *Oltre ogni limite: percorsi didattici per insegnanti spericolati* (2005)[7]

Una "strana spirale"

Dal punto di partenza P si percorre una semicirconferenza di raggio 1, poi si continua su una semicirconferenza di raggio 1/2 (si veda il disegno). E così di seguito, si percorrono semicirconferenze di raggio che è, ogni volta, la metà del raggio della semicirconferenza precedente.



A quale distanza, sull'asse, dal punto di partenza si potrebbe trovare "l'arrivo"?

Quale sarà la lunghezza del cammino percorrendo le semicirconferenze?

A suo tempo tale problema è stato proposto in varie classi di scuola secondaria di secondo grado con lavoro di gruppo e discussione sulle varie ipotesi e strategie risolutive.
Un primo approccio è consistito generalmente nel ricorso al disegno geometrico che ha peraltro rivelato molto presto i propri limiti.
In seguito, la ricerca delle ascisse dei punti di intersezione delle semicirconferenze con l'asse, a partire dal punto di partenza, ha condotto ad una successione "irregolare".
È stato un momento importante: l'andata e il ritorno tra il contesto geometrico e aritmetico si sono susseguiti. "Il *punto di arrivo si troverà forse tra i punti di ascissa 1 e 2: 1 + 'qualcosa'.*"
A quel punto, il lavoro collettivo e le discussioni hanno messo in evidenza l'alternanza di termini positivi e negativi. Sono nati interrogativi, perplessità: è stato allora il tempo dei tentativi, delle congetture.
Per quel che riguarda il cammino percorso, secondo alcuni, questo *sarà lungo quanto si vuole*, *sarà infinito*, altri, nel "sommare" alcune lunghezze delle semicirconferenze cominciano a dubitare che il cammino non potrà essere poi tanto lungo.

1) La somma dei termini della successione "irregolare": 1 + 1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 + 1/32 - 1/64 + ... (serie geometrica di ragione q = - 1/2) può essere riscritta nella forma 1 + 1/4 + 1/16 + 1/64 + ... laddove si sommino il secondo e il terzo termine, il quarto e il quinto e così via, poiché in questo caso è possibile applicare la proprietà associativa dell'addizione (si tratta in effetti di una serie convergente).π Indicata con S tale somma se si considera S/4 = 1/4 + 1/16 + 1/64 + ... e si effettua la differenza S - S/4, si ottiene 1, da cui S = 4/3. La congettura 1 + 'qualcosa' diventa 1 + 1/3.

[7] Cfr. Bibliografia

2) In merito alla lunghezza del cammino: $\pi + \pi/2 + \pi/4 + \pi/8 + \dots$, una volta scritta la somma nella forma p (1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ...) se si pone la somma in parentesi uguale a S' e si sottrae S'/2, si ottiene 1 da cui 1/2 S' = 1, quindi S' = 2 e la lunghezza del cammino è 2π.

Va peraltro tenuto presente che in generale, nel caso di somme di infiniti termini, non è 'garantita' la proprietà associativa, che qui di fatto vale.
Sappiamo bene che ciò succede se la serie è assolutamente convergente, cioè se converge la somma dei valori assoluti dei suoi termini.
Con questo problema, in qualche modo provocatorio, si apre la strada verso importanti conoscenze matematiche.

Esempio "numerico" di successioni a scuola: I numeri di Clara

Rally: 12.F.14 ; categorie: 6, 7, 8

> Clara costruisce una successione di numeri: 96, 48, 24, 12, 6, ... effettuando sempre la stessa operazione per passare da un termine al successivo. Quando scrive l'ottavo numero della successione, Clara si rende conto che è un numero minore di 1.
>
> **Quante cifre decimali avrà il ventesimo numero della successione di Clara? E quali saranno le ultime quattro cifre?**
>
> **Descrivete la vostra procedura.**

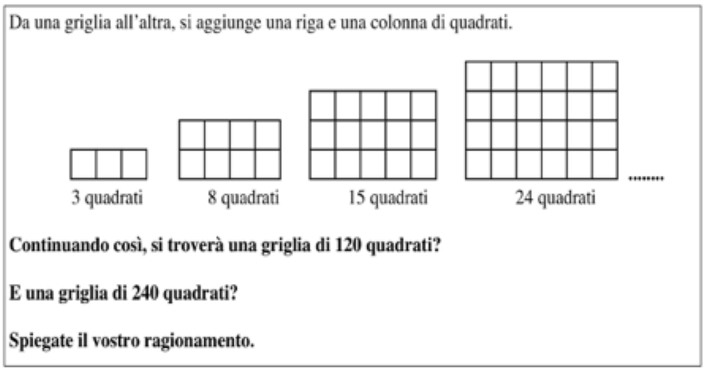
Si tratta di un problema che rientra nell'ambito della gestione di successioni, numeri in forma decimale, ricerca di regolarità.
E i nostri allievi ci spiegano come si possa risolvere questo problema

Abbiamo notato che Clara per fare la sua sequenza, divideva i numeri „x 2". Dal 1,5 le cifre dopo la virgola aumentavano sempre di 1 così abbiamo scoperto che il 20° numero ha ✓ 14 cifre dopo la virgola. I numeri finiscono tutti con 75 e il 3° numero contando da destra si alterna tra 3 e 8. Così abbiamo contato scoprendo che il secondo numero delle 4 cifre richieste è 8. Dopo di che abbiamo visto un altra alternanza del 1° delle 4 cifre, l'alternanza era tra i numeri: 1 - 9 - 6 - 4 ; abbiamo calcolato e la prima cifra tra le 4 è 6.
Quindi le ultime 4 cifre della successione di numeri di Clara sono quindi: 6-8-7-5.
Il 20° numero della successione di Clara ha 14 cifre dopo la virgola.

Esempio "figurativo" di successioni a scuola: Griglie

Il tema delle successioni può diventare "accattivante" perché visivo" in particolare laddove si debba lavorare sulla base di figure.

Rally: 08.II.05**; categorie:** 3, 4, 5


Da una griglia all'altra, si aggiunge una riga e una colonna di quadrati.

Continuando così, si troverà una griglia di 120 quadrati?

E una griglia di 240 quadrati?

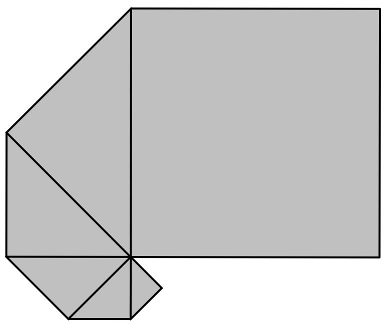
Spiegate il vostro ragionamento.

Questo problema consente di mettere allievi molto giovani di fronte a una **gestione delle leggi del passaggio da un termine all'altro di una successione, tramite «semplici» griglie.**
Per comprendere la regola di formazione della successione è necessario analizzare le dimensioni successive delle griglie, per noi adulti, n e n+2; per allievi di scuola primaria rendersi conto che le dimensioni della prima figura sono (1; 3) e poi (2;4), (3;5), ..
Calcolare quindi i differenti prodotti successivi fino a 10 x 12,
o disegnare le griglie, dalla quinta alla decima e immaginare i passi successivi
o cercare di scomporre 120 nel prodotto di due fattori di cui uno vale 2 più dell'altro
poi proseguire con i prodotti 14 x 16 = 224 < 240 < 15 x 17 = 255.
Rendersi quindi conto che 240 non è nella successione (sebbene 24 e 120 ci siano)
Il problema rende così possibile ***combattere* la "tentazione della proporzionalità"**, vale a dire l'applicazione meccanica e non ragionata della regola reciproca di "se raddoppio le dimensioni, anche l'area raddoppia".

Ancora spirali (con successioni) *a scuola*

Spirale di quadrati (I) Rally: 23.II.11; categorie: 6, 7, 8

Giulio ha sovrapposto con esattezza sei quadrati di carta per formare questa figura. Ha cominciato col posizionare un piccolo quadrato di 1 cm di lato. Poi un secondo quadrato, più grande, che nasconde metà del precedente, e così via. Si vede interamente solo il più grande dei quadrati, il sesto, che nasconde la metà del quinto, che nasconde a sua volta la metà del quarto …



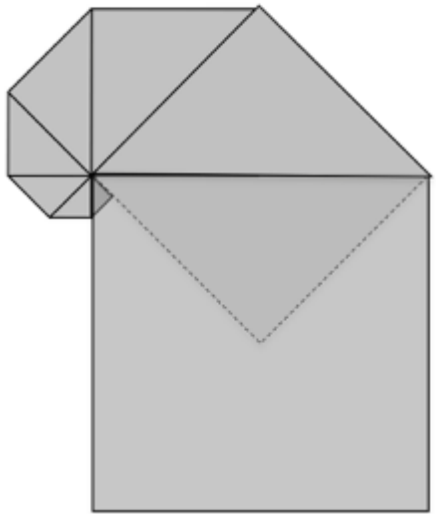
Giulio decide di completare la spirale posizionando ancora due quadrati in modo che ciascuno di essi nasconda metà del precedente e abbia un vertice in comune con tutti gli altri.

Disegnate la figura ottenuta dopo aver posto l'ottavo quadrato e calcolate la misura della sua area in cm^2.

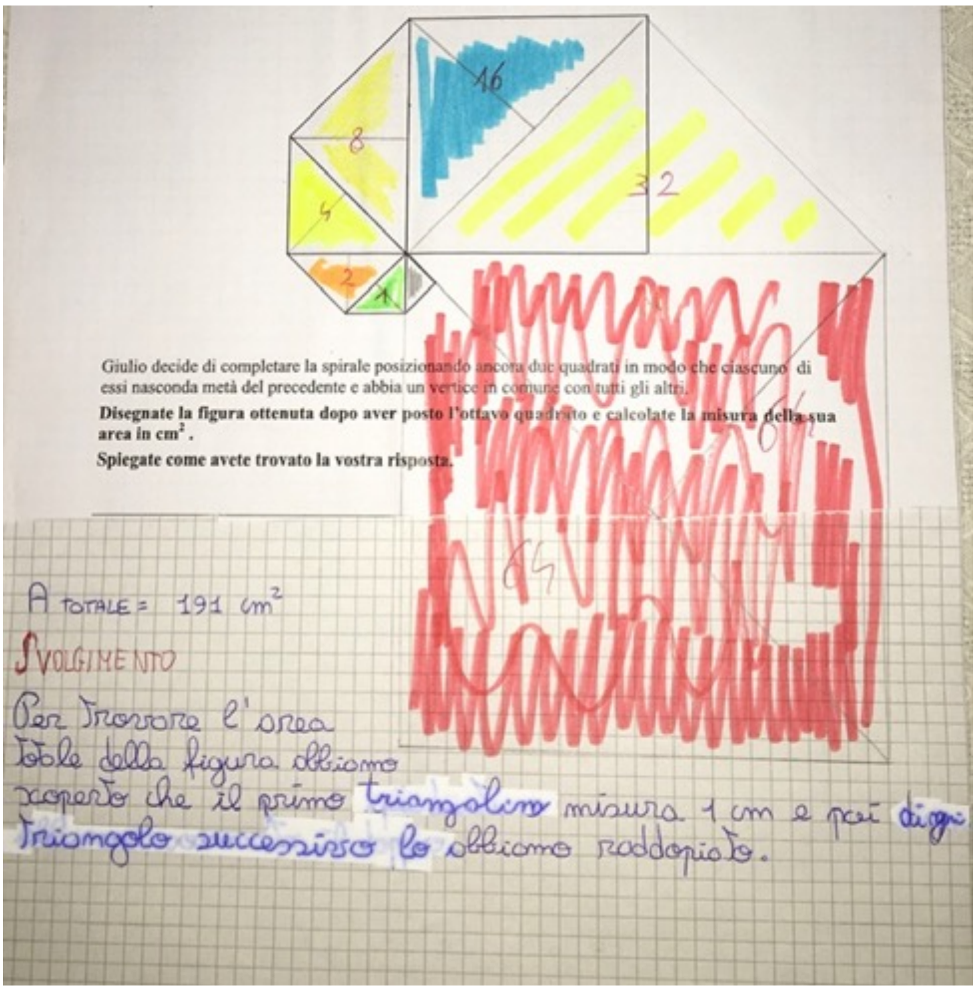
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Si tratta di calcolare l'area di una figura composta da 8 quadrati parzialmente sovrapposti, disposti a spirale, con il lato di ognuno di essi che coincide con la diagonale del precedente (sono disegnati i primi 6 quadrati; il lato del primo quadrato misura 1 cm).

Per appropriarsi del problema si analizza il disegno per percepire le regole di successione dei sei quadrati: il quadrato di partenza, il punto comune a tutti i quadrati, la coincidenza di un lato di un nuovo quadrato con la diagonale del precedente.
l'area di ogni quadrato (o semi-quadrato) è il doppio dell'area di quello che lo precede (come mostra la figura)
Di conseguenza a partire dal primo quadrato (non visibile) che ha area 1 cm^2, raddoppiando, si trovano le aree dei quadrati successivi, e quindi delle loro metà, cioè dei triangoli rettangoli visibili.
La somma da calcolare, in cm^2, è pertanto 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 128; si ottiene 191 cm^2.



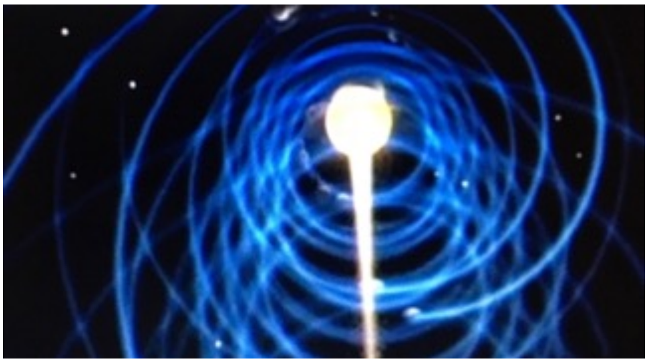
Come ci mostra un gruppo di allievi di categoria 8

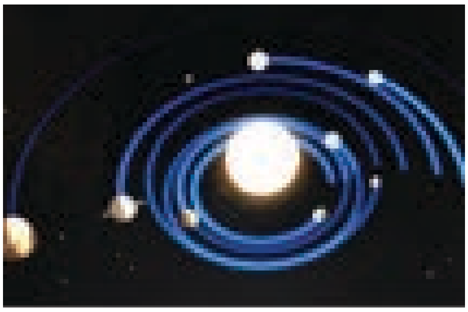


Il viaggio tra spirali e successioni si sposta nell'immensità dell'Universo

Sono ben note le immagini suggestive di galassie che possono essere assimilate a spirali di Archimede

Forse è un po' meno noto il movimento dell'intero sistema solare.
Il **Sole** infatti si sposta all'interno della nostra galassia e il movimento di tutto il sistema somiglia quindi a una **spirale** in movimento!





Grazie per aver condiviso questo viaggio.

Bibliografia

ANDRIANI M. F., DALLANOCE S., FALCADE R., FOGLIA S., GREGORI S., GRUGNETTI L., MAFFINI, A., MARCHINI C., RIZZA A., AND VANNUCCI V.: 2005, Oltre ogni limite: percorsi didattici per insegnanti spericolati, 'Pitagora Editrice?, Bologna.
BETTINELLI B.: 1988, Le Trésor D'Archimède, 'Irem de Besançon'.
BONCOMPAGNI B.: 1857, Scritti di Leonardo Pisano: mathematico del secolo decimoterzo, Roma.
PICKOVER C. A.: 2013 'Le Beau Livre des Maths; de Pythagore à la 57e dimension, 'Dunod'.
GIUSTI E., 1999 Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici, 'Bollati Boringhieri.

LIVIO M.: 2003, La sezione aurea. Milano, 'Rizzoli'.

Sitografia

https://www.lanostra-matematica.org/2013/08/spira-mirabilis-la-spirale-meravigliosa.html
http://abidubi.altervista.org/spirale/index.html
http://dm.unife.it/storia/Archimed.htm
https://unideadivita.blogspot.com/2013/11/il-mistero-della-spirale.html
Zanichelli_Sammarone_Sezione_Aurea.pdf
La successione di Fibonacci: una colorata ghirlanda di numeri
https://matematica.unibocconi.it › default › files.pdf
https://www.ambrosiana.it/opere/la-divina-proporzione-de-divina-proportione/
http://math.unife.it/insegnamenti/matematiche-elementari/materiale-didattico/24%20-%20se
zione%20aurea.pdf
www.armtint.eu

I PROBLEMI DELLA FINALE INTERNAZIONALE DELL'ARMT 2024

François Jaquet

Introduzione

La terza finale internazionale dell'ARMT, nel 2024 a Trequanda, come nel 2008 a Briga e nel 2016 a Le Locle~~,~~ per le finali precedenti, ha permesso ad alcune classi, vincitrici delle rispettive finali della sezione di afferenza, di categoria 4, di cimentarsi nella risoluzione di sei nuovi problemi. Per gli allievi si tratta della quarta prova dell'anno, anche se da qualche mese sono passati alla categoria 5; la maggior parte di loro ha anche esperienza delle prove dell'anno precedente, nella categoria 3, e della formazione nelle settimane precedenti "l'evento"; sono quindi particolarmente motivati e preparati.

Anche l'elaborazione degli enunciati è particolare; svolta da un piccolo comitato, senza le consuete fasi di consultazione da parte di tutte le sezioni, è stata pensata per questi allievi che hanno già dimostrato notevoli capacità di lavoro collettivo. Può permettersi dunque alcune ambizioni nei compiti di risoluzione. Cerca inoltre, avvalendosi della nostra esperienza trentennale, di progettarli per il futuro che si sta delineando: creare problemi non più come "domande di una gara", ma come proposte di attività per l'apprendimento della matematica in classe.

Nove classi partecipanti significa che per ogni attività offerta ci sono solo nove elaborati da esaminare. Questo numero è ovviamente troppo piccolo per le statistiche abituali, ma riduce notevolmente la preparazione dei criteri di classificazione che non è più una priorità. I tre responsabili (Lucia, Rita e François) hanno deciso infine di segnalare solo i tre migliori risultati complessivi. Per ciascuna attività le nove copie sono state classificate dalla più completa e corretta alla meno valida con un'assegnazione di punti che vanno da 4 a 0, solo per determinare le prime tre.

Non vi è alcun giudizio di valore in questa determinazione delle prime classi; Hanno solo risposto con più precisione degli altri e hanno dimostrato che il loro livello di costruzione delle conoscenze coinvolte è nel complesso un po' più alto di quello degli altri. Ciò che resterà agli allievi e ai loro insegnanti sarà il piacere di aver partecipato all'incontro di Trequanda, di aver fatto un bellissimo viaggio, di aver conosciuto altre classi.

I sei enunciati sono sei nuovi suggerimenti di attività da proporre agli insegnanti per integrarle nel "programma di matematica" della loro classe. I nove elaborati raccolti durante la finale internazionale vengono analizzati a posteriori, così come lo erano quelle delle vecchie prove, con alcuni commenti sulle ragioni per cui le proposte sono state sviluppate, in una prima rubrica "***Perché questa attività***?" "perché", infatti, se un insegnante deve scegliere un argomento da inserire nel proprio percorso didattico, deve sapere perché o "a cosa serve".

Una seconda rubrica, ***Prime osservazioni***, riporta alcuni risultati e procedure emersi dall'esame dei nove elaborati raccolti, con la/e soluzione/i, che corrisponde alle "procedure, errori e ostacoli individuati" delle schede della Banca di Problemi. Segue "***I saperi da rinforzare*** che rappresenta lo scopo dell'attività per la fase di insegnamento-costruzione dei saperi in gioco. Va ricordato che, in una concezione socio-costruttivista dell'apprendimento, le "conoscenze" non sono mai definitive ma sempre rimesse in gioco e ricostruite a un livello di gestione più efficace. Compaiono nella fase di risoluzione da parte di gruppi di allievi, vengono esplicitate nel dibattito collettivo, vengono chiarite dal docente nella fase di istituzionalizzazione, poi riprese durante la redazione sul quaderno di ogni allievo. Una quarta sezione, ***Per andare più lontano*** suggerisce altre attività o vecchi problemi in relazione alla conoscenza specifica della situazione proposta.

Le sei attività o "problemi della finale internazionale " vengono presentati nelle pagine che seguono:

1. **Numeri in colore,** a proposito della tavola di moltiplicazione
2. **Scatole di fiammiferi**, un'esplorazione sulle capacità di visualizzazione spaziale
3. **Triangoli in un quadrato**, vero o falso con illusioni visive
4. **Piramidi di numeri**, addizioni elementari e sfide aritmetiche o algebriche
5. **La strada per Trequanda**, geografia toscana, lettere e organizzazione logica
6. **Doppio compleanno**, candele sulla torta con numerazione decimale

Ciascuno di essi dovrà essere oggetto di commenti, critiche e proposte aggiuntive derivanti dalle pratiche di classe che gli insegnanti interessati saranno disposti a sperimentare. Questo articolo è ancora solo in una fase di suggerimenti e idee per migliorare, e gli unici capaci di farlo sono coloro che li sperimentano nella propria classe, con i propri allievi.

1. NUMERI IN COLORE

Nicola ha osservato che in questa tabella di 9 righe e 9 colonne ci sono 81 caselle. Nelle caselle ci sono però meno di 81 numeri differenti fra loro perché alcuni figurano diverse volte (per esempio il numero 21 figura 2 volte, il numero 18 quattro volte, …).

Per sapere quanti numeri differenti fra loro ci sono, Nicola ha colorato:

- in rosso le caselle dei numeri che figurano una sola volta in questa tabella,
- in arancione le caselle dei numeri che figurano due volte (per esempio 21),
- in giallo le caselle dei numeri che figurano tre volte,
- in verde le caselle dei numeri che figurano quattro volte (per esempio 18).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Colorate le caselle come ha fatto Nicola.

Quanti numeri differenti fra loro ci sono in questa tabella?

La tabella della nonna di Nicola aveva 12 righe e 12 colonne.

Colorate in blu solo le caselle dei numeri che figurano cinque volte nella tabella della nonna di Nicola.

E colorate in viola le caselle dei numeri che figurano sei volte.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

1.1. Perché quest'attività?

In un vecchio problema, del 19° RMT, proposto nelle categorie 3, 4 e 5 ci eravamo limitati a chiedere quanti numeri diversi figurano nella prima tabella, in un contesto di prodotti da memorizzare:

> *Riccardo deve imparare a memoria tutte le tabelline, da quella del 2 fino a quella del 9 (conosce già bene la tabellina dello 0, quella dell'1 e quella del 10 che sono molto facili).*
>
> *La mamma, per incoraggiarlo, gli ha spiegato che non sono poi così tante le moltiplicazioni da tenere a mente perché scambiando tra loro i due numeri da moltiplicare si ottiene lo stesso risultato. Così, per esempio, 2 × 3 = 3 × 2 oppure 7 × 4 = 4 × 7.*
>
> ***Quante sono le moltiplicazioni diverse che Riccardo si deve ricordare per conoscere tutte le tabelline dal 2 al 9?***
>
> ***Mostrate, con una lista o una tabella, come avete trovato la vostra risposta.***

Col senno di poi, possiamo nutrire qualche riserva su questa affermazione: il plurale di "tavole" è una traduzione letterale dell'espressione italiana "tabelline", ambiguo è anche il numero delle "moltiplicazioni diverse" (va considerato, al di là degli esempi citati, che "3 × 8" è una moltiplicazione che non è diversa da "4 × 6"). Il criterio di assegnazione dei punteggi dà 36 come risposta corretta mentre diventa 35 se eliminiamo la "tabella di 1",... . Il successo è stato molto altalenante e, come molti altri, questo problema è stato lasciato al suo posto nella Banca dei Problemi aspettando giorni migliori.

Questi sono arrivate con l'analisi a posteriori di *Arcobaleno* 31.II.10[1] dove un primo compito è stato quello di colorare, in una tabella di numeri, quelli il cui resto della divisione per 7 è 0. Una delle rivelazioni emerse

[1] Si veda l'articolo di François Jaquet e Rita Spatoloni. À propos de division euclidienne / A proposito di divisione euclidea Gazzetta n. 14 pp. 25 - 45.

dall'esame di centinaia di elaborati è che gli allievi delle categorie 5, 6 e 7 devono effettuare le divisioni per 7 per rendersi conto che sono proprio i multipli di 7 a dare resto 0.

Questa constatazione si aggiunge a molte altre dove, ad esempio, gli allievi dagli 11 ai 12 anni "riscoprono" con sorpresa, durante un'attività sulla tavola della moltiplicazione, che la sesta riga è composta da multipli di 6!

In un momento in cui ci muoviamo verso un utilizzo didattico dei nostri dati, è quindi naturale che la conoscenza della tavola di moltiplicazione, che appare molto superficiale, sia oggetto di nuove attività da proporre e sperimentare.

L'insegnante che legge l'enunciato di *Numeri in Colore* può pensare a priori che l'attività proposta non abbia nulla di originale, né di ricreativo e neppure utile per gli allievi al termine della scuola elementare o all'inizio dell'università. Potrebbe chiedersi quale sia il legame tra il compito di osservare attentamente la tavola di moltiplicazione, scoprire i numeri che vi compaiono una, due, tre volte... quindi colorarli e il programma di aritmetica sui numeri naturali.

Le seguenti osservazioni, sui nove elaborati raccolti dopo 50 minuti di lavoro indipendente, possono fornire alcune considerazioni .

1.2. Prime osservazioni

Le risposte attese: queste due colorazioni e i 36 numeri differenti.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

In due elaborati su nove, entrambe le tabelle sono colorate correttamente e la risposta è "36 numeri diversi".

In altri sei casi ci sono da 1 a 3 errori di colorazione e nell'ultimo ce ne sono ancora di più come nella figura accanto.

Per la domanda sui numeri differenti troviamo:

Esempio 1. *Ci sono 36 numeri diversi in questa tabella 5 in verde, 4 in giallo, 22 in arancione e 5 in rosso*

Esempio 2. *Nella tabella di Nicola ci sono 36 numeri e nella tabella della nonna ci sono 61 numeri* Gli allievi hanno colorato la seconda tabella in modo completo e corretto ma hanno commesso un errore nel conteggio della seconda tabella: 61 invece di 59).

Esempio 3. *I numeri differenti sono 72*

Esempio 4. *Ci sono 37 numeri differenti.*

Esempio 5. *Risposta 1. I quadrati rossi sono 6, i quadrati arancioni sono 21, i quadrati gialli sono 4, i quadrati verdi sono 5.*

Risposta 2. Ci sono 2 numeri viola il 24 e il 12 e c'è un numero in blu, il 36.

Quattro elaborati non danno risposta a questa domanda; gli allievi, impegnati a colorare, sembrano averlo dimenticato.

L'esame degli elaborati non ci permette di saperne di più, ma se la stessa attività verrà proposta alla classe, in condizioni vicine a quelle della nostra finale: nei gruppi in piena autonomia, la situazione sarà completamente diversa. Una condivisione dei risultati alla presenza di tutti gli allievi che potranno presentare i propri elaborati, confrontarli e spiegarne le modalità. L'insegnante interverrà poi per chiedere dettagli, stimolare discussioni e indirizzare il dibattito per trarre beneficio dall'attività.

1.3. I saperi da rinforzare

Colorare era un compito richiesto dall'enunciato, visualizzare le caselle della tabella dove compare un numero una, due, tre volte, ma non è ovviamente una "conoscenza" da ricordare. L'insegnante deve garantire che la "conoscenza reale" eventualmente presente durante la scelta dei colori venga spiegata durante il dibattito, verbalizzata e scritta.

In particolare:

A La conoscenza essenziale è che ogni casella della tabella è determinata dalla sua riga e dalla sua colonna e che il numero che vi appare è il prodotto (risultato della moltiplicazione) di due numeri: il primo della riga e quello della colonna. (nel riquadro della 3a riga, che inizia con 3, e della 4a colonna, che inizia con 4, troviamo il prodotto $12 = (3 \times 4)$. Per gli adulti che padroneggiano il concetto di "due coordinate" che determinano ciascuna casella di una tabella a doppia entrata, questa conoscenza è così evidente che è difficile immaginare che non lo sia per un giovane allievo al quale presentiamo una tabella già costruita con le caselle già riempite. Non possiamo sapere, davanti alla prima tabella dove il 12 è in verde, se gli allievi hanno contato solo le quattro apparizioni di questo numero o se hanno percepito che i quattro "12" provengono da distinte scomposizioni moltiplicative 2×6, 3×4, 4×3 e 6×2 della 2a, 3a, 4a e 6a riga (o colonne) e se si renderanno conto che, nella seconda tabella, i due nuovi "12" provengono da 1×12 e 12×1 e che il numero 12 è il prodotto di sei scomposizioni moltiplicative di due numeri naturali

Ritroveremo l'interesse di queste scomposizioni, riguardo al "24" che passava anch'esso dal verde (4 scomposizioni) al viola (6 scomposizioni) dalla prima alla seconda tabella, chiedendo agli allievi se questo numero 24 potrebbe comparire più di sei volte se estendessimo la tabella su un centinaio di righe e colonne.

Sarà quindi necessario colorare completamente la seconda tabella per procedere nella costruzione di questa conoscenza: il numero di volte che un numero viene scritto in una tabella parziale è pari al numero delle sue scomposizioni nel prodotto di due numeri naturali; sapendo che questi due fattori corrispondono al numero della riga e della colonna in cui si trova la casella e con la consapevolezza che possiamo allungare la tabella quanto vogliamo.

B Un'altra conoscenza riguarda la "simmetria" della colorazione rispetto alla diagonale della tabella che parte dalla casella che 1×1. Da un punto di vista matematico, questa è la commutatività della moltiplicazione: le caselle (2×3) e (3×2) sono i due verdi, con il numero 6, per passare dall'uno all'altro invertiamo "riga" e "colonna" oppure sono simmetrici in relazione alla diagonale, come le due caselle (1×6) e (6×1), che porta alle uguaglianze $2 \times 3 = 3 \times 2 = 1 \times 6 = 6 \times 1 = 6$.

E se un numero si trova sulla diagonale sarà rosso, come 1, 25, 49, 64 e 81 o blu come 4, 9, 16 e 36 nella prima tabella parziale; quest'ultimo numero, 36, diventerà blu nella seconda tabella parziale. Tutti questi numeri sulla diagonale, alcuni dei quali compaiono in altri riquadri, simmetrici a due a due, appariranno in totale un numero dispari di volte nelle tabelle successive. Alla fine, nella tavola della moltiplicazione estesa quanto vogliamo, rimarrà in rosso solo $1 = 1 \times 1$.

Sarà quindi necessario costruire e colorare almeno una terza tavola parziale tracciabile su un foglio a quadretti (di almeno 15-20 righe), per visualizzare la commutatività e notare che 1, 4, 9, 16, ecc. sono una famiglia di numeri molto particolari per la loro scomposizione moltiplicativa e per la loro posizione nella tavola di moltiplicazione.

C Ci sono molti numeri arancioni nelle prime tabelle parziali: 22 in quella con 10 righe e 10 colonne, 35 nella seconda, ma il loro numero cambia da una tabella all'altra.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Se osserviamo la tabella di sei righe e sei colonne all'interno della prima, vediamo che contiene sette numeri arancioni: 2, 3, 5, 10, 15, 20, 30; ma all'interno della seconda ne contiene solo quattro: 2, 3, 5 e 15; e se costruissimo una tabella parziale di quindici righe e quindici colonne, il 15 non sarebbe più arancione e rimarrebbero solo 2, 3 e 5 in arancione nella tabella di sei righe e sei colonne interne, tutte sul bordo (prima riga o prima colonna) poiché $2 = 1 \times 2 = 2 \times 1$ si può scrivere solo con una coppia di numeri, 1 e 2, anche 3 si può scrivere solo con la coppia 1 e 3, che 5 si può scrivere anche solo con la coppia 1 e 5.

Dopo queste diverse colorazioni e costruzioni di tabelle parziali, vediamo apparire nuove conoscenze, molto importanti dal punto di vista matematico: sui bordi della tabella ci sono dei numeri che rimarranno sempre arancioni: un accenno ai numeri primi poi alla corrispondenza tra numero di divisori e colori di un numero naturale!

1.4. Per andare più lontano

Abbiamo appena presentato tre "conoscenze da rafforzare"; sono molto modeste agli occhi degli adulti che pensano che siano così elementari da non meritare, o non meritare più, lo statuto di "conoscenza". Ce ne sono molti altre che gli allievi hanno "scoperto" e/o "menzionato" esplicitamente nei loro elaborati. Per esempio:

- *... nella sesta riga della tavola di moltiplicazione ci sono tutti i multipli di 6, ...*
- *... i numeri che divisi per 7 danno resto 0 sono quelli della "tabellina" del 7...*
- *...i numeri nell'ottava riga della tavola di moltiplicazione sono il doppio di quelli nella quarta riga...*

I commenti precedenti sull'attività *Numeri in Colore* sono solo suggerimenti che mostrano l'interesse di studiare la tavola di moltiplicazione o di scoprirla nel caso in cui sia stata ignorata, trascurata o ridotta alle "tabelline" che spesso hanno occupato molto tempo e conducono ad una semplice memorizzazione di prodotti isolati a solo beneficio dell'algoritmo di moltiplicazione.
Questo algoritmo ha rappresentato, nel corso della storia, un criterio di capacità per calcolare prodotti di numeri di cinque o sei cifre. Attualmente utilizzeremmo la calcolatrice se dovessimo effettuare operazioni di questo tipo, ma abbiamo rinunciato a questo controllo puramente operativo.

Questo studio della tavola di moltiplicazione può essere intrapreso a partire dall'introduzione della moltiplicazione come "operazione" su due numeri naturali, nella categoria 4 e continuato e ripetuto per tutte le classi successive, anche fino alle superiori! Ci sono sempre altre proprietà da scoprire nella tavola di moltiplicazione e tante domande da inventare, che possono diventare dei problemi.

Un esempio recente: per approfittare del nuovo anno 2025 non è necessariamente al livello delle categorie 5 e 6 ma può interessare gli allievi più grandi e gli adulti:

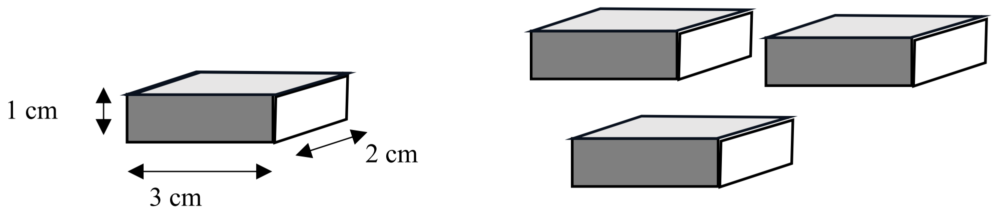
Ecco una foto di una parte molto piccola della tavola di moltiplicazione:
completate le caselle che circondano quello del 2025!

1936		
	2025	
		2116

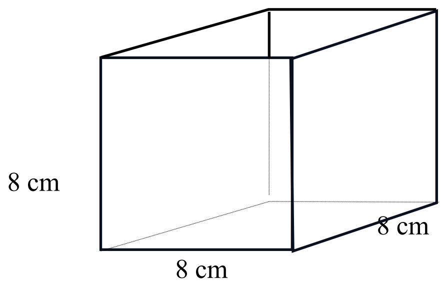
Una ricerca come questa porta a rafforzare molte conoscenze sui divisori del 2025 (quante volte compare il 2025 nella tabella?), sui numeri della riga centrale e della colonna centrale (multipli di ??) e sugli altri due riquadri, in alto a destra e in basso a sinistra (collegati ad un'identità notevole per gli allievi delle categorie 9 e successive)!

2 SCATOLE DI FIAMMIFERI

Queste scatole di fiammiferi hanno 3 cm di lunghezza, 2 cm di larghezza e 1 cm in altezza.



Quante scatole si potrebbero sistemare al massimo in questo cubo trasparente con spigolo di 8 cm?



Mostrate come sono sistemate nel cubo.

2.1. Perché quest'attività?

Nell'ambito 3D della banca dei problemi si contano un centinaio di proposte, per lo più attribuite alle categorie da 6 a 10, che raramente sono state analizzate a posteriori. Uno di questi *La scatola dei cubi* ha rivelato due importanti ostacoli riguardanti il riempimento di una scatola a forma di parallelepipedo rettangolare con dimensioni interne di 13 cm, 8 cm e 7 cm con un minimo di cubi di 1 cm di spigolo o 2 cm di spigolo. L'idea di riprendere un'attività di geometria spaziale per i nostri finalisti con oggetti familiari ha portato a questo enunciato per verificare se gli allievi riescono a immaginare il riempimento ottimale del cubo con oggetti tridimensionali, ben determinato dalla loro rappresentazione sotto forma di figure piane, ma senza poterli manipolare perché la realizzazione vera e propria richiederebbe troppo tempo.

L'utilizzazione dei primi tentativi di risoluzione si situerà nel campo visivo nello spazio: ci sono tre diverse posizioni dei riquadri a seconda delle loro "basi" che sono tre rettangoli di 1 × 2, 1 × 3 e 2 × 3; che porterà a piastrellature diverse di una faccia del cubo (un quadrato di 8 × 8); dopo il conflitto "area-perimetro" vedremo apparire un nuovo conflitto "area – volume" con figure a due e tre dimensioni (2D e 3D).

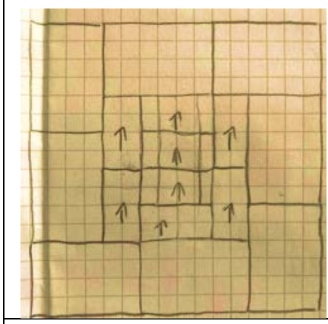
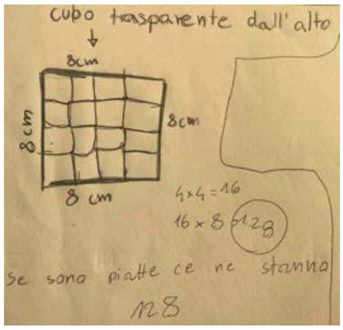
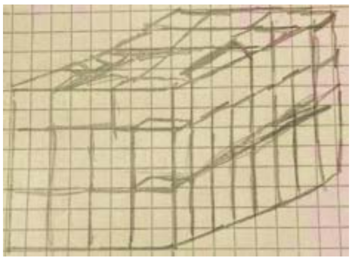
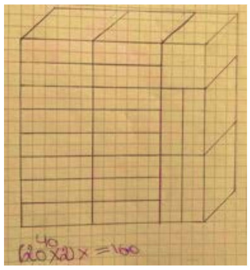
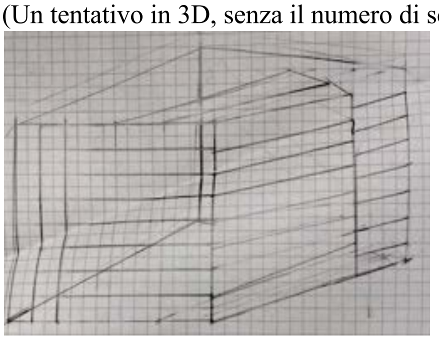
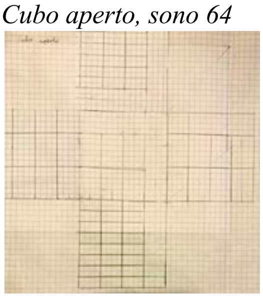
2.2. Prime osservazioni

Sapevamo che la rappresentazione delle scatole del cubo mediante un disegno non è alla portata degli allievi che non hanno sviluppato pratica nel disegno geometrico e non conoscono le regole della prospettiva. Ci aspettavamo procedure a "strati" orizzontali dove le scatole sono rappresentate da rettangoli di 2 × 3 cm disposti in un quadrato di 8 × 8 cm come questo:

Esempio 1. *Il massimo numero di scatole che si possono essere… sono 84*

(Ci sono qui 8 strati di 10 rettangoli 2 × 3 e rimangono 2 rettangoli 1 × 2 dove gli ultimi 4 riquadri sono inseriti verticalmente - incastrati in verticale le 4 ultime scatole.)

Altri tipi di rappresentazione:

Esempio 2 (Con per il primo strato: 8 rettangoli 2 × 3 e 8 rettangoli 1 × 2 e un totale di 85 riquadri non spiegati ma molto vicini alla risposta corretta) 	Esempio 3 (Con un primo strato di 16 quadretti ed un totale – consistente – di 128 scatole) 
Esempio 4. *Si possono sistemare 82 scatole* 	Esempio 5. (Una prima parte anteriore del cubo, in 3D ma senza controllare le dimensioni “in profondità ») 
Esempio 6. (Un tentativo in 3D, senza il numero di scatole) 	Esempio 7. *Cubo aperto, sono 64*  (pavimentazione del fondo e di 4 facce e conteggio)

L'ostacolo principale è la rappresentazione della disposizione delle scatole in 3D mediante una figura piana (2D). I rettangoli sulle facce delle scatole diventano parallelogrammi, come nelle figure del prospetto. Questo ostacolo è stato superato solo quando i pittori hanno scoperto le rappresentazioni prospettiche.

È da notare però che non esiste alcun foglio bianco e che tutti gli elaborati presentano disegni di queste scatole, sia nella pianta a rettangoli del primo strato, (esempi da 1 a 3), sia nello spazio (esempi 4 e 5) dove le facce sono rettangoli solo nel piano verticale posto davanti al disegnatore. Appropriarsi del compito non è stato difficile, ciascun gruppo ha "prodotto" numerose rappresentazioni (anche nelle numerose bozze raccolte) e si è quindi impegnato in una ricerca matematica del numero di scatole.

2.3. I saperi da rinforzare

La domanda dell'enunciato di *Scatole di fiammiferi* si sarebbe potuta limitare al numero di scatole che possono essere collocate nel cubo, senza chiedere di mostrarne la disposizione; ma anche senza quest'ultima esplicita richiesta gli allievi avrebbero dovuto accompagnare le loro spiegazioni con dei disegni.

Considerata la ricchezza delle produzioni precedenti, bisogna considerare che la situazione può essere sfruttata in classe, con del materiale*, ridimensionando solo più tardi il problema della rappresentazione.

Le conoscenze necessarie per contare le scatole riguardano il piastrellamento della base del cubo o di un'altra faccia del cubo, di dimensione 2D, con le facce di oggetti 3D.

Se scegliamo le facce delle scatole di 1 × 2 la piastrellatura è completa: 32 caselle nella base del cubo di 8 × 8, l'altezza di questo strato è di 3 unità e possiamo disporle così su 2 strati per arrivare a 6 unità di altezza in 64 riquadri e modificare la posizione dei riquadri per le 2 unità che rimangono sotto la faccia superiore del cubo. In questo spazio le scatole devono essere posizionate o dal lato 1 × 3 oppure dal lato 2 × 3; in entrambi i casi possiamo aggiungerne altri 20, per arrivare ad un totale di 84.

Nel caso in cui scegliamo le facce di 2 × 3 per il fondo della scatola la piastrellatura con 10 rettangoli è parziale per il fondo (vedi la descrizione degli allievi dell'esempio 1.)

Anche il terzo caso con facce di 1 × 3 porta ad una piastrellatura parziale di 16 rettangoli.

Tutte queste possibilità si basano su manipolazioni iniziali di scatole, loro giustapposizioni e movimenti nello spazio. Si tratta di "conoscenze" sperimentali, non ancora "accademiche", ma che saranno essenziali per ulteriori attività nel campo della geometria spaziale.

Altre conoscenze si rafforzano sulle piastrellature, di natura geometrica e aritmetica quando si tratta, ad esempio, di spiegare perché non possiamo ottenere una piastrellatura completa del quadrato 8 × 8 con i rettangoli 2 × 3, dove le aree, le lunghezze dei lati, entrano in gioco i resti delle divisioni di 64 per 6, 8 per 3, ecc., le diverse posizioni dei rettangoli, del "buco" di 2. × 2 oppure fori da 1 × 2 …

Da una domanda sul numero massimo di scatole da collocare nel cubo, si affrontano le conoscenze geometriche nello spazio della geometria piana (lati, aree, rettangoli, quadrato, ecc.), dell'aritmetica (moltiplicazione, multipli, divisione, divisore, resto, ecc.) e logica (organizzazione, inventario, combinatoria, negazione, affermazione, ecc.).

Spetterà agli insegnanti che proporranno l'attività nella loro classe completare questo capitolo con i loro commenti e spunti aggiuntivi.

* Informazioni sul materiale.

> Poiché l'unità "cm" non è probabile (troppo piccola) per le dimensioni 1 × 2 × 3, dobbiamo sostituire "cm" con un'unità "u" nell'enunciato. (È possibile che il problema venga proposto in classe e non nelle condizioni di una prova finale). Il materiale potrà poi essere composto da cubi assemblabili (multicubi) provenienti da materiali scolastici o anche solidi costruiti dagli allievi (tramite taglio, piegatura e incollaggio), se ogni allievo ne costruisce uno o due, queste "scatole" saranno sufficienti per avviare la bozza del cubo 8 × 8 × 8. L'attività manuale di bricolage richiederà un po' di tempo ma contribuirà in maniera fondamentale (direi addirittura "necessaria") all'acquisizione del concetto di parallelepipedo rettangolare.

2.4. Per andare più lontano

Nella banca dei problemi del RMT, si trovano molte attività che possono costituire un approccio alla geometria dello spazio, in particolare:

Ambito 3D

Zollette di zucchero (ral. 30.II.07; cat. 5-6) : Individuare in quanti modi è possibile ottenere il numero 54 come prodotto tre numeri naturali minori di 30.

Le scatole di Caterina (ral. 26.F.07; cat. 4-6): A partire dall'osservazione di tre sviluppi di parallelepipedi mancanti di una faccia, stabilire quale può da dare origine ad una scatola che possa contenere un determinato numero di cubetti (70) di volume assegnato (1 cm^3).

Giochi con i cubetti (ral. 24.I.07; cat. 4-5): Determinare a partire da una rappresentazione di prospettiva cavaliera il numero dei cubetti necessari alla realizzazione di tre assemblaggi.

La faccia nascosta del cubo (ral. 18.F.08; cat. 5-7): Determinare la figura disegnata su una faccia nascosta di un cubo con un ragionamento logico di esclusione di casi.

La scatola da ricoprire (ral. 18.I.04; cat. 3-5): Disegnare le tre facce rettangolari per formare un parallelepipedo rettangolare con tre rettangoli dati.

Scatoline (ral. 17.I.05 ; cat. 3-5): Costruire scatoline ritagliando e incollando i rettangoli dati. Dichiarare quanti e quali rettangoli servono e quali sono stati i criteri usati per affrontare la ricerca ai fini di un' assemblaggio corretto.

Ambito GP

Tappeti quadrati (ral. 08.I.03; cat. 3-4): Ricoprire un rettangolo 22 x 12 con il minimo numero di quadrati che rispettano la quadrettatura.

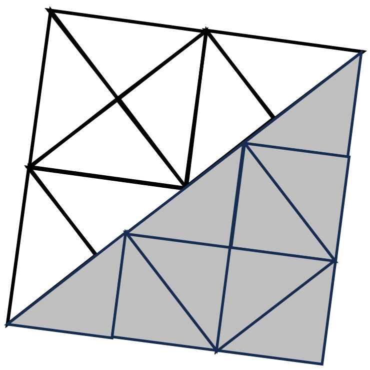
Etichette (ral. 10.F.09; cat. 5-7): Determinare se è possibile ritagliare da un foglio di carta rettangolare di dimensioni 19 × 24 cm : 21 etichette di 7 × 3 cm, oppure 13 etichette di 7 × 5 cm, oppure 19 etichette di 8 × 3 cm, oppure 19 etichette di 6 × 4 cm, oppure 18 etichette di 5 × 5 cm.

3. TRIANGOLI IN UN QUADRATO

Luisa aveva dei quadrati bianchi della stessa grandezza. Li ha ritagliati tutti in due triangoli, poi ne ha incollati alcuni uno accanto all'altro per ricoprire una parte di un grande quadrato di 12 cm di lato.

Giulia aveva dei quadrati grigi della stessa grandezza. Anche lei ha ritagliato i suoi quadrati in due triangoli, poi ne ha incollati alcuni uno accanto all'altro per ricoprire l'altra parte del quadrato grande.

Ecco una foto del grande quadrato, ricoperto interamente con i triangoli di Luisa e Giulia:



Disegnate su un foglio di carta a quadretti il quadrato grande di lato di 12 cm e disegnate all'interno i suoi triangoli.

I triangoli bianchi sono della stessa grandezza dei triangoli grigi?

Spiegate il motivo della vostra risposta.

3.1. Perché quest'attività?

L'idea è nata dal problema Triangoli volati via (22.II.05; cat. 3-6) che ha rivelato la difficoltà di distinguere due tipi di triangoli isosceli rettangoli di dimensioni molto vicine o l'ostacolo delle illusioni visive, per gli allievi ma anche per gli adulti.

L'obiettivo, nel presentare triangoli che appaiono uguali, è sfidare questa impressione e trovare argomenti per spiegare o giustificare il proprio giudizio sull'uguaglianza o disuguaglianza delle figure. Più in generale, si tratta di distinguere il vero dal falso.

Uno degli argomenti si basa sull'osservazione che il numero dei triangoli bianchi e dei triangoli grigi è diverso: 8 e 9 rispettivamente. Dobbiamo poi associare a questi due numeri (di triangoli) una quantità: il "posto che occupano sul disegno" che diventerà la loro area nella figura geometrica, senza specificarne l'unità di misura.

È necessario anche, contemporaneamente, osservare che gli 8 triangoli bianchi formano un triangolo più grande che è la metà del quadrato e che anche i 9 triangoli neri formano un triangolo più grande che è l'altra metà del quadrato e riconoscere, inoltre, che la diagonale del quadrato lo divide in due triangoli rettangoli isosceli uguali.

Arriviamo così a due tipi di giustificazioni,
- Nota l'area del quadrato: $12 \times 12 = 144$ (in cm^2) l'area di un triangolo bianco è $9 = (72: 8)$ (in cm^2) e l'area di un triangolo grigio è $8 = (72 : 9)$ (in cm^2)
- Senza calcolare l'area del quadrato, consideriamo l'uguaglianza $8 \times b = 9 \times g$ (b e g sono le aree dei triangoli bianco e grigio) e concludiamo che $b > g$ mediante calcolo algebrico ($b = 9/8\ g = 1{,}25\ g$)
Se non notiamo la differenza nel numero dei triangoli bianchi e grigi, un secondo argomento può basarsi sulle misure dei lati: 4; 4; ≅ 5,7 cm per i triangoli grigi; ≅ 4.2; ≅ 4.2; 6 cm per i triangoli bianchi ricavati da un disegno preciso della figura, in dimensione reale.
L'obiettivo dell'attività per la classe è progredire nell'argomentazione sul vero e sul falso a seconda del livello di acquisizione delle relazioni logiche degli allievi... e degli adulti!
Nelle categorie da 5 a 7 o 8, l'argomentazione mediante misurazione deve essere alla portata degli allievi. La differenza nel numero dei triangoli, se percepita, può portare a credere che quelli meno numerosi siano i più grandi, senza però portare alla certezza, finché le aree (9 e 8) non vengono calcolate o la procedura algebrica ($b = 9/8\ g = 1{,}25\ g$) non può essere utilizzata.

Otto dei nove enunciati esaminati presentano il disegno del quadrato di 12 cm con (17) triangoli bianchi o grigi, con una precisione del tutto accettabile per gli allievi di categoria 5.

La risposta "no, i triangoli non hanno la stessa dimensione" appare in 5 elaborati:

Esempio 1 *No perché i triangoli di Giulia sono uno in più, quindi abbiamo fatto altri calcoli per arrivare al risultato. (Sul* disegno a grandezza naturale, i cateti vengono calcolati per i triangoli grigi (12:3 = 4 in cm) e misurati per i triangoli bianchi (8,4:2 = 4,2 cm). (La differenza nel numero dei triangoli non è sufficiente per questi allievi che necessitano di conferma mediante misurazioni).

Esempio 2 *Non parce qu'il y en plus du côté gris que du côté blanc.* (Per questo gruppo è sufficiente la differenza nel numero di triangoli, cosa che non specifica se hanno confrontato le aree e quali sono i più grandi.)

Esempio 3 *I triangoli più grandi sono i bianchi.* (Misure precise al mm di tutti i lati di ogni tipo di triangolo per arrivare a dei perimetri di 13,5 e 14,6 cm.)

Esempio 4 *I triangoli non sono uguali.* (Con considerazioni sui prolungamenti dei segmenti delle due parti, abbastanza difficili da comprendere ma corrette).

Esempio 5 (Gli 8 triangoli bianchi e i 9 triangoli grigi sono indicati con delle lettere B e G sul disegno). *Abbiamo capito che i triangoli grigi sono più grandi dei bianchi perché abbiamo calcolato la grandezza dei triangolo, perché li abbiamo disegnati.* (In questo caso, poiché 9 è più grande di 8, i grigi sono i più grandi!!).

Tre elaborati mostrano una confusione tra le parti grigie e bianche del quadrato (che sono anche triangoli) e "i" triangoli bianchi e "i" triangoli grigi dell'enunciato, per concludere che le parti triangolari sono uguali.
Se la domanda si fosse concentrata sul confronto dei "piccoli" triangoli grigi e bianchi avrebbe potuto ridurre la frequenza di questa confusione.

C'è solo un'incomprensione del problema.

I risultati di questi nove gruppi di finalisti sono confermati da una prima sperimentazione in classe condotta da Brunella Brogi con gli allievi di categoria 6, dove si impara molto di più che analizzando gli elaborati della gara, dato che l'insegnante ha potuto interagire con i suoi allievi (Si veda l'articolo in appendice).

3.2. I saperi da rinforzare

Distinguere il vero dal falso, mettere in dubbio le impressioni visive delle figure, argomentare, ecc. sono abilità che devono essere costantemente rafforzate.

Le conoscenze specifiche da affrontare nella fase di dibattito collettivo sono innanzitutto, nelle categorie 5 e 6, la costruzione precisa della figura: l'uso della quadrettatura per disegnare il quadrato di lato di 12 cm, la sua diagonale, i punti medi dei suoi lati (6 cm) per la parte bianca, i terzi dei suoi lati (4 cm) per la parte grigia; poi la precisione delle misure non intere dei lati dei triangoli, con approssimazioni al mm più vicino (i perimetri di 23,5 e 14,6 dell'esempio precedente sono da confrontare con gli altri lati o perimetri ottenuti)

La conoscenza che ci sembra più importante per questa attività riguarda il concetto di area. I gruppi che hanno contato 8 triangoli bianchi e 9 triangoli grigi percepiscono la differenza ma devono ancora sapere a che tipo di grandezza sono legati questi due "numeri di triangoli": colore, consistenza della carta, disposizione, lunghezza dei lati corrispondenti, aree ?

Il ruolo dell'insegnante qui è quello di insistere per ottenere una spiegazione come questa: "La parte bianca del quadrato è la sua metà ed è interamente ricoperta da 8 triangoli, l'altra metà, grigia ma uguale, è ricoperta da 9 triangoli". È l'idea di "coprire" o "occupare un certo spazio", ... che corrisponde alla dimensione "area", e ci permette di realizzare che l'area di 8 triangoli bianchi è uguale all'area di 9 triangoli grigi dove metà dell'area del quadrato.

Tra tutte le soluzioni che fanno riferimento al conteggio dei Triangoli, quelle delle nove classi finaliste e quelle dei gruppi della classe di Brunella Brogi, ce n'è solo una veramente chiara: *Nella stessa area del quadrato delimitata dalla linea di simmetria, i triangoli grigi sono più piccoli dei triangoli bianchi perché nella stessa parte del quadrato quelli grigi sono 9 ciò vuol dire che per essere di più sono più piccoli. Invece i bianchi sono 8. (Nella parte del quadrato delimitata dall'asse di simmetria, i triangoli grigi sono più piccoli dei triangoli bianchi perché nella parte del quadrato i grigi sono in numero 9 il che significa che poiché sono più numerosi sono più piccoli e sono 8 bianchi.)*

La deduzione "*poiché sono di più, sono più piccoli"* testimonia di una buona padronanza della conoscenza "moltiplicazione/divisione" e delle sue proprietà rispetto all'uguaglianza $8 \times b = 9 \times g$ presentata in precedenza.

La conoscenza "area del quadrato" non è apparsa spontaneamente in nessuna degli elaborati esaminati e potrebbe essere eventualmente suggerita dall'insegnante durante la fase di condivisione o di istituzionalizzazione. È probabile che gli allievi "sanno come" calcolare l'area del quadrato di 12 cm se richiesto, per poi scoprire che l'area del mezzo quadrato è 72 cm^2 e che le aree dei triangoli bianco e grigio sono rispettivamente 9 e 8 cm^2 (l'inversione di 8 e 9 è dovuta solo al caso particolare del numero 12 per la misura proposta sul lato del quadrato!) ma questa conoscenza non ha ancora un grado di padronanza sufficiente che permetta di farlo intervenire in una sequenza di deduzioni che consentano di fugare ogni dubbio sul fatto che i triangoli bianchi, con area di 9 cm^2, sono più grandi di quelli grigi, con area di 8 cm^2.

Spetta all'insegnante decidere se vuole abbordarla per approfittare della situazione e "andare più lontano".

3.3. Per andare più lontano

La parte bianca della figura è una piastrellatura di 8 triangoli di unità uguali, con un'area di 9 cm^2. Su suggerimento di Brunella, possiamo chiedere agli allievi di piegare a metà un quadrato di 12 cm per formare un triangolo, poi piegare questo triangolo una seconda volta, poi una terza volta... Con carta abbastanza sottile possiamo realizzare 5 pieghe consecutive e poi chiedere quali quadrati e triangoli sono formati dalle pieghe quando il foglio è aperto.

Le linee delle 5 pieghe rivelano una piastrellatura del foglio in triangoli di 32 unità, poi triangoli sempre più grandi di 2, 4, 8 e 16 unità. Appariranno anche i quadrati di 2, 4, 8, 16 e 32 unità.

Possiamo poi passare alle misure: le aree in triangoli unitari o in cm^2 (a seconda della dimensione scelta del quadrato originale), le lunghezze misurate con l'approssimazione di mm.

(Tabella per i 6 triangoli t , in rosso, o quadrati q in blu nelle colonne dei 6 aree diverse)

Area della figura, in triangoli unità	1 (t)	2 (t e c)	4 (t e c)	8 (t e c)	16 (t e c)	32 (c)
in cm^2 (quadrato grande di 12 cm di lato)	4,5	9	18	36	72	144
cateto del triangolo (cm)	3	≅ 4,2	6	≅ 8,5	12	
ipotenusa del triangolo (cm)	≅ 4,2	6	≅ 8,5	12	≅ 17,0	
lato del quadrato (cm)		3	≅ 4,2	6	≅ 8,5	12
diagonale del quadrato (cm)		≅ 4,2	6	≅ 8,5	12	≅ 17,0

La costruzione, e poi l'osservazione, di queste sequenze di numeri richiederà tempo, certo, ma porterà a molte scoperte fondamentali. Per esempio :

- Nella progressione delle aree, le misure raddoppiano da un termine all'altro mentre nella progressione dei lati le misurazioni raddoppiano di due in due termini.
- Ci sono due successioni proporzionali (fattore 4,5) nelle due prime righe; ma non esiste più alcuna proporzionalità tra queste successioni (delle aree) e quelle delle righe successive (lunghezze).
- Le ultime quattro righe sono costituite dalla stessa successione: …; 3; ≅ 4.2; 6; ≅ 8,5; 12; ≅ 17,0; ... che può essere prolungato, a destra e a sinistra;
- C'è un'alternanza di "numero - approssimazione" in queste successioni, ma non potremmo sostituire le scritture approssimative (dovute all'incertezza delle misurazioni effettuate con un righello graduato) con numeri?
- Un'analisi più attenta delle successioni, o dei semi quadrati e quadrati, permette di trovare una soluzione alla domanda precedente: 3 è il lato del primo triangolo (triangolo unitario) e anche il lato del primo quadrato formato da due unità di triangoli (di area 9); l'ipotenusa del primo triangolo (≅ 4.2) è anche la diagonale del primo quadrato e il lato del secondo quadrato, di area 18. 4.2 è un'approssimazione del numero che, moltiplicato per se stesso, è 18. Arricchiamo qui la conoscenza "calcolare l'area di un quadrato di cui si conosce la misura del lato" "trovando la misura del lato di un quadrato di cui si conosce l'area", che qui viene chiamato "estrarre la radice quadrata di 18", si scrive $\sqrt{18}$ e che acquista lo statuto di "numero" e non più quello più complesso dell'approssimazione.
- -La nostra successione può così diventare…; 3 (o $\sqrt{9}$); $\sqrt{18}$; 6 (o $\sqrt{36}$); $\sqrt{72}$; 12 (o $\sqrt{144}$); $\sqrt{288}$; … oppure, per gli allievi di categorie superiori: …; 3; $3\times\sqrt{2}$; 6 (o $(3 \times \sqrt{2}) \times \sqrt{2}$); $6\times\sqrt{2}$; 12; $12\times\sqrt{2}$;

Ovviamente ci vuole tempo perché la conoscenza "la misura della diagonale di un quadrato è la misura del lato moltiplicata per $\sqrt{2}$" sia utilizzabile sotto la sua formula algebrica $d = c\sqrt{2}$, ma non è vietato sensibilizzare gli allievi a proposito di piastrellature utilizzando triangoli "metà di quadrati". I conflitti "area-perimetro", "numero-approssimazione", "scrittura decimale-scrittura illimitata", ecc. non si risolvono in poche lezioni di matematica.

Molte altre attività sullo stesso tema sono proposte nella Banca dei Problemi e sono state analizzate dal Gruppo "Geometria Piana", in particolare:
Il tangram del falegname (I) (ral. 29.II.10; cat. 6-7): A partire da una foto di un Tangram e dei suoi sette pezzi, trovare la misura del lato del Tangram conoscendo la misura del lato del quadrato piccolo (6 cm).
Da singolo a doppio (ral. 30.I.17; cat. 8-10): Tra diverse proposte (di allievi) di modifica delle dimensioni di un rettangolo per ottenere un rettangolo di area doppia, stabilire quelle che sono corrette / errate, darne motivazioni e, per quelle errate, trovare il rapporto fra le aree.
Un mosaico del Marocco (ral. 27.II.18; cat. 8-10): Calcolare il rapporto fra le aree di due tipi di figure di un mosaico, per scomposizione in quadrati, semi-quadrati triangolari e rettangoli di cui un lato è quello di un quadrato e l'altro quello della sua diagonale.
La parete piastrellata (ral. 31.II.19; cat. 9-10): Determinare le modifiche delle dimensioni di una pavimentazione rettangolare con quadrati quando si passa da una disposizione con i quadrati aventi i lati paralleli ai bordi del rettangolo a una disposizione dove sono le diagonali dei quadrati che sono parallele ai lati del rettangolo.

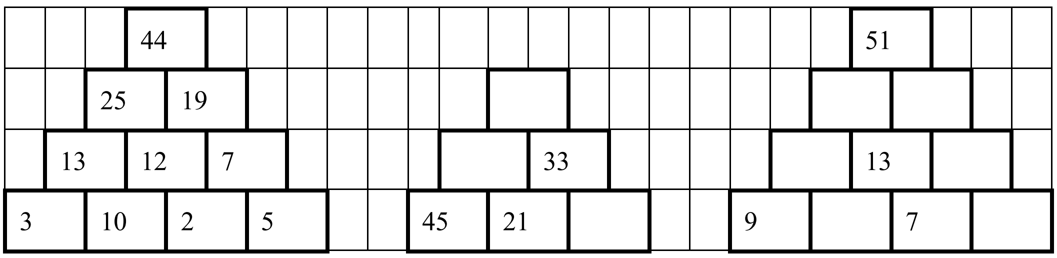
4. PIRAMIDI DI NUMERI

Tutte queste piramidi sono costruite con le stesse regole:

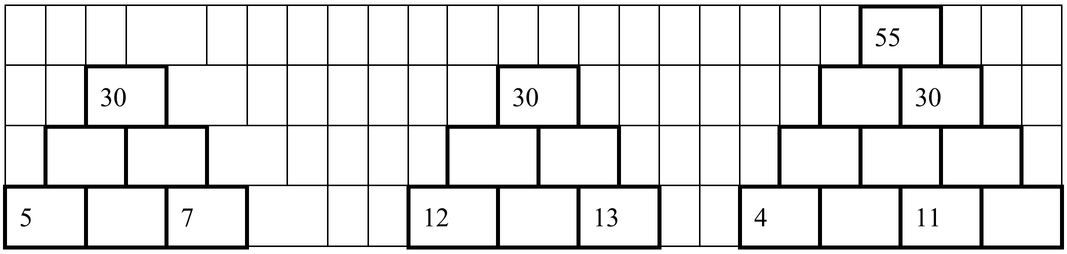
- c'è un numero su ogni mattoncino;
- il numero di un mattoncino è la somma dei numeri dei due mattoncini sui quali si appoggia.

La piramide 1 è un esempio di costruzione completa.

Completate le altre cinque piramidi



Piramide 1 Piramide 2 Piramide 3



Piramide 4 Piramide 5 Piramide 6

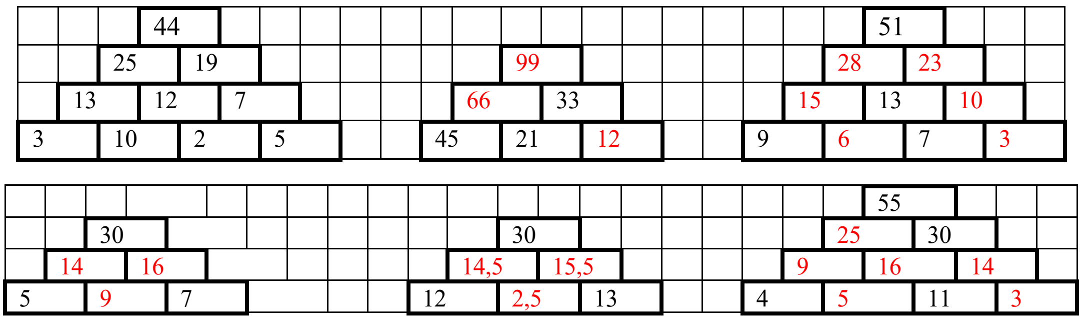
Per ciascuna piramide, indicate come avete proceduto.

4.1. Perché quest'attività?

Le piramidi additive di numeri sono attività che, in una forma piacevole, fanno lavorare in modo intenso e simultaneo l'addizione e la sottrazione e danno agli allievi l'opportunità di organizzare progressivamente dei tentativi, di completare scritture lacunarie successive, di scoprire regolarità, di rivelare nuovi numeri e quindi di accedere alla fase pre-algebrica.

Secondo l'esempio della piramide 1, la piramide 2 è solo un'applicazione diretta della regola: 21 + 45 = 66; 33 + 66 = 99; 21 +... = 33, per trovare 12 in basso a destra. La Piramide 3 richiede di calcolare 6 (13 – 7 o 7 + … = 13), quindi 15 (6 + 9), quindi 28 (15 + 13), quindi 23 (51 – 28 o 28 + … = 51), quindi 10, poi 3. La Piramide 4 porta ad una "equazione" (5 + x) + (7 + x) = 30 che può essere risolta con prove successive del numero di metà della base che deve essere 9 affinché la somma dei due numeri del primo piano sia 30.
La Piramide 5 è dello stesso tipo ma richiede il passaggio ad un numero non intero perché, per prove successive: (12 + 1) + (13 + 1) = 27 troppo piccolo; (12 + 2) + (13 + 2) = 29 troppo piccolo; (12 + 3) + (13 + 2) = 29 troppo grande; bisogna provare con un numero compreso tra 2 e 3: (12 + 2,5) + (13 + 2,5) = 30!!! La Piramide 6 combina le procedure precedenti.

4.2. Prime osservazioni



Delle nove classi finaliste, sette hanno completato correttamente tutte e 5 le piramidi, le altre due hanno sbagliato solo in una delle piramidi.
Visto il successo quasi totale di questa attività, non possiamo più considerarla un problema per gli allievi di una finale internazionale, che sono particolarmente preparati alla ricerca collettiva di soluzioni.
Quando le operazioni di addizione e sottrazione non sono direttamente applicabili, sono i tentativi a fornire rapidamente la soluzione.
Ad esempio: *P.4. Siamo partiti dall'alto e abbiamo provato 15 + 15 però non riuscivamo a mettere il numero in mezzo al 5 e al 7 quindi abbiamo provato con 14 + 16 e ci è riuscito perché 9 + 7 = 16 e 9 + 5 = 14.*
La piramide 5 è l'unica dove ci aspettavamo qualche errore visto che tutte le altre erano state completate con numeri naturali, ma solo una classe non ha pensato a far intervenire i numeri decimali: *Per noi, non può tornare.*
Gli altri otto hanno trovato 2,5 nel riquadro centrale della base con una spiegazione chiara del tipo: *On a fait plusieurs tests avec des chiffres et des nombres entiers jusqu'à arriver à la 5eme pyramide. On a remarqué que les nombres entiers ne marchent pas donc nous avons utilisé les nombres décimaux pour y arriver.*
(Abbiamo fatto diverse prove con numeri e numeri interi fino ad arrivare alla 5a piramide. Abbiamo notato che i numeri interi non funzionano, quindi abbiamo utilizzato i numeri decimali per arrivarci).
(Questo problema è stato pubblicato nel bollettino parrocchiale di Trequanda e, riguardo a questa 5a piramide, diversi adulti ci hanno segnalato che non c'era soluzione.)
L'unica piramide non completata, da un solo gruppo, è proprio la 5a.

4.3. I saperi da rinforzare

Queste “piramidi” prevedono addizioni e sottrazioni, secondo le regole della loro costruzione. Le prime tre si completano con una semplice applicazione passo passo della regola. Le tre successive richiedono verifica o anticipazione (di tipo pre-algebrico) e questo è il loro interesse.
Nel quarto ci sono solo uno o due tentativi da fare per arrivare al “9” del mattoncino centrale in basso e non c'è bisogno di considerare una procedura più breve.
Tuttavia, esistono altre potenziali conoscenze nel caso in cui decidiamo di passare a situazioni “più consistenti”.

4.4. Per andare più lontano

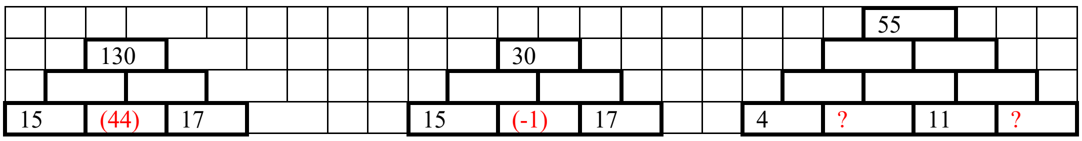
Se si scelgono numeri più grandi, la strategia delle prove successive diventa noiosa e si rende necessaria la ricerca di altre procedure.
Ad esempio, in una piramide a tre piani, con “130” al vertice e “15” e “17” alle estremità della base, un nuovo ragionamento consiste nel considerare i due mattoni intermedi come la somma di “15 e del numero centrale della base” (ancora indeterminato) e l'altro come somma di 17 e di questo stesso numero indeterminato. Questo “numero di base centrale” rimane provvisoriamente indeterminato ma dovrà essere contato due volte nel mattone in alto, con “15” e “17” ciascuno contati solo una volta. Entriamo così nel ragionamento pre-algebrico, senza le sue scritture letterali ma con un'uguaglianza lacunare che somiglia ad un'equazione:

$$120 = 15 + 17 + (2 \times \ldots)$$

da completare in pochi passi con l'addizione di 15 + 17= 32, calcolando la differenza tra 32 e 120 - 88 - e infine con una divisione per 2 o con la moltiplicazione lacunare 2 × … = 88 per ottenere 44.

Un’altra utilizzazione è il passaggio dai numeri naturali ai numeri decimali, già menzionato.
Allo stesso modo, queste piramidi potrebbero essere utilizzate per introdurre il passaggio dai numeri naturali agli interi negativi se, ad esempio, sostituissimo i due numeri 5 e 7 con 15 e 17, lasciando il numero 30 in alto.

Ci sono ancora altre utilizzazioni che lasciano diverse possibilità o un'infinità...



Le variazioni su questo tema dei numeri disposti a piramide sono numerosissime e costituiscono piccole sfide aritmetiche e poi algebriche.
Se siamo interessati al numero al vertice di una di queste piramidi in funzione dei numeri alla base, la seguente attività (rimanendo nella fase di progetto del problema RMT) può essere oggetto di una ricerca entusiasmante per tutti i livelli:
Dans une pyramide de, respectivement, 3, 4, 5, ... étages, on place les nombres, de 1 à 3, de 1 à 4, de 1 à 5 ... dans les briques de la base.
Comment disposer ces nombres de la base pour que le nombre du sommet soit le plus grand possible ?
(In una piramide rispettivamente di 3, 4, 5,... stadi, posizioniamo i numeri, da 1 a 3, da 1 a 4, da 1 a 5... nei mattoncini della base.
Come possiamo disporre questi numeri di base in modo che il numero superiore sia il più grande possibile?)

La Banca di problemi propone diverse situazioni sul tema delle “piramidi additive”:

Piramidi di mattoni (I) (ral. 21.I.03 ; cat. 3-5): Molto facile

Piramidi di mattoni (II) (ral. 21.I.12 ; cat. 6-10): . Un po’ più difficile con un passaggio ai decimali.

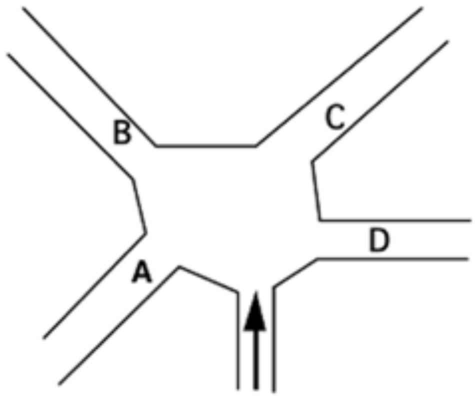
L'escalier des différences (ral. 02.F.01 ; cat. 3-4): Un “classico” con le differenze al posto delle somme, che può essere proposto per tutte le età.

Triangolo celebre (ral. 18.F.15 ; cat. 7-10): Dal tempo della Cina antica c’è interesse per questo triangolo che ha le stesse regole di costruzione delle nostre piramidi, partendo dall’alto.

5 LA STRADA PER TREQUANDA

Chianciano, Sinalunga, Torrita e Trequanda sono quattro borghi della Toscana.

Francesco percorre la strada segnata con la freccia e può raggiungere ognuno dei quattro borghi prendendo qualcuna delle 4 strade A, B, C, D.



Francesco sa che:

• la strada A porta a un borgo il cui nome non è di 10 lettere;

• il nome del borgo raggiungibile con la strada B contiene la vocale "i" e non inizia con "t";

• la strada C conduce ad un borgo che ha il nome con tutte le stesse vocali del nome di un altro borgo;

• il nome del borgo al quale si arriva con la strada D ha la vocale "u".

Quali sono le strade che possono portare a Trequanda?

Qual è il borgo al quale si arriva con tre delle quattro strade?

Mostrate come avete trovato le vostre risposte.

5.1. Perché quest'attività?

Per le due precedenti finali internazionali, Briga nel 2008 e Le Locle nel 2016, gli autori dei problemi hanno immaginato un contesto locale. Nel caso di questa finale 2024, il contesto è suggerito da un vecchio problema, La strada per Siena (06.F.06; cat. 3-6).

Un altro motivo, più matematico, era quello di offrire un'attività logica.

Ci sono molti problemi nella famiglia LO - Effettuare deduzioni dalla banca dei problemi, ma pochissimi sono stati analizzati a posteriori ed è sembrato l'occasione per approfondire questo tema considerato piuttosto ricreativo perché i programmi scolastici non si avventurano in questo ambito.

A prima vista, sembra che basti leggere e interpretare attentamente le indicazioni per definire l'elenco delle località raggiungibili da ciascuna delle strade
A: Sinalunga o Torrita o Trequanda;

B: Chianciano o Sinalunga;
C: Chianciano o Torrita;
D: Sinalunga o Trequanda
e dedurre che le strade che conducono a Trequanda sono la A e la D e che Sinalunga è raggiungibile dalle tre strade A, B e D.

5.2. Prime osservazioni

Quattro classi hanno fornito le due risposte attese con un inventario completo (tabella a doppia entrata, elenco riepilogativo dei quattro vincoli, disposizione in quattro colonne ciascuna corrispondente ad una località)

Due classi hanno dato una sola risposta corretta, con inventario e altre tre senza inventario.

Anche se ci aspettavamo un successo quasi completo, l'analisi degli elaborati ha mostrato che l'organizzazione e la disposizione dei dati non è sempre sufficientemente precisa.

Esempio 1.

SVOLGIMENTO

DOPO AVER LETTO ATTENTIVEMENTE IL PROBLEMA ABBIAMO TROVATO LE STRADE :

1. CHIANCIANO	*2. SINALUNGA*	*3. TORRITA*	*4. TREQUANDA*
10 LETTERE NO	*9 LETTERE SÌ*	*7 SÌ*	*9 SÌ*

A = 2 – 3 – 4	*A = TORRITA*
B = 1 – 2	*B = SINALUNGA*
C = 1 – 3	*C = CHIANCIANO*
D = 2 – 4	*D = TREQUANDA*

(Finora le quattro condizioni sono state interpretate correttamente, ma le località hanno due designazioni: i numeri da 1 a 4 nella prima riga, le lettere A, B, C, D successivamente.)

POI ABBIAMO CAPITO CHE VISTO LA D È TREQUANDDA LE TRE LETTERE SONO LA A B C.

(C'è confusione tra "1" e "4", la risposta corretta era A e D che hanno i numeri 4)

POI VISTO CHE LA A NON PUÒ ESSERE DI 10 LETTERE NON PUÒ ESSERE LA C. LA STESSA COSA È CON LA C, QUINDI È LA B.

(Questa parte del testo è irrilevante, la risposta è già nei tre "2" della prima parte.)

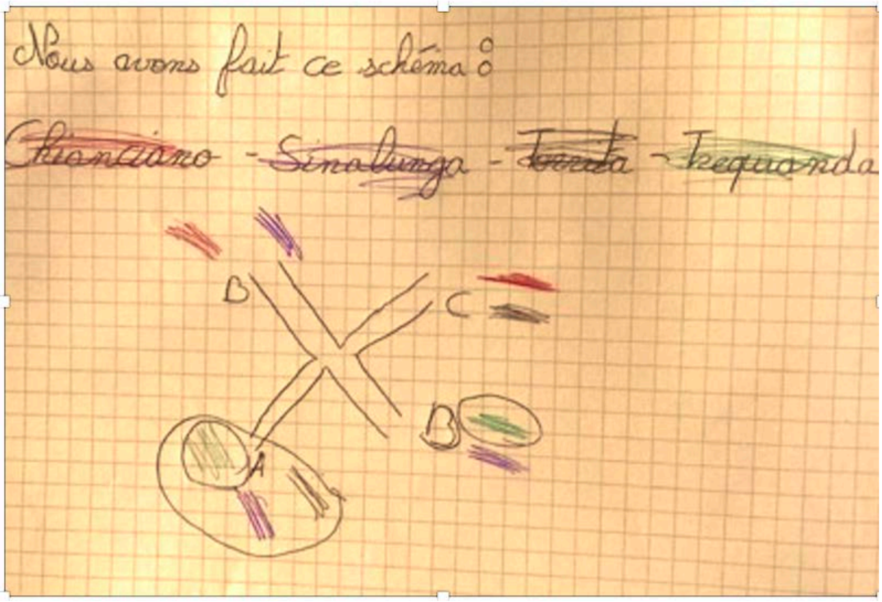
RISPONDO

LE STRADE CHE PORTANO A TREQUANDA SONO LA A – B E LA C.

IL BORGO AL QUALE SI ARRIVA CON TRE DELLE STRADE È SINALUNGA.

Esempio 2

1. *Ce sont les routes D et A*
2. *C'est la route A*



(Le risposte non corrispondono alle richieste e la combinazione di colori è inefficace.)

Esempio 3

Risposta

1) *Le strade che possono portare a Trequanda sono : C e D.*
2) *Il luogo su cui si arriva con tre o quattro strade è Sinalunga.*

Ragionamento

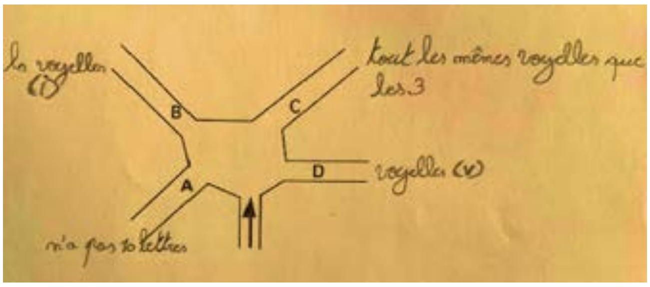
Abbiamo preso le informazioni del problema, poi scritto su un foglio di brutta copia. Ragionando ragionando abbiamo trovato la risposta

Esempio 4

<table>
<tr>
<td>Chianciano B

Torrita A

Trequanda D

Sinalunga C, A, D</td>
<td>


(Lo schema non aggiunge nulla perché non esiste un inventario completo delle quattro condizioni.)</td>
</tr>
</table>

Esempio 5.

(Un testo di una pagina e mezza dove località e strade si confondono)

Conclusione :

Torrita = A, Sinalunga = B, Chianciano = C , Trequanda è la D

La strada che porta a Trequanda è la B

5.3. I saperi da rinforzare

Nelle pubblicazioni del genere “giochi e attività” sono presenti numerosi “puzzle” o “sfide” dove lo scopo è quello di abbinare gli elementi di due gruppi di elementi di diversa natura, come nel nostro esempio: quattro strade e quattro località, basate sulle informazioni sui loro collegamenti. L'affermazione è generalmente accompagnata da una tabella a doppia entrata (o “tavola della verità”) le cui caselle devono essere completate, durante la lettura dell'informazione, con un segno di affermazione o di negazione.

Nella nostra situazione, se fosse stata data la tabella o l'organizzazione delle risposte, gli allievi avrebbero dovuto solo apporre una crocetta e il loro compito si sarebbe limitato alla lettura di ciascuna delle informazioni associate ad uno dei percorsi A, B , C o D. Basta “saper leggere” per decidere se il nome di una località non ha 10 lettere, se contiene la vocale i e inizia con T, …

Il sapere da rafforzare è legato all'appropriazione e alla rappresentazione mentale di tutte le componenti dell'enunciato: le quattro località sono chiaramente menzionate nella prima riga, le quattro strade sono ben visibili sullo schema, ma bisogna comprendere che non si tratta di stabilire una semplice corrispondenza una a una tra località e strada. Sono queste le quattro condizioni che devono far percepire che possono esserci più località per una strada.

La tabella a doppia entrata già affinata (senza ripetizioni di percorso o località) non è obbligatoria, ma è “in divenire”.

Ad esempio, la tabella presentata sopra da una delle classi ha 4 colonne con un riassunto della condizione per ciascuna di esse, ma nelle quattro righe che ripetono le quattro località il "no" o il "si" provengono da fatto di scrivere con ripetizioni o righe, cancellare quelli che non vengono presi in considerazione.

La discussione può svilupparsi dall'una o dall'altra delle disposizioni, la seguente delle quali si può ritenere come una delle più economiche come scrittura, anche se fosse stato necessario ripetere su ogni riga i nomi delle località (che è anche quella proposta in 5.1):

Abbiamo iniziato a vedere tutte le città per ogni lettera (strada) aiutandoci con il problema scoperto che:

A = Sinalunga, Torrita e Trequanda

B = Chianciano e Sinalunga,

C = Chianciano e Torrita

D = Sinalunga e Trequanda

Poi abbiamo visto le strade per Trequanda cioè la A et la D.

Combinando tutte le città Sinalunga era quella a cui si poteva arrivare con 3 strade.

(Abbiamo iniziato a vedere tutte le città per ogni lettera (strada), cosa che ci ha aiutato a risolvere il problema e abbiamo scoperto che:

…

Poi abbiamo visto le strade che portano a Trequanda, cioè A e D.

Riunendo tutti i paesi, Sinalunga era quello che poteva essere raggiunto da 3 strade.)

5.4. Per andare più lontano

Molti problemi della Banca propongono attività per ricostruire le relazioni tra elementi di due insiemi.

Si veda la famiglia LO del dominio Logica e ragionamento, ad esempio:

Le tre case (ral. 22.I.03; cat. 3-5): Ricostituire una ripartizione di tre persone di diversa nazionalità, di tre professioni diverse, in tre case di colore diverso, partendo da affermazioni, negazioni e relazioni di vicinanza.
Cinque amici in pizzeria (ral. 28.I.03; cat. 3-5): Associare un tipo di pizza scelto tra quattro a ciascuna delle cinque persone di un gruppo, assegnate quattro condizioni, di cui due espresse con una negazione.
La festa della "Castagna" (ral. 29.II.14; cat. 7-10): Ricostruire una ripartizione di cinque persone, in cinque diversi giorni della settimana, in base alla quantità di merce venduta, partendo da alcune affermazioni riguardanti giorni, personaggi e relazioni tra quantità di merce venduta.

6. DOPPIO COMPLEANNO

Oggi, 5 ottobre 2024, Margherita compie 36 anni e anche sua figlia Isabella compie gli anni e la sua età è un terzo dell'età di sua madre.

Come ogni anno, mamma e figlia festeggiano insieme i loro compleanni e sistemano quattro candeline sulla stessa torta.

Dopo aver soffiato le proprie due candeline, un «3» et un «6», Margherita le mette in una scatola e dice: *le conservo per uno dei miei prossimi compleanni quando potrò utilizzare di nuovo entrambe.*

Isabella dice: *Anch'io conserverò le mie due candeline per uno dei miei prossimi compleanni.*

Chi sarà la prima a poter utilizzare di nuovo le proprie due candeline per una prossima torta di compleanno del 5 ottobre? In quale anno?

In quale anno Margherita avrà il doppio dell'età di sua figlia?

Mostrate come avete trovato le vostre risposte.

6.1. Perché questa attività?

I problemi di compleanno legati alla numerazione sono sempre interessanti per rivelare due progressioni regolari con un differenza costante tra i termini corrispondenti (le età) e per osservare gli effetti sui numeri di un'inversione delle loro cifre.
Per questo caso particolare basta saper contare a partire da 2024 oppure da 12, oppure da 36 aumentando via via di 1; saper calcolare il terzo di 36 ed eventualmente determinare la differenza tra un numero a due cifre e il numero le cui due cifre sono invertite.
La procedura che ci è sembrata a priori la più semplice è consistita nello stabilire una tabella di anni ed età:

Anno	Età di Margherita	Età di Isabella
2024	**36**	**12**
2025	37	13
…	…	…
2033	**45**	**21**
…	…	…
2036	**48**	**24**
…	…	…
2042	54	42
… …	…	
2051	**63**	**51**

6.2. Prime osservazioni

Il problema si è rivelato molto semplice per le nostre classi finaliste. Sette di esse hanno trovato la risposta esatta e completa: Isabella sarà la prima (con spiegazioni) e Margherita avrà il doppio dell'età di Isabella nel 2036.
Una classe non ha fornito alcuna spiegazione e l'altra ha fornito solo la prima risposta.
Le procedure sono molto diverse.

Esempio 1

12 –> 21, 9 anni di differenza. *Isabella 2024 + 9 = 2033*
36 –> 63, 27 anni di differenza *Margherita 2024 + 27 = 2051*

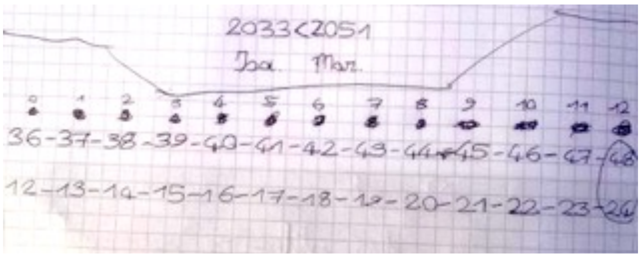
Abbiamo calcolato l'età di Isabella dall'età di Margherita e procedendo a tentativi abbiamo scoperto 48 e 24 dopo 13 anni

Per la domanda 2 la data non è fissata, con un piccolo errore: 13 invece di 12.

Esempio 2

Marguerite a 36 ans, bougies 3 et 6, 36 + 27 = 63 ans
Isabelle a 12 ans, bougies 1 et 2, 12 + 9 = 21 ans
La première à pouvoir utiliser ses bougies sera Isabe
36 : 12 = 3 NON
38 : 14 = 2, 714285714 NON
40 : 16 = 2,5 NON
42 : 18 = 2,333333333 NON
44 : 20 = 2,2 NON
46 : 22 = 2,090909091 NON
48 : 24 = 2 OUI *2024 + 12 = 2036*

Esempio 3



2024 + 12 = 2036 Anno in cui Margherita avrà il doppio dell'età di sua figlia.

Dopo aver determinato con le stesse candeline il 2033 e il 2051 per i prossimi compleanni, gli allievi hanno scritto le due successioni di età a partire dall'anno 0 (2024) per notare che nell'anno 12 l'età di Margherita sarà il doppio di quella di Isabella (48 e 24 cerchiate).

Tutte le classi hanno trovato la risposta alla prima domanda calcolando le differenze (9 e 27) tra i due numeri ottenuti invertendo la posizione delle candele; tutte hanno utilizzato una tabella o una disposizione in due elenchi delle età delle due persone per determina quando uno avrà il doppio dell'età dell'altro, come negli esempi 2 e 3.

6.3. I saperi da rinforzare

Come nel caso di questa finale, probabilmente la semplice inversione delle cifre servirà a determinare quale delle due persone riuscirà per prima a riutilizzare le proprie candele. Dietro questi due calcoli di differenza, c'è un'altra "conoscenza" che può essere sottolineata: le due cifre dell'età di Isabella, 1 e 2, differiscono di 1 (se le consideriamo come numeri). In tutti questi casi di due cifre consecutive, la differenza tra le due età della stessa persona sarà di 9 anni. (da 12 a 21; da 23 a 32; da 34 a 43, ecc.), che corrisponde a sostituire la cifra delle decine con la cifra successiva, che dà come risultato un incremento di 10 e a sostituire la cifra delle unità con la cifra precedente, che si traduce in una diminuzione di 1. Entrambe le trasformazioni risultano quindi in un aumento di 9.

Nel caso di Margherita, le due cifre della sua età, 3 e 6, differiscono di 3 e la loro permutazione darà come risultato un aumento di 3 decine e una diminuzione di 3 unità, cioè un aumento di 27.

Per la seconda domanda dobbiamo accontentarci della successione delle età e degli anni, chiaramente indicati. Non è necessario calcolare ogni volta il rapporto tra le due età corrispondenti, come nell'esempio 2, ma nel caso in cui compaiano questi calcoli, può essere opportuno sottolineare tali rapporti. (In relazione alla divisione e alla scrittura dei quozienti a seconda che vengano rilevati con l'uso della calcolatrice leggendo completamente lo schermo, oppure tramite l'algoritmo).

6.4. Per andare più lontano

Possiamo continuare le osservazioni sul cambiamento di posizione delle candeline e scopriamo allora una proprietà di numerazione dei numeri a due cifre: scambiando le candeline del compleanno, “tutti” sanno che potranno riutilizzarle tra un numero d'anni che è "tante volte 9 quanto la differenza tra i due numeri rappresentati dalle due cifre. E funziona anche se la prima è più grande della seconda e se una delle candele è il numero 0. Questa proprietà potrebbe essere chiamata “teorema della permutazione delle candele con le cifre” per i numeri a due cifre scritti in base dieci. Più modestamente, va considerata come una piccola scoperta nel campo delle torte di compleanno allargata a quello della numerazione.

Si può proseguire la ricerca con la somma dei numeri “scambiati” di due cifre che sia un multiplo di 11, con i numeri a tre cifre letti da sinistra a destra o da destra a sinistra; …

Per la seconda domanda sul rapporto tra le età di due persone, il problema un anno speciale (ral. 30.II.09; cat. 5-7) riguarda anche gli anni in cui il rapporto tra le età di due persone è un numero naturale. Per il nostro problema, si tratterebbe di trovare gli altri anni in cui il rapporto tra le età di Margherita e Isabella è intero. Era di 3 nel 2024, sarà di 2 nel 3036. Ci sono altri anni in cui questo rapporto era (o sarà) un numero naturale. Anche in questo caso è una ricerca modesta ma molto interessante per introdurre i numeri razionali e notare che il rapporto tra due numeri corrispondenti di due successioni di “età” (differenza costante) diminuisce gradualmente ma ha un limite.

ALLEGATO

TRIANGOLI IN UN QUADRATO

Brunella Brogi

Scuola Secondaria I grado “Il Pontormo” – Carmignano (PO)

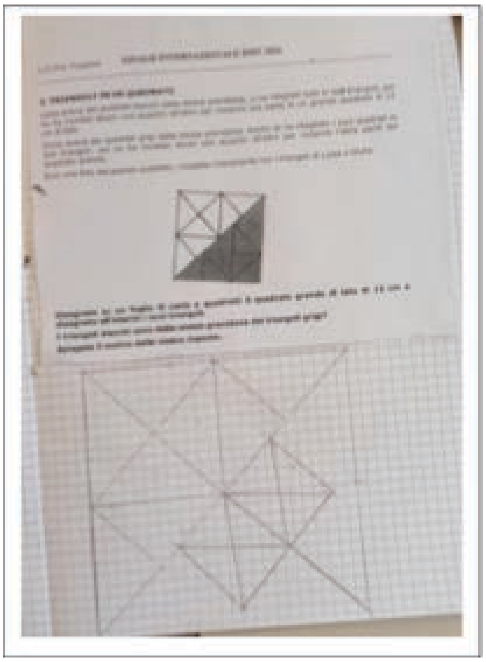
Ho proposto questo problema della Finale Internazionale disputata a Trequanda nello scorso ottobre agli alunni di categoria 6 della mia 1a B, una classe interattiva e positivamente vivace. Il gruppo è formato da 21 alunni, di cui 5 hanno “Bisogni Educativi Speciali” di vario tipo e diagnosticati, ma almeno altri 2 hanno gli stessi bisogni, che al momento non sono stati ufficialmente riconosciuti.

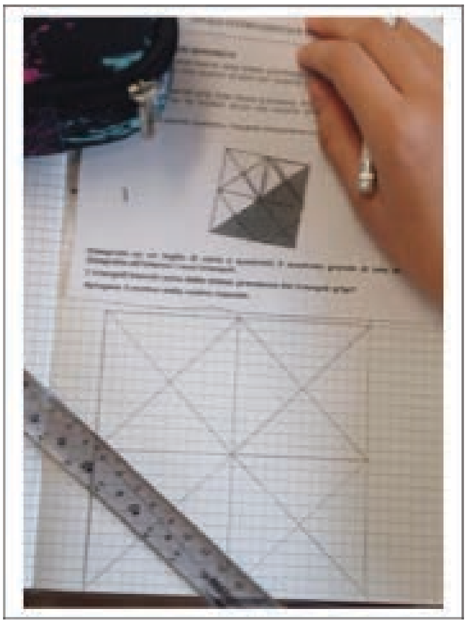
Alcuni di loro avevano già incontrato i problemi del RMT alla scuola Primaria e, anche per questo motivo, mi chiedono spesso di lavorarci.

Gli alunni si sono organizzati in gruppi di lavoro di 3 elementi, all’attività sono state dedicate quasi 2 ore, in due diversi momenti.

La quasi totalità degli alunni, all’inizio del lavoro, riteneva che i triangoli bianchi e quelli grigi raffigurati nel problema fossero uguali, solo diversamente orientati all’interno del quadrato.

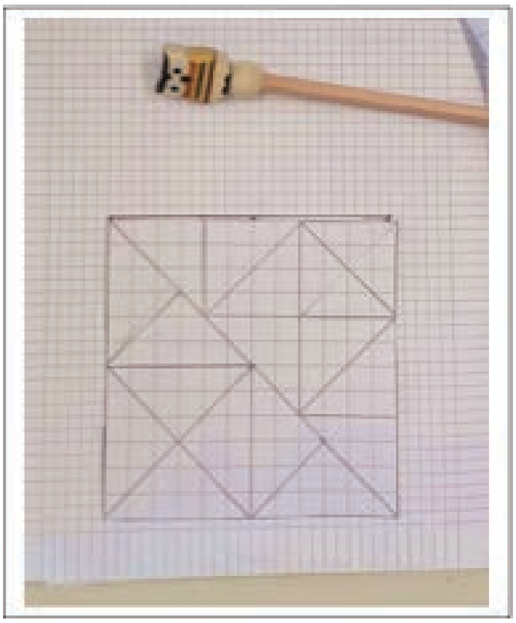
Alcuni hanno avuto difficoltà a riprodurre il disegno sul quaderno di matematica, dove avevano incollato la fotocopia, che ha i quadretti di lato 4 o 5 mm. Così, i triangoli disegnati non erano rettangoli o non erano isosceli, ma sembrava, passando tra i banchi, che gli autori non se ne accorgessero. Qualcuno non aveva capito di dover rispettare una misura assegnata dal testo del problema per la lunghezza del lato del quadrato, che aveva disegnato molto più grande.

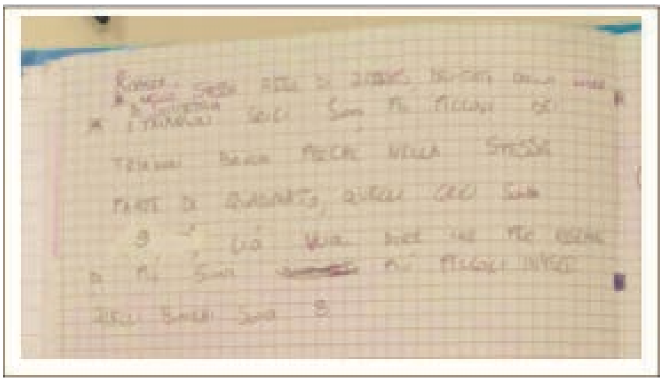


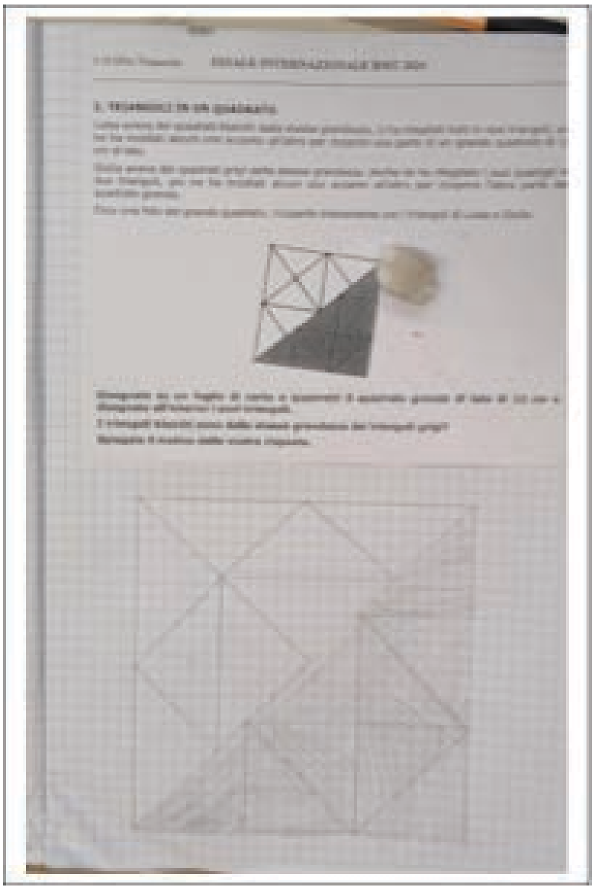


La situazione è migliorata quando alcuni alunni sono passati a usare i fogli con i quadretti di lato 1 cm, che ho chiesto di tenere nella loro cartellina di matematica, come corredo del perfetto “apprendista matematico”.

Alla fine della prima ora di lavoro, soltanto il gruppo di M. aveva risposto correttamente, basandosi sul diverso numero di triangoli in cui sono divise le due metà del quadrato, che poteva essere giustificato solo dalle diverse dimensioni dei due tipi di triangolo. Era stata usata la strategia del conteggio dei triangoli.

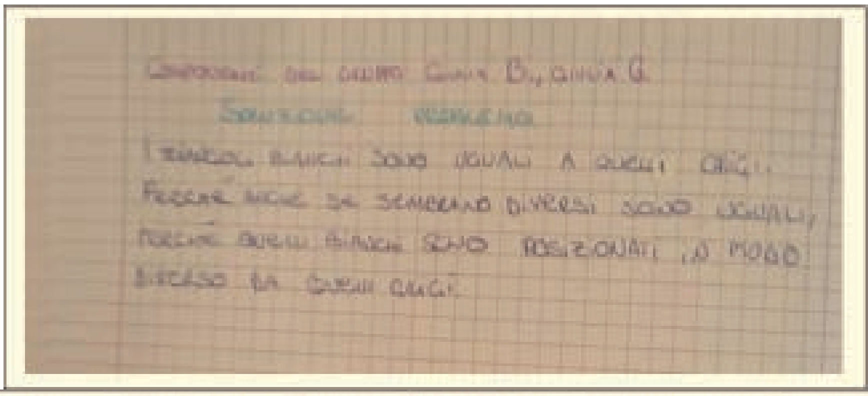


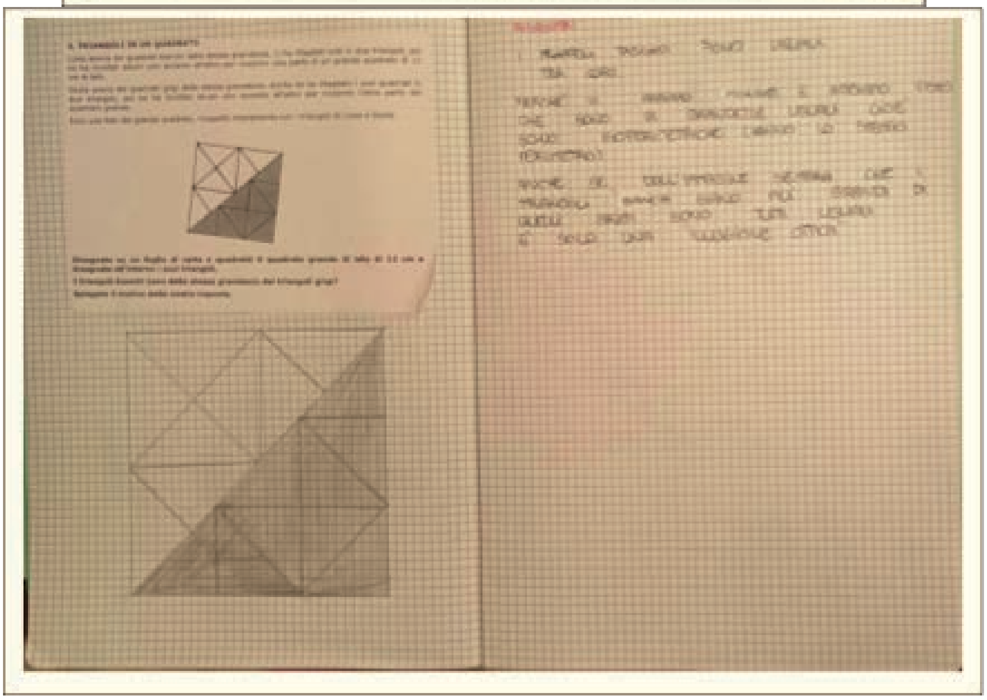




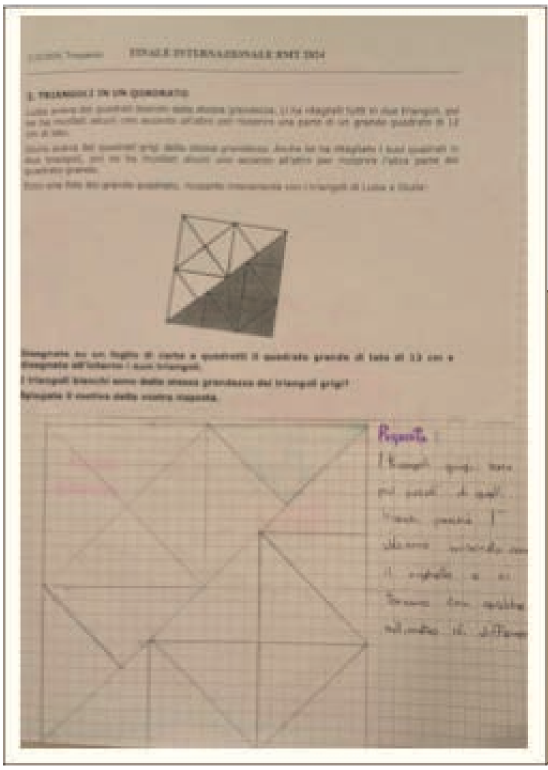
Al termine dell'ulteriore tempo concesso per permettere a tutti di risolvere il problema, due gruppi rimangono ancora dell'idea che i triangoli bianchi e quelli grigi siano uguali. La discussione collegiale che ne è seguita ha permesso a questi alunni di capire il loro errore.

Le ragazze che hanno scritto quanto riportato a fianco, non hanno saputo giustificare meglio la loro risposta, anche quando mi sono seduta accanto a loro e ho chiesto chiarimenti. A sostegno di quanto affermato, nel tentativo di farmi capire meglio il loro ragionamento, con il dito indice continuavano a seguire il contorno dei triangoli disegnati, insistendo in particolare nella zona centrale dove ci sono i 4 triangoli bianchi e i 4 grigi disposti a formare rispettivamente un rettangolo nella parte bianca e un quadrato in quella grigia.

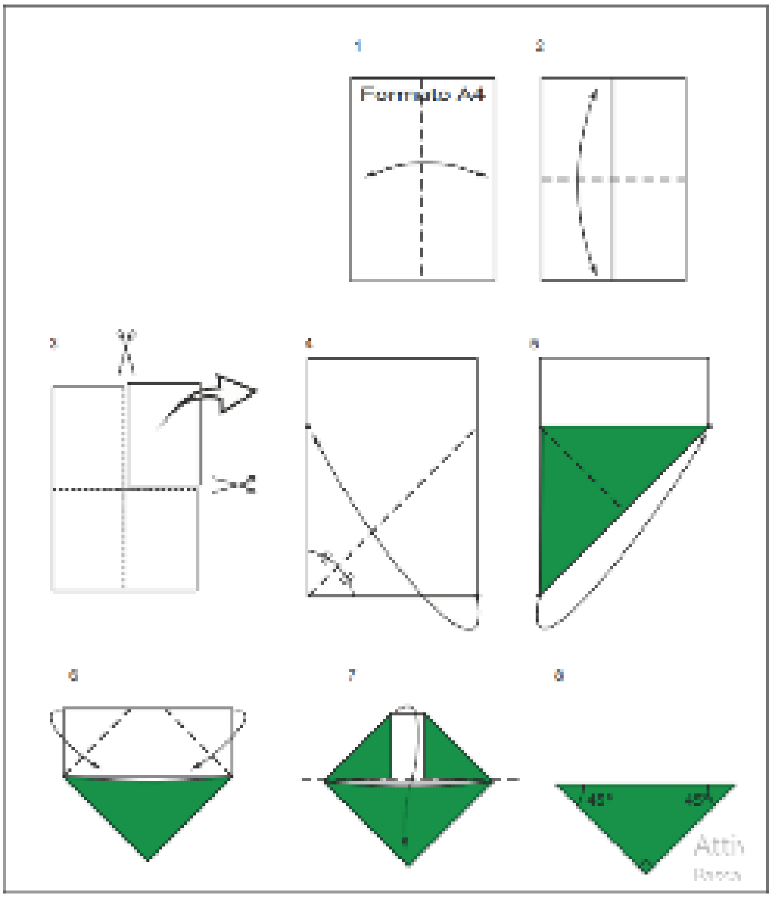




Se il gruppo precedente, ricorrendo alla misurazione con il righello, ritiene che tutti i triangoli siano isoperimetrici, i due gruppi sottostanti, con lo stesso strumento di misura trovano, invece, la risposta corretta.



I triangoli taschini ai quali fanno riferimento gli alunni sono modelli cartacei di triangoli rettangoli isosceli, usati in una precedente attività.

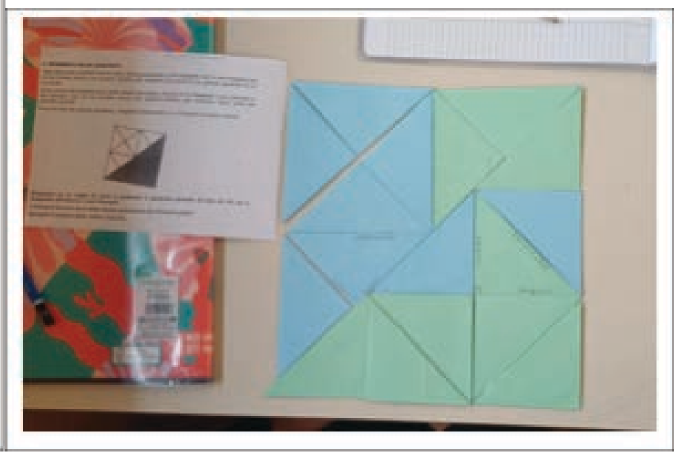


Con la mia attività didattica ho introdotto gli alunni alle pieghe origami e alla manipolazione e alla esplorazione di semplici modelli cartacei, come per esempio quelli di triangoli rettangoli isosceli, ottenuti piegando fogli di formato A. In particolare, sono stati usati fogli A6, come si vede nel diagramma di piegatura riportato a fianco, che Francesco Decio ha disegnato per il modello di Paolo Bascetta.

Nella cartellina di matematica, insieme agli strumenti del disegno geometrico, gli alunni conservano i modelli che via via vengono realizzati e, per tale motivo, due gruppi di lavoro hanno fatto ricorso ai propri "triangoli taschini", (come tali triangoli sono stati ribattezzati a causa della presenza di una tasca che accoglie un lembo di carta durante l'ultima fase di piegatura), per costruire sul banco la figura del problema, prima di rappresentarlo sul quaderno.

Con la costruzione eseguita sul banco, questi alunni hanno sperimentato che l'uso di triangoli tutti uguali, disposti come suggerito dal problema, non permette di ottenere quel quadrato, poiché la diagonale formata dalla giustapposizione dell'ipotenusa di 3 triangoli è più lunga di quella formata dall'affiancamento di 4 cateti. E' stato interessante ascoltare il commento della ragazza che guardava sconsolata la "sporgenza" in basso a sinistra (visibile nella figura in basso a

destra), mentre il suo compagno di lavoro l'accusava di essere stata poco accurata nella costruzione,

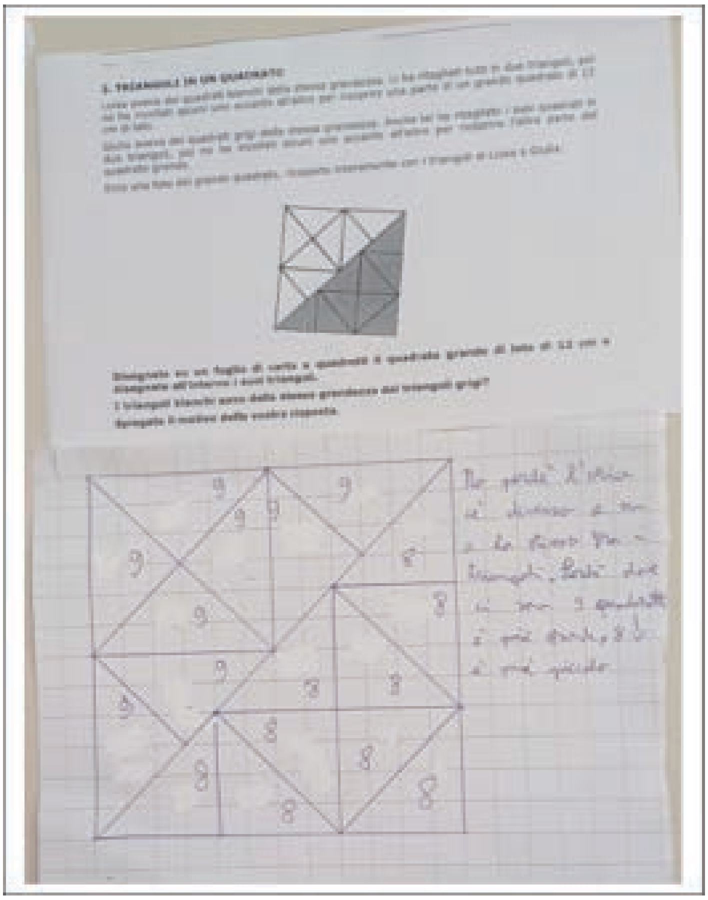


in quanto convinto che tutti i triangoli del problema fossero uguali. Per altri alunni, invece, questa esplorazione con i modelli cartacei è stata determinante per capire che i due triangoli, bianchi e grigi, del problema non possono essere uguali.

Alcuni alunni hanno determinato l'area dei triangoli tramite il conteggio dei quadretti al loro interno, dopo aver riprodotto il disegno sui fogli con i quadretti di 1 cm^2, arrivando così alla soluzione corretta.

Dopo che tutti i gruppi hanno esposto ai compagni la loro strategia risolutiva, soffermandomi su quella riportata a fianco, utilizzata da 3 gruppi, ho chiesto se avessero notato come nel mezzo quadrato bianco ci siano 8 triangoli di area 9 cm^2 e in quello grigio, invece, 9 triangoli di area 8 cm^2. E' un caso che ci sia questa inversione delle due quantità? Quali informazioni ci danno queste due coppie di numeri? Nessuno è arrivato a considerare il prodotto 9x8=8x9=72, cioè l'area di metà quadrato, che avendo il lato di 12 cm è di 144 cm^2.

Tuttavia, ci abbiamo riflettuto insieme.



LES PROBLÈMES DE LA FINALE INTERNATIONALE DE L'ARMT 2024

François Jaquet

Introduction

La troisième finale internationale de l'ARMT, en 2024 à Trequanda, comme en 2008 à Brigue et 2016 au Locle, pour les finales précédentes, a permis à quelques classes, gagnantes de leurs finales « régionales » de catégorie 4, de s'engager dans la résolution de six nouveaux problèmes. Pour les élèves, c'est la quatrième épreuve de l'année, même s'ils sont passés en catégorie 5 depuis quelques mois ; la plupart d'entre eux ont aussi l'expérience des épreuves de l'année précédente, en catégorie 3 et d'un entraînement au cours des semaines qui précèdent « l'événement » ; ils sont donc particulièrement motivés et préparés.

L'élaboration des énoncés est aussi particulière ; faite en petit comité, sans les phases habituelles de consultation par l'ensemble des sections, elle est conçue pour ces élèves qui ont déjà fait preuve de capacités remarquables de travail collectif. Elle peut se permettre quelques ambitions dans les tâches de résolution. Elle cherche aussi, en profitant de nos trente ans d'expérience, à les concevoir pour l'avenir qui s'esquisse : créer des problèmes non plus comme « questions de concours » mais comme propositions d'activités pour l'apprentissage des mathématiques en classe.

Neuf classes participantes signifie qu'il n'y a, pour chaque activité proposée, que neuf copies à examiner. Ce nombre est évidemment trop petit pour les statistiques habituelles, mais il permet d'alléger sensiblement la préparation de critères de classement qui n'est plus prioritaire. Les trois responsables (Lucia, Rita et François) ont finalement décidé de ne signaler que les trois meilleurs résultats d'ensemble. Pour chaque activité, les neuf copies ont été classées de la plus complète et correcte à la moins valable avec une attribution de points allant de 4 à 0 pour permettre de déterminer le trio de tête.

Il n'y a aucun jugement de valeur dans cette détermination des premières classes ; elles ont seulement répondu avec plus de précision que les autres et montré que leur niveau de construction des savoirs mis en jeu est globalement un peu plus élevé que celui des autres. Ce qui subsistera pour les élèves et leurs enseignants sera le plaisir d'avoir participé à la rencontre de Trequanda, d'avoir fait un beau voyage, d'avoir rencontré d'autres classes.

Les six énoncés sont six nouvelles suggestions d'activités à proposer aux enseignants pour les intégrer dans le « programme de mathématiques » de leur classe. Les neuf copies recueillies lors de la finale internationale sont analysées a posteriori comme l'étaient celles des anciennes épreuves, avec quelques commentaires sur les raisons pour lesquelles les propositions ont été élaborées, dans une première rubrique ***« Pourquoi cette activité ? »*** car, en effet, si un(e) enseignant(e) doit choisir un sujet à insérer dans son parcours didactique, il faut qu'il sache pourquoi ou « à quoi ça sert ». Une deuxième rubrique, ***« Premières observations »***, donne quelques résultats et procédures révélées par l'examen des neuf copies recueillies, avec la ou les solutions, elle correspond aux « *procédures, erreurs et obstacles relevés* » des fiches de la Banque de problèmes. Viennent ensuite ***« Les savoirs à renforcer »*** qui représentent la finalité de l'activité pour la phase d'enseignement-construction des connaissances en jeu. Il faut se rappeler ici que, dans une conception socio-constructiviste de l'apprentissage, les « savoirs » ne sont jamais définitifs mais toujours remis en cause et reconstruits à un niveau de maîtrise plus efficace. Ils apparaissent en phase de résolution par les groupes d'élèves, sont explicités en débat collectif, sont précisés par l'enseignant(e) en phase d'institutionnalisation, puis repris lors de la rédaction dans le cahier de chaque élève. Une quatrième rubrique, ***« Pour aller plus loin »***, suggère d'autres activités ou d'anciens problèmes en relation avec les savoirs spécifiques de la situation proposée.

Les six activités ou « problèmes de la finale internationale » sont présentés dans les pages suivantes :

1. **Nombres en couleurs,** à propos de la table de multiplication
2. **Boîtes d'allumettes**, une exploration sur les capacités de vision spatiale
3. **Triangles dans un carré**, vrai ou faux ? en dépit des illusions visuelles
4. **Nombres en pyramides**, additions élémentaires et défis arithmétiques ou algébriques
5. **La route pour Trequanda**, géographie toscane, lettres et organisation logique
6. **Double anniversaire**, des bougies sur un gâteau à la numération décimale

Chacune d'elles devrait faire l'objet de remarques, critiques et propositions complémentaires issues des pratiques de classe que les enseignant(e)s intéressé(e)s voudront bien expérimenter. Cet article n'est encore qu'au stade de suggestions et d'idées à améliorer, et les seuls capables de le faire sont ceux qui les vivent dans leur classe, avec leurs élèves.

1. NOMBRES EN COULEURS

Nicolas a compté qu'il y a 81 cases dans cette table de multiplication de 9 lignes et 9 colonnes. Mais il y a moins de 81 nombres différents dans ces cases car certains figurent plusieurs fois (par exemple le nombre 21 figure deux fois, le nombre 18 quatre fois, …).

Pour savoir combien il y a de nombres différents, Nicolas a colorié :

- en rouge les cases des nombres qui ne figurent qu'une seule fois dans cette table,
- en orange les cases des nombres qui y figurent deux fois, (par exemple, 21)
- en jaune les cases des nombres qui y figurent trois fois,
- en vert les cases des nombres qui y figurent quatre fois. (par exemple, 18)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Coloriez les cases comme Nicolas l'a fait

Combien y a-t-il de nombres différents dans cette table ?

La table de multiplication de la grand-mère de Nicolas avait 12 lignes et 12 colonnes.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Coloriez en bleu seulement les cases des nombres qui figurent cinq fois dans la table de la grand-mère de Nicolas.

Et coloriez en violet les cases des nombres qui y figurent six fois.

1.1. Pourquoi cette activité ?

Dans un ancien problème, du 19e RMT, proposé en catégories 3, 4 et 5 on se limitait à demander combien il y a de nombres différents dans la première table, dans un contexte de produits à mémoriser :

Riccardo doit mémoriser les tables de multiplication, de celle du 2 jusqu'à celle du 9. (Il connaît déjà bien la table du 0, celle du 1 et celle du 10 qui sont très faciles.)
Sa maman, pour l'encourager, lui a expliqué qu'il ne reste pas beaucoup de multiplications à apprendre, parce qu'en échangeant les deux nombres multipliés on obtient le même résultat. Ainsi,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

par exemple, $2 \times 3 = 3 \times 2$ ou $7 \times 4 = 4 \times 7$.
Combien y a-t-il de multiplications différentes que Riccardo doit se rappeler pour connaître toutes les tables de multiplication du 2 au 9 ?
Montrez, par une liste ou un tableau, comment vous avez trouvé la réponse.

Avec le recul, on peut émettre quelques réserves sur cet énoncé : le pluriel des « tables » est une traduction littérale de l'expression italienne « tabelline », le nombre de « multiplications différentes » est aussi ambigu (il faut considérer, au-delà des exemples cités, que « 3 × 8 » est une multiplication qui n'est pas différente de « 4 × 6 »). Les critères d'attribution des points donnent 36 comme réponse correcte alors qu'il s'agit de 35 si l'on élimine la « table du 1 », … La réussite a été très mitigée et comme beaucoup d'autres, cet énoncé a été laissé à sa place dans la Banque de problèmes en attendant des jours meilleurs.

Ceux-ci sont arrivés avec l'analyse a posteriori de *Arc-en-ciel* 31.II.10[1] où une première tâche était de colorier, dans un tableau de nombres, ceux dont le reste de la division par 7 est 0. Une des révélations de l'examen de centaines de copies est que les élèves de catégories 5, 6 et 7 doivent effectuer les divisions par 7 pour se rendre compte que ce sont précisément les multiples de 7 qui donnent un reste de 0.

Cette constatation en rejoint de nombreuses autres où, par exemple, des élèves de 11 à 12 ans « découvrent » avec surprise, à l'occasion d'une activité sur la table de multiplication, que la sixième ligne est composée des multiples de 6 !

Au moment où l'on s'oriente vers l'exploitation didactique de nos données il est donc naturel que les connaissances à propos de la table de multiplication, qui apparaissent bien superficielle, fassent l'objet de nouvelles activités à proposer et expérimenter.

L'enseignant qui lit l'énoncé de *Nombres en couleurs* peut penser a priori que l'activité proposée n'a rien d'original, ni de récréatif ni même d'utile pour des élèves de fin d'école élémentaire ou de début de collège. Il peut se demander quel est le lien entre la tâche d'observer attentivement la table de multiplication, y découvrir les nombres qui y figurent une seule fois, deux fois, trois fois … puis les colorier et le programme l'arithmétique à propos de nombres naturels.

Les observations suivantes, à propos des neuf copies recueillies après 50 minutes de travail autonome peuvent apporter quelques arguments.

1.2. Premières observations

Les réponses attendues : les deux coloriages et 36 nombres différents.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

[1] Voir article de François Jaquet et Rita Spatoloni. À propos de division euclidienne / A proposito di divisione euclidea Gazette no 14 pp 25 à 45

Dans deux copies sur neuf, les deux tables sont coloriées correctement, et la réponse est « 36 nombres différents ». Dans six autres cas il y a de 1 à 3 erreurs de coloriage et dans le dernier elles sont plus nombreuses, voir ci-contre:	

Pour la question sur les nombres différents on trouve :

Exemple 1. *Il y a 36 nombres différents dans ce tableau 5 en vert, 4 en jaune, 22 en orange et 5 en rouge.*

Exemple 2. *Dans la table de Nicolas il y a 36 nombres et il y en a 61 dans la table de la grand-mère* (Les élèves ont colorié entièrement et correctement le deuxième tableau mais ils ont fait une erreur dans le comptage du second tableau : 61 au lieu de 59).

Exemple 3. *Les nombres différents sont 72*

Exemple 4. *Il y a 37 différents nombres.*

Exemple 5. *Réponse 1. Il y a 6 cases rouges, 21 cases orange, 4 cases jaunes, 5 cases vertes.*

Réponse 2. Il y a 2 nombres violets, le 24 et le 12 et il y a un nombre bleu, le 36 36.

Quatre copies ne donnent pas de réponse à cette question, les élèves occupés par le coloriage, semblent l'avoir oubliée.

L'examen des copies ne permet pas d'en savoir plus, mais, si la même activité est proposée à la classe, dans des conditions proches de celles de notre finale : par groupes, en pleine autonomie, la situation est tout à fait différente. Une mise en commun des résultats en présence de tous les élèves qui pourront présenter leurs copies, les comparer, expliquer leurs procédures. L'enseignant interviendra ensuite pour demander des précisions, stimuler les échanges et orienter le débat pour tirer profit de l'activité.

1.3. Les savoirs à renforcer

Le coloriage était une tâche demandée par l'énoncé, pour faire visualiser les cases de la table où un nombre apparaît une, deux, trois... fois, mais ce n'est évidemment pas un « savoir » à retenir. L'enseignant doit faire en sorte que les « vrais savoirs » qui étaient peut-être présents lors du choix des couleurs soient explicités lors du débat, verbalisés et écrits.

En particulier :

A Le savoir essentiel est que chaque case du tableau est déterminée par sa ligne et sa colonne et que le nombre qui y figure est le produit (résultat de la multiplication) de deux nombres : les premiers de la ligne et de la colonne. (dans la case de la 3^{e} ligne, qui commence par 3, et de la 4^{e} colonne, qui commence par 4, on trouve le produit $12 = (3 \times 4)$. Pour l'adulte qui maîtrise le concept des « deux coordonnées » qui déterminent chaque case d'un tableau à double entrée, ce savoir est si évident qu'il a de la peine à imaginer qu'il ne l'est pas pour un jeune élève à qui l'on présente un tableau déjà construit avec les cases déjà remplies. On ne peut pas savoir, devant la première table où le 12 est en vert, si les élèves n'ont fait que compter les quatre apparition de ce nombre ou s'ils ont perçu que les quatre « 12 » sont issus des décompositions multiplicatives distinctes : 2×6, 3×4, 4×3 et 6×2 des 2^{e}, 3^{e}, 4^{e} et 6^{e} ligne (ou colonnes) et s'ils se rendront compte que, dans la deuxième table, les deux nouveaux « 12 » sont issus de 1×12 et 12×1 et que le nombre 12 est le produit de six décompositions multiplicatives de deux nombres naturels.

On retrouvera l'intérêt de ces décompositions, à propos des « 24 » qui ont aussi passé du vert (4 décompositions) au violet (6 décompositions) de la première à la deuxième table, en demandant aux élèves si ce nombre 24 pourra apparaître plus de six fois si l'on prolongeait la table sur une centaine de lignes et de colonnes.

Il faudra donc faire colorier entièrement la deuxième table pour progresser dans la construction de ce savoir : le nombre de fois qu'un nombre est écrit dans une table partielle est le nombre de ses décompositions en produit de deux nombres naturels ; en sachant que ces deux facteurs correspondent au numéro de la ligne et de la colonne où se situe la case et avec la conscience qu'on peut étendre la table autant qu'on le veut.

B Un autre savoir concerne la « symétrie » du coloriage par rapport à la diagonale de la table issue de la case 1 × 1. Du point de vue mathématique, il s'agit de la commutativité de la multiplication : les cases (2 × 3) et (3 × 2) sont les deux vertes, avec le nombre 6, pour passer de l'une à l'autre on intervertit « ligne » et « colonne » ou encore sont symétriques par rapport à la diagonale, comme les deux cases (1 × 6) et (6 × 1), ce qui conduit aux égalités 2 × 3 = 3 × 2 = 1 × 6 = 6 × 1 = 6.

Et si un nombre se situe sur la diagonale il sera rouge, comme 1, 25, 49, 64 et 81ou bleu comme 4, 9, 16 et 36 dans la première table partielle ; ce denier nombre, 36, passera au bleu dans deuxième table partielle. Tous ces nombres de la diagonale, dont certains apparaissent dans d'autres cases, symétriques deux à deux, figureront au total un nombre impair de fois dans les tables successives. Finalement, il ne restera que le 1 = 1 × 1 en rouge dans la table de multiplication étendue aussi loin que l'on veut.

Il faudra donc faire construire et colorier au moins une troisième table de multiplication partielle qu'on peut dessiner sur une feuille quadrillée (de 15 à 20 lignes au moins), pour visualiser la commutativité et noter que 1, 4, 9, 16, … sont une famille de nombres bien particuliers par leur décomposition multiplicative et leur position dans la table de multiplication.

C Il y a beaucoup de nombres orange dans les premières tables partielles : 22 dans celle de 10 lignes et 10 colonnes, 35 dans la deuxième, mais leur nombre change d'une table à l'autre.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Si l'on observe la table de six lignes et six colonnes à l'intérieur de la première, on voit qu'elle contient sept nombres orange : 2, 3, 5, 10, 15, 20, 30 ; mais à l'intérieur de la deuxième, elle n'en contient plus que quatre : 2, 3, 5 et 15 ; et si l'on construisait une table partielle de quinze lignes et quinze colonnes, le 15 ne sera plus orange et il ne subsistera que 2, 3 et 5 en orange dans la table de six lignes et six colonnes à son intérieur, tous sur le bord (première ligne ou première colonne) puisque 2 = 1 × 2 = 2 × 1 ne peut s'écrire qu'avec un couple de nombres, 1 et 2, que 3 ne peut aussi s'écrire qu'avec le couple 1 et 3, que 5 ne peut aussi s'écrire qu'avec le couple 1 et 5.

Après ces différents coloriage et constructions de tables partielles, on voit apparaître un savoir nouveau, très important du point de vue mathématique : sur les bords de la table, il y a des nombres qui resteront toujours orange : un clin d'œil vers les nombres premiers puis vers la correspondance entre nombre de diviseurs et couleurs d'un nombre naturel !

1.4. Pour aller plus loin

Nous venons de présenter trois « savoirs à renforcer » ; ils sont très modestes aux yeux de l'adulte qui pense qu'ils sont si élémentaires qu'ils ne méritent pas, ou plus, le statut de « savoir ». Il y en a beaucoup d'autres, que les élèves ont « découvert » et / ou « mentionnés » explicitement dans leurs copies. Par exemple :

- *… dans la sixième ligne de la table de multiplication il y a tous les multiples de 6, …*
- *… les nombres qui donnent un reste de 0 lorsqu’on les divise par 7 sont ceux de la « tabellina » du 7…*
- *… les nombres de la huitième ligne de la table de multiplication sont le double de ceux de la quatrième ligne …*

Les commentaires précédents sur l’activité *Nombres en couleur* ne sont que des suggestions qui montrent l’intérêt d’étudier la table de multiplication ou de la découvrir au cas où elle aurait été ignorée, négligée ou réduite aux « tabelline » qui ont souvent occupé beaucoup de temps et conduit à une simple mémorisation de produits isolés au seul profit de l’algorithme de la multiplication.
Cet algorithme a représenté, au cours de l’histoire, un critère de capacités pour calculer des produits de nombres de cinq ou six chiffres. On utiliserait actuellement la calculatrice si l’on devait effectuer des opérations de ce genre, mais on a renoncé à cette maîtrise uniquement opératoire.

Cette étude de la table de multiplication peut être entreprise dès l’introduction de la multiplication comme « opération » sur deux nombres naturels, en catégorie 4 et se poursuivre et se répéter pour tous les degrés suivants, même jusqu’au lycée ! Il y a toujours d’autre propriétés à découvrir dans la table de multiplication et de très nombreuses questions à inventer, qui peuvent devenir des problèmes.

Un exemple récent : pour profiter de la nouvelle année 2025 n’est pas forcément du niveau de catégories 5 et 6 mais peut intéresser les élèves plus grands et les adultes :

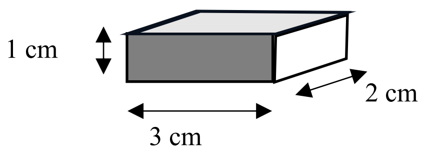
Voici une photo d’une toute petite partie de la table de multiplication :
Complétez les cases qui entourent celle de 2025 !

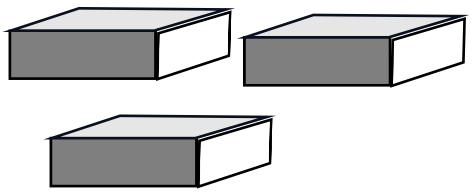
1936		
	2025	
		2116

Une recherche comme celle-ci conduit à renforcer de nombreux savoirs sur les diviseurs de 2025 (combien de fois le 2025 apparaît-il dans la table ?), sur les nombres de la ligne centrale et de la colonne centrale (multiple de ??) et sur les deux autres cases, en haut à droite et en bas à gauche (en lien avec une identité remarquable pour élèves de catégories 9 et suivantes) !

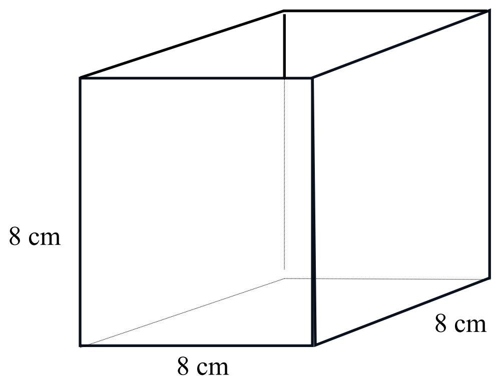
2 BOÎTES D’ALLUMETTES

Ces boîtes d’allumettes ont 3 cm de longueur, 2 cm de largeur et 1 cm de hauteur.





Combien pourrait-on placer de boîtes au maximum dans ce cube transparent de 8 cm d’arête ?



Montrez comment elles sont placées dans le cube.

2.1. Pourquoi cette activité ?

Dans le domaine 3D de la banque de problèmes, il y a une centaine de propositions, majoritairement attribuées aux catégories 6 à 10, qui ont rarement été analysées a posteriori.

L'une d'entre elles *La boîte de cubes* a fait apparaître deux obstacles importants à propos du remplissage d'un boîte en forme de parallélépipède rectangle de dimensions intérieures 13 cm, 8 cm et 7 cm avec un minimum de cubes de 1 cm d'arête ou de 2 cm d'arête.

L'idée de reprendre une activités de géométrie de l'espace pour nos finalistes avec des objets familiers a conduit à cet énoncé pour vérifier si les élèves peuvent imaginer le remplissage optimal du cube par des objets à trois dimensions, bien déterminés par leur représentation sous forme de figures planes, mais sans pouvoir les manipuler car les constructions effectives prendraient trop de temps.

L'exploitation des premières tentatives de résolution se situera dans le domaine de la vision dans l'espace : il y a trois différentes positions de boîtes selon leurs « bases » qui sont trois rectangles de 1 × 2, 1 × 3 et 2 × 3 ; qui conduiront à différents pavages d'une face du cube (un carré de 8 × 8). Après le conflit « aire-périmètre on va voir apparaître un nouveau conflit « aire – volume » avec des figures de deux et de trois dimensions (2D et 3D).

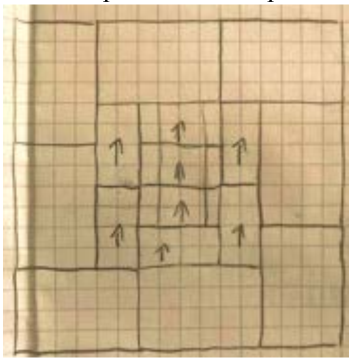
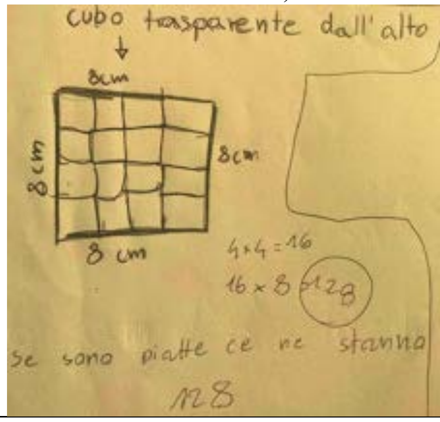
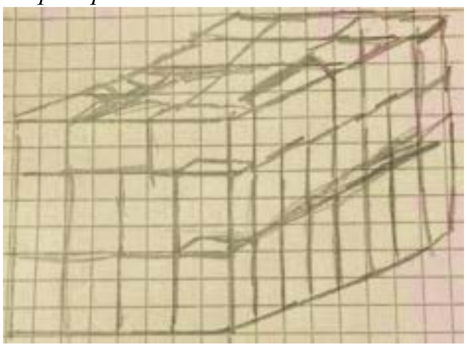
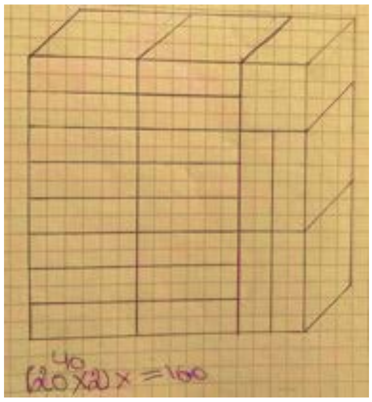
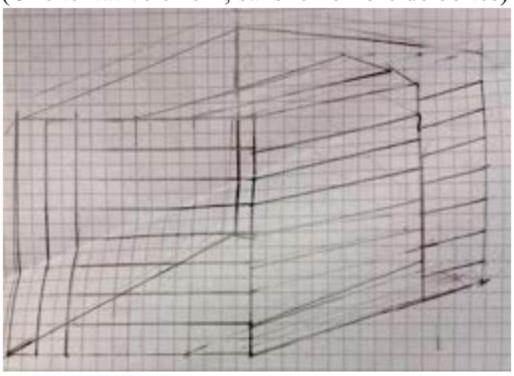
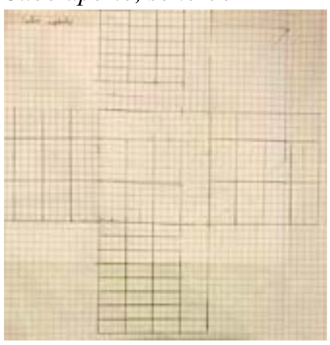
2.2. Premières observations

On savait que la représentation des boîtes dans le cube par un dessin n'est pas à la portée d'élèves qui n'ont pas de pratique développée du dessin géométrique et ne connaissent pas les règles de perspective. On attendait des procédures par « couches » horizontales où les boîtes sont représentées par des rectangles de 2 × 3 cm disposés dans un carré de 8 × 8 cm comme celle-ci :

Exemple 1. *Le maximum de boîtes… est 84*

(Il y a ici 8 couches de 10 rectangles 2 × 3 et il reste 2 rectangles 1 × 2 où sont insérées verticalement - *incastrate in verticale* - les 4 dernières boîtes.)

Autres types de représentations :

<table>
<tr>
<td>Exemple 2
(Avec pour la première couche : 8 rectangles 2×3 et 8 rectangle 1×2 et un total de 85 boîtes non expliqué mais très proche de la réponse correcte)
</td>
<td>Exemple 3
(Avec une première couche de 16 carrés et un total - cohérent - de 128 boîtes)

</td>
</tr>
<tr>
<td>Exemple 4.
On peut placer 82 boîtes
</td>
<td>Exemple 5.
(Une première partie antérieure du cube, en 3D mais sans maîtriser les dimensions « en profondeur)
</td>
</tr>
<tr>
<td>Exemple 6.
(Une tentative en 3D, sans le nombre de boîtes)
</td>
<td>Exemple 7.
Cubo aperto, sono 64

(pavage du fond et de 4 faces et dénombrement)</td>
</tr>
</table>

L'obstacle principal est la représentation de la disposition des boîtes en 3D par une figure plane (2D). Les rectangles des faces des boîtes deviennent des parallélogrammes, comme dans les figures de l'énoncé. Cet obstacle n'a été surmonté qu'au moment où les dessinateurs (peintres) ont découvert les représentations en perspective.

Il faut relever cependant qu'il n'y a pas de feuille blanche et que toutes les copies présentent des dessins de ces boîtes, soit dans le plan par des rectangles de la première couche, (exemples 1 à 3), soit dans l'espace (exemples 4 et 5) où les faces ne sont des rectangles que dans le plan vertical situé devant le dessinateur. L'appropriation de la tâche n'a pas été une difficulté, chaque groupe a « produit » de nombreuses représentations (y compris dans les feuilles de brouillon recueillies) et, s'est donc engagé dans une recherche, mathématique, du nombre de boîtes.

2.3. Les savoirs à renforcer

La question de l'énoncé de *Boîtes d'allumettes,* aurait pu se limiter au nombre de boîtes que l'on peut placer dans le cube, sans demander de montrer leur disposition ; mais même sans cette dernière demande explicite, les élèves auraient dû accompagner leurs explications de dessins.

Vu la richesse des productions précédentes, il faut considérer que la situation peut être exploitée en classe, avec du matériel*, en remettant à plus tard le problème de la représentation en perspective.

Les savoirs nécessaires pour le dénombrement des boîtes sont du domaine du pavage de la base du cube ou d'une autre face du cube, de dimension 2D, avec les faces d'objets 3D.

Au cas où l'on choisit les faces des boîtes de 1 × 2 le pavage est complet : 32 boîtes dans la base du cube de 8 × 8, la hauteur de cette couche est 3 unités et l'on peut les placer ainsi sur 2 couches pour arriver à 6 unités de hauteur en 64 boîtes et modifier les positions des boîtes pour les 2 unités qui restent sous la face supérieure du cube. Dans cet espace, les boîtes doivent être obligatoirement posées, soit sur leur face 1 × 3 soit sur leur face 2 × 3 ; dans un cas comme dans l'autre on pourra encore en ajouter 20, pour arriver à un total de 84.

Le cas où l'on choisit les faces de 2 × 3 pour le fond de la boîte, le pavage avec 10 rectangles est partiel pour le fond (voir la description des élèves de l'exemple 1.)

Le troisième cas avec les faces de 1 × 3 conduit aussi à un pavage partiel de 16 rectangles.

Toutes ces possibilités reposent sur des manipulations initiales de boîtes, de leurs juxtapositions et déplacements dans l'espace. Il s'agit de « savoirs » expérimentaux, non encore « scolaires » mais qui seront indispensables pour la suite des activités dans le domaine de la géométrie de l'espace.

D'autres savoirs se renforcent à propos des pavages, de caractère géométrique et arithmétique lorsqu'il s'agit, par exemple d'expliquer pourquoi on ne peut pas obtenir un pavage complet du carré 8 × 8 avec les rectangles 2 × 3, où interviennent les aires, les longueurs des côtés, les restes de divisions de 64 par 6, de 8 par 3 … , les différentes positions des rectangle, du « trou » de 2 × 2 ou des trous de 1 × 2 …

D'une question sur le nombre maximum de boîtes à placer dans le cube, on aborde des savoirs de géométrie dans l'espace de géométrie plane (côtés, aires, rectangles, carré…), d'arithmétique (multiplication, multiples, division, diviseur, reste…) et de logique (organisation, inventaire, combinatoire, négation, affirmation, …).

Ce sera aux enseignants qui proposeront l'activité dans leur classe de compléter ce chapitre par leurs commentaires et idées complémentaires.

* À propos de matériel.

Comme l'unité « cm » n'est pas vraisemblable (trop petite) pour les dimensions 1 × 2 × 3, il faut remplacer « cm » par une unité « u » dans l'énoncé. (C'est possible si le problème est proposé en clase, ce ne l'était pas dans les conditions d'une épreuve finale). Le matériel peut alors être composé de cubes assemblables (*multicubes*) du matériel scolaire ou encore de solides construits par les élèves (par découpage, pliage et collage), si chaque élève en construit un ou deux, ces « boîtes » suffiront pour initier l'ébauche du cube 8 × 8 × 8. L'activité manuelle de bricolage prendra un peu de temps mais elle participe fondamentalement (nous dirions même « obligatoirement ») à l'acquisition du concept de parallélépipède rectangle.

2.4. Pour aller plus loin

Dans la banque de problèmes du RMT, on trouve de nombreuses activités préparant à la géométrie de l'espace, en particulier :

Domaine 3D

Sucres en cubes (ral. 30.II.07 ; cat. 5-6): Trouver les différentes décompositions de 54 en 3 facteurs qui sont des nombres naturels inférieurs à 30.

Les boîtes de Catherine (ral. 26.F.07 ; cat. 4-6): A partir de trois développements partiels de boîtes à base carrée (sans couvercle), imaginer les solides correspondant et déterminer si on peut y placer 70 cubes de 1 cm d'arête.

Jeu de cubes (ral. 24.I.07 ; cat. 4-5): Déterminer à partir de représentations en perspective cavalière le nombre de cubes nécessaires à la réalisation de trois assemblages où les cubes sont empilés les uns à côté et sur les autres, contre une paroi.

La face cachée du cube (ral. 18.F.08 ; cat. 5-7): Déterminer la figure tracée sur une face cachée d'un cube par un raisonnement logique d'exclusion des cas.

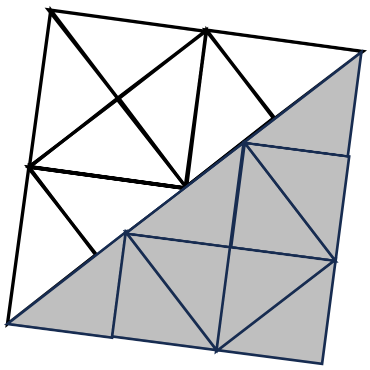
La boîte à recouvrir (ral. 18.I.04 ; cat. 3-5): Dessiner les trois faces rectangulaires permettant de former avec trois rectangles donnés un parallélépipède rectangulaire.
Boîtes (ral. 17.I.05 ; cat. 3-5): Déterminer le nombre de parallélépipèdes que l'on peut construire à l'aide d'une famille de rectangles représentant les faces.
Domaine GP
Tapis carrés (ral. 08.I.03 ; cat. 3-4): Recouvrir un rectangle 22 × 12 par un minimum de carrés qui respectent le quadrillage.
Etiquettes (ral. 10.F.09 ; cat. 5-7): Déterminer s'il est possible de découper dans une feuille rectangulaire de dimensions 19 × 24 cm : 21 étiquettes de 7 × 3 cm, ou 13 étiquettes de 7 × 5 cm, ou 19 étiquettes de 8 × 3 cm, ou 19 étiquettes de 6 × 4 cm, ou 18 étiquettes de 5 × 5 cm.

3. TRIANGLES DANS UN CARRÉ

Louise avait des carrés blancs de même grandeur. Elle les a tous découpés en deux triangles, puis elle a collé quelques-uns de ses triangles les uns à côté des autres pour recouvrir une partie d'un grand carré de 12 cm de côté.

Julie avait des carrés gris de même grandeur. Elle les a aussi tous découpés en deux triangles, puis elle en a collé quelques-uns pour recouvrir l'autre partie du grand carré.

Voici une photo du grand carré, recouvert entièrement par les triangles de Louise et Julie.



Dessinez sur papier quadrillé, le grand carré, de 12 cm de côté, et ses triangles à l'intérieur.

Les triangles blancs sont-ils de même grandeur que les triangles gris ?

Expliquez pourquoi.

3.1. Pourquoi cette activité ?

L'idée est venue du problème Triangles envolés (22.II.05 ; cat. 3-6) qui a fait apparaître la difficulté de distinguer deux types de triangles isocèles rectangles de dimensions proches ou l'obstacle des illusions visuelles, pour les élèves mais aussi pour les adultes.
Le but est, en présentant des triangles qui paraissent égaux, de remettre en cause cette impression et de trouver des arguments pour expliquer ou justifier son jugement sur l'égalité ou l'inégalité des figures. Plus généralement, il s'agit de distinguer le vrai du faux.

L'un des arguments repose sur la constatation que les nombres de triangles blancs et de triangles gris sont différents : 8 et 9 respectivement. Il faut alors associer ces deux nombres (de triangles) à une grandeur : la « place qu'ils occupent sur le dessin » qui deviendra leur aire dans la figure géométrique, sans préciser l'unité de mesure. Il faut aussi, simultanément, observer que les 8 triangles blancs forment un triangle plus grand qui est la moitié du carré et que les 9 triangles noirs forment aussi un triangle plus grand qui est l'autre moitié du carré et savoir, en plus, que la diagonale du carré le partage en deux triangles rectangles isocèles égaux.
On aboutit ainsi à deux types de justifications,

- L'aire du carré étant connue : 12 × 12 = 144 (en cm^2) l'aire d'un triangle blanc est 9 = 72 : 8) (en cm^2) et l'aire d'un triangle gris est 8 = 72 : 9) (en cm^2)
- Sans calculer l'aire du carré, considérer l'égalité 8 × b = 9 × g (b et g sont les aires des triangles blancs et gris) et en tirer que b > g par calcul algébrique (b = 9/8 g = 1,25 g)

Si l'on ne remarque pas la différence des nombres de triangles blancs et gris, une troisième argumentation peut s'appuyer sur des mesures des côtés : 4 ; 4 ; ≅ 5,7 cm pour les triangles gris ; ≅ 4,2 ; ≅ 4,2 ; 6 cm pour les triangles blancs prises sur un dessin précis de la figure, en vraie grandeur.

Le but de l'activité pour la classe est de progresser dans l'argumentation à propos du vrai et du faux en fonction du niveau d'acquisition des relations logiques des élèves … et des adultes !
En catégories 5 à 7 ou 8, l'argumentation par mesurage doit être à la portée des élèves. La différence des nombres de triangles, au cas où elle est perçue, peut entraîner une conviction que ceux qui sont le moins nombreux sont les plus grands, sans aboutir à la certitude, tant que les aires (9 et 8) ne soient calculées où que la procédure algébrique (b = 9/8 g = 1,25 g) ne puisse être mise en œuvre.

3.2. Premières observations

Huit des neuf copies examinées présentent un dessin du carré de 12 cm de côté avec les (17) triangles blancs ou gris, avec une précision tout à fait acceptable pour des élèves de catégorie 5.

La réponse « non, les triangles ne sont pas de même grandeur » apparaît dans 5 copies :

Exemple 1 *No perché i triangoli di Giulia sono uno in più / Non parce que les triangles de G sont un de plus, quindi abbiamo fatto altri calcoli per arrivare al risultato. / par conséquent nous avons fait d'autres calculs pour arriver au résultat* (sur le dessin en vraie grandeur, les côtés de l'angle droit sont calculés pour les triangles gris (12 : 3 = 4 en cm) et mesurés pour les triangles blancs (8,4 : 2 = 4,2 cm). La différence du nombre de triangles n'est pas suffisante pour ces élèves qui ont besoin d'une confirmation par les mesures).

Exemple 2 *Non parce qu'il y en plus du côté gris que du côté blanc.* (La différence du nombre de triangles suffit pour ce groupe, qui ne précise pas s'il a comparé des aires et quels sont les plus grands.)

Exemple 3 *I triangoli più grandi sono i bianchi / ce sont les blancs les plus grands (*Mesure précise au mm de tous les côtés de chaque type de triangle pour arriver à des périmètres de 13,5 et 14,6 cm.)

Exemple 4 *I triangoli non sono uguali / Les triangles ne sont pas égaux (*Par des considérations sur les prolongements de segments des deux parties, assez difficiles à comprendre mais correctes.)

Exemple 5 (Les 8 triangles blancs et les 9 triangles gris sont notés par des lettres B et G sur le dessin.) *Abbiamo capito che i triangoli grigi sono più grandi dei bianchi perché abbiamo calcolato la grandezza dei triangolo, perché li abbiamo disegnati.* (Dans ce cas comme 9 est plus grand que 8, les gris sont les plus grands !!)

Trois copies font état d'une confusion entre les parties grises et blanches du carré (qui sont aussi des triangles) et « les » triangles blancs et « les » triangles gris de l'énoncé, pour conclure à l'égalité des parties triangulaires.
Si la question avait porté sur la comparaison des « petits » triangles gris et blancs elle aurait peut-être réduit la fréquence de cette confusion.

Il n'y a qu'une seule incompréhension du problème.

Les résultats de ces neuf groupes de finalistes sont confirmés par une première expérimentation en classe conduite par Brunella Brogi avec des élèves de catégorie 6, où l'on en apprend beaucoup plus que par l'analyse de copies, vu que l'enseignante a pu dialoguer avec ses élèves. (Voir article en annexe).

3.3. Les savoirs à renforcer

Distinguer le vrai du faux, mettre en doute les impressions visuelles de figures, argumenter … sont des savoirs à renforcer en permanence.
Les savoirs spécifiques à aborder en phase de débat collectif sont tout d'abord, en catégorie 5 et 6, la construction précise de la figure : l'utilisation du quadrillage pour dessiner le carré de 12 cm de côté, sa diagonale, les milieux de ses côtés (6 cm) pour la partie blanche, les tiers de ses côtés (4 cm) pour la partie grise ; puis la précision des mesures non entières des côtés des triangles, avec des approximations au mm près (les périmètres de 23,5 et 14,6 de l'exemple précédent sont à comparer aux autres côtés ou périmètres obtenus).
Le savoir qui nous paraît le plus fondamental pour cette activité concerne le concept d'aire. Les groupes qui ont compté 8 triangles blancs et 9 triangles gris perçoivent la différence mais doivent encore savoir à quel type de grandeur sont liés ces deux « nombres de triangles » : couleur, consistance du papier, disposition, longueur des côtés correspondants, aires ?

Le rôle de l'enseignant doit ici insister pour obtenir une explication du genre : « La partie blanche du carré est sa moitié et est entièrement recouverte par 8 triangles, l'autre moitié, grise mais égale, est recouverte par 9 triangles ». C'est l'idée de « recouvrir » ou « occuper un certains espace », … qui correspond à la grandeur « aire », et permet de prendre conscience que l'aire de 8 triangles blancs est égale à l'aire de 9 triangles gris ou à la moitié de l'aire du carré.

Parmi toutes les solutions qui se réfèrent au comptage des triangles, celles des neuf classes finalistes et celles des groupes de la classe de Brunella Brogi, il n'y en a qu'une qui est vraiment claire : *Nella stessa area del quadrato delimitata dalla linea di simmetria, i triangoli grigi sono più piccoli dei triangoli bianchi perché nella stessa parte del quadrato quelli grigi sono 9 ciò vuol dire che per essere di più sono più piccoli. Invece i bianchi sono 8. (Dans la même aire du carré délimitée par la ligne de symétrie, les triangles gris sont plus petits que les triangles blancs car dans la même partie du carré les gris sont au nombre de 9 ce qui veut dire que parce qu'ils sont plus nombreux ils sont plus petits. Et il y a 8 blancs.)*

La déduction « *parce qu'ils sont plus nombreux, ils sont plus petits* » témoigne d'une bonne maîtrise du savoir « multiplication / division » et de ses propriétés à propos de l'égalité $8 \times b = 9 \times g$ présentée précédemment.

Le savoir « aire du carré » ne s'est manifesté spontanément dans aucune des copies examinées et pourrait éventuellement être suggéré par l'enseignant lors de la mise en commun ou de la phase d'institutionnalisation. Il est probable que les élèves « savent » calculer l'aire du carré de 12 cm de côté si on le leur demande, puis trouver que l'aire du demi-carré est 72 cm^2 et que les aires des triangles blancs et gris sont respectivement 9 et 8 cm^2 (l'interversion des 8 et 9 n'est due qu'au cas particulier du nombre 72 pour la mesure proposée de l'aire du demi-carré !) mais ce savoir n'a pas encore un degré suffisant de maîtrise qui permettrait de le faire intervenir dans une séquence de déductions permettant de dissiper tous les doutes sur le fait que les triangles blancs, d'aire 9 cm^2, sont plus grands que les gris, d'aire 8 cm^2.

C'est à l'enseignant de décider s'il veut l'aborder, pour profiter de la situation et « aller plus loin ».

3.4. Pour aller plus loin

La partie blanche de la figure est un pavage de 8 triangles unités égaux, d'aire 9 cm^2. Sur la suggestion de Brunella on peut proposer aux élèves de plier en deux un carré de 12 cm de côté pour former un triangle, puis de plier ce triangle une seconde fois, puis une troisième fois … Avec du papier assez fin, on peut arriver à 5 pliages consécutifs et demander alors quels sont les carrés et les triangles formés par les plis lorsque l'on a déplié la feuille.

Les plis des 5 pliages font apparaître un pavage de la feuille en 32 triangles-unités, puis des triangles de plus en plus grands de 2, de 4, de 8 et de16 unités. Apparaîtront aussi des carrés de 2, de 4, de 8, de 16 et de 32 unités.

On peut alors passer aux mesures : les aires en triangles-unités ou en cm^2 (selon les dimensions choisies du carré d'origine), les longueurs mesurées au mm près et les regrouper par exemple dans un tableau des six triangles ou carrés :

Aire de la figure, en triangles unités	1 (t)	2 (t et c)	4 (t et c)	8 (t et c)	16 (t et c)	32 (c)
en cm^2 (grand carré de 12 cm de côté)	4,5	9	18	36	72	144
côté de l'angle droit du triangle (cm)	3	≅ 4,2	6	≅ 8,5	12	
hypoténuse du triangle (cm)	≅ 4,2	6	≅ 8,5	12	≅ 17,0	
côté du carré (cm)		3	≅ 4,2	6	≅ 8,5	12
diagonale du carré (cm)		≅ 4,2	6	≅ 8,5	12	≅ 17,0

(en rouge, les triangles t, en bleu les carrés c)

La construction, puis l'observation de ces séquences de nombres vont prendre du temps, certes, mais aboutissent à de nombreuses découvertes fondamentales. Par exemple :

- Dans la progression des aires, les mesures doublent d'un terme au suivant alors que dans la progression des côtés, les mesures doublent de deux en deux termes.

- Il y a deux suites proportionnelles (facteur 4,5) dans les deux premières lignes ; mais il n'y a plus de proportionnalité entre ces suites (des aires) et celles des lignes suivantes (longueurs).
- Les quatre dernières lignes sont constituées de la même suite : … ; 3 ; ≅ 4,2 ; 6 ; ≅ 8,5 ; 12 ; ≅ 17,0 ; … que l'on pourrait prolonger, à droite comme à gauche ;
- Il y a alternance « nombre - approximation » dans ces suites, mais ne pourrait-on pas remplacer les écritures approximatives (dues à l'incertitudes des mesures prises à la règle graduée) par des nombres ?
- Une analyse plus attentive des suites, ou des demi-carrés et carrés, permet de trouver une solution à l'interrogation précédente : 3 est le côté du premier triangle (triangle-unité) et aussi le côté du premier carré constitué de deux triangles unités (d'aire 9) ; l'hypoténuse du premier triangle (≅ 4,2) est aussi la diagonale du premier carré et le côté du deuxième carré, d'aire 18. 4,2 est une approximation du nombre qui, multiplié par lui-même est 18. On enrichit ici le savoir « calculer l'aire d'un carré dont on connaît la mesure du côté » par « trouver la mesure du côté d'un carré dont on connaît l'aire », qui s'appelle ici « extraire la racine carrée de 18 », s'écrit √18 et qui acquiert le statut de « nombre » et non plus celui plus complexe d'approximation.
- Notre suite peut ainsi devenir … ; 3 (ou √9) ; √18 ; 6 (ou √36) ; √72 ; 12 (ou √144) ; √288 ; … ou encore, pour les élèves de catégories plus élevées : … ; 3 ; 3 × √2 ; 6 (ou (3 × √2) × √2) ; 6 × √2 ; 12 ; 12× √2 ;

Il faut évidemment du temps pour que le savoir « la mesure de la diagonale d'un carré est la mesure du côté multipliée par √2 » soit mobilisable sous sa formule algébrique $d = c\sqrt{2}$, mais il n'est pas interdit d'y sensibiliser les élèves à propos de pavages par des triangles « moitiés de carrés ». Les conflits « aire-périmètre », « nombre-approximation », « écriture décimale-écriture illimitée », … ne se résolvent pas en quelques leçons de mathématiques.

De nombreuses autres activités sur le même thème sont proposées dans la Banque de problèmes et ont été analysées par le Groupe « Géométrie plane », en particulier :

Le tangram du menuisier (I) (ral. 29.II.10 ; cat. 6-7)

Du simple au double (ral. 30.I.17 ; cat. 8-10)

Une mosaïque du Maroc (ral. 27.II.18 ; cat. 8-10)

La paroi carrelée (ral. 31.II.19 ; cat. 9-10)

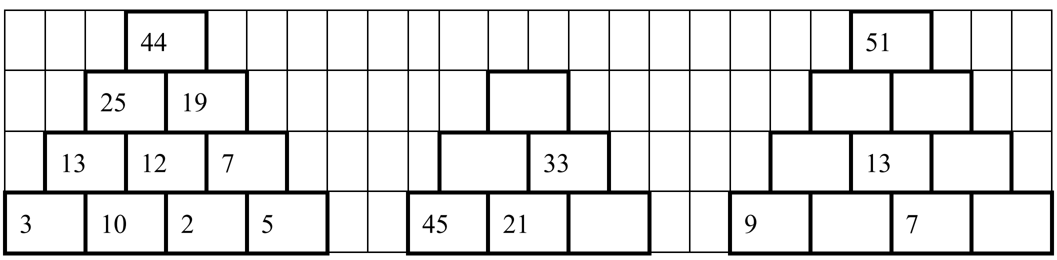
4. NOMBRES EN PYRAMIDES

Toutes ces pyramides ont les mêmes règles de construction :

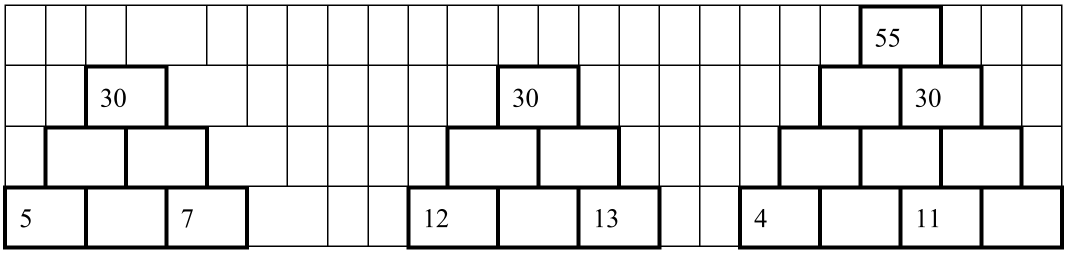
- il y a un nombre sur chaque brique.
- le nombre d'une brique est la somme des nombres des deux briques sur lesquelles elle repose.

La pyramide 1 est un exemple de construction complète.

Complétez les cinq autres pyramides



Pyramide 1 Pyramide 2 Pyramide 3



Pyramide 4 Pyramide 5 Pyramide 6

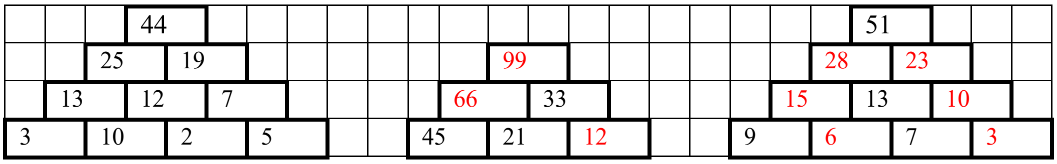
Pour chaque pyramide, indiquez comment vous avez procédé.

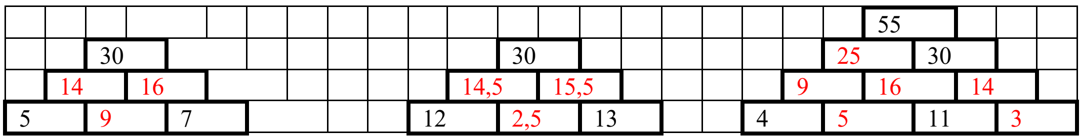
4.1. Pourquoi cette activité ?

Les pyramides additives de nombres sont des activités qui, sous une forme plaisante, font travailler simultanément l'addition et la soustraction de manière intensive et donnent l'occasion aux élèves d'organiser progressivement des essais, de compléter des écritures lacunaires successives, de découvrir des régularités, de faire apparaître de nouveaux nombres et d'accéder ainsi à des procédures pré-algébriques.

Selon l'exemple de la pyramide 1, la pyramide 2 n'est qu'une application directe de la règle : 21 + 45 = 66 ; 33 + 66 = 99 ; 21 + … = 33, pour trouver 12 en bas à droite. La pyramide 3 demande de calculer 6 (13 – 7 ou 7 + … = 13), puis 15 (6 + 9), puis 28 (15 + 13), puis 23 (51 – 28 ou 28 + … = 51), puis 10, puis 3. La pyramide 4 conduit à une « équation » $(5 + x) + (7 + x) = 30$ qui peut se résoudre par essais successifs du nombre du milieu de la base qui doit être 9 pour que la somme des deux nombres du premier étage soit 30.
La pyramide 5 est du même type mais nécessite le passage à un nombre non naturel car, par essais successifs : (12 + 1) + (13 + 1) = 27 trop petit ; (12 + 2) + (13 + 2) = 29 trop petit ; (12 + 3) + (13 + 2) = 29 trop grand ; il faut essayer avec un nombre entre 2 et 3 : (12 + 2,5) + (13 + 2,5) = 30 !!! La pyramide 6 combine les procédures précédentes.

4.2. Premières observations





Sur les neuf classes finalistes, sept ont complété correctement les 5 pyramides, les deux autres n'ont échoué que pour une des pyramides.
Au vu de la réussite quasi-totale de cette activité, on ne peut plus la considérer comme un problème pour des élèves d'une finale internationale, particulièrement aptes à la recherche collective de solutions.
Lorsque les opérations d'addition et de soustraction ne sont pas applicables directement, ce sont les essais qui donnent rapidement la solution.
Par exemple : *P.4. Siamo partiti d'all'alto e abbiamo provato 15 + 15 però non riuscivamo a mettere il numero in mezzo al 5 e al 7 quindi abbiamo provato con 14 + 16 e ci è riuscito perché 9 + 7 = 16 e 9 + 5 = 14.* (*Nous sommes partis du haut et avons essayé 15 + 15 mais nous n'avons pas réussi à mettre le nombre entre le 5 et le 7 nous avons alors essayé 14 + 16 et ça marchait parce que 9 + 7 = 16 e 9 + 5 = 14.*)
La pyramide 5 est la seule où l'on s'attendait à quelques échecs, vu que toutes les autres se complétaient par des nombres naturels, mais une seule classe n'a pas pensé à faire intervenir des nombres décimaux : *Per noi, non può tornare.* (*Pour nous ça ne peut pas marcher*).
Les huit autres ont trouvé 2,5 dans la case centrale de la base avec une explication claire comme :*On a fait plusieurs tests avec des chiffres et des nombres entiers jusqu'à arriver à la 5eme pyramide. On a remarqué que les nombres entiers ne marchent pas donc nous avons utilisé les nombres décimaux pour y arriver.*
(Ce problème a été publié dans le petit bulletin d'information paroissial de Trequanda et, à propos de cette 5e pyramide, plusieurs adultes nous ont signalé qu'il n'y avait pas de solution.)
L'unique pyramide non complétée, par un seul groupe, est précisément la 5e .

4.3. Les savoirs à renforcer

Ces « pyramides » mettent en jeu l'addition et la soustraction, selon les règles de leur construction. Les trois premières se complètent par une simple application, pas à pas, de la règle. Les trois suivantes nécessitent des essais ou une anticipation (de type pré-algébrique) et c'est là leur intérêt.
Dans la quatrième, il n'y a qu'un ou deux essais à faire pour arriver au « 9 » de la brique centrale en bas et il n'est pas nécessaire d'envisager une procédure plus courte.
Il y a cependant d'autres savoirs potentiels au cas où l'on décide de passer à des situations plus « consistantes.

4.4. Pour aller plus loin

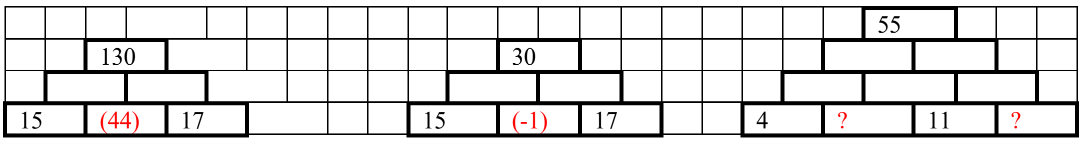
Si l'on choisit des nombres plus grands, la stratégie des essais successifs devient fastidieuse et la recherche d'autres procédure est nécessaire.
Par exemple, dans une pyramide de trois étages, avec « 130 » en haut et « 15 » et « 17 » aux extrémités de la base, un raisonnement nouveau consiste à considérer les deux briques intermédiaires l'une comme somme de « 15 et du nombre du milieu de la base (encore indéterminé) et l'autre comme somme de 17 et de ce même nombre indéterminé. Ce « nombre du milieu de la base » reste provisoirement indéterminé mais devra être compté deux fois dans la brique du haut, avec « 15 » et « 17 » comptés chacun une seule fois. On entre ainsi dans un raisonnement pré-algébrique, sans ses écritures littérales mais avec une égalité lacunaire qui ressemble à une équation :

$$120 = 15 + 17 + (2 \times \ldots)$$

à compléter en quelques étapes par une addition de 15 + 17= 32, par le calcul de l'écart entre 32 et 120 (88) et finalement par une division par 2 ou par la multiplication lacunaire 2 × … = 88 pour obtenir 44.

Une autre exploitation est le passage des nombres naturels aux nombres décimaux, déjà mentionné.
De même, ces pyramides pourraient être utilisés pour introduire le passage des nombres naturels au nombres entiers négatifs si, par exemple, on remplace les deux nombres 5 et 7 par 15 et 17 en laissant le nombre 30 au sommet.

Il y a encore d'autres exploitations en laissant plusieurs possibilités ou une infinité …



Les variations sur ce thème des nombres disposés en pyramide sont très nombreuses et constituent autant de petits défis arithmétiques, puis algébriques.
Si l'on s'intéresse au nombre du sommet d'une de ces pyramides en fonction des nombres de la base, l'activité suivante (restée à l'état de projet de problème du RMT) peut faire l'objet d'une recherche passionnante pour tous les degrés :
Dans une pyramide de, respectivement, 3, 4, 5, … étages, on place les nombres, de 1 à 3, de 1 à 4, de 1 à 5 … dans les briques de la base.
Comment disposer ces nombres de la base pour que le nombre du sommet soit le plus grand possible ?

La Banque de problèmes propose plusieurs situations sur ce thème des « pyramides additives » :

Pyramides de briques (I) (ral. 21.I.03 ; cat. 3-5), très facile.

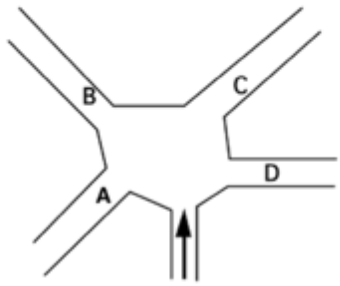
Pyramides de briques (II) (ral. 21.I.12 ; cat. 6-10), un peu plus difficile avec passage aux décimaux.

L'escalier des différences (ral. 02.F.01 ; cat. 3-4): un « classique », avec des différences au lieu de sommes, qui peut être exploité pour tous les âges.

Triangle célèbre (ral. 18.F.15 ; cat. 7-10) Depuis la Chine antique, on s'intéresse à ce triangle, qui a les mêmes règles de construction que nos pyramides, en partant du haut.

5. LA ROUTE POUR TREQUANDA

Chianciano, Sinalunga, Torrita e Trequanda sont quatre bourgs de Toscane. François suit la route indiquée par la flèche et peut se rendre à chacun des quatre bourgs en suivant quelques-unes des quatre routes A, B, C ou D.



François sait que :

• la route A conduit à un bourg dont le nom n'a pas 10 lettres ;

• le nom du bourg que l'on peut atteindre avec la route B contient la voyelle « i » et ne commence pas par « T » ;

• la route C conduit à un bourg dont le nom a toutes les mêmes voyelles que le nom d'un des trois autres bourgs ;

• le nom du bourg auquel on arrive par la route D contient la voyelle « u ».

Quelles sont les routes qui conduisent à Trequanda ?

Quel est le bourg auquel on peut arriver par trois des quatre routes ?

Montrez comment vous avez trouvé vos réponses.

5.1. Pourquoi cette activité ?

Pour les deux finales internationales précédentes, de Brigue en 2008 et du Locle en 2016, les auteurs des problèmes ont imaginé un contexte local. Pour cette finale 2024, le contexte est suggéré par un ancien problème, La route de Siena (06.F.06 ; cat. 3-6).

Une autre raison, plus mathématique, était de proposer une activité de logique.

Il y a de très nombreux problèmes dans la famille LO - Effectuer des déductions de la banque de problèmes, mais très peu ont été analysés a posteriori et c'était l'occasion d'en savoir plus sur ce thème qui est plutôt considéré comme récréatif car les programmes scolaires ne s'aventurent pas dans ce domaine.

À première vue, il semble qu'il suffit de lire et interpréter attentivement les indications pour définir la liste des localités qu'on peut atteindre par chacune des routes :

A: Sinalunga ou Torrita ou Trequanda;
B: Chianciano ou Sinalunga;
C: Chianciano ou Torrita;
D: Sinalunga ou Trequanda

et en déduire que les routes qui conduisent à Trequanda sont la A et la D et que Sinalunga est accessible par le trois routes A, B e D.

5.2. Premières observations

Quatre classes ont donné les deux réponses attendues avec un inventaire complet (tableau à double entrés, liste résumant les quatre contraintes, dispositions en quatre colonnes correspondant chacune à une localité)

Deux classes n'ont donné qu'une réponse correcte, avec inventaire et trois autres sans inventaire.

Les trois dernières n'ont donné aucune réponse corecte.

Alors qu'on attendait une réussite presque totale, l'analyse des copies a montré que l'organisation et la disposition des données n'est pas toujours suffisamment précise.

Exemple 1.

SVOLGIMENTO

DOPO AVER LETTO ATTENTIVEMENTE IL PROBLEMA ABBIAMO TROVATO LE STRADE :

1. CHIANCIANO	*2. SINALUNGA*	*3. TORRITA*	*4. TREQUANDA*
10 LETTERE NO	*9 LETTERE SÌ*	*7 SÌ*	*9 SÌ*

A = 2 – 3 – 4	*A = TORRITA*
B = 1 – 2	*B = SINALUNGA*
C = 1 – 3	*C = CHIANCIANO*
D = 2 – 4	*D = TREQUANDA*

(Jusqu’ici, les quatre conditions ont été interprétées correctement, mais les localités ont deux désignations : les numéros de 1 à 4 dans la première ligne, les lettres A, B, C, D par la suite)

POI ABBIAMO CAPITO CHE VISTO LA D È TREQUANDDA LE TRE LETTERE SONO LA A B C.

(Il y a confusion entre « 1 » et « 4 », la réponse correcte était A et D qui ont les numéros 4)

POI VISTO CHE LA A NON PUÒ ESSERE DI 10 LETTERE NON PUÒ ESSERE LA C. LA STESSA COSA È CON LA C, QUINDI È LA B.

Cette partie du texte est hors de propos, la réponse est déjà dans les trois « 2 » de la première partie.

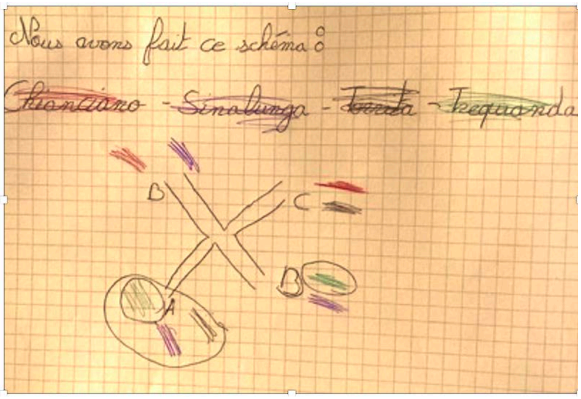
RISPONDO

LE STRADE CHE PORTANO A TREQUANDA SONO LA A – B E LA C.

IL BORGO AL QUALE SI ARRIVA CON TRE DELLE STRADE È SINALUNGA.

Exemple 2

3. *Ce sont les routes D et A*
4. *C’est la route A*



Les réponses ne correspondent pas aux demandes et le schéma avec les couleurs est inefficace.

Exemple 3

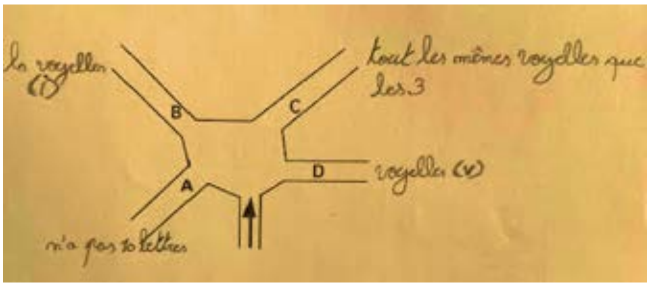
Risposta

3) *Le strade che possono portare a Trequanda sono: C e D.*
4) *Il logo su cui si arriva con tre o quattro strade è Sinalunga.*

Ragionamento

Abbiamo preso le informazioni del problema, poi scritto su un foglio di brutta copia. Ragionando ragionando abbiamo trovato la risposta

Exemple 4

<table>
<tr>
<td>Chianciano B
Torrita A
Trequanda D
Sinalunga C, A, D</td>
<td>

Le schéma n'apporte rien car il n'y a pas d'inventaire complet des quatre conditions.</td>
</tr>
</table>

Exemple 5.

(Un texte d'une page et demie ou les localités et les routes sont confondues)

Conclusione :

Torrita = A, Sinalunga = B, Chianciano = C , Trequanda è la D

La strada che porta a Trequanda è la B

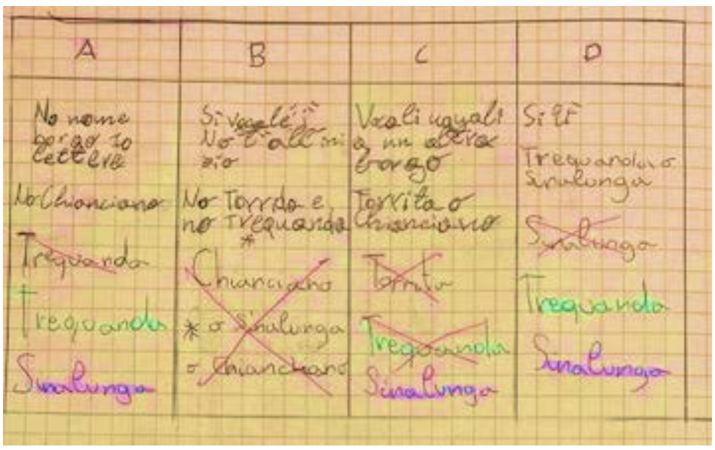
5.3. Les savoirs à renforcer

Dans les publications du genre « jeux et activités » on de nombreuses « énigmes » ou « « défis » où il s'agit de faire correspondre les éléments de deux groupes d'éléments de nature différente, comme dans notre exemple : quatre routes et quatre localités, à partir d'informations sur leurs liens. L'énoncé est en général accompagné d'un tableau à double entrée (ou « table de vérité ») dont les cases doivent être complétées, à la lecture des informations, par un signe d'affirmation ou de négation.

Dans notre situation, si le tableau ou l'organisation des réponses avait été donné, les élèves n'auraient eu qu'à placer une croix et leur tâche se serait limitée à lire chacune des informations associées à l'une des routes A, B, C ou D. Il suffit de « savoir lire » pour décider si un nom de localité n'a pas 10 lettres, s'il contient la voyelle i et commence par T, …

Le savoir à renforcer est lié à l'appropriation et à la représentation mentale de toutes les composantes de l'énoncé : les quatre localités sont clairement mentionnées en première ligne, les quatre routes se voient bien sur le schéma, mais il faut comprendre qu'il ne s'agit pas d'établir une simple correspondance une à une entre localité et route. Ce sont les quatre conditions qui doivent faire percevoir qu'il peut y avoir plusieurs localités pour une route.

Le tableau à double entrée déjà épuré (sans répétitions de route ou de localité) n'est pas obligatoire, mais il est « en devenir ».



Par exemple, le tableau présenté ci-dessus par une des classes, a bien 4 colonnes avec un résumé de la condition pour chacune d'elles mais dans les quatre lignes qui répètent les quatre localités les « no » ou « si » viennent d'inscrire par des répétitions ou des traits pour biffer celles qui ne sont pas prise en compte.

La discussion peut se développer à partir de l'une ou l'autre des dispositions, dont la suivante peut être retenue comme l'une des plus économique en écriture, même s'il a fallu répéter les noms des localités à chaque ligne (qui est aussi celle proposée en 5.1) :

Abbiamo iniziato a vedere tutte le città per ogni lettera (strada) aiutandoci con il problema scoperto:

A = Sinalunga, Torrita e Trequanda

B = Chianciano e Sinalunga,

C = Chianciano e Torrita

D = Sinalunga e Trequanda

Poi abbiamo visto le strade per Trequanda cioè la A et la D.

Combinando tutte le citta Sinalunga era quella a cui si poteva arrivare con 3 strade.

(Nous avons commencé à voir toutes les villes pour chaque lettre (rue), ce qui nous a aidé à résoudre le problème et a découvrir que :

…

Ensuite, nous avons vu les routes menant à Trequanda, c'est-à-dire A et D.

Regroupant toutes les villes, Sinalunga était celle à laquelle on pouvait arriver par 3 routes.)

5.4. Pour aller plus loin

De nombreux problèmes de la Banque proposent des activités de reconstitutions de relations entre éléments de deux ensembles.
Voir famille LO du domaine *Logique et raisonnement,* par exemple :

Les trois maisons (ral. 22.I.03 ; cat. 3-5 ; 22rmti_fr-3): Reconstituer une répartition de 3 personnes de nationalités différentes, dans trois maisons de couleurs différentes, de 3 métiers différents à partir d'affirmations, négations et relations de voisinage
Cinq amis à la pizzeria (ral. 28.I.03 ; cat. 3-5) : Associer un type de pizza parmi quatre à chaque personne d'un groupe de cinq en respectant quatre contraintes dont deux sont formulées par une négation.
La fête des châtaignes (ral. 29.II.14 ; cat. 7-10 ; 29rmtii_fr-14): Reconstruire une répartition entre cinq personnes, au cours de cinq jours, selon cinq quantités de marchandises vendues, à partir de quelques affirmations sur les jours, personnages et relations entre quantités de marchandises vendues.

6. DOUBLE ANNIVERSAIRE

Aujourd'hui, 5 octobre 2024, Marguerite a 36 ans et Isabelle, sa fille a son anniversaire et son âge est le tiers de l'âge de sa mère.

Comme chaque année, elles fêtent ensemble leur anniversaire et placent quatre bougies sur un même gâteau.

Après avoir soufflé ses deux bougies, un « 3 » et un « 6 », Marguerite les met dans une boîte et dit : *je les conserve pour un de mes prochains anniversaire où je pourrai les utiliser les deux*.

Isabelle dit : *Moi aussi, je vais conserver mes deux bougies pour un de mes prochains anniversaires.*

Qui sera la première à pouvoir utiliser de nouveau ses deux bougies pour un prochain gâteau d'anniversaire du 5 octobre ?

En quelle année est-ce que Marguerite aura deux fois l'âge de sa fille ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

6.1 Pourquoi cette activité ?

Les problèmes d'anniversaire liés à la numération sont toujours intéressants pour faire apparaître deux progressions régulières avec un écart constant entre termes correspondants (les âges) et pour observer les effets sur les nombres d'une interversion de leurs chiffres.
Pour ce problème particulier, il suffit de savoir compter de 1 en 1 à partir de 2024 ou de 12, ou de 36 ; savoir prendre le tiers de 36 et éventuellement déterminer la différence entre un nombre de deux chiffres et le nombre dont les deux chiffres sont inversés.

La procédure qui nous a paru la plus simple, a priori, consistait à établir un tableau des années et des âges :

Année	Âge de Marguerite	Âge d'Isabelle
2024	**36**	**12**
2025	37	13
…	…	…
2033	**45**	**21**
…	…	…
2036	**48**	**24**
…	…	…
2042	54	42
…	…	…
2051	**63**	**51**

6.2. Premières observations

Le problème s'est révélé très facile pour nos classes finalistes. Sept d'entre elles ont trouvé la réponse exacte et complète : Isabelle sera la première (avec explications) et Marguerite aura le double de l'âge d'Isabelle en 2036.

Une classe n'a pas donné d'explication et une n'a donné que la première réponse.
Les procédures sont très diverses.

Exemple 1

12 –> 21 9 anni di differenza. *Isabella 2024 + 9 = 2033*
36 –> 63, 27 anni di differenza *Margherita 2024 + 27 = 2051*

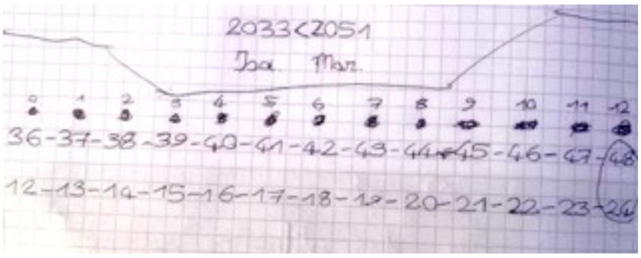
Abbiamo calcolato l'età di Isabella dall'età di Margherita e procedendo a tentativi abbiamo scoperto 48 e 24 dopo 13 anni

La date n'est pas déterminée pour la question 2, avec une petite erreur : 13 au lieu de 12.

Exemple 2

Marguerite a 36 ans, bougies 3 et 6, 36 + 27 = 63 ans
Isabelle a 12 ans, bougies 1 et 2, 12 + 9 = 21 ans
La première à pouvoir utiliser ses bougies sera Isabelle
36 : 12 = 3 NON
38 : 14 = 2, 714285714 NON
40 : 16 = 2,5 NON
42 : 18 = 2,333333333 NON
44 : 20 = 2,2 NON
46 : 22 = 2,090909091 NON
48 : 24 = 2 OUI *2024 + 12 = 2036*

Exemple 3



2024 + 12 = 2036 Anno in cui Margherita avrà il doppio dell'età di sua figlia.

(Après avoir déterminé 2033 et 2051 pour les prochains anniversaires avec les mêmes bougies, les élèves ont écrit les deux successions des âges à partir de l'année 0 (2024) pour constater que l'année 12, l'âge de Marguerite sera le double de celui d'Isabelle (48 et 24 entourés).

Toutes les classes ont trouvé la réponse de la première question en calculant les écarts (9 et 27) entre les deux nombres obtenus en inversant la position des bougies, elles ont toutes utilisé un tableau ou une disposition en deux listes des âges des deux personnes pour déterminer à quel moment l'une aura le double de l'âge de l'autre, comme dans les exemples 2 et 3.

6.3. Les savoirs à renforcer

Comme lors de cette finale, la simple interversion des chiffres sera vraisemblablement utilisée pour déterminer quelle est la première des deux personnes à pouvoir réutiliser ses bougies. Derrière ces deux calculs de différence, il y a un autre « savoir » qui peut être souligné : Les deux chiffres de l'âge d'Isabelle, 1 et 2, diffèrent de 1 (si on les considère comme des nombres). Dans tous ces cas de deux chiffres consécutifs, l'écart des deux âges de la même personne sera de 9 ans. (de 12 à 21 ; de 23 à 32 ; de 34 à 43, …), ce qui correspond à remplacer le chiffre d'une dizaine par le chiffre suivant, ce qui entraîne une augmentation de 10 et à remplacer le chiffre des unités par le chiffre précédent, ce qui entraîne une diminution de 1. Les deux transformations entraînent donc une augmentation de 9.

Dans le cas de Marguerite, les deux chiffres de son âge, 3 et 6, diffèrent de 3 et leur permutation entraînera une augmentation de 3 dizaines et une diminution de 3 unités, c'est-à-dire une augmentation de 27.

Pour la deuxième question, il faut se contenter des suites des âges et des années, clairement indiquées. Il n'est pas nécessaire de calculer à chaque fois le rapport entre les deux âges correspondants, comme dans l'exemple 2, mais au cas où ces calculs apparaissent, il peut être opportun de souligner ces rapports. (En lien avec la division et l'écrire des quotients selon qu'on les trouve à l'aide de la calculatrice par lecture complète de l'écran, ou par l'algorithme).

6.4. Pour aller plus loin

On peut poursuivre les observations sur le changement de position des bougies et l'on découvre alors une propriété de la numération pour les nombres de deux chiffres : en permutant ses bougies d'anniversaire, chacun sait qu'il pourra les réutiliser dans un nombre d'années qui est « autant de fois 9 que le différence entre les deux nombres représentés par les deux chiffres. Et ça marche aussi si le premier est plus grand que le second et si l'une des bougies est le numéro 0. Cette propriété pourrait s'appeler le « théorème des permutations des bougies chiffrées » pour des nombres de deux chiffres écrits en base dix. Plus modestement, il faut la considérer comme une petite découverte dans le domaine des gâteaux d'anniversaire, étendue à celui de la numération.

La recherche peut être poursuivie avec la somme des nombres « inversés » de deux chiffres qui est un multiple de 11, avec les nombres de trois chiffres lus de gauche à droite ou de droite à gauche ; …

Pour la deuxième question sur le rapport des âges de deux personnes, le problème Année particulière (ral. 30.II.09 ; cat. 5-7) traite aussi des années où le rapport entre les âges de deux personne est un nombre naturel. Pour notre problème, il s'agirait de trouver les autres années où le rapport des âges de Marguerite et d'Isabelle est entier. Il était de 3 en 2024, il sera de 2 en 3036. Il y a-t-il d'autres années où ce rapport était (ou sera) un nombre naturel. Là encore il s'agit d'une recherche modeste mais combien intéressante pour introduire les nombres rationnels et constater que le rapport de deux nombres correspondants de deux suites « d'âges » (écart constant) diminue progressivement mais qu'il a une limite.

ANNEXE

TRIANGLES DANS UN CARRÉ

Extraits

Brunella Brogi

Scuola Secondaria I grado “Il Pontormo” – Carmignano (PO)

J’ai proposé ce problème à ma classe de catégorie 6 de 21 élèves, dont 5 ont besoin d’une aide complémentaire. Ils se sont organisés par groupes de trois et y ont consacré deux heures. Au début du travail ils étaient à peu près tous convaincus que les triangles étaient égaux mais seulement disposés différemment dans le carré.

Certains d’entre eux ont eu de la peine à reproduire le dessin sur leur cahier dont le quadrillage est de 4 ou 5 mm. Les triangles dessinés n’étaient pas rectangles ou isocèles et il m’a semblé qu’ils ne s’en rendaient pas compte (fig.1) ; d’autres ne respectaient pas les 12 cm du carré et faisaient un dessin beaucoup plus grand. La situation s’est améliorés quand certains élèves ont utilisé du papier quadrillé dont les carrés ont 1 cm de côté. (fig. 2).

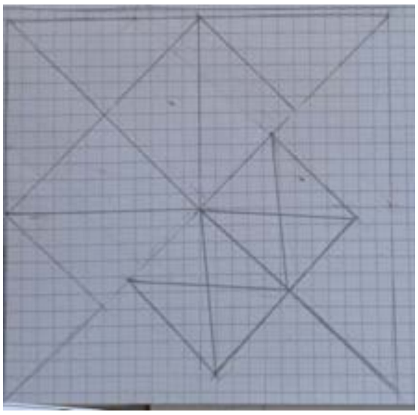


fig.1

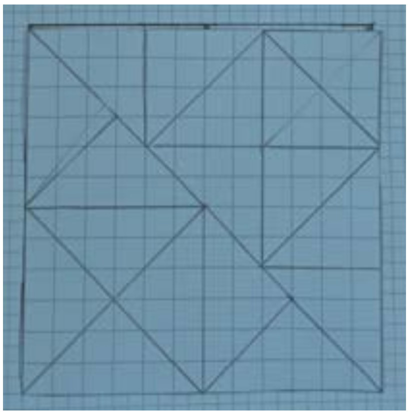


fig. 2

Après une heure de travail un groupe seulement était arrivé à une réponse correcte fondée sur les nombres différents de triangles (stratégie par comptage).

Réponse : dans la même aire du carré définie par la ligne de symétrie les triangles gris sont plus petits parce que dans la même partie du carré les gris sont 9, ce qui veut dire que comme ils sont plus nombreux ils sont plus petits que les blancs qui sont 8.

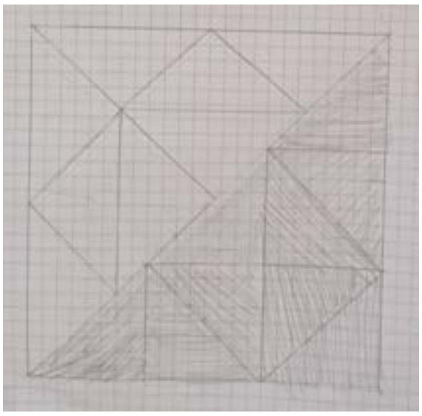


fig. 3

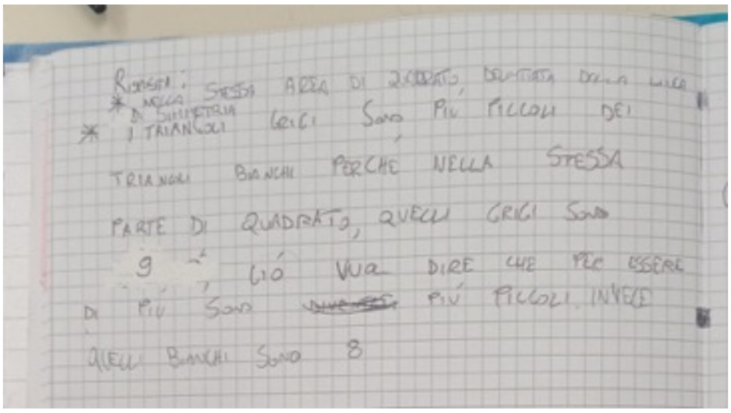
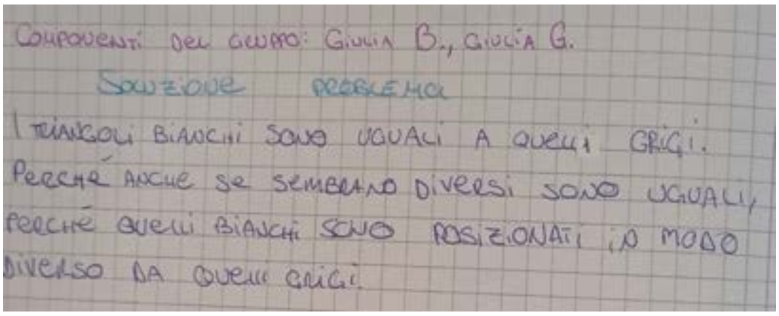


fig. 4

Après un nouveau moment de recherche, deux groupes pensent encore que les triangles blancs et gris sont les mêmes. Un débat en commun permet à ces élèves de comprendre leur erreur.

Les filles qui avaient écrit ce qui est rapporté ci-dessous (fig 5) n'ont pas pu mieux justifier leur réponse, même lorsque je me suis assise à côté d'elles et leur ai demandé des éclaircissements. Pour essayer de me faire comprendre leur raisonnement, elles suivaient de l'index le pourtour des triangles dessinés en insistant notamment sur la zone centrale (voir fig 3) avec ses 4 triangles blancs formant un rectangle et ses 4 triangle gris formant un carré.



Les triangles blancs sont égaux aux gris. Parce que même s'ils semblent différents ils sont égaux parce que les blancs ont une disposition différente des gris.

fig. 5

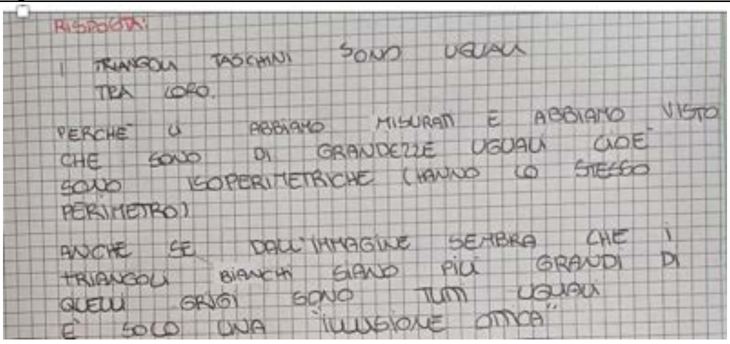
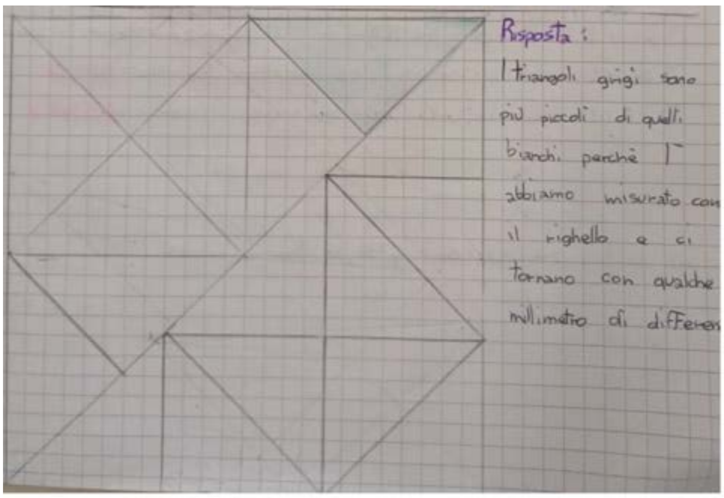
	*Réponse* *Les triangles « de papier plié » sont égaux entre eux.* *Parce que nous les avons mesuré et avons vu qu'ils sont de même grandeur c'est-à-dire qu'ils sont isopérimétriques (ils ont le même périmètre).* *Même si d'après l'image il semble que les triangles blancs sont plus grands que les gris ils sont tous égaux, C'est seulement une illusion d'optique.*

fig. 6

Si le groupe précédent (fig. 6) utilisant la mesure avec la règle, estime que tous les triangles sont isopérimétriques, les deux groupes ci-dessous, (fig.7 et 8) avec le même instrument de mesure, trouvent en revanche la bonne réponse. (Les triangles « de papier plié » se réfèrent à des modèles créés lors d'une activité précédente, voir plus loin, figures 9 et 10.) les deux groupes ci-dessous, (fig. 7 et 8) avec le même instrument de mesure, trouvent en revanche la bonne réponse.



Réponse
Les triangles gris sont plus petits que les blancs parce que nous l'avons mesuré avec la règle et il y a quelques millimètres de différence.
.

fig .7

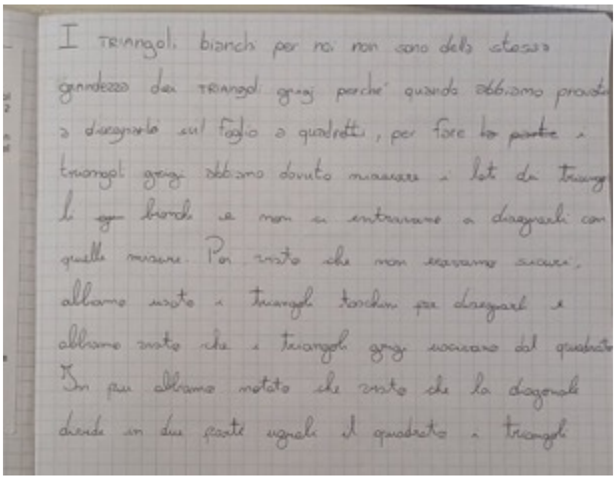


fig. 8

Pour nous, les triangles blancs ne sont pas de la même grandeur que les triangles gris parce que quand nous avons essayé de les dessiner sur une feuille quadrillée, pour faire les triangles gris nous avons dû mesurer les côtés des triangles blancs et on n'arrivait pas à compléter la diagonale avec ces mesures. Puis, vu que nous n'étions pas sûrs nous avons utilisé les trangles « de papier plié » pour le dessin et avons vu que les triangles gris sortaient du carré.
En plus nous avons remarqué que vu que la diagonale divise le carré en deux parties égales les triangles gris sont plus petits que les blancs parce que nous l'avons mesuré avec la règle et il y a quelques millimètres de différence.
.

Avec la construction réalisée sur leur pupitre, ces élèves ont constaté que l'utilisation de tous les mêmes triangles, disposés comme le suggère le problème, ne permet pas d'obtenir le carré, puisque la diagonale formée par la juxtaposition de l'hypoténuse de 3 triangles est plus longue. que celui formé par la juxtaposition de 4 pattes. Il était intéressant d'écouter le commentaire de la jeune fille qui regardait avec tristesse le « dépassement » en bas à gauche (visible sur la figure 10), alors que son camarade l'accusait d'avoir été peu précise dans la construction parce qu'il était convaincu que tous les triangles du problème étaient égaux. Pour d'autres élèves cependant, cette exploration avec des modèles papier a été cruciale pour comprendre que les deux triangles, blanc et gris, du problème ne peuvent pas être identiques.

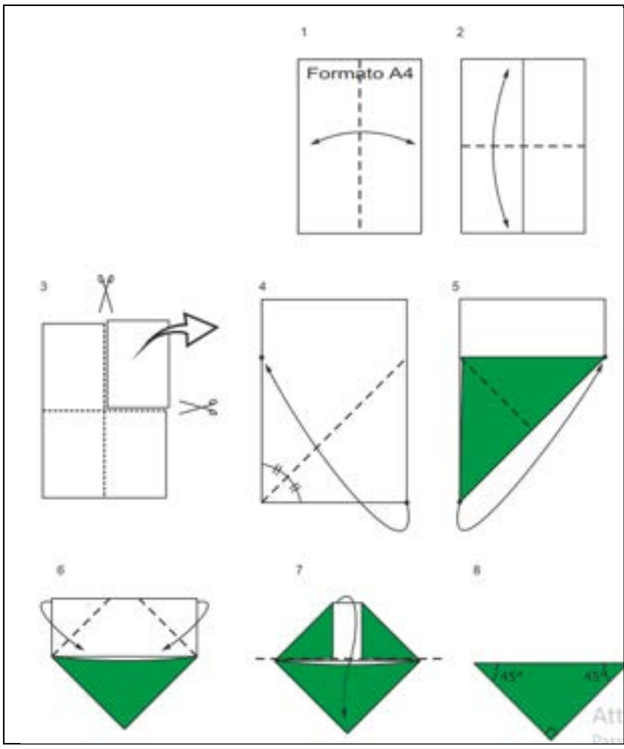


fig. 9

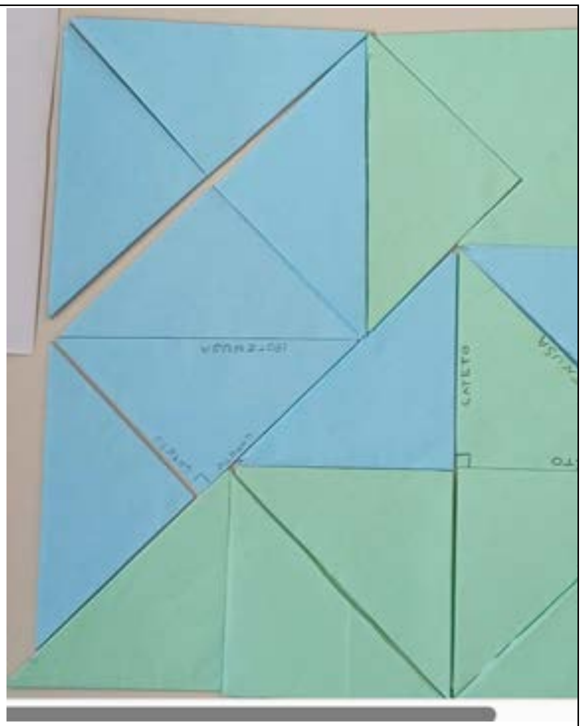
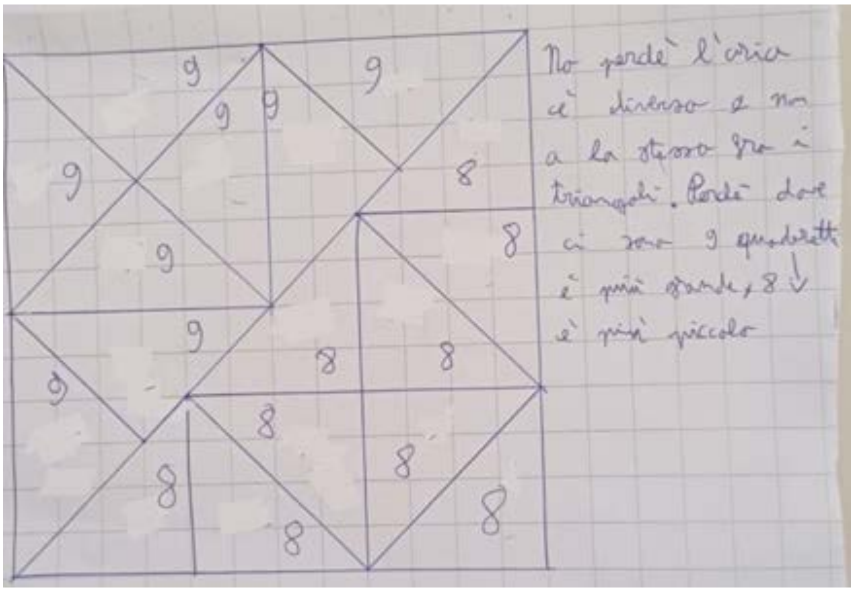


fig. 10

Certains ont déterminé l'aire des triangles en comptant les carrés à l'intérieur d'eux, après avoir reproduit le dessin sur les feuilles avec les carrés de 1 cm2, arrivant ainsi à la bonne solution.



Non, parce que l'aire est différente et n'est pas la même pour les triangles. Parce que ou il y a 9 carés est plus grande, 8 est plus petite.

fig.11

Après que tous les groupes aient expliqué leur stratégie à leurs camarades de classe, en me concentrant sur celle présentée en figure 11, utilisée par 3 groupes, j'ai demandé s'ils avaient remarqué que dans le demi-carré blanc il y avait 8 triangles d'aire 9 cm^2 et dans le gris, à la place, 9 triangles d'aire 8 cm^2. Est-ce une coïncidence s'il y a cette inversion des deux quantités ? Quelles informations nous donnent ces deux paires de nombres ? Personne n'a réussi à considérer le produit $9 \times 8 = 8 \times 9 = 72$, c'est-à-dire l'aire d'un demi carré ayant un côté de 12 cm est de 144 cm^2.

De toute manière nous y avons réfléchi ensemble.

LA FINALE INTERNAZIONALE TRA UNA TORRE E NON SOLO

Lucia Grugnetti e Rita Spatoloni

Alla fine di un lungo viaggio… ci siamo infine incontrati con gioia[1]

Ghirigori e intrecci partono e tornano al cuore!

[1] I bambini hanno consegnato alcuni loro disegni ad Aurora, la nostra "mascotte artista", autrice del logo della finale internazionale.

I bambini delle nove classi[2] della finale internazionale hanno fatto un lungo viaggio, temporale e geografico. Una grande avventura matematica per arrivare a una grande festa.
Hanno svolto le due prove ordinarie, poi la finale della propria sezione… e sono arrivati, dapprima a Chianciano, poi a Trequanda e infine a Torrita.

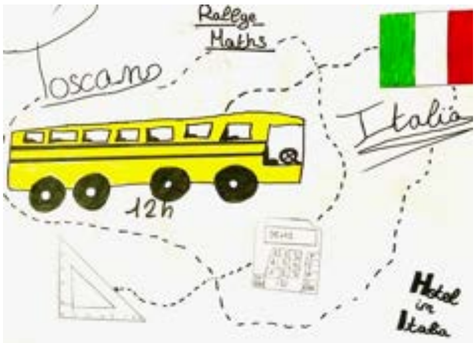
Anche noi due, con François, le amiche della sezione di Siena e Francesca Ricci, a nome dell'ARMT, abbiamo fatto un lungo viaggio di preparazione, a partire dal 2022, quando, proprio a Siena, a tavola,

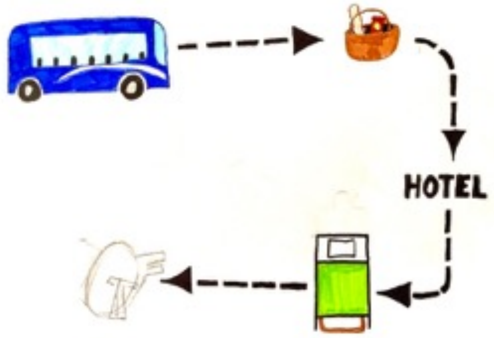
la "neo trequandina" Lucia G. ha lanciato un'idea:
Licia è qui a Siena, oggi, per questioni di firme in banca per il conto dell'ARMT, insieme a Rita. I fondi messi da parte per una nuova finale internazionale ci sono! La cadenza di un intervallo di otto anni fra le finali internazionali ci porta al 2024".
Rita, all'apparenza perplessa, si mostra ben presto d'accordo e non sa ancora a che cosa andrà incontro.
Siamo entrambe consapevoli della complessità dell'impegno ma… anche della bellezza dell'iniziativa: una Finale Rally Matematico Transalpino portata nei nostri piccoli borghi, tra le colline che guardano sulla Valdorcia, sulla Valdichiana e sulle Crete senesi, una Finale diffusa in più luoghi.
L'interesse è generale, ma tanti sono anche i dubbi sul possibile alloggio per tanti bambini.
Si vedrà, intanto lasciamo maturare l'idea. E l'idea prende corpo con anche l'approvazione del Comitato di gestione dell'ARMT.
Un trio ben noto, nelle persone di Lucia, Rita e François, si lancia ed espone al Sindaco di Trequanda, Andrea Francini, questa idea un po' avventurosa, subito "avvalorata" e che ha dato ai tre la giusta spinta a parlarne con i Sindaci di Sinalunga, Torrita e Chianciano.

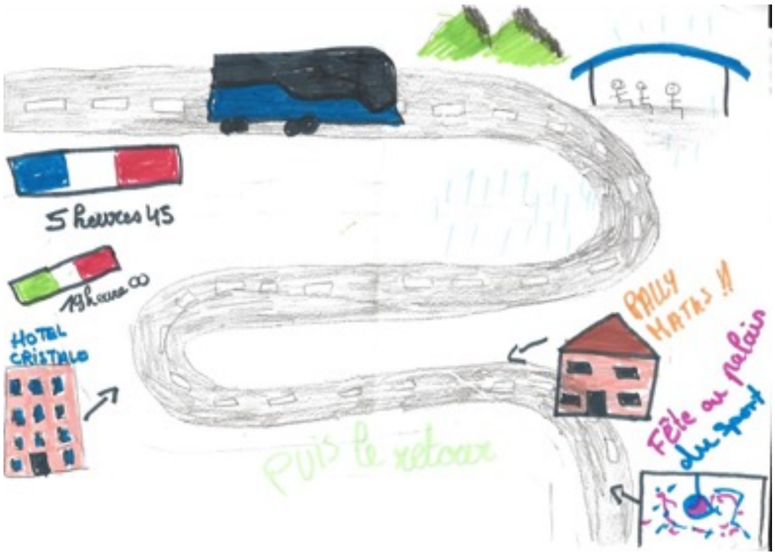
E infine, il 4 ottobre 2024 arrivano a Chianciano "da ogni dove" i nove bus che portano i bambini; li portano fin quasi sulla soglia dei due hotel per loro predisposti da Massimo e Danilo, gli organizzatori di Chianciano ai quali ci eravamo rivolte tempo addietro.
Che felicità "possedere" la chiave della stanza d'albergo; chiave che diventa protagonista nei disegni di bambine e bambini che a 10 anni scoprono con la chiave una sorta di autonomia, anche se ben controllata dagli insegnanti accompagnatori.

Il viaggio in bus per venire in Toscana a partecipare alla finale è un altro dei protagonisti dei disegni dei bambini:

[2] Sono le classi delle sezioni del Belgio francofono, di Belluno, di Bourg en Bresse, di Perugia, della Puglia, Della Romagna, di Rozzano, di Sassari e del Ticino.



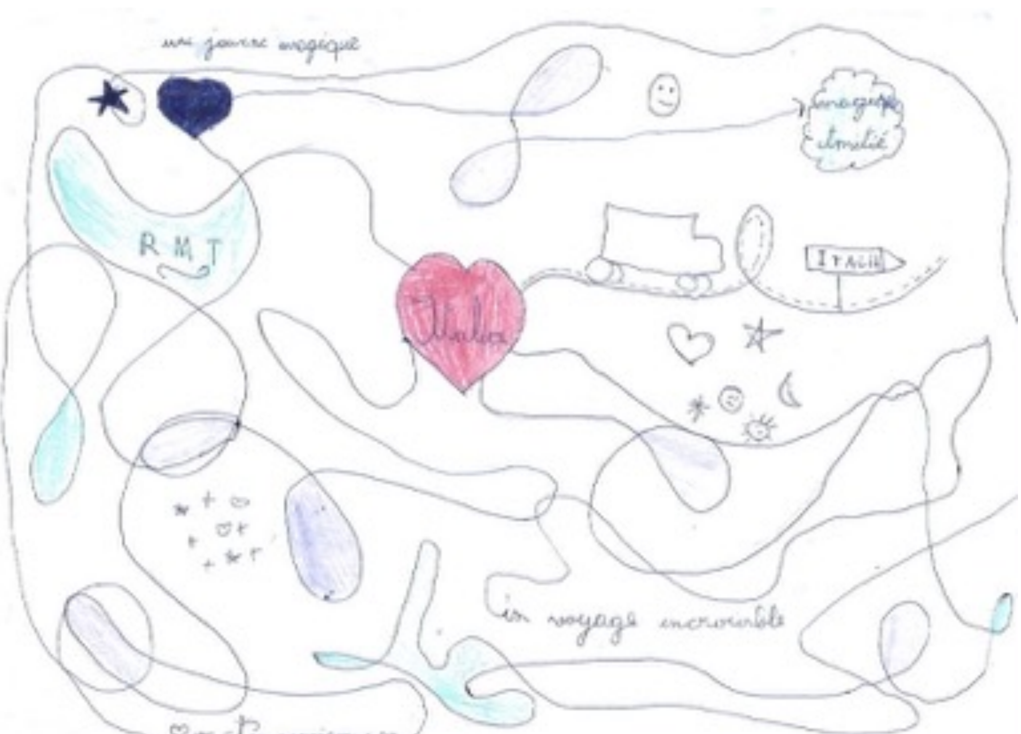




Talvolta, con nostra grande perplessità, per non dire dispiacere, i bus assumono una visione legata ai “nemici”:

Questa interpretazione è per fortuna controbilanciata dai tanti disegni (e commenti) di tutt’altro tenore.

(*Si va a Siena. Forse vinceremo... o forse perderemo.*
Ma non sarà mai una sconfitta. Perché una sconfitta è un tipo di vittoria diverso)



E il giorno della finale arriva!
Ancora l'intreccio, il lungo cammino cosparso di cuori, stelline e segni che ci mostrano le emozioni vissute.

Il 5 ottobre, sui bus, le classi arrivano a Trequanda,

accolte dalle amiche della sezione di Siena che si occuperanno di loro per tutta la mattinata.

L’emozione è palpabile e il disegno di una classe ce lo fa vivere, quasi in diretta.

Eccoli tutti accolti nelle aule della piccola scuola di Trequanda, per un giorno animata da quasi duecento allievi, dove… i sei problemi sono lì che li aspettano insieme a François.
Dopo il saluto del Sindaco, emozionato e felice, tutte e tutti al lavoro, in “modalità RMT”. I 50 minuti di pragmatica sembrano passare troppo in fretta, ma bisogna consegnare i fogli risposta.

Una merendina e chi a pranzo, organizzato dalla Pro Loco di Trequanda,

e chi a disegnare e poi viceversa, anche gli altri a pranzo, mentre i primi disegnano.
I disegni, come accennato nella nota 1, sono stati fatti dai bambini dopo la prova e prima o dopo il pranzo, a seconda del turno rispettivo. Aurora, la nostra mascotte-artista

passa tra i bimbi mentre disegnano e… le viene anche fatto il ritratto

Che bel pensiero.
E si prepara un ricco e vario pomeriggio.

Gli “amici bus” trasportano i bimbi e i loro insegnanti a Torrita di Siena a visitare il borgo e… una primizia: l’orto verticale là dove prima c’era un magazzino di stoccaggio che durante la Seconda Guerra Mondiale diventa un rifugio antiaereo. Oggi le mura storiche di questo tunnel accolgono questo orto verticale.
L’ufficio turistico e la Pro Loco di Torrita organizzano la visita delle classi e, prima di entrare nel tunnel, danno interessanti spiegazioni

E poi, si entra e seguono altre gradite illustrazioni.

E noi due… vegliamo sull’andamento della manifestazione, felici che stia andando tutto bene

E infine, la festa al Palazzetto dello Sport di Torrita di Siena.

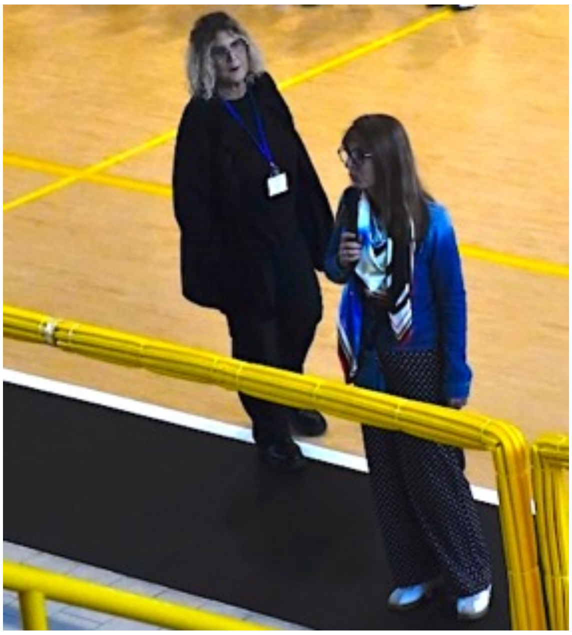
Gli spalti pian piano si riempiono, le classi si sistemano

[3]

[3] Le foto che figurano da qua in poi sono di Philippe Persico, che ringraziamo.

Diamo inizio alla festa

E invitiamo le due coordinatrici a portare il loro saluto:



Bambini e adulti assistono con piacere a uno spettacolo di illusionismo al quale alcune bambine e alcuni bambini sono anche chiamati a partecipare in prima persona, molto emozionati

Ringraziamo di cuore Elena, la eccellente illusionista:

La festa continua e sono le bambine e i bambini i grandi protagonisti.
Si susseguono le esibizioni da parte delle nove classi, una più creativa dell'altra, come, ad esempio, la ricostruzione, passo passo, con i pezzi di un Tangram, dei monumenti di Altamura da parte, ovviamente, della classe della sezione Puglia:

Grandi applausi a tutte le classi

e un grande applauso anche agli insegnanti per l'impegno che hanno profuso.

Per concludere, François, il "mago dei problemi", ha annunciato i nomi della classe vincitrice (la Sezione Ticino), di quella arrivata seconda (sezione Puglia), delle due arrivate al terzo posto ex equo (sezioni Belgio e Perugia) e delle altre, tutte al quarto posto. Bravi, tutte e tutti!

Rallye mathématique transalpin / Rally matematico transalpino
Belgique – France – Italia – Luxembourg – Suisse/Svizzera

ATTESTATO DI PARTECIPAZIONE
ATTESTATION DE PARTICIPATION

Si attesta che On atteste que

----

ha partecipato alla a participé à

finale internazionale di Trequanda
la finale internationale de Trequanda

ARMT
ottobre / octobre
2024

Les Présidents d'honneurs / I Presidenti onorari

François Jaquet – Lucia Grugnetti

Felici, i bimbi e i loro insegnanti, sono ripartiti per Chianciano e poi… la domenica mattina, per il rientro a casa. Alcuni insegnanti, una volta tornati a scuola, ci hanno inviato messaggi da parte loro e dei bambini…

"…Durante le tre giornate ci siamo sentiti accolti, seguiti e coccolati da un'organizzazione che ha tenuto conto di tanti aspetti oltre a quello matematico."
"La visita di Torrita di Siena, lo spettacolo dell'illusionista, la compagnia delle persone e tanto altro sono ancora vivi nei nostri ricordi e resteranno indelebili."

s

Un sentito ringraziamento anche a tutte e tutti coloro che hanno consentito di attuare e portare a termine questo progetto “avventuroso” a partire dal Comitato di Gestione e a seguire, ai sindaci di Chianciano, Torrita e Trequanda, alla dirigente e al personale della scuola di Trequanda, alla Pro Loco di Torrita e a quella di Trequanda e, in modo particolare, a Carla Crociani, Lucia Doretti, Lucia Salomone e alle altre amiche della sezione di Siena, nonché a Francesca Ricci

APPROFONDIMENTI / ÉTUDES

LA GEOMETRIA PIANA NELL'ARMT
IN SINTESI

A cura di Clara Bisso e Lucia Grugnetti[1]

[2]

► **PER COMINCIARE: APPROCCIO AL CONCETTO DI AREA CON PROBLEMI DEL RMT**

► **Gruppo di lavoro "ellealquadrato"**

► **Animatrici: Clara Bisso-Lucia Grugnetti (Atti ARMT 2006, 267-276)**

Nell'ameno bosco dei gruppi tematici

---

[1] Membri del Gruppo geometria piana, nel corso degli anni: Bernard Anselmo, M. Maddalena Asara❤, Paola Bajorko, Roberto Battisti, Clara Bisso, Brunella Brogi, Fabio Brunelli, Cristina Caredda, Concetta Caggiano, Federica Curreli, AnnaMaria D'Andrea, Giorgia Delledonne, Luana De Nicolo, Speranza Dettori, Florence Falguères, Cinzia Frongia, Gloria Giacomelli, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Giuseppina Lungheu, Elisabetta Mari, Silvia Mazzucco, Francesca Michienzi, Lucia Palmas, Antonella Pierno, Luciana Rapposelli, Elsa Renna, Patrizia Sabatini, Rosanna Sanna, M. Agostina Satta, Francesca Tanda, Cinzia Utzeri, Vincenza Vannucci.

UN GRANDE GRAZIE A TUTTE E TUTTI.

[2] Questo documento, nella sua prima parte, riporta perlopiù la presentazione del gruppo geometria al convegno on line (causa Covid) del 2021.

(Arco di Trento 2005), figura anche l'albero della geometria piana.

► *Il gruppo si suddivide in tre sottogruppi e analizza 4 problemi al fine di individuarne le eventuali potenzialità per quanto riguarda l'introduzione del concetto di area. L'esame dei problemi si avvale sia dell'**analisi a priori**, che di quella **a posteriori** relative ai 4 problemi*

► La sfida.
► Il quadrato da ricoprire.
► RMT 2005.
► Il giardino del signor Torquato.

Negli Atti cartacei dell'ARMT[3]

- C. Bisso, L. Grugnetti, 2005, Approccio al concetto di area con problemi del RMT, Atti della giornata di studio sul Rally matematico transalpino, Vol.5, pp. 267-276.
- C. Bisso, L. Grugnetti, 2006, Il ruolo dei problemi del RMT nell'apprendimento del concetto di area, Atti della giornata di studio sul Rally matematico transalpino, Vol.6, pag.25 e pp.169-187.
- C. Bisso, L. Grugnetti, 2007, la costruzione a lungo termine del concetto di area, Atti della giornata di studio sul Rally matematico transalpino, Vol.7, pag. 199-216.
- C. Bisso, L. Grugnetti, 2008, Il concetto di area in un percorso quinquennale e il ruolo del RMT, Vol.8, pp.167-177.

Il gruppo "ellealquadrato" diventa "gruppo di geometria piana"

A partire dal 2008, *ellealquadrato* è diventato *gruppo geometria piana* quando ha "allargato i propri orizzonti" nel decidere di occuparsi di ostacoli ed errori in questo ambito più ampio. Il gruppo ha lavorato con Clara e Lucia come coordinatrici fino al 2012.

A partire dall'anno successivo (Lussemburgo), tenuto conto dell'estensione alle categorie 9 e 10 e del numero elevato di memebri del gruppo dei diversi livelli scolari, si è deciso di suddividerci in due sotto-gruppi: l'uno per le categorie 3, 4, 5 con la coordinazione di Clara e Georges (fino al 2016), poi solo Clara, l'altro per le categorie 6, 7, 8, 9 10 con la coordinazione di Lucia e Bernard fino al 2014, poi solo di Lucia.

Rilevare ostacoli sottovalutati: un contributo del RMT alla didattica

IL gruppo, particolarmente colpito dalle difficoltà risolutive evidenziate negli elaborati di un problema della finale internazionale di Briga nel 2008 (Jaquet 2009): *Il tavolo da spostare*, si è posto innumerevoli domande ed è così che si è interessato alle problematiche legate al concetto di rettangolo, cominciando ad affrontare gli ostacoli e gli errori nell'ambito più ampio della geometria piana.
La ricerca è stata presentata al convegno di Besançon ed sfociata poi nella pubblicazione di un articolo dal titolo "Rettangolo: non così evidente!" pubblicato sulla Gazzetta di Transalpino n. 1, del 2011(pp. 7-41).

Criteri di elaborazione dei problemi e la loro Banca

Nel corso degli anni, il lavoro del gruppo si è intersecato con le grandi questioni trattate all'interno dell'ARMT, come ad esempio quella dei criteri di sviluppo dei problemi, presentati a Sedilo nella loro prima forma strutturata, e via via affinati fino a giungere alla nuova versione proposta nel 2020, che specifica i requisiti essenziali per la presentazione di una nuova proposta: ricercare la famiglia di problemi della banca di appartenenza e problemi simili (quando esistono), tenendo conto di ciò che è già stato analizzato su di essi al fine di ottenere informazioni essenziali per la costruzione di un nuovo problema.
Del resto, nel 2013, il tema dell'incontro a Lussemburgo è stato: "Analisi a priori, analisi a posteriori, un percorso circolare" e il lavoro di gruppo è stato organizzato attorno alla Banca, sulla base dell'analisi a posteriori delle problematiche già proposte per crearne di nuovi.

[3] Lista a cura di Roberto Battisti.

L'idea della Banca che aveva cominciato a concretizzarsi nel 2006, grazie al poderoso lavoro di François e Luc, che prosegue senza interruzione, è andata evolvendosi e i lavori del gruppo procedono in questo ambito con la preparazione di schede, frutto ancora una volta delle analisi a posteriori, come per esempio: *Il parco del castello* Rally: 07.F.01; categoria: 3, *Il cuore di Martina* Rally: 22.I.09; categorie: 5, 6 ; ...

Il punto di vista degli allievi

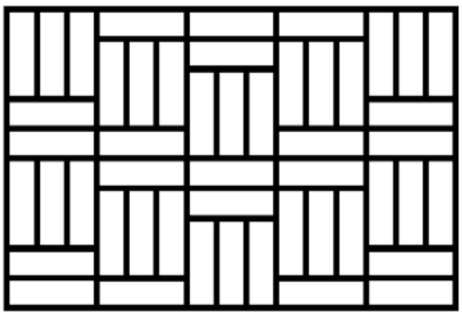
L'analisi degli elaborati relativi a un problema, che hanno contribuito alla realizzazione del poster *Alcune fasi di un'analisi a priori: Tre foto su una pagina Rally:27.II.04; cat.3,4,5* (Jaquet-Bisso; Gazzetta n. 10[4]) presentato al convegno di Alghero, anche alla luce della conferenza *La prima soglia nell'apprendimento della geometria: "vedere" le figure*, data da Raymond Duval, ha rivelato il suo interesse nel distinguere le due dimensioni spesso non percepite dagli allievi. *Dipende da cosa questi ultimi "vedono" nella figura geometrica, infatti possono percepire le linee che la compongono (i segmenti) e quindi lavorare sui perimetri oppure percepire solo gli spazi determinati dalla figura interessandosi "del luogo occupato" dai quadrati, cioè lavorare sulla loro superficie.*
E proprio questo "vedere" richiama un altro aspetto importante: il punto di vista degli allievi che, risultante dall'analisi a posteriori, diventa cruciale per la riflessione sui processi risolutivi, sulle conoscenze mobilitate, sulle procedure, sugli ostacoli e sugli errori riscontrati che appaiono nelle schede e giocano un ruolo determinante nella costruzione di nuovi problemi.

Analisi a posteriori "condicio sine qua non"

Come appena evidenziato (paragrafo precedente), è l'analisi a posteriori degli elaborati dei nostri gruppi di allievi che permettono di evidenziare, fra gli altri aspetti, le difficoltà e gli ostacoli.

Dall'analisi a posteriori (23-I-2015) di *Il Pavimento di legno…* a un nuovo problema *Il pavimento di Fabio* (25-I-2017)

IL PAVIMENTO DI LEGNO (Cat. 7-10)
Ecco l'immagine del pavimento di una stanza rettangolare fatto di listoni tutti uguali tra loro.



Il perimetro della stanza è 15 m. Il prezzo dei listoni è 30 euro a m².

Qual è il prezzo complessivo dei listoni che si sono dovuti utilizzare per pavimentare l'intera stanza?

Spiegate la vostra risposta.

L'analisi a posteriori ha evidenziato che l'ostacolo centrale riguarda il rapporto 1 : 3 tra la larghezza e la lunghezza di un listone, che non è menzionato nell'enunciato, ma che deve essere percepito sul disegno vista la necessità di trovare una misura comune di lunghezza: la larghezza di un listone. Qual è quindi il ruolo della figura in questo problema?

Media della riuscita 1,5 – Cat. 8 - 1,6

Gli ostacoli nella risoluzione possono quindi dipendere da una difficoltà nella interpretazione della figura.

A questo punto si lavora sulla costruzione di una nuova versione del problema con una figura "più semplice" rispetto alla precedente e dove il rapporto sia di 2:1, con un impatto visivo semplificato.

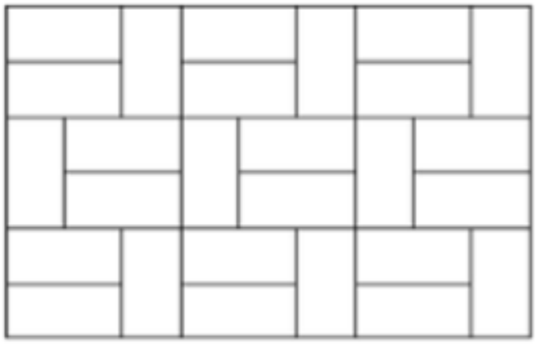
I "listoni" vengono sostituiti dalle mattonelle.

[4] In questo numero della Gazzetta figura anche l'articolo di C. Bisso e F. Jaquet, dal titolo *A proposito di perimetro*, nel quale l'analisi del punto di vista dell'allievo diventa basilare per cercare di capire le ragioni di ostacoli e difficoltà.

Il *Pavimento di Fabio* (RMT 25 I.17, cat. 8-10)
Media della riuscita 2,5 – Cat. 8 - 2,5

IL PAVIMENTO DI FABIO (Cat. 7-10)

Ecco il disegno del pavimento della camera di Fabio composto da mattonelle rettangolari tutte uguali tra loro.

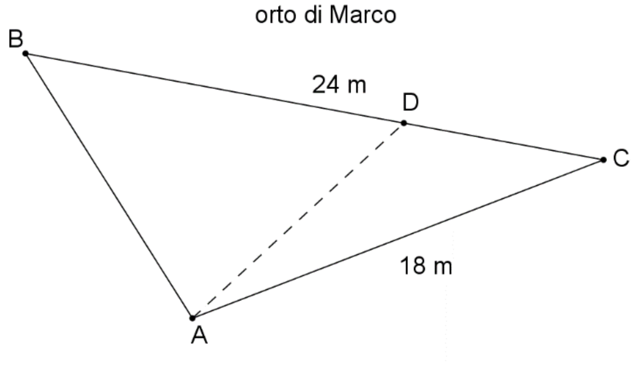


Il perimetro della camera è 15 m. Il prezzo delle mattonelle è 30 euro a m^2.
Quanto ha speso Fabio per comprare le mattonelle della sua stanza?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Il tasso di riuscita media passa quindi da 1,6 a 2,5 per la categoria 8 dalla prima versione (*Il pavimento di legno*) alla seconda versione (*Il pavimento di Fabio*). Questo miglioramento significativo è dovuto al passaggio dal rapporto 1:3 al rapporto 1:2?

Aiuto, dove sono i dati del problema? Dalle analisi a posteriori di un problema alle possibili indicazioni didattiche

IL PROBLEMA DELL'ORTO (26.II.12.) (Cat. 6, 7, 8)
Marco ha ereditato un piccolo appezzamento di terreno di forma triangolare, con un lato di 24 metri e un altro di 18 metri. Egli vuole realizzare un orto.
Marco vuole piantare patate e fagiolini dividendo il suo terreno in due parti. L'area della parte riservata alle patate deve essere il doppio dell'area riservata ai fagiolini.
Per separare le due coltivazioni, Marco pianta un paletto in A (vedi figura) e un altro paletto in un punto D sul lato BC e li congiunge con una cordicella.
Ecco il suo primo tentativo, ma Marco non è soddisfatto: l'area di uno dei due triangoli non è il doppio di quella dell'altro

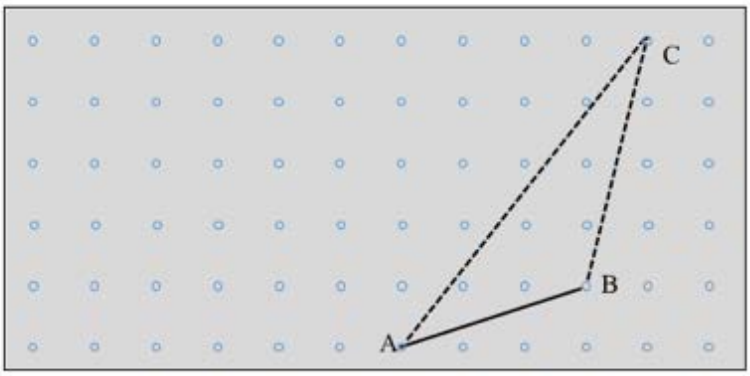


A quale distanza da C Marco potrebbe piantare il paletto D?
Spiegate come avete fatto a trovare le vostre risposte.

Questo problema, mal riuscito nell'ambito della prova del RMT, assume particolare interesse in un'attività di classe. Nel suo enunciato figurano aspetti di geometria interessanti dal punto di vista didattico.
L'enunciato è un concentrato di aspetti interessanti sulle proprietà dei triangoli. Può aprire la strada a una costruttiva discussione sulla **indeterminatezza di un triangolo** laddove si conoscano le misure di soli due dei tre lati. E questa indeterminatezza induce anche quella dell'area del triangolo.
Un altro aspetto importante è quello legato all'altezza che può essere, come in questo caso, la medesima per due triangoli in cui è diviso il triangolo dato e non è banale dal punto di vista didattico, cogliere il ruolo dell'altezza di un triangolo ottusangolo.
Bisogna prendere in considerazione l'analisi della formula "ab/2" e andare al di là della sua applicazione algoritmica: "prendo la base e l'altezza che mi danno (o le misuro), le moltiplico e poi le divido per 2".
Troppo sovente l'insegnamento si limita a far apprendere la formula in maniera meccanica senza consacrarvi le necessarie riflessioni alla sua gestione critica.
Si deve andare alla ricerca di queste lacune nel passato degli allievi delle categorie da 6 a 8, in ambiti diversi:
- Quando è stata introdotta l'area del rettangolo a partire dalle lunghezze dei suoi lati forse non è stato fatto osservare che la moltiplicazione suddetta non è solo quella dei numeri di quadratini, ma anche quella di numeri non necessariamente naturali e, più ancora un'operazione dove due misure di lunghezza conducono a un'altra grandezza: l'area. Inoltre, forse non è stato fatto osservare che se si raddoppia o si triplica... la lunghezza del rettangolo, anche l'area raddoppia o triplica...; che succede la medesima cosa per la larghezza, ma che se si raddoppia o triplica... la lunghezza e la larghezza, l'area non segue più la stessa "regola"!
- Al momento dell'approccio all'area del parallelogramma, forse non si è fatto osservare che la formula è la stessa dell'area del rettangolo.
- Al momento dell'approccio all'area del triangolo, forse non si è fatto osservare il legame tra la formula dell'area del parallelogramma o, più semplicemente che un qualunque triangolo è un semi-parallelogramma e che la sua "altezza" è anche quella del "parallelogramma.
- All'atto delle prime costruzioni del concetto di proporzionalità forse non si è pensato al caso della "proporzionalità multipla", cioè a una grandezza che dipende da diverse altre per il tramite di una relazione moltiplicativa.
Nel caso dell'area del triangolo c'è una proporzionalità tra le misure della base e dell'area, come anche tra le misure dell'altezza e dell'area. Si ritrova il caso del rettangolo, ma con numeri reali (perché il modello dei quadratini "interi" non funziona) e con la divisione per 2 che agisce sul prodotto (divisione che è lontana da essere percepita come una moltiplicazione per 0,5 o 1/2 e che appare come natura differente dalla moltiplicazione delle due misure).
Se anche tutte queste osservazioni fossero state proposte al momento opportuno, non è inutile riprenderle in una discussione comune sull'area del triangolo insistendo sulla doppia proporzionalità – area e misura della base; area e misura dell'altezza -, la natura delle grandezze in gioco e il passaggio dalle lunghezze alle aree, l'associatività della moltiplicazione dei tre fattori: le due misure e 1/2, ...
In classe, il problema potrebbe essere completato con un'ulteriore domanda del tipo: Se il terreno più grande viene venduto a 10000 euro, a quanto deve essere venduto l'altro, allo stesso prezzo a metro quadro? Questa domanda indurrebbe gli allievi a passare attraverso la ricerca delle aree e a non utilizzare solo il rapporto in seno alla base.

E l'altezza dove la metto?
Triangoli sul geopiano (27.I.18) (Cat. 8, 9, 10) (Gazzetta n.10)

Mattia ha teso un elastico fra i tre chiodi A, B, C del suo geopiano per formare il triangolo della figura seguente:



Mantiene l'elastico sui chiodi A e B e lo solleva dal chiodo C per fissarlo su un altro chiodo, cercando di ottenere un nuovo triangolo, con la stessa area del triangolo ABC. Mattia si chiede quali possano essere i chiodi, oltre a C, sui quali poter fissare l'elastico per ottenere altri triangoli della medesima area del triangolo ABC, di cui A e B siano sempre due dei vertici.

Segnate tutti questi chiodi sul geopiano e spiegate come avete fatto a trovarli.

Alla luce dell'analisi a posteriori condotta dai membri del gruppo, Rosanna Sanna e Maria Agostina Satta, della sezione di Sassari, hanno svolto diverse attività in classe a partire dal problema in oggetto (si veda anche la descrizione del loro poster, illustrato al Convegno di Alghero), per arrivare poi a proporre alcune indicazioni didattiche.
Questo problema, come altri del RMT ha messo ben in evidenza le difficoltà incontrate dagli allievi laddove hanno a che fare con le altezze di figure geometriche "non allineate" con l'orizzontale e la verticale (spesso poco prese in considerazione in manuali scolastici, benché non in tutti e che diventano figure "standard") o in presenza di triangoli ottusangoli, o ancora laddove venga loro proposta solo la definizione di altezza come "segmento che parte da un vertice e cade perpendicolarmente sul lato opposto".
Da tali constatazioni scaturite dall'analisi di questo problema potrebbe essere utile:

1. Considerare come definizione di altezza di un triangolo "la distanza fra un lato, scelto come base, e il suo vertice opposto".
2. Discriminare tra "altezza come segmento" o parte di retta e "altezza come misura".
3. Superare la misconcezione dell'altezza intesa solo come verticalità.
4. Presentare figure geometriche rappresentate con orientazione diversa da quella orizzontale e verticale (B. Brogi, 2019).
5. Superare la misconcezione che il "piede" dell'altezza si trova sempre nel punto medio della base.
6. Riconoscere altezze in figure in cui il piede dell'altezza si trova sulla retta a cui appartiene la base.
7. Sviluppare il concetto di luogo geometrico determinato dalla traslazione dell'estremità del segmento altezza (di misura costante) quando questa si sposta su una retta. Ciò consentirà di acquisire che triangoli che hanno la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti.
8. Proporre problemi in cui l'altezza non viene esplicitata, tratti ad esempio dalla Banca dei problemi dell'ARMT.
9. Progettare percorsi d'apprendimento utilizzando problemi tratti dalla Banca dell'ARMT, limitando il ricorso agli esercizi ripetitivi di calcolo delle aree presenti nei libri di testo.

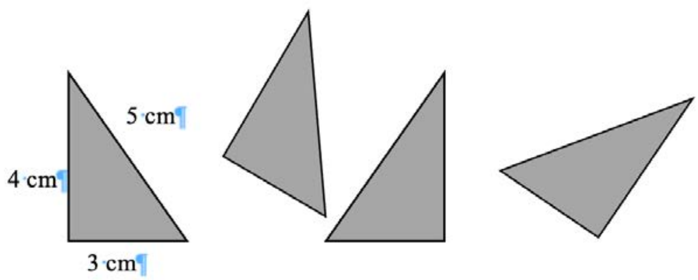
Due versioni di un problema di geometria riuniscono di nuovo i due sottogruppi!

Puzzle di triangoli (I) (28.I.07.) (Cat. 5-6)
Puzzle di triangoli (II) (28.I.13). Cat. 7-8)

Riportiamo qui la versione (I). La versione (II) comporta la presenza di sei triangoli al posto di quattro.

Versione (I)

Andrea ha ritagliato quattro triangoli rettangoli uguali i cui lati misurano 3 cm, 4 cm e 5 cm.



Accostando i quattro triangoli, Andrea forma delle figure e vuole che:

- **i triangoli non si sovrappongano;**
- **i triangoli siano uniti lungo lati della stessa lunghezza;**
- **nessuna figura abbia un buco.**

Ecco alcuni dei tentativi di Andrea:

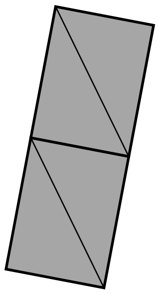


Fig. 1

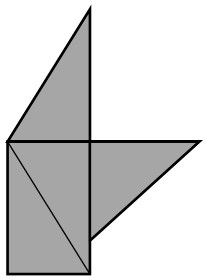


Fig. 2

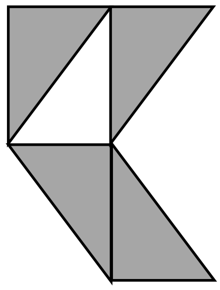


Fig. 3

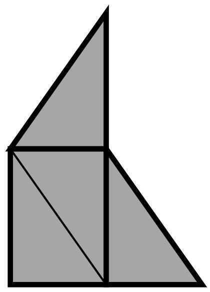


Fig. 4

Le figure 1 e 4 sono corrette, la figura 2 non è corretta perché ci sono due triangoli che si toccano su due lati che non hanno la stessa lunghezza, la figura 3 non è corretta perché ha un buco.
Accostando i quattro triangoli seguendo le regole che ha fissato, Andrea vuole formare una figura che abbia il perimetro più lungo possibile.
Scoprite come può essere questa figura e disegnatela.
Scrivete quanto misura il suo perimetro e mostrate i calcoli che avete fatto.

Dall'articolo di F. Jaquet con la collaborazione dei membri dei due semi-gruppi di geometria piana (Gazzetta n. 11):

"Tutti coloro che hanno analizzato a posteriori gli elaborati degli allievi, in particolare i membri del gruppo Geometria piana (nelle sue due componenti indicate come GP "piccoli"- cat. da 3 a 5- e "grandi"- cat. da 6 a 10), hanno trovato che questo problema merita effettivamente di essere utilizzato nella pratica di classe e si inscrive anche in una delle finalità del RMT: *migliorare l'apprendimento, per gli allievi e la formazione degli insegnanti.*

Si tratta di una situazione relativa alla costruzione di figure, che può essere proposta a classi delle categorie da 5 a 8, che permette di fare scoperte sorprendenti in un contesto semplice e che offre numerose possibilità di dare (o ridare) senso a certe nozioni.

L'interesse per questa situazione è confermato da diverse sperimentazioni del problema in classe per le quali sono risultate utili le prime osservazioni dell'analisi a posteriori.

Di conseguenza, l'analisi a posteriori, che costituisce il nodo centrale di questo studio o approfondimento, risulta arricchita da tali sperimentazioni in classe e ogni capitolo è accompagnato da riflessioni e domande circa le conseguenze di un passaggio da "problema del rally" a "problema da inserire in un percorso didattico".

Lo studio pubblicato qui è organizzato in ordine cronologico secondo le fasi di costruzione, analisi e proposte didattiche del problema."

Dalla scheda del problema in oggetto, sulla Banca di problemi

Indicazioni didattiche
Si arriva qui alla fase più delicata e complessa di un problema RMT, quando diventa il punto di partenza di un'attività in classe. Si lascia l'analisi a posteriori per entrare in una riflessione a priori su una pratica futura, ma già messa in chiaro da tutti i dati raccolti in precedenza e da quattro sperimentazioni.
La palla è ora nel campo dell'insegnante.
- Sceglie il problema secondo i bisogni dei suoi allievi.
- Determina le modalità di risoluzione: materiale a disposizione, formazione dei gruppi, durata,... (il compito è poi devoluto interamente agli allievi).
- Organizza la (le) messa (e) in comune dove la parola è agli allievi e dove l'insegnante interviene progressivamente per orientare il dibattito sulle nozioni che giudica opportune.
- Dirige la (le) fase (i) di istituzionalizzazione dei saperi venuti alla luce nel corso del dibattito.
- Progetta un "percorso" didattico per applicare, consolidare, approfondire... i saperi che giudica importanti nel contesto del problema divenuto familiare agli allievi.
Questo scenario è evidentemente quello che discende dalle opzioni didattiche del RMT: sono gli allievi che costruiscono le loro conoscenze, in collaborazione, mentre l'insegnante ha il compito di stimolare e orientare il

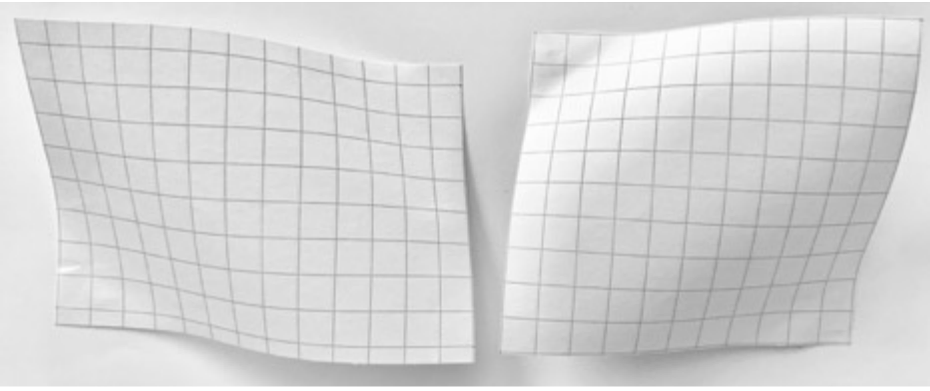
dibattito verso i saperi. Compito molto più delicato di quello di "mostrare", "spiegare", "aiutare", "correggere", "giudicare", cioè di "insegnare" secondo la sua definizione di "trasmettere un sapere".
I rapporti dei membri del Gruppo geometria che hanno presentato Il puzzle di triangoli ai propri allievi mostrano come, proposto in classe in una concezione socio-costruttivista, possa inserirsi perfettamente in un percorso di apprendimento.

L'area ancora protagonista

Problemi per piccoli e grandi con proposte di un percorso didattico

L'analisi a posteriori di **Rettangoli di carta quadrettata (I)** (29.I.04, Cat. 3, 4) e di **Rettangoli di carta quadrettata (II)** (29.I.08, Cat. 5, 6), ha offerto molteplici suggerimenti per l'utilizzazione di questo problema (nelle sue due versioni) in classe al fine di rivedere e approfondire tutte le fasi della costruzione del concetto di area.

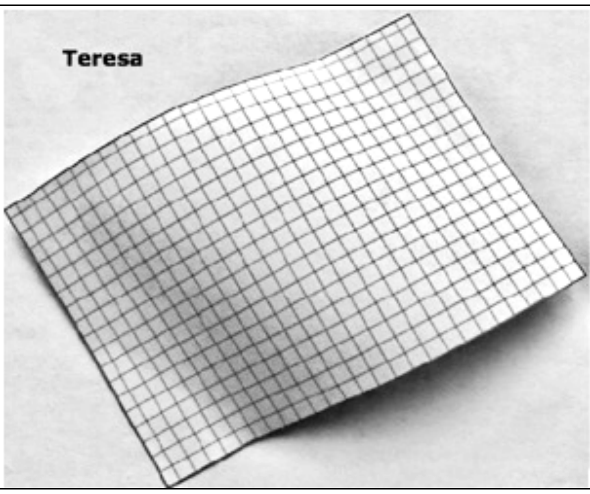
RETTANGOLI DI CARTA QUADRETTATA (I) (Cat. 3, 4)
Enrico e Giulia hanno disegnato e poi ritagliato due rettangoli dallo stesso rotolo di carta quadrettata. Questi sono i loro rettangoli.

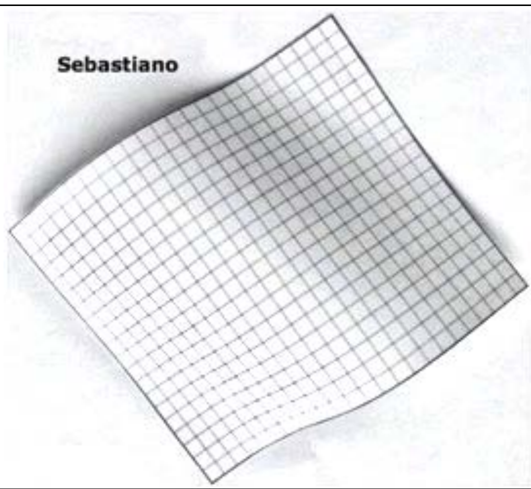


- *rettangolo di Enrico* *rettangolo di Giulia*

Per il suo rettangolo Giulia ha usato più carta, ne ha usata di meno o ne ha usata quanto Enrico?
Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

RETTANGOLI DI CARTA QUADRETTATA (II) (Cat. 5, 6)
Teresa e Sebastiano hanno disegnato e poi ritagliato due rettangoli dallo stesso rotolo di carta quadrettata.
Questo è il rettangolo di Teresa. E questo è il rettangolo di Sebastiano.





Per il suo rettangolo Teresa ha usato più carta, ne ha usata di meno o ne ha usata quanto Sebastiano?
Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

L'obiettivo del problema, nelle sue due versioni, era duplice: proporre il calcolo dell'area di un rettangolo con quadretti non interi per porre gli allievi in una situazione non convenzionale con, in più, l'ostacolo alla misurazione dei lati con il righello. L'obiettivo non è stato raggiunto perché un prerequisito non è stato soddisfatto, infatti gli elaborati di entrambe le versioni hanno evidenziato confusione tra quadretti non interi e quadretti interi.
Senza osservare la differenza di "unità", il problema sarebbe meno interessante e per mantenere l'aspetto dell'approssimazione, come indicato anche dalle osservazioni di correttori e sezioni, si è immaginato un enunciato che incoraggiasse gli allievi a entrare nel conflitto tra numeri interi e non interi. Tale enunciato è stato poi utilizzato nella sperimentazione condotta da Angela Mecacci nelle classi di categoria 4 (si veda allegato I).

Relativamente al 29°RMT, il gruppo "piccoli" si è impegnato nell'analisi a posteriori del problema ***Foglie di carta (***cat.4, 5, 6 prova II) e per il 30° RMT *Puzzle di due pezzi* (cat. 3, 4, prova I).

Idea di un percorso per i "piccoli"

A questo proposito si è pensato ad un percorso didattico attraverso problemi RMT finalizzati alla costruzione del concetto di area ma che mettessero in rilievo il conflitto suddetto introducendo le frazioni dell'unità di misura (parti di quadretto), come per es. (RMT 2005 (ral. 13.I.02 ; cat. 3-4); Cadono le foglie (ral. 18.I.05 ; cat. 3-5); Il cuore di Martina (ral. 22.I.09 ; cat. 5-6), per condurre poi gli allievi a confrontarsi con l'idea di approssimazione.

L'inizio di questo percorso è ben riportato nell'allegato I, nel quale Angela Mecacci illustra nei dettagli un'ampia attività sperimentale con le due versioni del problema "Rettangoli di carta quadrettata" che ha proposto a due classi di quarta (versione I) e a due classi di quinta (versione II), delle quali non è insegnante di classe.
Ha proposto poi la versione (I) nelle sue due classi terze e, a seguire il problema "Biscotti", per arrivare all'importanza di soffermarsi sul conflitto area perimetro.

Proposta di un percorso per i "grandi", ma anche, in alcuni casi, per i "piccoli"

In un articolo pubblicato sul n. 14 della Gazzetta di Transalpino sono presentati suggerimenti per percorsi didattici in tema di geometria piana, a partire da problemi RMT ampiamente analizzati a posteriori su un gran numero di elaborati e, in alcuni casi, anche sperimentati nelle "nostre" classi.
Lo scopo di tali "suggerimenti per percorsi didattici" si inscrive in una concezione fondata sull'apprendimento e non più sull'insegnamento, laddove quest'ultimo sia inteso come "trasmissione pedissequa di saperi" nell'ambito della quale l'allievo acquisisce saperi, nozioni, regole e così via, nell'ascoltare le lezioni, nel leggere o nel risolvere gli esercizi progressivi che gli vengono somministrati e sa che le nozioni da acquisire gli sono state date e spiegate. Per la concezione fondata sull'apprendimento, al contrario, viene richiesto all'allievo di essere attivo già dall'inizio del processo tramite la sua partecipazione alla costruzione di saperi che sono nuovi per lui/lei.
Per la scelta di tali problemi si è fatto riferimento sia alle innumerevoli analisi a posteriori di elaborati degli allievi che hanno portato, nel tempo, alla pubblicazione di articoli sulla Gazzetta di Transalpino, ma anche a schede della banca di problemi con il loro contenuto di procedure, ostacoli ed errori rilevati, oltre a indicazioni didattiche.
Per quanto riguarda alcuni problemi reputati interessanti, ma carenti in merito alle analisi a posteriori, si è deciso di attuare nelle classi alcune sperimentazioni che consentiranno anche di completare le relative schede.

In questi suggerimenti di percorsi didattici entrano in gioco tre tematiche "area e perimetro", "distanze e altezze" e "misure e approssimazione" e coinvolgono una quindicina di problemi RMT!
Per tutti gli ampi dettagli rimandiamo all'articolo dal titolo *Percorsi didattici per la geometria piana con problemi del RMT* (pp. 75-124)

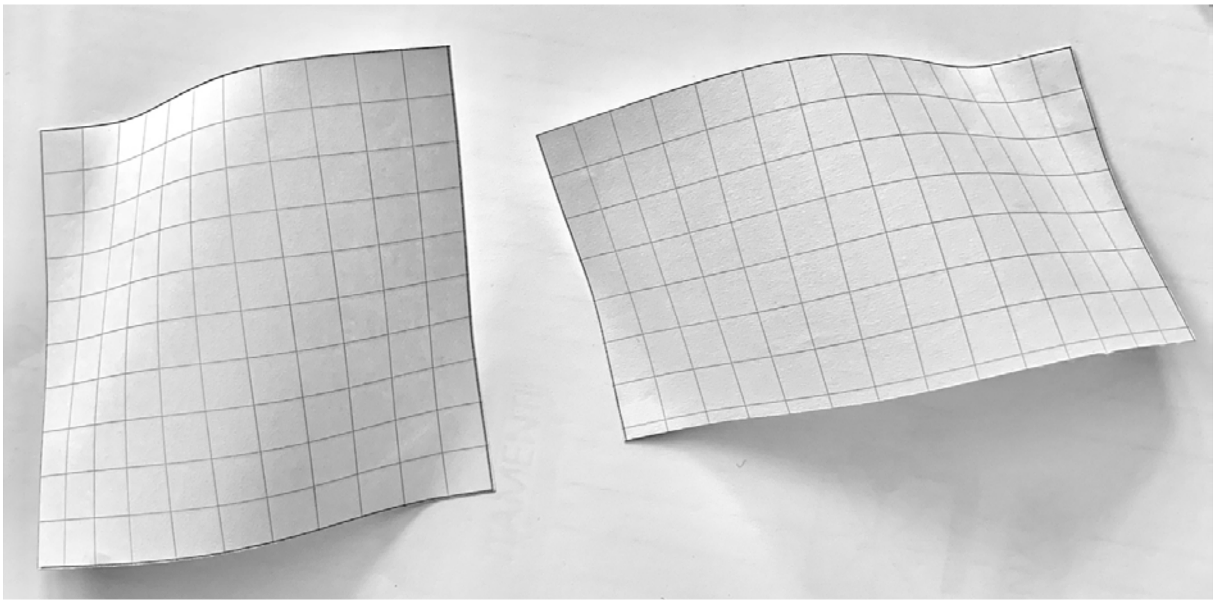
Allegato I

ANALISI E CONSIDERAZIONI EMERSE DALLA SPERIMENTAZIONE DEI PROBLEMI “RETTANGOLI SU CARTA QUADRETTATA” E “BISCOTTI”

Angela Mecacci

RETTANGOLI SU CARTA QUADRETTATA

Modalità di somministrazione
Ho proposto il problema Rettangoli su carta quadrettata a due classi quarte e due classi quinte della scuola primaria P. Calamandrei del Comprensivo 1 Poggibonsi (la versione I per la cat. 4 e la versione II per la cat.5). I ragazzi erano organizzati in piccoli gruppi da tre o quattro alunni, formati con una certa libertà da parte loro, ma con la mediazione dell’insegnante di classe (che non sono io).
Erano stati dati i soliti 50 minuti di tempo per la risoluzione, senza essere, però, fiscali se fosse stato necessario qualche minuto in più.
Questi erano i rettangoli previsti in “Rettangoli su carta quadrettata I” cat. 3-4



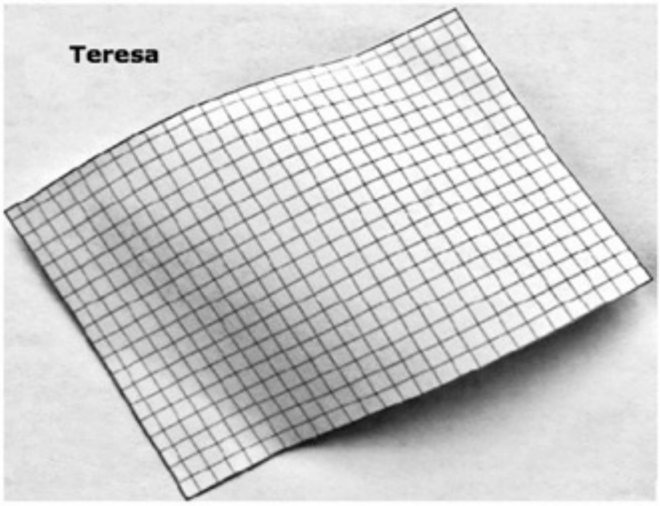
Molti gruppi hanno dato la risposta corretta.
Solo tre gruppi su 9 hanno dato le seguenti risposte:

1) “Il secondo rettangolo è un po’ più grande perché nel primo il conteggio è 11+11+10+10 = 42 , nel secondo è 14+14+7+7= 42 ma con dei pezzettini in più. Evidente il solito conflitto tra area e perimetro nella misurazione di una figura.
2) “ I rettangoli sono all’incirca uguali perché uno è più alto ma più corto e l’altro è più basso ma più lungo”.
3) “Non si può capire bene chi è più grande perché la carta è piegata un po’, ma secondo noi sono uguali”.

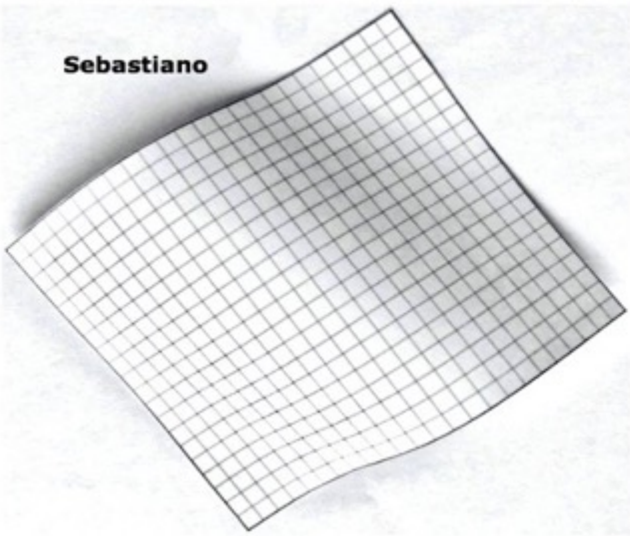
Nel tentativo di mostrare il ragionamento seguito, negli elaborati con la risposta corretta, risulta chiaro il conteggio dei quadretti della superficie. Si trovano in quasi tutti gli elaborati i risultati: 110 quadretti il primo e 98 il secondo (eccetto un elaborato che presenta un errore di calcolo: 111 e 98), ma solo la metà dei gruppi ha fatto accenno ai quadretti non interi, con un’argomentazione linguistica o con un calcolo aggiuntivo.
Durante la condivisione e la discussione con gli allievi, momento che ho curato personalmente il giorno successivo, ho chiesto il perché fossero spariti dalle loro risposte quei pezzettini di quadretti presenti nel secondo rettangolo ed è emerso che, in realtà ne avevano discusso nel gruppo, ma erano pezzettini troppo piccoli che non avrebbero cambiato la risposta.
Viene fuori nuovamente la problematica legata alla dimostrazione e all’argomentazione delle proprie risposte. Secondo molti ragazzi ciò che conta è solo la risposta giusta.

Segnalo un commento interessante fatto da un allievo: " Quei 14 pezzettini minuscoli non possono fare mai 12 quadretti; se volevate fare il problema più difficile, dovevate mettere dei pezzettini anche lungo l'altro lato dello stesso rettangolo. Allora sì che era difficile capire chi è più grande". Proprio l'idea che ha spinto il gruppo di geometria piana a proporre la versione II per le categorie 5 e 6.
Un aspetto che mi ha colpito e che voglio condividere è che molti elaborati di quarta e due di quinta, presentano il conteggio dei quadretti con i numeri scritti sopra a ciascuno (cioè un conteggio dei quadretti singoli su cui si leggono i numeri 1.2.3.4……) o l'addizione ripetuta 11+11+11+11… (prevista peraltro dall'analisi a priori).
Trasformo questa osservazione in domanda. Siamo convinti che i nostri ragazzi di 10-11 anni abbiano capito la moltiplicazione e il suo potenziale? Io ne dubito molto.
Ecco invece i rettangoli presentati nel problema proposto in cat. 5 e 6.

Questo è il rettangolo di Teresa.



E questo è il rettangolo di Sebastiano.

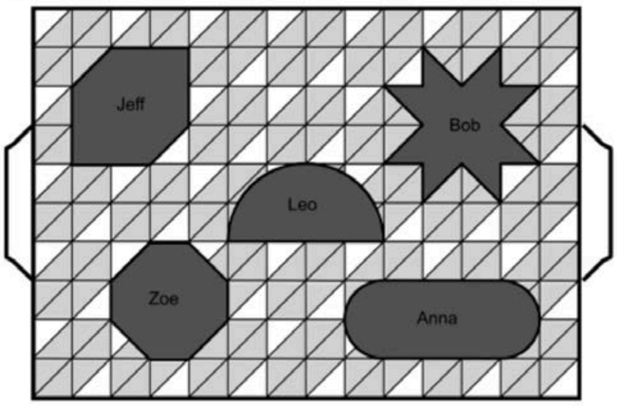


Gli 8 gruppi di allievi di quinta a cui ho proposto il problema hanno tutti compreso la necessità di contare i quadretti della superficie.
-Non si nota il conflitto area-perimetro.

- Risultano errori di calcolo in tre elaborati: alcuni allievi hanno sollevato il problema che il rettangolo di Sebastiano non era molto chiaro nella fotocopia e in effetti, un gruppo ha sbagliato proprio quel conteggio (24 x 19).
- Un solo gruppo ha contato i quadretti non interi come se lo fossero.
- Quasi tutti i gruppi hanno detto che per contare i quadretti non interi hanno proceduto "unendo due pezzetti per farne uno intero": due gruppi hanno spiegato che per fare un quadretto intero "serviva uno dei pezzettini sulla lunghezza del rettangolo e un pezzettino sulla larghezza" (nel disegno si vedeva la freccia che li univa). Hanno cioè notato che anche i pezzetti non erano della stessa grandezza e li hanno considerati come 1/3 + 2/3 = 1.

APPLICAZIONE DIDATTICA
Concludo questa mia analisi raccontando come ho utilizzato il problema Rettangoli versione 1 nelle mie due classi terze, visto che nell'ultimo convegno avevamo sottolineato l'importanza di un'applicazione didattica dei problemi del Rally. Non so se sia interessante o meno, ma provo sempre piacere nel trovare che i <u>nostri</u> problemi siano di stimolo per il lavoro quotidiano.
Io l'ho proposto a tutta la classe per introdurre le frazioni. Abbiamo letto il testo, analizzato il disegno dei due rettangoli e ho lasciato che i miei alunni affrontassero il problema dei quadrati non interi. All'inizio, in entrambe le classi, c'è stata molta discussione sul dover contare "il dentro" o il "confine" dei rettangoli: io ho lasciato libertà di confronto, finché hanno deciso di contare i quadretti della superficie (alcuni allievi, però, non erano convinti, perciò so di dover ancora lavorare sulla differenza tra area e perimetro).
Già nel disegno allegato al testo del problema era chiaro che quei pezzetti fossero minori della metà, ma ho ugualmente proposto di ridisegnare i due rettangoli sul foglio quadrettato da 1 cm: questo mi permetteva, anche, di consolidare l'abilità di conteggio dei miei ragazzi.
Ogni alunno ha riprodotto individualmente i propri rettangoli ed è emerso che alcuni allievi aggiungevano nel secondo rettangolo una metà di quadretto, altri invece un pezzetto più piccolo. Ne ho approfittato per osservarne la differenza con loro ed ho lasciato argomentare le loro scelte. Mentre gli alunni che avevano disegnato i quadretti a metà non si erano posti più di tanto il problema della grandezza dei pezzettini, gli altri avevano notato che quei pezzettini erano più piccoli della metà.
Dora ha detto: -Vedi maestra, per fare un quadretto intero ci vogliono 3 pezzettini e non 2. Sembra poco, ma la differenza c'è. Claudio ha aggiunto: -Forse ce ne vuole anche 4.
Ho proposto, così, a quattro miei alunni di disegnare un quadrato più grande (10x10 cm) provando a piegarlo in due parti o in tre o in quattro parti uguali ed ho cominciato a parlare di un mezzo, di un terzo e di un quarto, osservando e confrontando le frazioni ottenute.
Sperimentazione sul problema BISCOTTI (cat. 4-5-6) 14 RMT II

Ecco i biscotti che il pasticciere ha preparato per cinque bambini e che ha disposto con molta precisione su un vassoio.
I biscotti sono tutti dello stesso spessore, ma alcuni dei bambini sono insoddisfatti e dicono che il loro biscotto è più piccolo di quello degli altri.



Pensate che tutti i bambini avranno la stessa quantità di biscotto da mangiare?

Se no, mettete i biscotti in ordine dal più piccolo al più grande.

Spiegate la vostra risposta.

Seguendo le indicazioni di Clara, ho proposto il problema "Biscotti" nelle mie due classi terze nel mese di maggio, quando i miei alunni avevano già affrontato alcuni problemi del Rally basati sulla misura della superficie tramite griglie quadrettate e dopo aver lavorato in modo pratico sulle frazioni. Naturalmente ero consapevole della difficoltà del compito, ma volevo vedere come i ragazzi avrebbero affrontato la novità di forme curve.
Modalità di somministrazione: campione di 49 alunni suddivisi in 12 gruppi (6 in una classe e 6 in un'altra). Tempo a disposizione: un'ora.

Analisi scaturita dall'osservazione durante la prova
La forma che ha catturato all'inizio la loro curiosità è stata la "stella" di Bob, a cui attribuivano un grande estensione a causa delle "punte": quando hanno cominciato a cercare l'unità di misura possibile per stabilirne la grandezza, in quasi tutti i gruppi c'è stata sia la misurazione del confine con i segmenti-quadretto, sia il conteggio dei quadratini/triangolini interni. In alcuni casi la discussione su quale fosse l'unità di misura appropriata è durata

pochi minuti, in altri più di 20 minuti e, nonostante ciò, due gruppi hanno comunque scelto di confrontare i perimetri delle figure. Nel conteggio dei tratti curvi non si sono preoccupati della lunghezza effettiva della linea, ma hanno considerato, ad esempio per il biscotto centrale di Leo, 6 quadretti la misura della semicirconferenza perché "tocca" 6 quadratini della griglia. Sul perimetro e, in particolare su un elaborato, tornerò più avanti perché, come succede sempre, è osservando gli errori degli allievi che possiamo comprendere come ragionano i bambini e, di conseguenza, guidarli nei nuovi apprendimenti.

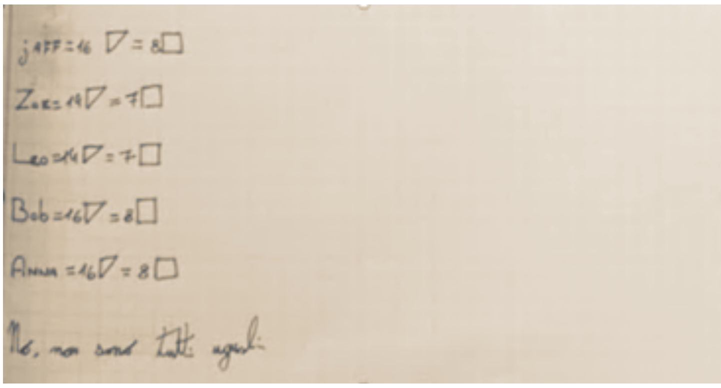
Analisi sugli elaborati

- Come previsto dall'analisi a priori, le forme che hanno indotto all'errore sono state quelle con la linea curva. Per tutti è stato difficile confrontare soprattutto il biscotto di Leo (quello centrale) con quello di Zoe ottagonale. In diversi elaborati, infatti, risulta che Zoe ha il biscotto più piccolo rispetto a quello di Leo. I ragazzi non sono riusciti a confrontare quei pezzetti delimitati da linee curve con i quadratini o i triangoli della griglia e dedurne la grandezza. Invece, quasi tutti hanno compreso che Anna aveva il biscotto più grande, nonostante risultino alcuni conteggi errati nella spiegazione della risposta

Considerazioni sulla figura del biscotto di Anna

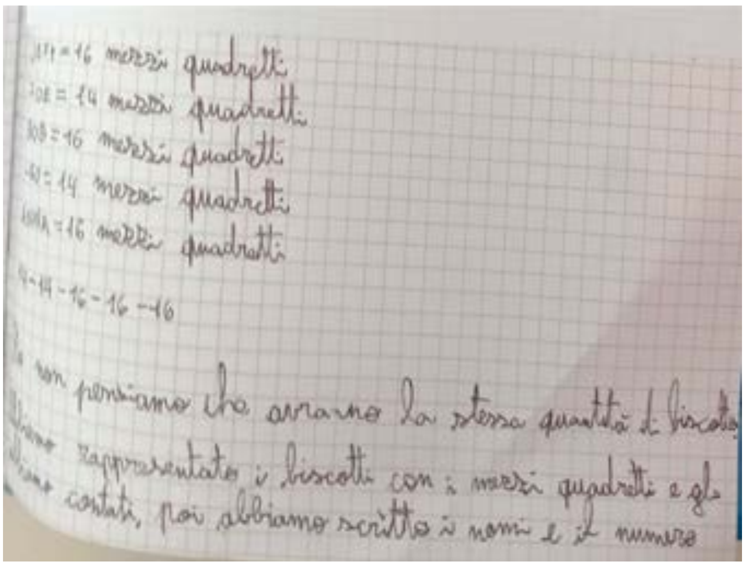
a) Il biscotto di Anna misura 8 quadretti come quello di Jeff e di Bob

b)

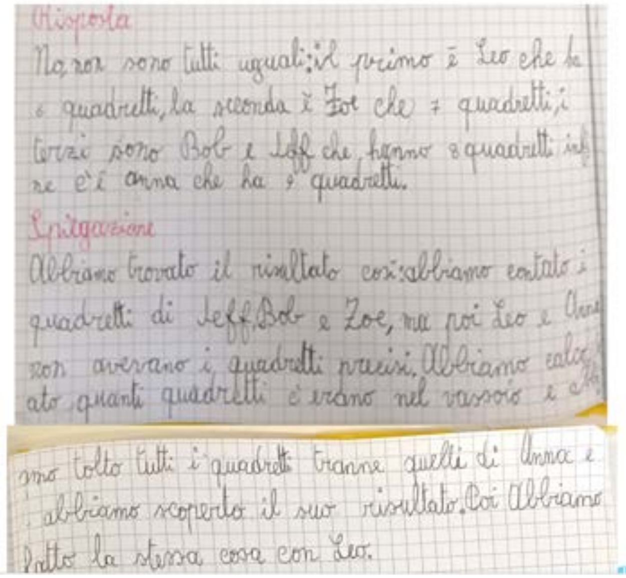


I ragazzi hanno spiegato che secondo loro quegli "spicchi" laterali nel biscotto di Anna valevano mezzo quadretto ciascuno, perciò 6 quadretti interi + 4 mezzi quadretti determinano gli 8 interi. Nello stesso elaborato risulta, invece, che nel biscotto di Leo si è fatto lo sforzo di ricomporre il quadretto intero con due pezzetti (4 interi in basso + 3 formati dai quattro pezzetti in alto).

Simile anche in altri 2 elaborati



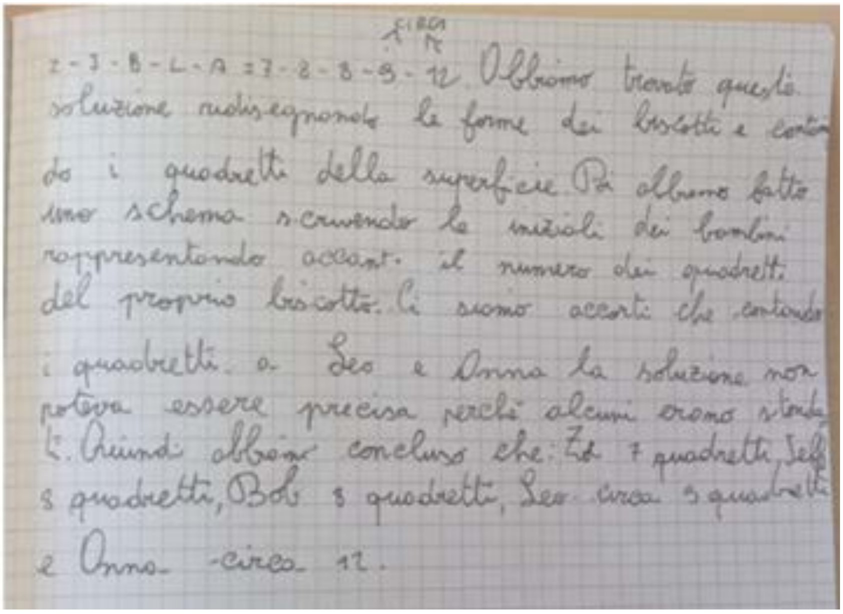
c) Strategia di conteggio dei due biscotti con linee curve tramite differenza



Questo gruppo ha cercato la superficie dei due biscotti contando tutti i quadretti della griglia e sottraendo tutti quelli esterni ai due biscotti, sia interi che non. Ha trovato il numero 15 ed ha attribuito 6 quadretti a Leo e 9 a Anna.

d) Errore in eccesso dell'area dei due biscotti di Leo e Anna

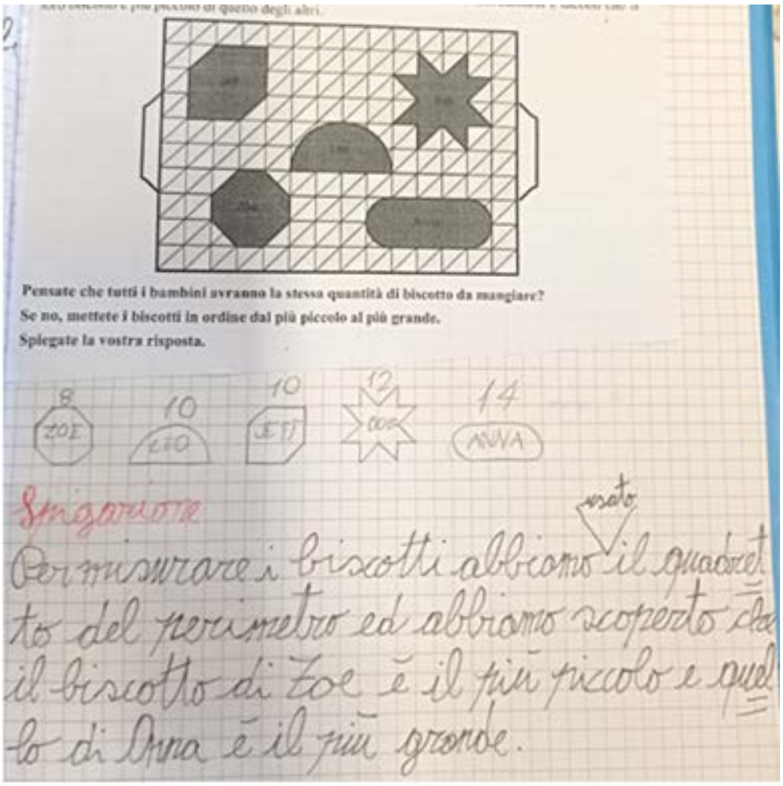
e)



Qui la rotondità dei pezzi ha fatto sbagliare per eccesso il conteggio anche perché ridisegnando i biscotti su un foglio, si sono persi i punti di riferimento della griglia.

Analisi del conflitto area perimetro

Come già detto all'inizio di questa mia analisi, tutti i gruppi hanno affrontato il dubbio su cosa andare a misurare riguardo ai biscotti: il confine o la superficie interna? Ecco uno dei due elaborati che ha scelto il perimetro.



Dall'osservazione delle risposte e dalla discussione in classe sono emerse delle belle considerazioni sugli errori commessi, ma l'elaborato che vi ho allegato sopra mi ha dato lo spunto per l'attività successiva, affrontando contemporaneamente il concetto di area e di perimetro di una figura.

- Ho fatto costruire a ciascun allievo due biscotti di forma rettangolare ma di dimensioni diverse disegnandoli su carta quadrettata da 1 cm. Ad esempio, Mattia ha disegnato un rettangolo 12 x 3 e uno 7 x 6 . A questo punto ho chiesto loro quale biscotto avrebbero preferito mangiare se avessero avuto fame ed è cominciata una bella attività di misurazione. In alcuni casi, i bambini mi hanno chiesto di poter ritagliare i biscotti per sovrapporli ed essere sicuri della superficie. Abbiamo calcolato sia i perimetri che le aree e abbiamo dedotto aspetti interessanti sul rapporto tra queste due dimensioni.

Successivamente, ho costruito un biscotto-rettangolo 6x4 e ho chiesto ai miei alunni, come compito a casa, di disegnare tutti i possibili biscotti grandi come quello. La mattina seguente è iniziata una bella lezione di tutte le figure-biscotto trovate. Alcuni, forse su suggerimento dei genitori, hanno proposto anche biscotti triangolari…..una meravigliosa occasione che apre le porte ad ulteriori apprendimenti.

- Due settimane dopo questa esperienza, ho proposto di nuovo il problema Biscotti, ma con il disegno del vassoio ingrandito, in modo che la griglia fosse più chiara. In questo contesto i bambini hanno potuto osservare davvero se quei pezzettini di biscotto rotondi fossero più o meno grandi del quadretto.
- L' ulteriore passo che mi aspetta il prossimo anno sarà quello della misura del perimetro con il segmento lato-quadrato e il segmento diagonale. Come potete notare dall'elaborato, in alcuni casi sono stati considerati uguali (vedi Zoe e Jeff) e in altri il lato è stato conteggiato come la metà della diagonale (vedi Bob). Questo, però, non ha fatto insorgere nei loro compagni nessun dubbio.

Il prossimo anno proporrò l'attività che ho presentato nella poster session di Faenza e vedremo i frutti che porterà.

Allegato II

Elenco problemi e articoli sulla Gazzetta
di riferimento per la progettazione dell'articolo *Percorsi didattici per la geometria piana con problemi del RMT* (Gazzetta di Transalpino n. 14)

À quoi peuvent servir ces problèmes pour un enseignant ?

Il tavolo da spostare 16. F.24 (5, …) Gazzetta n, 1 (Bernard, Clara Bisso, Lucia)
Déplacer un objet par isométries. …
angolo retto, rettangolo, isometria, lunghezza, confronto, rotazione, parallelogramma, perpendicularité, pente (2 x 1),
ANG, IF, (/RC), QUA (/GQ)

Puisque les élèves de catégories 5 et suivantes ne se rendent pas compte quel les figures "table" qu'ils construisent ne sont pas isométriques au modèle, le problème doit susciter une discussion collective sur ce qu'il y a derrière "une transformation "isométrique", sur quadrillage : les angles de la table sont droits, les petits côtés de la table sont des diagonales de rectangles (1 x 2), les grands valent deux fois les petits (diagonales de rectangles de 2 x 4 à ne pas confondre avec 3 x 4 etc. Liens avec le rapport 1/2, ou la proportionnalité, ou la "pente", ou la constatation quel les droites de "pentes 1/2 et 2/1 sont perpendiculaires sous certaines conditions.

L'eredità 8.I.16 (7-8) Gazzetta n. 4 (Lucia)
Montrer l'équivalence d'aires…
comparaison d'aire, de rectangle, de triangle, de longueur, d'aire
ANG, CA (/D), DEM, GDE,

Un bel exemple d'approche de géométrie déductive, combinée avec une pratique intense de la détermination de l'aire du triangle. Essais successifs et répétés de la position du piquet faciles à organiser, à mesurer et calculer (aire du triangle à haute dose !!) pour passer progressivement des cas particulier au cas général (algébrisation). (On peut partir d'un rectangle sur quadrillage)

RMT 2005 13.I.2 (3-4) Gazzetta n. 4 (Lucia)
Comparez l'aire de figures, dessinées sur une grille rectangulaire, dans laquelle apparaissent des carrés (demi-rectangles), des triangles rectangles isocèles (demi-carrés) et des trapèzes rectangles ; dans un contexte de lettres et de chiffres à peindre sur un mur.
Aire, unités de surface, carrés, rectangles, triangle isocèle rectangle, trapèze droit, nombre
CA(/P), LA

Constater l'importance d'une unité commune d'aire qui n'est pas le carré du quadrillage, mais peut être la brique rectangulaire de 2 x 1, ou le demi-carré, … Révision de polygones équivalents rectangles, trapèzes, …

Cadono le foglie 18.I .05 (3,4,5) Gazzetta n, 1 (Bernard, Clara Bisso, Lucia) Gazzetta n. 4 (Lucia)

Comparer les aires de deux polygones (de 8 et 12 côtés) dessinés sur un quadrillage, dont les sommets sont sur des intersections du quadrillage et dont les côtés suivent les côtés ou les diagonales des carrés du quadrillage, …
Polygone, quadrillage, aire, équivalence, triangle, rectangle, carrés, trapèze, décomposition, recomposition, transformation géométrique, unité d'aire.
CA(/P), LA(/UA), RD(/CP)

Constater l'importance d'une unité commune d'aire qui n'est pas le carré du quadrillage, mais le demi-carré. Regroupements de triangles, introduction à la formule d'aire d'un triangle, ou d'autres polygone
…
A quale distanza 12.II.14 (7-8) Gazzetta n. 9 (François)

Trouver combien il y a de distances différentes entre deux centres des 25 carreaux d'une grille, quadrillée, de 5 x 5. Carré, rectangle, côté, diagonale, distance, segment
LA(/UA), QUA, RD(/AP)

L'intérêt du problème est de passer des mesures de longueurs prises avec les instruments à des mesures « raisonnées » par comparaisons entre elles. On retrouve les comparaisons entre longueurs de diagonales de rectangles. Par exemple (3 x 0), (2 x 2), (3 x 1), Et évidemment, la relation de Pythagore montre son efficacité ici.

Una moneta ben meritata 14.I 12 (6-10) Gazzetta n. 9 (Brunella)

Il puzzle con quattro triangoli (II) 15.f

(Indicazioni didattiche François e Lucia in
Risoluzione di problemi per un'attivazione delle competenze.
Lattes 2014.)

Al di là di un rafforzamento delle conoscenze sugli angoli e le misure dei lati deitriangoli, è opportuno un uso dell'attività a proposito delle nozioni di area e di distanza in una griglia quadrata.
L'area del rettangolo (1 3 2) misura 2 (in quadretti della griglia), quella dei triangoli, che sono dei semirettangoli, misura 1 (quadretto). Le aree delle figure composte dai quattro triangoli misurano dunque ciascuna 4 (quadretti). La cosaè evidente per il quadrato *e* ed il rettangolo *f;* lo è meno per i triangoli (*a* e *j*) chesono dei semirettangoli (2 3 4); sono necessari ritagli e ricomposizioni per tra- sformare i quadrilateri *c*, *d*, *h* e *i* in quadrati o rettangoli la cui area è più semplice da misurare. Nel caso di coloro che non "vedono" la scomposizione del quadrato *k* in quattro triangoli e un quadratino centrale, e l'impossibilità della scomposizione del quadrato *k'*, un calcolo permette di scartare tali figure, a un livello, peraltro, di padronanza più elevata delle operazioni sulle aree: un'osservazione più attenta del quadrato *k* permette di constatare che è inscritto in un quadrato più grande (3 3 3) la cui area misura 9 (quadretti), costituito propriodal quadrato *k* e da quattro triangoli di area 1 (quadratino) che lo circondano.Di conseguenza si può calcolare l'area del quadrato *k* tramite una "sottrazione
di aree" $9 - 4 = 5$, che esige un passaggio delicato dall'ambito geometrico a
quello numerico.
Si può ragionare direttamente sulle distanze fra due punti della griglia a partire dalle considerazioni precedenti sul quadrato *k* la cui area misura 5 (quadretti) eil cui lato misura di conseguenza $\sqrt{5}$ (lato del quadretto), senza far intervenire il teorema di Pitagora.
Ci sono numerosi sviluppi possibili di questo problema che permettono di rinforzare tutte le conoscenze evocate in precedenza in riferimento ai quattro triangoli diventati familiari agli allievi con la risoluzione del problema stesso e le validazioni che ne conseguono:

- si possono proporre altre forme da ricoprire delle quali alcune saranno da scartare a causa di vincoli della pavimentazione e altre perché non rispettano
  la conservazione dell'area;
- si può chiedere di costruire, per esempio, tutte le figure composte da due di questi triangoli aventi un lato in comune e di disegnarli su una griglia quadrata: un rettangolo, due parallelogrammi, due triangoli isosceli e un romboide. Il disegno di quest'ultimo porrà dei seri problemi in quanto non segue intera- mente i tratti della griglia e permetterà di introdurre problemi di costruzione di figure simmetriche;
- si può richiedere la lista dei triangoli e dei quadrilateri convessi formati dai quattro pezzi;

- tra le figure convesse precedenti, aventi la stessa area, ci si potrebbe interessare ai perimetri che possono essere diversi.

Il quadrato di Lea 17.II Gazzetta n. 9 (François)

I quadrati di Alex e Francesco 17.II

Sul muro della scuola I 18.II Gazzetta n. 9 (François)

Sul muro della scuola II. Gazzetta n. 9 (Brunella)

Il prato di zio Francesco I e II 18.II

I dieci punti 18.I Gazzetta n. 1(Gazzetta n, 1 (Bernard, Clara Bisso, Lucia) Gazzetta n. 9 (François)

Indicazioni didattiche (François e Luciain *Risoluzione di problemi per un'attivazione delle competenze*. Lattes 2014.))

Le risposte ottenute su circa 1000 classi di prima SI mostrano che solo un terzo degli allievi propone *CHGE* come unico rettangolo, e che un altro terzo dice chei due parallelogrammi sono rettangoli o li confonde; le altre risposte individuanoun altro rettangolo ancora.

Ci sono dunque seri ostacoli a proposito del riconoscimento di rettangoli o distinzione tra parallelogrammi rettangoli e non rettangoli.

Un primo ostacolo è verosimilmente di natura ontogenetica, legato allo sviluppodi rappresentazioni dell'allievo.

Un secondo ostacolo può essere originato da abitudini scolastiche dove il rettangolo è quasi sempre presentato con i lati paralleli ai bordi del foglio.

Un terzo ostacolo, nel caso dei due parallelogrammi "candidati" viene da una prima impressione visiva che non è sufficiente a determinare lo statuto di rettangolo. È necessario l'uso della squadretta o, meglio ancora, di un'analisi fine delle posizioni dei lati in rapporto alle righe della griglia.

Questo problema si presta bene a una messa in comune e a un dibattito relativo alle soluzioni prospettate dagli allievi, probabilmente diverse, attraverso le quali verranno alla luce gli ostacoli precedenti. Tale dibattito farà sorgere la necessità di utilizzare le squadretta per determinare quale o quali delle due figure prese in considerazione siano effettivamente dei rettangoli. Non a partire dall'ingiunzionedel genere "prendete la squadretta" dove l'iniziativa del collegare lo strumento alla figura viene dall'esterno, ma a partire da un'idea concepita in seno al gruppo di allievi.

Si può anche andare più lontano, verso una giustificazione tramite le "componenti" orizzontale e verticale dei segmenti considerati come diagonali di rettangoli (*vedi* la rubrica *Contenuto matematico*).

Si tratta di una "iniziazione" naturale al concetto di vettore e delle sue componenti, senza utilizzare notazioni e definizioni formali, come invece si farà più tardi nell'ambito del calcolo vettoriale o di uno studio non solo intuitivo delle isometrie.

Il ritaglio di triangoli 19.II Gazzetta n. 9 (François)

Rettangoli ingranditi 19.II Gazzetta n. 9 (Brunella)

I quattro picchetti 21.II Gazzetta n. 4 (Lucia)

Triangoli volati via 22.II Gazzetta n. 9 (Brunella)

Il pavimento di legno 23.I

Angoli e triangoli 23.II Gazzetta n. 9 (Brunella)

Spirale di quadrati I e II 23.II Gazzetta n. 9 (Brunella)

Divisione di un terreno 24.I

La porcilaia 24.II Gazzetta n. 9 (Brunella)

I due rettangoli 25.I

Il pavimento di Fabio 25.I

Confronto di figure 26.I Gazzetta n. 8 e Gazzetta n. 9 (François)

Il campo raddoppiato 26.I Gazzetta n. 9 (Brunella)

L'orto I e orto II 26.II Gazzetta n. 9 (nostro gruppo)

La torta di Nonna Lucia 26II Gazzetta n. 5 (Bernard e Michel Henry)

Passeggiata di robot saltatori 27.I Gazzetta n. 9 (Brunella)

Piega e dispiega 27.I Gazzetta n. 9 (Brunella)

Triangoli sul geopiano 27.I Gazzetta n. 10 (nostro gruppo)

La piscina 27.II

Un mosaico del Marocco 27.II Gazzetta n. 10 (nostro gruppo)

Puzzle di triangoli I e II 28.I Gazzetta n. 11 (nostro gruppo)

L'apprendista geometra 28.I

I sette poligoni 29.I. Gazzetta n. 12 (nostro gruppo)

Il tangram del falegname (I e II) 29.II Gazzetta n. 12 (nostro gruppo)

Da singolo a doppio 30.I Gazzetta n.13 (nostro gruppo)

La divisione del rettangolo 30.I Gazzetta n.13 (nostro gruppo)

Il fiore al posto giusto 30.II Gazzetta n.13 (nostro gruppo)

APPROFONDIMENTI / ÉTUDES
LA GÉOMÉTRIE PLANE DANS L'ARMT
RÉSUMÉ

Par Clara Bisso et Lucia Grugnetti[1]

[2]

POUR COMMENCER : APPROCHE DU CONCEPT D'AIRE PAR DES PROBLÈMES DU RMT

► **Groupe de travail "elleaucarré"**

► **Coordinatrices : Clara Bisso-Lucia Grugnetti (Acte ARMT 2006, 267-276)**

---

[1] Membres du Groupe géométrie plane, au fil des années : Bernard Anselmo, M. Maddalena Asara❤, Paola Bajorko, Roberto Battisti, Clara Bisso, Brunella Brogi, Fabio Brunelli, Cristina Caredda, Concetta Caggiano, Federica Curreli, AnnaMaria D'Andrea, Giorgia Delledonne, Luana De Nicolo, Speranza Dettori, Florence Falguères, Cinzia Frongia, Gloria Giacomelli, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Giuseppina Lungheu, Elisabetta Mari, Silvia Mazzucco, Francesca Michienzi, Lucia Palmas, Antonella Pierno, Luciana Rapposelli, Elsa Renna, Patrizia Sabatini, Rosanna Sanna, M. Agostina Satta, Francesca Tanda, Cinzia Utzeri, Vincenza Vannucci.

UN GRAND MERCI.

[2] Ce document, dans sa première partie, rapporte en particulier la présentation du groupe géométrie lors de la rencontre en ligne 2021 (en raison du Covid).

Dans l'agréable bosquet des groupes thématiques
(Arco di Trento 2005), il y a aussi l'arbre
de la géométrie plane

Le groupe est réparti en trois sous-groupes et analyse 4 problèmes afin d'identifier leurs potentialités pour l'introduction de la notion d'aire. L'examen des problèmes fait appel à la fois à ***l'analyse a priori*** *et à* ***l'analyse a posteriori*** *portant sur les 4 problèmes*

► Le défi
► Carré à recouvrir
► .RMT 2005
► Le jardin de Monsieur Tordu

Les Actes de l'ARMT[3]

- C. Bisso, L. Grugnetti, 2005, Approccio al concetto di area con problemi del RMT, Atti della giornata di studio sul Rally matematico transalpino, Vol.5, pp. 267-276.
- C. Bisso, L. Grugnetti, 2006, Il ruolo dei problemi del RMT nell'apprendimento del concetto di area, Atti della giornata di studio sul Rally matematico transalpino, Vol.6, pag.25 e pp.169-187.
- C. Bisso, L. Grugnetti, 2007, la costruzione a lungo termine del concetto di area, Atti della giornata di studio sul Rally matematico transalpino, Vol.7, pp. 199-216.
- C. Bisso, L. Grugnetti, 2008, Il concetto di area in un percorso quinquennale e il ruolo del RMT, Vol.8, pp.167-177.

Le groupe "elleaucarré" devient "groupe géométrie plane".

Depuis 2008, *elleaucarré* est devenu *groupe géométrie plane*, lorsqu'il a « élargi ses horizons », décidant de se pencher sur les obstacles et les erreurs dans ce domaine plus large. Le groupe a travaillé avec Clara et Lucia comme coordinatrices jusqu'en 2012.

À partir de l'année suivante (Luxembourg), compte tenu de l'extension aux catégories 9 et 10 et du nombre élevé de membres représentant les différents niveaux scolaires, on a décidé de se répartir en deux sous-groupes : l'un pour les catégories 3, 4, 5 avec la coordination de Clara et Georges (jusqu'à 2016), puis seulement Clara, l'autre pour les catégories 6, 7, 8, 9, 10 avec la coordination de Lucia à ce jour et de Bernard jusqu'à 2014.

Détecter les obstacles sous-estimés : une contribution du RMT à l'enseignement

En particulier, le groupe, intéressé par les difficultés apparues dans les copies d'un problème de la finale internationale de Brigue : *La table à déplacer,* s'est posé de nombreuses questions ; le groupe s'est intéressé aux problématiques liées au concept de rectangle, commençant ainsi à aborder les obstacles et les erreurs dans le cadre plus large de la géométrie plane.
La recherche a été présentée à la rencontre de Besançon, puis a donné lieu à la publication d'un article intitulé "Rectangle : pas si évident !" publié dans la Gazette de Transalpie n. 1, 2011 (pp. 7-41).

Critères d'élaboration des problèmes et leur Banque

Au fil des années, les travaux du groupe se sont entrecroisés avec les grandes questions traitées au sein de l'ARMT comme par exemple celle des critères d'élaboration des problèmes, présentés à Sedilo dans leur première forme structurée, et progressivement affinés jusqu'à atteindre la nouvelle version proposée en 2020, qui précise les exigences indispensables pour la présentation d'une nouvelle proposition : rechercher la famille de problèmes de la banque à laquelle elle appartient et les problèmes similaires (lorsqu'ils existent), en tenant compte de ce qui a déjà été analysé à leur sujet afin d'obtenir des informations essentielles pour la construction d'un nouveau problème.

[3] Liste par Roberto Battisti.

Par ailleurs, en 2013 le thème de la rencontre de Luxembourg était : « Analyse a priori, analyse a posteriori, un chemin circulaire » et le travail de groupe s'était organisé autour de la Banque, à partir de l'analyse a posteriori des problèmes déjà proposés en vue d'en créer de nouveaux.

L'idée de la Banque qui avait commencé à se concrétiser en 2006, grâce au travail assidu de François et Luc, et s'est poursuivi sans interruption, a évolué et les travaux du groupe avancent à ce niveau avec l'élaboration des fiches, résultat, encore une fois, des analyses a posteriori, telles que : *Le parc du château* Rally: 07.F. cat:3, *Le coeur de Martine* Rally :22.I.09 ; cat.5, 6,…

Le point de vue des élèves

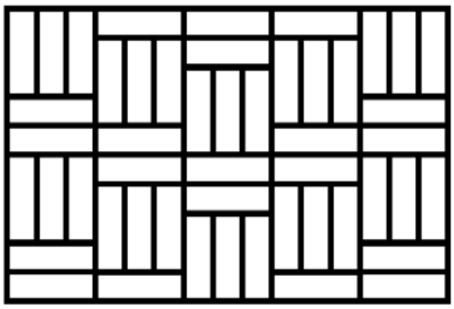
L'analyse des copies du problème, qui ont contribué au poster *Quelques étapes d'une analyse a priori : Trois photos sur une page Rallye : 27.II.04 ; cat.3,4,5* (Jaquet-Bisso) présenté à la rencontre d'Alghero, également à la lumière de la conférence *Le premier seuil dans l'apprentissage de la géométrie : « voir » les figures*, donnée par Raymond Duval, a révélé son intérêt à distinguer les deux dimensions souvent non perçues par les élèves. *Cela dépend de ce que ces derniers « voient » dans la figure géométrique, en effet ils peuvent percevoir les lignes qui la composent (les segments) et donc travailler sur les périmètres ou percevoir uniquement les espaces déterminés par la figure en s'intéressant à "la place occupée" par les carrés, c'est-à-dire à leur surface.*
Et justement ce « voir » rappelle un autre aspect important : le point de vue des élèves qui, issu de l'analyse a posteriori, devient crucial pour la réflexion sur les tâches de résolution, les savoirs mobilisés, les procédures, les obstacles et les erreurs relevés, qui apparaissent dans les fiches et jouent un rôle déterminant dans la construction de nouveaux problèmes.

Analyse a posteriori "condicio sine qua non"

Comme nous venons de le souligner (paragraphe précédent), c'est l'analyse a posteriori des travaux de nos groupes d'élèves qui permet de mettre en évidence, entre autres aspects, les difficultés et les obstacles.

De l'analyse a posteriori de *Le parquet* (23-I-2015) à un nouveau problème *Le dallage de Fabio* (25-I-2017)

LE PARQUET (Cat. 7-10)
Voici l'image du parquet d'une pièce rectangulaire fait de lames toutes identiques.



Le périmètre de la pièce est de 15 m. Les lames coûtent 30 euros par mètre carré.

Quel est le prix total des lames qu'il a fallu utiliser pour réaliser ce parquet ?

Expliquez votre réponse.

En résumé l'obstacle essentiel réside dans la prise en compte du rapport 1 : 3 entre la largeur et la longueur d'une lame, qui n'est pas formulé dans le texte mais qui doit se percevoir sur le dessin, par la nécessité de trouver une mesure commune de longueur : la largeur d'une lame. Quel est donc le rôle de la figure dans ce problème ?

Taux de réussite moyen 1,5 – Cat. 8 - 1,6

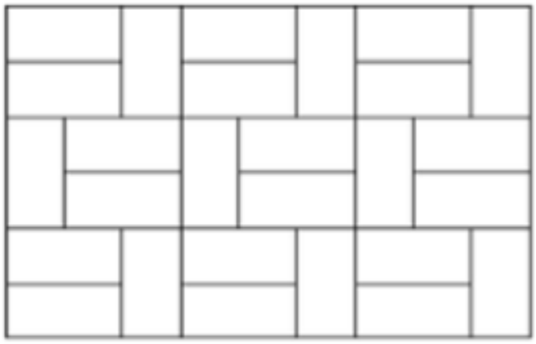
Les obstacles à la résolution peuvent donc dépendre d'une difficulté d'interprétation de la figure. À ce stade, nous travaillons à la construction d'une nouvelle version du problème avec une figure "plus simple" que la précédente et où le rapport est de 2:1, avec un impact visuel simplifié.

Les « lames » sont remplacées par des « dalles ».

Le dallage de Fabio (RMT 25 I.17, cat. 8-10)

Taux de réussite moyen 2,5 – Cat. 8 - 2,5

LE DALLAGE DE FABIO (Cat. 7-10)
Voici le dessin du dallage de la chambre de Fabio composé de dalles rectangulaires toutes égales.



Le périmètre de la chambre est de 15 m. Le prix des dalles est de 30 euros au m^2.

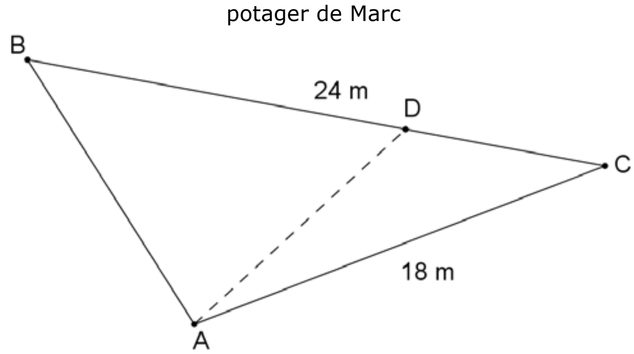
Combien Fabio a-t-il dépensé pour acheter les dalles de sa chambre?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Le taux de réussite moyen passe donc de 1,6 à 2,5 pour la catégorie 8 de la première version (*Le parquet*) à la deuxième version (*Le dallage de Fabio*). Cette amélioration significative est-elle due au passage du rapport 1 :3 au rapport 1 : 2 ?

Au secours, où sont les données du problème ?
De l'analyse a posteriori d'un problème à ses exploitations didactiques possibles

LE PROBLEME DU POTAGER (26.II.12.) (Cat. 6, 7, 8)
Marc a hérité d'une petite parcelle de terrain de forme triangulaire, avec un côté de 24 mètres et un autre de 18 mètres. Il veut réaliser un potager.
Marc veut planter des pommes de terre et des haricots verts en divisant son terrain en deux parties. L'aire de la partie réservée aux pommes de terre doit être le double de l'aire de la partie réservée aux haricots verts.
Pour séparer ses deux cultures, Marc plante un pieu en A (voir la figure) et un autre pieu en un point D sur le côté [BC]. Il les joint par une ficelle.
Voici sa première tentative, mais il n'est pas satisfait : l'aire de l'un des deux triangles n'est pas le double de celle de l'autre.



À quelle distance de C Marc pourrait-il planter le pieu D ?
Expliquez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

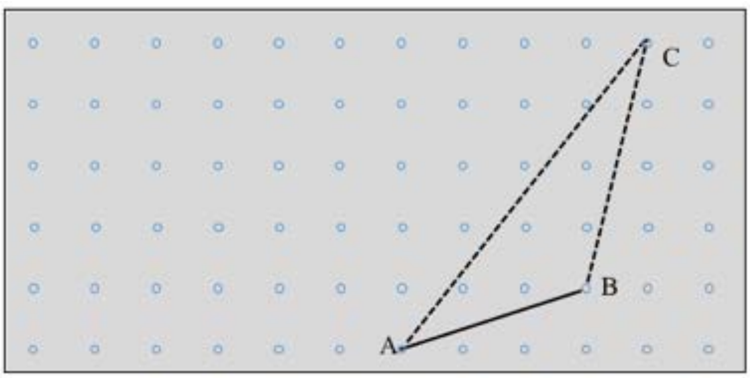
Le problème du potager, mal réussi dans le contexte de l'épreuve du RMT, revêt un intérêt particulier pour une activité de classe. Son énoncé inclut des aspects de la géométrie qui sont intéressants d'un point de vue pédagogique.

L'énoncé est un concentré d'aspects intéressants sur les propriétés des triangles. Cela peut ouvrir la voie à une discussion constructive sur l'indétermination d'un triangle où les mesures de seulement deux des trois côtés sont connues. Et cette indétermination induit aussi celle de l'aire du triangle. Un autre aspect important est celui lié à la hauteur qui peut être, comme dans ce cas, la même pour les deux triangles qui divisent le triangle donné et il n'est pas banal du point de vue didactique, de saisir le rôle de la hauteur d'un triangle obtusangle.
Il faut revenir à l'analyse de la formule « ab/2 » et aller au-delà de son application algorithmique : « je prends la base et la hauteur qu'on me donne (ou je les mesure) je les multiplie puis je divise par 2 ».
Bien souvent, l'enseignement se limite à faire apprendre cette application mécanique de la formule, sans y consacrer les réflexions nécessaires à sa maîtrise.
Il faut aller rechercher ces lacunes dans le passé des élèves de catégories 6 à 8, dans plusieurs domaines :
- Au moment où a été introduite l'aire du rectangle à partir des longueurs de ses côtés (en nombres entiers) on n'a peut-être pas fait remarquer que la multiplication évoquée n'est pas seulement celle des nombres de carrés, mais aussi celle de deux nombres non naturels et, plus encore une opération où deux mesures de longueurs aboutissent à une mesure d'une autre grandeur : l'aire. On a peut-être aussi négligé de faire constater alors que si l'on double ou triple ... la longueur du rectangle, l'aire double ou triple ... également ; que c'est la même chose pour la largeur, mais que si on double ou triple ... la longueur et la largeur, l'aire ne double ou ne triple .. pas !
- Au moment d'aborder l'aire du parallélogramme, on n'a peut-être pas fait remarquer que la formule est la même que celle du rectangle.
- Au moment d'aborder l'aire du triangle, on n'a peut-être pas fait remarquer le lien avec la formule de l'aire du parallélogramme ou, tout simplement, que chaque triangle est un demi-parallélogramme et que sa « hauteur » est aussi celle de ce parallélogramme.
- Lors des premières constructions du concept de proportionnalité, on n'a peut-être pas envisagé les cas de « proportionnalité multiples » c'est-à-dire d'une grandeur dépendant de plusieurs autres par une relation multiplicative.
Dans le cas de l'aire du triangle il y a proportionnalité entre les mesures de la base et de l'aire, comme il y a aussi proportionnalité entre les meures de la hauteur et de l'aire. On retrouve le cas du rectangle, mais avec des nombres réels (parce que le modèle des carrée entiers ne fonctionne plus) et avec la division par 2 qui vient se greffer sur le produit, (division loin d'être perçue comme une multiplication par 0,5 ou 1/2 et qui paraît d'une nature différente de la multiplication des deux mesures).
Mais, même si toutes ces remarques ont été faites aux moments opportuns, il n'est pas inutile d'y revenir dans une discussion commune sur l'aire du triangle en insistant sur la double proportionnalité - aire et longueur de la base ; aire et mesure de la hauteur-, la nature des grandeurs en jeu et le passage des longueurs aux aires, l'associativité de la multiplication des trois facteurs : les deux mesures et le 1/2, ...
En classe, le problème pourrait être complété par une autre question, telle que : Si le plus grand terrain est vendu à 10 000 euros, à combien doit être vendu l'autre, au même prix au mètre carré ?
Cette question inciterait les élèves à travailler sur les aires et à ne pas utiliser uniquement le rapport au sein de la base.

Et où dois-je mettre la hauteur ?

DES TRIANGLES SUR UNE PLANCHE A CLOUS ((27.I.18, Cat. 8, 9, 10) **Gazette N.10)**

Mathias a tendu un élastique entre les trois clous A, B, C de sa planche à clous pour former le triangle de la figure suivante :



Il maintient l'élastique sur les clous A et B et le soulève du clou C pour le fixer sur un autre clou, en cherchant à obtenir un nouveau triangle, de même aire que le triangle ABC.
Mathias se demande quels peuvent être les clous, autres que C, sur lesquels il pourrait fixer l'élastique pour obtenir d'autres triangles de même aire que le triangle ABC, dont A et B sont toujours deux des sommets.
Marquez tous ces clous sur la planche.
Expliquez comment vous les avez trouvés.

À la lumière de l'analyse a posteriori réalisée par les membres du groupe, Rosanna Sanna et Maria Agostina Satta, de la section de Sassari, ont proposé diverses activités en classe à partir du problème en question (voir aussi la description de leur « poster », affiché lors de la rencontre d'Alghero), pour ensuite en tirer quelques indications didactiques.
Ce problème, comme d'autres du RMT, a clairement mis en évidence les difficultés rencontrées par les élèves concernant les hauteurs des figures géométriques dont les côtés ne sont ni horizontaux et ni verticaux (souvent peu présentes dans les manuels scolaires, voire pas du tout) ou en présence de triangles possédant un angle obtus, ou encore face à la définition de la hauteur comme étant « une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au **côté** opposé à ce sommet ».
À partir de ces constats résultant de l'analyse a posteriori de ce problème, il pourrait être utile de :

1. Privilégier la définition de la hauteur d'un triangle en tant que « distance entre un côté, choisi comme base, et son sommet opposé ».
2. Différencier « hauteur en tant que segment » ou « droite » et « hauteur en tant que mesure ».
3. Combattre l'idée fausse selon laquelle la hauteur est liée à la verticalité.
4. Présenter des figures géométriques dans une orientation différente de l'horizontale et de la verticale (B. Brogi, 2019).
5. Combattre l'idée fausse selon laquelle le « pied » de la hauteur est toujours au milieu de la base.
6. Identifier les hauteurs sur les figures où le pied de hauteur est sur la droite à laquelle la base appartient.
7. Développer le concept de lieu géométrique de l'extrémité du segment de hauteur (de mesure constante) lorsqu'il se déplace par translation dans la direction de sa base. Cela permettra d'acquérir que les triangles qui ont la même base et la même hauteur ont la même aire.
8. Proposer des problèmes dans lesquels la hauteur est à déterminer, par exemple tirés de la banque de problèmes de l'ARMT.
9. Concevoir des parcours d'apprentissage en utilisant des problèmes tirés de la banque de l'ARMT, en limitant l'utilisation d'exercices répétitifs pour calculer les surfaces dans les manuels.

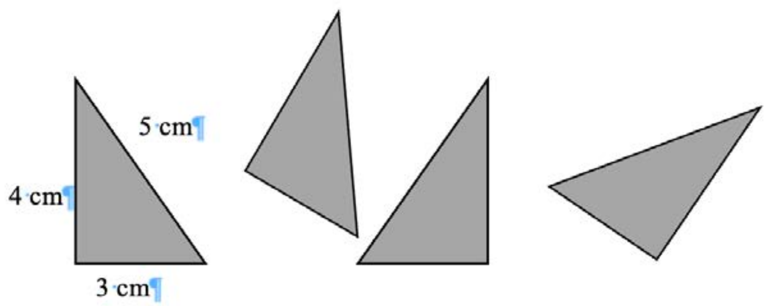
Deux versions d'un problème de géométrie réunissent les deux sous-groupes !

ASSEMBLAGES DE TRIANGLES (I) (28.I.07. Cat. 5-6)
ASSEMBLAGES DE TRIANGLES (II) 28.I.13. Cat. 7-8)

Nous rapportons ici la version (I). La version (II) implique la présence de six triangles au lieu de quatre.

Version (I)

André a découpé quatre triangles rectangles égaux. Leurs côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 5 cm.



En assemblant ses quatre triangles André forme des figures. Il veut que :

- **les triangles ne se superposent pas ;**
- **les triangles se touchent par des côtés de même longueur ;**
- **aucune figure n'ait un trou.**

Voici quelques-uns des essais d'André :

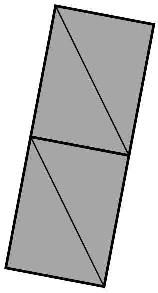


Fig. 1

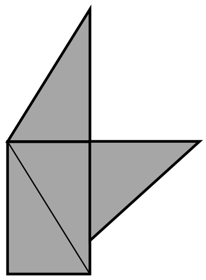


Fig. 2

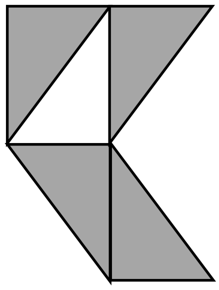


Fig. 3

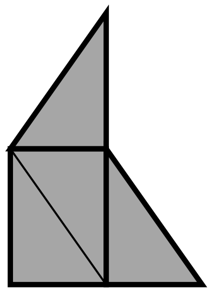


Fig. 4

Les figures 1 et 4 sont correctes, la figure 2 n'est pas correcte car il y a deux triangles qui se touchent par deux côtés qui n'ont pas la même longueur, la figure 3 n'est pas correcte parce qu'elle a un trou.

En assemblant ses quatre triangles en respectant les règles qu'il s'est fixées, André veut former une figure qui a le plus grand périmètre possible.
Trouvez comment cette figure peut être faite et dessinez-la.
Écrivez la mesure de son périmètre et les calculs que vous avez faits.

D'après l'article de F. Jaquet avec la collaboration des membres des deux semi-groupes de géométrie plane (Gazette N. 11) :

« Tous ceux qui ont analysé a posteriori les copies rendues par les élèves, en particulier les membres du groupe Géométrie plane (dont les deux composantes sont GP « petits » - cat. de 3 à 5 – et GP « grands » cat. de 6 à 10) , ont trouvé que ce problème mérite en effet d'être exploité dans la pratique didactique et s'inscrit ainsi dans une des finalités du RMT : *améliorer l'apprentissage, pour les élèves et la formation des maîtres*.
Il s'agit d'une situation de construction de figures, très riche, qui peut être proposée à des classes de catégories 5 à 8, qui permet des découvertes surprenantes dans un contexte simple, qui offre de nombreuses possibilités de donner (ou redonner) du sens à certaines notions. L'intérêt pour cette situation est confirmé par plusieurs expérimentations du problème où les premières observations de l'analyse a posteriori ont été utiles pour sa reprise en classe.
Par conséquent, l'analyse a posteriori qui constitue le cœur de cette étude est enrichie des premières exploitations en classe et chacun de ses chapitres est accompagné de réflexions et questions sur ce qu'on pourrait en tirer s'il passait du statut de « problème de rallye » au statut de « problème à insérer dans un parcours didactique ».

Depuis la fiche de ce problème, sur la Banque de problèmes

Exploitation didactique
On arrive ici à la phase la plus délicate et complexe d'un problème RMT, lorsqu'il devient le point de départ d'une activité en classe. On quitte l'analyse a posteriori pour entrer dans une réflexion a priori sur une pratique future, mais déjà éclairée par toutes les données recueillies précédemment et par quatre expérimentations.
La balle est alors dans le camp de l'enseignant.
- Il choisit le problème selon les besoins de ses élèves.
- Il détermine les modalités de la résolution : matériel à disposition, formation des groupes, durée, ... (la tâche étant entièrement dévolue aux élèves).
- Il organise la (les) mise(s) en commun où la parole est aux élèves et où l'enseignant intervient progressivement pour orienter les débats sur les notions qu'il juge opportunes.
- Il dirige la (les) phase (s) d'institutionnalisation des savoirs apparus lors des débats.
- Il conçoit un « parcours » didactique pour appliquer, consolider, approfondir ... les savoirs qu'il juge importants dans le contexte du problème devenu familier aux élèves.

Ce scénario est évidemment celui qui découle des options didactiques du RMT : ce sont les élèves qui construisent leurs connaissances, en coopération, alors que l'enseignant a la tâche de stimuler et orienter les débats vers les savoirs. Tâche beaucoup plus délicate que celle de « montrer », « d'expliquer », « d'aider », « corriger », « juger », c'est-à-dire « d'enseigner », selon sa définition « transmettre un savoir ».

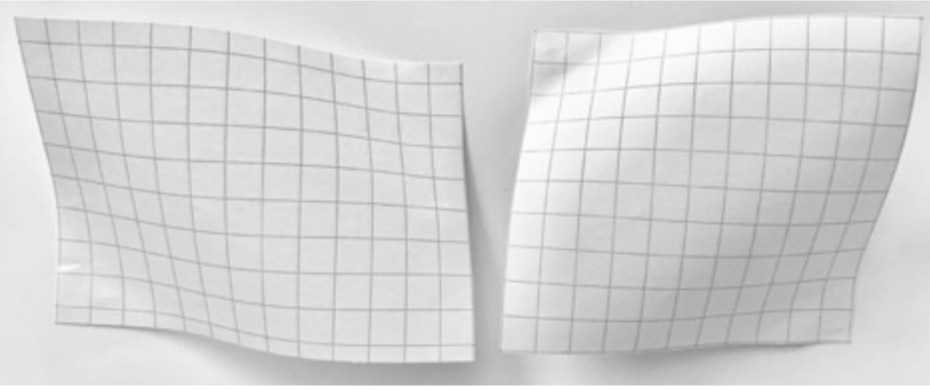
Les comptes rendus des membres du Groupe géométrie qui ont proposé le problème à leurs élèves montrent que le problème Assemblage de triangles, proposé en classe dans une conception socio-constructiviste, peut s'insérer parfaitement dans un parcours d'apprentissage.

L'aire toujours protagoniste

Problèmes pour les petits et les grands avec des propositions de parcours didactiques

L'analyse a posteriori des Rectangles de papier quadrillé (I) (29.I.04, Cat. 3, 4) et des Rectangles de papier quadrillé (II) (29.I.08, Cat. 5, 6), a proposé de multiples suggestions pour l'utilisation de ce problème (dans ses deux versions) en classe afin de revoir et d'approfondir toutes les phases de la construction du concept d'aire.

RECTANGLES DE PAPIER QUADRILLÉ (Cat. 3, 4)
Enrico et Giulia ont dessiné puis découpé deux rectangles dans le même rouleau de papier quadrillé. Voici leurs rectangles.

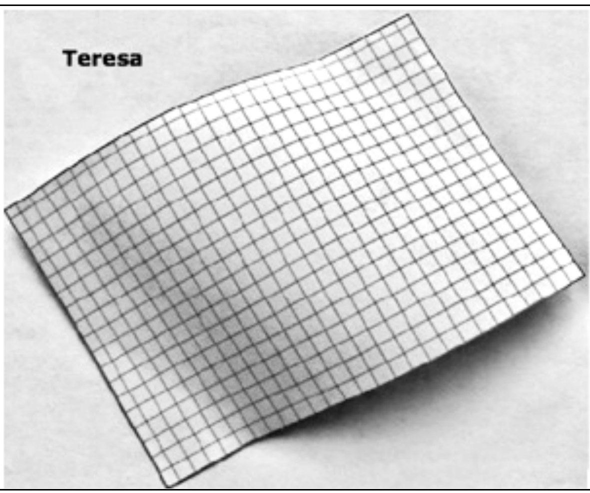


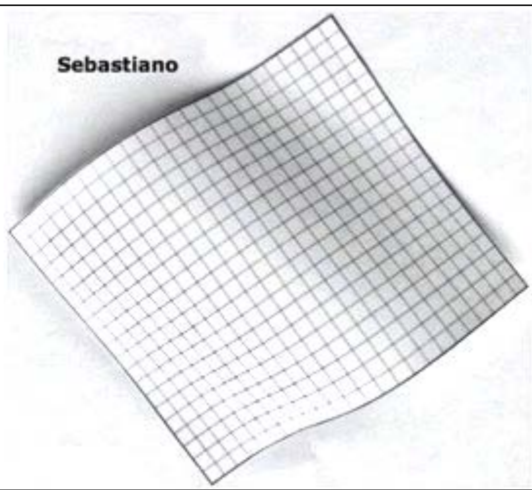
- *rettangolo di Enrico* *rettangolo di Giulia*

Giulia a-t-elle utilisé plus de papier pour son rectangle, en a-t-elle utilisé moins ou en a-t-elle utilisé autant qu'Enrico ?
Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

RECTANGLES DE PAPIER QUADRILLÉ (II) (Cat. 5, 6)
Thérèse et Sébastien ont dessiné puis découpé deux rectangles dans le même rouleau de papier quadrillé.

- Celui-ci est le rectangle de Thérèse Et ceci est le rectangle de Sébastien





Thérèse a-t-elle utilisé plus de papier pour son rectangle, en a-t-elle utilisé moins ou en a-t-elle utilisé autant que Sébastien ?
Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

L'objectif du problème, dans ses deux versions, était double : proposer le calcul de l'aire d'un rectangle à carrés non entiers pour placer les élèves dans une situation non conventionnelle avec, en plus, l'obstacle de mesurer les côtés à la règle graduée. L'objectif n'a pas été atteint car un prérequis n'était pas satisfait, en effet les documents des deux versions mettaient en évidence une confusion entre carrés non entiers et carrés entiers.
Sans observer la différence des "unités", le problème serait moins intéressant et pour conserver l'aspect d'approximation, comme l'indiquent également les observations des correcteurs et des sections, on a imaginé un énoncé qui encourageait les élèves à entrer dans le conflit entre les entiers et non entier. Cette affirmation a ensuite été utilisée dans l'expérimentation menée par Angela Mecacci dans des classes de catégorie 4 (voir annexe I).

Concernant le 29ème RMT, le "petit" groupe s'est engagé dans l'analyse a posteriori du problème ***Feuilles de papier*** (cat. 4, 5, 6 essai II) et pour le 30ème RMT ***Puzzle de deux pièces*** (cat. 3, 4, épreuve JE).

Idée d'un parcours pour les "petits"

À cet égard, nous avons imaginé un parcours pédagogique à travers des problèmes RMT visant à construire la notion d'aire mais qui mettrait en évidence le conflit susmentionné en introduisant des fractions de l'unité de mesure (parties d'un carré), comme par exemple. (RMT 2005 (ral. 13.I.02 ; cat. 3-4); Feuilles mortes (ral. 18.I.05 ; cat. 3-5); Le coeur de Martine (ral. 22.I.09 ; cat. 5-6), pour ensuite amener les élèves à aborder la notion d'approximation.
Le début de ce parcours est bien relaté dans l'Annexe I, dans laquelle Angela Mecacci illustre en détail une vaste activité expérimentale avec les deux versions du problème "Rectangles de papier quadrillé" qu'elle a proposé à deux classes de quatrième année (version I) et à deux classes de cinquième année (version II), dont il n'est pas titulaire.
Elle a ensuite proposé la version (I) dans ses deux classes de CE2 et, à la suite du problème « Biscuits », pour arriver à l'importance de se concentrer sur le conflit aire-périmètre.

Proposition d'un parcours pour les « grands », mais aussi, dans certains cas, pour les « petits »

Dans un article de la Gazette N. 14, nous présentons ce que nous considérons comme des suggestions de parcours didactique en matière de géométrie plane, à partir de problèmes RMT largement analysés a posteriori dans un grand nombre d'articles et, dans certains cas, également testés dans « nos » classes.
La finalité de ces « propositions de parcours didactiques » s'inscrit dans une conception fondée sur l'apprentissage et non plus sur l'enseignement, où ce dernier s'entend comme une « simple transmission des connaissances » au sein de laquelle l'élève acquiert des savoirs, des notions, des règles, etc. en écoutant les cours, en lisant ou en résolvant les exercices progressifs qui lui sont administrés et où il sait que les notions à acquérir lui ont été données et expliquées.
Pour la conception basée sur l'apprentissage, au contraire, il est demandé à l'élève d'être actif dès le début du processus par sa participation à la construction de connaissances nouvelles pour elle/lui.
Pour le choix de ces problèmes, on a fait référence à la fois aux innombrables analyses a posteriori des travaux d'étudiants qui ont conduit, au fil du temps, à la publication d'articles dans la Gazette de Transalpie, mais aussi aux problèmes des cartes bancaires avec leur contenu de procédures. les obstacles et les erreurs détectés, ainsi que les consignes pédagogiques.
Concernant certaines problématiques jugées intéressantes, mais manquant d'analyses a posteriori, il a été décidé de mettre en œuvre quelques expérimentations dans les classes qui permettront également de compléter les fiches correspondantes.

Dans ces propositions de parcours didactiques, trois thématiques entrent en jeu : «aire et périmètre », « distances et hauteurs » et « mesures et approximation » et ils concernent une quinzaine de problèmes RMT !
Pour davantage de précisions, veuillez-vous référer à l'article *intitulé Parcours d'enseignement de la géométrie plane avec des problèmes RMT* (pp. 75-124).
Voir aussi « Allegato II » dans la version italienne précédente de cette article « La geometria piana nell'ARMT ».

Annexe I

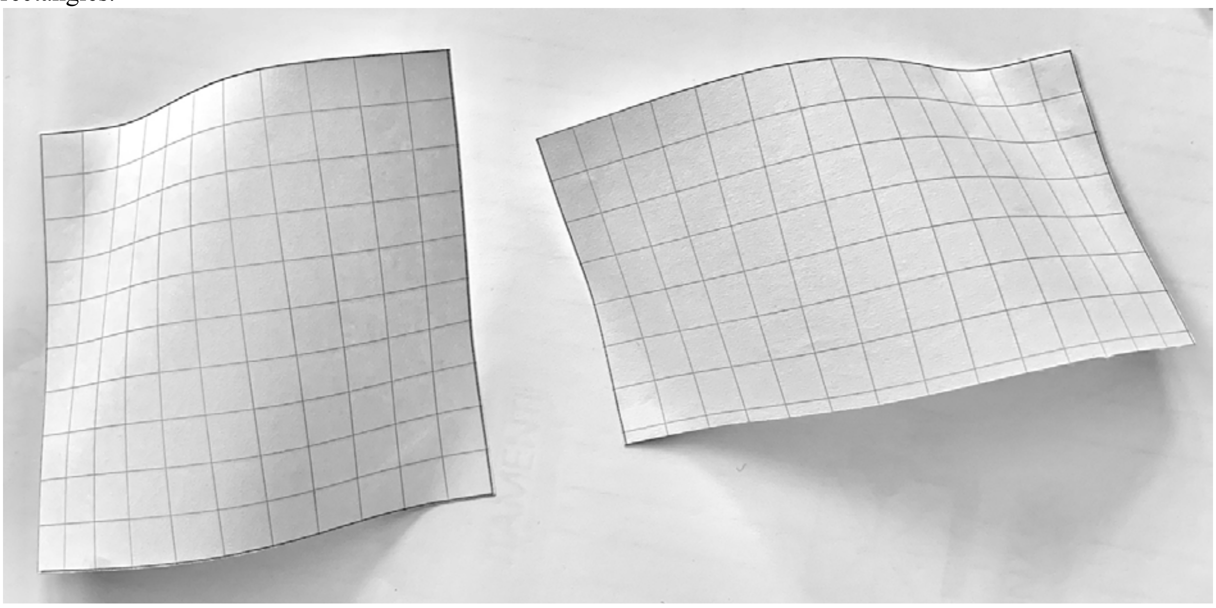
ANALYSE ET CONSIDÉRATIONS ISSUES DE L'EXPÉRIMENTATION DES PROBLÈMES "RECTANGLES DE PAPIER QUADRILLÉ" ET "BISCUITS"

Angela Mecacci

RECTANGLES DE PAPIER QUADRILLÉ

J'ai proposé ce problème à deux classes de quatrième et deux classes de cinquième de l'école primaire (version I pour la catégorie 4 et version II pour la catégorie 5). Les enfants étaient organisés en petits groupes de trois ou quatre élèves, formés avec une certaine liberté de leur part, mais avec la médiation du professeur principal (qui n'est pas moi).
Les 50 minutes habituelles ont été accordées pour la résolution, sans toutefois qu'il soit demandé si quelques minutes supplémentaires étaient nécessaires.

Rectangles sur papier quadrillé I cat. 3-4
Enrico et Giulia ont dessiné puis découpé deux rectangles dans le même rouleau de papier quadrillé. Voici leurs rectangles.



rectangle de Enrico *rectangle de Giulia*

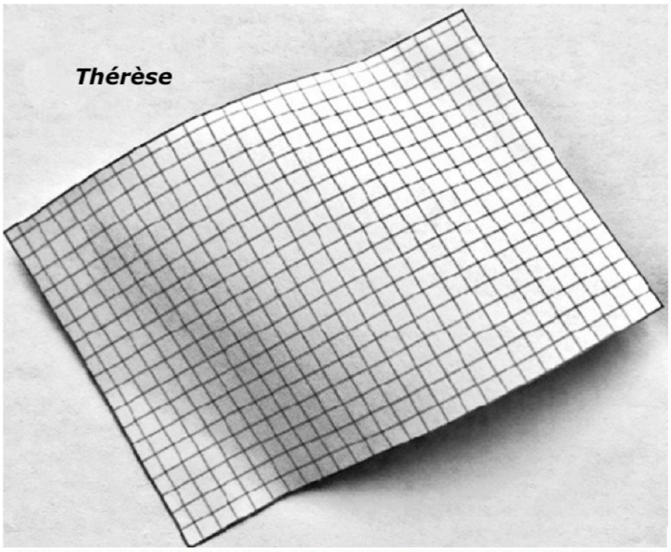
Giulia a-t-elle utilisé plus de papier pour son rectangle, en a-t-elle utilisé moins ou en a-t-elle utilisé autant qu'Enrico ?

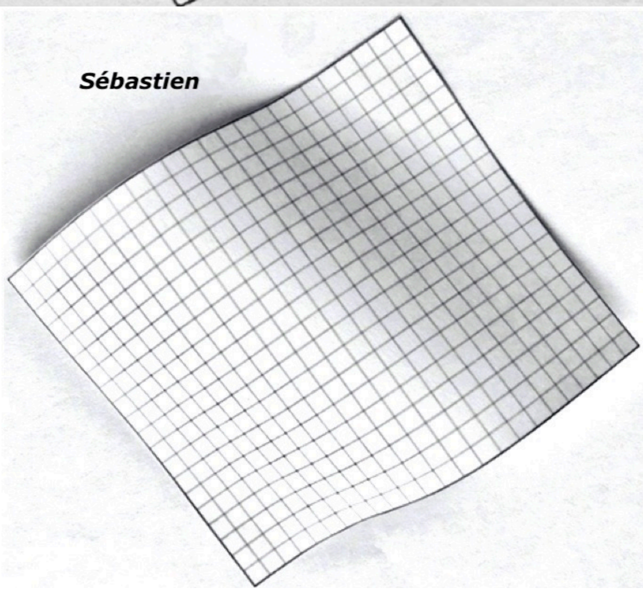
Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

De nombreux groupes ont donné la bonne réponse.
Voici les réponses des trois groupes (sur 9) qui n'ont pas donné la bonne réponse :
1) *Le deuxième rectangle est un peu plus grand car dans le premier le compte est 11+11+10+10 = 42, dans le second c'est 14+14+7+7= 42 mais avec quelques pièces supplémentaires*. (Le conflit habituel entre surface et périmètre dans la mesure d'un chiffre est évident.)
2) *Les rectangles sont à peu près les mêmes car l'un est plus haut mais plus court et l'autre est plus bas mais plus long.*
3) *On ne peut pas vraiment dire qui est le plus grand car le papier est légèrement plié, mais à notre avis, ce sont les mêmes*.
Dans toutes les copies avec la bonne réponse, les explications sont presque toujours : 110 carrés pour le premier et 98 pour le second mais seulement la moitié des groupes mentionnent les carrés non entiers, avec un argument linguistique ou avec un calcul supplémentaire.

Lors de la discussion avec les élèves que j'ai organisée le lendemain, j'ai demandé pourquoi ces petits morceaux de carrés présents dans le deuxième rectangle ne figuraient pas dans leurs textes et il s'est révélé qu'ils en avaient discuté en groupe, mais que c'étaient des morceaux trop petits qui n'auraient pas changé la réponse.
On retrouve le problème lié à la démonstration et à l'argumentation des réponses ; selon de nombreux jeunes élèves, seule la bonne réponse compte.
Le commentaire d'un élève me paraît intéressant : *Alors oui, ces 14 petits morceaux ne pourront jamais former 12 carrés ; si vous voulez rendre le problème plus difficile, vous devriez également placer de petits morceaux de l'autre côté du même rectangle.* C'est précisément l'idée qui a poussé le Groupe de géométrie plane à proposer la version II pour les catégories 5 et 6.
Un aspect qui m'a frappé et que je souhaite partager est que de nombreuses copies de quatrième année et deux de cinquième année présentent le décompte des carrés avec les nombres écrits sur chacun (c'est-à-dire le décompte des carrés simples sur lesquels les nombres 1, 2, 3, 4... peuvent être lus) ou l'addition répétée 11+11+11+11... (également prévue par l'analyse a priori).
Je transforme cette observation en question. Sommes-nous convaincus que nos élèves de 10 à11 ans ont compris la multiplication et son potentiel ? J'en doute beaucoup.

Voici les rectangles présentés dans le problème proposé en cat. 5 et 6.





Les 8 groupes d'élèves de cinquième à qui j'ai proposé le problème ont tous compris la nécessité de compter les carrés de la surface et le conflit aire-périmètre n'est pas apparu.

- Quelques erreurs de calcul dans trois copies : certains élèves ont dit que le rectangle de Sébastien n'était pas très clair sur la photocopie et en fait, un groupe a fait une erreur dans ce calcul (24 × 19).

- Un seul groupe a compté les carrés non entiers comme s'il étaient entiers.
- Presque tous les groupes ont dit que pour compter les carrés non entiers, ils procédaient en « regroupant deux morceaux pour faire un tout » : deux groupes ont expliqué que pour faire un carré entier « il fallait un des petits morceaux sur la longueur du rectangle et un petit morceau sur la largeur » (sur le dessin on pouvait voir la flèche qui les joignait). Autrement dit, ils ont remarqué que même si les parties n'étaient pas de la même taille ils les ont considérées comme 1/3 + 2/3 = 1.

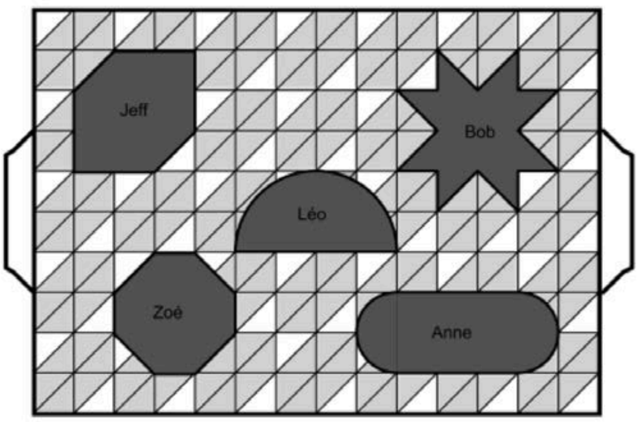
EXPLOITATION DIDACTIQUE

Je conclus cette analyse en racontant comment j'ai utilisé le problème des rectangles (version 1) dans mes deux classes de 3e année, étant donné que lors de la dernière rencontre nous avons souligné l'importance d'une application pédagogique des problèmes du Rallye. Je ne sais pas si c'est intéressant ou pas, mais j'éprouve toujours du plaisir à constater que nos problèmes stimulent notre travail quotidien.
Je l'ai proposé pour introduire les fractions. Nous avons lu le texte, analysé le dessin des deux rectangles et j'ai laissé mes élèves aborder le problème des carrés non entiers. Au début, dans les deux classes, il y a eu beaucoup de discussions sur la nécessité de compter « l'intérieur » ou le « pourtour » des rectangles : j'ai laissé la liberté de comparaison, jusqu'à ce qu'ils décident de compter les carrés de la surface (certains élèves, cependant, n'étaient pas convaincus, donc je sais que je dois encore travailler sur la différence entre aire et périmètre).
Déjà dans le dessin de l'énoncé, il était clair que ces parties de carrés étaient inférieures à la moitié, mais j'ai quand même proposé de redessiner les deux rectangles sur une feuille de papier quadrillée de 1 : cela m'a aussi permis de consolider les capacités de calcul de mes élèves.

Chacun a reproduit individuellement son propre rectangle et il est apparu que certains élèves ajoutaient la moitié d'un carré au deuxième rectangle, tandis que d'autres ajoutaient un morceau plus petit. J'en ai profité pour observer la différence avec eux et les laisser discuter de leurs choix. Alors que les élèves qui avaient dessiné des moitiés de carrés n'avaient pas trop réfléchi à la taille des pièces, les autres avaient remarqué que ces pièces étaient plus petites que la moitié.
Dora m'a dit : *Tu vois, maîtresse, pour faire un tableau complet il faut 3 petits morceaux et non 2. Cela semble peu, mais il y a une différence*. Claudio a ajouté : *Peut-être que nous en aurons même besoin de 4*.
Ainsi, j'ai proposé à quatre de mes élèves de dessiner un carré plus grand (10 × 10 cm) en essayant de le plier en deux parties ou en trois ou quatre parties égales et j'ai commencé à parler de moitié, tiers et quart, en observant et en comparant les fractions obtenues.

BISCUITS (cat. 4 -5 - 6) 14 RMT II

Voici les biscuits que le pâtissier a préparés pour cinq enfants et qu'il a placé très précisément sur un plateau.
Les biscuits sont tous de même épaisseur, mais certains enfants sont mécontents et disent que leur biscuit est plus petit que celui des autres.



Pensez-vous que tous les enfants auront la même quantité de biscuit à manger ?

Sinon, mettez les biscuits dans l'ordre, du plus petit au plus grand.

Expliquez votre réponse.

Suivant les instructions de Clara, j'ai proposé le problème "Biscuits" dans mes deux classes de 3e au mois de mai, alors que mes élèves avaient déjà abordé quelques problèmes de Rallye sur la mesure de surfaces sur quadrillages et après avoir travaillé de manière pratique sur les fractions. Bien sûr, j'étais consciente de la difficulté de la tâche, mais je voulais voir comment les enfants allaient gérer la nouveauté des formes courbes.
Les 49 élèves ont été répartis en 12 groupes (6 dans une classe et 6 dans une autre), avec une heure à disposition.

<u>Analyse issue de l'observation lors de la résolution</u>

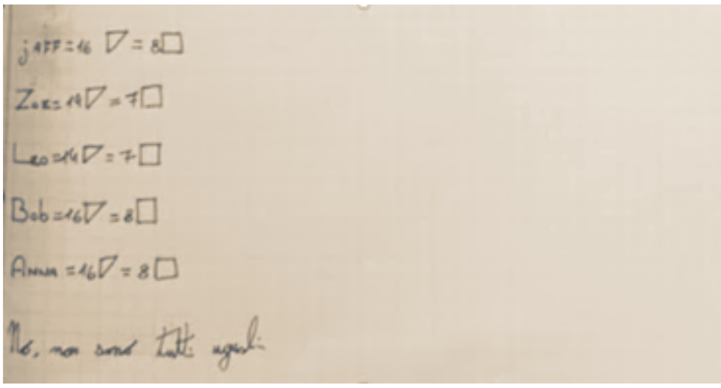
La forme qui a d'abord attiré l'attention des groupes est « l'étoile » de Bob, à laquelle ils ont attribué une grande étendue en raison de ses « pointes » : lorsqu'ils ont commencé à chercher une unité de mesure possible pour déterminer sa grandeur, presque tous les groupes ont pris en compte la mesure de la bordure avec des segments « côtés de carrés » et le comptage des carrés/triangles internes. Parfois, la discussion sur l'unité de mesure appropriée a duré quelques minutes, d'autres fois plus de 20 minutes et, malgré cela, deux groupes ont quand même choisi de comparer les périmètres des figures.
Dans le comptage les parties courbes, les élèves ne se sont pas souciés de la longueur réelle de la ligne, mais ont pris, par exemple, pour le biscuit de Léo, 6 côtés de carrés comme mesure de la demi-circonférence car elle "touche" 6 carrés de la grille.
Pour le périmètre j'y reviendrai à propos d'une des copies car, comme toujours, c'est en observant les erreurs des élèves que l'on peut comprendre comment les enfants pensent et, par conséquent, les guider dans de nouveaux apprentissages.

<u>Analyse des copies</u>

Comme l'avait prévu l'analyse a priori, les formes qui ont conduit à des erreurs sont celles avec des lignes courbes. Il était particulièrement difficile pour chacun de comparer le biscuit de Léo (le demi-disque) avec celui octogonal de Zoé. En fait, dans plusieurs copies, il apparaît que Zoé a un biscuit plus petit que celui de Léo. Les enfants n'ont pas pu comparer ces pièces délimitées par des lignes courbes avec les petits carrés ou triangles de la grille et en déduire leur taille. Au lieu de cela, presque tout le monde a compris qu'Anna avait le plus gros biscuit, même s'il y avait quelques décomptes incorrects dans l'explication de la réponse.

Considérations sur la figure du biscuit d'Anna :

Le biscuit d'Anna mesure 8 carrés, comme ceux de Jeff et de Bob.



Les élèves ont expliqué qu'à leur avis, les parties de carrés sur les côtés latéraux du biscuit d'Anna valaient chacune un demi-carré, donc que les 6 carrés entiers et les 4 demi-carrés font 8 carrés entiers. Dans la même copie, il apparaît cependant que dans le biscuit de Léo on s'est efforcé de recomposer le carré entier avec deux morceaux (4 morceaux entiers en bas + 3 formés par les quatre morceaux en haut).

J'ai trouvé des remarques du même genre dans deux autres copies :

a) *Jeff = 16 demi carrés*
   Zoé = 14 demi carrés
   Bob = 14 demi carrés
   Léo = 14 demi carrés

Anna = 16 demi carrés
On ne pense pas qu'ils ont la même quantité de biscuit. Nous avons représenté les biscuits avec des demi-carrés et nous les avons compté puis nous avons écrit les noms et les numéros

b) Stratégie de comptage de deux biscuits avec lignes courbes par différence

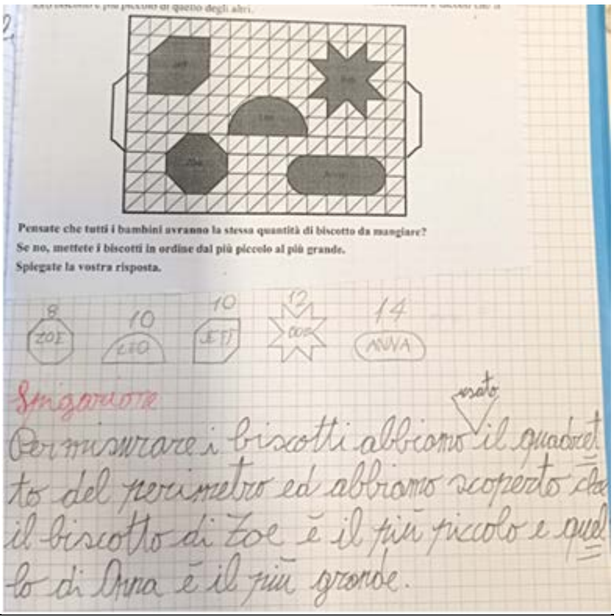
Réponse
Non, ils ne sont pas tous égaux, le premier est Léo qui a 6 carrés ,la deuxième est Zoé qui a 7 carrés les troisièmes sont Bob et Jeff qui ont 8 carrés enfin, c'est Anna qui a 9 carrés.
Explications
Nous avons trouvé les résultats ainsi: nous avons compté les carrés de Jeff, Bob et Zoé mais Léo et Anne n'avaient pas des carrés précis. Nous avons calcul combien il y avait de carrés sur le plateau nous avons retiré tous les carrés sauf ceux de Anna et nous avons découvert le résultat. Et nous avons fait la même choses avec Léo.
Ce groupe a recherché la surface des deux biscuits en comptant tous les carrés de la grille et en soustrayant tous ceux extérieurs aux deux biscuits, entiers ou non. Il en a trouvé 15 et en a attribué 6 à Léo et 9 à Anna.

Autre exemple : Erreur par excès de l'aire des biscuits de Léo et Anna :
Z - J – B – L – A = 7 – 8 – 8 – environ 9 – environ 12. Nous avons trouvé cette solution en redessinant les formes des biscuits et en comptant les carrés de la superficie. Puis nous avons fait un schéma en écrivant les initiales des enfants et en écrivant à côté les nombres des carrés de leur biscuit. Nous nous sommes rendu compte en comptant les carrés de Léo et Anna que la solution ne pouvait pas être précise parce certains étaient ronds Nous sommes ainsi arrivés à la conclusion que Zoé a 7 carrés, Jeff 8 carrés, Bob 8 carré, Léo environ 9 carrés et Anna environ 12.

Ici, la rondeur des pièces provoquait un comptage incorrect, également parce qu'en redessinantto les biscuits sur une feuille de papier, on perdait les repères de la grille.

Analyse du conflit aire – périmètre

Comme je l'ai déjà dit au début de mon analyse, tous les groupes ont été confrontés au doute sur ce qu'il fallait mesurer sur les biscuits : la bordure ou la surface interne ? Voici l'une des deux copies qui ont choisi le périmètre.

	*Pour mesurer les biscuits nous avons utilisé les carrés du périmètre et avons découvert que le biscuit de Zoé est le plus petit et que celui d'Anna est le plus grand.*

De l'observation des réponses et de la discussion en classe, de bonnes réflexions ont émergé sur les erreurs commises, mais l'exemple ci-dessus m'a inspiré pour l'activité suivante, abordant simultanément la notion d'aire et de périmètre d'une figure.

J'ai demandé à chaque élève de construire deux biscuits de forme rectangulaire mais de tailles différentes en les dessinant sur du papier quadrillé de 1 cm. Par exemple, Mattia a dessiné un rectangle de 12 × 3 et un rectangle de 7 × 6. À ce stade, je leur ai demandé quel biscuit ils préféreraient manger s'ils avaient faim et une belle activité de mesure a commencé. Dans certains cas, les enfants m'ont demandé s'ils pouvaient découper les biscuits pour qu'ils se chevauchent et être sûrs de la surface. Nous avons calculé à la fois des périmètres et des surfaces et en avons déduit des aspects intéressants sur la relation entre ces deux dimensions.

Par la suite, j'ai construit un biscuit rectangle 6 × 4 et j'ai demandé à mes élèves, comme devoir à domicile, de dessiner tous les biscuits possibles aussi grands que celui-là. Le lendemain matin a commencé par une belle activité sur toutes les figures de biscuit trouvées. Certains, peut-être sur suggestion de leurs parents, ont également proposé des biscuits triangulaires... une merveilleuse opportunité qui ouvre les portes à de nouveaux apprentissages.

Deux semaines après cette expérience, j'ai proposé à nouveau le problème des Biscuits, mais avec le dessin du plateau agrandi, pour que la grille soit plus claire. Dans ce contexte, les enfants ont pu observer si ces petits morceaux ronds de biscuit étaient plus grands ou plus petits que le carré.

La prochaine étape qui m'attend l'année prochaine sera celle de mesurer le périmètre avec les segments « côté » et « diagonale » du carré ». Comme on peut le voir sur cette copie, dans certains cas, ils ont été considérés comme égaux (voir Zoé et Jeff) et dans d'autres, le côté était compté pour la moitié de la diagonale (voir Bob). Cela ne suscitait cependant aucun doute chez leurs camarades.

L'année prochaine, je proposerai l'activité que j'ai présentée lors de la séance de posters de la rencontre de Faenza[4] et nous verrons les fruits qu'elle portera.

[4] Voir les dernières pages de ce numéro 15 de la Gazette.

APPROFONDIMENTI / ÉTUDES

OLIMPIADI DI CALCOLO (I) / OLYMPIADES DE CALCUL (I)

Annie et Michel Henry, Mathias Front, Angela Rizza
e il Gruppo Funzioni e successioni/ **et le Groupe Fonctions et suites**[1]

Sunto / Résumé

In questo studio vogliamo analizzare più da vicino gli aspetti didattici del problema 31.I.10 Olimpiadi di calcolo (I), per il quale gli studenti possono lavorare utilizzando tre diverse procedure, come presentato nell'analisi a priori. Il problema propone un semplice algoritmo di calcolo da ripetere quattro volte. L'idea di funzione, che fa corrispondere, ad un numero dato, un valore calcolato è alla base dell'applicazione di questo algoritmo e la nozione di funzione può essere facilmente identificata lavorando in classe. In occasione dell'incontro ARMT di Sinalunga del 4 e 5 ottobre 2024, il gruppo di lavoro Funzioni e successioni ha lavorato sulla seguente analisi a posteriori.

Dans cette étude, nous souhaitons approfondir la réflexion didactique sur le problème 31.I.10 Olympiade de calcul (I), que les élèves peuvent traiter selon trois procédures différentes comme le présente l'analyse a priori. Le problème propose un algorithme de calcul simple à répéter quatre fois. L'idée de fonction, qui à un nombre donné fait correspondre une valeur calculée, est sous-jacente à l'application de cet algorithme et la notion de fonction s'en dégage aisément à la faveur d'un travail en classe. Le groupe de travail Fonctions et suites, lors de la rencontre de l'ARMT à Sinalunga les 4 et 5 octobre 2024, a travaillé sur l'analyse a posteriori que voici.

1. Elaborazione del problema / Élaboration du problème

Presentiamo qui il testo del problema e l'analisi del compito nella loro versione definitiva.
Nous présentons ici l'énoncé du problème et l'analyse de la tâche dans leur version définitive.

OLIMPIADI DI CALCOLO (I) (Cat. 6, 7)
Nella classe di Giacomo si allenano per le olimpiadi di calcolo.
Giacomo dice:
- sono partito da un numero, l'ho diviso per tre e ho aggiunto 5 al risultato ottenuto;
- poi, una seconda volta, ho diviso per tre l'ultimo risultato e ho aggiunto 5;
- poi, una terza volta, ho diviso per tre l'ultimo risultato e ho aggiunto 5;
- poi, una quarta volta, ho diviso per 3 l'ultimo risultato e ho aggiunto 5, per arrivare infine a 8.

Da quale numero è partito Giacomo per arrivare a 8?
Mostrate come avete trovato la risposta.

OLYMPIADES DE CALCUL (I) (Cat. 6, 7)
Les élèves de la classe de Gérard s'entraînent pour les olympiades de calcul.
Gérard dit :
- Je suis parti d'un nombre entier, je l'ai divisé par 3 puis j'ai ajouté 5 au résultat obtenu,
- puis, une deuxième fois, j'ai divisé par 3 le dernier résultat et j'ai ajouté 5,
- puis, une troisième fois, j'ai divisé le dernier résultat par 3 et j'ai ajouté 5,
- puis, une quatrième fois, j'ai divisé le dernier résultat par 3 et j'ai ajouté 5 pour arriver finalement à 8.

De quel nombre Gérard est-il parti pour arriver à 8 ?
Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALISI A PRIORI / ANALYSE A PRIORI

Compito matematico / Tâche mathématique
Trovare il numero iniziale di una serie di due operazioni "dividere per 3" poi "aggiungere 5", ripetute quattro volte di seguito in questo ordine, e che conducono al numero 8.

---

[1] Licia ANDRIANI, Emanuela COLOMBI, Gabriella DEIANA, Mathias FRONT, Annie HENRY, **Michel HENRY**, Mattia LAURINI, Lucia PILLERI, **Angela RIZZA** à Sinalunga et **Rosa IADEROSA** à Milano.

Trouver le nombre de départ d'une séquence de deux opérations « diviser par 3 » puis « ajouter 5 » répétée quatre fois de suite dans cet ordre et aboutissant au nombre 8.

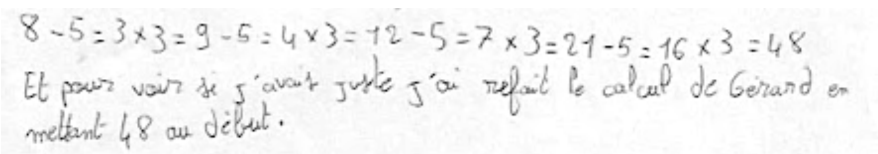
Analisi del compito / Analyse de la tâche

- Comprendere la sequenza cronologica delle operazioni "dividere per 3" poi "aggiungere 5" partendo da un numero iniziale ancora indeterminato, che vengono eseguite quattro volte, sempre a partire dall'ultimo risultato ottenuto, per arrivare a 8.
- Comprendre le découlement chronologique des deux opérations « diviser par 3 » puis « ajouter 5 » à partir d'un nombre de départ encore indéterminé, qui sont effectuées quatre fois, toujours à partir du dernier résultat obtenu, pour aboutir à 8.
- Una procedura, che indichiamo con A, è quella di tornare indietro nel tempo, tappa per tappa, dal numero finale 8 per ritornare al numero di partenza rispettando l'ordine inverso delle operazioni e rovesciandole: "sottrarre 5", inversa di "addizionare 5", diventa la prima operazione e "moltiplicare per 3", operazione inversa di "dividere per 3", diventa la seconda.
- Une procédure notée A est de remonter dans le temps, étape par étape, en partant de l'arrivée, 8, pour revenir au nombre de départ en respectant l'ordre rétrograde des opérations et en les inversant : « soustraire 5 » devient la première opération, inverse de « d'ajouter 5 » et « multiplier par 3 » devient la deuxième, inverse de « diviser par 3 ».
- Eseguire le nuove operazioni inverse nel nuovo ordine: $(8 - 5) = 3$; $3 \times 3 = 9$; quindi $9 - 5 = 4$; $4 \times 3 = 12$; quindi $12 - 5 = 7$; $7 \times 3 = 21$, quindi $21 - 5 = 16$; $16 \times 3 = 48$
- Effectuer les opérations inverses dans le nouvel ordre : $(8 - 5) = 3$; $3 \times 3 = 9$; puis $9 - 5 = 4$; $4 \times 3 = 12$; puis $12 - 5 = 7$; $7 \times 3 = 21$, puis $21 - 5 = 16$; $16 \times 3 = 48$
- Un'altra procedura, che indichiamo con B, è quella per tentativi successivi iniziando dal numero di partenza seguendo le operazioni nell'ordine dato, partendo da un multiplo di 3 in modo che la prima divisione per 3 dia un numero naturale. Questa procedura può essere lunga e richiede d'aver compreso che, essendo 8 il numero d'arrivo, tutti i risultati intermedi sono dei numeri interi, inoltre necessita di un'attenta organizzazione perché occorre rinunciare al tentativo ogni volta che appare un numero che non è multiplo di 3 ottenuto dopo la seconda operazione "addizionare 5". Occorrono quindi almeno 16 tentativi per arrivare a 48.
- Une autre procédure notée B est celle des essais successifs à partir du nombre de départ en suivant les opérations dans l'ordre donné, en partant d'un multiple de 3 pour que la première division par 3 donne un nombre naturel. Cette procédure peut être longue : elle demande d'avoir compris que le nombre d'arrivée étant 8, tous les résultats intermédiaires sont des nombres entiers et nécessite une organisation réfléchie car il faut renoncer à l'essai chaque fois qu'apparaît un nombre qui n'est pas un multiple de 3 obtenu après la deuxième opération « ajouter 5 ». Il faut donc 16 essais au minimum en partant de multiples de 3 pour arriver à 48.
- Un terzo procedura, C, consiste nel limitarsi ad una semplice verifica: partendo dal numero 48, eventualmente ottenuto per tentativi, si arriva al numero 8 in 4 operazioni.
- Une troisième procédure, C, est de se limiter à une simple vérification : en partant du nombre 48, éventuellement obtenu par des essais, on arrive au nombre 8 en 4 opérations.

Analisi delle elaborati / Analyses de copies

Ai livelli 6 e 7, la scrittura algebrica non è ancora ben padroneggiata. Infatti, come per altri problemi, si trovano delle sequenze di operazioni in riga (livello 6):

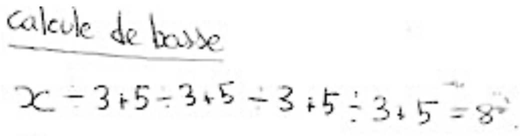
Aux niveaux 6 et 7, l'écriture algébrique n'est pas encore bien maîtrisée. Ainsi, comme pour d'autres problèmes, on trouve ce type d'enchaînements d'opérations en ligne (niveau 6) :



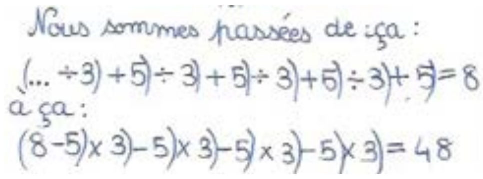
8 - 5 = 3 × 3 = 9 - 5 = 4 × 3 = 12 - 5 = 7 × 3 = 21 - 5 = 16 × 3 = 48
Et pour voir si j'avait juste j'ai refait le calcul de Gérard en mettant 48 au début.

(*E per vedere se avevo fatto giusto ho rifatto il calcolo di Giacomo mettendo 48 all'inizio*)

O/ou


calcule de basse
$x \div 3 + 5 \div 3 + 5 \div 3 + 5 \div 3 + 5 = 8$

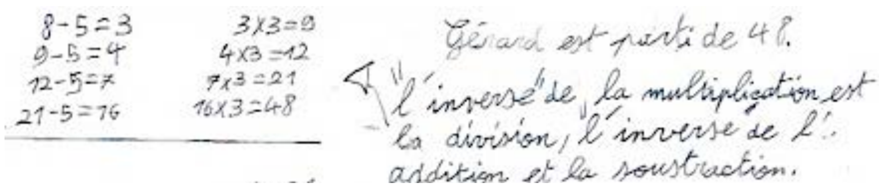
Allo stesso modo, l'uso delle parentesi è ancora maldestro (livello 7):
De même, on trouve une utilisation de parenthèses encore maladroite (niveau 7) :


Nous sommes passées de ça :
$(\ldots \div 3) + 5) \div 3) + 5) \div 3) + 5) \div 3) + 5) = 8$
à ça :
$(8 - 5) \times 3) - 5) \times 3) - 5) \times 3) - 5) \times 3) = 48$

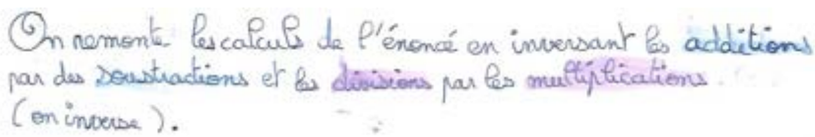
(*Noi siamo passati da questo… a questo…*)

Le due procedure A e B per la risoluzione del problema sono più o meno equamente distribuite. La singola verifica C è meno frequente.
Les deux procédures A et B de résolution du problème sont à peu près également réparties. La simple vérification C est moins fréquente.

Procedura A, calcoli a ritroso: 42 elaborati su 109 al livello 6 e 32 elaborati su 76 al livello 7 in Franche-Comté
Procédure A, calculs à l'envers : 42 copies sur 109 au niveau 6 et 32 copies sur 76 au niveau 7 en Franche-Comté
Livello 6 /Niveau 6

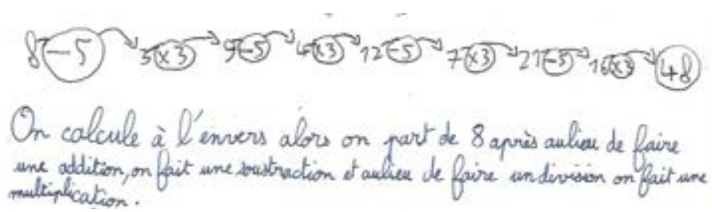

$8-5=3$ $3\times3=9$
$9-5=4$ $4\times3=12$
$12-5=7$ $7\times3=21$
$21-5=16$ $16\times3=48$
Gérard est parti de 48. l'inverse de la multiplication est la division, l'inverse de l'addition et la soustraction.

(*Gérard è partito da 48. L'inversa della moltiplicazione è la divisione e l'inversa dell'addizione è la sottrazione*)
e/et


On remonte les calculs de l'énoncé en inversant les additions par des soustractions et les divisions par les multiplications (en inverse).

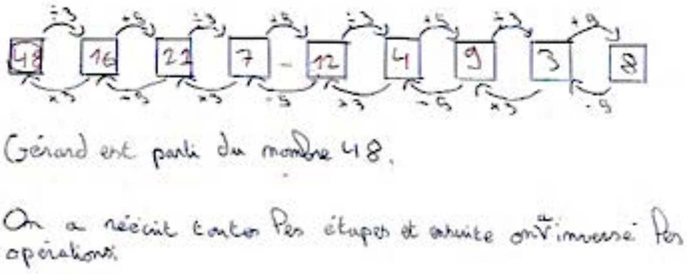
(*Si risale al calcolo dell'enunciato invertendo le addizioni con delle sottrazioni e le divisioni con le moltiplicazioni (all'inverso)*)

Livello 7 /Niveau 7


8 (−5) 3 (×3) 9 (−5) 4 (×3) 12 (−5) 7 (×3) 21 (−5) 16 (×3) 48
On calcule à l'envers alors on part de 8 après au lieu de faire une addition on fait une soustraction et au lieu de faire une division on fait une multiplication.

(*Si calcola all'inverso quindi si parte da 8 e dopo al posto di fare un'addizione si fa una sottrazione e al posto di fare una divisione si fa una moltiplicazione*)

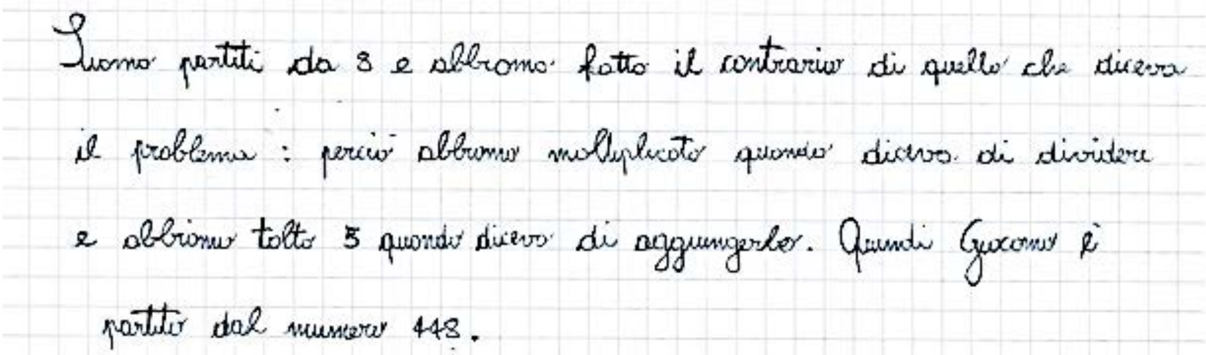
e/et



(Gérard è partito dal numero 48.
Abbiamo riscritto tutte le tappe e abbiamo invertito le operazioni)

In questo elaborato (livello 6) sono state fatte le corrette operazioni inverse (moltiplicazione per 3 e sottrazione di 5) ma non nell'ordine giusto; quindi partendo da 8 si ottengono i numeri: 19, 52, 151, 448.

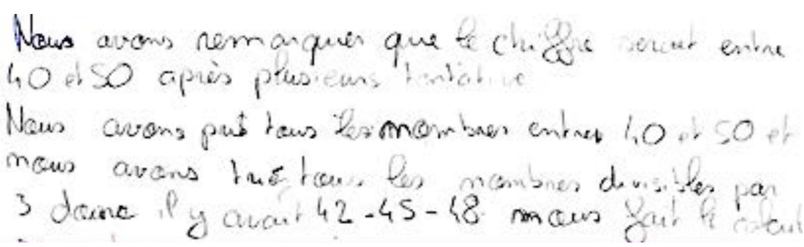
Dans cette copie (niveau 6), les opérations inverses correctes (multiplication par 3 et soustraction par 5) ont été effectuées, mais pas dans le bon ordre ; ainsi, en commençant par 8, on obtient les nombres : 19, 52, 151, 448.



Nous avons commencé par 8 et nous avons fait le contraire de ce que le problème demandait : nous avons multiplié alors qu'il fallait diviser et nous avons soustrait 5 alors qu'il fallait ajouter. Gérard a donc commencé avec le nombre 448.

Procedura B: test con un multiplo di 3: 3 elaborati su 109 al livello 6 e 1 elaborato su 76 al livello 7 in Franche-Comté.

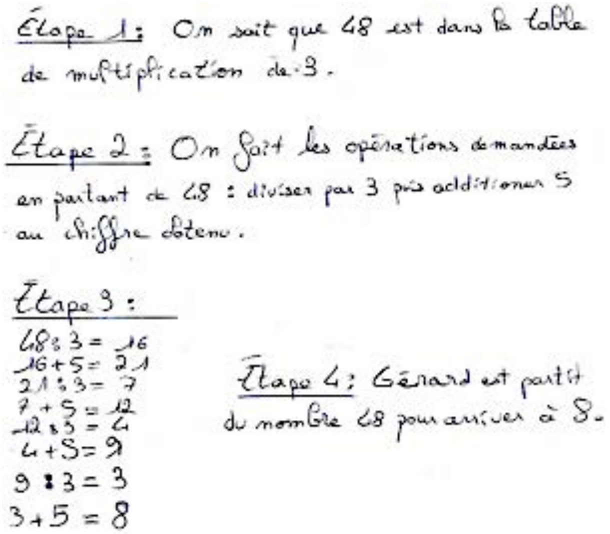
Procédure B : essais avec un multiple de 3 : 3 copies sur 109 au niveau 6 et une seule sur 76 au niveau 7 en Franche-Comté.



(Abbiamo osservato che il numero è tra 40 e 50 dopo vari tentativi.
Abbiamo preso tutti i numeri tra 40 e 50 e
abbiamo provato tutti i numeri divisibili
per 3, quindi 42 – 45- 48. Abbiamo fatto il calcolo…)

L'elaborato seguente è molto esplicito (livello 7):

La copie suivante est très explicite (niveau 7) :


Étape 1: On sait que 48 est dans la table de multiplication de 3.

Étape 2: On fait les opérations demandées en partant de 48 : diviser par 3 puis additionner 5 au chiffre obtenu.

Étape 3 :
48 : 3 = 16
16 + 5 = 21
21 : 3 = 7
7 + 5 = 12
12 : 3 = 4
4 + 5 = 9
9 : 3 = 3
3 + 5 = 8

Étape 4: Gérard est parti du nombre 48 pour arriver à 8.

(*Tappa 1: Sappiamo che 48 è nella tavola moltiplicativa del 3.*

Tappa 2: Facciamo le operazioni richieste partendo da 48: dividere per 3, poi addizionare 5 al numero ottenuto

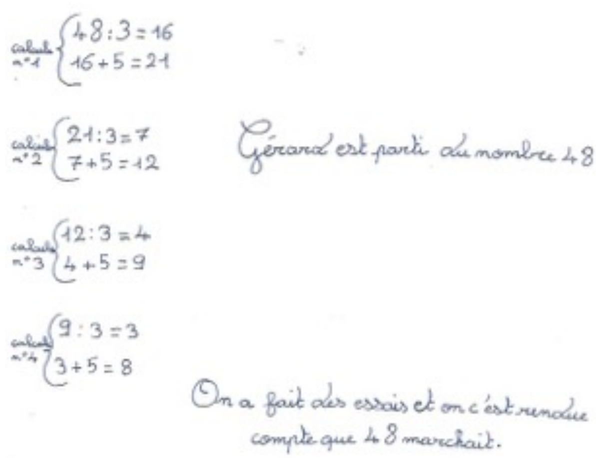
Tappa 3 (calcoli)

Tappa 4: Gérard è partito dal numero 48 per arrivare a 8)

Verifica C, da 48 dopo tentativi: 15 elaborati su 109 al livello 6 e 16 elaborati su 76 al livello 7 in Franche-Comté.

Vérification C, à partir de 48 après essais : 15 copies sur 109 au niveau 6 et 16 copies sur 76 au niveau 7 en FC.

Livello 6 / niveau 6


calcul n°1 48 : 3 = 16
16 + 5 = 21

calcul n°2 21 : 3 = 7
7 + 5 = 12

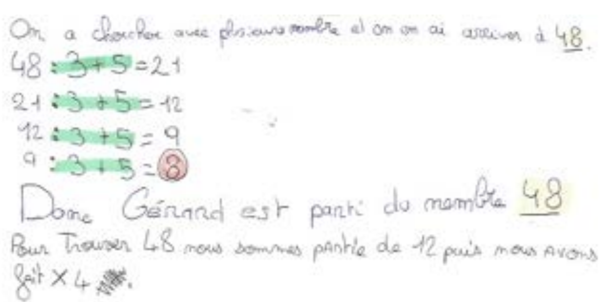
Gérard est parti du nombre 48

calcul n°3 12 : 3 = 4
4 + 5 = 9

calcul n°4 9 : 3 = 3
3 + 5 = 8

On a fait des essais et on s'est rendu compte que 48 marchait.

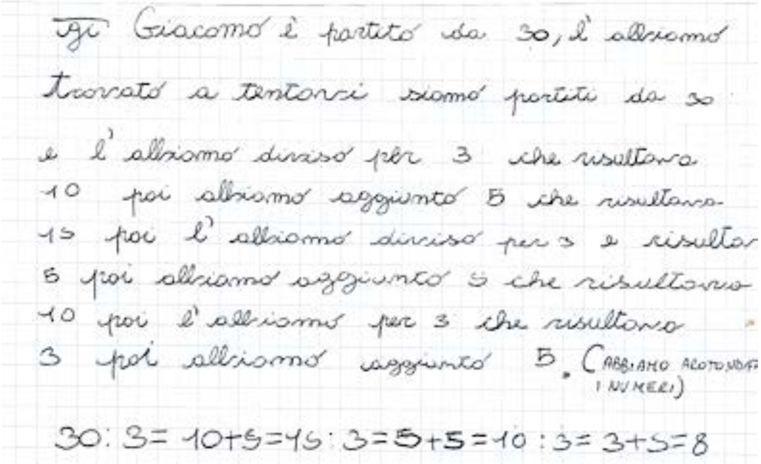
(*Gérard è partito dal numero 48*
Abbiamo fatto dei tentativi e ci siamo resi conto che 48 funzionava.)


On a chercher avec plusieurs nombre et on on ai arriver à 48.
48 : 3 + 5 = 21
21 : 3 + 5 = 12
12 : 3 + 5 = 9
9 : 3 + 5 = 8
Donc Gérard est parti du nombre 48
Pour trouver 48 nous sommes partie de 12 puis nous avons fait × 4.

(*Abbiamo provato con diversi numeri e siamo arrivati a 48.*

Quindi Gérard è partito dal numero 48
Per trovare 48 siamo partiti da 12 poi abbiamo fatto ×4)

In questo elaborato è stata approssimato il risultato dell'ultima operazione, ma in modo consapevole (livello 6).
Dans cette copie, le résultat de la dernière opération a été approximé, mais de manière consciente (niveau 6)

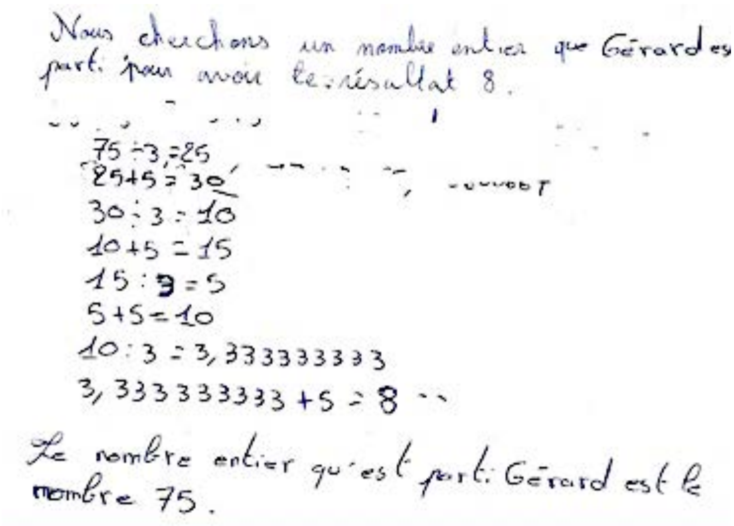

Giacomo è partito da 30, l'abbiamo trovato a tentoni siamo partiti da 30 e l'abbiamo diviso per 3 che risultava 10 poi abbiamo aggiunto 5 che risultava 15 poi l'abbiamo diviso per 3 e risulta 5 poi abbiamo aggiunto 5 che risultava 10 poi l'abbiamo per 3 che risultava 3 poi abbiamo aggiunto 5. (ABBIAMO ARROTONDATO I NUMERI)

30 : 3 = 10 + 5 = 15 : 3 = 5 + 5 = 10 : 3 = 3 + 5 = 8

Gérard est parti de 30, nous l'avons trouvé par tâtonnement, nous sommes partis de 30 et nous l'avons divisé par 3 ce qui a donné 10 puis nous avons ajouté 5 ce qui a donné 15 puis nous l'avons divisé par 3 ce qui a donné 5 puis nous avons ajouté 5 ce qui a donné 10 puis nous l'avons divisé par 3 ce qui a donné 3 puis nous avons ajouté 5 (nous avons arrondi les nombres).

30 : 3 = 10 + 5 = 15 : 3 = 5 + 5 = 10 : 3 = 3 + 5 = 8

Pochi elaborati presentano la risposta sbagliata. Ci sono stati tuttavia alcuni tentativi con numeri non interi:
Peu de copies donnent une réponse erronée. On trouve cependant des essais avec des nombres non entiers :


Nous cherchons un nombre entier que Gérard es part. pour avoir le résultat 8.

75 ÷ 3 = 25
25 + 5 = 30
30 : 3 = 10
10 + 5 = 15
15 : 3 = 5
5 + 5 = 10
10 : 3 = 3,333333333
3,333333333 + 5 = 8

Le nombre entier qu'est part. Gérard est le nombre 75.

(*Cerchiamo un numero intero da cui Gérard è partito per avere il risultato 8.*
Il numero intero da cui è partito Gérard è il numero 75)

E altri gruppi dimenticano che il calcolo deve essere ripetuto quattro volte.
Et d'autres copies oublient que le calcul doit être répété quatre fois.

Je cherche quel nombre Gerand est-il parti pour arriver à 8
je calcul :

$9 \div 3 + 5 = 8$
$9 \div 3 = 3$
$3 + 5 = 8$

Gérard est parti du nombre 9 pour arriver à 8

(*Cerco il numero da cui Gérard è partito per arrivare a 8.*
Calcolo […]
Gérard è partito dal numero 9 per arrivare a 8)

Un saggio di algebra: In questo elaborato si nota un utilizzo corretto di quattro variabili, collegate tra loro da equazioni.

Un essai par l'algèbre : Dans cette copie, on constate une utilisation correcte de quatre variables, reliées entre elles par des équations.

DATI	OPERAZIONI:
$\frac{n}{3} + 5 = F$	$P = 8 - 5 = 3$
	$3 \cdot 3 = 9$
$\frac{F}{3} + 5 = K$	$K = 9 - 5 = 4$
	$4 \cdot 3 = 12$
$\frac{K}{3} + 5 = P$	$F = 12 - 5 = 7$
	$7 \cdot 3 = 21$
$\frac{P}{3} + 5 = 8$	$n = 21 - 5 = 16$
	$16 \cdot 3 = \underline{48}$

Incomprensione del problema: 37 errori e 12 mancate risposte su 109 al livello 6 e 22 errori e 5 mancate risposte su 76 al livello 7 in Franche-Comté.

Incompréhension du problème : 37 erreurs et 12 non réponses sur 109 au niveau 6 et 22 erreurs et 5 non réponses sur 76 au niveau 7 en Franche-Comté.

Conclusione

Da un punto di vista didattico, questo problema piuttosto semplice è un'introduzione alla nozione di sequenza di calcoli da ripetere. La nozione di funzione non è ancora presente, ma è sottesa: l'applicazione di un semplice algoritmo ad ogni passo fornisce un diverso valore per ogni numero in ingresso. Anche se una formula come $f(x) = x/3 + 5$ non è l'obiettivo di questo problema, non sarà difficile arrivarci quando lo si userà in classe. Sarà possibile fare un ulteriore passo avanti verso la nozione di successione utilizzando la forma ricorsiva $u_{n+1} = f(u_n)$, e a quale livello?

Conclusion

Du point de vue didactique, ce problème assez simple est une ouverture vers la notion de suite de calculs à répéter. La notion de fonction n'est pas encore présente, mais sous-jacente : l'application à chaque étape d'un petit algorithme donne pour chaque entrée numérique une nouvelle valeur. Même si une formule comme $f(x) = x/3 + 5$ n'est pas l'objectif de ce problème, il ne sera pas difficile d'y aboutir lors de l'exploitation en classe. Un pas de plus vers la notion de suite avec l'écriture conventionnelle $u_{n+1} = f(u_n)$ sera-t-il possible et à quel niveau ?

APPROFONDIMENTI / ÉTUDES

RALLY OLTRE LA GARA: STORIA DEL GRUPPO DI LAVORO NUMERAZIONE

Materiali organizzati e sperimentati, utili per la formazione degli insegnanti

a cura di Carla Crociani e Rita Spatoloni[1]

1. Introduzione

Questo articolo vuole essere una testimonianza di venti anni di lavoro svolto all'interno del Gruppo Numerazione (GTNU) e dell'attualità delle riflessioni sulle attività, condivise e proposte in classe, a partire dai problemi somministrati nelle varie edizioni della gara. È una testimonianza che ha, secondo noi, valenza formativa per gli insegnanti, sempre più impegnati ad affrontare con i propri allievi le difficoltà di acquisizione di concetti non solo basilari in aritmetica ma che avranno, in seguito, un impatto determinante sulla vita sociale e lavorativa dei futuri cittadini.

Lasciare una documentazione del lavoro svolto, ripercorrendone cronologicamente le varie tappe, secondo noi potrà essere utile sia agli insegnanti afferenti al nostro gruppo, che avranno così a disposizione un materiale facilmente consultabile, sia ad insegnanti ad esso estranei, i quali potranno conoscere il percorso seguito con i riferimenti agli obiettivi che via via ci siamo prefissati ma, soprattutto, potranno anche avere a disposizione materiale già sperimentato e selezionato per argomenti ed obiettivi.

Nel corso degli anni le attività proposte spaziano su vari temi propri dell'aritmetica e sono state sempre impostate a partire dall'analisi successiva alla risoluzione di buoni problemi, relativi ai concetti basilari che prendevamo in considerazione. Queste analisi, unitamente alle sperimentazioni progettate, possono fornire esempi e/o spunti per possibili interventi mirati nelle proprie classi: si ottengono infatti significative sorprese, spesso in negativo ma talvolta anche in positivo, sulla costruzione dei saperi da parte degli allievi. E se teniamo conto che le sorprese, anche quelle in negativo, sono la "sorgente" dalla quale attingere per le scelte dell'insegnamento, possiamo comprendere la potenzialità di una ricerca fatta e sperimentata.

Le problematiche affrontate dal nostro gruppo hanno sottolineato i vari aspetti del *concetto numero* che si presentano ad un allievo all'inizio della propria carriera scolastica: contare, scrivere, cifra/ numero, valore posizionale, regolarità, scelta del sistema di numerazione, operazioni e loro algoritmi, … tutto questo ben si raccorda con il nome del gruppo stesso: *Numerazione*.

Nel corso degli anni abbiamo cercato di esaminare tutti gli aspetti del concetto di numero selezionando, o costruendo ad hoc, problemi che fossero indirizzati a consolidare o approfondire certe peculiarità, tenendo sempre presente non solo l'obiettivo ma anche la categoria cui destinarli. Alcuni di essi sono stati proposti a posteriori in classe a categorie più basse (o più alte) rispetto a quella "ufficiale" e questo ci ha permesso di individuare, attraverso l'analisi delle strategie risolutive messe in atto e discusse con gli allievi, sia quali possano essere le fasi di acquisizione di un concetto, sia su quali passaggi l'insegnante debba o possa ancora intervenire.

Perché proprio ora questo resoconto?

Con la chiusura dell'associazione ARMT, gli Incontri Internazionali dell'ARMT non ci saranno più, ma la Banca problemi e le pubblicazioni continueranno ad esistere e a circolare fra gli insegnanti e, anche se il Gruppo presumibilmente non si riunirà più in presenza, i contatti potranno essere mantenuti e le schede dei problemi della Banca potranno altresì essere implementate o inserite.

2. Un po' di storia del Gruppo Numerazione, a partire dagli incontri internazionali e dagli articoli pubblicati

I gruppi di lavoro costituiti all'interno dell'ARMT vedono la loro nascita nel **2005** con il convegno di Arco di Trento. In particolare il gruppo GTNU è nato con il nome «*Cifra, numero e valore posizionale*» dopo aver constatato quale fosse la fragilità degli allievi (di vario livello scolare) proprio sui concetti fondanti dell'aritmetica: cifra, numero e posizionalità. Tale constatazione era stata possibile grazie alle analisi condotte sugli elaborati dei problemi RMT, forniti dagli allievi in occasione della gara.

Il Gruppo, a partire da questa constatazione, ha esaminato i problemi fino ad allora pubblicati e somministrati alle classi e, verificandone i risultati poco soddisfacenti, ha preso coscienza del problema e ha intrapreso un lavoro per indagare sulle possibili motivazioni:

---

[1] Gruppo Numerazione, membri attivi negli ultimi anni: Lidia Abate, Susanna Bezzini, Maita Bonazzi, Eva Fornari, Serena Guerri, Manuela Lucherini, Maria Mandelli, Claudia Mazzoni, Teresa Nughedu, Iva Parisi, Giunia Percario, Chiara Pradella, Arcangela Quacquarelli, Damiana Sforzi, Angela Sivo, Silvana Tramontana, SaraTronconi.

- si tratta di difficoltà legate a questioni linguistiche? Il vocabolo "cifra" nel linguaggio naturale (italiano) ha diverse accezioni, mentre in linguaggio matematico il suo significato è unico e ben preciso;
- si tratta di difficoltà legate all'introduzione del numero nei primi anni di scolarità? Viene generalmente dedicato poco tempo alla scrittura/lettura dei numeri, in contrapposizione al tempo e alle attività, anche di tipo ludico, che invece sono dedicate alla scrittura/lettura delle parole.

Dalla discussione e condivisione in presenza su questi interrogativi è nata la necessità di individuare e organizzare un percorso didattico che, utilizzando i problemi del RMT in classe oltre la gara, permettesse di introdurre, verificare e/o consolidare questi concetti. L'articolo *I problemi del Rally come supporto didattico per l'avvio alla costruzione e al successivo consolidamento del concetto di cifra, numero e notazione posizionale*, pubblicato nel volume 5 degli "Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino"(ARMT, IPRASE Trentino e IUFM de Lyon–Centre de Bourg en Bresse, 2004-2005 pp. 224-234) riporta una possibile suddivisione dei problemi in base alla loro opportunità di utilizzo (introduzione, verifica, consolidamento), argomentata in tutte le sue parti.

Nel volume 6, Atti Parma **2006** (ARMT e Dipartimento di Matematica Università di Parma, pp. 117-131) con l'articolo *Ancora problemi sul concetto di cifra, numero, posizionalità*, il Gruppo si è proposto di identificare sottoambiti nei quali riunire i problemi inerenti l'ambito assegnato considerandoli nella loro specificità, ad esempio *costruzione dei numeri a partire dalle cifre, ricerca di regolarità, utilizzo del valore posizionale in ambiti apparentemente estranei ad esso,…*. Lo scopo di questa scelta è stato quello di predisporre materiali o esempi di attività che aiutino a mettere in luce le potenzialità di un determinato problema.
L'attività è stata organizzata sulla base dei seguenti interrogativi:

- quale capacità hanno gli allievi di comprendere, effettivamente, la somiglianza di struttura in problemi differenti per contesto e/o per variabili numeriche?
- a quale età è possibile assegnare un valore attendibile a questa capacità?
- in che modo possiamo avviare una ricerca in proposito?

L'articolo riportato nel volume 6 descrive un'attività sperimentata, traccia gli obiettivi e il percorso per una nuova attività, da sperimentare, e propone schede sintetiche di alcuni problemi.

Nel volume successivo, il numero 7, Atti Bard **2007** (ARMT e Centro Risorse per la Didattica della Matematica della Val d'Aosta, pp. 143-162), nell'articolo *Sui concetti di cifra, numero, valore posizionale: resoconto di alcune esperienze*, sono riportati i risultati delle attività precedentemente descritte, tratti dall'analisi degli elaborati e dalla conseguente discussione tra i docenti del Gruppo. L'articolo propone inoltre spunti di riflessione su questioni di didattica emerse nel corso dei lavori in presenza e approfondite durante gli scambi a distanza tra i componenti. Si procede all'ideazione di attività che stimolino gli allievi nella ricerca di regolarità, che consentano di innescare modi "più furbi" di procedere nella ricerca della soluzione ad esempio, per risolvere un problema di conteggio, evitare la stesura di liste "noiose e lunghe" (*Caccia al tre* 10.I.03; *Cifre rosse e cifre nere* 15.F.06).

Il lavoro *Cifra-numero… tanti problemi*, presentato nel volume 8, Atti Brig **2008**, (ARMT e Académie Suisse des Sciences Naturelles, SCNAT, pp. 99-111), oltre a riepilogare le attività svolte, in particolare riguardo i problemi appartenenti alla stessa famiglia e a quelle sul cambio di variabili, espone alcune conclusioni condivise e una breve riflessione riguardo gli sviluppi futuri inerenti l'apprendimento del concetto cifra, numero e posizionalità.
Ad esempio, l'esperienza riportata a pagina 108 mostra come allievi di una quinta classe Primaria, dopo aver colto la struttura del problema *Etichette* 07.II.06, ne hanno inventato uno analogo, cambiando contesto e dati numerici… . Il gioco è stato intrigante e nella classe è iniziato il fermento: chi "tirava ad indovinare" chi "giocava più seriamente", così sono andati oltre, hanno cominciato a formulare *ipotesi* e provato con numeri diversi… hanno intuito e verificato (è ancora troppo presto per *dimostrare*) che certi numeri "non vanno bene" per assumere un determinato «ruolo».
Un'esperienza analoga è stata fatta con il problema *Il vecchio contachilometri II* 11.I.09. Anche in questo caso gli allievi hanno scoperto che *non tutti i numeri possono essere sostituiti alle variabili didattiche del testo*!
Queste attività hanno divertito e fortificato gli allievi nella comprensione del concetto di "posizionalità", ma li hanno anche stimolati verso una metodologia di ricerca a partire da elementi che mettono in dubbio certezze (intuite e confermate a prima vista) e incentivato la necessità di trovare risposte motivate: situazione di forte potenzialità didattica.
Da questo lavoro possiamo trarre uno spunto didattico: l'insegnante stesso, pur prendendo atto di quanto gli allievi ritengono di avere scoperto e valorizzandolo, potrà introdurre qualche interrogativo che apra la strada alla verifica e all'approfondimento, sostenendo e motivando gli allievi verso l'*argomentazione* e avviando alla *dimostrazione*, ma anche fornendo un forte contributo sul versante dell'affettività.

A Nivelles, nel **2009**, durante le giornate di lavoro, abbiamo preso in considerazione gli elaborati del problema *La maratona di Transalpino* 15.I.16 con particolare attenzione alle tipologie di strategie utilizzate dagli allievi.

Spesso la soluzione trovata era giusta ma fondata su convinzioni derivanti da variabili numeriche particolari che non avrebbero potuto essere generalizzate a qualunque valore numerico (cfr. Gazzetta n.3, p. 49): gli allievi hanno provato a "dimostrare" la risposta partendo da presupposti, veri solo nel caso delle variabili presenti nel testo, ma non in generale.
La lettura degli elaborati relativi al problema ci ha restituito dati interessanti che ci hanno condotto a confrontarci e riflettere anche sulle differenze linguistiche (ad esempio l'espressione che sembra avere creato più difficoltà è stata "*entrambi i numeri*" che nella versione francese era "*tous les deux*", forse più chiara).
Ci siamo quindi posti la domanda: quali sono le generalizzazioni possibili per le diverse età degli allievi?
È stato pertanto impostato un percorso di lavoro da sperimentare e condividere nel corso dell'anno. L'articolo C. Crociani, R. Spatoloni *Il numero si incontra molto presto... ma è una conquista difficile,* redatto a partire dall'incontro di Nivelles è pubblicato sulla *Gazzetta* n. 3 – 2013, pp. 49-65.

Nell'anno **2010** il Gruppo ha assunto l'attuale denominazione «*Numerazione*» anche per evidenziare l'apertura su problemi che spaziano un po' su tutta l'aritmetica comprese le operazioni ed i loro algoritmi. Questo ha indirizzato il lavoro verso la riflessione su come contenuti relativi a *numero* e *posizionalità*, influiscano sulla comprensione degli algoritmi delle operazioni.
In preparazione e nel corso dell'incontro di Besançon, ottobre **2010**, il gruppo ha proseguito il lavoro iniziato a Nivelles, completando l'analisi e la classificazione delle tipologie di errori riscontrati negli elaborati. È stata rivolta particolare attenzione alle criticità conseguenti la mancata acquisizione della scrittura posizionale (troppo spesso, purtroppo, trattata come argomento fine a se stesso) e a quelle di tipo metodologico-procedurale (poca o molto scarsa abitudine a riflettere sull'applicazione di procedure, sul verificare la coerenza del risultato ottenuto con i dati del problema, sul lavorare per successive approssimazioni sensate, verificandone ogni volta lo scarto). Questo secondo punto ha aperto l lavoro del Gruppo all'acquisizione consapevole degli algoritmi operativi e, proprio su questo aspetto sono state delineate attività utili da proporre alle classi, in verticale:

<table>
<tr><th>Classi /categoria</th><th>Attività</th><th>Metodologia</th></tr>
<tr><td>II Primaria,
cat. 3, 4, 5</td><td>Esercitare gli allievi nel completamento di addizioni e sottrazioni in colonna quando mancano alcune cifre negli addendi (operazioni "bucate").
Esercitare gli allievi alla stima preventiva, sollecitandoli anche con domande e promuovendo discussioni argomentate nella classe (es. Quale risultato ti aspetti? Potrai ottenere un risultato che supera 2 unità di migliaia? ….).</td><td rowspan="2">Far lavorare gli allievi a coppie per: favorire l'abitudine al confronto e alla discussione;

innescare l'abitudine a riflettere sul valore delle cifre che si tolgono/aggiungono;

verificare e confrontare il risultato in base ad una stima preventiva.</td></tr>
<tr><td>Cat.3,4,5,6,7,8</td><td>Esercitare gli allievi nel completamento di moltiplicazioni in colonna "bucate", cominciando da moltiplicazioni con un fattore di 3 cifre (di cui una mancante) e l'altro di una cifra per proseguire con moltiplicazioni aventi entrambi i fattori di due cifre (quando manca una cifra in uno dei due) (strategia possibile, usare la sottrazione).
Moltiplicazioni "sbagliate" nell'algoritmo da correggere.
Esercitare gli allievi nel calcolo rapido, anche orale, applicando le proprietà della moltiplicazione e controllando la coerenza del risultato con la stima effettuata in precedenza.</td></tr>
</table>

L'incontro di Barletta, nel **2011**, già nel primo avviso (riportato di seguito nel corsivo) enuncia che il RMT non è la gara ma è "*occasione per un approfondito lavoro di analisi didattica. Un aspetto importante è quello di un'oculata scelta di problemi delle prove da usare nella pratica di classe per la costruzione di saperi*". Nell'avviso viene suggerito che i "*lavori di gruppo potranno situarsi su diversi livelli nell'ambito del tema dell'incontro, a partire dalle seguenti questioni:*
- quali problemi rappresentano un potenziale per la messa in opera di elementi di sapere?
- quali aspetti del sapere considerato permettono di lavorare?
- quali aggiustamenti bisogna apportare ai problemi? Quale scenario didattico può essere proposto?

per cominciare a costruire schede opportune per la banca di problemi, in modo da poterle utilizzare per la pratica di classe".
Alla luce di tutto ciò il **2011** è, pertanto, da considerare l'anno di inizio delle redazione di schede, con discussione in presenza. In occasione del Convegno, sulla base delle indicazioni fornite dal modello di scheda per la Banca Problemi (BP), abbiamo avviato la stesura delle seguenti schede: *Caccia al tre* 10.I.03; *Maratona di Transalpino* 15.I.16; *Strana moltiplicazione* 17.I.14, pubblicate sulla Banca Problemi (http://www.projet-ermitage.org/).

A Villars le Dombes, anno **2012**, il Gruppo ha approfondito e proseguito il lavoro sulle schede per la BP con particolare riferimento ai punti della rubrica *Indicazioni didattiche* e *Per andare più lontano*. I problemi considerati, in particolare *Il numero di Sofia* 20.II.08, permettono di riflettere sulle regolarità numeriche ed ancora sul processo di generalizzazione. L'analisi degli elaborati di questo problema ha evidenziato le difficoltà legate alla comprensione del testo e alla capacità di lavorare sulla composizione del numero. Di conseguenza il Gruppo ha previsto di sperimentare in classe due nuovi problemi, uno con un testo modificato in modo da aggirare l'ostacolo, l'altro con la stessa struttura matematica ma con una semplificazione adatta anche per categorie più basse.

Dall'incontro in Lussemburgo, nell'ottobre **2013**, è scaturito un percorso di approfondimento sulla scrittura posizionale dei numeri a partire dalla base 10 per arrivare a quella in qualunque base, attraverso i problemi del RMT. Le attività proposte vanno dalla cat.5 alla cat.8 e coinvolgono i problemi *Vecchio contachilometri II* 11.I.09 *Le matite del RMT* 15.II.08, *Pennarelli nuovi* 21.II.12, *Quante uova!* 19.I.08. Nell'ottica di costruire l'apprendimento "in progressione", la proposta consiste nel far "scoprire" gradualmente agli allievi l'analogia strutturale nascosta dalla diversità degli enunciati e che, invece, emerge dal fatto che le strategie risolutive sono trasferibili da un problema all'altro applicando delle semplici "traduzioni" (cfr. *Gazzetta* n.4 – 2015, pp. 31- 43).

Nel Convegno dell'ottobre **2014** a Siena, "*Problemi del RMT e formazione degli insegnanti*" gli organizzatori auspicano che l'incontro sia *l'occasione per confrontare le attività di formazione e,* nella sua presentazione, richiedono ai gruppi *di lavorare sull'elaborazione di scenari di formazione sulla base di problemi del RMT.*
Il Gruppo Numerazione, dopo un confronto sulle sperimentazioni suggerite e condivise in precedenza, basate soprattutto sul concetto di numero relativamente alla sua scrittura, ha avviato la discussione sulle operazioni aritmetiche (nel duplice aspetto di significato e algoritmo) a partire dalla lettura di schede presenti nella Banca Problemi. Proprio in questa occasione è stata fatta una illustrazione approfondita della Banca, ampiamente discussa poi all'interno del gruppo, rispettando il tema del convegno (formazione degli insegnanti), è stato delineato un percorso da proporre agli insegnanti nel quale sono state individuate le seguenti fasi di lavoro: 1) scelta del problema sulla base dell'analisi a priori presente sulla Banca, da porre in relazione con il contesto classe, con gli argomenti programmati,... ; 2) analisi a posteriori propria e confronto con quella presente nella scheda sulla Banca; 3) individuazione di criticità e/o spunti per superare evidenziare/superare gli ostacoli. È stato preso in considerazione il problema *Strana moltiplicazione* 17.I.14 . Il gruppo si è confrontato su questioni riguardanti l'opportunità di lavorare, in verticale, per la comprensione dell'algoritmo operativo e sulla valutazione del risultato, per approssimazione, ad ogni livello scolare (cfr. scheda sulla Banca Problemi). Dall'esame degli elaborati, portati dalle sezioni di appartenenza dei componenti del Gruppo, è emerso un elaborato particolarmente interessante sia per la strategia utilizzata sia per il fatto che in sede di correzione e valutazione locale non è stata riconosciuta corretta (i correttori non hanno saputo interpretare la giustificazione, valida, del risultato giusto). Questa situazione ha aperto una riflessione sul problema della valutazione stessa.

Nell'incontro di Sedilo, nel **2015**, l'analisi degli elaborati e la stesura delle schede hanno messo in luce il fatto che la maggior parte degli errori è imputabile alla mancata comprensione del testo dei problemi. Pertanto il gruppo ha ritenuto necessario individuare attività che sviluppino negli allievi la capacità di interpretazione, sia a livello linguistico che grafico, delle rappresentazioni convenzionali. Sulla base delle indicazioni fornite dal *Gruppo Pilotaggio* vengono esaminati i testi dei problemi assegnati (*Cifre e... ancora cifre* 22.I.06, *La striscia dei numeri* 23.I.04, *Pennarelli nuovi* 21.II.12, *Numeri sconosciuti* 22.I.01). Alla luce dei criteri presentati nel corso del Convegno vengono concordate alcune modifiche che saranno proposte per la sperimentazione nelle classi.

A Le Locle, nel **2016**, il Gruppo ha riesaminati i risultati delle sperimentazioni sui problemi tratti dalle prove del 24°RMT, si è confrontato sulla possibilità di promuovere e sperimentare nelle classi attività per il superamento delle criticità rilevate. È stato scelto il problema *Pulce sapiente* 24.II.04, destinato alle categorie 3-5 perché presentava molte criticità. Sono stati concordati e proposti opportuni cambiamenti di variabile.
In particolare:
a) modifica del numero di arrivo (*Si ferma quando raggiunge o supera la casella 1000*), per spingere gli allievi a cercare la regolarità, anziché a fare un elenco di tutti i salti, avviandoli così alla generalizzazione;

b) modifica del modulo (es. +9-2), per indurre gli allievi a non procedere immediatamente alla divisione, dal momento che 100 non è divisibile per 7;
c) lasciare il modulo 4 cambiando il numero dei salti (+7-3), per riflettere sul diverso punto di arrivo (fermarsi a 96 anziché a 92).
Il problema, inoltre, è ben confrontabile con: *Matematica in palestra* 24.F.03 *La scala della torre rossa* 23.I.02 *Il naso di Pinocchio* 07.II.04 26.F.02 *Pinocchio il gran bugiardo* 20.I.12

Nell'incontro di Charleroi, **2017**, l'esame degli elaborati relativi al primo problema scelto (*Lancio nei cesti* 25.II.05) ha messo in evidenza che sebbene sia stato riconosciuto il contenuto matematico sul valore posizionale, quest'ultimo non è stato generalmente utilizzato come strumento per risolvere il problema: da qui ha preso avvio una riflessione sulle pratiche didattiche più utili per sviluppare acquisizioni che si trasformino in competenza. Dalla discussione sui risultati del secondo problema scelto (*Barattolo di fagioli* 25.II.15) sono emerse riflessioni sulla padronanza del linguaggio per esprimere in modi diversi uno stesso concetto e, a livello matematico, sul concetto di resto nella divisione, sul significato dei numeri decimali e sul passaggio dal linguaggio verbale a quello simbolico. Il lavoro sui due problemi e i risultati della discussione sono riportati nell'articolo *Linguaggio e comunicazione: ri-partiamo dall'analisi a posteriori,* pubblicato sulla *Gazzetta* n. 8 – 2018, pp. 61-81.

A Pont Saint Martin, nel **2018**, l'incontro dal titolo *La Banca di Problemi dell'ARMT: "impresa cooperativa" in attesa di interlocutori* ci ha permesso di discutere sui due seguenti interrogativi: *Come utilizzare le risorse della Banca di problemi dell'ARMT? Come cooperare per migliorare la didattica per problemi nella formazione degli insegnanti e nella classe?* Il Gruppo Numerazione ha quindi esaminato la Banca Problemi e, dopo aver messo in comune i punti di forza e le eventuali criticità riscontrate nell'uso, si è organizzato per proporre adeguamenti e modifiche per i problemi inerenti il proprio ambito.

Sulla base del Tema del Convegno di Alghero, **2019**, e dell'invito ricevuto dal Comitato di Gestione, le Coordinatrici hanno individuato i problemi delle prove effettuate nell'anno in corso sui quali focalizzare l'attenzione per rilevare la differenza tra gli aspetti dell'analisi a priori, redatta dagli estensori del problema, e le procedure utilizzate dagli allievi nella risoluzione degli stessi. Questo lavoro di ricerca e confronto è sicuramente molto formativo per un insegnante in quanto consente di "*riflettere sullo statuto delle conoscenze degli allievi per poter determinare sia gli ostacoli che incontreranno sia le procedure a loro disposizione*", come ben descritto sul libretto del 23° Incontro, nell'articolo introduttivo. Il Gruppo ha selezionato i problemi *Collezione di giornalini* 27.I.09 e *Bersaglio moltiplicatore* 27.II.01 per i quali, dopo analisi e discussione condivise, vengono redatte le schede.
Ad Alghero, durante il lavoro in presenza, si è inoltre discusso anche sulle tipologie di problemi che possono essere inseriti nell'ambito *Numerazione* e, nel corso delle riflessioni, sono emerse idee per nuovi problemi. I problemi *Torri di cubetti* I 29.I.01, cat. 3-4 e *Torri di cubetti II* 29.I.07, cat.5-6, sono stati successivamente elaborati e la loro "storia" è descritta nell'articolo *Torri di cubetti I e II* pubblicato sulla Gazzetta n.12 – 2022, pp. 85-101.

Il Convegno del **2020** si è svolto online ed il Gruppo ha presentato una sintesi della "sua storia", base per la presente descrizione che è divenuta più articolata.
Nel corso dell'anno scolastico **2020-2021**, considerato che sarebbe stato impossibile incontrarci a causa della pandemia Covid e per non creare discontinuità nel nostro lavoro, il Gruppo ha concordato di proporre fin dall'estate 2020 l'analisi di elaborati degli allievi relativi ai problemi *Cesto di frutta I* 28.I.02, cat.3 - 4 e *Cesto di frutta II* 28.I.09, cat.5-7 per procedere alla stesura delle schede sulla Banca Problemi. Nelle sedi di afferenza, laddove è stato possibile, ciascuno ha fatto la propria analisi a posteriori, che abbiamo poi raccolto e sintetizzato su un file sul quale abbiamo lavorato al momento degli incontri realizzati a distanza. Nel corso degli incontri abbiamo condiviso anche le sperimentazioni realizzate. Il resoconto di questo lavoro è pubblicato inoltre sulla *Gazzetta* n. 11-2021, pp. 59-86.

Il tema dell'incontro di Lione, ottobre **2022**, in continuità con i precedenti, ha previsto una riflessione sull'elaborazione di un problema del RMT, compito dichiaratamente complesso. Le Coordinatrici hanno proposto ai componenti di organizzarsi in sottogruppi, individuando sostanzialmente due attività in presenza: sistemazione di alcune schede della Banca problemi *Scatole di gessi I* 26.II.08, *Scatole di gessi II* 26.II.16, *Bersaglio moltiplicatore* 27.II.01 e costruzione di nuovi problemi, a partire da alcuni problemi di ambito *Numerazione* che erano stati utilizzati in prove Finali delle passate edizioni.

Il Convegno di Faenza, ottobre **2023**, era incentrato sul *Ruolo costruttivo dei problemi del RMT nella didattica della classe*. Si tratta di un tema che vuole ri-sottolineare l'importanza dei problemi RMT nella didattica quotidiana e li vede come strumenti utili per l'insegnante nella sua attività di organizzazione di un percorso didattico mirato ad un apprendimento che sviluppi consapevolezza e che, come descritto ampiamente nel tema, "*deve essere*

costituito da attività nelle quali la conoscenza si rinforza progressivamente, alimentata e talvolta rimessa in causa, rivisitata o sostituita da una nuova conoscenza, ricostruita a un livello di gestione più efficace". In linea con il tema del convegno, il Gruppo ha deciso di prendere in esame il concetto di divisione con resto e ha portato avanti una discussione in presenza e a distanza a questo riguardo. Sono stati individuati il problema *Le uova di Caterina* 30.I.06 e *Sfida matematica* 30.I.09. I risultati di questi problemi, le osservazioni - riflessioni sugli elaborati e gli spunti per attività didattiche sono descritti nell'articolo *Dall'analisi a posteriori di alcuni problemi... spunti di lavoro in classe* pubblicato sulla Gazzetta n.13-2023, pp.89-112. Il problema *Le uova di Caterina* è stato presentato anche nel poster esposto nel corso del Convegno per la sezione Siena.
Dal confronto e dalla discussione in presenza, è emerso che il concetto di divisione con resto crea notevoli difficoltà e, pur tenendo conto che si tratta di problemi incentrati su questo concetto e calibrati per categoria, se ne riscontra la mancata acquisizione a tutti i livelli. Questo ha portato il Gruppo ad ipotizzare attività, da sperimentare nelle classi nel corso dell'anno 2024, con problemi sempre sullo stesso concetto.

Il 27° Convegno, svoltosi a Trequanda e Valdichiana Senese nei primi giorni di ottobre **2024**, propone un compito per il "futuro" che, coerentemente, si pone in continuità con il passato: "*fare qualche passo nella nostra conoscenza dell'efficacia dei "problemi RMT" proposti ad una classe per l'apprendimento della matematica, dal punto di vista dell'insegnante che è l'unica/o in grado di valutarlo*"… . Dice, quindi, agli insegnanti: "*La palla è nel loro campo, sta a loro sperimentare, sta a loro rendersene conto*."
Il Gruppo, proprio in continuità con il lavoro di Faenza, ha ripreso l'analisi sul concetto di divisione con resto già fatta ed ha individuato tre criteri per suddividere i problemi a questo connessi:

1) Quelli a «moduli ripetuti», particolarmente indicati per attività operative, adatte anche alle categorie più basse.
   Si tratta di problemi che talvolta vengono considerati di poco conto in quanto si basano spesso sulla colorazione di elementi e la soluzione viene trovata attraverso il conteggio, ma questo non dovrebbe essere una condizione di disturbo per l'insegnante in quanto proprio ciò che sembra scontato è la base per stimolare l'apprendimento successivo che non è mai a se stante ma si integra con quanto lo precede e si sviluppa in maniera organica con i passi futuri. Sono stati considerati i seguenti problemi:
   Le Margherite 12.F.03 , *La cameretta di mio cugino* 16.I.07, *Perle rosse*16.F. 01, *La striscia* 21.II.06 , *Una striscia ben colorata* 27.I.01 , *La striscia di carta* 27.II.03 .

Nel corso della discussione sono sorti i seguenti interrogativi:

- Quali osservazioni si possono trarre dagli elaborati e, soprattutto, dalla discussione in classe?
- Quali sollecitazioni per avviare (o incentivare) la ricerca non attraverso il conteggio dei singoli elementi ma del modulo e, quindi, attivare una strategia che utilizzi la divisione con relativa interpretazione del quoziente e del resto?
- Quali proposte per renderli interessanti e adatti alle categorie più alte?

… ma sono anche emersi esempi di attività possibili:

- Verificare quanto l'uso della divisione sia una possibile strategia, facendo scoprire la convenienza, in termini di tempo, e/o opportunità rispetto al lavorare per tentativi ed errori o con la moltiplicazione.
- Interpretare quoziente e resto, e leggere tutte le informazioni sul modulo che si ripete ed anche le variazioni che si possono presentare quando si modifichi l'inizio della sequenza.
- Scoprire la struttura comune di questi problemi, evidenziando le eventuali diversità.
- Inventare problemi con la stessa struttura e discutere con gli allievi sul loro operato.

2) Quelli che necessitano di una ricerca di «multipli e divisori».
   Abbiamo preso in considerazione alcuni problemi che permettono di sviluppare capacità di riflettere sulla scelta dell'inizio della ricerca oppure dell'insieme di numeri entro il quale si troverà la soluzione o se ha senso cercare più soluzioni, ma anche di scoprire regolarità nel succedersi di possibili numeri man mano che si cerca di soddisfare le condizioni. Si tratta comunque di avviare sempre gli allievi ad una riflessione sui risultati e sulla validità delle risposte, vagliando sempre la coerenza con le richieste e con i dati disponibili, obiettivi che, oltre alla conoscenza, rafforzano la competenza.
   I problemi selezionati, finalizzati agli obiettivi prefissati sono:
   Le torri 26.II.07 (cat. 5-7), *La fanfara di carnevale* 15.II.18 (cat. 8-10), *Barattolo di fagioli* 25.II.15, *I biscotti di Emilia* 13.I.12, *Collezione di modellini* 20.I.05, *La ricompensa* 17.II.10.
3) Quelli che necessitano di una ricerca di «approssimazione».
   I problemi considerati sono: *Bicchieri piccoli e grandi* 21.II.05 e tre problemi del 31°RMT *L'arcobaleno* 31.II.10, *Gatti in fila* 31.II.11 e *Divisione per 7* 31.II.15 .

Per tutti i gruppi di problemi selezionati in ogni punto della precedente suddivisione, si possono programmare le stesse attività. Ad esempio:

- scoprire la struttura dei problemi, evidenziandone analogie e differenze;

- scoprire dati essenziali rispetto a quelli che richiedono ulteriori operazioni per averli in modo esplicito (esempio numero di zampe per avere il numero di animali);
- inventare un problema con la stessa struttura, modificandone il contesto, i dati numerici, la richiesta… ed ogni volta discutere con la classe su quali conseguenze si possono trarre riguardo il procedimento risolutivo o il risultato stesso;
- esaminare i dati in uscita dalla sperimentazione (e soprattutto dalla discussione in classe).

3. Afferenti al gruppo: tipologia e numerosità

Nel corso degli anni gli afferenti al Gruppo si sono succeduti in modo molto dinamico: alcuni hanno lasciato (per lo più pensionamenti), altri sono subentrati. Anche il loro numero è sempre stato molto variabile. Tutti gli articoli, pubblicati sugli Atti e nella Gazzetta, riportano i nominativi degli insegnanti che hanno fatto parte del Gruppo nell'anno di pubblicazione dell'articolo. La motivazione che ha spinto gli insegnanti a far parte di questo gruppo è stata quella di migliorare la propria competenza nell'insegnamento di tutta l'aritmetica.

Alcuni sono sempre rimasti nel Gruppo ed è rimasto piuttosto stabile il livello scolare di insegnamento dei vari afferenti: inizialmente solo Scuola Primaria, in crescendo il numero di insegnanti di Scuola Secondaria di I grado, solo negli ultimi anni alcuni di Scuola Secondaria di II grado.

Questo potrebbe far pensare che sia diffusa la convinzione che l'aritmetica sia più che altro un argomento da Scuola Primaria ed i problemi ad essa legati siano da indirizzare a livelli per questo ordine di scuola. Tale convinzione ha meritato l'attenzione da parte del Gruppo. Nel corso degli incontri, in presenza e a distanza, tra insegnanti di diverso ordine di scuola e attraverso la risoluzione dei problemi del Rally, ci siamo infatti resi conto di quanto certi errori e certi misconcetti di base possano ripercuotersi a livelli superiori, talvolta addirittura essere ripetuti nella stessa maniera, tuttavia sempre ben riconoscibili nell'analisi a posteriori degli elaborati. Lavorando con gli allievi e analizzando le diverse tipologie dei loro errori, nel Gruppo ci siamo resi conto che spesso essi acquisiscono alcuni concetti solo nella loro meccanicità.

La discussione e la costruzione di percorsi, anche in verticale, sono state di grande aiuto per gli insegnanti e possiamo affermare che lo scambio sia un altro punto di forza nell'ambito della didattica.

4. Scelta dei problemi e metodologia per progettare sperimentazioni in classe

I problemi di ambito numerico da proporre e discutere nel gruppo sono stati selezionati in base al contenuto matematico, alla percentuale piuttosto elevata di non riuscita, ma anche all'interesse rilevato nelle classi da parte degli stessi insegnanti.

Successivamente, alla selezione, sono state analizzate ogni volta:

- la tipologia degli errori e la loro frequenza in base alla categoria assegnata,
- le strategie utilizzate e la loro relazione sullo stato dell'acquisizione dei concetti da noi esaminati.

La scelta è stata costantemente e volutamente guidata anche da una ricerca di trasversalità e verticalità: spesso i problemi di questo ambito sono interessanti da proporre a livello più alto di quello assegnato per la gara perché possono fornire spunti

- per approfondire la scrittura posizionale e le proprietà delle operazioni,
- per incentivare la scoperta di regolarità, la curiosità e la voglia di andare oltre la situazione presentata dal problema,
- per la ricerca di generalizzazioni e della verifica sulla loro fattibilità, sul significato di «*dimostrazione*» e sulla necessità che essa si debba basare su ipotesi valide in generale e non su casi particolari,
- per indirizzare gli allievi a porsi domande e a trovare risposte con semplici dimostrazioni alla loro portata, magari anche con l'ausilio dell'algebra,

ma anche per analizzare le strategie che gli allievi mettono in atto per risolvere un problema: c'è un'evoluzione dal momento in cui essi dovrebbero aver acquisito strumenti più avanzati rispetto al semplice elencare e contare?

Dall'analisi a posteriori degli elaborati spesso abbiamo preso spunto per evidenziare problemi appartenenti alla stessa famiglia o addirittura aventi la stessa struttura, sia cercando fra quelli della BP, sia inventandone di nuovi. Riuscire a cogliere la struttura comune o l'appartenenza ad una famiglia è un passaggio importante nella costruzione di un concetto (cfr. *Gazzetta n.4* – 2015, pp. 31- 43).

Problemi nuovi

Ogni anno il Gruppo ha ideato e proposto più problemi relativi al proprio ambito che sono stati elaborati attraverso uno scambio costruttivo tra i componenti.

Nelle giornate di Convegno…

Per la creazione di nuovi problemi abbiamo richiesto *idee - problema* al Gruppo, per poi condividerle, in presenza, dividendoci in sottogruppi (comprendenti sia chi aveva dato l'idea che altri) per elaborare un testo ed un'analisi a priori.

… tra un Convegno e l'altro

Tali elaborazioni venivano prima revisionate dai responsabili e di nuovo condivise con il Gruppo, fino alla loro stesura finale che era inviata al *Gruppo Problemi*.

5. Conclusione

Il lavoro di questi anni ci ha fatto riflettere sull'importanza di una metodologia didattica che spinga gli allievi a dare senso a quello che fanno e ad utilizzare le azioni di controllo: comprendere e considerare le informazioni, concentrarsi sulle decisioni importanti e necessarie per affrontare e risolvere un problema (elaborazione di piani, monitoraggio delle fasi risolutive, valutazione delle soluzioni).
Tali caratteristiche non sono innate ed è compito degli insegnanti rendere consapevoli gli alunni della loro necessità.
La condivisione di buone pratiche, la sperimentazione nelle classi per sfruttare al meglio le potenzialità formative dell'attività con i problemi di questo ambito, scelti e modificati, ha avuto un ruolo di primo piano. Inoltre, la continua condivisione nel Gruppo di punti di vista, di strategie risolutive degli allievi, di risultati delle sperimentazioni su concetti inerenti l'ambito numerico, hanno dato la possibilità ad ognuno di noi di arricchirsi, di diventare più competente e di costruire un proprio metodo che tenga sempre presenti i concetti matematici, correlandoli con i principi didattici che ne agevolino la loro acquisizione.

6. Dalla parte delle Coordinatrici

Come Coordinatrici del Gruppo ringraziamo tutti i componenti, quelli indicati in questo articolo, ma anche coloro che, nel corso degli anni, con la loro presenza agli incontri ed il lavoro in classe hanno contribuito allo sviluppo e all'approfondimento delle tematiche affrontate. Senza la vostra collaborazione gli articoli e le schede redatte non avrebbero potuto avere l'essenziale contributo della ricerca sul campo che li rende particolari. Sono proprio le esperienze programmate, condivise e realizzate nelle vostre classi che costituiscono l'essenza del nostro lavoro e sono rintracciabili nelle pubblicazioni o nelle schede della Banca problemi, per questo speriamo di organizzare e presentare in seguito anche altro materiale già disponibile in archivio.

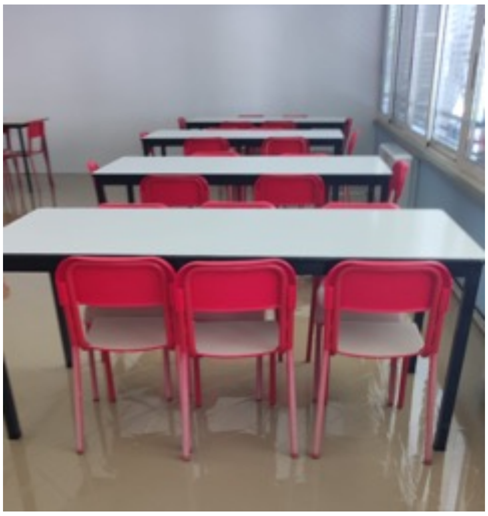
I NOSTRI CONVEGNI 2023-2024 PER IMMAGINI[1]

A cura di Lucia Grugnetti e Rita Spatoloni

Era l'ottobre 2022 quando a Lione la Sezione Romagna ha annunciato e presentato il 26° convegno internazionale del 2023 a Faenza, con la collaborazione di Lucia G.
E accoglie, a febbraio 2023, il Comitato di gestione e il GPIL… nella bellissima Faenza

[1] Si ringraziano tutte e tutti coloro che hanno contribuito con le loro foto, in particolare Annie, Elena, Fabio e Patrizia.

Nei mesi successivi, l'entusiasmo accompagna le amiche della sezione Romagna verso una bella preparazione del convegno… fino alla drammatica alluvione del mese di maggio



Che disastro, è terribile.
Come faranno le nostre amiche a portare a termine il grande lavoro di preparazione del convegno?

Con grande coraggio, guidate da Elena Marangoni, non si lasciano abbattere dalle difficoltà organizzative in una situazione così drammatica!
Eccole al lavoro.

E si arriva al 27 ottobre 2023!

Elena apre i lavori del Convegno con la presentazione di un video sull'alluvione di maggio, che suscita grande emozione.

I lavori del convegno proseguono con le conferenze plenarie, la delicata Assemblea generale con la votazione per la futura chiusura dell'ARMT, i gruppi di lavoro tematici

per arrivare all'animata sessione di presentazione di poster di diverse sezioni e… dei meravigliosi allievi di Elena.

E per finire… la presentazione del 27° convegno da parte di Lucia e Rita

oltre a grandi applausi e ringraziamenti alla sezione Romagna

Arrivederci.

E il 2024 è già arrivato e porta a Trequanda il Comitato di Gestione

con Rita che illustra lo stato dell'arte della preparazione del convegno e della finale internazionale[2], mentre Lucia immortala questa sequenza!

Si lavora bene anche a tavola… dove si unisce l'utile al dilettevole.

[2] Per quanto riguarda la finale internazionale si vedano i due articoli ad essa dedicati, in questo numero 15 della Gazzetta.

Avuto il benestare da parte del Comitato di gestione… si prosegue con grande lena il grande lavoro organizzativo per questo “convegno diffuso”.

27° Convegno Internazionale
del Rally Matematico Transalpino
2024
Trequanda e Valdichiana Senese

Le borsine per i convegnisti e i cappellini per i bambini della finale sono pronti

E le borsine vanno riempite e… ci siamo

Basta lavorare in casa… andiamo a Pienza a preparare la gita culturale dei convegnisti che saranno accompagnati da Alessandra

È il 3 ottobre 2024… tra gli ulivi di Trequanda si leva una piccola mongolfiera… forse di buon augurio

Per rimanere sul verde “porta fortuna”, dopo l’accoglienza dei convegnisti all’hotel Santorotto, con gli amici della Franche-Comté e le amiche senesi, andiamo in pizzeria con tovaglie di colore opportuno

E ci siamo, è il 4 ottobre 2024, a Rita la parola

A Lucia la presentazione, laddove ce ne fosse bisogno, del nostro Michel

che tiene la sua conferenza nel magnifico teatro Ciro Pinsuti di Sinalunga

Ringraziamo poi il sindaco di Sinalunga, ovviamente, in una bella atmosfera

Non sapevamo ancora che Franco, il marito della nostra cara Clara fosse mancato nella notte. Diamo il triste annuncio

A seguire l'Assemblea generale che si svolge anch'essa a teatro sotto la guida delle nostre deliziose Florence e Licia

e… perché non occupare anche la galleria?

La mattinata si chiude con le nostre due colonne

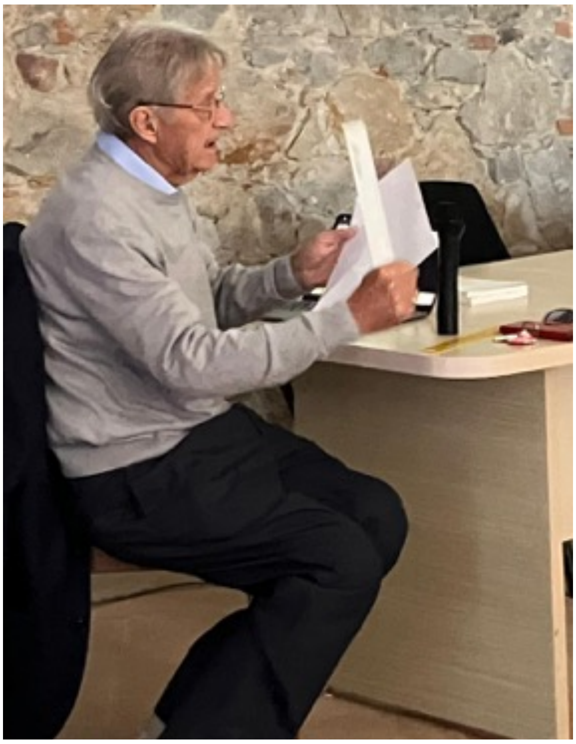
A teatro si ritorna la sera, con un simpatico e prezioso spettacolo canoro organizzato da Gianni Bagnoli, assessore alla cultura di Sinalunga.

Si esibiscono bambine e ragazze, nonché lo stesso Gianni, al pianoforte e Vanessa Mezzetti, la maestra di canto, con i quali ci facciamo poi fotografare, dopo aver rivolto loro complimenti e ringraziamenti da parte di tutti.

Non abbiamo immagini della bomba d'acqua che ci ha colti all'uscita dal teatro!
Siamo peraltro sopravvissuti e il giorno dopo grandi e piccini sono stati tutti ben impegnati nelle varie e rispettive attività, fino, per i piccoli, alla festa a loro dedicata al palazzetto dello sport di Torrita e per gli adulti, alla cena sociale con i festeggiamenti

A chi il compito della conferenza di chiusura il giorno successivo di questa grande e ricca avventura che è stata l'Associazione Rally Matematico Transalpino?

Ovviamente a François.



Applausi e ringraziamenti, ben meritati. Grazie François.

Calorosa cerimonia di chiusura con un delizioso coro guidato, *ça va sans dire*, da Francesca che tutti noi, compreso Andrea, il sindaco di Trequanda, apprezziamo molto.

Ringraziamenti calorosi e regali incrociati, grande emozione, fino a quello, a nome dell'ARMT, alla nostra dolce artista Aurora[3]

E François è ben ricercato durante l'aperitivo offerto dal comune di Trequanda

[3] L'autrice del logo della finale internazionale.

L'ARMT si è sciolta, ma non l'interesse per i problemi RMT che gli insegnanti potranno utilizzare in classe con i loro alunni, anche con il contributo della Banca di Problemi che François e Luc Olivier continueranno a gestire e arricchire.

GRAZIE