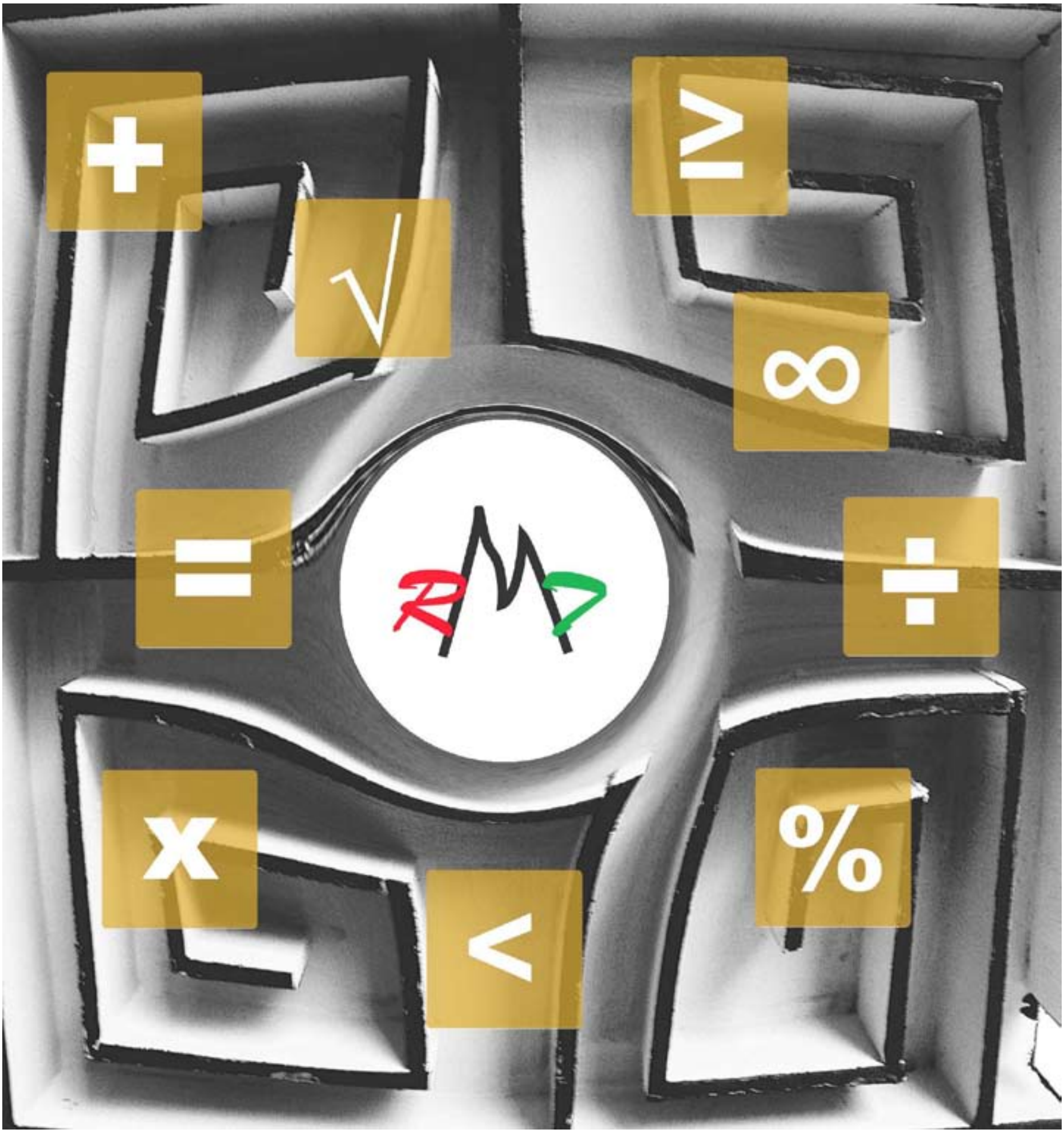
La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 14 septembre / settembre 2024



Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.eu

ISSN 223
4-9596

TABLE DES MATIÈRES / INDICE

Numéro 14, septembre 2024 / Numero 14, settembre 2024

L. Grugnetti, F. Jaquet
Éditorial 3
Editoriale 4

Presentazione del numero 5
Présentation du numéro 6

Pietro Di Martino
Il ruolo costruttivo dei problemi del RMT nella didattica della classe / Le rôle constructif des problèmes du RMT dans la pratique de la classe 9

Elena Marangoni e Rita Sangiorgi
L'importanza del Rally Matematico Transalpino nella Didattica d'aula quotidiana / L'importance des problèmes du Rallye Mathématique Transalpin dans la pratique de classe 17

François Jaquet e Rita Spatoloni
Á propos de division euclidienne / A proposito di divisione euclidea 25

Lucia Grugnetti e Angela Rizza
Problema a "Zig Zag"/ Problème à "Zig Zag" 47

François Jaquet
Une analyse a posteriori, ouverture sur des réflexions personnelles 61
Un'analisi a posterior1, apertura su riflessioni personali

Études / Approfondimenti

Gruppo Geometria piana / Groupe Géométrie Plane
Percorsi didattici per la geometria piana con problemi del RMT 75
Parcours didactiques pour la géométrie plane par des problèmes RMT

Groupe calcul et proportionnalité/ Gruppo Calcolo e proporzionalità
La proportionnalité et ses problèmes 125
La proporzionalità e i suoi problemi 139

Rubrica dedicata ai poster presentati al Convegno Internazionale di Faenza

Rubrique dédiée aux posters présentés à la Rencontre Internationale de Faenza

Articoli delle sezioni di / Articles des sections de:
Parma 153
Puglia 161
Sassari 169

EDITORIALE: IL CORAGGIO DI ANDARE OLTRE IL "CAMPO BASE"

Lucia Grugnetti e François Jaquet

I trentuno anni del Rally matematico, prima Romando e poi Transalpino, hanno costituito una lunga e vivace preparazione di quello che potremmo considerare come il "campo base" dell'ascensione verso un traguardo importante: l'uso dei "problemi RMT" nella didattica di classe.

Gli scopi del nostro Rally sono andati via via definendosi, dall'importanza di un lavoro di gruppo, nell'ambito del quale tutti gli allievi di una classe sono ugualmente coinvolti, al loro lavoro autonomo che esula totalmente dall'intervento dell'insegnante. Tutto ciò per quel che riguarda direttamente gli allievi.

Per quel che riguarda gli adulti, nelle vesti di animatori, insegnanti, ricercatori, l'attenzione è stata volta ovviamente alla preparazione dei problemi per le prove, all'organizzazione pratica di tali prove e, all'inizio in maniera piuttosto sporadica, all'analisi degli elaborati.

La costituzione dell'ARMT e poi dei gruppi di lavoro tematici ha dato un certo impulso alle analisi a posteriori che sono diventate la colonna portante del RMT e hanno anche portato all'aggiunta, nello statuto stesso della nostra Associazione, della voce relativa alla formazione degli insegnanti. Un'altra svolta importante è stata quella della decisione di costituire una Banca di problemi che non si fermi a una raccolta pedissequa degli enunciati, ma che offra una scheda di analisi a posteriori sintetica dei problemi raccolti.

Nello stesso tempo, analisi a posteriori non sintetiche hanno cominciato ad apparire nei numeri della Gazzetta di Transalpino, come peraltro anche nel presente numero.

Tutto ciò costituisce il tesoro del "campo base", con parte del tesoro ancora custodito e un po' nascosto, nelle "tende-sezioni" del campo base, laddove innumerevoli elaborati non sono stati "tirati fuori" dalle buste.

Campo base ricco~~,~~ ma, in un certo senso, statico, ben organizzato ma non volto, salvo gradite eccezioni, al coraggio, inteso come voglia e convinzione, di avventurarsi in un'ascensione verso una vetta sulla quale i problemi RMT diventano protagonisti di un'attività di classe.

Un'avventura che permette di andare oltre, appoggiandosi al campo base, alla Banca, in primis, per esplorare l'ambiente da altro punto di vista, che porta dall'orizzontale (il campo base) al verticale: la situazione in classe.

In questi trentuno anni, il rapporto quantità di lavoro organizzativo per la gara /uso dei problemi in classe era ed è rimasto sbilanciato. E certamente sbilanciato è il rapporto tra numero di classi impegnate nelle prove del RMT e numero di classi nelle quali i problemi RMT costituiscono un volano per almeno alcuni segmenti di apprendimento della matematica! In questo senso il campo base non è e non è stato neanche all'inizio, la finalità primaria del RMT, che, come sappiamo bene consiste nel miglioramento dell'apprendimento, per gli allievi, e la formazione per gli insegnanti.

Il materiale a disposizione è davvero tanto e può permettere di cambiare l'assetto "gara" in assetto "confronto dialettico tra classi" che lavorano con gli stessi problemi e poi, anche avvalendosi dei mezzi informatici attuali, si incontrano per "difendere" le proprie procedure risolutive, mentre compiono anch'essi un'ascensione costruttiva, reale e proficua, verso la costruzione di saperi.

ÉDITORIAL : LE COURAGE D'ALLER AU-DELÀ DU « CAMP DE BASE »

Lucia Grugnetti et François Jaquet

Les trente et un ans du Rallye mathématique, d'abord Romand puis Transalpin, ont constitué une longue et vivante préparation de ce que l'on pourrait considérer comme le « camp de base » de l'ascension vers un objectif important: l'utilisation des « problèmes RMT » dans la pratique de classe.

Les objectifs de notre Rallye ont été progressivement définis, depuis l'importance du travail de groupe, dans lequel tous les élèves d'une classe sont impliqués de manière égale, jusqu'à leur travail autonome, totalement indépendant de l'intervention de l'enseignant. Tout cela pour ce qui concerne directement les élèves.

En ce qui concerne les adultes, dans leur rôle d'animateurs, d'enseignants, de chercheurs, l'attention à était évidemment portée à la préparation des problèmes pour les épreuves, à l'organisation pratique de ces épreuves et, de manière assez sporadique, au début, à l'analyse des copies.

La création de l'ARMT, puis des groupes de travail thématiques, ont donné une certaine impulsion aux analyses a posteriori qui sont devenues la colonne vertébrale du RMT et ont également conduit à l'ajout, dans les statuts de notre Association, du point relatif à la formation des enseignants. Un autre tournant important a été la décision de créer une banque de problèmes qui ne se limite pas à une collecte servile des énonces des problèmes, mais qui propose une analyse synthétique a posteriori des problèmes collectés.

Parallèlement, des analyses a posteriori non synthétiques ont commencé à apparaître dans les numéros de la Gazette di Transalpie, ainsi que dans le présent numéro.

Tout cela constitue le trésor du "camp de base", dont une partie est encore gardée et quelque peu cachée, dans les « tentes-sections » du camp de base, où d'innombrables copies n'ont pas été "sorties" des enveloppes.

Camp de base riche, mais, en un certain sens, statique, bien organisé mais ne visant pas, à quelques exceptions bienvenues, le courage, comme désir et conviction, de s'aventurer dans une ascension vers un sommet sur lequel les problèmes RMT deviennent les protagonistes d'une activité en classe.

Une aventure qui permet d'aller plus loin, en s'appuyant sur le camp de base, sur la Banque avant tout, d'explorer l'environnement sous un autre point de vue, qui fait passer de l'horizontale (le camp de base) à la verticale : la situation dans la classe.

Au cours de ces trente et une années, le rapport entre la quantité de travail d'organisation du concours, l'utilisation des problèmes en classe a été et est resté déséquilibré. Et le rapport entre le nombre de classes impliquées dans les épreuves RMT et le nombre de classes dans lesquelles les problèmes RMT constituent un moteur pour au moins certains segments de l'apprentissage des mathématiques, est certainement déséquilibré ! En ce sens, le camp de base n'est pas, et n'était même pas au début, la finalité première du RMT, qui, on le sait bien, consiste à améliorer l'apprentissage des élèves et la formation des enseignants.

Il y a tellement de matériel disponible qui peut permettre de transformer la structure de « compétition » en une structure « comparaison dialectique entre classes » qui travaillent sur les mêmes problèmes et qui, en utilisant aussi les moyens informatiques actuels, se réunissent pour « défendre » leurs propres procédures de résolution, tout en constituant une ascension constructive, réelle et profitable vers la construction de la connaissance.

PRESENTAZIONE DEL NUMERO

Questo numero 14 de La Gazzetta di Transalpino, aperto dall'articolo relativo a una delle due conferenze dell'incontro di Faenza, presenta un articolo incentrato su attività didattiche in classe con problemi RMT e a seguire, cinque articoli di cui due nella sezione di approfondimento, relativi ad analisi a posteriori di nostri problemi con apertura verso la formazione con suggerimenti di percorsi didattici. La parte conclusiva presenta tre articoli relativi a tre poster presentati a Faenza.

- **Pietro Di Martino,** nel suo articolo dal titolo **Il ruolo costruttivo dei problemi del RMT nella didattica della classe** esplora alcune delle potenzialità dell'attività del Rally per sviluppare competenze reali di problem solving e per contrastare, prevenendo, l'insorgere di un rapporto negativo con la matematica e, più in particolare, con la risoluzione di problemi. Presenta, in questa chiave di lettura, diversi esempi di problemi del RMT.

- **Elena Marangoni e Rita Sangiorgi** presentano l'articolo il cui titolo **L'importanza del Rally Matematico Transalpino nella Didattica d'aula quotidiana** ben sottolinea come, con l'integrazione dei problemi RMT in classe, gli insegnanti possano contribuire a creare un ambiente di apprendimento dinamico e motivante, dove ogni allievo ha l'opportunità di migliorare le proprie conoscenze. La presentazione da parte di allieve e allievi di poster al convegno di Faenza costituisce una sintesi dell'attività costruttiva da loro vissuta.

- **A proposito di divisione euclidea**, è il titolo dell'articolo di **François Jaquet e Rita Spatoloni**, i quali, a partire dall'analisi a posteriori del problema Arcobaleno illustrano come gli allievi hanno risolto il problema e lo stato della loro costruzione di quella che viene chiamata "divisione con resto" di indubbio interesse per l'intero campo dell'aritmetica.

- Dell'analisi a posteriori del problema La formichina si è persa della seconda prova del trentesimo RMT, si sono occupate **Lucia Grugnetti e Angela Rizza** con il contributo di **Federica Curreli e Cinzia Utzeri**, nell'articolo dal titolo **Problema a zig zag**. La potenzialità principale di questo problema è la possibilità di cominciare ad impostare la "scoperta" di un percorso che converge in un punto, del quale si vuole trovarne la lunghezza.

- **François Jaquet** nell'articolo dal titolo **Un'analisi a posteriori, apertura su riflessioni personali** si è occupato del relativo problema e presenta dati reali desunti dalla produzione degli allievi, intrecciati con osservazioni che riflettono le sue personali e attuali concezioni per migliorare l'apprendimento della matematica e la formazione degli insegnanti.

Études / Approfondimenti

- Come recita il titolo del proprio articolo **Percorsi didattici per la geometria piana con problemi del RMT**, il **Gruppo Geometria piana** presenta suggerimenti per percorsi didattici in tema di geometria piana, a partire da problemi RMT analizzati a posteriori su un gran numero di elaborati e, in alcuni casi, anche sperimentati nelle classi dei membri del gruppo stesso. L'attività pluriennale del Gruppo geometria piana ha portato all'individuazione di tre tematiche intese come altrettante colonne portanti per l'immersione degli allievi nel mondo della geometria piana: "area e perimetro", "distanze e altezze" e "misure e approssimazione".

- **François Jaquet e Stefania Massai**, a nome del **Gruppo proporzionalità**, presentano l'articolo dal titolo **La proporzionalità e i suoi problemi** nella cui prima parte viene ricordato che il concetto di proporzionalità è problematico per tutte le discipline delle scienze umane, e non solo per l'insegnamento della matematica, e si è evoluto nel corso del XX secolo, nel passaggio dalla "teoria delle proporzioni" alle attuali tendenze della proporzionalità inserita nel quadro algebrico delle funzioni lineari. La seconda parte analizza, con alcuni esempi, l'attenzione dei problemi RMT per la proporzionalità.

Rubrica dedicata ai poster presentati al Convegno Internazionale di Faenza

In questa rubrica vengono presentati gli articoli relativi ai poster delle sezioni di Parma, Puglia e Sassari dai titoli rispettivi **Ruolo costruttivo dei problemi del RMT nella didattica della classe**, **Che combinazione**, **Capovolgiamo l'approccio alla geometria**.

PRÉSENTATION DU NUMÉRO

Ce numéro 14 de La Gazette di Transalpie, ouvert par l'article relatif à l'une des deux conférences de la rencontre de Faenza, présente un article axé sur les activités didactiques en classe avec des problèmes RMT et pour suivre, cinq articles sur des analyses a posteriori de nos problèmes avec des ouvertures à la formation avec des propositions de parcours pédagogiques. La dernière partie présente trois articles sur trois posters présentés à Faenza.

- **Pietro Di Martino,** dans son article **le rôle constructif des problèmes du RMT dans la pratique de la classe** explore les potentialité de l'activité Rallye pour développer de réelles compétences en résolution de problèmes et pour contraster, en la prévenant, l'apparition d'une relation négative avec les mathématiques et, plus particulièrement, avec la résolution de problèmes.

- **Elena Marangoni et Rita Sangiorgi** présentent un article dont le titre **L'importance des problèmes du Rallye Mathématique Transalpin dans la pratique de classe** souligne comme, par l'usage des problèmes RMT dans la pratique de classe, les enseignants peuvent contribuer à créer un environnement d'apprentissage dynamique et motivant, dans lequel chaque élève a la possibilité d'améliorer ses connaissances.

- **À propos de division euclidienne**, est le titre de l'article de **François Jaquet et Rita Spatoloni**, qui, à partir de l'analyse a posteriori du problème Arc-en-ciel décrivent comment les élèves l'ont résolu et à quel niveau de ils se situent dans la construction du concept de « division avec reste », d'un intérêt incontestable pour le domaine de l'arithmétique.
- **Lucia Grugnetti et Angela Rizza** présentent, avec la contribution de **Federica Curreli et Cinzia Utzeri**, l'article intitulé **Problème en zigzag** sur l'analyse a posteriori du problème La fourmi s'est perdue, de la deuxième épreuve du trentième RMT. La potentialité essentielle de ce problème concerne la « découverte d'un chemin qui converge vers un point » dont on veut trouver la longueur.
- **François Jaquet,** dans l'article **Une analyse a posteriori, ouverture sur des réflexions personnelle**, présente certaines données issues de l'observation de copies des élèves du problème Points cachés et des réflexions personnelles qu'elles suscitent en vue de l'amélioration de l'apprentissage des mathématiques et de la formation des enseignants.

Études / Approfondimenti

- Comme indiqué dans le titre de son article **Parcours pédagogiques pour la géométrie plane avec des problèmes RMT**, le **Groupe Géométrie plane** présente des suggestions de parcours pédagogiques sur le thème de la géométrie plane, à partir de problèmes RMT largement analysés a posteriori dans un grand nombre d'articles et dans certains cas, même expérimentés dans les classes des membres du groupe.
  L'activité pluriannuelle du Groupe Géométrie Plane a conduit à l'identification de trois thématiques considérée comme autant de piliers pour l'immersion des élèves, notamment des catégories de 6 à 8, dans le monde de la géométrie plane, déclinées respectivement en « aire et périmètre », « distances et hauteurs » et « mesures et approximation ».

- **François Jaquet et Stefania Massai**, au nom du **Groupe Proportionnalité**, présentent l'article **La proportionnalité et ses problèmes** dans la première partie duquel il est rappelé que le concept de proportionnalité est problématique pour toutes les disciplines des sciences humaines, et non seulement pour l'enseignement des mathématiques, et a évolué au cours du 20e siècle, lors du passage de la traditionnelle « théorie des proportions » aux tendances actuelles de la proportionnalité envisagée dans le cadre algébrique des fonctions linéaires.

Rubrique dédiée aux posters présentés lors de la Rencontre Internationale de Faenza

On trouve dans cette rubrique les articles relatifs aux posters des sections de Parme, Pouilles et Sassari dont les titres respectifs sont : **Rôle constructif des problèmes du RMT dans la didactique de classe**, **Quelles combinaisons, Renversons l'approche de la géométrie**.

IL RUOLO COSTRUTTIVO DEI PROBLEMI DEL RMT NELLA DIDATTICA DELLA CLASSE

LE RÔLE CONSTRUCTIF DES PROBLÈMES DU RMT DANS LA PRATIQUE DE LA CLASSE

Pietro Di Martino

Università di Pisa – Italia

L'importanza dell'attività di problem solving nel percorso formativo in matematica / L'importance des activités du problem solving dans l'enseignement des mathématiques

Le Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione (MIUR, 2012) sono abbastanza esplicite rispetto all'importanza di sviluppare un percorso formativo, fin dall'infanzia, che sia focalizzato sul porsi e affrontare problemi: «Favorire l'esplorazione e la scoperta, al fine di promuovere il gusto per la ricerca di nuove conoscenze. In questa prospettiva, la problematizzazione svolge una funzione insostituibile: sollecita gli alunni a individuare problemi, a sollevare domande, a mettere in discussione le conoscenze già elaborate, a trovare appropriate piste d'indagine, a cercare soluzioni originali».

Les Indications Nationales (I. N.) pour les programmes de l'école maternelle et du premier cycle de l'enseignement en Italie (MIUR, 2012) sont assez explicites quant à l'importance de développer, dès l'enfance, un parcours éducatif axé sur la façon de poser et d'aborder les problèmes et la résolution de problèmes : « Encourager l'exploration et la découverte, afin de favoriser le goût de la recherche de nouvelles connaissances. Dans cette perspective, la problématisation remplit une fonction irremplaçable : elle pousse l'élève à identifier des problèmes, à se poser des questions, à remettre en question les connaissances déjà développées, à trouver des pistes d'investigation appropriées, à rechercher des solutions originales ».

D'altra parte, nella maggior parte dei casi, proprio l'educazione matematica sembra fallire rispetto alla difficile sfida indicata dalle Indicazioni Nazionali.
Zan (1998) mostrò, con una ricerca sulle decisioni e sulla percezione dei bambini di quanto siano chiamati a prenderli, come già a livello di scuola primaria la matematica sia vista come la disciplina scolastica nella quale è meno richiesto di prendere decisioni.
Una sorta di paradosso: proprio la disciplina che dovrebbe lavorare sulla risoluzione di problemi, sul pensiero produttivo e, dunque, sulle scelte strategiche, è riconosciuta come quella nella quale non è richiesto di prendere decisioni. Di Martino (2019) inoltre mostra come le emozioni associate al problema (di matematica), al dover affrontare un problema peggiorino evidentemente dalla scuola dell'infanzia alla fine della scuola primaria, dove, non di rado, i problemi diventano "un nemico" degli allievi.

D'autre part, dans la plupart des cas, l'enseignement des mathématiques lui-même semble échouer face au difficile défi lancé par les Indications Nationales.
Zan (1998) a montré, à travers des recherches sur les décisions et sur la perception qu'ont les enfants du nombre de fois où ils sont appelés à les prendre, comment, déjà au niveau de l'école primaire, les mathématiques sont considérées comme la matière scolaire dans laquelle on est le moins amené à prendre des décisions.
Une sorte de paradoxe : la discipline-même qui devrait travailler sur la résolution de problèmes, la pensée productive et donc les choix stratégiques, est reconnue comme celle dans laquelle on n'est pas appelé à prendre des décisions. Di Martino (2019) montre également comment les émotions associées au problème (en mathématiques), au fait de devoir faire face à un problème, s'aggravent évidemment de l'école maternelle à la fin de l'école primaire, où il n'est pas rare que les problèmes deviennent « un ennemi » des élèves.

Questo fallimento rispetto a quanto richiesto dalle Indicazioni Nazionali a cosa è dovuto?
Le cause possono essere molteplici, ma un aspetto sicuramente rilevante è il tipo di "situazioni problema" che tipicamente sono proposte in classe, situazioni che richiedono l'attivazione di un processo riproduttivo piuttosto che produttivo, e dunque esercizi più che veri e propri problemi.
Questo tipo di compiti, spesso etichettati comunque come "problemi di matematica", da una parte giustificano le convinzioni degli allievi di non dover prendere decisioni in matematica, dall'altra incidono sulle emozioni. Infatti, in richieste di tipo riproduttivo, a differenza che in richieste di tipo produttivo (problemi), l'errore è segno di fallimento: l'allievo non ha riprodotto come doveva la procedura nota. Inoltre, la rapidità nell'esecuzione della procedura, insieme alla correttezza, appare spesso essere un segno di qualità.

Cet échec à répondre aux exigences des Indications Nationales, à quoi est -il dû ?
Les causes peuvent être multiples, mais un aspect certainement pertinent est le type de « situations problématiques » qui sont généralement proposées en classe, des situations qui nécessitent l'activation d'un processus reproductif plutôt que productif, et donc des exercices plutôt que des problèmes réels.
Ce type de devoirs, souvent qualifiés de « problèmes de mathématiques », d'une part justifie la conviction des élèves selon laquelle ils n'ont pas à prendre de décisions en mathématiques, et d'autre part, affecte les émotions. En effet, dans les demandes de type reproductif, contrairement aux demandes de type productif (problèmes), l'erreur est un signe d'échec : l'étudiant n'a pas reproduit comme il le devrait la procédure connue. Par ailleurs, la rapidité d'exécution de la procédure, ainsi que l'exactitude, apparaissent souvent comme un gage de qualité.

Queste due caratteristiche appaiono strettamente legate all'insorgere della paura di sbagliare e della frustrazione rispetto al tempo in matematica che molti allievi maturano fin dai primi anni scolari.
Infine, la richiesta di tipo riproduttivo annulla il senso di qualsiasi richiesta di natura argomentativa: l'allievo non deve prendere decisioni e quindi non ci sono (o sono i rari i casi in cui ci sono) ragioni strategiche relative all'esecuzione della procedura.

Ces deux caractéristiques semblent étroitement liées à l'apparition de la peur de commettre des erreurs et à la frustration eu égard au temps passé en mathématiques que de nombreux élèves développent dès leurs premières années scolaires.
Enfin, la demande de type reproductif annule le sens de toute demande à caractère argumentatif : l'élève n'a pas à prendre de décision et il n'y a donc pas (ou il n'existe que de rares cas) de raisons stratégiques liées à l'exécution de la procédure.

Rispetto agli ambiziosi e significativi obiettivi su problem solving e argomentazione fissati dalle I.N. è cruciale proporre buoni problemi.
In Problemi al centro, il progetto sul problem solving alla scuola primaria avviato nel 2019, abbiamo evidenziato cosa caratterizza un buon problema (Di Martino & Zan, 2019): essere davvero un problema e quindi non una situazione nota per gli allievi; essere significativo rispetto ai contenuti, abilità e competenze matematiche; essere comprensibile dal punto di vista della forma linguistica; nel caso sia un problema in contesto, essere autentico; essere inclusivo prevedendo la possibilità di esplorazione a più livelli e con diverse strategie.
In questo quadro ci chiediamo quali siano le potenzialità dell'attività del Rally per sviluppare competenze reali di problem solving e per contrastare, prevenendo, l'insorgere di un rapporto negativo con la matematica e, più in particolare, con la risoluzione di problemi.

Par rapport aux objectifs ambitieux et significatifs du problem solving et d'argumentation fixés par l'I.N. il est crucial de proposer de bons problèmes.
Dans Problemi al centro, le projet du problem solving à l'école primaire lancé en 2019, nous avons mis en évidence ce qui caractérise un bon problème (Di Martino & Zan, 2019) : être véritablement un problème et non une situation connue des élèves ; être significatif en ce qui concerne le contenu, les aptitudes et les compétences mathématiques ; être compréhensible du point de vue de la forme linguistique ; au cas où il s'agirait d'un problème de contexte, être authentique ; être inclusif en offrant la possibilité d'une exploration à plusieurs niveaux et avec différentes stratégies.
Dans ce contexte, nous nous demandons quel est le potentiel de l'activité Rallye pour développer de réelles compétences en résolution de problèmes et pour contraster, en la prévenant, l'apparition d'une relation négative avec les mathématiques et, plus particulièrement, avec la résolution de problèmes.

Le potenzialità del Rally per l'attività di problem solving / Le potentiel du Rallye pour l'activité du problem solving

Nel suo intervento all'undicesimo Incontro internazionale sul Rally Matematico Transalpino, Rosetta Zan (2008) elencava già alcuni aspetti peculiari del RMT rispetto alla pratica tradizionale di attività di risoluzione di problemi in classe, aspetti riassunti nella tabella sotto:

Dans sa conférence à la onzième Rencontre Internationale du Rallye Mathématique Transalpin, Rosetta Zan (2008) avait déjà énuméré certains aspects particuliers du RMT par rapport à la pratique traditionnelle des activités de résolution de problèmes en classe, aspects résumés dans le tableau ci-dessous :

RMT	Pratica tradizionale
Non si sa a priori quali conoscenze utilizzare	Si devono utilizzare conoscenze apprese di recente
Sono possibili più processi risolutivi	È previsto un unico processo risolutivo
Sono previste risposte parziali	È del tipo «tutto o niente»
Risoluzione a gruppi	Risoluzione da soli
50 minuti di tempo	Dipende dall'attività, ma per un solo problema meno di 50 minuti
I gruppi lavorano su problemi diversi	Tutti lavorano sullo stesso problema
L'insegnante non è presente	L'insegnante è presente

RMT	Pratique traditionnel
On ne sait pas a priori quelles connaissances utiliser	Les connaissances nouvellement acquises doivent être utilisées
Plusieurs processus de résolution sont possibles	On attend un seul processus de résolution
Des réponses partielles sont attendues	C'est du type "tout ou rien"
Résolution par groupes	Résolution individuelle
50 minutes de temps	Ça dépend de l'activité (mais pour un seul problème < 50min)
Les groupes travaillent sur différents problèmes	Tout le monde travaille sur un même problème
Enseignant absent	Enseignant présent

Già questo quadro evidenzia caratteristiche interessanti e, se si vogliono sfruttare i problemi del RMT anche per l'attività in classe, fornisce spunti per evidenziare le attenzioni che dovrebbe avere l'insegnante per favorire il successo di questa "transizione": in particolare, l'attenzione a smussare gli eventuali aspetti di competitività, e l'attenzione alla discussione successiva alla risoluzione per lavorare sui processi e valorizzarli.
Detto questo, qui ci vogliamo focalizzare sui problemi del Rally e discutere se, quanto e in che senso, i problemi del RMT rappresentino un repertorio di buoni problemi, nel senso introdotto precedentemente.
Innanzitutto, una questione legata all'organizzazione della raccolta sul sito ufficiale del RMT tutt'altro che secondaria, i problemi presenti sul sito sono tanti e suddivisi per diverse categorie: questo permette una ricerca mirata rispetto a obiettivi, grado scolare, processi in gioco.

Ce tableau met déjà en évidence des caractéristiques intéressantes et, si l'on veut exploiter les problèmes du RMT également pour l'activité en classe, il fournit des idées pour mettre en évidence l'attention que doit avoir l'enseignant pour favoriser la réussite de cette « transition » : en particulier, l'attention à aplanir tous les aspects de la compétitivité, et à approfondir la discussion qui suit la résolution pour travailler sur les processus et les améliorer.
Cela dit, nous souhaitons ici nous concentrer sur les problèmes du Rallye et discuter si, et dans quelle mesure et dans quel sens, les problèmes RMT représentent un répertoire de bons problèmes, au sens introduit précédemment.
Tout d'abord, une question liée à l'organisation de l'ensemble des problèmes sur le site officiel du RMT est tout sauf secondaire, les problématiques présentes sur le site sont nombreuses et réparties en différentes catégories : cela permet de faire des recherches ciblées par rapport aux objectifs, au niveau scolaire, aux processus impliqués.

Anche le scelte su cui si basa la "competizione" sono interessanti, in particolare la seguente riportata sul sito ufficiale (nella Banca dei problemi): "Il compito degli allievi non si limita alla ricerca e scoperta della o delle soluzioni del problema, ma comprende anche la descrizione della procedura di risoluzione. Questa è **una clausola esplicita del contratto** con gli allievi che sanno così che non è solo la risposta quella che conta".
Interessante in questa citazione che si faccio anche esplicito riferimento alla possibilità che ogni problema possa avere più soluzioni.
Passando ai problemi del RMT, analizzandoli si nota come la clausola del contratto che abbiamo riportato sopra, è sempre esplicitamente richiamata, anche nei problemi proposti ai primi gradi scolari, chiedendo alternativamente di spiegare o di giustificare la propria risposta, come mostrato negli esempi riportati più sotto.

Les choix sur lesquels repose le "concours" sont également intéressants, notamment ceux qui sont mentionnés sur le site officiel (dans la Banque de Problèmes) : « La tâche des élèves ne se limite pas à la recherche puis à la découverte de la (les) solution(s) du problème, elle comprend encore la description de la démarche de résolution. C'est une clause explicite du contrat des élèves : ils savent ainsi qu'il n'y a pas que la réponse qui compte. »
Il est intéressant dans cette citation qu'une référence explicite soit également faite à la possibilité que chaque problème puisse avoir plusieurs solutions.
En revenant aux problèmes du RMT, en les analysant, nous constatons que la clause du contrat que nous avons rapportée ci-dessus est toujours explicitement mentionnée, même dans les problèmes proposés aux premières années, en demandant alternativement d'expliquer ou de justifier sa réponse, comme dans les exemples ci-dessous.

SPETTACOLO DI FINE ANNO (RMT 13.II.1)

Nella classe di Luca ci sono 21 alunni che hanno tutti nomi differenti.

Per lo spettacolo di fine anno, gli alunni che sanno suonare uno strumento musicale o che sanno ballare preparano il balletto. Gli altri alunni della classe, che non sanno né suonare né ballare, preparano una piccola rappresentazione teatrale.

- Gli alunni che sanno suonare uno strumento sono: Giacomo, Laura, Luisa, Luca, Marco, Roberto, Sara, Valentina.
- Gli alunni che sanno ballare sono: Clara, Giulia, Laura, Marta, Roberto, Sara, Valentina.

Quanti alunni preparano il balletto?

Quanti alunni preparano la rappresentazione teatrale?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

SPECTACLE DE FIN D'ANNÉE (RMT 13.II.01)

Dans la classe de Luc, il y a 21 élèves, qui ont tous un prénom différent.

Pour le spectacle de fin d'année, les élèves qui savent jouer d'un instrument de musique ou qui savent danser préparent le ballet.

Les autres élèves de la classe, qui ne savent ni jouer d'un instrument ni danser, préparent une pièce de théâtre.

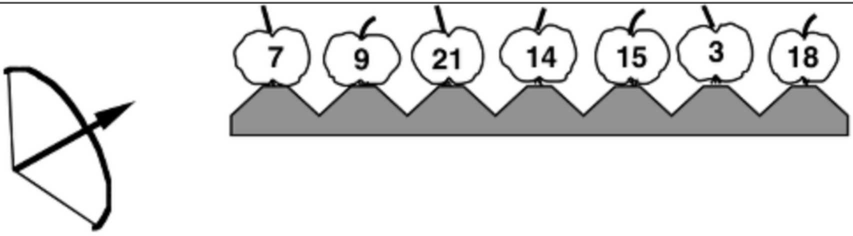
- Les élèves qui savent jouer d'un instrument de musique sont : Jean, Laure, Luisa, Luc, Marc, Robert, Sara, Valentine.
- Les élèves qui savent danser sont : Claire, Julie, Laure, Marta, Robert, Sara, Valentine.

Combien d'élèves préparent le ballet ?

Combien d'élèves préparent la pièce de théâtre ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

TIRO CON L'ARCO (RMT 6.F.1)

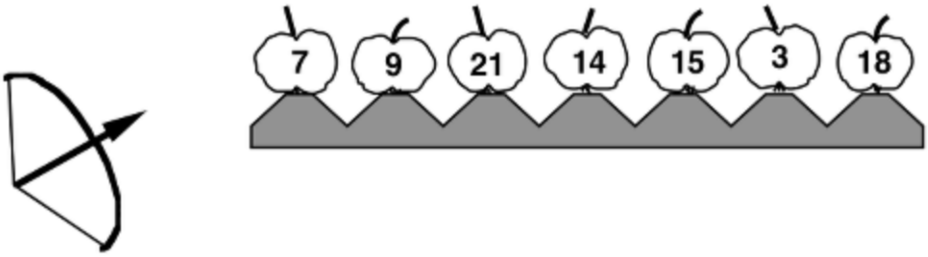


Guglielmo vuole ottenere esattamente 40 punti con il numero minore possibile di frecce.

Quali sono le mele che Guglielmo decide di infilzare?

Giustificate la vostra risposta.

TIR À L'ARC (RMT 6.F.1)



Guillaume aimerait obtenir 40 points exactement, avec le moins de flèches possible.

Quelles pommes doit-il viser ?

Justifiez votre réponse.

Una caratteristica significativa (e elemento di qualità) dei problemi presenti nella Banca dei problemi del RMT è anche il fatto che siano realmente pensati in verticale, ne è un esempio il problema raffigurato qui di seguito, suggerito per un range che va dalla terza primaria alla terza media.

Une caractéristique significative (et un élément de qualité) des problèmes présents dans la Banque des problèmes du RMT est aussi le fait qu'ils sont réellement pensés verticalement, un exemple en est le problème décrit ci-dessous, proposé pour un cursus qui va de la troisième classe d'école primaire à la troisième classe du collège.

I GETTONI DI MICHELA

Identificazione

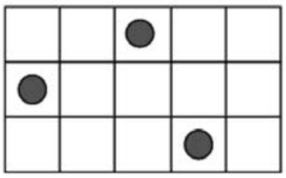
Rally: 06.II.07 ; categorie: 3, 4, 5, 6, 7, 8 ; ambito: LR
Famiglie:

- CO - Cercare combinazioni
- CO/DEN - Contare combinazioni

Remarque et s

Enunciato

Michela vuole sistemare tre gettoni nella griglia in modo che:
- ci sia un gettone in ogni riga
- non ci sia più di un gettone nella stessa colonna



Qui è rappresentata una soluzione, ma ce ne sono altre.

Quante soluzioni ci sono in tutto?

Indicate tutte le vostre soluzioni

LES JETONS DE MICHELA

Identification

Rallye: 06.II.07 ; catégories: 3, 4, 5, 6, 7, 8 ; domaine: LR
Familles:

- CO - Chercher des arrangements ou des combinaisons
- CO/DEN - Dénombrer des combinaisons ou des arrangements

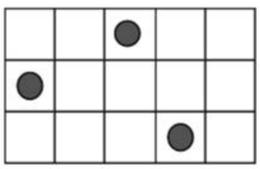
Remarque et suggestion

Résumé

Dénombrer le nombre de façons de disposer 3 jetons dans une grille 3 lignes x 5 colonnes de sorte qu'il y ait un jeton dans chaque ligne et qu'il n'y ait pas plus d'un jeton dans chaque colonne.

Enoncé

Michela désire déposer trois jetons dans les cases de la grille de sorte que :
- il y ait un jeton dans chaque ligne,
- il n'y ait pas plus d'un jeton dans chaque colonne.



Une solution est représentée ici. Mais il y en a d'autres.

Combien y a-t-il de solutions possibles en tout ?

Indiquez toutes vos solutions.

Questa caratteristica di “verticalità” dei singoli problemi, da una parte è garanzia di molteplici livelli di approccio possibili (inclusività del problema), dall’altra permette, volendo, un lavoro di confronto di strategie negli anni, sia all’insegnante con la sua classe, sia, eventualmente, all’interno della scuola.
Oltre alla verticalità, i singoli problemi del Rally o certe categorie di problemi del Rally sono basati su idee molto interessanti.
Ad esempio, per contrastare alcuni stereotipi tipici associati ai problemi, come nel caso del problema seguente, pensato per la terza primaria, che ha la particolarità di non avere numeri nel testo e di non richiedere operazioni per arrivare alla risposta.

Cette caractéristique de « verticalité » des problèmes, d'une part est une garantie de multiples niveaux d'approche possibles (inclusivité du problème), d'autre part elle permet, si on le souhaite, une comparaison des stratégies au fil des années, tant pour l'enseignant avec sa classe, que éventuellement, au sein de l'école.
En plus de la verticalité, les problèmes du Rallye ou certaines catégories de problèmes de Rallye reposent sur des idées très intéressantes.
Par exemple, pour contrer certains stéréotypes typiques associés aux problèmes, comme dans le cas du problème suivant, conçu pour la troisième classe du primaire, qui a la particularité de ne pas comporter de nombres dans le texte et de ne pas nécessiter d'opérations pour arriver à la réponse.

FUNGHI (RMT 11.I.3)

Andrea, Roberto, Daniele e Francesco hanno raccolto dei funghi nel bosco.

- Francesco ne ha trovati più di Daniele.
- Andrea ne ha meno di Daniele.
- Andrea e Roberto hanno insieme tanti funghi quanti quelli che hanno insieme Daniele e Francesco.

Chi ha trovato più funghi? Chi ne ha trovati di meno?
Spiegate le vostre risposte.

LES CHAMPIGNONS (RMT 11.I.3)

André, Robert, Daniel et François ont trouvé des champignons dans la forêt.

- François en a trouvé plus que Daniel.
- André en a moins que Daniel.
- André et Robert, les deux ensemble, ont autant de champignons que Daniel et François ensemble.

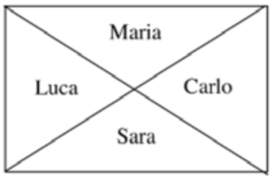
Qui a trouvé le plus de champignons ? Qui en a trouvé le moins ?
Expliquez vos réponses.

O, più in generale, per favorire e supportare importanti scelte didattiche, come quello di introdurre in geometria il confronto tra grandezze prima di lavorare sul calcolo di misure attraverso formule.

Ou, plus généralement, pour encourager et pour accompagner des choix pédagogiques importants, comme introduire la comparaison des grandeurs en géométrie avant de travailler sur le calcul des mesures par des formules.

LA TORTA DI NONNA LUCIA (RMT 22.II.6)

Nonna Lucia ha preparato una torta rettangolare al cioccolato per la merenda dei suoi nipoti Luca, Carlo, Sara e Maria.
Per darne una fetta ciascuno la divide in questo modo:



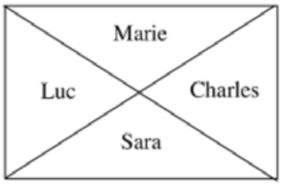
Luca e Carlo non sono contenti perché pensano che Sara e Maria abbiano i due pezzi più grandi.
Sara e Maria sostengono invece che ognuno ha ricevuto la stessa quantità di torta.

Chi ha ragione?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

LA TARTE DE MAMIE LUCIE

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Queste idee possono essere di spunto anche per costruire buoni problemi e per espandere, volendo, la consistenza narrativa dei problemi del RMT: aspetto più trascurato, forse anche per motivi contingenti alla competizione, nella quale, come detto, non è possibile l'interazione continua con l'adulto esperto per la comprensione del testo.
Per concludere, voglio mostrare un esempio di questa trasformazione a partire dall'interessante problema senza numeri dei funghi raccolti nel bosco.
Problema veramente interessante dal punto di vista matematico che "non giustifica" narrativamente l'interesse per la risposta alla domanda.

Ces idées peuvent également être un point de départ pour construire de bons problèmes et pour élargir, si on le souhaite, la cohérence narrative des problèmes du RMT : un aspect plus négligé, peut-être aussi pour des raisons dépendantes du concours dans lequel, comme mentionné, une interaction continue avec l'adulte expert pour la compréhension du texte n'est pas possible
Pour conclure, je souhaite montrer un exemple de cette transformation à partir du problème intéressant sans nombre de champignons récoltés en forêt.
Problème vraiment intéressant d'un point de vue mathématique qui, narrativement "ne justifie pas" l'intérêt de la réponse à la question.

Al laghetto di Alifana Lakes in provincia di Campobasso si svolge la finale regionale di pesca tra le coppie di allievi delle scuole medie del Molise. Le due coppie che si sfideranno in finale sono Arianna e Mirko della Scuola media Pietrabbondante, e Bruno e Ginevra della Scuola media Montini. La finale regionale segue le regole delle fasi provinciali: le due squadre saranno divise, un pescatore per squadra andrà nella zona A (Arianna e Bruno), un pescatore per squadra nella zona B (Ginevra e Mirko). I pescatori avranno tre ore di tempo, dalle 9 alle 12, al termine delle tre ore vincerà la squadra della scuola che insieme avrà pescato il maggior numero di pesci (la gara delle scuole è a numero di pescate e non a peso).
Alle 12 i tre giudici di gara (primo, secondo e terzo giudice) danno lo stop alla gara, controllano che tutti abbiano posato le proprie canne e invitano le due squadre a mettere insieme i propri pesci per procedere alla conta. Arianna, mentre unisce i pesci pescati con quelli di Mirko, guarda la sacca di Ginevra e dice tutta contenta a Mirko: "guarda, mi sembra evidente che ho presi più pesci io di Ginevra". Mirko sconsolato le risponde: "sì, ma io che ho pescato vicino a lei, sono sicuro di aver preso meno pesci di Ginevra". C'è dunque una grande aspettativa per la conta finale, il risultato è molto incerto. Il primo giudice procede alla conta e piuttosto incredulo riferisce che il numero di pesci pescato da Arianna e Mirko è uguale al numero di pesci pescato da Bruno e Ginevra.
"E quindi?" esclama il secondo giudice "come facciamo a decidere la coppia che ha vinto e che deve andare alla finale nazionale?". Il terzo giudice guardando il regolamento legge: "in caso di parità nel numero totale di pesci pescato dalle coppie, vince la coppia che ha il pescatore che ha pescato più pesci tra tutti e quattro". Il primo giudice afferma: "Però abbiamo messo i pesci insieme come si fa a sapere ora chi tra Arianna, Bruno, Ginevra e Mirko ha pescato più pesci?". Interviene il secondo giudice: "In realtà mentre controllavo Arianna e Mirko che mettevano insieme i loro pesci ho visto chiaramente che Arianna ha preso più pesci di Ginevra, mentre Mirko ha preso meno pesci di Ginevra".
Supponendo vere tutte le informazioni raccolte durante la giornata di gara, si può stabilire chi hi vinto o manca qualche dato? Spiega perché

La finale régionale de pêche entre paires de collégiens du Molise a lieu au lac Alifana, dans la province de Campobasso. Les deux équipes qui concourront en finale sont Arianna et Mirko du collège Pietrabbondante, et Bruno et Ginevra du collège Montini. La finale régionale suit les règles des épreuves provinciales : les deux équipes seront partagées : un pêcheur de chaque équipe ira en zone A (Arianna et Bruno), un pêcheur de chaque équipe en zone B (Genève et Mirko). Les pêcheurs disposeront de trois heures, de 9h à 12h, à la fin des trois heures, l'équipe des deux collégiens qui aura capturé le plus grand nombre de poissons aura gagné (c'est le nombre de captures qui compte et non leurs poids). À 12 heures les trois juges du concours (premier, deuxième et troisième juge) arrêtent le concours, vérifient que chacun a posé sa canne et invitent les deux équipes à rassembler leurs poissons pour procéder au comptage. Arianna, tout en ajoutant les poissons qu'elle a pêchés à ceux de Mirko, regarde le sac de Ginevra et dit joyeusement à Mirko : « regarde, il me semble clair que j'ai attrapé plus de poissons que Ginevra ». Mirko répond avec tristesse : « oui, mais comme j'ai pêché près d'elle, je suis sûr que j'ai attrapé moins de poissons que Ginevra ». Il y a donc un grand suspens pour le décompte final, le résultat est très incertain. Le premier juge procède au décompte et rapporte, assez incrédule, que le nombre de poissons capturés par Arianna et Mirko est égal au nombre de poissons capturés par Bruno et Ginevra. « Alors ? » s'exclame le deuxième juge, "comment décider quelle équipe a gagné et doit aller en finale nationale ?". Le troisième juge examinant le règlement précise : « En cas d'égalité dans le nombre total de poissons capturés par les équipes, l'équipe dont le pêcheur a capturé le plus de poissons parmi les quatre gagne ». Le premier juge déclare : « Mais nous avons rassemblé les poissons, comment pouvons-nous maintenant savoir qui, parmi Arianna, Bruno, Ginevra et Mirko, a attrapé le plus de poissons ? ». Le deuxième juge intervient : « En réalité, pendant que je contrôlais Arianna et Mirko qui rassemblaient leurs poissons, j'ai bien vu qu'Arianna attrapait plus de poissons que Ginevra, tandis que Mirko attrapait moins de poissons que Ginevra ». En supposant que toutes les informations recueillies le jour de la course soient vraies, peut-on déterminer qui a gagné ou manque-t-il des données ? Expliquez pourquoi.

È evidente che lavorare con un problema del genere in classe richiede un certo tipo di lavoro, richiede di dare tempo, e di dedicare tempo e energie alla comprensione del testo.

Il est clair que travailler sur un tel problème en classe nécessite un certain type de travail, nécessite de consacrer du temps et de consacrer du temps et de l'énergie à la compréhension du texte.

Bibliografia / Bibliographie

Di Martino, P. & Zan R. (2019). Problemi al centro. Matematica senza paura. Giunti Scuola.

Di Martino, P. (2019). Pupils' view of problems: the evolution from kindergarten to the end of primary school. Educational Studies in Mathematics, 100, 291–307. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9850-3

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2012). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale. Le Monnier.

Zan, R. (1998). Problemi e convinzioni. Pitagora editore.

Zan, R. (2008). Ricerca e RMT insieme per definire che cos'è un "buon problema". In AA. VV., RMT fra pratica e ricerca in didattica della matematica / RMT entre pratique et recherche en didactique des mathématiques. (pp. 19-30).

L'IMPORTANZA DEL RALLY MATEMATICO TRANSALPINO NELLA DIDATTICA D'AULA QUOTIDIANA

Un approccio basato sulla devoluzione di Guy Brousseau e il cooperative learning nell'esperienza di due classi di scuola primaria

L'IMPORTANCE DES PROBLÈMES DU RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN DANS LA PRATIQUE DE CLASSE

Une approche basée sur la dévolution de Guy Brousseau et l'apprentissage coopératif dans l'expérience de deux classes du primaire

Elena Marangoni e Rita Sangiorgi

Sunto

L'uso sistematico dei problemi del Rally Matematico Transalpino nella didattica d'aula quotidiana, supportato dai principi della devoluzione di Guy Brousseau e del Cooperative Learning, offre agli allievi un'opportunità di apprendere la matematica in modo attivo, collaborativo e significativo. Gli esempi forniti mostrano come problemi "reali" possano essere utilizzati per stimolare il pensiero critico e la capacità di problem solving, preparando gli allievi ad affrontare con successo le sfide future. Integrando il RMT nella pratica didattica, gli insegnanti possono contribuire a creare un ambiente di apprendimento dinamico e motivante, dove ogni allievo ha l'opportunità di migliorare le proprie conoscenze.

È qui presentata una sintesi dell'esperienza di due classi parallele della scuola primaria che fin dalla prima hanno utilizzato il problema come traghetto semantico per l'approccio alla matematica in modalità cooperativa.

Résumé

L'utilisation systématique des problèmes du Rallye Mathématique Transalpin dans la pratique de classe, soutenue par les principes de dévolution de Guy Brousseau et d'apprentissage coopératif, offre aux élèves la possibilité d'apprendre les mathématiques de manière active, collaborative et significative. Les exemples fournis montrent comment des problèmes « réels » peuvent être utilisés pour stimuler la pensée critique et les compétences en résolution de problèmes, préparant ainsi les élèves à relever avec succès les défis futurs. En intégrant le RMT dans la pratique de classe, les enseignants peuvent contribuer à créer un environnement d'apprentissage dynamique et motivant, dans lequel chaque élève a la possibilité d'améliorer ses connaissances.

Nous présentons ici un résumé de l'expérience de deux classes parallèles d'école primaire qui, dès la première année, ont utilisé le problème comme un instrument sémantique pour l'approche coopérative des mathématiques.

Introduzione

L'insegnamento della matematica è una sfida continua per gli educatori che cercano di trasmettere non solo nozioni e competenze, ma anche passione e curiosità per la disciplina. I problemi del Rally Matematico Transalpino (RMT) rappresentano uno strumento didattico innovativo e coinvolgente che, se integrato nella pratica quotidiana, può stimolare significativamente l'apprendimento degli allievi.

Guy Brousseau, com'è noto figura eminente nella didattica della matematica[1], ha introdotto il concetto di devoluzione, un processo attraverso il quale l'insegnante trasferisce all'allievo la responsabilità dell'apprendimento. Tale concezione promuove l'autonomia dell'allievo e favorisce un coinvolgimento attivo nel processo di risoluzione dei problemi. La devoluzione, pertanto, non è solo un trasferimento di conoscenza, ma un vero e proprio passaggio di autorità e responsabilità dall'allievo all'insegnante, che diventa facilitatore del processo di apprendimento.

Nel contesto del RMT, la devoluzione può essere osservata quando gli allievi vengono sfidati con problemi complessi che richiedono un pensiero critico e una riflessione autonoma.

---

[1] Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthods de la didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, 7(2), 33-115.

Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica / Guy Brousseau ; scritti scelti a cura di Bruno D'Amore

Brousseau, Guy ; D'Amore, Bruno, Bologna : Pitagora; 2008

All'inizio l'insegnante stipula un contratto con gli allievi e lascia poi loro il compito di cercare, di esplorare la situazione e di verificare la o le soluzioni in modo indipendente o in piccoli gruppi.

Il Cooperative Learning
Il cooperative learning[2] è una strategia educativa che prevede la collaborazione tra allievi per il raggiungimento di obiettivi comuni.
Questo approccio permette di sviluppare competenze sociali e relazionali, oltre a favorire un ambiente di apprendimento inclusivo e partecipativo. Nel contesto del RMT, il cooperative learning si manifesta attraverso il lavoro di gruppo, la condivisione delle strategie di risoluzione e il confronto tra pari.

Vantaggi del Cooperative Learning

1. **Miglioramento delle competenze sociali:** Gli allievi imparano a comunicare, negoziare e lavorare in team.
2. **Apprendimento attivo:** Gli allievi sono coinvolti attivamente nel processo di apprendimento, il che porta a una comprensione più profonda dei concetti.
3. **Sviluppo della responsabilità individuale e di gruppo:** Ogni membro del gruppo è responsabile del proprio apprendimento e contribuisce al successo del gruppo.

L'Integrazione del RMT nella Didattica

La scelta fatta dalle insegnanti di introdurre fatti matematici attraverso problemi non standard, nasce da lontano, dal percorso delle stesse nell'ambito dell'associazione Rally Matematico Transalpino, del lavoro di ricerca svolto nell'ambito dei gruppi di lavoro dell'associazione e di una successiva sperimentazione della valenza di un' approfondita analisi delle modalità risolutive adottate dalle alunne e dagli alunni.
L'attenzione agli aspetti relazionali del linguaggio naturale verso una costruzione significativa del linguaggio matematico ha permesso alle classi di costruire processi risolutivi condivisi e argomentati collettivamente, abituando le bambine ed i bambini ad esercitare un maggiore controllo sui loro apprendimenti. "Parlare" di matematica favorisce la costruzione di significati stabili e di apprendimenti significativi.
Il percorso, iniziato fin dalla prima primaria, nonostante la pandemia che ha certamente limitato le interazioni tra i pari e il lavoro di gruppo, si è articolato attraverso una proposta continua e sistematica di problemi, la maggior parte tratti dalle precedenti edizioni di RMT e dalla Banca dei Problemi, fonte preziosa di ricerca e di proposte di percorsi che offrono, in moltissimi casi, un'analisi a posteriori dei risultati di un campione consistente di alunne e di alunni, dei loro errori più frequenti, delle strategie risolutive più utilizzate, di quelle più insolite.
In quinta primaria le classi hanno sperimentato un percorso di geometria del piano, per affrontare in modo significativo i concetti di perimetro ed area, in particolare gli aspetti conflittuali tra i due significati concetti, sia nel passaggio da misure lineari a misure quadrate, sia in quello inverso.
Il Lavoro proposto dalle insegnanti ha seguito le indicazioni contenute nell'articolo di François Jaquet[3] il quale, per tutto il percorso svolto, ha dato un importantissimo e significativo contributo alle attività, insieme a Lucia Grugnetti.
Gli alunni, lavorando in gruppi autogestiti, hanno sperimentato diversi percorsi risolutivi, confrontandosi successivamente sulle proposte pensate da ciascun gruppo e ragionando sui diversi procedimenti corretti: il momento del confronto tra i gruppi è sempre stato molto ricco di spunti, tutti gli alunni si sono sentiti coinvolti nella discussione apportando un loro significativo contributo nella costruzione collettiva dei saperi.

L'idea di realizzare alcuni poster che sintetizzassero i diversi percorsi sperimentati, poster gestiti dalle allieve e dagli allievi in modo del tutto autonomo, ha convinto noi insegnanti a proporre loro di partecipare alla Sezione Poster dell'Incontro Internazionale che si è svolto a Faenza (2023).

L'occasione di far esporre alle allieve e agli allievi il loro lavoro è stata preziosa; li ha resi protagonisti dei loro apprendimenti, ha rafforzato la loro autostima e ha permesso loro di "parlare di matematica" con un pubblico adulto che li ha ascoltati con particolare interesse.

---

[2] D. Johnson, R. Johnson e E. Holubec, *Apprendimento cooperativo in classe.*, Edizioni Erickson Trento, 1996.

[3] Jaquet F., 2000, 'Le conflit aire-périmètre' / Il conflitto area perimetro' (prima e seconda parte), *L'educazione Matematica,* n. 2 e n. 3.

Tre problemi RMT dalla Banca

Esempio di problema: "Il Giardino del Signor Torquato"

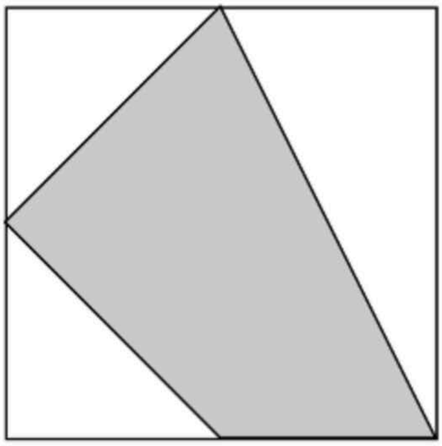
IL GIARDINO DEL SI GNOR TORQUATO

Questo è il giardino del signor Torquato:

Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca.
Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede:

"Sarà maggiore la parte con i fiori o quella con il prato?"

E voi che cosa ne pensate?
Spiegate la vostra risposta.



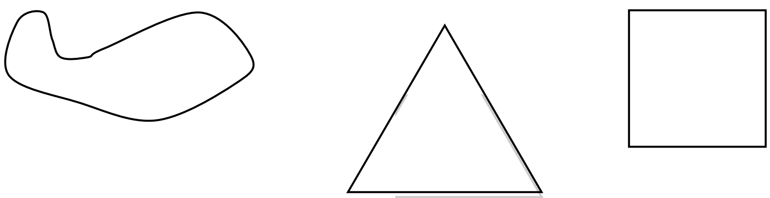
Strategie didattiche:

- Promuovere la discussione di gruppo per trovare la soluzione.
- Utilizzare materiali concreti, come carta da origami, carta quadrettata
- Incoraggiare gli allievi a spiegare le loro soluzioni e a confrontarle con quelle dei compagni.

La discussione di gruppo permette agli allievi di confrontare le loro idee e di apprendere gli uni dagli altri. L'approccio socio-costruttivista rende l'apprendimento un processo attivo di costruzione delle conoscenze basato sulle esperienze passate e sulle interazioni sociali.

Esempio di problema: "La cordicella"

Tommaso ha trovato una cordicella annodata con la quale si diverte a formare delle figure:



Forma dapprima un triangolo con i tre lati ch[illegible]no 16 cm.
Poi forma un quadrato.

Quanto misura un lato del quadrato di Tommaso?

Infine forma un rettangolo con la lunghezza doppia della larghezza.

Quanto misurano il lati del rettangolo?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

Strategie didattiche:

- Introduzione

- Attività di gruppo
- Uso di tabelle per ordinare le possibili soluzioni

  La visualizzazione dei dati attraverso tabelle aiuta gli allievi a comprendere meglio i concetti matematici. Si tiene a sottolineare l'importanza degli strumenti culturali e dei mediatori simbolici nell'apprendimento.

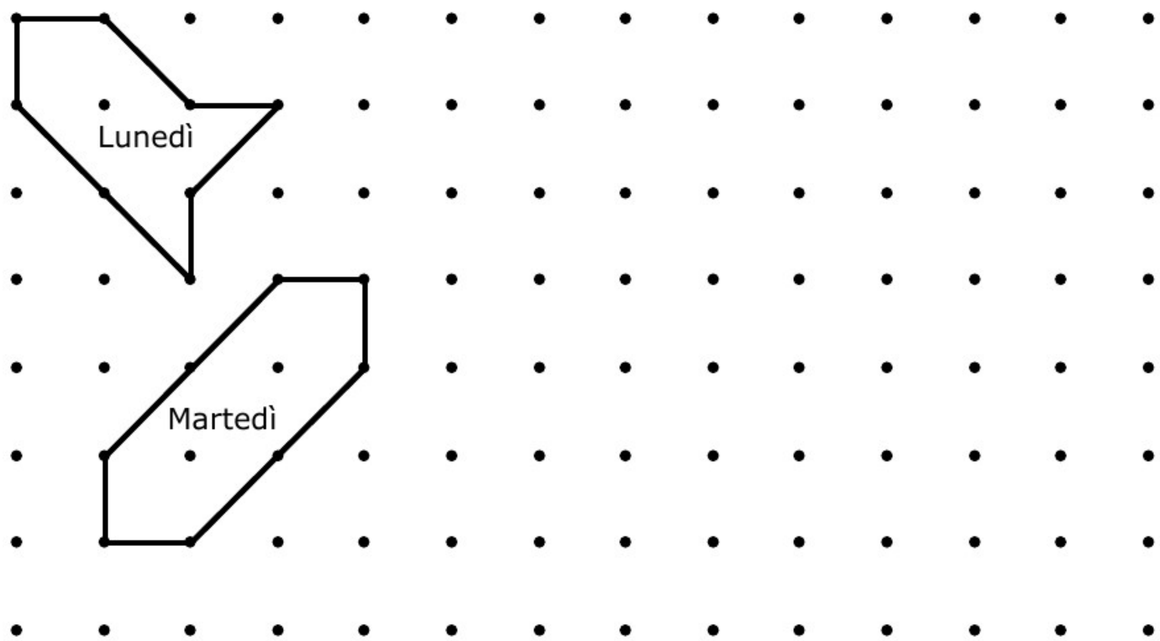
Esempio di problema: "La mucca nel Frutteto”

LA MUCCA NEL FRUTTETO (I)

Gli alberi del frutteto di papà Michele sono tutti ben allineati. Sono rappresentati dai punti neri sul disegno qui in basso.

Lunedì mattina, papà Michele ha fatto un recinto nel frutteto affinché la sua mucca, Ortensia, vi possa pascolare l’erba che cresce sotto gli alberi. Per costruire il recinto, ha collegato 8 tronchi di alberi con 8 pali di legno, 4 lunghi e 4 corti.
Lunedì sera, Ortensia ha mangiato tutta l’erba all’interno del recinto, ma ha ancora fame.

Martedì mattina, papà Michele fa un nuovo recinto, più grande di quello di lunedì, utilizzando altri 8 tronchi d’alberi e gli 8 stessi pali. Ortensia avrà così più erba da mangiare.
Martedì sera, Ortensia ha mangiato tutto, ma ha ancora fame.



Piantina del frutteto di Papà Michele

con il disegno dei recinti di lunedì e martedì

Disegnate un recinto per mercoledì in cui ci sia più erba da mangiare che in quello di martedì.

Ma attenzione, dovete sempre utilizzare gli stessi otto pali, tra otto alberi.

Spiegate perché nel vostro recinto di mercoledì c’è più erba da mangiare che in quello di martedì.

Strategie didattiche:

- Simulazione e Lavoro di gruppo per esplorare diverse strategie di conteggio e calcolo

- Discussione delle soluzioni per rafforzare la comprensione del significato di area e di perimetro

  Le simulazioni enfatizzano l'importanza dell'esperienza diretta nell'apprendimento.

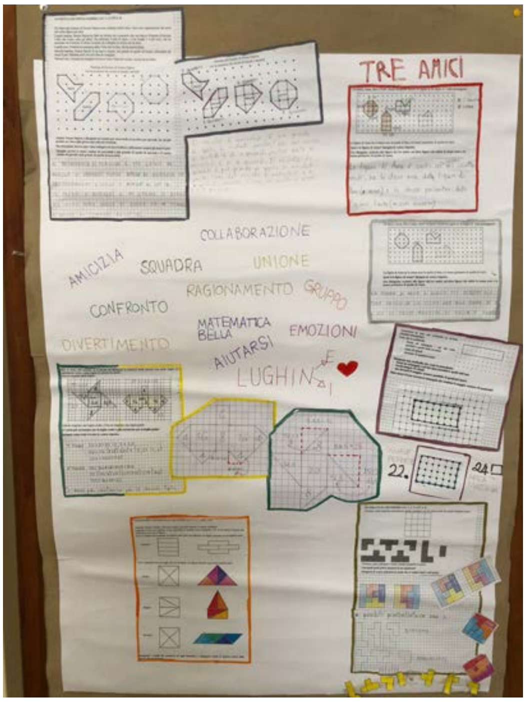
Esempi delle attività degli allievi

L'attività didattica è stata molto ampia e continuativa e, per sintetizzarla, si riportano qui alcune immagini dei lavori svolti dagli allievi relativamente ai problemi più sopra presentati.

Tali immagini sono in particolare quelle relative ai Poster preparati in maniera totalmente autonoma dalle allieve e dagli allievi.

- Al lavoro per preparare i poster

- I poster sono pronti



- E i bimbi aspettano di poterli illustrare

- E ora li illustrano

Come alcune immagini mostrano, nel corso della sezione Poster del convegno di Faenza (2023), gli allievi hanno illustrato i loro lavori e hanno certamente "dimostrato" di aver appreso in maniera costruttiva i concetti di area e di perimetro insiti nei problemi proposti.

Le loro spiegazioni sono state dettagliate con cognizione di causa.

À PROPOS DE DIVISION EUCLIDIENNE

A PROPOSITO DI DIVISIONE EUCLIDEA

François Jaquet et Rita Spatoloni

1. Introduction

Le problème que nous analysons dans cet article est, délibérément plongé dans l'arithmétique et le thème est affiché explicitement : la division euclidienne, abordée sans petites voitures, sans bonbons à distribuer et autres objets ou actions de la vie courante. La tâche n'est plus, comme dans de nombreux autres problèmes, de s'approprier un contexte et passer aux relations entre nombres, mais de partir des différents restes de divisions par 7 pour en tirer des généralités et des régularités, qui peuvent se retrouver en particulier dans les situations de partage et de distribution de la vies courante.
Il s'agit d'un « problème pour la classe » dont la version de la deuxième épreuve du 31^{e} RMT n'est qu'une première expérimentation auprès de plus de trois mille groupes d'élèves de catégories 5 à 7 et nous montre l'intérêt de le proposer dans un parcours d'apprentissage /enseignement de l'arithmétique.
Cet article est par conséquent destiné aux enseignants. Il illustre la manière dont les élèves ont résolu le problème et l'état de leur construction de ce qu'on appelle « la division avec reste ». Il précise ensuite l'importance de cette connaissance pour tout le domaine de l'arithmétique. Il suggère enfin des idées pour conduire le débat entre élèves lors de la mise en commun de leurs solutions et procédures et un inventaire des connaissances à institutionnaliser.
Après cette introduction, nous présentons le problème, son analyse a priori et les résultats. Vient ensuite l'analyse a posteriori qui distingue les deux tâches : celle du coloriage du tableau et celle de la détermination du reste de la division par 7 d'un nombre qui est la somme de deux nombres de restes 2 et 3. Pour la première de ces tâches la constatation que certaines cases ne sont pas coloriées est surprenante, les erreurs sont nombreuses et montrent qu'il y a du travail à faire sur cette partition des nombres naturels selon le reste des divisions par 7. Pour la seconde, l'analyse des copies montre les étapes de la progression des argumentations des élèves pour arriver à une conviction que l'on peut connaître le reste de la somme pour n'importe quel couple de nombres de restes 2 et 3. Pour chacune de ces deux parties, des idées sont suggérées à l'enseignant pour l'exploitation du problème. La conclusion dresse une synthèse des éléments essentiels à retenir pour le parcours d'apprentissage de la classe sur ce thème de la recherche de restes.

1. Introduzione

Il problema che analizziamo in questo articolo è, volutamente, immerso nell'aritmetica e il tema è esplicitamente esposto: la divisione euclidea, affrontata senza macchinine, senza caramelle da distribuire e altri oggetti o azioni della vita quotidiana. Il compito non è più, come in tanti altri problemi, appropriarsi di un contesto e passare alle relazioni tra numeri, ma partire dai diversi resti delle divisioni per 7 per tracciare generalità e regolarità, che si possono riscontrare soprattutto in situazioni di condivisione e distribuzione nella vita di tutti i giorni.
Si tratta di un "problema di classe" di cui la versione della seconda prova del 31° RMT è solo un primo esperimento, con più di tremila gruppi di allievi delle categorie da 5 a 7, che ci mostra l'interesse a proporlo nell'ambito di un percorso di apprendimento/insegnamento di aritmetica.
Questo articolo è quindi destinato agli insegnanti. Illustra come gli allievi hanno risolto il problema e lo stato della loro costruzione di quella che viene chiamata "divisione con resto". Evidenzia poi l'interesse di queste conoscenze per l'intero campo dell'aritmetica. Suggerisce spunti per condurre il dibattito tra gli allievi nella condivisione di soluzioni e procedure, un inventario delle conoscenze da istituzionalizzare.
Dopo questa introduzione, presentiamo il problema, la sua analisi a priori ed i risultati. Segue l'analisi a posteriori che distingue i due compiti: quello di colorare la tabella e quello di determinare il resto della divisione per 7 di un numero che è la somma di due numeri con resto 2 e 3. Per il primo di questi compiti l'osservazione che alcune caselle non sono colorate è sorprendente, gli errori sono numerosi e dimostrano che c'è del lavoro da fare su questa ripartizione dei numeri naturali secondo il resto delle divisioni per 7. Per la seconda, l'analisi degli elaborati mostrano le fasi della progressione delle argomentazioni degli allievi per arrivare alla convinzione che possiamo conoscere il resto della somma per qualsiasi coppia di numeri di resto 2 e 3. Per ciascuna di queste due parti vengono suggerite idee all'insegnante per utilizzare opportunamente il problema. La conclusione fornisce una sintesi degli elementi essenziali da ricordare per il percorso didattico della classe sul tema della ricerca dei resti.

2. Le problème / Il problema

Voici le problème, proposé par la 2^{e} épreuve du 31^{e} RMT, aux classes de catégories 5, 6 et 7

Ecco il problema, proposto dalla 2^{a} prova del 31° RMT, alle categorie 5, 6 e 7

ARC-EN-CIEL / ARCOBALENO

Joseph et Marie demandent à leurs amis :

Coloriez les nombres de ce tableau avec les couleurs de l'arc-en-ciel …

… en rouge lorsque le reste de leur division par 7 est 0,

… en orange, lorsque le reste de leur division par 7 est 1

… en jaune, lorsque le reste de leur division par 7 est 2,

… en vert, lorsque le reste de leur division par 7 est 3,

… en bleu, lorsque le reste de leur division par 7 est 4,

… en indigo, lorsque le reste de leur division par 7 est 5,

… en violet, lorsque le reste de leur division par 7 est 6.

Giuseppe e Maria chiedono ai loro amici:

"Colorate i numeri di questa tabella con i colori dell'arcobaleno…

… in rosso quando il resto della loro divisione per 7 è 0,

… in arancione, quando il resto della loro divisione per 7 è 1,

… in giallo, quando il resto della loro divisione per 7 è 2,

… in verde, quando il resto della loro divisione per 7 è 3,

… in blu, quando il resto della loro divisione per 7 è 4,

… in indaco, quando il resto della loro divisione per 7 è 5,

… in violetto, quando il resto della loro divisione per 7 è 6."

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
20	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
30	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**
40	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**
50	**51**								

Joseph choisit un nombre jaune plus grand que 50, Marie choisit un nombre vert plus grand que 50. Ils additionnent ces deux nombres et ils demandent à leurs camarades de deviner la couleur du nombre obtenu.

François dit : « Je pense qu'il sera jaune ou vert. »

Clara dit : « On ne peut pas savoir ; il peut être de n'importe quelle couleur. »

Angela dit : « Il sera rouge. »

Anne-Marie dit : « Il sera indigo. »

Coloriez aussi les nombres du tableau, puis lisez les réponses de François, Clara, Angela et Anne-Marie.

Si l'un de ces quatre élèves a raison, dites lequel et pourquoi.

Giuseppe sceglie poi un numero giallo, più grande di 50, Maria sceglie un altro numero, verde, più grande di 50. Sommano questi due numeri e chiedono ai loro amici di indovinare il colore del numero ottenuto.

Francesco dice: "Penso che sarà giallo o verde".

Clara dice: "Non si può sapere; può essere di qualunque colore."

Angela dice: "Sarà rosso".

Anna Maria dice: "Sarà indaco".

Colorate anche voi i numeri della tabella, poi leggete le risposte di Francesco, Clara, Angela e Anna Maria.

Se uno di questi quattro amici ha ragione, dite qual è e perché.

ANALYSE A PRIORI / ANALISI A PRIORI

Tâche mathématique / Compito matematico

Partager l'ensemble des nombres naturels en sept sous-ensembles de nombres qui, par la « division » par 7, donnent des restes de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Dividere l'insieme dei numeri naturali in sette sottoinsiemi di numeri che, mediante "divisione" per 7, danno resto 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Analyse de la tâche /Analisi del compito

Percevoir, par une discussion au sein du groupe, les relations entre l'algorithme de la « division par 7 avec reste », les opérations de multiplication, de soustraction et les multiples de 7.

Compléter le tableau :

- Se rendre compte que les nombres dont le reste est 0 lorsqu'on les divise par 7 sont 0, 7, 14, … c'est-à-dire les multiples de 7 !
- Trouver les nombres dont le reste est 1 lorsqu'on les divise par 7 sans faire des essais en appliquant l'algorithme, mais en se référant aux nombres qui valent « un de plus qu'un multiple de 7 », etc.
- Voir apparaître des régularités dans le coloriage et prendre conscience que les sept couleurs suffisent pour colorier tous les nombres, du tableau et les suivants. (C'est la première tâche, qui vaudra 2 pts si elle est complétée)
- Choisir un nombre jaune et un nombre vert, comme Joseph et Marie, puis les additionner. Recommencer avec d'autres choix pour arriver à la conviction que la somme est toujours un nombre indigo et que c'est Anne-Marie qui semble avoir raison. (Deuxième tâche)
- Essayer d'exprimer une raison à cette conviction naissante, par exemple à partir de l'addition des deux premiers nombres jaune et vert (2 et 3) dont la somme est un nombre indigo (5). (Troisième tâche, qui ne peut pas être une démonstration formelle en raison de l'âge des élèves, mais le besoin de se persuader que « ça marche pour n'importe quel choix des deux nombres, jaune et vert)

Percepire, tramite una discussione in seno al gruppo, le relazioni tra l'algoritmo della "divisione per 7 con resto", le operazioni di moltiplicazione, sottrazione e i multipli di 7.

- Completare la tabella:
  - Rendersi conto che i numeri il cui resto è 0 quando li si divide per 7, sono 0, 7, 14, … cioè i multipli di 7!
  - Trovare i numeri il cui resto è 1 quando li si divide per 7 senza effettuare tentativi applicando l'algoritmo, ma facendo riferimento a numeri che sono "uno di più di un multiplo di 7", ecc.
  - Veder comparire regolarità nella colorazione e prendere coscienza che i sette colori bastano per colorare tutti i numeri della tabella e i successivi. (Questo è il primo compito, che varrà 2 punti se completato)
- Scegliere un numero giallo e un numero verde come Giuseppe e Maria, poi addizionarli. Ricominciare con altre scelte per arrivare alla convinzione che la somma è sempre un numero "indaco" e che è Anna Maria che sembra aver ragione. (Questo è il secondo compito).
- Provare a esprimere una ragione per questa convinzione nascente, ad esempio dall'addizione dei due primi numeri giallo e verde (2 e 3) la cui somma è un numero "indaco" (5). (Terzo compito, che non può essere una dimostrazione formale a causa dell'età degli allievi, ma la necessità di persuadersi del fatto che "funziona per qualsiasi scelta dei due numeri, giallo e verde).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51								

Attribution des points / Attribuzione dei punteggi

4 Réponse correcte « C’est Anne-Marie qui a raison », avec un coloriage complet et correct du tableau au moins jusqu’à 51, avec le choix des deux nombres plus grands que 50, au moins deux essais et une tentative d’argumentation (par exemple 2 (jaune) et 3 (vert) qui, additionnés, donnent 5 (indigo)

3 Réponse correcte, avec un coloriage complet, le choix des deux nombres plus grands que 50, leur somme et leur couleur la description d’au moins un autre essai sans tentative d’argumentation

2 Réponse correcte et un seul choix des deux nombres
ou seulement le coloriage complet

1 Réponse correcte, coloriage incomplet
ou autre **réponse** que celle d’Anne-Marie et coloriage incomplet

0 Incompréhension, du problème.

4 Risposta corretta “Anna Maria ha ragione” con una colorazione completa e corretta della tabella almeno fino al numero 51, con la scelta di due numeri maggiori di 50, con almeno due tentativi e un tentativo di argomentazione (per esempio 2 giallo e 3 verde che addizionati danno 5 indaco)

3 Risposta corretta, con una colorazione completa, la scelta di due numeri maggiori di 50, l’individuazione della loro somma e del colore corretto, senza tentativi di argomentazione

2 Risposta corretta e una sola scelta dei due numeri
oppure soltanto la colorazione

1 Risposta corretta senza colorazione completa
oppure un’altra risposta (rispetto ad Anna Maria) senza colorazione completa

0 Incomprensione del problema.

3. Résultats (points attribués) / **Risultati (punteggi attribuiti)**

Moyennes de points attribués aux 3324 copies de 19 sections, selon les critères définis dans l’analyse a priori.
Medie dei punteggi attribuiti ai 3324 elaborati di 19 sezioni, secondo i criteri definiti nell’analisi a priori.

Cat.	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	M
5	264 (33%)	142 (18%)	192 (24%)	116 (14%)	89 (11%)	803	1.5
6	508 (39%)	232 (18%)	255 (20%)	191 (15%)	104 (8%)	1290	1.3
7	415 (34%)	200 (16%)	274 (22%)	195 (16%)	147 (12%)	1231	1.6
Total	1187 (36%)	574 (17%)	721 (22%)	502 (15%)	340 (10%)	3324	1.5

Il y a 19 jurys qui ont attribué les points, un par section, et, même si les critères sont les mêmes pour tous, il peut y avoir des variations dues à leurs interprétations personnelles. La correction était en plus très délicate pour ce problème vu le nombre de cases à vérifier dans le tableau et la « nouveauté » de la question sur la somme de deux nombres « jaunes » et « verts » qui introduit la notion de généralisation ou l’idée « quelconque » pour le choix des nombres. L’analyse a posteriori a aussi permis de constater des lacunes dans l’élaboration des critères.
Les résultats moyens des 19 sections varient de 0,9 à 2,2 pour obtenir une la moyenne totale de l’ensemble de 1,5 ; et les résultats de la section de SI, sur 486 copies sont assez sensiblement différents de ceux des 19 sections pour la catégorie 7 en particulier.

Sono 19 le commissioni che hanno assegnato i punti, una per sezione e, sebbene i criteri siano uguali per tutti, possono esserci delle variazioni dovute alle interpretazioni personali. Anche per questo problema la correzione è stata molto “delicata” visto il numero di caselle da barrare nella tabella e la "novità" della domanda sulla somma di due numeri "giallo" e "blu" che introduce la nozione di generalizzazione oppure l’idea di “numero qualsiasi” per la scelta dei numeri. L'analisi a posteriori ha inoltre rivelato lacune nell’elaborazione dei criteri.
I risultati medi delle 19 sezioni variano da 0,9 a 2,2 per ottenere una media complessiva di 1,5; i risultati della sezione SI, su 486 esemplari, differiscono in modo abbastanza significativo da quelli delle 19 sezioni, in particolare per la categoria 7.

Section de SI / Sezione di SI

Cat.	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	M
5	27 (31%)	26 (30%)	17 (19%)	12 (14%)	6 (7%)	88	1.4
6	101 (50%)	33 (16%)	47 (23%)	11 (5%)	12 (6%)	204	1.0
7	99 (51%)	34 (18%)	19 (10%)	32 (16%)	10 (12%)	194	1.1
Total	227 (47%)	93 (19%)	83 (17%)	55 (11%)	28 (6%)	486	1.1

4. Observations tirées de l'analyse a posteriori du coloriage du tableau / Osservazioni dall'analisi a posteriori riguardo la colorazione della tabella

Il y a deux tâches bien distinctes pour la résolution du problème : le coloriage du tableau et la détermination de la couleur de deux nombres, l'un jaune et l'autre vert. La seconde semble dépendante de la première mais certains groupes n'ont pas jugé nécessaire de colorer les cases et ne l'ont fait que mentalement. (Cette option n'était pas prévue dans les critères d'attribution des points et est une des raisons des variations d'une section à l'autre).

Ci sono due compiti ben distinti per risolvere il problema: colorare la tabella e determinare il colore della somma di due numeri, uno giallo e l'altro verde. Il secondo sembra dipendente dal primo ma alcuni gruppi non hanno ritenuto necessario colorare le caselle e lo hanno fatto solo mentalmente.
(Questa opzione non è stata inserita nei criteri di assegnazione dei punti ed è uno dei motivi delle variazioni da una sezione all'altra).

L'observation des coloriages, sur les copies de SI, pour les catégories 5, 6 et 7 respectivement, permet de savoir si les élèves savent trouver le reste d'une division par 7.

a) 43%, 28 % et 25% de tableaux colorés correctement et complètement.

b) 35%, 28 % et 27% où les cases de 0 à 6 sont restées blanches

c) 11%, 20% et 19 erreurs de coloriage

d) 12%, 28% et 29% de tableaux blancs ou avec seulement quelques cases coloriées

Ces copies témoignent d'une capacité moyenne de trouver les restes de divisions par 7, pour les cases de 7 à 51 du tableau, si l'on tient compte de a) et de b).

Elles font apparaître, surtout, une « régression » de la catégorie 5 aux suivantes, correspondant au passage de l'école primaire au secondaire inférieur, qui correspond aussi à la baisse des moyennes de points des tableaux de résultats précédents.

Cette baisse est significative, comme dans une majorité de problèmes proposés en catégories 5 et 6, selon les statistiques de la Banque. Elle est particulièrement sensible pour cette tâche de coloriage qui demande du temps et de la précision.

Nous laissons les sociologues juger des raisons pour lesquels les élèves du secondaire inférieur (près de la moitié) ne jugent pas nécessaire de colorier l'ensemble du tableau malgré la demande, et commettent autant d'erreurs (alors que, pour c) et d) n'étaient que 23 % en catégorie 5 !)

L'osservazione della colorazione degli elaborati di SI, rispettivamente quelli di cat. 5, 6 e 7, ci permette di sapere se gli allievi sanno trovare il resto di una divisione per 7.

a) 43%, 28% e 25% delle tabelle colorate correttamente e completamente.

b) 35%, 28% e 27% dove le caselle da 0 a 6 sono rimaste bianche

c) Errori di colorazione 11%, 20% e 19

d) 12%, 28% e 29% tabelle bianche o con solo poche caselle colorate

Questi elaborati mostrano una capacità media di trovare il resto delle divisioni per 7, per le caselle da 7 a 51 della tabella, se prendiamo in considerazione a) e b).

Essi indicano soprattutto una “regressione” dalla categoria 5 alle successive, corrispondente al passaggio dalla scuola primaria alla secondaria di primo grado, a cui corrisponde anche il calo dei punti medi nelle precedenti tabelle dei risultati.

Questo calo, significativo come nella maggior parte dei problemi proposti nelle categorie 5 e 6, secondo le statistiche della Banca, è particolarmente evidente per questo compito di colorazione che richiede tempo e precisione. Lasciamo giudicare ai sociologi i motivi per cui gli allievi della scuola secondaria di primo grado (quasi la metà) non ritengono necessario colorare l'intera tabella, nonostante la richiesta, e commettono tanti errori (mentre, per c) e d) erano solo il 23% nella categoria 5!).

4.1. Coloriage complet et correct du tableau / Colorazione completa e corretta della tabella

En général, les élèves n’indiquent pas comment les restes ont été trouvés ni ne précisent s’ils les ont calculé mentalement ou à l’aide de l’algorithme où les quatre termes de la division euclidienne sont disposés selon le schéma classique (|–). Voici quelques rares exemples d’explications de la manière dont les tableaux ont été coloriés.

In generale gli allievi non indicano come hanno trovato i resti e non precisano se li hanno calcolati mentalmente o con l’aiuto dell’algoritmo in cui i quattro termini della divisione euclidea sono disposti secondo lo schema classico (|–). Si riporta qualche raro esempio nel quale viene spiegato il modo in cui sono state colorate le tabelle.

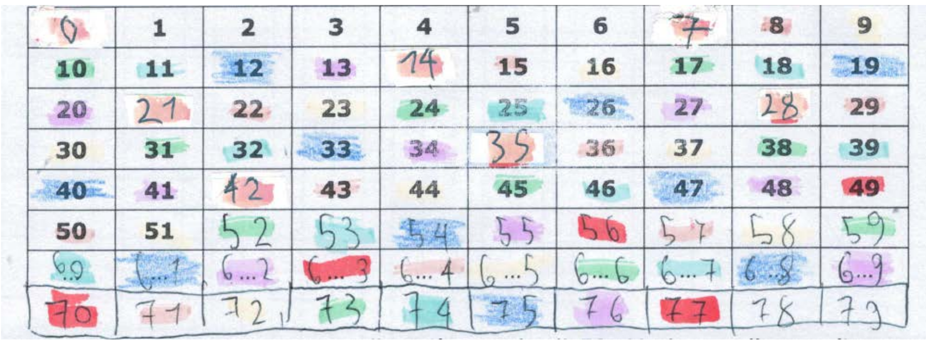
Exemple 1. (Cat 6) Siamo partiti con il colore rosso per ottenere i colorati al rosso. Basta colorare i multipli di 7. Per trovare l’arancione abbiamo diviso per 7 i numeri che venivano dopo quelli colorati di rosso e tutti sono risultati con il resto di uno. Per trovare i numeri gialli abbiamo diviso per 7 i numeri che venivano dopo quelli colorati di arancione e tutti sono risultati con il resto di 2.

(Trad. Nous sommes partis de la couleur rouge pour obtenir ceux de couleur rouge. Il suffit de colorier les multiples de 7. Pour trouver l’orange, nous avons divisé les nombres qui suivaient ceux colorés en rouge par 7 et nous avons obtenu pour chacun un reste de un. Pour trouver les nombres jaunes, nous avons divisé les nombres qui venaient après les nombres orange par 7 et avons obtenu pour tous un reste de 2 ... (les mêmes phrases sont répétées pour les couleurs suivantes).

Le coloriage s’organise ici à partir des multiples de 7 (cités explicitement) mais on ne sait pas si ceux-ci ont été identifiés à partir du « calcul » un à un des restes qui sont nuls ou à partir de leur propriété généralisée « un multiple de 7 est soit 1 × 7, soit 2 × 7, soit 3 × 7, soit 4 × 7… (ou k × 7 pour le mathématicien) et qu’on peut diviser par 7 sans reste ». On ne sait pas non plus si le calcul du reste a été fait pour chaque nombre qui suit un nombre rouge et si c’est le fait de trouver un reste de 1 qui a pu déterminer la couleur orange.

La colorazione è qui organizzata a partire dai multipli di 7 (esplicitamente citati) ma non sappiamo se essi siano stati identificati a partire dal calcolo uno a uno dei resti, che sono nulli, oppure a partire dalla loro proprietà generalizzata « un multiplo di 7 è sia 1 × 7, sia 2 × 7, sia 3 × 7, sia 4 × 7… (o k × 7 per i matematici) e che si può dividere per 7 senza resto ». Non sappiamo nemmeno se il calcolo del resto sia stato fatto per ogni numero che segue un numero rosso e se sia stato il ritrovamento di un resto 1 a determinare il colore arancione.

Exemple 2. (Cat 7)



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
6.0	6...1	6...2	6...3	6...4	6...5	6...6	6...7	6...8	6...9
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79

Le tableau est coloré correctement (sauf pour les cases 1 à 6) ; les nombres 0, 7, 14, … semblent avoir été reconnus, recouverts par une tache rouge et écrits à la main par-dessus ; les deux dernières lignes sont complétées pour montrer qu'on ne s'arrête pas à 51. Puis les nombres de même couleur sont regroupés par lignes dans un nouvelle disposition. (On peut imaginer que ce sont des raisons de visibilité des sept familles de nombres que ce regroupement a été effectué. On ne le sait pas et ce serait une bonne question à poser aux élèves lors de la phase de discussion. Nous suggérerons par la suite de transformer le tableau en passant de dix à sept colonnes pour mieux visualiser la partition en sept familles.) On retrouve ce type de regroupement à partir des multiples de 7 dans d'autres copies, ce qui montre l'importance pour les élèves de montrer leur propre représentation qui leur permet de découvrir les relations entre nombres et régularités de la suite. Didactiquement, l'enseignant doit l'interpréter comme un pas significatif dans l'apprentissage d'une notion, que l'élève s'est vraiment appropriée en lui « donnant du sens » de son propre point de vue.

La tabella è correttamente colorata (salvo 1 numeri sa 1 a 6) : sembra che siano stati riconosciuti i numeri 0, 7, 14, … coperti da una macchia rossa e riscritti sotto a mano; le due ultime righe sono completate per mostrare che non ci si ferma a 51. Poi i numeri dello stesso colore sono raggruppati per righe in una nuova disposizione. (Possiamo immaginare che questo raggruppamento sia stato fatto per ragioni di visibilità delle sette famiglie di numeri. Non lo sappiano e sarebbe quindi una buona domanda da porre agli allievi in fase di discussione. Suggeriamo di trasformare, in seguito, la tabella passando da dieci a sette colonne per meglio visualizzare la partizione in sette famiglie). In altri elaborati troviamo questo tipo di raggruppamento basato su multipli di 7, il che prova quanto sia importante per gli allievi di fornire una rappresentazione propria che permetta loro di scoprire le relazioni tra i numeri e le regolarità della sequenza. Didatticamente l'insegnante deve interpretare questo come un passo rilevante nell'apprendimento di un concetto di cui l'allievo si è realmente appropriato "dandogli significato" dal proprio punto di vista.

Exemple 3. (Cat 7) Abbiamo iniziato calcolando i numeri con i colori giusti dei resti usando la tabellina del 7. (Trad. Nous avons commencé en calculant les nombres avec les couleurs justes du reste en utilisant le livret du 7).

On ne se réfère pas ici aux multiples de 7 mais aux premiers qui sont mémorisés dans « livret du 7 ».

In questo caso non c'è riferimento ai multipli di 7 ma ai primi di essi memorizzati tramite « la tabellina del 7 ».

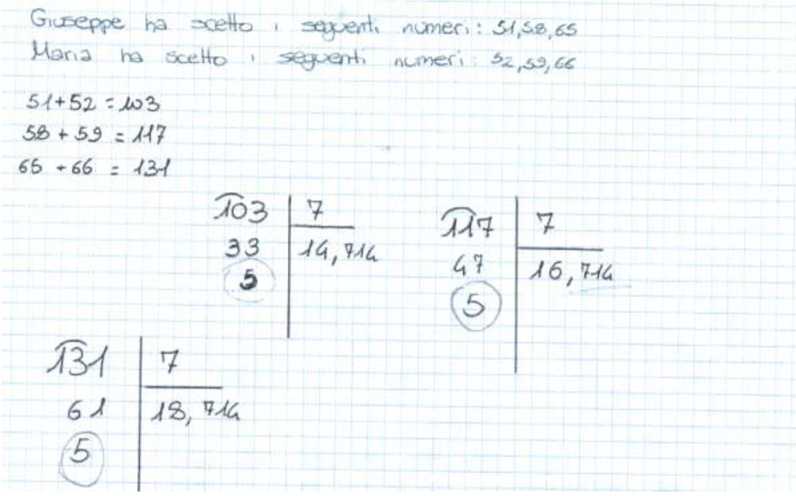
Exemple 4. (Cat 7) Inizialmente guardavamo uno ad uno i numeri che davano il resto di 0, 1 e 2 poi colorando la tabella abbiamo capito che era una sequenza. (Trad. Au début nous avons regardé un à un les nombres qui donnent un reste de 0, 1 et 2 puis en coloriant le tableau nous avons compris qu'il y avait une séquence).

Exemple 5. (Cat 5) Per prima cosa abbiamo diviso tutti i numeri da 0 a 14 per 7. Successivamente vedendo che il colore dei numeri si ripeteva abbiamo colorato la tabella. (Trad. Au début nous divisé tous les nombres de 0 à 14 par 7. Ensuite vu que les couleurs des nombres se répétaient nous avons colorié le tableau.)

- Calcul de chaque reste par un algorithme répété pour chacun des nombres ?
- Procédures permettant de simplifier les calculs, (repérer que 7, 14, 21, 28 donnent un reste de 0 et généraliser aux suivants, puis aux successeurs 8, 15, 22, …) ?
- Calcolo di ogni resto per mezzo di un algoritmo ripetuto per ciascuno dei numeri?

- Procedure che permettono di semplificare i calcoli, (ricordare che 7, 14, 21, 28 danno resto 0 e generalizzare ai seguenti, poi procedere con i successivi 8, 15, 22,…)?

Exemple 6 (Cat 7)



Cet exemple (qui aborde déjà la détermination de la somme du chapitre suivant), montre comment les élèves peuvent déterminer le reste d'une division par 7 avec l'aide de la calculatrice.

Questo esempio (che affronta già la determinazione della somma nel capitolo successivo), mostra come gli allievi possono determinare il resto di una divisione per 7 con l'aiuto della calcolatrice.

4.2. Absence de coloration des cases 0 à 6 / Mancanza di colorazione per le caselle da 0 a 6

Exemple 7 (Cat 7)

L'absence de coloration des cases 0 à 6, est à la fois une surprise et une consternation ! On ne l'imaginait pas lors de la rédaction de l'analyse a priori !

Vu sa fréquence, dans environ 30 % des copies, pour toutes les catégories, ce phénomène apparaîtra certainement dans toutes les classes où le problème sera proposé. Il faudra alors interroger les élèves sur les raisons pour lesquelles ils n'ont pas trouvé de reste de la division par 7 de ces premiers nombres alors qu'ils l'ont trouvé pour les suivants.

Sans leurs explications, on doit se contenter d'une affirmation : à propos de la recherche d'un reste d'un dividende plus petit que le diviseur, l'enseignement des mathématiques a échoué pour une partie importante des élèves de catégories 5 à 7 ! Des constatations de ce genre ne sont jamais agréable pour un enseignant qui les découvre. Faut-il mettre la faute sur les enseignants des degrés précédents ? Il faut y réfléchir, car trop souvent on le pense naturellement.

En réalité, il faut se rappeler que l'apprentissage n'est jamais définitif mais se produit de manière récursive et circulaire, selon la maturation du sujet d'apprentissage et la manière dont l'expérience a été proposée ; l'enseignant doit en avoir conscience. Quel que soit l'âge de l'élève il faut vérifier les acquis précédents pour les consolider et les développer. Notre problème est une bonne occasion de la faire !

Une hypothèse sur l'origine de cette absence nous est venue de l'observation des algorithmes présentés dans les copies. Dans l'exemple 6 précédent, de la recherche du reste de 103 par 7, on pourrait imaginer que le 1 (des centaines) du dividende divisé par 7 a 0 comme quotient et 1 comme reste 1. Dans le quotient, sous le 7, il faudrait alors écrire 0 (comme chiffre des centaine), et sous le 103 après la soustraction de 0 × 100 = 0 écrire 103, mais on ne le fait pas car le principe de l'algorithme n'est pas la compréhension des soustraction successives dans l'ordre des centaines, dizaines et unités mais l'économie de l'écriture des opérations nécessaires. L'élève qui applique l'algorithme mécaniquement après avoir disposé 103 et 7 se dit « Dans le premier chiffre 1 je ne peux pas mettre 7, alors je considère les deux premiers chiffres, 1 et 0, ou 10 dans lequel je peux mettre 1 fois le 7, J'écris 1 comme premier chiffre du quotient (sous le 7) et j'écris 33 (3 = 10 – (1× 7) pour les dizaines et 3 du 103 pour les unités … » Cette habitude de ne pas prendre en compte le premiers chiffre du dividende s'il est inférieur à 7 parce « je ne peux pas » ou « je ne dois pas ». C'est une autre occasion de réflexion pour l'enseignant : au cours des activités, laisser les élèves libres d'explorer et de décrire personnellement des formes de représentation, de formuler et d'exprimer leur propre pensée, en les laissant discuter entre eux dans le débat constructif que proposent nos problèmes.

L'assenza di colorazione delle caselle da 0 a 6 è allo stesso tempo una sorpresa e uno sgomento. Non l'avevamo immaginata nella redazione dell'analisi a priori!

Considerata la sua frequenza, in circa il 30% delle copie, per tutte le categorie, questo fenomeno si presenterà sicuramente in tutte le classi in cui verrà proposto il problema. Bisognerà poi interrogare gli allievi sui motivi per i quali non hanno trovato un resto della divisione per 7 di questi primi numeri mentre lo hanno trovato per i successivi.

Senza le loro spiegazioni, dobbiamo accontentarci di un'affermazione ancora ipotetica: per quanto riguarda la ricerca del resto di un dividendo inferiore al divisore, l'insegnamento della matematica è fallito per una parte significativa degli allievi delle categorie da 5 a 7! Osservazioni di questo tipo non sono mai piacevoli per un insegnante che le scopre. La colpa può essere attribuita agli insegnanti dei gradi precedenti? Occorre riflettere, perché troppo spesso avviene così, in modo quasi naturale.

In realtà dobbiamo ricordare che l'apprendimento non è mai definitivo ma avviene in modo ricorsivo e circolare, spesso influenzato dalla maturazione del soggetto in apprendimento e dal modo in cui l'esperienza è stata proposta; l'insegnante deve avere questa consapevolezza. Qualunque sia l'età dell'allievo bisogna verificare le acquisizioni precedenti per consolidarle e svilupparle. Il nostro problema è una buona occasione per farlo!

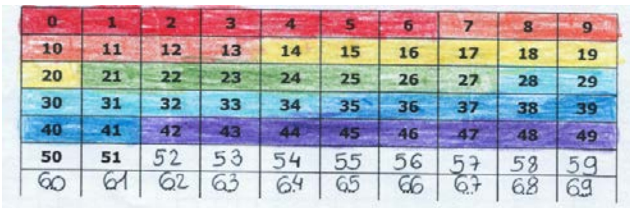
Un'ipotesi sull'origine di questa assenza ci è venuta in mente dall'osservazione degli algoritmi presenti negli elaborati. Nell'esempio 6 precedente, dalla ricerca del resto di 103 per 7 si potrebbe immaginare che 1 (centinaia) diviso per 7 dà 0 come quoziente e 1 come resto 1. Nel quoziente, sotto il 7, dovremmo scrivere 0 (come cifra delle centinaia) e sotto il 103, dopo la sottrazione 0 ×100 = 0, scrivere 103 di nuovo, ma non lo facciamo perché il principio dell'algoritmo non è la comprensione delle sottrazioni successive nell'ordine delle centinaia, decine, unità ma l'economia della scrittura delle operazioni necessarie. L'allievo che applica l'algoritmo meccanicamente dopo aver disposto 103 e 7 dice: «Nella prima cifra 1 non posso mettere 7, allora io considero le prime due cifre, 1 e 0 oppure 10 nel quale io posso mettere 1 volta il 7. Scrivo 1 come prima cifra del quoziente (sotto il 7) e scrivo 33 (3 =10 - (1×7) per le decine e 3 del 103 per le unità…» È l'abitudine a non considerare la prima cifra del dividendo se è inferiore a 7 perché « io non posso » o « io non devo ». Un'altra occasione di riflessione per l'insegnante: nel corso delle attività, lasciare gli allievi liberi di esplorare e descrivere personalmente forme di rappresentazione, di formulare ed esprimere il proprio pensiero permettendo di discutere tra loro in quel dibattito costruttivo che i nostri problemi propongono.

4.3. Les erreurs de coloriage, les coloriages partiels ou feuilles blanches / Errori di colorazione, colorazioni parziali o fogli bianchi

Parmi les erreurs on relève une bonne dizaine de coloriage seulement des multiples de 7, avec une confusion reste/quotient : la succession des couleurs rouge, orange, jaune, … correspondant aux restes de 0, 1, 2, … est appliquée aux quotients des multiples de 7 par la division par 7.

Tra gli errori si nota una buona dozzina di colorazioni dei soli multipli di 7, con una confusione resto/quoziente: la succession dei colori rosso, arancio, giallo,… corrispondenti ai resti di 0,1,2,… è applicata ai quozienti dei multipli di 7 mediante la divisione per 7.

Exemple 8 (Cat 6)



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69

On relève aussi, pour les nombres de 0 à 6, une succession des mêmes couleurs mais en sens décroissant : 7 en rouge, 6 en orange, 5 en jaune, …, 0 non coloré. Il pourrait s'agir d'une confusion entre « combien reste-il ? » dans le dividende et « combien manque-il ? » pour compléter ce dividende.

Notiamo anche, per i numeri da 0 a 6, una successione degli stessi colori ma in senso decrescente : 7 in rosso, 6 in arancione, 5 in giallo, …, 0 non colorato. Potrebbe trattarsi di confusione tra « quanto resta? » nel dividendo e « quanto manca? » per completare il dividendo,

Exemple 9 (Cat 5)

4.4. Que faire en classe à la suite du coloriage / Che cosa fare in classe dopo la colorazione

Les résultats précédents ne peuvent pas laisser un enseignant indifférent. Il y a du travail en perspective à propos de la division par 7 avec reste, pour la classe entière, y compris ceux qui ont un colorage correct.

I risultati precedenti non possono lasciare indifferente un insegnante. C'è da lavorare sulla divisione per 7 con resto, per l'intera classe, compresi quelli che hanno la colorazione corretta.

1. La phase de résolution devrait se dérouler dans des conditions proches de celles de l'épreuve du RMT : la tâche est dévolue aux élèves répartis en petits groupes, chaque groupe rédige un compte rendu de sa recherche avec une description de sa démarche, l'enseignant est présent mais n'intervient que pour fixer la durée qui n'est pas obligatoirement de 50 minutes. D'après l'analyse a posteriori des copies, on peut considérer que tous les groupes se sont engagés de manière autonome et il n'est donc pas nécessaire d'organiser des mises en commun intermédiaires pour faciliter l'appropriation de la tâche de recherche.

   La fase di risoluzione dovrebbe svolgersi in condizioni simili a quelle della prova RMT: il compito viene assegnato agli allievi divisi in piccoli gruppi, ciascun gruppo scrive una relazione della propria ricerca con la descrizione del proprio approccio, il docente è presente ma interviene solo per impostare la durata, che non è necessariamente di 50 minuti. Dall'analisi a posteriori degli elaborati, si può constatare che tutti i gruppi si siano impegnati in modo indipendente e non è quindi necessario organizzare condivisioni intermedie per facilitare l'appropriazione del compito di ricerca.

2. La discussion collective qui suit, où ce sont les élèves qui ont la parole pour expliquer leur démarche, doit permettre non seulement de vérifier que le coloriage est correct mais aussi complet,

   - ce sont les groupes qui l'ont complété entièrement qui doivent expliquer à ceux qui n'ont commencé qu'à la case 7, dans leur langage, illustré avec leurs représentations,
   - le récit de l'organisation du coloriage est aussi essentiel : la mention du départ par les nombres dont le reste est 0, les raisons pour lesquelles on peut simplifier la recherche des restes pour toutes les cases en les organisant par couleurs, la reconnaissance explicite du livret du 7, puis des multiples de 7, puis des nombres qui valent 1 de plus, 2 de plus, … qu'un multiple de 7, la non nécessité de « poser la division » par écrit dans la disposition de l'algorithme (|–) car la recherche du reste se fait par une soustraction (le nombre, moins le multiple de 7 inférieur le plus proche), …

   La discussione collettiva che segue, in cui gli allievi hanno la parola per spiegare il loro metodo, non deve solo consentire di verificare che la colorazione sia corretta, ma anche completa,

   - sono i gruppi che l'hanno completata interamente a dover spiegare a chi ha iniziato solo dalla casella 7, nella loro lingua, illustrando con le loro rappresentazioni,
   - essenziale è anche il racconto dell'organizzazione della colorazione: il riferimento all'inizio, dai numeri il cui resto è 0, i motivi per cui possiamo semplificare la ricerca dei resti per tutte le caselle organizzandole per colori, il riconoscimento esplicito della tabellina del 7, dei multipli di 7, poi dei numeri che valgono 1 in più, 2 in più, ... di un multiplo di 7, la non necessità di "mettere la divisione" per iscritto nello schema dell'algoritmo (|–) perché la ricerca del resto viene effettuata per sottrazione (il numero, meno il multiplo inferiore di 7 più vicino), …

   Dans cette phase, l'enseignant est le « modérateur » du débat : il valorise les affirmations importantes comme « multiples de 7 », « multiples de 7 augmentés de 1 », « les 7 familles de nombres » une par couleur, « le reste est ce qu'il faut ajouter au multiple de 7 », il pose des questions pour orienter le débat (à propos de l'exemple 1, il demande s'il était vraiment nécessaire de calculer les restes pour chacun les nombres de couleur orange). C'est la phase dans laquelle les expressions linguistiques s'affinent et où commence le passage du langage commun à l'usage spécifique, vers l'acquisition des mathématiques. Il s'agit donc d'un apprentissage constructif beaucoup plus significatif qui donne sens à la future définition des nombres décrits par l'énoncé.

In questa fase, l'insegnante è il «moderatore» del dibattito: valorizza affermazioni importanti come «multipli di 7», «multipli di 7 aumentati di 1» «le 7 famiglie di numeri» una per colore, «il resto è quello che va sommato al multiplo di 7», pone domande per orientare il dibattito (per quanto riguarda l'esempio 1 chiede se fosse proprio necessario calcolare i resti per ciascuno dei numeri di colore arancione). Questa è la fase in cui si affinano le espressioni linguistiche e dove inizia il passaggio dal linguaggio comune all'uso specifico, verso l'acquisizione della matematica. Si tratta quindi di un apprendimento costruttivo molto più significativo che dà senso alla futura definizione dei numeri descritti dall'enunciato.

3. Dans la phase d'institutionnalisation, l'enseignant joue le rôle de « l'instituteur ». Il rappelle et souligne toutes les relations intéressantes du point de vue arithmétique :

   - L'ensemble des nombres naturels (ceux du tableau et tous les suivants qui sont nombreux, nombreux…) est réparti en 7 familles lorsqu'on recherche les restes de la division par 7. On peut voir ces sept familles dans un tableau de 7 colonnes beaucoup mieux que dans un tableau de 10 colonnes.

Nella fase di istituzionalizzazione, l'insegnante svolge il ruolo di «maestro». Richiama e sottolinea tutte le relazioni interessanti dal punto di vista aritmetico:

- L'insieme dei numeri naturali (quelli della tabella e tutti quelli successivi che sono numerosi, numerosi...) si divide in 7 famiglie quando cerchiamo i resti della divisione per 7. Possiamo vedere queste sette famiglie in una tabella di 7 colonne molto meglio che in una tabella di 10 colonne.

0 **7 × 0 + 0**	**1** **7 × 0 + 1**	**2** **7 × 0 + 2**	**3** **7 × 0 + 3**	**4** **7 × 0 + 4**	**5** **7 × 0 + 2**	**6** **7 × 0 + 2**
7 **7 × 1 + 0**	**8** **7 × 1 + 1**	**9** **7 × 1 + 2**	**10** **7 × 1 + 3**	**11** **7 × 1 + 4**	**12** **7 × 1 + 5**	**13** **7 × 1 + 2**
14 **7 × 2 + 0**	**15** **7 × 2 + 1**	**16** **7 × 2 + 2**	**17** **7 × 2 + 3**	**18** **7 × 2 + 4**	**19** **7 × 2 + 5**	**20** **7 × 2 + 2**
…	…	…	…	…	…	…

- Chaque nombre (dividende, D) se désigne sous la forme orale : « sept fois un nombre (quotient entier q) plus le reste r » ou sous la forme d'une écriture arithmétique D = 7 × q + r.
- Autres rappels : différence entre les nombres du livret et les multiples ; le reste est plus petit que le diviseur.
- Pour les catégories les plus élevées, comparer la division euclidienne (avec quotient et restes entier) et la division où le quotient est un nombre rationnel en écriture décimale.

- Ogni numero (dividendo, D) è designato nella forma orale: "sette volte un numero (quoziente intero q) più il resto r" o nella forma di scrittura aritmetica D = 7 × q + r.
- Altri spunti: differenza tra i numeri della tabellina ed i multipli; il resto è minore del divisore.
- Per le categorie più alte, confrontare la divisione euclidea (con quoziente e resto intero) e la divisione dove il quoziente è un numero razionale in scrittura decimale.

4 Phase d'exploitation didactique pour l'élève. À ce moment, l'enseignant a terminé son « devoir d'institutionnalisation » et le « travail de l'élève » commence réellement (pour tous ceux qui n'ont pas participé activement à la phase de discussion ou se sont pas arrivés à la solution dans la phase de recherche) et durera au moins une heure ou deux.

- Chacun construit un tableau complet des 7 familles, avec les écritures arithmétiques (selon le modèle de l'enseignant ou une représentation personnelle). (C'est la répétition des nombres et de leurs décompositions dans ce tableau qui doit faire « apparaître » les régularités des restes et des quotients entiers)

- Chacun construit au moins un autre tableau complet, par exemple à partir des restes de la division par 10 (où l'on découvre ou redécouvre les nombres qui se terminent par 0, 1, 2, … 9 qui sont les chiffres des unités !!), …
- Autres exploitations à proposer par l'enseignant en fonction de sa classe et de son niveau en arithmétique.
- Une exploitation est suggérée par l'exemple 6 où les élèves utilisent la calculatrice, qui ne dispose pas d'un algorithme de détermination du reste de la division par 7. Cet instrument donne cependant le quotient entier et le début du développement décimal, qui peut être exploité pour la détermination du reste : quelle est cette partie décimale pour les nombres rouges, oranges, jaunes … ? Est-ce une récursivité facile à reconnaître ?

Fase di potenziamento didattico per lo studente. A questo punto il docente ha espletato il suo "dovere di istituzionalizzazione" e inizia davvero il "lavoro dell'allievo" (per tutti coloro che non hanno partecipato attivamente alla fase di discussione o non sono arrivati alla soluzione nella fase di ricerca) e durerà almeno una o due ore.

- Ognuno costruisce una tavola completa delle 7 famiglie, con scritture aritmetiche (secondo il modello dell'insegnante o una rappresentazione personale). (È la ripetizione dei numeri e delle loro scomposizioni in questa tavola che dovrebbe "rivelare" le regolarità dei resti e del quoziente intero).
- Tutti costruiscono almeno un'altra tabella completa, ad esempio a partire dai resti della divisione per 10 (dove si scoprono o riscoprono i numeri che finiscono con 0, 1, 2, … 9 che sono le cifre delle unità!!), …
- Altre esplorazioni verranno proposte dall'insegnante a seconda della classe e del suo livello in aritmetica.
- Un suggerimento ci viene dato dall'esempio 6 in cui gli allievi utilizzano la calcolatrice, che non dispone di un algoritmo per determinare il resto della divisione per 7. Questo strumento fornisce però l'intero quoziente e l'inizio dello sviluppo decimale, che può essere utilizzato per determinare il resto: qual è questa parte decimale per i numeri rossi, arancioni, gialli, ecc.? C'è una ricorsività facile da riconoscere?

5. Observations de l'analyse a posteriori à propos de la recherche de la somme « jaune » + « vert » /Osservazioni dall'analisi a posteriori riguardo la ricerca dalla somma «giallo» + «verde»

La deuxième partie du problème est d'une tout autre nature que la première, qui n'était qu'un tableau à colorier selon des instructions, car elle consiste à se prononcer sur des affirmations dont une seule est vraie, les trois autres étant fausses : « qui a raison » parmi les quatre personnages : François « il sera jaune ou vert », Clara « On ne peut pas savoir ; il peut être de n'importe quelle couleur », Angela « Il sera rouge ». Anne-Marie « Il sera indigo ».

Ce type de question est inhabituel ; il exige de considérer non plus des nombres qui se trouvent dans une case du tableau précédent mais des nombres définis par une des sept couleurs ; c'est-à-dire à une propriété commune à chaque élément d'une des sept familles. Il faut donc que les élèves perçoivent ces familles, qu'ils aient complété correctement une grande partie du tableau et perçu son organisation (même s'ils ne l'ont pas colorié comme certains élèves des catégories 6 et 7 qui ne souhaitaient pas se fatiguer sur une tâche qu'ils estiment « réservée à l'école élémentaire »).

Les non réponses ou réponses erronées sont les plus nombreuses, particulièrement en catégories 6 et 7. Les groupes qui n'ont pas perçu la partition des nombres naturels en sept sous-ensembles selon les restes de la division par 7 ne pouvaient donc pas entrer dans la seconde partie du problème sans chercher à revenir à la première partie de la coloration et chercher à améliorer leur représentation. (Il faut rappeler à ce propos qu'il y a plusieurs élèves dans un groupe et plusieurs groupes dans la classe lors des épreuves du RMT, où les échanges et coopérations sont souhaités.)

Pour rendre compte de l'analyse des copies, nous nous limiterons à la présentation d'exemples, sans s'intéresser aux points attribués mais en cherchant à illustrer l'évolution des raisonnements et justifications.

La seconda parte del problema è di natura completamente diversa dalla prima, che era solo una tabella da colorare secondo le istruzioni, poiché consiste nel decidere su affermazioni di cui solo una è vera, le altre tre sono false: "chi ha ragione" tra i quattro personaggi: François "sarà giallo o verde", Clara "non possiamo saperlo; può essere di qualsiasi colore", Angela "Sarà rosso". Anna Maria "Sarà indaco".

Questo tipo di domande è insolito; impone di considerare non più i numeri che si trovano in una casella della tabella precedente, ma i numeri definiti da uno dei sette colori; cioè una proprietà comune a ciascun elemento di una delle sette famiglie. È quindi necessario che gli allievi percepiscano queste famiglie, abbiano compilato correttamente gran parte della tabella e ne percepiscano l'organizzazione (anche se non l'hanno colorata come alcuni allievi delle categorie 6 e 7 che non hanno voluto stancarsi su un compito, secondo loro, "riservato alla scuola primaria").

Le mancate risposte o le risposte errate sono le più numerose, soprattutto nelle categorie 6 e 7. I gruppi che non hanno percepito la suddivisione dei numeri naturali in sette sottoinsiemi, secondo i resti della divisione per 7, non potevano quindi entrare nella seconda parte del problema senza cercare di tornare alla prima parte della colorazione e cercare di migliorare la loro rappresentazione. (Va ricordato a questo proposito che ci sono più allievi in un gruppo e più gruppi nella classe durante le prove RMT, dove sono auspicati scambi e cooperazione.)
Nel riferire sull'analisi degli elaborati ci limiteremo alla presentazione di esempi, senza interessarci del punteggio assegnato ma cercando di illustrare l'evoluzione delle argomentazioni e delle giustificazioni.

5.1. Les réponses erronées / Le risposte errate

Exemple 10 (Cat 5) Ha ragione Angela perché 50 è rosso come aveva detto. (Trad. Angela a raison parce que 50 c'est rouge comme elle l'a dit.)

Un « nombre plus grand que 50 » de l'énoncé a été compris comme « le nombre 50 ».

Un «numero maggiore di 50» dell'enunciato è stato compreso come «il numero 50».

Exemple 11 (Cat 5) Prima si pensava che era Francesco ma poi abbiamo capito che era sbagliata perché poteva essere di qualunque colore. Allora quello che diceva questa teoria era Clara. (Trad. Au début, nous avons pensé que c'était Francesco, mais ensuite nous avons réalisé que c'était faux car cela aurait pu être de n'importe quelle couleur. Donc celle qui a dit cette théorie était Clara.)

Il y a au moins eu une discussion et un changement d'avis au sein du groupe. Et il semble que l'expression « n'importe quelle couleur » a été comprise.

Ci sono stati almeno una discussione e un cambiamento di pensiero in seno al gruppo. Sembra che sia stata compresa l'espressione « può essere di qualunque colore».

Exemple 12 (Cat 5) Ha ragione Francesco perché : il risultato della divisione di resto 2 significa che è colorato di giallo. (Trad. Francesco a raison car : le résultat de la division de reste 2 signifie qu'il est coloré en jaune.

Exemple 13 (Cat 5) … Abbiamo sommato i numeri maggiori di 50 in tutti i modi possibili. I risultati li abbiamo divisi per 7 e abbiamo visto che i numeri erano gialli e arancione, quindi sia Clara e sia Francesco hanno ragione. (Trad. Nous avons additionné des nombres supérieurs à 50 de toutes les manières possibles. Nous avons divisé les résultats par 7 et avons vu que les chiffres étaient jaunes et oranges, donc Clara et Francesco ont raison.

Exemple 14 (Cat 7) Qualsiasi somma tra due numeri gialli e verde dà come resto sette quindi ha ragione Angela (Trad. N'importe quelle somme de deux nombres jaunes et verts donne un reste de 7 et donc Angela.)

Dans les exemples précédents les élève ne comprennent pas que le choix des deux nombres leur revient et qu'ils doivent déterminer la couleur de la somme.

Negli esempi precedenti gli allievi non hanno compreso che la scelta dei due numeri spetta a loro e che devono determinare il colore della somma.

Exemple 15 (Cat 7) Ha ragione Clara perché: i numeri maggiori di 50 sono infiniti, quindi non si può determinare di che colore sia. (Trad. Clara a raison car : les nombres supérieurs à 50 sont infinis, on ne peut donc pas déterminer de quelle couleur ils sont.)

Exemple 16 (Cat 7) Secondo noi, Ha ragione Clara perché non ci sono dati che lo possono dimostrare. (Trad. Selon nous, Clara a raison car il n'y a pas de données qui peuvent le démontrer.)

Pour ces deux derniers exemples les élèves refusent l'idée qu'on peut répondre à la question sans leur préciser les nombres particuliers qu'ils doivent choisir, ou qu'on peut tirer une généralisation à partir de choix qui seront différents d'un essai à l'autre.

Per questi ultimi due esempi gli allievi rifiutano l'idea che si possa rispondere alla domanda senza specificare i numeri particolari da scegliere, o che si possa trarre una generalizzazione da scelte che saranno diverse da un tentativo all'altro.

5.2. Les réponses correctes obtenues à partir d'un seul choix / Risposte corrette a partire da una sola scelta

Elles sont très fréquentes, dans chaque catégorie.

Sono molto frequenti, in ogni categoria.

Exemple 17 (Cat 5) … Abbiamo anche i numeri di Giuseppe e Maria. Quello di Giuseppe è il 51 perché ha il resto di 2 che è uguale al colore giallo. Invece il numero di Maria è il 52 perché il resto è 3 ed è il colore verde. Sommando insieme fanno 103 e dividendolo per 7 il resto di 5 che è il colore indaco. Infatti ha ragione Anna Maria. (Trad. … Nous avons aussi les nombres de Joseph et Maria. Celui de Joseph est 51 parce qu'il a un reste de 2 qui est égal à la couleur jaune. En revanche le nombre de Marie est 52 parce que le reste est 3 qui est de couleur verte. En les ajoutant ensemble cela fait 103 et en le divisant par 7 il reste 5 qui est la couleur indigo. En effet Anne-Marie a raison.).

Il y a dans ce choix unique, l'absence de distinction de l'article défini « le » et de l'article indéfini « un » et aussi un effet de l'énoncé qui s'est révélé très inducteur et qui mériterait d'être modifié pour le reprise du problème en classe.

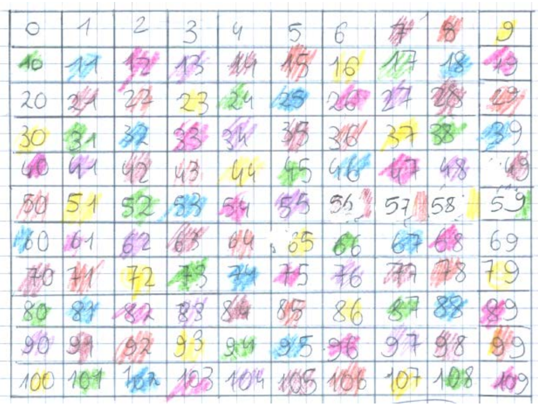
In questa scelta unica ci sono l'assenza di distinzione tra l'articolo determinativo "il" e l'articolo indeterminativo "un" ed anche un effetto dell'enunciato che si è rivelato molto induttivo e che merita di essere modificato per la ripresa del problema in classe.

Les auteurs du problème pensaient inciter les élèves à aller au-delà des premières lignes du tableau en choisissant « un nombre plus grand que 50 ». A ce propos, il faudra modifier légèrement cet énoncé en évitant de donner une limite précise. Par exemple : « Joseph et Marie ont prolongé le tableau en y ajoutant de très nombreuses lignes. Joseph y choisit un nombre jaune, Marie y choisit un nombre vert qui n'est pas un voisin du nombre de Joseph. Ils additionnent … ».

Gli autori del problema intendevano incoraggiare gli allievi ad andare oltre le prime linee della tabella scegliendo un numero più grande di 50. A questo proposito, bisognerà modificare leggermente questa affermazione evitando di dare un limite preciso. Per esempio : « Giuseppe e Maria hanno prolungato la tabella aggiungendovi un grande numero di linee. Giuseppe vi sceglie un numero giallo, Maria vi sceglie un numero verde che non è vicino al numero di Giuseppe. Addizionano i due numeri… ».

Exemple 18 (Cat 6) 51 + 52 = 103, 103 : 7 = 14 con il resto di 5. Ha ragione Maria perché è di colore magenta. (Trad. …51 + 52 = 103, 103 : 7 = 14 avec un reste de 5. Maria a raison parce qu'il est de couleur magenta).

Exemple 19 (Cat 7)



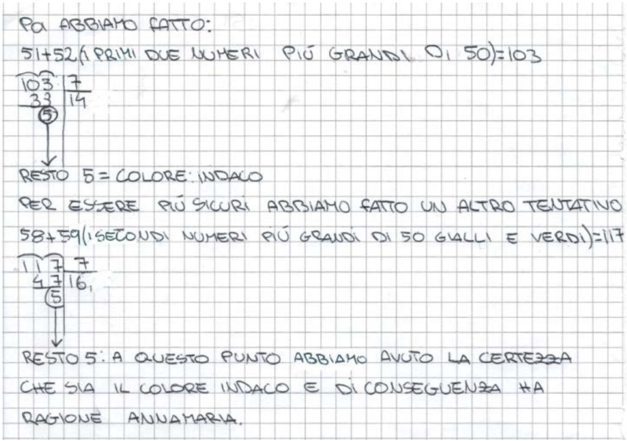
Secondo noi il numero scelto da Giuseppe è il 51 dato che è un numero colorato di giallo e dopo il 50. Il numero scelto da Maria è il 52 dato che è un numero colorato di verde. Quindi sommando questi due numeri si ottiene il numero 103 e per trovare il colore di questo numero ho continuato a costruire la tabella. Alla fine si ottiene che il numero 103 è colorati di indaco e quindi ha ragione Anna Maria. (Trad. A notre avis, le nombre choisi par Giuseppe est 51 puisque c'est un nombre coloré en jaune après 50. Le nombre choisi par Marie est 52 puisque c'est un nombre coloré en vert. Donc en additionnant ces deux nombres on obtient le nombre 103 et pour trouver la couleur de ce nombre j'ai continué à construire le tableau. À la fin on obtient que le nombre 103 est de couleur indigo et donc Anna Maria a raison).

Dans cet exemple on retrouve les cases non complétées du tableau mais les couleurs sont correctes. Pour l'adulte, il était inutile de prendre du temps pour refaire le tableau jusqu'à 109 car, après avoir trouvé la somme « 103 », il était possible de se limiter à effectuer la division par 7 et de trouver le reste de 5 ; mais l'élève qui a construit le tableau en avait certainement besoin et a peut être amélioré sa prise de conscience des sept familles. C'est le but de la phase d'exploitation didactique mentionnée au § 4.4. 4).

In questo esempio si ritrovano caselle non completate nella tabella ma i colori sono corretti. Per un adulto sarebbe stato inutile prendere del tempo per rifare la tabella fino a 109 poiché, dopo aver visto la somma 103, era possibile limitarsi ad effettuare la divisione per 7 e trovare il resto di 5 ; ma un allievo che ha costruito la tabella, ne aveva certamente bisogno ed ha accresciuto la sua consapevolezza delle sette famiglie. Questo è lo scopo della fase di potenziamento didattico menzionato al § 4.4. 4).

5.3. Les réponses correctes obtenues à partir de plusieurs choix / Risposte corrette ottenute a partire da più scelte

Exemple 20 (Cat 5)



POI ABBIAMO FATTO:
51+52 (I PRIMI DUE NUMERI PIÙ GRANDI DI 50)=103
103 | 7
33 | 14
5
RESTO 5 = COLORE: INDACO
PER ESSERE PIÙ SICURI ABBIAMO FATTO UN ALTRO TENTATIVO
58+59 (I SECONDI NUMERI PIÙ GRANDI DI 50 GIALLI E VERDI)=117
117 | 7
47 | 16
5
RESTO 5: A QUESTO PUNTO ABBIAMO AVUTO LA CERTEZZA
CHE SIA IL COLORE INDACO E DI CONSEGUENZA HA
RAGIONE ANNAMARIA.

Inizialmente, abbiamo colorato la scheda in base alle indicazioni date. Successivamente abbiamo riletto la parte inferiore del testo, quella sotto la tabella. Poi abbiamo fatto 51 + 52 (i primi numeri più grandi di 50) = 103.

103 : 7 resto 5 = colore indaco

Per essere più sicuri abbiamo fatto un altro tentativo 58 + 59 (i secondi numeri più grandi di 50) gialli e verdi) = 117

117 : 7 , 16, reste 5

A questo punto abbiamo avuto la certezza che sia il colore indaco e di conseguenza ha ragione Anna Maria.

Au début, nous avons colorié la fiche selon les indications données. Puis nous avons relu la partie inférieure du texte, celle sous le tableau. Ensuite, nous avons fait 51 + 52 (les premiers nombres plus grands que 50) = 103.

103 : 7 reste 5 = couleur indigo

Pour être plus sûrs, nous avons fait un autre essai 58 + 59 (les deuxièmes nombres plus grands que 50 (jaune et vert) = 117

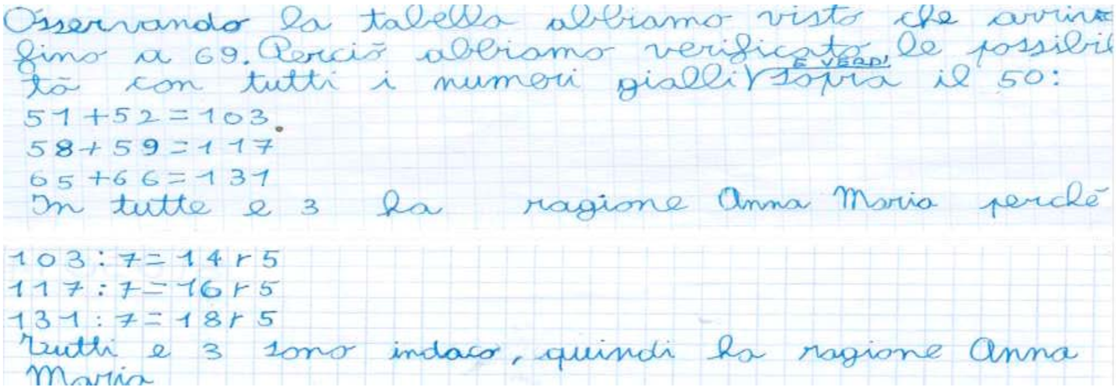
117 : 7, 16, reste 5.

À ce stade, nous avons eu la certitude qu'il s'agissait de la couleur indigo et en conséquence : Anna Maria a raison

Il y a là un pas important pour acquérir la « certitude » ! Ces élèves ont perçu les familles, même en choisissant deux nombres qui se suivent, et sont capables. Que pourrait-on demander de plus comme vérification, en catégorie 5 ?

C'è qui un passo importante per l'acquisizione di «certezza» ! Questi allievi hanno percepito la famiglia, anche scegliendo due numeri che si susseguono e sono capaci. Cosa potremmo chiedere di più, come verifica, in categoria 5?

Exemple 21 (Cat 5)


Osservando la tabella abbiamo visto che arriva fino a 69. Perciò abbiamo verificato le possibilità con tutti i numeri gialli sopra il 50: È VERO!

51 + 52 = 103

58 + 59 = 117

65 + 66 = 131

In tutte e 3 la ragione Anna Maria perché

103 : 7 = 14 r 5

117 : 7 = 16 r 5

131 : 7 = 18 r 5

Tutti e 3 sono indaco, quindi la ragione Anna Maria

(Trad. En observant le tableau nous avons vu qu'il arrive jusqu'à 69. Alors nous avons vérifié les possibilités avec tous les nombres jaunes au-dessus de 50 : 51 + 52 = 103, … dans toutes les 3 Anne-Marie a raison parce que 103 : 7 = 14 r 5 … Toutes les 3 sont indigo donc Anne-Marie a raison.)

Il y a ici trois choix parmi l'ensemble restreint du tableau prolongé, il est toujours sous-entendu que le nombre choisi par Marie est celui qui suit celui choisi par Joseph.

De très nombreux autres exemples, témoignent d'une perception correcte de la question demandant lequel des quatre amis a raison et d'une évolution d'un essai unique à une première généralisation.

Ci sono qui tre scelte dall'insieme ristretto della tabella allungata, è sempre implicito che il numero scelto da Maria sia quello successivo a quello scelto da Giuseppe.

Molti altri esempi dimostrano una corretta percezione della domanda su quale dei quattro amici ha ragione e un'evoluzione da un singolo tentativo ad una prima generalizzazione.

5.4. Au-delà des vérifications, les explications / Oltre le verifiche, le spiegazioni

Exemple 22 (Cat 5) Ha ragione Anna Maria perché i numeri gialli sono 2 in più dei multipli di 7, i numeri verdi sono 3 in più dei multipli di 7 e i numeri di colore indaco sono 5 in più dei multipli di 7; quindi sommando un numero giallo con un numero verde si ottiene un numero di colore indaco perché 2 + 3 = 5 e con numeri più grandi di 50 gialli e verdi sono rispettivamente più grandi di 2 e 3 rispetto ai multipli di 7 più grandi di 50.

(Trad. Anna Maria a raison car les nombres jaunes sont 2 de plus que les multiples de 7, les nombres verts sont 3 de plus que les multiples de 7 et les nombres indigo sont 5 de plus que les multiples de 7 ; donc en additionnant un nombre jaune avec un nombre vert on obtient un nombre indigo car 2 + 3 = 5 et avec des nombres supérieurs à 50 le jaune et le vert sont respectivement supérieurs de 2 et 3 aux multiples de 7 supérieurs à 50.)

Exemple 23 (Cat 5) … Per scoprire chi aveva ragione abbiamo fatto a tentativi per esempio 51 + 52 che fa 103 e ci siamo accorte che era indaco Abbiamo continuato a fare a tentativi e ci veniva sempre indaco. Però ci siamo accorte anche che se si somma il resto del giallo, cioè 2 e il resto del verde 3 si ottiene 5 che è il numero dalla posizione dell'indaco.

(Trad. … Pour savoir qui avait raison, nous avons fait des essais par exemple 51 + 52 qui fait 103 et nous avons vu que c'était indigo. Nous avons continué à faire des essais et nous avons toujours obtenu de l'indigo. Cependant, nous nous sommes également rendu compte que si l'on additionne le reste du jaune, soit 2, et le reste du vert 3, on obtient 5 qui est le nombre de la position de l'indigo.)

Exemple 24 (Cat 7) Secondo noi ha ragione Anna Maria perché se Giuseppe ha scelto un numero giallo vuol dire che il suo resto à 2 e se Anna Maria ha scelto un numero verde vuol dire che il resto è tre. Facendo la somma dei 2 resti sappiamo che il risultato è uguale al resto di tutti i colori indaco. (Trad. À notre avis Anna Maria a raison car si Giuseppe a choisi un nombre jaune cela signifie que son reste est 2 et si Maria a choisi un nombre vert cela signifie que le reste est trois. En additionnant les 2 restes on sait que le résultat est égal au reste de toutes les couleurs indigo.)

Ces derniers exemples témoignent de la compréhension de la question, généralisée pour les nombres jaunes et verts. Une expressions comme les nombres jaunes sont 2 de plus que les multiples de 7 définit un nouvel ensemble de nombres, « très proche » de l'ensemble connu des multiples de 7 (qui ne sont plus rouges comme dans le contexte du problème). Une autre expression comme En additionnant les 2 restes on sait que … sous-entend clairement la vérification pour tous les couples à envisager où les couleurs sont traduites en nombres. …

Questi ultimi esempi dimostrano la comprensione della domanda, generalizzata per i numeri giallo e verde. Un'espressione come i numeri gialli sono 2 in più dei multipli di 7 definisce un nuovo insieme di numeri, "molto vicino" all'insieme noto dei multipli di 7 (che non sono più rossi come nel contesto del problema). Un'altra espressione come Addizionando i 2 resti sappiamo che... implica chiaramente la verifica per tutte le coppie da considerare dove i colori vengono tradotti in numeri... .

5.5. Que faire en classe de l'addition de nombres de deux couleurs données / Cosa fare in classe riguardo l'addizione di numeri di due colori assegnati

Après les aspects techniques du coloriage, on se rend compte tout de suite qu'on ne peut pas se contenter de déterminer la couleur d'une somme particulière, d'un nombre jaune et d'un nombre vert, qui pourrait faire croire qu'il suffit d'additionner les deux restes pour pouvoir déterminer la couleur de la somme. Il faut envisager d'autres sommes, comme dans une deuxième version du problème proposée aux catégories 8 à 10 de la même épreuve 31.II.15 Division par 7 / Divisione per 7 où il s'agit d'additionner deux nombres de couleurs indigo et bleu dans un contexte arithmétique et incolore.

Dopo gli aspetti tecnici della colorazione, ci rendiamo subito conto che non possiamo semplicemente determinare il colore di una somma particolare, di un numero giallo e di un numero verde, il che potrebbe far credere che sia sufficiente sommare i due resti per poter determinare il colore della somma. Bisogna considerare altre somme, come in una seconda versione del problema proposto alle categorie da 8 a 10 della stessa prova 31.II.15 Division par 7 / Divisione per 7 dove si tratta di sommare due numeri di colore indaco e blu in un'operazione aritmetica e contesto incolore.

Il y a du travail en perspective à propos de la division par 7 avec reste, pour la classe entière :
C'è da lavorare sulla divisione per 7 con resto, per l'intera classe:

dans la phase de discussion collective les élèves qui sont arrivés à une vérification ou une explication de la couleur indigo de la somme de deux nombres jaune et vert doivent arriver à convaincre les autres qu'il ne suffit pas de vérifier la propriété sur une seul couple de nombres et qu'on peut être certain du résultat ;

nella fase di discussione collettiva gli allievi che sono arrivati ad una verifica, o ad una spiegazione del colore indaco della somma di due numeri giallo e verde, devono riuscire a convincere gli altri che non è sufficiente verificare la proprietà su una sola coppia di numeri per essere certi del risultato;

dans la phase d'institutionnalisation, l'enseignant soulignera que la propriété est valable pour n'importe quel couple jaune-vert, sur la base des essais et expérimentation mais sans vouloir le démontrer, ce qui serait prématuré.

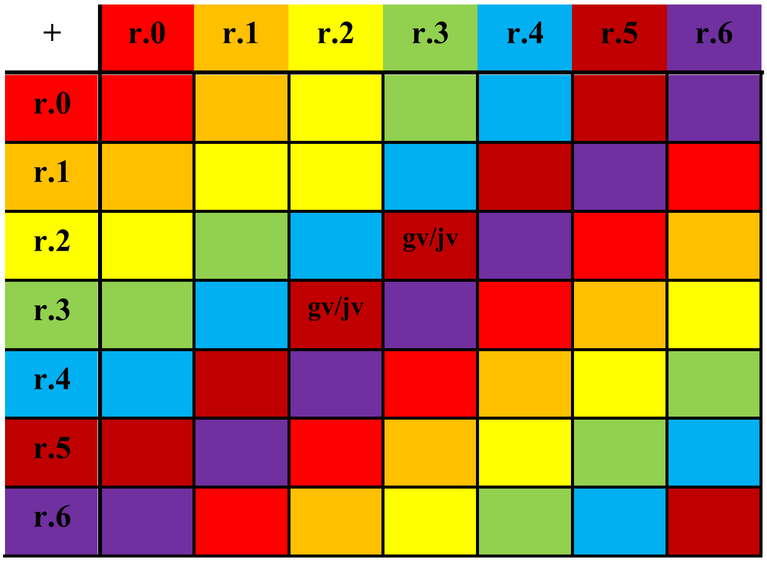
in fase di istituzionalizzazione il docente sottolineerà che la proprietà vale per qualsiasi coppia giallo-verde, sulla base di prove e sperimentazioni ma senza volerlo dimostrare, cosa che sarebbe prematura.

C'est au moment de l'exploitation didactique de la situation que l'enseignant doit proposer de poursuivre la réflexion sur d'autres couples de couleurs par des questions, qui constituent autant de nouveaux problèmes ; par exemple :

- De quelle couleur sera la somme de deux nombres rouges ?
- Si l'on additionne un nombre jaune et un nombre d'une autre couleur, pourra-t-on obtenir un nombre rouge ?
- De quelle couleur sera la somme d'un nombre bleu et d'un nombre indigo ?
- Et pourquoi pas aller jusqu'à dresser la « table d'addition » des sept familles de nombres, rouge, orange, … qui est un des fondements de l'arithmétique des nombres naturels : « l'addition des classes de reste d'un nombre « n », de manière toujours expérimentale et sans démonstration formelle :

È nel momento del potenziamento didattico della situazione che l'insegnante deve suggerire di proseguire la riflessione su altre coppie di colori attraverso domande, che costituiscono altrettanti problemi nuovi; per esempio:

- Di che colore sarà la somma di due numeri rossi?
- Se sommiamo un numero giallo e un numero di un altro colore, possiamo ottenere un numero rosso?
- Di che colore sarà la somma di un numero blu e un numero indaco?
- E perché non arrivare fino a redigere la "tavola additiva" delle sette famiglie di numeri rossi, arancioni, ecc. che è uno dei fondamenti dell'aritmetica dei numeri naturali: "la somma delle classi di resto di un numero "n", sempre sperimentalmente e senza dimostrazione formale:



Mais attention ! Il ne faut pas confondre ce tableau avec un objet d'apprentissage. Il est « beau » pour quelqu'un qui sait apprécier richesse de ses propriétés et par conséquent à proposer seulement aux élèves qui sont capables de les percevoir et y trouvent du plaisir.

Ma attenzione! Questa tabella non deve essere confusa con un oggetto didattico. È "bello" per chi sa apprezzare la ricchezza delle sue proprietà e quindi da offrire solo a allievi capaci di percepirle e di trovarne piacere.

6. Conclusion /Conclusione

Nous sommes partis d'une idée sur la partition des nombres naturels par les restes de la division par 7, « classes de restes » pour les mathématiciens. Au sein de Groupe problèmes » de l'ARMT cette proposition n'a pas recueilli l'unanimité au début des discussions ; certains pensait que ce thème (qui ne fait pas partie des programmes habituels, et plutôt considéré comme une « curiosité » pour les amateurs d'arithmétique) était hors de portée de jeunes élèves par et ne pouvait pas être abordé avant le lycée. Après discussion, le projet a été admis en substituant sept couleurs aux 7 sous-ensembles de la partition et en proposant une deuxième version pour les catégories 8 à 10, sans sortir du contexte des nombre naturels.
Le réponse aux doutes exprimés n'est pas dans le tableau des résultats statistiques, peu significatifs au vu de la difficulté d'interprétation des critères d'attribution des points, mais dans les copies des élèves.
Reconnaître les nombres qui ont un reste de 0, 1, 2, … dans une division par 7 semble être une tâche que tous les élèves devraient être capable d'effectuer dès qu'on les a entraînés sur ce qui va devenir pour eux l'algorithme de cette opération. Et pourtant, ce que nous n'avions pas prévu dans l'analyse a priori, pour 30% des élèves il n'y a pas de reste pour les dividendes plus petits que 7. Constatation essentielle pour se rendre compte des effets d'un algorithme non contrôlé.
Se rendre compte que le « reste » n'est pas forcément associé à un « manque » ou « quelque chose d'incomplet » ou encore une soustraction mais qu'il peut aussi représenter quelque chose en plus (comme dans l'exemple 22 : les nombres jaunes sont 2 de plus que les multiples de 7) est un enrichissement du concept.
La richesse des informations recueillies lors de l'analyse a posteriori renforcent notre proposition d'en faire un problème pour la classe. C'est donc aux enseignants que nous nous adressons maintenant :
Si vous avez une classe de catégorie 5 à 7, décidez de faire vivre à vos élèves une ou deux semaines de découverte de l'ensemble des nombres naturels. Commencez par le problème Arc-en-ciel en modifiant éventuellement l'énoncé pour éviter de parler d'un nombre particulier comme 50 (voir 5.2). Après la résolution, le débat et l'institutionnalisation, mettez vos élèves au travail ou « à l'étude » ; ils organiseront ou compléteront des tableaux et ils rédigeront leurs constatations personnelles et explication des propriétés qu'ils ont perçues (voir 4.4.4 et 5.4). Si, par exemple ils écrivent que « tous les nombres dont le reste de la division par 7 est 0 » sont les « les multiples de 7 » et qu'il est inutile d'utiliser un algorithme pour les trouver, vous pouvez vous dire qu'ils ont construit quelque chose d'important en arithmétique. Si, en catégorie 7, ils écrivent (ou expliquent) que la division de 100 par 7 donne un reste de 2 parce que $100 = 70 + 30 = 70 + 28 + 2 = (10 \times 7) + (4 \times 7) + 2 = (14 \times 7) + 2$, ils auront aussi amélioré leurs connaissances des multiples et progressé dans les combinaisons explicites d'opérations. Ce sont ces observations, qui peuvent paraître banales, qui sont au contraire significatives des apprentissages dans le réseau de relations entre opérations, multiples, diviseurs, nombres premiers, restes, qui constituent l'arithmétique dans l'ensemble des nombres naturels.

Siamo partiti da un'idea sulla partizione dei numeri naturali per i resti della divisione per 7, "classi di resti" per i matematici. All'interno del "Gruppo problemi" ARMT, questa proposta non ha ottenuto l'unanimità all'inizio delle discussioni; alcuni pensavano che questo tema (che non rientra nei programmi abituali, ma piuttosto è considerato

una “curiosità” per gli appassionati di aritmetica) fosse fuori dalla portata dei giovani allievi e non potesse essere affrontato prima delle scuole secondarie di secondo grado. Dopo la discussione, il progetto è stato accettato sostituendo sette colori ai 7 sottoinsiemi della partizione e proponendo una seconda versione per le categorie da 8 a 10, senza uscire dal contesto dei numeri naturali.
La risposta ai dubbi espressi non è nella tabella dei risultati statistici, poco significativi vista la difficoltà di interpretazione dei criteri di assegnazione del punteggio, ma negli elaborati degli allievi.
Riconoscere i numeri che hanno resto 0, 1, 2, ... in una divisione per 7 sembra essere un compito che tutti gli allievi dovrebbero essere in grado di svolgere non appena siano stati formati in quello che diventerà per loro l'algoritmo di questa operazione. Eppure, cosa che non avevamo previsto nell’analisi a priori, per il 30% degli allievi non c’è resto per dividendi inferiori a 7. Un’osservazione essenziale per rendersi conto degli effetti di un algoritmo non controllato.
Rendersi conto che il “resto” non è necessariamente associato a un “mancante” o a “qualcosa di incompleto” o addirittura a una sottrazione ma che può anche rappresentare qualcosa in più (come nell’esempio 22: i numeri gialli sono 2 in più dei multipli di 7) è un arricchimento del concetto.
La ricchezza di informazioni raccolte durante l'analisi a posteriori rafforza la nostra proposta di farne un problema per la classe. È dunque agli insegnanti che ci rivolgiamo ora:
se avete una classe di categoria da 5 a 7, potrete decidere di far vivere ai vostri allievi una o due settimane di scoperta dell’insieme dei numeri naturali. Iniziate con il problema dell'Arcobaleno, eventualmente modificando l'enunciato per evitare di parlare di un numero particolare come 50 (vedi 5.2). Dopo la risoluzione, il dibattito e l'istituzionalizzazione, mettete gli allievi a lavorare o “studiare”; organizzeranno o completeranno delle tabelle e scriveranno le loro osservazioni personali e la spiegazione delle proprietà percepite (vedi 4.4.4 e 5.4). Se, ad esempio, scrivono che "tutti i numeri il cui resto della divisione per 7 è 0" sono i "multipli di 7" e che non c'è bisogno di usare un algoritmo per trovarli, potrete dire a voi stessi che "hanno costruito qualcosa" di importante in aritmetica. Se nella categoria 7 scrivono (o spiegano) che dividendo 100 per 7 si ottiene un resto di 2 perché $100 = 70 + 30 = 70 + 28 + 2 = (10 \times 7) + (4 \times 7) + 2 = (14 \times 7) + 2$, avranno inoltre migliorato la conoscenza dei multipli e progredito nelle combinazioni esplicite di operazioni. Queste sono osservazioni che possono sembrare banali, che sono, invece, significative degli apprendimenti nella rete di relazioni tra operazioni, multipli, divisori, numeri primi, resti, che costituiscono l'aritmetica nell’insieme dei numeri naturali.

ANNEXE

En quoi la confrontation entre la division euclidienne et son algorithme de calcul est importante dans l’enseignement de l’arithmétique / Quanto è importante nell’insegnamento dell’aritmetica il confronto tra la divisione euclidea e il suo algoritmo di calcolo

Dans sa vie courante, l’enfant agit et réfléchi sur des objets, des quantités. Il apprend à exprimer ces quantités par des nombres qui doivent peu à peu être conçus comme des êtres qui ont une vie indépendamment des contextes où ils sont nés. Ce sont les nombres naturels qui apparaissent les premiers, oralement avec les mots de la comptine « un, deux, trois … » puis avec des chiffres, le recours aux doigts pour les montrer …

Arrivé à l’école, l’enfant, devenu élève revoit la comptine et son écriture dans notre système de base dix, puis les premières opérations arithmétiques : l’addition et sa réciproque, la soustraction, avec les mots « plus » et « moins » et les signes « + » et « - », la multiplication comme addition répétée comprenant le mot « fois » et le signe « × ». Il entre ainsi dans le domaine de l’arithmétique élémentaire c’est-à-dire dans l’étude des propriétés et des règles de calcul entre les nombres naturels (avant d’aborder les nombres entiers, décimaux, rationnels …)

Une des premières tâches qui occupe les élèves est l’expression d’un nombre en dizaines et unités puis sa décomposition, qui font appel à l’addition et à la multiplication. Par exemple le nombre 57, composé de 5 dizaines et unités peut s’écrire $57 = 5 \times 10 + 7$. C’est la première rencontre avec une relation fondamentale de l’arithmétique appelée « division euclidienne » ou « division avec reste » que les mathématiciens désignent par l’écriture « $D = d \times q + r$, avec $r < d$ » qui, à deux entiers naturels appelés « dividende » et « diviseur », associe deux autres entiers appelés « quotient euclidien » ou « quotient entier » et « reste ». L’élève n’utilise pas encore cette écriture mais, oralement, il sait que, pour notre exemple, 57 est composé de 5 dizaines et 7 unités ou pour une situation de partage il sait trouver que pour disposer 23 œufs dans des boîtes de sept (en Transalpie !), il pourra remplir 3 boîtes et il lui restera 2 œufs pour la boîte suivante.

Devant la fréquence des situations de la vie courante (partages, distributions, répartitions, …) qui font appel, en arithmétique, à la combinaisons de multiplications (ou additions répétées), additions et soustractions il faut envisager une méthode pour répondre à la double question « étant donné un nombre (le dividende) combien de fois, au maximum, vaut-il un autre nombre (le diviseur) et que reste-il ? » que les hommes se sont posés déjà bien avant Euclide. C’est l’origine de la division, réciproque de la multiplication, mais qui n’est pas encore une

« opération » puisqu'il y a deux réponses (que la calculatrice n'est pas capable de déterminer) et qu'on appelle « division avec reste ».

Cette méthode requiert un algorithme dont le principe consiste à soustraire le diviseur autant de fois qu'on l'avait additionné pour obtenir le dividende. Le « combien de fois » deviendra le quotient entier et ce qu'il faudrait encore soustraire mais que, à un moment donnée, on « ne peut pas » car on arriverait dans des nombres négatifs sera « le reste » (inférieur au diviseur). Pour limiter le nombre de soustractions, l'algorithme se répète selon les valeurs décroissantes des chiffres du dividende à partir de la plus grande. On divise par exemple les milliers par le diviseur puis on passe aux centaines, dizaines, unité.

Historiquement y a-t-il y a eu de nombreux algorithmes de la division qu'il a fallu « montrer » et « expliquer » aux élèves pour répondre aux demandes de la société sur « l'enseignement du calcul ».

Le jeune élève, qui ne maîtrise pas encore les propriétés des opérations nécessaires pour comprendre les différentes étapes de l'algorithme doit en acquérir la maîtrise par son exercice répété qui va aboutir à une application mécanique, dont le risque est de « s'habituer à effectuer des calculs qu'on ne comprend pas ». L'unique manière de réduire ce risque est de proposer à l'élève des activités lui permettant d'enrichir sa représentation de la division euclidienne dont les propriétés sont fondamentales tout au long de la scolarité et sont à découvrir et redécouvrir en permanence.

On retrouve ici, à propos des nombres naturels et de leurs relations, le processus d'enrichissement progressif de toute représentation d'objets mathématiques, à des rythmes respectant le développement personnel de l'école primaire au secondaire : tout d'abord au travers d'activités pratiques - découpages, regroupements, dessins, (coloriages pour notre problème) ; puis par la verbalisation à laquelle il faut consacrer du temps et finalement à des écritures plus rigoureuses qui permettent de passer des cas particuliers à la généralisation. Comme la table de multiplication, les algorithmes, dont celui de la division avec reste, sont introduits très (trop) tôt sous la pression du « savoir calculer » qui a été un des premiers objectifs de l'école pour tous, doivent progressivement être inclus dans la réflexion sur le réseau des relations entre nombres qui s'expriment en termes de multiples, diviseurs, opérations et leurs propriétés.

Paradoxalement, le but du travail sur l'algorithme de la division euclidienne est d'arriver à s'en passer pour déterminer les restes de divisions élémentaires, mentalement, comme connaissance « naturelle » et « réfléchie » de l'ensemble des nombres naturels !

Nella sua vita quotidiana il bambino agisce e pensa su oggetti, su quantità. Impara ad esprimere queste quantità mediante numeri che dovranno gradualmente essere concepiti come esseri che hanno una vita indipendente dai contesti in cui sono nati. Sono i numeri naturali ad apparire prima oralmente, con le parole della filastrocca "uno, due, tre…" poi con le cifre, usando le dita per mostrarle.

Arrivato a scuola, il bambino, divenuto allievo, ripassa la filastrocca e la sua scrittura nel nostro sistema a base decimale, poi scopre le prime operazioni aritmetiche: addizione e il suo reciproco, sottrazione, con le parole "più" e "meno" e i segni "+" e "-", la moltiplicazione come addizione ripetuta comprendente la parola "volte" e il segno "×". Entra così nel campo dell'aritmetica elementare, cioè nello studio delle proprietà e delle regole di calcolo tra i numeri naturali (prima di affrontare gli interi, i decimali, i numeri razionali, ecc.).

Uno dei primi compiti che occupano gli allievi è l'espressione di un numero in decine e unità e poi la sua scomposizione, che utilizza l'addizione e la moltiplicazione. Ad esempio, il numero 57, composto da 5 decine e unità, può essere scritto come $57 = 5 \times 10 + 7$. Questo è il primo incontro con una relazione fondamentale dell'aritmetica chiamata "divisione euclidea" o "divisione con resto" che i matematici designano scrivendo

"$D = d \times q + r$, con $r < d$" che, a due interi naturali detti "dividendo" e "divisore", associa altri due interi detti "quoziente euclideo" o "quoziente intero" e "resto" . L'allievo non usa ancora questa scrittura ma, oralmente, sa che, per il nostro esempio, 57 è formato da 5 decine e 7 unità oppure per una situazione di condivisione sa trovare che per disporre 23 uova in scatole da sette (in Transalpinia!), potrà riempire 3 scatole e gli resteranno 2 uova per la scatola successiva.

Data la frequenza delle situazioni quotidiane (spartizione, distribuzione, ripartizione, ecc.) che richiedono, in aritmetica, combinazioni di moltiplicazioni (o addizioni ripetute), addizioni e sottrazioni, è necessario considerare un metodo per rispondere alla doppia domanda "dato un numero (il dividendo) quante volte, al massimo, vale un altro numero (il divisore) e cosa rimane?" che gli uomini si chiedevano già molto prima di Euclide. Questa è l'origine della divisione, reciproca della moltiplicazione, ma che non è ancora una "operazione" poiché ci sono due risposte (che la calcolatrice non è in grado di determinare) e che noi chiamiamo "divisione con resto".

Questo metodo richiede un algoritmo il cui principio consiste nel sottrarre il divisore tante volte quante è stato aggiunto per ottenere il dividendo. Il "quante volte" diventerà il quoziente intero e ciò che dobbiamo ancora sottrarre, ma che "non possiamo" perché otterremmo numeri negativi, sarà "il resto" (minore del divisore). Per limitare il numero di sottrazioni, l'algoritmo si ripete secondo i valori decrescenti delle cifre del dividendo. Ad esempio dividiamo le migliaia per il divisore poi passiamo alle centinaia, alle decine, alle unità.

Storicamente, ci sono stati molti algoritmi di divisione che dovevano essere “mostrati” e “spiegati” agli allievi per rispondere alle richieste della società sull’“insegnamento del calcolo”.

Il giovane allievo, che non padroneggia ancora le proprietà delle operazioni necessarie per comprendere le diverse fasi dell'algoritmo, dovrà acquisirne la padronanza attraverso esercizi ripetuti che lo condurranno ad un'applicazione automatica, il cui rischio è quello di "abituarsi a svolgere calcoli senza comprenderli”. L'unico modo per ridurre questo rischio è proporre allo studente attività che gli consentano di arricchire la sua rappresentazione della divisione euclidea, le cui proprietà sono fondamentali durante tutto il percorso scolastico e vanno scoperte e riscoperte costantemente.
Qui troviamo, per quanto riguarda i numeri naturali e le loro relazioni, il processo di arricchimento progressivo di ogni rappresentazione di oggetti matematici, a ritmi rispettosi dello sviluppo personale, dalla scuola primaria alla scuola secondaria: innanzitutto attraverso attività pratiche - ritagliare, raggruppare, disegnare, (colorazione per il nostro problema); poi dalla verbalizzazione alla quale occorre dedicare tempo e infine da una scrittura più rigorosa che ci permetta di passare dai casi particolari alla generalizzazione. Come le tabelline, gli algoritmi, fra i quali quello della divisione con resto, vengono introdotti molto (troppo) presto, sotto la pressione del “saper calcolare” che era uno dei primi obiettivi della scuola per tutti, deve essere gradualmente incluso nella riflessione sulla rete di relazioni tra numeri che si esprimono in termini di multipli, divisori, operazioni e loro proprietà.
Paradossalmente, l’obiettivo del lavoro sull’algoritmo della divisione euclidea potrebbe essere quello di riuscire a fare a meno di un algoritmo per determinare mentalmente i resti delle divisioni elementari, come conoscenza “naturale” di tutti i numeri naturali!

PROBLEMA "A ZIG ZAG"

PROBLÈME « Á ZIG ZAG »

Lucia Grugnetti e Angela Rizza

con il contributo di Federica Curreli e Cinzia Utzeri

Introduzione

Tra i problemi della finale del 13° RMT del 2005 figurava, per le categorie 8 e 9, "Il serpente miope" proposto dal Gruppo Zeroallazero, riguardante, in particolare, l'ambito delle progressioni geometriche e un'idea di convergenza. Le riflessioni nate dall'analisi degli elaborati, hanno portato ad una discussione e alla progressiva formulazione di un problema simile, che è stato proposto nella seconda prova del 30° RMT del 2023: questa volta il personaggio è una formichina che si è persa e che cerca di ritrovare la piccola entrata del formicaio seguendo un percorso a zig zag.
Si è stabilito di proporre il nuovo problema, "La formichina si è persa", solo alle categorie 9 e 10 e in questo articolo si presenta la relativa analisi a posteriori, preceduta da un paragrafo che illustra le lunghe fasi di preparazione del problema stesso.

Introduction

Parmi les problèmes de la finale du 13e RMT en 2005 pour les catégories 8 et 9, il y avait, « Le serpent myope » proposé par le Groupe Zeroallazero, concernant en particulier le domaine des suites géométriques avec l'idée de convergence. Les réflexions nées de l'analyse des copies, ont conduit à une discussion et à la formulation progressive d'un problème similaire, qui a été proposé dans la deuxième épreuve du 30e RMT en 2023: cette fois, le personnage est une fourmi qui s'est égarée et essaie de trouver l'entrée de la fourmilière en suivant un chemin en zigzag.
Il a été décidé de ne proposer le nouveau problème, « La fourmi s'est perdue », qu'aux catégories 9 et 10 et son analyse a posteriori est présentée dans cet article, précédée d'un paragraphe qui illustre les longues phases de préparation du problème lui-même.

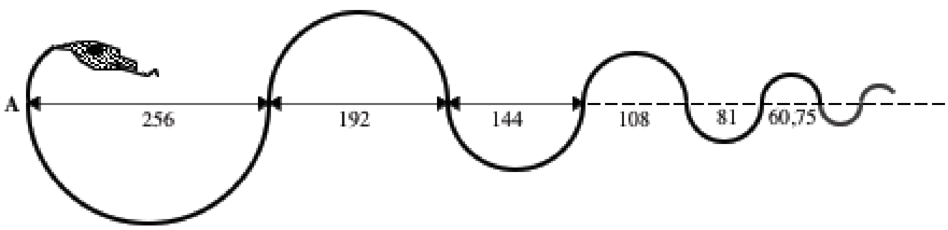
1. "Nascita" ed evoluzione del problema

Ecco il testo del problema 13.F.16.

IL SERPENTE MIOPE (Cat. 8, 9)

Il signor Pitone si sta ammirando.

Osserva che il suo corpo forma delle semicirconferenze i cui diametri: 256; 192; 144; 108; 81; 60,75; … (in mm) decrescono regolarmente, sempre con lo stesso rapporto.
Però è miope e, a partire dalle prime 5 o 6 semicirconferenze, non vede più nulla e non arriva quindi a vedere la fine della sua coda.



Secondo voi qual è la distanza, in mm, tra il suo collo, nel punto A, e la fine della coda?
Stimate la lunghezza del suo corpo, dal punto A fino alla fine della coda.
Quante sono le semicirconferenze che il serpente miope non riesce a vedere?
Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

Si tratta di un problema che ha avuto una riuscita molto scarsa, forse anche a causa delle molteplici richieste, a partire dalla situazione che si basa, fra l'altro, su semicirconferenze con il disegno che non sempre ha favorito la comprensione, ma soprattutto della sua complessità matematica "intrinseca" che richiede di immaginare un processo infinito ma convergente. I due seguenti elaborati sono rappresentativi delle difficoltà e dei punti di vista opposti che la situazione mette in gioco.

Abbiamo calcolato che il rapporto tra una semicirconferenza e la seguente vi è un rapporto di $1,\overline{3}$.

$256 : 192 = 1,\overline{3}$

$192 : 144 = 1,\overline{3}$

e così di seguito.

Potremmo così procedere e calcolare sempre una circonferenza più piccola della precedente con un rapporto di $1,\overline{3}$.
Siamo comunque giunti alla conclusione che ci sarà sempre una circonferenza più piccola della precedente con un rapporto di $1,\overline{3}$.
Perciò la distanza tra il collo e il punto A è infinita, la lunghezza del corpo è infinita e il numero di semicirconferenze è infinito.

Elaborato 1

Abbiamo notato che dividendo un diametro con quello successivo il risultato è di $1,\overline{3}$. Quindi per scoprire il diametro successivo bisogna ~~[illegible]~~ dividere il diametro per $1,\overline{3}$. In questo modo abbiamo trovato 36 diametri

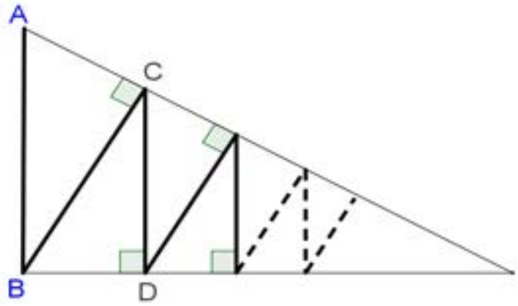
256 mm	0,34 mm
192 mm	0,26 mm
144 mm	0,19 mm
108 mm	0,14 mm
81 mm	0,11 mm
60,75 mm	0,081 mm
45,56 mm	0,06 mm
34,17 mm	0,046 mm
25,63 mm	0,034 mm
19,22 mm	0,026 mm
14,41 mm	0,019 mm
10,81 mm	0,014 mm
8,11 mm	0,011 mm
6,08 mm	
4,56 mm	
3,42 mm	
2,56 mm	
1,92 mm	
1,44 mm	
1,08 mm	
0,81 mm	
0,61 mm	
0,46 mm	

In questo modo abbiamo visto che la sua coda è lunga 1023,93 mm.
Visto che vede i primi 6 semicerchi, e che in tutto sono 36, il serpente non ne vede 30

Elaborato 2

In entrambi il punto di partenza è l'osservazione di un rapporto costante $1,\overline{3}$ fra una semicirconferenza e la successiva nel primo caso, fra un diametro e il successivo nel secondo caso.
Le conclusioni sono però opposte. Nell'elaborato 1 si afferma che ci sarà sempre una semicirconferenza più piccola della precedente e che il numero di semicirconferenze è infinito; ma si deduce anche, erroneamente, che la distanza tra il collo e la fine della coda e la lunghezza del corpo sono anch'esse infinite.
Nell'elaborato 2 si calcolano 36 addendi della somma dei diametri e si sommano, ottenendo una buona approssimazione (1023,93 invece di 1024); il processo viene quindi arrestato e non ci sono indicazioni circa una sua possibile continuazione all'infinito.
Si delineano quindi due posizione antitetiche: chi afferma che il processo (addizione ripetuta) e il suo risultato (somma della serie) siano entrambi infiniti e chi sostiene che essi siano entrambi finiti.
È infatti totalmente controintuitivo concepire, come accade nel caso delle progressioni geometriche, un processo infinito che porta ad un risultato finito.

Per fare emergere questo conflitto, si è pensato di elaborare un nuovo problema nel quale la convergenza sia suggerita da una situazione geometrica che racchiude all'interno di una regione limitata (un triangolo) una linea spezzata prolungabile all'infinito.
L'idea iniziale è così quella di trovare la lunghezza di una spezzata del tipo:



note le misure dei primi due segmenti che la compongono.
Trovato quindi l'aspetto prettamente matematico del problema "completare un percorso a zig zag convergente in un punto e calcolarne la lunghezza noti i primi termini della progressione geometrica.", l'attenzione è stata rivolta al contesto, che è stato discusso e cambiato più volte:

- Il contesto potrebbe essere quello del volo a zig-zag di una mosca intrappolata in un angolo; il percorso sembra avere senso perché ogni volta che si dirige verso la parete opposta, la mosca sceglie opportunamente il percorso più breve.
- Oppure una corsa a zig zag nel cortile della scuola:

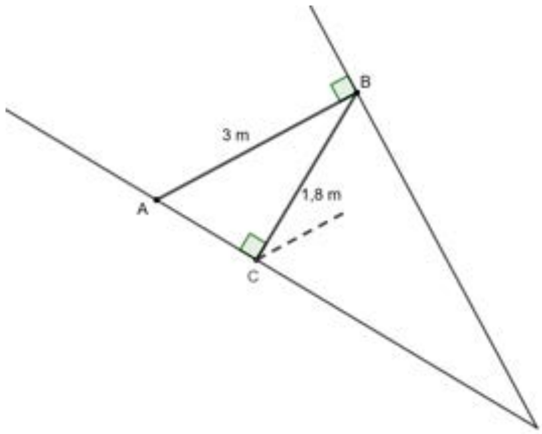
Gli allievi della classe di Francesco hanno proposto all'insegnante di educazione fisica di poter tracciare una linea a zig zag nel cortile della scuola per poter correre su un percorso non troppo corto.
Hanno cominciato a preparare un progetto come il seguente.

Figura con indicazione delle due prime misure

Completate il progetto della classe di Francesco e trovate la lunghezza del percorso.
Spiegate come avete proceduto e date i dettagli dei vostri calcoli.

- Sarebbe meglio se il disegno non fosse in posizione standard

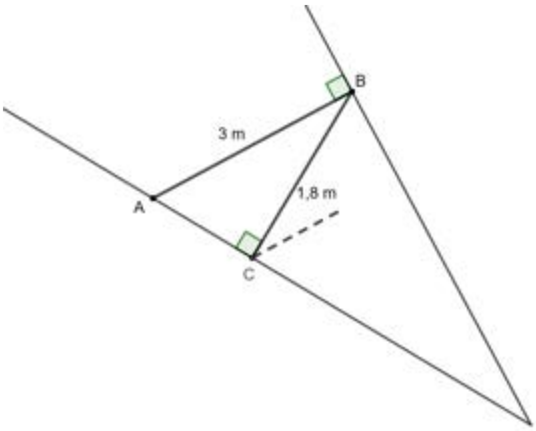
Ecco:



Osservazioni sul contesto:
Come già rilevato più volte, in un problema dove figuravano dei personaggi in fila e cioè quello delle dimensioni fisiche delle persone, non si riesce ad andare molto avanti a disegnare a causa dell'ingombro del proprio corpo, della mano, della matita ecc.
Se si vuole andare "più avanti possibile" occorre pensare a un oggetto "il più piccolo possibile", idealmente un punto. Forse essendo un problema per grandi e riguardante un processo ideale che continua all'infinito si potrebbe anche eliminare il contesto e chiedere: se si continuasse a disegnare…. Oppure un oggetto veramente piccolo: una formica, una pallina in un buco, ecc… ma forse ciò crea un po' di difficoltà nel pensare di doversi per forza fermare ad un certo punto e non aiuta a capire che si può andare avanti quanto si vuole.

E allora altra proposta di contesto, con bozza di analisi a priori (in rosso la discussione):

LA FORMICHINA SI È PERSA (CAT. 9)
Una formichina cerca di tornare nel buchino che immette nel formicaio e si incammina lungo il percorso a zig zag che le sembra quello conosciuto e che qui di seguito non è completo.
Cammina cammina, la formichina si chiede se arriverà nel buchino agognato.



(forse non andrebbero messe le lettere e si potrebbe aggiungere un altro segmento. Dove c'è A si potrebbe scrivere partenza)

Disegnate il percorso a zig zag della formichina, che prosegue con segmenti sempre perpendicolari a una delle due bordure che lo contengono e trovate la lunghezza del percorso.
Spiegate come avete proceduto e date i dettagli dei vostri calcoli.

Dubbi sulla richiesta della spiegazione. Forse può essere sufficiente chiedere il dettaglio dei calcoli.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Completare un percorso a zig zag convergente in un punto e calcolarne la lunghezza noti i primi termini di una progressione geometrica.

Analisi del compito

- L'appropriazione del problema richiede che non si cerchi solo di capire come sia fatto il percorso della formichina, ma anche che ci si chieda quale possa essere il senso della perplessità della formichina del riuscire o meno a raggiungere il buchino del formicaio.
- Per quel che riguarda il percorso, capire come sia costruito con l'analisi del disegno presentato e con il supporto delle indicazioni nella prima consegna.
- Una volta capito che i segmenti successivi sono perpendicolari a una delle due bordure, disegnarli e… a un certo punto chiedersi come si possa proseguire visto che i segmenti saranno sempre più corti e via via "impossibili" da tracciare.
- Capire quindi che il percorso non permette di raggiugere "al finito" il buchino del formicaio.
- Per quel che riguarda la ricerca della lunghezza del percorso, le procedure sono svariate e vanno dalla più abbordabile agli allievi a procedure più elaborate che potranno essere costruite in una successiva attività in classe.

  - capire che bisogna trovare il rapporto tra le lunghezze date dei primi due tratti (o segmenti) della spezzata e calcolare via via le lunghezze dei vari segmenti che diventano presto minori di 1 e che continuano a diminuire: 3; 1,8; 1,08; 0,648; 0,3888; 0,23328; 0,139968… .

  Tale procedura consente di trovare "solo" un'approssimazione della lunghezza del percorso. Per esempio, la somma dei valori precedenti porta a 7,290048.

  Oppure, con conoscenze relative alla somma di una progressione geometrica, eventualmente abbordate a livello della categoria 10, con il ricorso al rapporto tra le lunghezze dei segmenti, considerare la somma della progressione:
  $S = 3+ 3\ (3/5) + 3\ (3/5)^2+\ldots$

  Poi moltiplicando ambo i membri per 3/5: $(3/5)\ S = 3\ (3/5) + 3\ (3/5)^2+\ldots$

  E infine, con la differenza fra le due relazioni $S- (3/5)\ S = 3$ ottenere $S = 7,5$.

Oppure, considerando la configurazione geometrica della spezzata, con le due successioni di segmenti tra loro paralleli:

Figura con 3 o 4 segmenti della spezzata paralleli al primo (con un tratto forte) e 3 0 4 segmenti paralleli al secondo (con tratto sottile)

impostare la proporzione tra il rapporto della lunghezza l della spezzata e la lunghezza del primo segmento e il rapporto della lunghezza della spezzata meno il primo segmento e il secondo segmento: l/3 = (l-3)/1,8, che conduce a l = 7,5 (in m) (che potrebbe essere considerato come teorema di Talete all’infinito, vista la convergenza).

In vista di una possibile attività in classe successiva alla prova, potrebbe essere interessante “costruire” con gli allievi il secondo e il terzo procedimento per arrivare anche a osservare che, in questi due casi, si ottiene l’effettiva lunghezza della spezzata, mentre con il primo ci si avvicina sempre di più, ma il processo “non finisce”!

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette (disegno che tenga conto della perpendicolarità richiesta e commento sulla “impossibilità a completarlo” e lunghezza della spezzata che superi i 7 metri e con un cenno all’approssimazione, o lunghezza di 7,5 metri) con dettaglio dei calcoli

3 Risposte corrette con dettaglio dei calcoli appena accennato
oppure disegno corretto con commento sulla “impossibilità a completarlo”, ma lunghezza della spezzata minore di 7 metri (ci si ferma ai primi valori minori di 1) e non si parla di approssimazione, con dettaglio dei calcoli

2 Risposte corrette, senza dettaglio dei calcoli
oppure disegno corretto con commento sulla “impossibilità a completarlo” e lunghezza approssimata ma con un errore di calcolo che si desume dal dettaglio dei calcoli

1 Inizio di ragionamento corretto (disegno senza cenno all’impossibilità di completarlo e individuazione del rapporto)

0 Incomprensione del problema

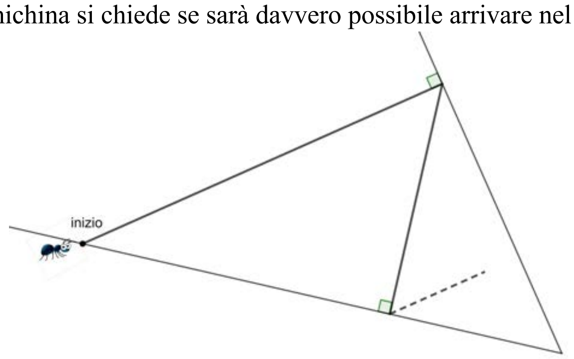
Invece di risposte “accettabili” meglio mettere risposte corrette laddove sia evidente la consapevolezza dell’approssimazione del risultato per quanto riguarda la lunghezza e il fatto che la spezzata abbia “infiniti tratti” . O qualcosa del genere.

Non ci siamo ancora. Una nuova versione dell’enunciato è la seguente:

LA FORMICHINA SI È PERSA (CAT. 9, 10)

Una formichina cerca di tornare nel buchino che immette nel formicaio e si incammina lungo il percorso a zig zag tra due muretti che le sembra quello conosciuto e che qui di seguito non è completo.

Cammina cammina, la formichina si chiede se sarà davvero possibile arrivare nel buchino agognato.



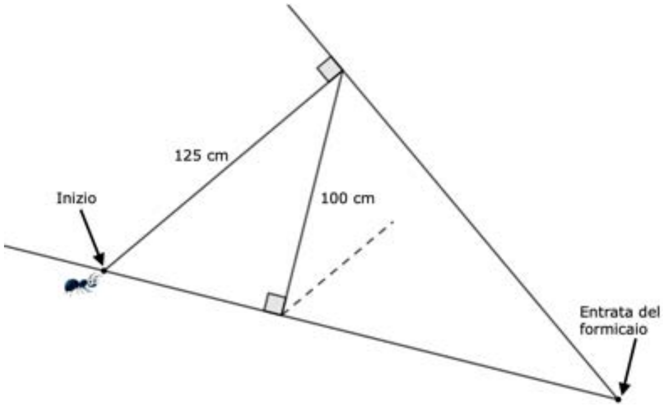
La formichina percorre segmenti sempre perpendicolari a uno dei due muretti che contengono il percorso a zig zag. I segmenti sono anche via via più corti con regolarità, uno rispetto all’altro. (oppure: decrescono regolarmente, sempre con lo stesso rapporto).

Disegnate tutti i segmenti che potete del percorso a zig zag della formichina e trovate la lunghezza del percorso.

Date i dettagli dei vostri calcoli.

Con le frasi aggiuntive si dà un aiuto agli allievi (come sollecitato da più parti) e con la domanda espressa in questo modo "tutti i segmenti che potete" forse si semina il dubbio "sulla impossibilità" per la formichina di arrivare al buchino; dubbio peraltro già segnalato con la frase Cammina cammina, la formichina si chiede se sarà davvero possibile arrivare nel buchino agognato. Certo, si potrebbe pensare alla stanchezza della formichina, ma poi, la domanda espressa in questo nuovo modo, qualche dubbietto dovrebbe insinuarlo.

Infine, dopo la fase di discussione e le osservazioni delle sezioni, si decide di fare sul disegno alcune precisazioni:

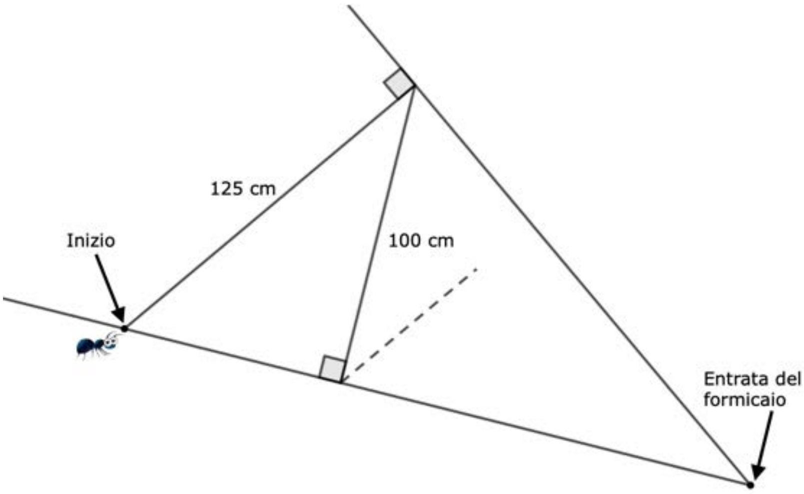


Si arriva così alla **versione finale** del problema, proposto nella seconda prova del 30 RMT:

19. LA FORMICHINA SI È PERSA (Cat. 9, 10)

Una formichina disorientata cerca di trovare il buchino che immette nel formicaio e si incammina lungo il percorso, procedendo a zig zag tra due muretti, che le sembra quello conosciuto e che nel disegno di seguito non è completo.

Cammina, cammina, la formichina si chiede se sarà davvero possibile arrivare nel buchino tanto ricercato.



La formichina percorre segmenti sempre perpendicolari a uno dei due muretti che determinano il percorso a zig zag. I segmenti sono via via più corti con regolarità, uno rispetto all'altro.

Disegnate tutti i segmenti che potete del percorso a zig zag della formichina e trovate la stima migliore possibile della lunghezza totale del percorso.

Date i dettagli dei vostri calcoli.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Completare il disegno di un percorso a zig zag convergente in un punto e calcolarne la lunghezza, sia tramite il rapporto tra le misure di due segmenti successivi a partire dai primi due (125 e 100) (progressione geometrica), sia con disegno e misure.

Analisi del compito

- L'appropriazione del problema richiede che si cerchi di capire come sia fatto il percorso della formichina.
- Per quel che riguarda il percorso, capire come sia costruito mediante l'analisi del disegno presentato e con il supporto delle indicazioni dell'enunciato (segmenti via via più corti con regolarità) e indicazioni contenute nella consegna: disegnate tutti i segmenti che potete).
- Una volta capito che i segmenti successivi sono perpendicolari a una delle due bordure, disegnarli e… a un certo punto chiedersi come si possa proseguire, visto che i segmenti saranno sempre più corti e via via "impossibili" da tracciare. Con un disegno su carta a quadretti a partire dal segmento iniziale che in scala può essere di 12,5 cm-(25 quadretti) si riesce a disegnare in modo chiaro fino al 15º segmento.
- Capire quindi che il percorso prosegue e non permette di raggiugere con un numero finito di segmenti il buchino del formicaio, anche tenuto conto del "dubbio" della formichina di poter raggiungere il "buchino ricercato".

Per quel che riguarda la ricerca della lunghezza del percorso, le procedure sono svariate e vanno dalla più abbordabile agli allievi a procedure più elaborate che potranno essere costruite in una successiva attività in classe.

- La procedura più abbordabile consiste nel capire che il rapporto tra le lunghezze di due segmenti consecutivi del percorso è costante (ad esempio osservando che i triangoli rettangoli che si formano sono simili tra loro, oppure capire come si passa da 125 a 100 e trovare il rapporto 4/5) e calcolare via via le lunghezze dei vari segmenti tenendo conto che ogni lunghezza si ottiene moltiplicando la precedente per il rapporto costante 4/5 oppure per 0,8, quindi, dopo 125 e 100 si ottiene: 80; 64; 51,2; 40,96; 32,768; 26,214; 20,972, 16,777; 13,422; 10,737; 8,590; 6,872; 5,498…

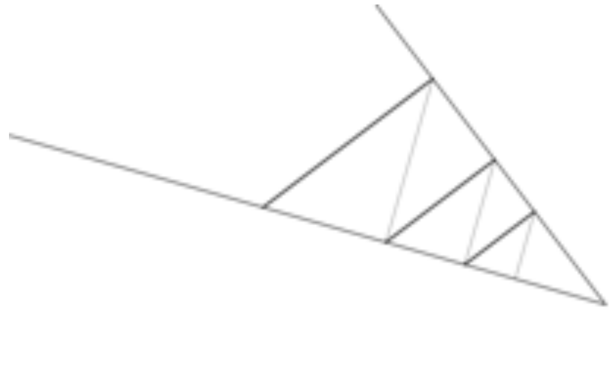
  Comprendere quindi che la procedura di addizione può continuare all'infinito ma che gli addendi diventano sempre più piccoli e quindi che la somma cresce sempre meno. Decidere allora a che punto fermarsi, tenendo conto delle dimensioni della formichina o del proprio disegno. Per esempio, se ci si ferma al 15º addendo (che, con il disegno corrisponde al segmento che è possibile tracciare ancora in modo chiaro) si ottiene circa 603.
  Tale procedura consente di trovare "solo" un'approssimazione della lunghezza del percorso. Per esempio, la somma dei valori precedenti porta a 603,009.
- È anche possibile una procedura con le misure dei segmenti su un disegno, purché tale disegno sia preciso e in scala. Il primo triangolo rettangolo avrà i lati, per esempio, espressi in mm, di lunghezze rispettive 125, 100 e 75 (con il teorema di Pitagora). In questo caso, leggendo le misure approssimate al mm, si arriva a circa 610 mm da 16 a 17 segmenti.

Oppure, con conoscenze relative alla somma di una progressione geometrica, eventualmente acquisite a livello della categoria 10, con il ricorso al rapporto tra le lunghezze dei segmenti, considerare la somma della progressione, tenendo conto "intuitivamente" che i termini tendono a 0

$S = 125+ 125 (4/5) + 125 (4 /5)^2+…$

Moltiplicando poi ambo i membri per 4/5: $(4/5) S = 125 (4/5) + 125 (4/5)^2+…$ e scrivendo la differenza fra le due relazioni si ottiene: $S- (4/5) S = 125$ e infine $S =625$.

Oppure, considerando la configurazione geometrica della spezzata, con le due successioni di segmenti tra loro paralleli:



impostare la proporzione tra il rapporto della lunghezza S della spezzata e la lunghezza del primo segmento e il rapporto della lunghezza della spezzata meno il primo segmento e il secondo segmento: S/125 = (S-125)/100, che conduce a S = 625 (in cm) (procedura che potrebbe essere considerata come una generalizzazione della similitudine).

In vista di una possibile attività in classe successiva alla prova, potrebbe essere interessante "costruire" con gli allievi il secondo e il terzo procedimento per arrivare anche a osservare che, in questi due casi, si ottiene l'effettiva lunghezza della spezzata, mentre con il primo ci si avvicina sempre di più, ma il processo "non finisce"!

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette (disegno che tenga conto della perpendicolarità richiesta e accenno alla "impossibilità a completarlo" come suggerito dall'enunciato e dalla domanda; con percorso che arrivi fino ad almeno il 14º o 15º segmento e lunghezza della spezzata che superi i 600 cm, o inferiore a 625 cm) con dettaglio dei calcoli sia con l'individuazione del rapporto sia con le misure con un disegno in scala

3 Risposte corrette con dettaglio dei calcoli non completo
oppure disegno corretto fino ad almeno il 12º o il 13º segmento e lunghezza della spezzata compresa tra 580 cm e 600 cm, con dettaglio dei calcoli

2 Risposte corrette, senza dettaglio dei calcoli
oppure disegno corretto fino almeno al 10º o 11º segmento e lunghezza come somma di lunghezze dei segmenti trovati con un errore di calcolo o di misurazione che si desume dal dettaglio presentato
oppure disegno corretto fino ad almeno il 12º o il 13º segmento e lunghezza ottenuta con un calcolo o delle misure coerenti

1 Inizio di ragionamento corretto (disegno con almeno sei segmenti o calcolo delle lunghezze ma non viene fatta la somma, …)
oppure individuazione della lunghezza del terzo segmento con rapporto corretto
oppure risposta del tipo: poiché gli addendi sono infiniti, la lunghezza è infinita, con almeno un inizio corretto di disegno

0 Incomprensione del problema

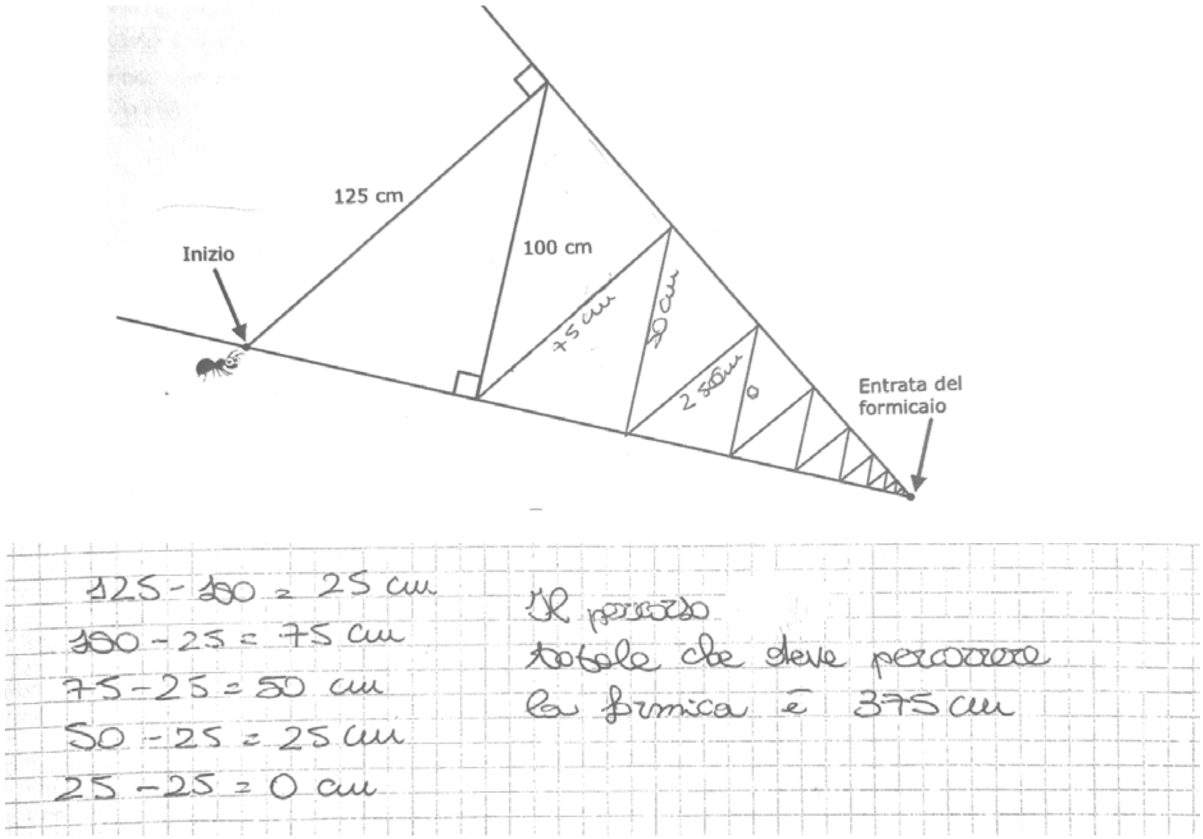
2. Come sono andate le cose: analisi "a posteriori"

Nelle **indicazioni didattiche** relative al problema "Il serpente miope" di cui il problema della formichina che si è persa ne è una rivisitazione, troviamo scritto: Questo problema, che, come osservato più sopra, spazia dalla geometria - con la lunghezza della circonferenza, il teorema di Talete, la similitudine - all'aritmetica - con le successioni, il calcolo della somma di termini di una progressione geometrica - nonché ad un approccio all'idea di infinito in matematica, si presta bene ad essere utilizzato in classe per attività costruttive su tali tematiche, che possono inoltre condurre ad interessanti dibattiti.
Anche in questo caso il problema spazia ancora dalla geometria all'aritmetica con anche un approccio all'idea di infinito.
L'analisi degli elaborati delle sezioni di Cagliari, Parma e Siena ha evidenziato che, nel complesso, il disegno di almeno una quindicina di segmenti della spezzata è presentato in maniera corretta.

Figurano però elaborati con errori legati a incomprensione del problema dove gli allievi determinano la lunghezza del percorso con il righello e affermano "abbiamo misurato la lunghezza del percorso della formichina e li abbiamo sommati e abbiamo trovato la lunghezza del percorso" e rappresentano nel disegno segmenti a zig zag non perpendicolari sia al primo muretto che al secondo.

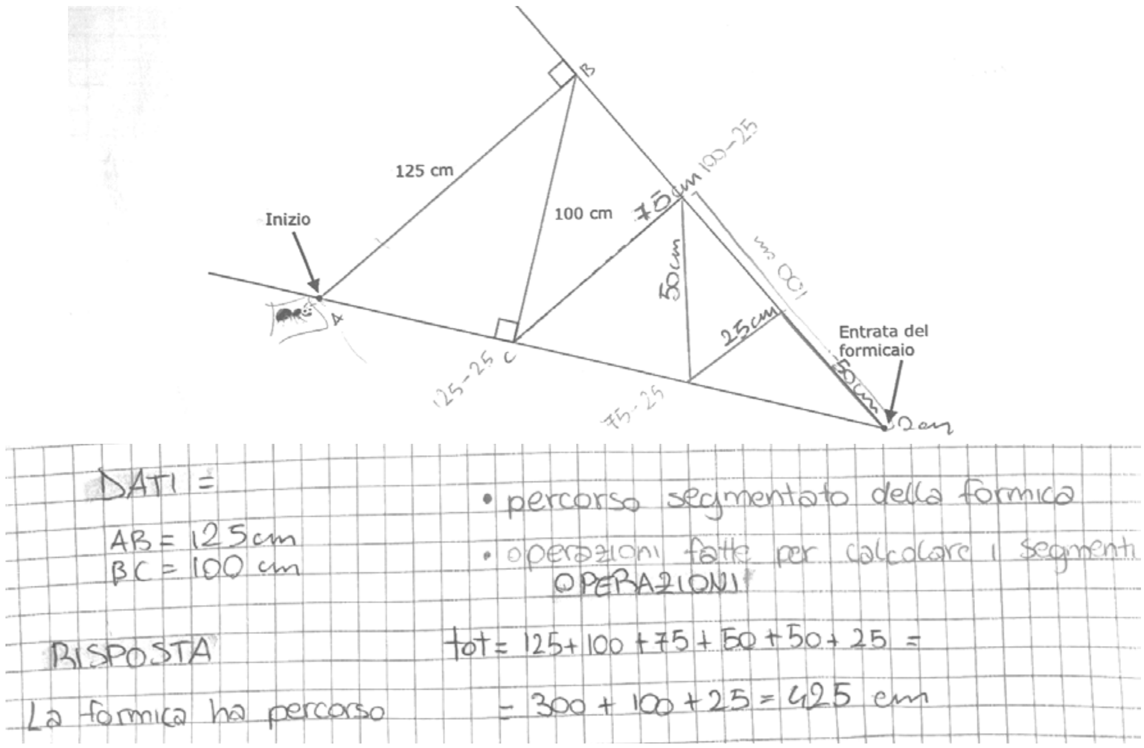
Figurano, anche, elaborati con rappresentazioni non attinenti alla richiesta del problema e risposte del tipo "la formichina percorre 29 cm per arrivare al buchino" nonostante nel disegno le prime misure da sommare siano 125 cm e 100 cm.

O ancora, l'errore consiste nel togliere 25 ad ogni segmento della spezzata, senza accorgersi dell'incoerenza di trovare un segmento di lunghezza 0 mentre sono stati disegnati successivi segmenti (!) Si veda in particolare il seguente l'elaborato :



Appare preoccupante la frequenza di elaborati in cui anziché il rapporto (progressione geometrica) si utilizza la sottrazione (progressione aritmetica), soprattutto nei casi in cui non c’è più nessuna coerenza con il disegno come se i due processi (continuare ad aggiungere segmenti e continuare ad aggiungere addendi alla somma) non fossero tra loro collegati.

In alcuni casi, ancora con l’idea di “togliere sempre qualcosa” si fa qualche aggiustamento per rallentare la decrescita dei segmenti:

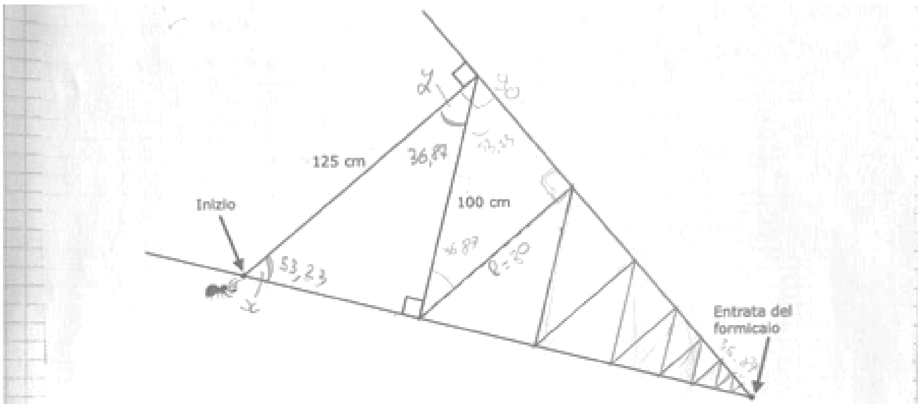


Per quel che riguarda la ricerca della lunghezza del percorso, viene riconosciuto e applicato in numerosi casi il rapporto costante 4/5 (o 0,8), ma la somma dei termini successivi è spesso "bloccata" ad un certo punto e la lunghezza è considerata "definita".

Se da un lato il disegno aiuta a formarsi l'idea di una convergenza del processo, dall'altro, visto che il disegno necessariamente si deve interrompere ad un certo punto, anche la somma dei segmenti viene calcolata fino allo stesso punto e quella viene considerata la somma come migliore approssimazione: forse la situazione di un disegno che finisce (in un punto) non favorisce l'idea che si possa invece continuare a sommare all'infinito.
Non mancano interessanti intuizioni ben argomentate, pur non supportate dalla presentazione di un disegno come richiesto dall'enunciato del problema:

PRENDIAMO IN CONSIDERAZIONE I PRIMI DUE SEGMENTI E NOTIAMO CHE SONO LEGATI CON UN RAPPORTO $\frac{4}{5}$
CAPIAMO CHE SE I SEGMENTI SI ACCORCIANO CON REGOLARITÀ I SEGMENTI FUTURI MANTERRANNO QUESTO RAPPORTO.
PROCEDIAMO QUINDI A MOLTIPLICARE PER $\frac{4}{5}$ I SEGMENTI CHE SOMMATI DANNO COME RISULTATO UNA SOMMA SIMILE A 602 CENTIMETRI E IPOTIZZIAMO CHE LA FORMICA NON RAGGIUNGA MAI IL FORMICAIO POICHÈ LA LUNGHEZZA DI UN SEGMENTO NON POTRÀ MAI ESSERE ZERO

In generale gli allievi che si sono appropriati del problema hanno utilizzato per lo più la procedura basata sul calcolo del rapporto tra le lunghezze di due segmenti consecutivi del percorso (4/5 o 0,8 o il seno α = cateto maggiore/ipotenusa), come indicato peraltro nell'analisi a priori, o anche con l'uso di proporzioni:



Con lo scopo di ricavare la proporzione che lega i lati, abbiamo calcolato gli angoli del triangolo iniziale, essendo consapevoli che essi si ripetessero per tutto il percorso, e da questi abbiamo trovato il terzo lato che ci serviva per trovare la proporzione.

$\frac{125}{\sin(90)} = \frac{100}{\sin(x)} \rightarrow x = \sin^{-1}\left(\frac{100}{125}\right) = 53.13°$

$y = 180° - (90° + 53.13°) = 36.8°$

$\frac{100}{\sin(90)} = \frac{\ell}{\sin(53.13)} \rightarrow \ell = 80\ cm$

Abbiamo trovato il rapporto $\rightarrow \frac{125}{100} = 1.25 = \frac{100}{80} = 1.25$

Seguendo il rapporto abbiamo eseguito i calcoli su tutti i lati, stimando una somma totale di 603,0226 cm ≅ 6 m

Non mancano elaborati con disegni precisi, lunghezza della spezzata ottenuta con buona approssimazione, esplicitazione del rapporto 5/4. L'impossibilità di completare il disegno resta spesso implicita ma nella maggior parte dei casi sembra che ci sia consapevolezza della possibilità teorica di andare avanti nella somma:

SPIEGAZIONE

Abbiamo notato che i triangoli formati dal percorso della formica sono simili tra loro poiché hanno gli angoli interni congruenti

Sono congruenti perché sono formati da rette parallele tagliate da trasversali a loro volta parallele tra di loro.

Abbiamo trovato il rapporto di proporzionalità tra le ipotenuse dei triangoli successivi, che è 1,25 : 1.

Abbiamo ricavato quindi le ipotenuse dei triangoli e abbiamo sommato la misura delle loro lunghezze.

In conclusione, il calcolo finale risulta essere

l_{TOT} = 125 cm + 100 cm + 80 cm + 64 cm + 51,2 cm + 40,96 cm + 32,768 cm + 26,21 cm + 21 cm + 16,7 cm + 13,4 cm + 10,7 cm + 8,6 cm + 6,87 cm + 5,5 cm + 4,4 cm + 3,51 cm + 2,11 cm = 612,928 cm

(potenzialmente si potrebbe continuare a lungo)

(Abbiamo notato che i triangoli formati dal percorso della formica sono simili tra loro poiché hanno gli angoli interni congruenti. Sono congruenti perché sono formati da rette parallele tagliate da trasversali a loro volta parallele tra di loro. Abbiamo trovato il rapporto di proporzionalità tra le ipotenuse dei triangoli successivi che è 1,25 : 1. Abbiamo ricavato quindi le ipotenuse dei triangoli e abbiamo sommato la misura delle loro lunghezze. In conclusione il calcolo finale risulta essere l_{TOT} = 125 cm + 100 cm + 64 cm + 51,2 cm + … = 612, 928 cm – potenzialmente si potrebbe continuare a lungo).

Ma anche:

La stima migliore possibile della lunghezza totale del percorso è 624,874 cm.

Dopo aver disegnato tutti i segmenti del percorso della formica abbiamo notato che i triangoli sono tutti simili.

Pertanto abbiamo calcolato il seno del primo triangolo rettangolo con la formula:

$\sin \alpha = \frac{C}{I}$ in cui C = cateto maggiore e I = ipotenusa

$\sin \alpha = \frac{100 \text{ cm}}{125 \text{ cm}} = 0,8$

Adesso invertiamo la formula del seno per trovare la misura del cateto maggiore del triangolo rettangolo successivo:

$\sin = \frac{C}{I} \rightarrow C = \sin \cdot I$

Procedo nello stesso modo con tutti gli altri triangoli rettangoli fino a trovare una misura il più possibile vicina a zero.

$C_2 = C_1 \cdot \sin$

Pertanto moltiplico sempre il risultato per il seno e sommo tutte le misure ottenute.

100 · 0,8 = 80 · 0,8 = 64 e procedo così fino a una misura vicina a zero.

0,01 · 0,8 = 0,008 è l'ultima misura considerata.

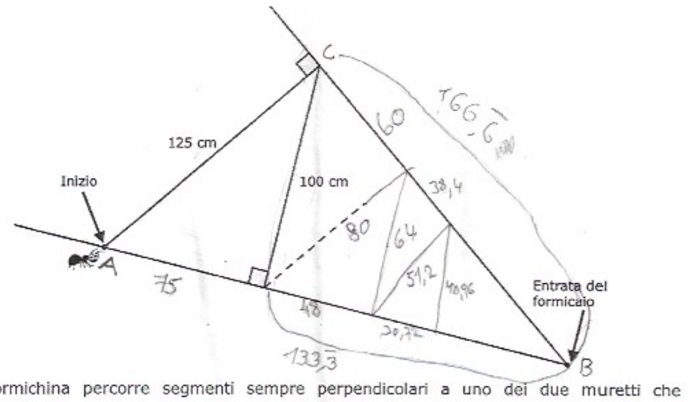
Di particolare interesse ci sembra il seguente elaborato, che presenta una strategia originale, non prevista dall'analisi a priori. Anche noi ci siamo messi in gioco per arrivare a metterci nella testa degli allievi e comprendere il loro ragionamento.

30° RMT PROVA II ©ARMT 2023 6

19. LA FORMICHINA SI È PERSA (Cat. 9, 10) ©ARMT 2023 - 30° RMT PROVA II

Una formichina disorientata cerca di trovare il buchino che immette nel formicaio e si incammina, procedendo a zig zag tra due muretti, lungo il percorso che le sembra quello conosciuto e che, nel disegno di seguito, non è completo.

Cammina, cammina, la formichina si chiede se sarà davvero possibile arrivare nel buchino tanto ricercato.



La formichina percorre segmenti sempre perpendicolari a uno dei due muretti che determinano il percorso a zig zag. I segmenti sono via via più corti con regolarità, uno rispetto all'altro.

Disegnate tutti i segmenti che potete del percorso a zig zag della formichina e trovate la stima migliore possibile della lunghezza totale del percorso.

Date i dettagli dei vostri calcoli.

Abbiamo trovato $AB = 125 \cdot \frac{5}{3} = \frac{625}{3}$

rapporto della prima terna pitagorica tra ipotenusa e cateto min.

Abbiamo trovato $CB = 125 \cdot \frac{4}{3} = \frac{500}{3}$

Analogamente tra cateto min. e magg.

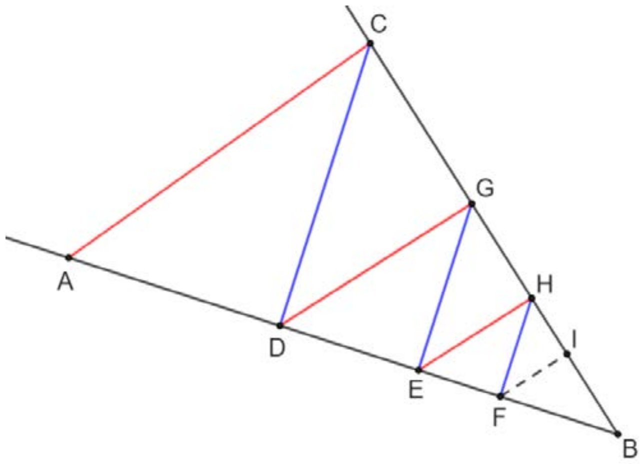
Scoperto il rapporto generico tra ipotenusa e cat. min. $\left(\frac{5}{3}\right)$, e scoperto CB come somma di cat. min. con ipotenuse corrispondenti ⊥ ad AB

Stessa cosa tra AB e CB

$$\left.\begin{array}{l}\frac{500}{3} \cdot \frac{5}{3} = 277,\bar{7} \\ \quad + \\ \frac{625}{3} \cdot \frac{5}{3} = 347,\bar{2}\end{array}\right\} = 624,\bar{9} = 625$$

Una possibile interpretazione della strategia è la seguente: vengono calcolate le misure dei segmenti AB e BC rispettivamente 5/3 e 4/3 della misura di AC: $AB = 125 \cdot \frac{5}{3} = \frac{625}{3}$, $CB = 125 \cdot \frac{4}{3} = \frac{500}{3}$.

Successivamente si calcolano le somme dei segmenti della spezzata paralleli ad AC (in rosso nella figura seguente) e dei segmenti della spezzata paralleli a CD (in blu) e si osserva che c'è un rapporto costante (5/3) tra le due somme e le misure di AB e CB.



$$AC + DG + EH + \cdots = \frac{5}{3}AD + \frac{5}{3}DE + \frac{5}{3}EF + \cdots = \frac{5}{3}AB = \frac{5}{3} \cdot \frac{625}{3} = 347,\overline{2}$$
$$CD + GE + HF + \cdots = \frac{5}{3}CG + \frac{5}{3}GH + \frac{5}{3}HI + \cdots = \frac{5}{3}CB = \frac{5}{3} \cdot \frac{500}{3} = 277,\overline{7}$$

La lunghezza della spezzata è la somma dei due precedenti risultati: $347,\overline{2} + 277,\overline{7} = 624,\overline{9} = 625$.
Il ragionamento seguito è molto interessante: la somma di infiniti segmenti che sono tutti 5/3 di altri segmenti (di cui è nota la somma) è 5/3 di quella somma. In questo modo il problema della convergenza della serie dei segmenti paralleli (rossi o blu) viene spostato alla convergenza, molto più evidente, delle serie: $AD + DE + EF + \cdots = AB$ e $CG + GH + HI + \cdots = CB$.

3. Indicazioni didattiche

La potenzialità principale di questo problema è la possibilità di cominciare ad impostare la "scoperta" di un percorso che converge in un punto e del quale si vuole trovare la lunghezza.

È, in tal senso, un problema "intrigante" dal momento che il percorso non permette di raggiugere con un numero finito di segmenti il buchino del formicaio, anche tenuto conto del "dubbio" della formichina di poter raggiungere il "buchino ricercato".

Nel cercare la lunghezza del percorso, capire che, poiché gli addendi (80; 64; 51,2; 40,96; 32,768; 26,214; 20,972, 16,777; 13,422; 10,737; 8,590; 6,872; 5,498…) diventano sempre più piccoli e quindi la somma cresce sempre meno, la procedura di addizione può continuare all'infinito, ma con un risultato finito. Si dovrà poi decidere a che punto fermarsi, tenendo conto delle dimensioni della formichina o del proprio disegno. Per esempio, se ci si ferma al 15º addendo (che, con il disegno corrisponde al segmento che è possibile tracciare ancora in modo chiaro) si ottiene circa 603.Tale procedura consente di trovare "solo" un'approssimazione della lunghezza del percorso. Per esempio, la somma dei valori precedenti porta a 603,009.

Potrebbe essere anche l'occasione, in classi di categoria 10, per introdurre la somma di una progressione geometrica con il ricorso al rapporto tra le lunghezze dei segmenti, considerare la somma della progressione, tenendo conto "intuitivamente" che i termini tendono a 0, $S = 125 + 125\ (4/5) + 125\ (4/5)^2 + \ldots$

Moltiplicando poi ambo i membri per 4/5: $(4/5)\ S = 125\ (4/5) + 125\ (4/5)^2 + \ldots$ e scrivendo la differenza fra le due relazioni si ottiene: $S - (4/5)\ S = 125$, si ottiene $S = 625$.

Come mostrato dall'ultimo elaborato, si può arrivare al risultato "esatto" anche con considerazioni geometriche legate al teorema di Talete e ai rapporti fra segmenti e fra somme di segmenti.

Il confronto fra i valori 603,009 (o altri valori successi) e 625 può aprire un'interessante finestra sulla problematica dell'approssimazione: si possono fare valutazioni su quando un addendo della somma possa essere considerato piccolo a sufficienza per interrompere il processo e ottenere un risultato attendibile della lunghezza del percorso; soprattutto è importante far capire (e accettare) che il processo di addizione porta necessariamente ad un risultato approssimato (migliorabile a piacere) mentre per trovare il risultato esatto occorre cambiare punto di vista e passare dal processo di addizione al concetto di limite, calcolabile o visualizzabile in vari modi.

UNE ANALYSE A POSTERIORI, OUVERTURE SUR DES REFLEXIONS PERSONNELLES

UN'ANALISI POSTERIORE, APERTURA SU RIFLESSIONI PERSONALI

François Jaquet

Introduction

Une analyse a posteriori de copies est toujours une source de découvertes et de réflexions personnelles sur ce que nous faisons dans le cadre du RMT.
J'ai participé à l'attribution des points aux copies de la section de Sienne pour le problème Points cachés et j'ai découvert à cette occasion que je n'avais jamais réfléchi à la construction de la notion de « réseau de points correspondant aux sommets d'un quadrillage » en tant que figure géométrique alors qu'on en rencontre quotidiennement dans les pavages de nos sols ou de nos murs, dans les tissus, dans de très nombreux motifs décoratifs, jusqu'aux feuilles de papier quadrillé sur lesquelles travaillent nos élèves.
J'ai donc conservé, après l'attribution des points, le paquet des copies pour les examiner plus attentivement et en faire une analyse a posteriori.
Le problème Points cachés, dont j'avais participé à l'élaboration avec la section de Milano en janvier 2024, est une reprise d'un ancien problème, La tache, proposé en 1995 lors de la troisième édition de rallye qui n'était encore que romand (RMR) et franchissait à ce moment ses frontière d'origine pour atteindre, en Italie, les régions de Parme et Pavie.
L'élaboration d'un problème et l'analyse des copies a beaucoup évolué en 30 ans, comme de nombreuses autres caractéristiques de l'ARMT, modalités d'organisation, priorités, finalités, …
Ayant aussi participé très activement à l'élaboration du problème, il y a 30 ans, il était évident que des réflexions allaient émerger de cette nouvelle analyse a posteriori, bien au-delà des copies examinées, à propos de certaines étapes de notre entreprise collective qui me paraissent importantes.
Cet article présente donc des données effectives tirées des productions des élèves, mêlées à des remarques qui traduisent mes conceptions personnelles et actuelles de l'apprentissage et à nos finalités pour l'amélioration de l'apprentissage des mathématiques et de la formation des enseignants.
Le premier chapitre présente l'ancien problème, un rappel des objectifs d'un concours à cette époque et les quelques premiers résultats. Il est suivi d'un deuxième chapitre qui part d'un « principe de réalité » sur l'apport que peut offrir aux élèves la résolution d'un problème par groupes, sans exploitations postérieures.
Un troisième chapitre présente la nouvelle version du problème, quelques réflexions sur son analyse a priori et les données recueillies lors de son analyse a posteriori, c'est-à-dire sur ce que nous montrent ou nous disent les élèves qui sont les premiers intéressés.
Le quatrième chapitre tient lieu de synthèse en envisageant ce que l'enseignant pourrait tirer des données précédentes pour le « programme » ou « parcours » de sa classe selon ses conceptions, entre « enseignement » et « apprentissage ».
Suivent quelques réflexions sur l'apport des travaux de l'ARMT, de l'observation des élèves aux propositions pour l'enseignant qui décide du parcours didactique de sa classe.

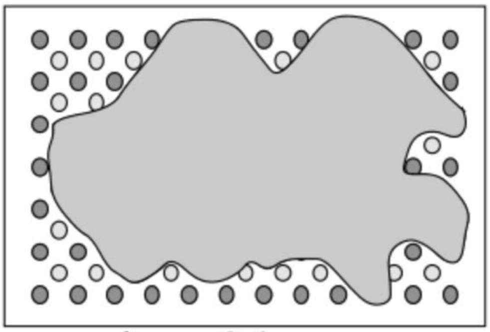
Sunto
L'analisi a posteriori degli elaborati è oggi fonte di scoperte e riflessioni personali su ciò che facciamo nell'ambito del RMT.
Ho partecipato all'attribuzione dei punteggi degli elaborati della sezione di Siena per il problema dei Punti Nascosti e ho scoperto in questa occasione di non aver mai riflettuto sulla costruzione della nozione di "rete di punti corrispondenti ai vertici di una griglia quadrettata" in quanto figure geometriche che incontriamo quotidianamente nelle piastrelle dei nostri pavimenti o delle nostre pareti, nei tessuti, in tanti motivi decorati, fino ai fogli di carta quadrettata sui quali i nostri allievi lavorano.
Dopo l'assegnazione dei punteggi ho quindi conservato il pacco di elaborati per esaminarli con più attenzione ed effettuare l'analisi a posteriori.
Il problema dei Punti Nascosti, che ho contribuito a sviluppare con la sezione di Milano nel gennaio 2024, è una ripresa di un vecchio problema, La macchia, proposto nel 1995 durante la terza edizione del RMR che e in quel periodo varca i suoi confini originari per raggiungere, in Italia, le regioni di Parma e Pavia, per diventare poi RMT.
Lo sviluppo di un problema e l'analisi degli elaborati si è evoluto molto in 30 anni, come molte altre caratteristiche dell'ARMT, metodi organizzativi, priorità, scopi, ecc.
Avendo partecipato anche molto attivamente all'elaborazione del problema, 30 anni fa, era ovvio che da questa nuova analisi a posteriori sarebbero emerse riflessioni, ben al di là delle copie esaminate, su alcune fasi della nostra impresa collettiva che mi sembrano importanti.

Questo articolo presenta quindi dati reali presi dalla produzione degli allievi, mescolati con osservazioni che riflettono le mie personali e attuali concezioni dell'apprendimento e i nostri obiettivi per migliorare l'apprendimento della matematica e la formazione degli insegnanti.
Il primo capitolo presenta il vecchio problema, ricordando gli obiettivi di una competizione di allora e i pochi primi risultati. Segue un secondo capitolo che parte da un "principio di realtà" sul contributo che la risoluzione di un problema in gruppo può offrire agli allievi, senza successive utilizzazioni.
Un terzo capitolo presenta la nuova versione del problema, alcune riflessioni sulla sua analisi a priori e sui dati raccolti durante la sua analisi a posteriori, vale a dire su ciò che ci mostrano o ci dicono gli allievi principalmente interessati.
Il quarto capitolo serve da sintesi considerando ciò che l'insegnante potrebbe trarre dai dati precedenti per il "programma" o il "corso" della sua classe secondo le sue concezioni, tra "insegnamento" e "apprendimento".
Di seguito alcune riflessioni sul contributo del lavoro dell'ARMT, dall'osservazione degli allievi alle proposte per l'insegnante che decide il percorso formativo della sua classe.

1. Le problème La tache

Toto a renversé la marmite de confiture sur la belle nappe à pois de la cuisine.

Combien y a-t-il de pois entièrement recouverts par la confiture ?



Indiquez comment vous avez trouvé votre solution.

1.1. Quelques résultats

On trouve dans la banque de problèmes les résultats de 71 classes de la section de Suisse romande, ceux des classes italiennes (une trentaine) n'ont pas été conservés mais étaient comparables.

Catégorie	0	1	2	3	4	Nb. classes	Moyenne
Cat 3	6 (60%)	0 (0%)	2 (20%)	1 (10%)	1 (10%)	10	1.10
Cat 4	9 (53%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (6%)	7 (41%)	17	1.82
Cat 5	15 (34%)	2 (5%)	3 (7%)	4 (9%)	20 (45%)	44	2.27
Total	30 (42%)	2 (3%)	5 (7%)	6 (8%)	28 (39%)	71	2.00

Selon les critères suivants :

4 points : réponse correcte et explications, avec multiplications $(7 \times 12) + (6 \times 11) = 84 + 66 = 150$ et soustraction des pois visibles (48); 150 - 48 = 102

3 points : explication correcte mais erreur de comptage des pois visibles (47 ou 49) entraînant les réponses 101 ou 103

2 points : comptage correct (102) des pois cachés, sans autre explication

1 point : $13 \times 29 = 299$ pour le calcul des pois entraînant 299 - 48 = 251

0 point : plus d'une erreur

1.2. Le problème, pourquoi

Les années de 1960 à 1980 ont été marquées par de nombreuses réformes de l'enseignement des mathématiques et l'émergences de nouvelles conceptions de leur apprentissage. Les concours de mathématiques qui se sont développés quelques années plus tard répondaient à un besoin d'activités nouvelles, les origines de notre Rallye sont décrites dans un article publié en 1995[1] intéressant pour plusieurs raisons :

[1] Lucia GRUGNETTI François JAQUET, Paola VIGHI *Rally matematico alla scuola elementare / Rallye mathématique à l'école primaire* In L'educazione Matematica Anno XVI -Serie IV -Vol 2 octobre 1995 (Revue du CRSN de l'Université de Cagliari ; l'article est bilingue)

- du point de vue historique, c'est un des premières publications[2] sur « l'entreprise RMT » (3^{e} édition)
- il en décrit les finalités, du domaine de l'apprentissage des mathématiques ;
- du point de vue didactique, il reflète la prise en compte progressive d'aspects traités par l'épistémologie génétique selon les conceptions de l'époque sur l'activité de résolution de problèmes, que nous reportons ici :

Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes

L'enseignement des mathématiques, comme on le sait bien, ne se limite pas à la maîtrise de techniques de calcul ou à la mémorisation de connaissances qu'il est relativement aisé de faire acquérir. C'est la résolution de problèmes qui constitue le fondement et le but des apprentissages, en donnant du sens aux situations à mathématiser. Le contexte du rallye est stimulant, les problèmes proposés sont consistants et originaux, les conditions font que les élèves s'y engagent et prennent en charge leur résolution.

Le débat est un élément essentiel en mathématiques

Très souvent, c'est le maître qui sait et qui informe l'élève de la pertinence de son travail, dans un rapport d'autorité. Il faut pourtant donner aux enfants l'occasion d'argumenter, de discuter des solutions, de soutenir les affirmations qu'ils avancent, de valider leur travail mathématique. Dans le rallye, la classe doit précisément choisir une solution et une seule pour chaque problème. Ce n'est pas toujours facile, mais la confrontation est garantie. C'est l'ouverture d'un débat scientifique.

La capacité à travailler en équipe est aujourd'hui essentielle

Pouvoir s'organiser à plusieurs, se répartir le travail, gérer du temps, apporter sa contribution personnelle, accepter celle des autres et pouvoir entrer dans leurs points de vue sont des capacités difficiles à acquérir mais de plus en plus nécessaires pour s'adapter à la société actuelle. Il y a trop de problèmes à résoudre pour un seul élève dans une épreuve du rallye. Là encore, les règles du jeu garantissent la coopération et la valorisation des interactions entre élèves.

L'observation des élèves en activité de résolution de problèmes est une forme d'évaluation enrichissante

Le rôle du maître en classe de mathématiques est souvent celui d'un correcteur, d'un animateur, d'un gestionnaire, très impliqué dans les apprentissages de ses élèves. Les règles du rallye lui confèrent un autre rôle, celui d'observateur extérieur (dans sa propre classe ou celle d'un collègue lors des épreuves finales).

La confrontation est une source de renouvellement

L'apport extérieur de problèmes est stimulant pour les maîtres, les élèves et, plus généralement, pour l'activité mathématique en classe : des idées nouvelles, des pistes à exploiter, des échanges, des comparaisons, des défis à relever, des analyses communes, etc. Le rallye n'est pas qu'une compétition, c'est aussi l'occasion d'examiner des résultats par le détail, de faire apparaître à grande échelle des types de procédures, de représentations, de difficultés rencontrées par les élèves.

Ces conceptions peuvent nous paraître aujourd'hui ambitieuses, généreuses, voire ingénues, on en reparlera dans les chapitres suivants.

Le même article précise ce qu'on entend par « problème de rallye », à distinguer de ceux qu'on trouve dans les manuels, qu'on propose traditionnellement en classe comme « exercices », qu'on utilise pour évaluer les connaissances ou les compétences des élèves. On les souhaite pertinents et rigoureux du point de vue mathématique, exploitables par l'enseignant du point de vue didactique, placés dans des contextes accessibles pour les groupes d'élèves qui devront les résoudre en un temps limité sans la présence de l'enseignant.

1.3. Nos données à propos de ce problème

Une grande innovation pour cette deuxième épreuve du 3^{e} RMR est la participation de classes italiennes et ses implications : le concours n'est plus organisé par une petite équipe de personnes qui se rencontrent localement et peuvent décider des critères d'attribution des points, il y a une coopération entre équipes différentes : des critères communs, des éléments d'analyse a priori qui sont à négocier. L'organisation est plus complexe mais elle produit des traces écrites, qui vont subsister.

En voici quelques extraits, publiés également dans l'article cité précédemment, qu'il faudra comparer à l'analyse a posteriori de la deuxième version du problème, Points cachés.

<u>Analyse des résultats et évaluation</u>

L'intérêt était, évidemment, d'observer le passage entre une stratégie « élémentaire » de comptage des pois cachés et une stratégie plus évoluée de soustraction des pois visibles au nombre total. Cette dernière stratégie a été la plus efficace. Rares sont les classes qui ont dénombré les 102 pois cachés, cette méthode a conduit le plus souvent à des erreurs de comptage (Par exemple « Nous avons dessiné les pois qui manquaient, recouverts par la tâche, selon l'ordre de ceux qui n'étaient pas recouverts et on en a trouvé 101 ».

---

[2] La revue Math-Ecole a publié à la même époque des extraits de l'article précédent .

…
Parmi les stratégies fautives du calcul de l'ensemble des pois, la multiplication 13 × 23 était prévue et a été relevée dans une dizaine de classes. Cependant, l'erreur la plus fréquente, commise par près de 20% de classes n'avait pas été envisagée dans l'analyse a priori : il s'agit de la suite d'opérations (7 × 12) – 48 qui ne prend pas en compte les pois blancs dans la multiplication mais seulement dans la soustraction.

Nous voyons dans cette erreur plus qu'un simple « oubli » ; il semble qu'il y a là un obstacle didactique à surmonter, créé par l'habitude (ou le « théorème-en-actes) consistant à multiplier les nombres d'objets situés sur la longueur et la largeur de la bordure dans toute configuration rectangulaire. « Il y a 12 pois en longueur et 7 pois en largeur (12 × 7 = 84 et 58 pois sans confiture (84 - 48 = 36) » ou «on compte les deux bords et on fait 7 × 12 = 84 ».

Les deux multiplications erronées mentionnées 13 × 23 et 7 × 12 nous semblent de même nature et ne nous apparaissent plus aujourd'hui comme des « obstacles didactiques ». Il s'agit simplement de la non perception des deux réseaux rectangulaires des pois noirs, et des pois blancs « à l'intérieur » que l'élaboration des critères (qui constituaient l'analyse a priori à cette époque) avait oubliée.

L'analyse a posteriori du problème se termine par quelques lignes pour valoriser ou justifier l'activité, auprès des enseignants et des lecteurs de l'article sous le titre Développements et liens avec le programme : Cette activité s'inscrit dans le champ de la résolution des problèmes où se combinent addition (soustraction) et multiplication. Dans les programmes italiens on trouve l'objectif « Reconnaître des situations mathématiques dans son expérience quotidienne et de classe formulant et justifiant des hypothèses de résolution avec l'usage des outils mathématiques appropriés soit arithmétiques soit d'un autre type.

2. Quelques commentaires a posteriori

2.1. Principe de réalité

Le problème de *La tache* a été conçu lors des premiers pas du RMR et de sa première ouverture vers d'autres sections. A cette époque, on l'a trouvé plaisant et original, au point de le glisser dans un ouvrage *Problemi che passione*.[3] Notre opinion n'a pas changé aujourd'hui.
Il y a un contexte clair que l'élève s'approprie facilement et lui permet de « faire des mathématiques » en le résolvant comme le soulignent les fondements cités précédemment au paragraphe 1.2. qui explique le « pourquoi » du problème. L'idée d'associer les deux activités « faire des mathématiques » et « résoudre des problèmes » a évolué au cours des années. Certains collègues mathématiciens l'ont trouvée un peu schématique ou réductive. On ne l'utilise plus actuellement et l'ARMT l'a transformée, dans ses statuts en une finalité plus proche de le réalité : « améliorer l'apprentissage des mathématiques et la formation des enseignants ».
À force de lire les copies que nous rendent les élèves, on constate effectivement qu'il y a quelque chose d'utopique à affirmer qu'ils « font des mathématiques ». Renverser la marmite de confiture ou compter les pois recouverts ne sont pas vraiment des tâches qu'on peut qualifier de mathématiques, même s'il a un peu de multiplication, ou plutôt d'additions répétées, pour éviter le comptage un à un.
Cependant, même s'il faut réduire les ambitions terminologiques, la situation est potentiellement intéressante pour l'exploiter didactiquement, en allant au-delà de la réponse « 102 pois recouverts par la confiture » qui n'est qu'un épisode momentané dans le déroulement de l'activité induite par les procédures de résolution :
Il y aura tout d'abord la modalité de recherche de la solution : en groupe et sans aucune intervention de l'enseignant (qui correspond à l'un des fondements cités précédemment, la capacité à travailler en équipe est aujourd'hui essentielle) qu'il faut rappeler systématiquement même s'il n'est pas possible de mesurer ou de « vérifier » son efficacité !

Il y aura ensuite, après la phase de résolution, la mise en commun où la parole est exclusivement réservée aux élèves (qui correspond à l'un des fondements cités précédemment : le débat est un élément essentiel en mathématiques).

Mais, ces deux dernières potentialités restent au niveau des intentions. Les commentaires de notre exemple de *La tache* mentionnent le comptage un à un, la soustraction et la multiplication, qui doivent évidemment figurer en phase d'institutionnalisation, avec l'explicitation des erreurs ou oublis qui s'y rapportent, mais ne suffisent pas pour alimenter la rubrique « Exploitation didactique » de la fiche correspondante de notre banque de problèmes La tache (ral. 03.II.06 ; cat. 3-5) dans laquelle ont été inséré les quelques données du problème il y a maintenant une quinzaine d'années.

Mettons-nous dans la peau d'un visiteur de notre banque ou d'un lecteur de l'article qui prend connaissance du problème et qui, dans un principe de réalité se pose quelques questions :

[3] L. Grugnetti, F. Jaquet *Problemi che passione !* Edizioni il capitello 1998.

- que s'est-il passé après l'épreuve pour les 71 groupes de Suisse romande et la quarantaine de groupes des classes italienne qui se sont penchés sur le problème ?
- y a-t-il eu une discussion au sein du groupe avant la rédaction de la copie ?
- y a-t-il eu des échanges avec un ou deux autres groupes avant de remettre la copie ?
- l'enseignant a-t-il examiné les copies rendues avant leur envoi à l'équipe chargée de l'attribution des points ?
- a-t-il évalué les réponses et explications avec les élèves du groupe ?
- a-t-il proposé le problème à toute la classe après l'épreuve, avec un débat ?
- le problème a-t-il servi à quelque chose d'autre qu'occuper les élèves et leur permettre de passer 50 minutes agréablement ?

Au cours des années ce type de questions se pose de plus en plus fréquemment pour tous ceux qui se sont engagés dans l'entreprise ARMT et qui se demandent si les « améliorations » mentionnées dans ses finalités ne sont que des formules vides ?

2.2. Phases de l'évolution

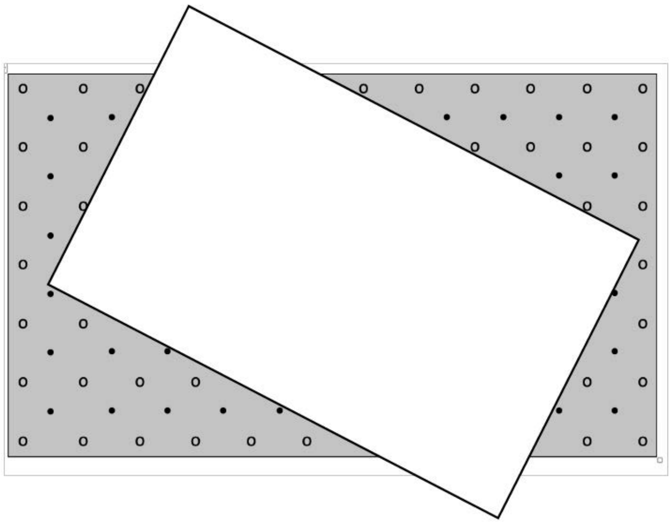
Comme dans toute recherche scientifique, ce sont les question précédentes qui ont fait évoluer l'ARMT.
Sans vouloir entrer dans les détails historiques, on peut distinguer quelques phases se son évolution :

- Un concours de résolution de problèmes, par classes, avec de bonnes intentions affichées et des innovations significatives : dévolution de la résolution à la classe, demande de description des procédures, classement selon des critères établis en coopération, analyses a posteriori.
- Prise de conscience progressive d'accorder la priorité au point de vue de l'élève dans nos analyses.
- Construction pas à pas d'une mémoire permanente de réflexions et résultats : statistiques, publications (Actes des rencontres internationales puis Gazette de Transalpie, ouverture de la Banque de problèmes de l'ARMT où figurent tous nos énoncés, avec quelques éléments d'identification et un classement par familles.
- L'utilisation des données recueillies au profit de l'enseignement : le passage des « problèmes de concours » à leur intégration dans la pratique de classe ou « parcours didactiques ».

Nous nous situons dans cette dernière phase. Lors du passage en revue des problèmes de la Banque, nous les imaginons comme activités pour « améliorer » l'apprentissage.
Lors de la recherche d'un sujet pour les catégories 3 à 5, La tache a attiré notre attention. Pourquoi ne pas la reprendre, après 30 ans, pour l'analyser a posteriori sur un grand nombre de classes et enrichir la première analyse, afin d'en savoir plus sur les obstacles et sur ses exploitations didactiques possibles.

3. La nouvelle version du problème

POINTS CACHÉS (31.II.06 cat 4, 5)
On a posé une feuille blanche sur un rectangle gris décoré avec deux sortes de points : des blancs (o) et des points noirs (•)



Combien y a-t-il, en tout, de points cachés par la feuille blanche ?
Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

Le contexte est nouveau, pour que des classes qui auraient résolu l'ancien problème en « entraînements » ne le reconnaissent pas : la tache et la table sont remplacées par deux rectangles de papier ; la disposition des deux réseaux de points est la même, les nombres de lignes et colonnes sont les mêmes (7 et 12 pour le réseau des points blancs ou des pois noirs), le nombres de points visibles passe de 48 à 61 et par conséquent le nombre des points cachés passe de 102 à 89.

3.1. L'analyse a priori

Percevoir les deux réseaux de points décalés et leurs alignements.

Les connaissances en jeu sont le comptage un à un des nombres de points de chaque réseau dans les deux directions et, pour les autres procédures, l'addition répétée ou la multiplication.

- Une procédure est de compléter les deux réseaux de points du rectangle gris, en les dessinant sur la feuille blanche (qui exige, pour être efficace, beaucoup de précision et un dessin avec l'aide d'une règle pour les alignements)
- Pour éviter le dessin il y a d'autres procédures faisant appel aux régularités des réseaux quadrillés et aux dénombrements par lignes et colonne pour déterminer le nombre total des points de la feuille et trouver le nombre de points cachés par soustraction des points visibles.

  Il y a 84 points blancs (7 × 12), 66 noirs (6 × 11) ; 150 au total. Les points visibles sont 61 (38 + 23). Il y a donc 89 points caché (150 – 61).

Critères d'attribution des points

4 Réponse correcte « 89 points cachés », avec description de la procédure (dessin des points ou détail des opérations)

3 Réponse correcte avec description partielle ou peu claire
ou une erreur de comptage de 1 ou 2 points en plus ou en moins en cas de dessin
ou une erreur de comptage des lignes ou colonnes en cas de calcul

2 Réponse correcte, sans aucune description
ou erreur de comptage ou de calcul, de 3 à 5 points

1 Début de recherche.

0 Incompréhension du problème

Attribution des points

4 Réponse correcte « 89 points cachés », avec description de la procédure (dessin des points ou détail des opérations)

3 Réponse correcte avec description partielle ou peu claire
ou une erreur de comptage de 1 ou 2 points en plus ou en moins en cas de dessin
ou une erreur de comptage des lignes ou colonnes en cas de calcul

2 Réponse correcte, sans aucune description
ou erreur de comptage ou de calcul, de 3 à 5 points

1 Début de recherche.

0 Incompréhension du problème

3.2. Commentaires sur cette analyse a priori

Dans le problème d'origine, *La tache,* il n'y avait que les indications suivantes accompagnant l'énoncé

Domaine de connaissances :

- *géométrie : disposition régulière d'objets*
- *arithmétique élémentaire : addition et/ou multiplication*

Analyse de la tâche :

- *comprendre la disposition des objets, les dessiner ou les imaginer;*
- *passer de la disposition géométrique au dénombrement par comptage un à un*
  ou par multiplication et soustraction (7 × 8) - 17 = 39.

C'est à partir du 8^e RMT que l'expression « analyse a priori » est apparue explicitement pour accompagner les énoncés. De 3e au 7e les différentes rubriques parlaient de « domaine de connaissances », « analyse de la tâche », et « évaluation » ; la première est devenue « tâche mathématique » ou « résumé » pour les fiches, la deuxième est restée la même, la troisième est devenue « attribution des points ».
L'analyse de la tâche, qui n'était que de quelques lignes s'est développée pour arriver à une page entière et parfois plus en dressant l'inventaire de toutes des stratégies possibles des élèves imaginées par l'adulte avec l'ambition d'en rechercher l'exhaustivité.

Ce sont les analyses a posteriori qui, très progressivement, ont permis de simplifier les inventaires de stratégies possibles pour donner la priorité aux connaissances nécessaires.

L'exemple de l'analyse de la tâche précédente parle explicitement de ces connaissances : le comptage des points un à un après les avoir dessinés ou les opérations de multiplication ou addition répétée, mais elle ignore l'essentiel qu'on ne découvrira que lors de l'analyse a posteriori, et qui se trouve dans la première phrase comme quelque chose d'élémentaire qu'on ne fait que mentionner en passant : *percevoir les deux réseaux de points décalés et leurs alignements.*

3.3. Les résultats statistiques

Punti nascosti / Points cachés							20 sections
Cat.	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	M
4	143 (18%)	354 (44%)	93 (12%)	90 (11%)	118 (15%)	798	1.6
5	118 (15%)	295 (36%)	103 (13%)	119 (15%)	175 (22%)	810	1.9
Total	261 (16%)	649 (40%)	196 (12%)	209 (13%)	293 (18%)	1608	1.8

Ils sont du même ordre de grandeur que ceux d'il y a trente ans. La seule différence est le passage d'une centaine de classes, les 71 de Suisse romande et quelques-unes de Parma, à 1608.

Les critères d'attribution des points sont comparables, mais, en 1995, comme en 2024, ils ignorent l'essentiel, que nous allons découvrir.

Ce tableau correspond globalement aux résultats de la section de SI, avec les réserves habituelles sur les interprétations des critères d'attribution et les variations qu'elles entraînent. (Par exemple, la moyenne générale des points, de 1,8 est tirée de 20 moyennes comprises entre 1,2 et 2,4 et cette variation n'est vraisemblablement pas due ni aux élèves, ni aux programmes régionaux, ni aux enseignants !)

Punti nascosti / Points cachés							Section SI
Cat.	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	M
4	6 (6%)	62 (59%)	11 (10%)	95 (5%)	21 (20%)	105	1.7
5	3 (3%)	35 (39%)	16 (18%)	8 (9%)	27 (30%)	89	2,2
Total	9 (5%)	97 (50%)	27 (14%)	13 (7%)	48 (25%)	194	2,0

3.4. Les résultats pour une réflexion didactique

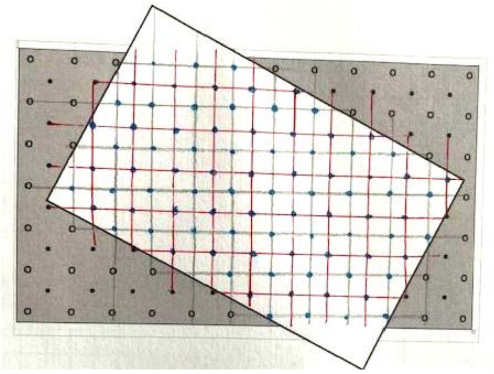
La commission d'attribution des points, pour la section de SI avait environ 200 copies à examiner. Plutôt que de les prendre une à une, elle les a réparties en deux paquets selon les deux procédures décrites par l'analyse a priori : avec un dessin des points cachés ou autres indications sur la rectangle blanc de la figure d'une part, sans aucune trace sur ce rectangle d'autre part.

3.4.1 Dessin du réseau et comptage

La moitié environ des copies (48 %, en catégorie 4 comme en catégorie 5) du premier paquet présentent des traces écrites sur le rectangle blanc.

Les deux exemples qui suivent sont ceux qui ont tout de suite attiré le regard des « attributeurs » et leur approbation. C'est ainsi que nous avons compris la première procédure décrite : *... compléter les deux réseaux de points du rectangle gris, en les dessinant sur la feuille blanche (qui exige, pour être efficace, beaucoup de précision et un dessin avec l'aide d'une règle pour les alignements).* Ces élèves ont perçu la structure du réseau, ils ont été précis ; c'est parfait, on leur donne 4 points !

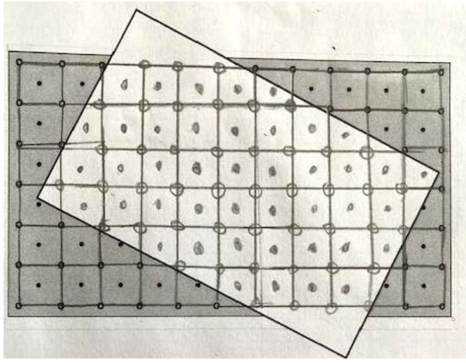
Exemple 1 (cat 4)



Abbiamo tracciato con righello e squadra le linee perpendicolare ai due tipi di punti … 89 puntini

Trad. *Nous avons tracé les lignes perpendiculaires aux deux types de points avec une règle et une équerre... 89 points*

Exemple 2 (cat. 4)



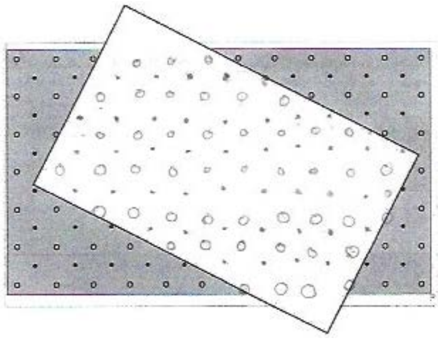
Facendo dei quadrati composti da 5 puntini, abbiamo scoperto che sotto … ci sono 46 puntini vuoti e 43 puntini neri. … 89 puntini in tutto.

Trad. *En faisant des carrés composés de 5 points, nous avons découvert qu'en dessous… il y a 46 points vides et 43 points noirs. … 89 points au total.*

On observe, comme ci-dessus, des droites tracées à la règle dans le 20% des copies avec dessins. Et une question apparaît : la parenthèse de la première procédure décrite dans l'analyse a priori … *(qui exige, pour être efficace, beaucoup de précision et un dessin avec l'aide d'une règle pour les alignements)* est-elle nécessaire ? Pour nous adultes c'est évident que les « alignements » perçus par l'œil de l'élève signifie qu'ils sont composés de points appartenant à une même droite.

Dans les deux exemples qui suivent, une perception claire des alignements a aidé les élèves à reporter les 89 points, même s'ils sont loin d'être dessinés selon des droites

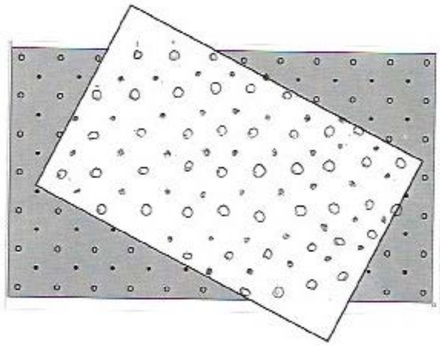
Exemple 3 (cat. 4)



Per capire quanti puntini erano nascosti dal foglio bianco abbiamo disegnate altri puntini sul foglio bianco in file dritte e poi le abbiamo contati (89)

Trad. *Pour comprendre combien de points étaient cachés par la feuille blanche, nous avons dessiné d'autres points sur la feuille blanche en files droites, puis nous les avons comptés (89)*

Exemple 4 (cat. 4)

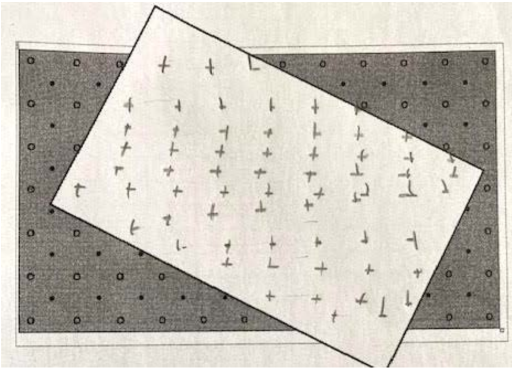
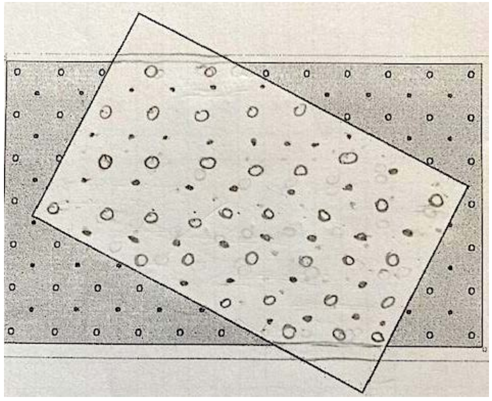


Prima di tutto abbiamo misurato la distanza tra i punti bianchi (0,7) poi abbiamo visto che i punti neri sono in mezzo ai punti bianchi cosi abbiamo continuato questo procedimento e abbiamo visto che il foglio nasconde 89 puntini.

Trad. *Tout d'abord nous avons mesuré la distance entre les points blancs (0,7) puis nous avons vu que les points noirs sont au milieu des points blancs donc nous avons continué ce processus et avons vu que la feuille cache 89 points.*

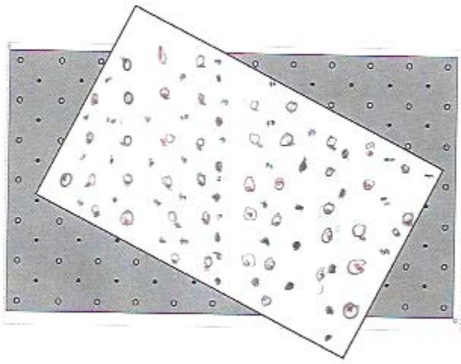
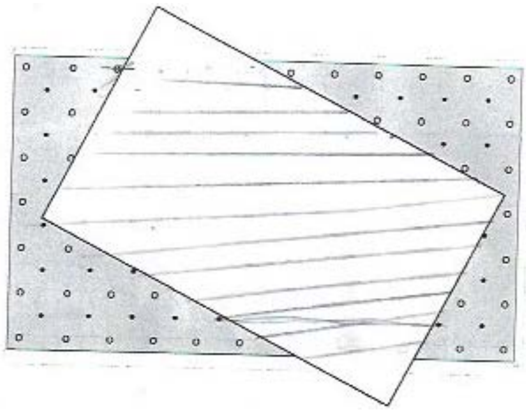
On trouve environ 20% des copies avec dessin des points de ce genre, avec des alignements et un comptage de 89 points et parfois de petites erreurs de 1 ou 2 points. On trouve ici une des causes (parmi de nombreuses autres) des variations dans l'attribution des points. La description du critère « 3 points » *Réponse correcte avec description partielle ou peu claire* aura-t-elle été choisie par certains jurys ? Il y a là une réflexion, a posteriori, sur un des sujets de désaccord qui a souvent alourdi les tâches de rédaction et d'interprétations des critères. Le concours les exigeait, la pratique en classe n'en a rien à faire ! (Si l'on est conscient qu'un problème est fait pour chercher et construire et non pour être « jugé ».

Puis arrive la catégorie des alignements perçus visuellement de manière globale mais ne permettant pas de guider le dessin des points un à un ni leur comptage. Ils sont les plus nombreux

<table>
<tr>
<td>Exemple 5 (cat. 5)

Noi abbiamo usato il righello per calcolare la distanza tra un puntino e l'altro (1 cm) … i puntini sono 64.
Trad. Nous avons utilisé la règle pour calculer la distance entre un point et l'autre (1 cm) … il y a 64 points</td>
<td>Exemple 6 (cat. 4)

In tutto i puntini e i pallini sono 76
Trad. Il y a en tout 76 points</td>
</tr>
</table>

Ces exemples exigent une observation fine pour se rendre compte de l'écart entre les points dessinés et les points cachés.

D'innombrables autres exemples montrent d'autres dispositions qui ont été perçues soit des lignes, des colonnes ou des régularités.

<table>
<tr>
<td>Exemple 7 (cat. 5)

Abbiamo capito che 43 + 47 = 90
In una colonna ci sono 7 cerchi bianchi e 6 neri quindi abbiamo contato quelli che erano sopra al foglio bianco e abbiamo disegnato quelli che mancavano nel foglio bianco.
Trad. Nous avons compris que 43 + 47 = 90. Dans une colonne il y a 7 cercles blancs et 6 noirs donc on a compté ceux qui étaient au-dessus de la feuille blanche et on a dessiné ceux qui manquaient sur la feuille blanche</td>
<td>Exemple 8 (cat. 4)

Abbiamo fatto delle linee per ogni quadretto di distanza. Abbiamo contato i cerchi bianchi fino alla meta del rettangolo … e per ogni metà ci risulta 18 e quindi le abbiamo sommato e ci torna 36.
Trad. Nous avons tracé des lignes pour chaque carré de distance. Nous avons compté les cercles blancs jusqu'au milieu du rectangle… et pour chaque moitié nous avons obtenu 18 puis nous les avons additionnés et nous obtenons 36</td>
</tr>
</table>

Dans de nombreuses copies on relève l'importance que certains élèves attribuent aux distances entre les points (exemples 4, 5, 8) ou leur alignement sur des droites ou les deux simultanément. L'instrument « règle » a en effet deux fonctions : du côté gradué, de relever des mesures de longueur ; du côté non gradué de modéliser la droite.

Les élèves qui ne prennent den compte qu'une des deux directions et y reportent des longueurs ne sont pas conscients que l'autre dimension donne l'alignement.

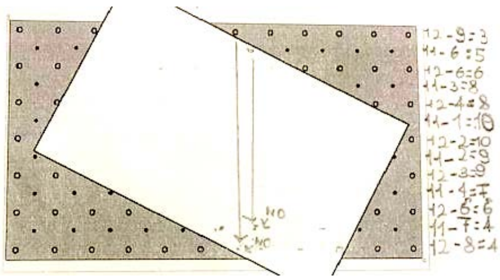
3.4.2 Procédure arithmétique

L'autre moitié du paquet des copies devait selon nous, contenir la seconde procédure mentionnée dans l'analyse a priori : *Pour éviter le dessin il y a d'autres procédures faisant appel aux régularités des réseaux quadrillés et aux dénombrements par lignes et colonne pour déterminer le nombre total des points de la feuille et trouver le nombre de points cachés par soustraction des points visibles.*

Il y a 84 points blancs (7 × 12) 66 noirs (6 × 11) ; 150 au total. Les points visibles sont 61 (38 + 23). Il y a donc 89 points caché (150 – 61).

La procédure ci-dessus (7 × 12) + (6 × 11) – 61 = 89 a été observée dans 20 à 30% des copies sans dessins des points cachés. Il s'agit d'une approche globale de la détermination des nombres de points, comme le feraient la plupart des professeurs de mathématiques, mais d'autres, très nombreuses et diverses ont aussi été relevées où l'approche se fait ligne par ligne comme le montrent les exemples suivants.

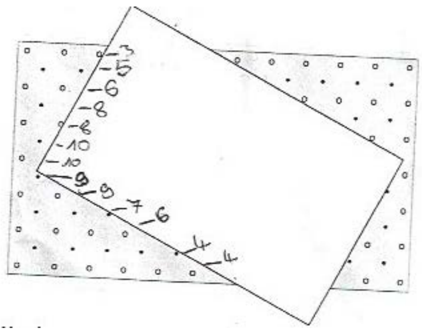
Exemple 9 (cat 4)



Noi abbiamo contato i 3 della prima riga poi quelli della riga sotto … I punti nascosti, sono 89

Trad. *On a compté les 3 de la première ligne puis ceux de la ligne du dessous... Les points cachés sont 89*

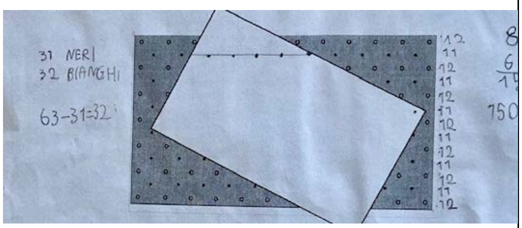
Exemple 10 (cat 5)



I puntini nascosti sono 89

Trad. *Il y a 89 points cachés*

Exemple 11 (cat 5)



Abbiamo calcolato prima tutti i puntini e sono 150 e poi abbiamo contato tutti quelli esterni sono 63. Infine abbiamo atto 150 – 63 che fa 87 e cosi siamo arrivati alla soluzione.

Trad. *Nous avons d'abord calculé tous les points et il y en a 150, puis nous avons compté tous les points externes qui sont 63. Finalement, nous avons calculé 150 – 63, soit 87, et nous sommes donc arrivés à la solution.*

Exemple 12 (cat 4)

Abbiamo contato le linee verticale, ogni di bianchi è di 7 quelle di neri è di 6. Abbiamo contato i puntini mancanti di ogni linea di bianchi: 1 nas.+4=5+5=10+6=16+6=22+6=28+6=34+5= 39+5=44+2=46. Poi i puntini nascosti i ogni linea di neri:3na.,+4=7+5=12+6=18+6=24+5=29+5=34+3=37+ 1=38. Poi abbiamo sommato i due numeri:46 bianchi+38 neri = 84 in tutto.

Trad. *Nous avons compté les lignes verticales, chacune des blanches vaut 7, chacune des noires vaut 6. Nous avons compté les points manquants de chaque ligne blanche : 1. cac.+4=5+5=10+6=16+6=22+6=28+6=34+5=39+5=44 +2=46. Puis les points cachés dans chaque ligne noire : 3 cac.+4=7+5=12+6=18+6=24+5=29+5=34+3=37+1=38 Ensuite on additionne les deux nombres : 46 blancs + 38 noirs = 84 au total*

4. Que faire de ces données pour l'enseignement ?

Les données du chapitre précédent sont objectives : 200 groupes d'élèves ont montré comment ils ont cherché à résoudre le problème, 48 (25 %) ont trouvé la solution 89, 15 (8%) ont trouvé « 88 » ou « 90 ». 20 % de ceux qui ont dessiné les points cachés ont compris comment construire le réseau, les autres n'ont vu que des alignements de moins en moins précis.

J'essaye d'imaginer mes réactions devant ces données, du temps très éloigné où j'étais enseignant et je me demande, rétroactivement, si mes élèves de catégorie 6 auraient trouvé 89 et comment ? Je n'ai pas de souvenir d'avoir traité avec eux les « réseaux de points aux sommets d'un quadrillage » en tant que figures géométriques. Cette notion n'était pas mentionnée explicitement dans les programmes de mathématiques de mon époque, ni actuellement ; cependant on peut la considérer comme une des connaissances générales, implicites, des programmes de mathématiques.

Ce sera à l'enseignant de lire et examiner ces données et d'en tirer ses choix personnels pour sa classe.

4.I. Inné ou acquis

La première interrogation concerne l'intérêt de *Points cachés* pour une activité de classe, dans le cadre du « programme » de mathématiques qui ne parle pas explicitement de réseaux de points. On peut considérer ce type de figure géométrique comme une curiosité, comme un sujet d'observation divertissant, comme une petite recherche pour occuper les élèves, en particulier ceux « qui ont toujours terminé leur travail avant les autres ».

On peut aussi, vu que certains groupes d'élève de catégorie 4 ou 5 ont manifesté une certaine maîtrise de la construction des deux réseaux de points (exemples 1 et 2), penser que, à force de travailler sur du papier quadrillé, les autres vont aussi percevoir, naturellement, la notion « d'alignement » ou, plus généralement de « droite » comme support de l'alignement.

On se situe ainsi dans une confrontation entre l'inné et l'acquis.

Dans la perspective de « l'inné » on considérera que l'activité se terminera après la mise en commun des solutions, suivie d'une phase d'institutionnalisation puis de la rédaction d'une solution individuelle correcte et précise pour en conserver une mémoire écrite et que ce sera au temps, à l'âge où à la « maturation naturelle » de faire évoluer les notions en jeu.

Dans la perspective de « l'acquis », on estimera qu'un travail d'acquisition est nécessaire pour construire les concepts de droite, parallèle, perpendiculaire, alignement, distance, équidistance … et que, par conséquent il est souhaitable de proposer l'activité à sa classe et de l'exploiter au plan didactique.

La réponse à cette première interrogation est du genre : *je prends*, ou *je ne prends pas*. Et si je prends, je vais au-delà de la réponse 89 et j'insère l'activité dans mon programme, non « en plus » mais « à la place » d'exercices du manuel ou d'autres répétitions inutiles.

Personnellement je choisirais l'option « acquis ». Si j'étais à la place d'un enseignant. Je n'aurais pas la conscience tranquille en sachant qu'une partie importante de mes élèves ne voient pas les droites « dissimulées » derrière les alignements.

4.2. Précision et rigueur

Une deuxième interrogation est liée aux exigences de précision et de rigueur du dessin des points cachés ou des procédures de calcul. Les deux enseignantes qui participaient avec moi à l'attribution des points pour les copies de la section de Sienne, étaient catégoriques : elles estiment que leurs élèves de catégories 4 et 5 doivent maîtriser l'usage de la règle et de l'équerre pour obtenir des constructions précises, sur papier.

Les 25 % de réponses « 89 » et 15 % de réponses avec une erreur d'une unité « 88 » ou « 90 », mentionnés précédemment, vont-ils satisfaire enseignant qui a donné le problème à ses élèves ? Va-t-il se contenter d'un « à peu près » ou exiger la réponse exacte et proposer un travail minutieux dans la phase d'apprentissage qui suivra ?

L'observation des deux procédures, par dessin des points cachés et comptages ou par calcul du nombre total des points par multiplication puis soustraction des points visibles (qui doivent aussi être comptés) n'a pas permis de juger de leur efficacité respective ; il y a autant d'erreurs selon l'une que selon l'autre. Il ne me semble pas opportun d'en valoriser l'une ou l'autre procédure mais simplement de les faire apparaître les deux, lors de la mise en commun ou lors de la phase d'institutionnalisation. Lorsque les élèves rédigeront leur solution individuelle dans la phase suivante, ce sera à eux de choisir celle qu'ils préfèrent rédiger en priorité (cela dépend du niveau de construction de leurs savoirs), mais il me paraît important que les deux soient présentes dans leur cahier, même s'ils ont besoin du contrôle de l'enseignant pour vérifier la correction d'une écriture comme $(7 \times 12) + (6 \times 11) - 61 = 89$). (Il ne s'agit pas d'une « découverte » mais « d'orthographe »).

A propos de cette deuxième interrogation, on imagine différentes attitudes possible pour l'enseignant qui vont dépendre de ses convictions personnelles et de ses élèves.

4.3. Le « problème » est-il arrivé à sa fin ?

Une troisième interrogation concerne une éventuelle poursuite de l'activité.

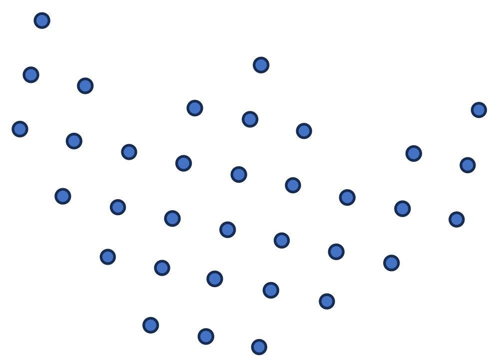
Je me mets encore à la place de l'enseignant qui dit : *Mes élèves ont recherché la solution par groupes ; certains l'ont trouvée, d'autres pas. Lors de la discussion, ils ont vu comment les autres ont conduit leur recherche. Chacun sait maintenant qu'il y a 89 points cachés ; qu'on peut les compter si les droites des alignements sont dessinés précisément. Je leur ai montré aussi comment écrire correctement le calcul (7 × 12) + (6 × 11) – 61 = 89. Puis chacun a rédigé sa propre manière de résoudre le problème, avec le dessin et les calculs. Ma classe a ainsi fait une petite partie du programme : un peu de dessin géométrique avec le maniement de la règle et de l'équerre et une révision des écritures multiplicatives et additives. N'est-ce pas suffisant ?*

De mon point de vue, on peut – ou même, on doit - aller plus loin dans la construction du concept de réseau. Le dessin des droites sur la figure consiste à relier les points déjà dessinées et, par conséquent, il ne s'agit que d'un simple complément : l'emplacement des droites est déjà donné, comme leur parallélisme, leur perpendicularité et leur équidistance. On revient ici au questionnement entre « inné » et « acquis » à propos de la perception du quadrillage. Toujours à la place de l'enseignant, je profiterais de l'aubaine pour proposer une activité créative, qui ferait accéder *Points cachés* au statut de « problème du RMT ».

Par exemple :

Jules a dessiné une belle figure composée de beaucoup de points.

Reproduisez-la sur une feuille blanche.



La tâche de l'élève (sans aucune intervention du maître, évidemment) serait :

- **observer** la figure et constater qu'elle est formée d'**alignements** de points ;
- **choisir** un point de départ et un des alignements auquel il appartient ;
- **aller chercher une règle** et tracer la **droite** sur laquelle sont disposés les points de l'alignement ;
- prendre la **distance** entre le point de départ et son voisin sur la figure et la reporter sur le dessin, soit par mesure à la règle graduée, soit au compas, (dont l'usage serait préférable car il évite les mesures de distance, garantit l'isométrie des écarts, et donne une image du concept de « distance ») indépendante de celle de « longueur d'un segment »)
- poursuivre comme précédemment la construction des points du premier alignement ;
- tracer une **droite perpendiculaire** à celle du premier alignement passant par un de ses points et y construire les points de ce deuxième alignement ;
- tracer ensuite les **droites parallèles** et perpendiculaires ;
- …

Il faudra du temps pour reproduire cette figure, mais il ne sera pas perdu car les élèves manipuleront règle, équerre et compas avec une finalité plus évidente que celle des exercices traditionnels de dessin géométrique : ils sauront pourquoi utiliser ces instruments et à quoi ils servent. Ils comprendront aussi, par la pratique, que la trame d'un réseau de points est constituée de droites parallèles et perpendiculaires, et que la distance entre deux points voisins est toujours la même. Ce sont là les connaissances de base des « systèmes orthonormés de coordonnées » de la géométrie cartésienne.

5. Quelques commentaires en guise de conclusion / Alcune considerazioni conclusive

Les observations des copies font apparaître différents niveaux dans la construction du concept de « réseau de points » de la figure donnée dans l'énoncé du problème. Les deux réseaux (points blancs et points noirs) sont les sommets de quadrillages. D'un point de vue didactique cette connaissance semble à première vue « élémentaire », « évidente », « naturelle » ou si commune qu'on ne l'envisage pas comme « nécessaire » dans le cadre d'un programme scolaire. « On ne va perdre son temps à observer un papier quadrillé que les élèves utilisent quotidiennement ! »Les trois interrogations imaginées précédemment, concernent l'enseignant ; il y en a encore beaucoup d'autres qui ne sont pas abordées ici.

J'en propose une dernière, dans une perspective historique, à propos de l'avenir de la Banque de problèmes du RMT.Le « problème » d'origine, *La tache*, a fait l'objet d'une de nos premières analyses a posteriori, encore modestes par le nombre de copies examinées et par les quelques commentaires qui accompagnent les résultats. Ces quelques traces figurent, avec l'énoncé, dans la Banque de problèmes du RMT, qui n'existait pas encore à cette époque. (1995), elles n'y ont donc que le simple statut d'archive ou de mémoire : cette activité a été proposée lors du 3e RMT mais on ne sait pas à quoi elle peut servir pour l'enseignement.

L'activité *Points cachés* proposée 28 ans plus tard dans une épreuve du 31e RMT a un statut plus riche dans la banque de problèmes. La fiche qui y est consacrée présente, dans sa rubrique « Procédures, obstacles et erreurs relevés » les données tirées de l'analyse a posteriori : une identification des savoirs et des obstacles que rencontrent les élèves à propos des alignements de points perçus visuellement : les droites sur lesquels ils sont situés, le parallélisme, la perpendicularité, l'équidistance et les différentes manières de les dénombrer, le comptage un à un sur le réseau dessiné ou les opérations arithmétiques tirées de régularités répétitives. La rubrique « Exploitation didactique » de la fiche de la Banque va au-delà des « informations » précédentes et propose des « suggestion » pour l'institutionnalisation conduite par l'enseignant. Ce ne sera que lorsque la rubrique « Pour aller plus loin » présentera des propositions d'activités complémentaires à conduire en classe que l'activité *Points cachés* deviendra un « problème du RMT » utile pour l'enseignant.

Et voici la dernière interrogation, qui ne recevra une réponse que dans l'avenir :

Qui pourra imaginer, écrire et expérimenter ces activités complémentaires, au cours desquelles l'élève « apprend » c'est-à-dire « construit » les connaissances identifiées et reproduites lors de l'activité Points cachés ?

Il s'agit d'un travail qui ne pourra être envisagé sans la participation active et collaborative des enseignants et utilisateurs.

L'osservazione degli elaborati rivela livelli diversi nella costruzione del concetto di "rete o griglia di punti" della figura riportata nell'enunciato del problema. Le due reti (punti bianchi e punti neri) sono i vertici della quadrettatura. Da un punto di vista didattico, queste conoscenze sembrano a prima vista "elementari", "ovvie", "naturali" o così comuni da non essere considerate "necessarie" nell'ambito di un programma scolastico. "Non perderemo tempo guardando la carta quadrettata che gli allievi usano ogni giorno!".

Le tre domande immaginate in precedenza riguardano l'insegnante; ce ne sono molte altre che non sono trattate qui.

Ne propongo un'ultima, da una prospettiva storica, sul futuro della Banca dei Problemi del RMT.

Il problema originario, *La macchia*, è stato oggetto di una delle nostre prime analisi a posteriori, ancora modesta per numero di elaborati esaminati e pochi commenti che hanno accompagnato i risultati. Queste poche tracce figurano nella scheda della Banca dei Problemi RMT, che allora non esisteva ancora (1995) e hanno quindi solo il semplice statuto di archivio o memoria: questo problema è stato proposto nel corso del 3° RMT, ma non sapevamo a quale scopo potesse essere utilizzato per l'insegnante.

L'attività *Punti nascosti* proposta 28 anni dopo in una prova del 31° RMT ha uno statuto più ricco nella Banca dei Problemi. La scheda ad essa dedicata presenta, nella rubrica "Procedure, ostacoli ed errori rilevati" i dati tratti dall'analisi a posteriori: un'identificazione delle conoscenze e degli ostacoli che gli allievi incontrano riguardo agli allineamenti dei punti percepiti visivamente: le linee su cui si trovano, il parallelismo, la perpendicolarità, l'equidistanza e i diversi modi di contarli, contando uno ad uno sulla rete disegnata o operazioni aritmetiche derivate da regolarità ripetitive. La rubrica "Indicazioni didattiche" della scheda va oltre le "informazioni" precedenti e offre "suggerimenti" per l'istituzionalizzazione guidata dall'insegnante. Sarà solo quando la rubrica "Per andare più lontano" presenterà proposte di attività aggiuntive da svolgere in classe che l'attività *Punti Nascosti* diventerà un utile "problema RMT" per l'insegnante.

Ed ecco l'ultima domanda, che riceverà risposta solo in futuro:

chi potrà immaginare, scrivere e sperimentare queste attività complementari, durante le quali l'allievo "impara" cioè "costruisce" le conoscenze individuate e riprodotte durante l'attività *Punti nascosti*?

Questo è un lavoro che non può essere immaginato senza la partecipazione attiva e collaborativa di insegnanti e utenti.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

PERCORSI DIDATTICI PER LA GEOMETRIA PIANA CON PROBLEMI RMT
PARCOURS DIDACTIQUES POUR LA GÉOMÉTRIE PLANE PAR DES PROBLÈMES RMT

Bernard Anselmo, Roberto Battisti, Paola Bajorko, Clara Bisso, Brunella Brogi, Fabio Brunelli, Federica Curreli, Speranza Dettori, Florence Falguères, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Silvia Mazzucco, Bice Perna, Luciana Rapposelli, Elsa Renna, Patrizia Sabatini, Rosanna Sanna, M. Agostina Satta, Cinzia Utzeri, Vincenza Vannucci

Gruppo Geometria piana

Di geometria ne va insegnata parecchia, a tutti i livelli di scolarità; senz'altro più di quanta si usa insegnarne attualmente...
la geometria rappresenta una fonte inesauribile e insostituibile di suggestioni intuitive, di esempi, di esercizi, di problemi, di modi di pensare e di esprimersi, di modelli e di teorie matematiche
(V. Villani[7])

Premessa: perché percorsi didattici con problemi RMT? / Introduction : pourquoi des parcours didactiques par des problèmes RMT ?

Uno degli aspetti precipui dei problemi del RMT, o almeno di una parte di essi, è l'analisi a posteriori che li accompagna. Si può sempre discutere sulla "qualità" di un problema e a priori potremmo pensare che molti superino l'esame; possiamo forse capire quali siano i saperi matematici mobilizzati dalla risoluzione del problema stesso per decidere di integrarlo in una sequenza di apprendimento, ma è solo attraverso la successiva analisi a posteriori, che possiamo sapere qualcosa di più, con le preziose informazioni che ci vengono dagli allievi/e[8]: quali difficoltà di appropriazione dell'enunciato, quali ostacoli e difficoltà suscita, ma anche quali possano essere le sue potenzialità per la costruzione di conoscenze in qualche modo "autogestite" dagli allievi. L'insegnante, a monte, deve poter conoscere le potenzialità didattiche di un problema, ma sarà l'allievo a intraprendere una sua ricerca di risoluzione, qualunque essa sia, che lo porterà, in ogni caso a fare almeno un piccolo passo nella costruzione di un sapere.
È in questo senso che presentiamo quelli che consideriamo dei suggerimenti per percorsi didattici in tema di geometria piana, a partire da problemi RMT ampiamente analizzati a posteriori su un gran numero di elaborati e, in alcuni casi, anche sperimentati nelle "nostre" classi.
Lo scopo di tali "suggerimenti per percorsi didattici" si inscrive in una concezione fondata sull'apprendimento e non più sull'insegnamento, laddove quest'ultimo sia inteso come "trasmissione pedissequa di saperi" nell'ambito della quale l'allievo acquisisce saperi, nozioni, regole e così via, nell'ascoltare le lezioni, nel leggere o nel risolvere gli esercizi progressivi che gli vengono somministrati e sa che le nozioni da acquisire gli sono state date e spiegate. Per la concezione fondata sull'apprendimento, al contrario, viene richiesto all'allievo di essere attivo già dall'inizio del processo tramite la sua partecipazione alla costruzione di saperi che sono nuovi per lui/lei.
Questa costruzione si fa progressivamente attraverso problemi che mettono l'allievo di fronte a situazioni che deve cercare di gestire con le sue conoscenze anteriori, per il tramite di tentativi, ipotesi, ricerche, scambi con i compagni. L'insegnante non interviene in modo diretto in questa costruzione che vede la partecipazione degli allievi, ma il suo ruolo è basilare, in quanto è, in effetti, il regista della costruzione stessa: organizza il successivo dibattito, fa emergere i conflitti relativi alle diverse procedure e mette in evidenza quelle caratteristiche, rinforza eventualmente quelle che sono pertinenti nel caso venissero rifiutate o tralasciate. Ha ovviamente anche il compito di differenziare le risposte o le strategie corrette da quelle che sono ancora inadeguate, di collegare i saperi venuti alla luce nel corso della fase della validazione ai saperi riconosciuti dai programmi scolari o dalla comunità dei matematici. Ha inoltre il compito di "insegnare" le notazioni, la terminologia, gli algoritmi… che giudica necessari.

L'un des principaux aspects des problèmes RMT, ou du moins une partie d'entre eux, est l'analyse a posteriori qui les accompagne. On peut toujours discuter de la « qualité » d'un problème et a priori on pourrait penser que

---

[7] V. Villani: 1981, L'insegnamento della Geometria nella scuola secondaria superiore, L'Educazione matematica, Supplemento 2 – 1981- Convegno Regionale "Metodiche attuali nell'insegnamento della Geometria nell'arco di studi pre-universitario", pp. 50-74

[8] Qui e nel seguito, usiamo l'accezione "allievo" come comprensivo delle declinazioni femminile e maschile.

beaucoup réussissent « l'examen » ; on peut peut-être comprendre quelles connaissances mathématiques sont mobilisées par la résolution afin de décider de l'intégrer dans une séquence d'apprentissage, mais ce n'est que par une analyse ultérieure a posteriori que l'on pourra en savoir quelque chose de plus, avec les précieuses informations qui nous parviennent de la part des élèves : quelles difficultés d'appropriation de l'énoncé, quels obstacles il soulève, mais aussi quel peut être son potentiel pour la construction de connaissances en quelque sorte « auto-construites » par les élèves. L'enseignant, en amont, doit être capable de connaître le potentiel didactique d'un problème, mais ce sera l'élève qui entreprendra sa propre recherche d'une résolution, quelle qu'elle soit, qui l'amènera, en tout cas, à faire au moins un petit pas. dans la construction d'un savoir.
C'est dans ce sens que nous présentons ce que nous considérons comme des suggestions de parcours didactique en matière de géométrie plane, à partir de problèmes RMT largement analysés a posteriori dans un grand nombre d'articles et, dans certains cas, également testés dans « nos » classes.
La finalité de ces « propositions de parcours didactiques » s'inscrit dans une conception fondée sur l'apprentissage et non plus sur l'enseignement, où ce dernier s'entend comme une « simple transmission des connaissances » au sein de laquelle l'élève acquiert des savoirs, des notions, des règles, etc. en écoutant les cours, en lisant ou en résolvant les exercices progressifs qui lui sont administrés et où il sait que les notions à acquérir lui ont été données et expliquées.
Pour la conception basée sur l'apprentissage, au contraire, il est demandé à l'élève d'être actif dès le début du processus par sa participation à la construction de connaissances nouvelles pour elle/lui.
Cette construction se fait progressivement à travers des problèmes qui confrontent l'élève à des situations qu'il doit tenter de gérer avec ses connaissances antérieures, à travers des tentatives, des hypothèses, des recherches, des échanges avec ses camarades. L'enseignant n'intervient pas directement dans cette construction dévolue aux élèvers, mais son rôle est fondamental, puisqu'il est en effet le metteur en scène de la construction elle-même : il organise le débat ultérieur, fait ressortir les conflits liés à la construction, les différentes procédures et met en évidence ces caractéristiques, en renforçant éventuellement celles qui sont pertinentes au cas où elles seraient rejetées ou laissées de côté. Il a évidemment aussi pour tâche de différencier les bonnes réponses ou stratégies de celles qui sont encore inadéquates, de relier les connaissances mises au jour lors de la phase de validation avec les connaissances reconnues par les programmes scolaires ou par la communauté mathématique. Il a également pour tâche « d'enseigner » les notations, la terminologie, les algorithmes... qu'il juge nécessaires.

1. I suggerimenti di percorsi didattici “ragionati” per la geometria piana

L’attività pluriennale del Gruppo geometria piana per i grandi si è sviluppata ininterrottamente dal 2013[9] e ha portato all’individuazione di tre tematiche intese come altrettante colonne portanti per l’immersione nel mondo della geometria piana da parte di allievi, in particolare delle categorie da 6 a 8, declinate rispettivamente come “area e perimetro”, “distanze e altezze” e “misure e approssimazione”.
Si è pensato di suggerire un percorso con problemi del RMT che possano essere da stimolo per affrontare la costruzione dei vari aspetti citati.
Per la scelta di tali problemi si è fatto riferimento sia alle innumerevoli analisi a posteriori di elaborati degli allievi che hanno portato, nel tempo, alla pubblicazione di articoli sulla Gazzetta di Transalpino, ma anche a schede della banca di problemi con il loro contenuto di procedure, ostacoli ed errori rilevati, oltre a indicazioni didattiche.
Per quanto riguarda alcuni problemi reputati interessanti, ma carenti in merito alle analisi a posteriori, si è deciso di attuare nelle classi alcune sperimentazioni che consentiranno anche di completare le relative schede.

2. Area e perimetro

In merito ad area e perimetro la strada percorsa con i problemi del RMT è stata ricca già a partire da un’analisi puntuale del problema **Il giardino del signor Torquato** (8.I.6[10]) di François Jaquet sul conflitto area-perimetro[11] e in seno al Gruppo “ellealquadrato” e da diversi articoli di Atti dell’ARMT, che ne attestano l’attività di ricerca a partire da analisi a posteriori e sperimentazioni[12], per continuare quasi continuativamente come dimostrano diverse ricerche pubblicate sulla Gazzetta di Transalpino.

---

[9] La suddivisione in due sottogruppi (per i piccoli e per i grandi) del Gruppo geometria piana, operante dal 2005, dapprima come Gruppo “ellealquadrato” incentrato sulle problematiche legate al concetto di area e poi come Gruppo geometria piana, è avvenuta nel 2013, nell’ambito del convegno del Lussemburgo.

[10] Per quel che riguarda i problemi di quest’articolo si veda La Banca di problemi all’indirizzo http://www.projet-ermitage.org/ARMT

[11] L’educazione Matematica 2000.

[12] Grugnetti, L., Bisso, C., Pretto, M., Iesu, N., Polo, M., Tanda, M. F.: 2006, ‘Aspetti didattici della “argomentazione” nei problemi del RMT’, in R. Battisti, R. Charnay, L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds.), *RMT : des problèmes à la pratique de la classe/RMT: dai problemi alla didattica quotidiana, Actes des journées d’études sur le Rallye mathématique transalpin*, Bourg-en-Bresse 2004, Arco di Trento 2005, ARMT, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en-Bresse, IPRASE Trentino, 120-134; Grugnetti, L., Bisso, C. (a cura di): ‘Approccio al concetto di area con problemi del RMT’, Gruppo di lavoro n° 8, “ellealquadrato”, Ibidem, 268-276; Grugnetti, L., Bisso, C. (a cura di): 2006, ‘Costruzione del concetto di area con problemi del RMT’, Gruppo di lavoro “ellealquadrato”; Grugnetti, L. Bisso, C.: 2007a, ‘Il ruolo dei problemi del RMT nella costruzione del concetto di area’, in L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M. G. Rinaldi, *I problemi del RMT nella didattica quotidiana/ les problèmes du RMT dans la pratique de la classe*, Parma 2006, Sezione ARMT di Parma, ARMT, 25-36.

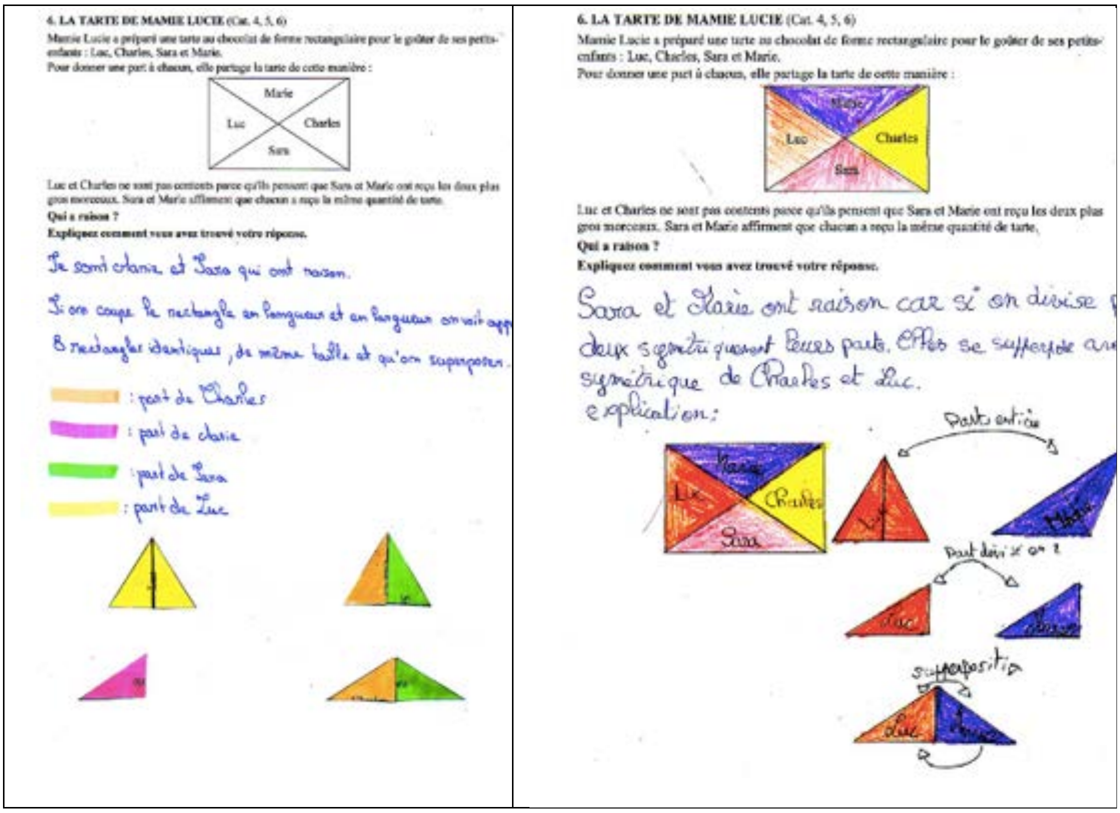
"Nell'insegnamento della matematica tutti gli allievi e gli insegnanti si trovano a dover affrontare, ad un dato momento, la determinazione dell'area di una figura piana. È possibile preparare questo argomento molto presto nella scuola elementare tramite attività di confronto e di pavimentazione nel corso delle quali gli allievi possono ritagliare le figure, spostarne le diverse parti, ricoprirle per pavimentazione.
Queste attività di misurazione delle aree sono totalmente confrontabili con le misurazioni di lunghezze che le precedono generalmente nel percorso dell'allievo. Si ritrovano il confronto di misure per giustapposizione o sovrapposizione di oggetti, la scelta di un oggetto per misurare e il fatto di riportarlo sull'oggetto da misurare, il passaggio a un oggetto che diventa unità di misura poi l'addizione di misure.
Ad un dato momento, verso i 10-11 anni, secondo i paesi, i programmi introducono il calcolo della misura dell'area del rettangolo a partire dalle misure delle lunghezze dei suoi lati. Questo calcolo fa appello al prodotto di due misure. Quello che qui è un atto di routine per l'adulto, è per il giovane allievo un'operazione assolutamente nuova, addirittura sconcertante: mentre egli sa addizionare delle misure di lunghezze, la somma delle quali è sempre una misura di lunghezza, deve ora, moltiplicare due misure della stessa natura per ottenerne un'altra di natura completamente differente. Inoltre, deve differenziare sullo stesso oggetto fisico o su una rappresentazione geometrica le grandezze caratterizzate da una sola dimensione da quelle bidimensionali. E qui c'è un ostacolo, inevitabile, che bisogna arrivare a superare. Si tratta del conflitto tra area e perimetro delle figure geometriche. Rouche (1992) mette in evidenza a questo proposito «sono qui in relazione due domini di grandezze; il prodotto di due misure di segmenti non è la misura di un segmento bensì la misura di una superficie. Questo è il primo esempio che si incontra di misura indiretta»." (F. Jaquet, nell'articolo citato più sopra).

2.1. Proposta di percorso per la problematica conflitto area-perimetro

Dall'ottavo RMT è passata molta acqua sotto i ponti con problemi aventi come compito matematico problematiche relative ad area e perimetro.
Si è pensato che si potrebbe pensare a un percorso che tenga conto di diverse fasi:
- **Prima fase**: Costruzione del concetto di Area come Grandezza
Si può pensare ad attività che prevedono di: ritagliare figure - spostare le diverse parti - ricoprire per pavimentare e tassellare- comporre e ri-comporre una figura. Tutte queste attività potrebbero permettere agli allievi di scoprire le caratteristiche della figura presa in esame e trovare che la caratteristica di ognuna è la "grandezza-area".
- **Seconda fase**: Area come misura della Grandezza
In questo ambito si possono proporre agli allievi attività che prevedono di passare dall'idea di area come grandezza alla necessità di trovare un'unità di misura comune per poter confrontare, misurare aree.
Si arriva così a figure equiscomponibili, equiestese, equivalenti. Non serve ancora conoscere la formula per calcolare l'area delle figure prese in esame.
- **Terza fase**: controllo conflitto area e perimetro
Diventa basilare, ovviamente, la differenza fra area e perimetro ed entrano qui in gioco anche i calcoli e quindi le formule.

Un primo problema potrebbe essere **La torta di Nonna Lucia** (cat. 4-6) 22.II.06 (2014) (con articolo relativo a cura di Bernard Anselmo e Michel Henry in Gazzetta n. 5) che permette di studiare il confronto fra superfici senza il ricorso a dati numerici e senza necessità di compiere misure.
È importante che gli allievi abbiano il tempo e la possibilità di ricorrere a questo approccio sperimentale:

Grugnetti, L. Bisso, C. (a cura di): 2007b, 'La costruzione del concetto di area con problemi del RMT', in IBIDEM, 169-187.



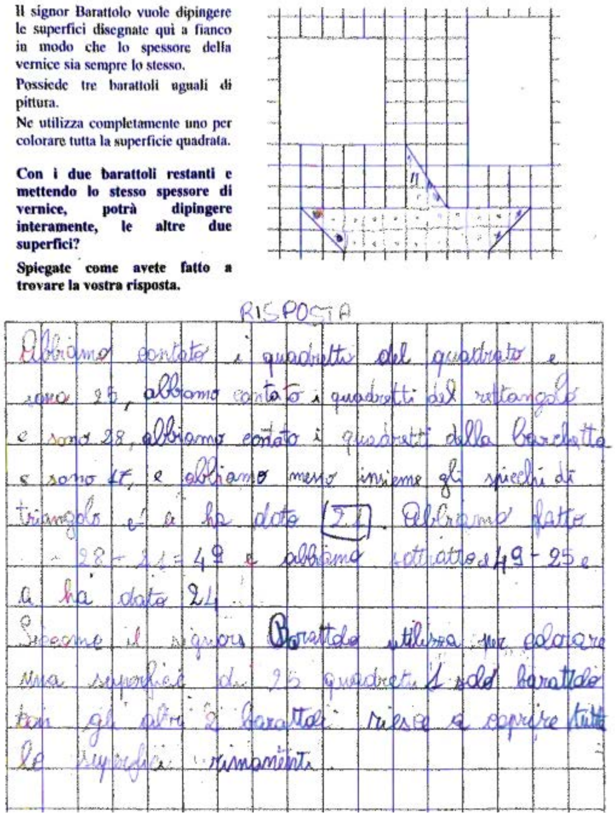
(Dall'articolo Anselmo, Henry)

Ci sono peraltro varie strategie di risoluzione che possono anche implicare misure e calcoli.
Nella relativa scheda, il paragrafo relativo alle Indicazioni didattiche suggerisce che:
su un tema così basilare come la determinazione dell'area di un triangolo, il problema "La torta di Nonna Lucia" offre molteplici possibilità di lavoro in classe:
- il confronto fra una procedura per pavimentazione o la ricerca di unità d'area "non convenzionale" e la procedura con il calcolo di un prodotto di misure,
- la relazione fra l'area di un rettangolo e quella di due triangoli rettangoli che lo compongono,
- il trovarsi di fronte al conflitto area-perimetro,
- l'imprecisione delle misure di lunghezza prese con il righello e i suoi effetti sul calcolo delle aree,
- l'approccio al ragionamento deduttivo a proposito della suddivisione di un rettangolo secondo le diagonali e le mediane, delle misure di lunghezza e delle aree degli otto triangoli rettangoli.

Anche il problema Le superfici del signor Barattolo (cat. 4, 5) 16.II.06 (2014) si presta a un'attività iniziale che permette di introdurre la misura dell'area utilizzando il quadretto come unità grafica e la scomposizione e ricomposizione dei pezzi che formano una figura.
Inoltre, come sottolinea Maria Agostina Satta che ha svolto un'ampia analisi a posteriori degli elaborati della sezione di Sassari, la presenza della forma a barchetta è un buon esempio di figura non standard che nell'insegnamento "tradizionale" spesso è trascurata. Abitua anche gli allievi a "non fidarsi di un primo sguardo"[13] in quanto a volte, come in questo caso, una figura può essere solo apparentemente più grande di un'altra.
Com'era peraltro prevedibile, la forma della barchetta è quella che ha creato maggiori difficoltà. In diversi casi non è chiaro come sia stato effettuato il conteggio dei quadratini, soprattutto nel triangolo superiore della barca. In due elaborati di cat. 5 gli allievi affermano che "l'area di quella figura non si può calcolare". Alcuni dichiarano di aver trasformato la barchetta "in un poligono regolare" che non viene raffigurato e di cui non forniscono la misura della sua superficie.
In un elaborato la forma della barchetta è stata definita "trapezio" e quindi l'area è stata calcolata con la relativa formula utilizzando le misure dei lati prese col righello.
Solo in qualche caso, gli allievi sono ricorsi al ritaglio dei vari pezzi e alla loro ricomposizione, ma purtroppo in modo non corretto ed approssimativo.

[13] "La maniera matematica di vedere le figure costruite strumentalmente, anche le più elementari, è agli antipodi della maniera spontanea e iconica di vedere le rappresentazioni bidimensionali. Per superare lo scarto considerevole che le separa, non è sufficiente mettere degli occhiali concettuali, in quanto qui, tali occhiali richiedono l'acquisizione delle proprietà geometriche di base oltre alla coordinazione tra i termini geometrici e ciò che la figura consente di vedere." (R. Duval, Gazzetta di Transalpino n. 10, 2020, pp. 7-26).

L'analisi a posteriori degli elaborati della sezione di Sassari, effettuata da Maria Agostina Satta, ha evidenziato che la procedura più frequente per determinare la misura delle superfici è stata il conteggio dei quadratini, come l'esempio che segue, di una classe di categoria 4:



Il signor Barattolo vuole dipingere le superfici disegnate qui a fianco in modo che lo spessore della vernice sia sempre lo stesso.

Possiede tre barattoli uguali di pittura.

Ne utilizza completamente uno per colorare tutta la superficie quadrata.

Con i due barattoli restanti e mettendo lo stesso spessore di vernice, potrà dipingere interamente, le altre due superfici?

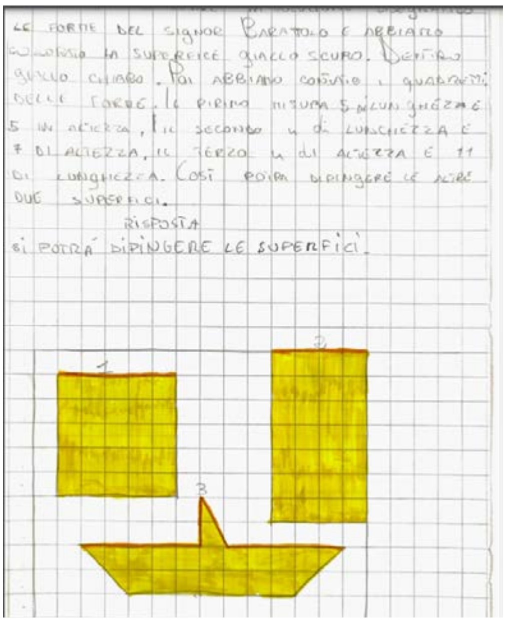
Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

RISPOSTA

Abbiamo contato i quadretti del quadrato e sono 25, abbiamo contato i quadretti del rettangolo e sono 28, abbiamo contato i quadretti della barchetta e sono 17, e abbiamo messo insieme gli spicchi di triangolo e ci ha dato 21. Abbiamo fatto 28 + 21 = 49 e abbiamo sottratto 49 - 25 e ci ha dato 24.

Siccome il signor Barattolo utilizza per colorare una superficie di 25 quadretti 1 solo barattolo con gli altri 2 barattoli riesce a coprire tutte le superfici rimanenti.

In qualche caso gli allievi hanno calcolato le aree con le formule utilizzando le misure dei lati prese col righello. Le formule talvolta sono state utilizzate al posto del conteggio per calcolare l'area del quadrato e del rettangolo. In alcuni elaborati il confronto delle superfici è stato stabilito ricorrendo al perimetro: è riapparsa, quindi, ancora una volta, la confusione tra i concetti di area e di perimetro.
Gli allievi, ancora di una classe di categoria 4, affermano di aver contato i quadretti delle forme, ma in realtà hanno conteggiato i lati di quadretto delle dimensioni delle figure.

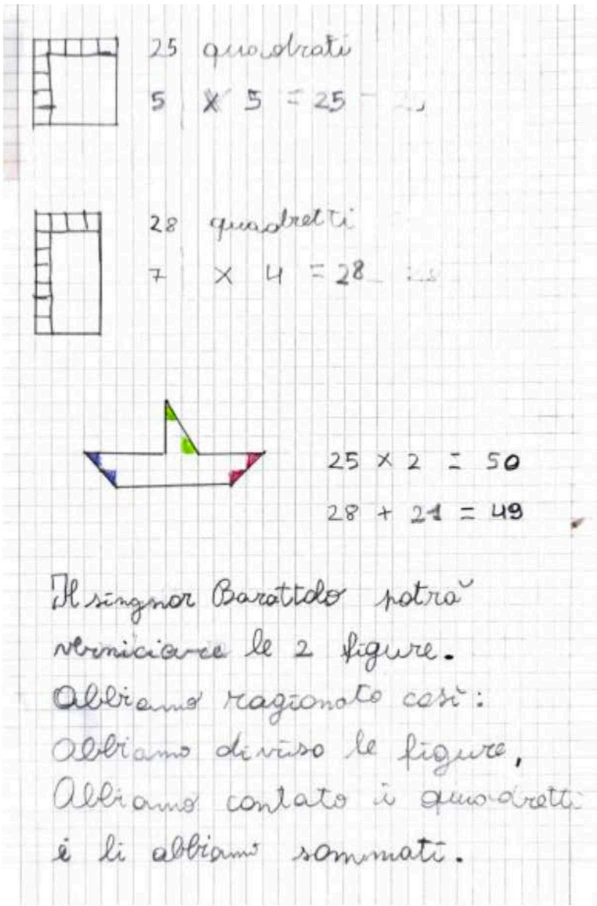


"*Siamo riusciti a trovare la soluzione disegnando le forme del signor Barattolo e abbiamo colorato la superficie di giallo scuro. Dentro giallo chiaro. Poi abbiamo contato i quadretti delle forme. Il primo misura 5 di lunghezza e 5 in altezza. Il secondo 4 di lunghezza e 7 di altezza. Il terzo 4 di larghezza e 11 di altezza. Così potrà dipingere le altre superfici. Risposta: Si potrà dipingere le superfici*".

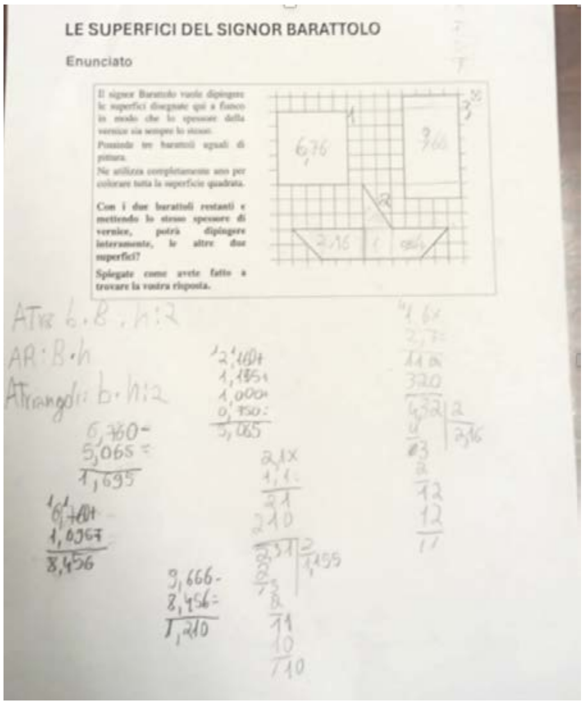
Nel corrente anno scolastico 2023-24, su proposta di Maria Agostina, il problema è stato somministrato in due classi di categoria 4 e 5 e in due classi di categoria 6 e 7, dove gli allievi hanno lavorato in gruppo.

Si rileva una differenza sostanziale tra gli elaborati dei piccoli e quelli dei più grandicelli.

Nel primo caso, quasi tutti i gruppi di categoria 4 e 5 hanno proceduto tramite il conteggio dei quadretti,



mentre nel secondo caso hanno fatto ricorso all'uso delle formule a partire dalle misure prese con il righello che non hanno peraltro consentito di giungere alla risposta corretta.



Dal punto di vista didattico, un confronto in classe tra queste due procedure è certamente utile per “mettere in crisi” il ricorso all’uso di misure prese con il righello. Il numero dei quadretti è “oggettivo”, le misure con il righello sono “soggettive”.

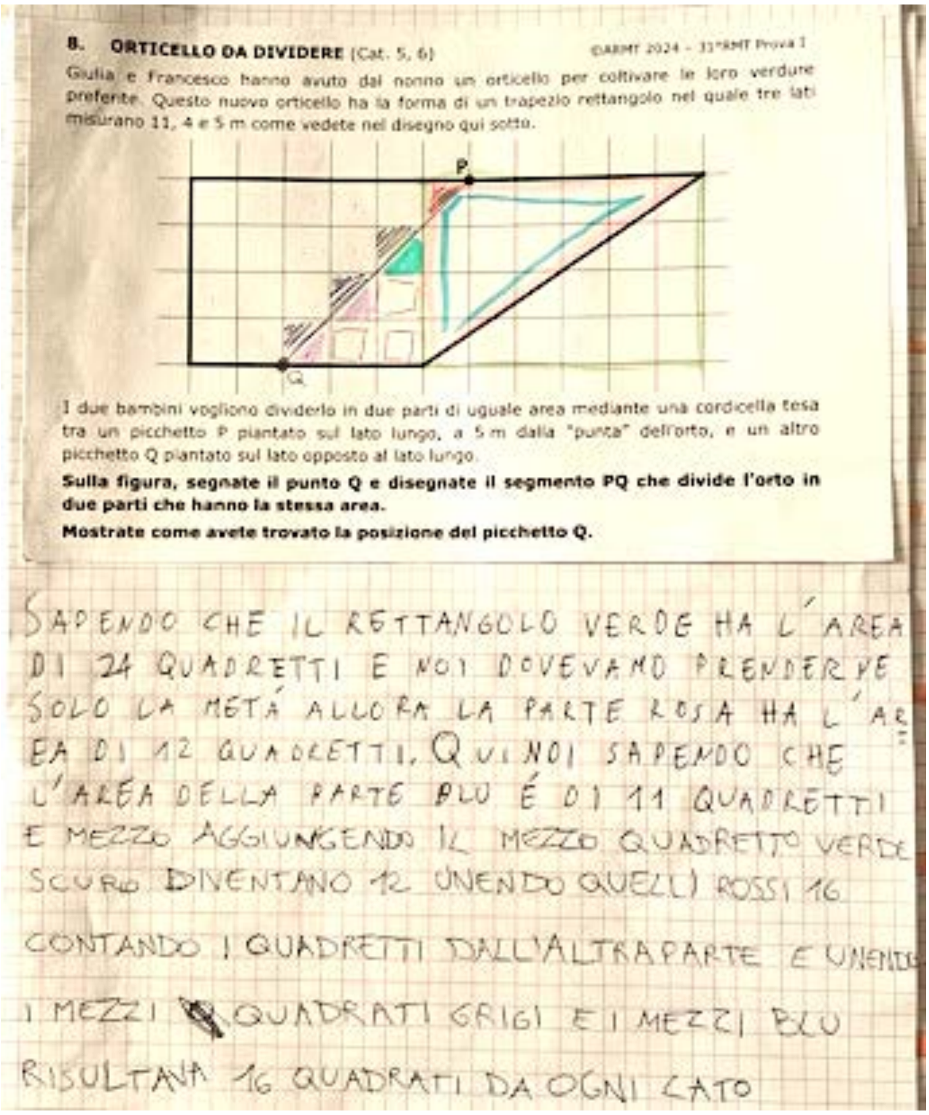
Ancora con protagonisti i “quadretti” è il problema **L’orticello da dividere** (cat. 5, 6) (31.I.8) che mette anche in gioco un trapezio rettangolo, disegnato su carta quadrettata.

L’appropriazione del problema consiste nel comprendere il ruolo e la posizione della corda che, sulla figura geometrica, costituirà un segmento (a una dimensione) che dividerà la figura in due parti uguali.

Per la risoluzione il primo passo consiste nel calcolare l’area dell’orticello o della figura, 32 in quadretti o m^2 ottenuta tramite il conteggio dei quadretti e ricomposizione delle parti di quadretti in quadretti interi lungo il lato “obliquo”, o con il raggruppamento in “colonne” di 4 quadretti di cui alcuni da ricomporre o con il calcolo dell’area del rettangolo di sinistra e quella del triangolo di destra considerato come semi-rettangolo.

Da sottolineare che la formula dell’area del trapezio è inutile per queste dimensioni ridotte della figura (11, 4 e 5 m).

Patrizia Sabatini ha fatto parte della commissione che ha attribuito i punteggi a questo problema e ha avuto modo di analizzare l’elaborato della propria classe di categoria 6.


8. **ORTICELLO DA DIVIDERE** (Cat. 5, 6) ©ARMT 2024 - 31°RMT Prova I

Giulia e Francesco hanno avuto dal nonno un orticello per coltivare le loro verdure preferite. Questo nuovo orticello ha la forma di un trapezio rettangolo nel quale tre lati misurano 11, 4 e 5 m come vedete nel disegno qui sotto.

I due bambini vogliono dividerlo in due parti di uguale area mediante una cordicella tesa tra un picchetto P piantato sul lato lungo, a 5 m dalla "punta" dell'orto, e un altro picchetto Q piantato sul lato opposto al lato lungo.

Sulla figura, segnate il punto Q e disegnate il segmento PQ che divide l'orto in due parti che hanno la stessa area.

Mostrate come avete trovato la posizione del picchetto Q.

SAPENDO CHE IL RETTANGOLO VERDE HA L'AREA DI 24 QUADRETTI E NOI DOVEVAMO PRENDERNE SOLO LA METÀ ALLORA LA PARTE ROSA HA L'AREA DI 12 QUADRETTI. QUINDI SAPENDO CHE L'AREA DELLA PARTE BLU É DI 11 QUADRETTI E MEZZO AGGIUNGENDO IL MEZZO QUADRETTO VERDE SCURO DIVENTANO 12 UNENDO QUELLI ROSSI 16 CONTANDO I QUADRETTI DALL'ALTRA PARTE E UNENDO I MEZZI QUADRATI GRIGI E I MEZZI BLU RISULTANO 16 QUADRATI DA OGNI LATO

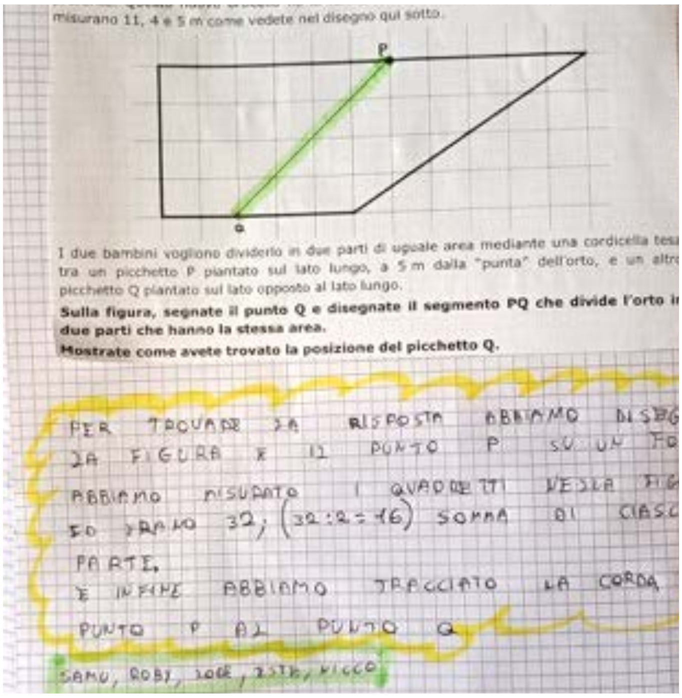
Per il calcolo dell’area, necessario per la risoluzione, si nota la necessità di ricorrere al rettangolo, in quanto figura nota e “rassicurante”

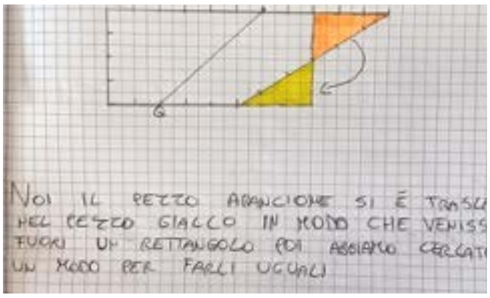
ed il successivo ricorso al conteggio di quadrati.

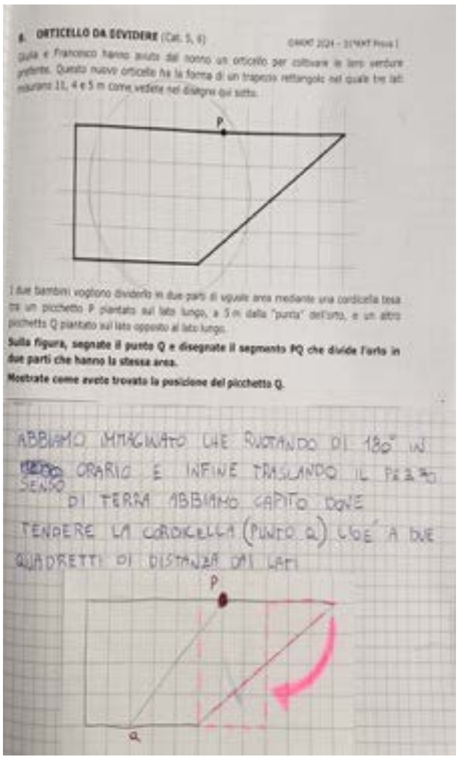
Ha pensato quindi di riproporlo in classe come lavoro di gruppo.

In classe però la situazione non è stata così rosea e le risoluzioni proposte da quattro dei sette gruppi (coppie o terne) evidenziano la mancata comprensione del testo o il non rispetto dei vincoli.

Gli altri tre gruppi mostrano di comprendere il testo e la risposta è corretta, ma il procedimento non è ben esplicitato.







In queste ultimi due risoluzioni si fa ricorso alla scomposizione del trapezio in un pentagono e un triangolo rettangolo e alla successiva rotazione del triangolo per passare dal trapezio al rettangolo.

La ricerca del punto Q sembra fatta su base intuitiva. Un alunno, nella successiva discussione in classe, ha infatti riferito di aver pensato di mettere il punto Q in quella posizione, perché distante dal vertice a sinistra due lati di quadretti, così come P lo è dal vertice a destra.

La breve sperimentazione svolta in classe e gli spunti colti durante la correzione degli elaborati della gara portano ad alcune riflessioni riguardo l'uso in classe di questo problema in cat. 6 e 7:

La situazione rappresentata dal disegno e dal testo presenta alcuni aspetti insidiosi per gli alunni. Si va dalla mancata comprensione di una corda tesa come "segmento" al rispetto di vincoli come, ad esempio, la "fissità" del punto P. E sono proprio problemi di questo tipo che permettono di far venire alla luce aspetti e difficoltà spesso "sommersi".

Il problema, inoltre, ben si presta ad un lavoro sul riconoscimento del trapezio, sulla cui definizione si rischia di arrivare troppo in fretta, senza dare agli alunni le attività e il tempo necessario per una reale acquisizione e che troppo spesso viene rappresentato solo in posizioni "standard".

Il problema è inoltre utile per indurre gli alunni a ricorrere alla scomposizione delle figure ed è particolarmente inclusivo: è possibile, infatti, lavorare sulla ricerca dell'area ricorrendo a varie strategie, dal conteggio dei quadretti all'uso della formula, anche in una prospettiva relazionale, tenendo presente che i trapezi hanno la stessa altezza.

Il confronto delle varie strategie può aiutare gli alunni a riflettere sui vantaggi e i limiti di ciascun approccio, evitando che si risolva il problema in maniera acritica, semplicemente "perché si fa così".

Un'altra possibile attività di tipo sperimentale che può stimolare anche allievi "più fragili", proposta da Brunella Brogi, che utilizza le potenzialità degli origami e l'esplorazione tramite la manipolazione di un modello cartaceo; è sicuramente un aiuto nel processo di costruzione di un concetto.

Per la descrizione dell'attività si rimanda all'allegato I.

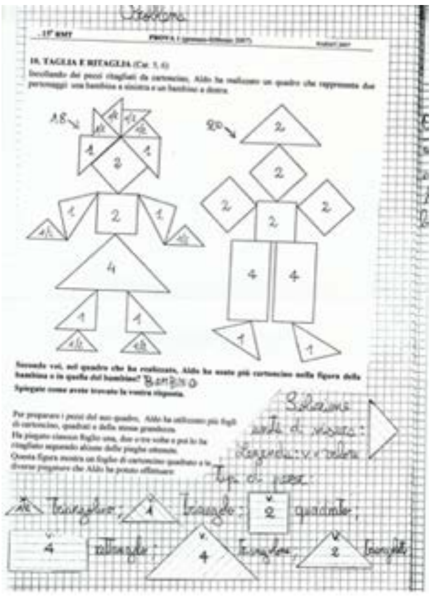
Taglia e ritaglia è un problema che richiede di confrontare le aree di due figure composte da triangoli e quadrati ritagliati da un modello: un quadrato suddiviso in triangoli dalle sue diagonali e mediane.

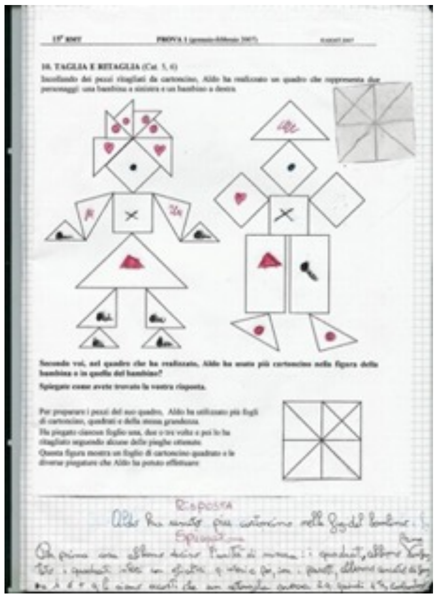
Potrebbe essere proposto all'inizio della prima di scuola secondaria di primo grado (cat. 6) per mettere gli allievi di fronte a un problema "pratico" già a partire dal suo titolo.

In una sperimentazione, pubblicata sugli Atti dell'ARMT (2008)[14] a cura di Clara Bisso; nella sua classe di quarta primaria per «fare il punto» sulla problematica dell'equiestensione, sia attraverso l'osservazione durante la fase di lavoro, sia attraverso la fase della messa in comune, si è rensa conto di come i diversi protocolli di ragionamento, più o meno "raffinati", indichino differenti livelli di appropriazione del concetto.

Strategie risolutive possono essere sintetizzate nel modo seguente:

a) individuazione di unità di misura e conseguente conteggio,
b) confronto di pezzi, eliminazione di quelli uguali e poi di quelli equivalenti con ricorso all'unità di misura.





[14] "Il concetto di area in un percorso quinquennale e il ruolo del RMT".

Adatto a un confronto tra superfici e le loro aree è, fra gli altri, il problema **I sette poligoni** (cat. 7, 8) 29.I.13 (2022); il confronto può essere condotto tramite scomposizione, oppure calcolo con scelta ed utilizzo della unità di misura più opportuna. Il problema era stato concepito con uno scopo didattico. La scelta dell'opportuna unità di misura appare in tutta la sua evidenza in questo problema e tale tematica rafforza ancora di più l'interesse della sua discussione in un'attività in classe che può favorire una maggiore comprensione dell'equiscomponibilità: occorre determinare l'area di figure complesse attraverso la loro suddivisione in altre la cui area è calcolabile con formule note e poi le successive somme o sottrazioni. Il problema è adatto anche a stimolare una riflessione sulle altezze delle figure proposte.

Le analisi a posteriori hanno evidenziato la necessità di lavorare per modificare la tendenza comune ad utilizzare acriticamente misurazioni con il righello, a scapito di un conteggio di quadretti su una quadrettatura, o di un ricorso a deduzioni o all'applicazione di conoscenze geometriche. È un problema molto ricco. La scelta opportuna dell'unità di misura appare in tutta la sua evidenza in questo problema e tale tematica rafforza ancora di più l'interesse della sua discussione in un'attività in classe che, con questo problema, può abbracciare altri aspetti fondamentali della geometria piana come la comprensione della possibilità di scomporre figure complesse in altre la cui area è calcolabile con formule note o lavorare su figure per somma o sottrazione, attraverso la scomposizione della figura, per una gestione opportuna dell'equiscomponibilità. Il problema è adatto, peraltro, anche a stimolare una riflessione sulle altezze delle figure proposte.

È stato ampiamente analizzato nell'articolo "Da sette poligoni a… sette poligoni, a cura del Gruppo geometria piana per i grandi, nel numero 12 della Gazzetta di Transalpino.

Nel medesimo articolo è stato analizzato a posteriori anche il problema Il tangram del falegname (I)

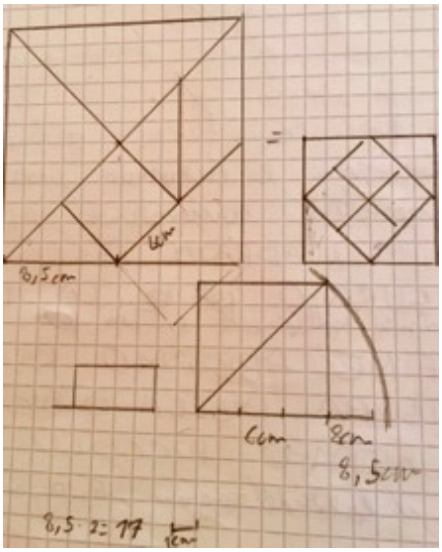
(cat. 6, 7) 29.II.17:

- permette la manipolazione: ritagliare, spostare, sovrapporre.
- è facile da reperire sia in librerie specializzate che su Google.
- può essere costruito dagli alunni con le indicazioni dell'insegnante. In didattica permette, attraverso il confronto delle aree, dei lati e degli angoli delle sette figure, di collegare diversi argomenti.
- sovrapponendo le figure si può trovare la figura unitaria (triangolo piccolo) che serve per misurare la superficie del Tangram unità di misura convenzionali.
- dal confronto delle sette figure del Tangram figure congruenti ma anche figure equivalenti, equiscomponibili
- considerando il triangolo come figura dominante del Tangram triangoli, proprietà degli angoli di un triangolo, proprietà dei lati di un triangolo, teorema di Pitagora, approssimazione.

- dal confronto dei lati della figura perimetro delle singole figure, nonché rapporto area-perimetro in figure equivalenti e in figure di uguale perimetro.

Pensiamo che il problema riveli importanti potenzialità già a livello della categoria 6 dove è particolarmente interessante constatare, come ha evidenziato l'analisi a posteriori, che alcuni gruppi di allievi riescono ad aggirare, se così possiamo dire, in maniera "naturale" la non conoscenza del teorema di Pitagora e dell'estrazione di radice quadrata. Una procedura che si basa sulla suddivisione del Tangram in otto quadrati come il quadrato piccolo: 1 quadratino ha area 6 . 6 = 36. Il Tangram è composto da 8 quadratini, quindi l'area del Tangram è 36 . 8 = 288. Sapendo che l'area del quadrato è lato per lato, allora lato per lato = 288. Il numero che moltiplicato per se stesso dà 288 è circa 16,9 che quindi è la misura del lato.

O ancora con la considerazione relativa alla proiezione, con l'uso del compasso (qui chiamato balaustrone), della diagonale del quadrato piccolo sul lato del quadrato piccolo per trovare, senza ovviamente ancora conoscere il teorema di Pitagora, la "lunghezza della diagonale, in questo caso per loro, 8,5 cm. Fatta l'osservazione che il lato del Tangram equivale al doppio della diagonale del quadrato piccolo, gli allievi hanno trovato la misura di 17 cm.



I saperi mobilizzati dal problema **Il pavimento di Fabio** cat. 8-10 (25.I.17) sono molteplici. Il dato dei 15 metri di perimetro del pavimento in gioco non è sufficiente a determinare l'area del rettangolo e sia come disegno del medesimo, non sono sufficienti (ci sono un'infinità di aree diverse), mentre e il disegno della pavimentazione permette di calcolare il rapporto tra misure di lunghezza e larghezza.
Il primo compito per la risoluzione è quindi quello di determinare le due dimensioni osservando la figura che rappresenta questo particolare rettangolo e la griglia (quasi completa) della sua struttura. Il procedimento consiste nel constatare che la lunghezza di una mattonella è il doppio della sua larghezza e che, quindi, possiamo prendere questa larghezza (o il lato di un quadrato della griglia) come unità comune. Un semplice conteggio mostra che la larghezza e la lunghezza della camera sono rispettivamente 6 e 9 e che il perimetro della camera è di 30 unità.
Il secondo compito è passare dalle unità 6 e 9 alle misurazioni in metri: 30 (unità) ⇔ 15 (m) che mostra il rapporto (proporzionalità) 2 / 1 o 1 / 2 e le dimensioni della camera 3 e 4 ,5 (m).
L'ultimo compito è calcolare l'area del rettangolo: $3 \times 4{,}5 = 13{,}5$ (in m^2) e il prezzo delle mattonella $13{,}5 \times 30 = 405$ (in euro).
Un'eventuale procedura algebrica si basa anch'essa sulla determinazione delle dimensioni 6 e 9 unità e consente, come in precedenza, di calcolare la misura, in metri, dell'unità (x) risolvendo l'equazione:
$2(9x + 6x) = 2 \times 15\,x$ => $30x = 15$ => $x = 1/2$
prima di trovare l'area e il prezzo.
Les savoirs mobilisés par le problème **Le dallage de Fabio** cat. 8-10 (25.I.17) sont nombreux. La donnée des 15 m de périmètre ne suffit pas pour déterminer la mesure de l'aire d'un rectangle (il y a une infinité d'aires différentes) et le dessin du pavage permet de calculer le rapport entre les mesures de la longueur et de la largeur.
La première tâche de résolution est donc de déterminer les deux dimensions en observant la figure représentant ce rectangle particulier et le quadrillage (presque complet) de sa structure. La procédure consiste à constater que la longueur d'une dalle est le double de sa largeur et que, par conséquent, on peut prendre cette largeur (ou le côté d'un carré du quadrillage) comme unité commune. Un simple comptage permet de voir que la largeur et la longueur de la chambre sont respectivement 6 et 9 et que le périmètre de la chambre est 30 unités.
La deuxième tâche est de passer des unités 6 et 9 aux mesures en mètres : 30 (unités) <=> 15 (m) qui fait apparaître le rapport (de proportionnalité) 2/1 ou 1/2 et les dimensions de la chambre 3 et 4,5 (m).
La dernière tâche consiste à calculer l'aire du rectangle : $3 \times 4{,}5 = 13{,}5$ (m2) et le prix des dalles : $13{,}5 \times 30 = 405$ (€).
Une éventuelle procédure algébrique, se base aussi sur la détermination des dimensions 6 et 9 unités et permet, comme précédemment, de calculer la mesure, en mètres, de l'unité (x) par la résolution de l'équation :
$2(9x + 6x) = 2 \times 15\,x$ => $30x = 15$ => $x = 1/2$ avant de trouver l'aire et le prix.
L'analisi a posteriore di elaborati delle sezioni di Riva del Garda, Rozzano, Sassari e Toscana Nord ha evidenziano una varietà molto ampia di procedimenti che portano alla risposta corretta a seconda delle diverse "visioni" della piastrellatura: un grande rettangolo le cui dimensioni sono 6 e 9 unità, le 27 tessere rettangolari (1 x 2), i 54 quadrati della griglia, tre allineamenti orizzontali - che danno luogo a successioni diverse delle tre operazioni: trasformazione delle unità in m o m^2, calcolo delle superfici, calcolo del prezzo. Ad esempio contare i 54 quadrati, trovare le due dimensioni del pavimento 6 e 9, passare alle misure in metri per determinare l'area di un quadrato con lato di 0,5 m poi quella dell'area del pavimento, per finire con il calcolo del prezzo.
L'analyse a posteriori des copies des sections de Riva del Garda, Rozzano, Sassari et Toscana Nord la mis en évidence qu'il y a une très grande variété de procédures qui conduisent à la réponse correcte selon les différentes « visions » du dallage : un grand rectangle dont les dimensions sont 6 et 9 unités, les 27 dalles rectangulaires (1 ×

2), les 54 carrés du quadrillage, trois alignements horizontaux - qui entraînent des successions différentes des trois opérations : transformations des unités en m ou en m^2, calcul des aires, calcul du prix. Par exemple, compter les 54 carrés, trouver les deux dimensions du dallage 6 et 9, passer aux mesures en mètres pour déterminer l'aire d'un carré de 0,5 m de côté puis celle de l'aire du dallage, pour finir par le calcul du prix.

L'interesse di un dibattito in classe sulle diverse procedure risolutive, derivanti da diverse "visioni" della pavimentazione, è quello di mostrare che tutte portano alla stessa soluzione e che si basano sugli stessi compiti e operazioni di cui differisce solo l'ordine cronologico: determinazione delle dimensioni o dell'area dei quadrati della griglia in unità comuni, conversione di queste unità in metri o metri quadrati, calcolo dell'area e del prezzo.

Tuttavia, ci sono conoscenze più basilari da osservare che riguardano le relazioni tra perimetro e area. Una pavimentazione di 15 metri di perimetro potrebbe dare aree diverse a seconda della disposizione delle mattonelle che la compongono. Scegliendo una pavimentazione a griglia (tutte le mattonelle del pavimento sono quadrate) con un perimetro di 15 metri, possiamo chiederci quali potrebbero essere le aree di questa pavimentazione, dalla più piccola alla più grande.

Più in generale possiamo passare ad un rettangolo senza griglia, e chiederci, per un dato perimetro, quale potrebbe essere l'area del rettangolo. Questo è un problema essenziale da risolvere con misurazioni che non siano più numeri di... (aree o lati dei quadrati) ma numeri reali. Ci avviciniamo così al passaggio dalle quantità discrete alle quantità continue, dai numeri interi ai numeri reali.

L'intérêt d'un débat en classe sur les différentes procédures de résolution, issues de « visions » différentes du pavage est de faire constater qu'elles conduisent toutes à la même solution et qu'elles reposent sur les mêmes tâches et opérations dont seule l'ordre chronologique diffère : détermination des dimensions ou de l'aire des carrés du quadrillage en unités communes, conversion de ces unités en mètres ou mètres carrés, calcul de l'aire et du prix.

Il y a cependant un savoir plus fondamental à relever qui concerne les liens entre périmètre et aire. Un pavage de 15 mètres de périmètre pourrait conduire à des aires différentes selon la disposition des pavés qui le composent. En choisissant un pavage en quadrillage (dont tous les pavés sont carrés) de 15 mètres de périmètre, on peut se demander quelles pourraient être les aires de ce pavage, de la plus petite à la plus grande.

Plus généralement on peut passer à un rectangle sans quadrillage, et se demander, pour un périmètre déterminé, quelle pourrait être l'aire du rectangle. Il s'agit là d'un problème essentiel à résoudre avec des mesures qui ne sont plus des nombres de … (aires ou côtés de carrés) mais des nombres réels. On aborde ainsi le passage des grandeurs discrètes aux grandeurs continues, des nombres entiers aux nombres réels.

3. Distanze e altezze

Come ben sappiamo, il concetto di "altezza" è legato a quello che chiamiamo "altezza" di un triangolo, di un trapezio, di un parallelogramma, di un rettangolo e, nel nostro spazio tridimensionale quotidiano, l'elevazione rispetto a un piano orizzontale. Si tratta, in questi contesti, di "distanza" da un punto a una retta, a volte tra due rette o da un punto a un piano.

Nei problemi del RMT incontriamo la parola "distanza" tra due punti o, più in generale, tra due luoghi come misura di un percorso.

Gli allievi, come le analisi a posteriori di elaborati ci hanno mostrato e come gli insegnanti osservano spesso, incontrano ostacoli legati a entrambi i concetti di altezza e distanza.

3.1. Proposta di percorso per la problematica distanze e altezze

Anche in questo caso si è pensato che si potrebbe suggerire un percorso che tenga conto di diverse fasi:

- **Prima fase** introduzione al concetto di distanza tra due punti

L'idea è quella di proporre un'attività ludica che stimoli gli allievi a riflettere sul concetto di distanza. L'attività si potrebbe svolgere in giardino o in classe, gli allievi lavoreranno a coppie muniti di corde, spaghi, bastoncini e confronteranno alcune distanze con e senza ostacolo. Si chiederà loro di verbalizzare l'esperienza e si discuterà sul concetto di distanza tra due punti.

Quest'attività è stata effettivamente svolta nella sua classe di categoria 6 da Paola Bajorko.

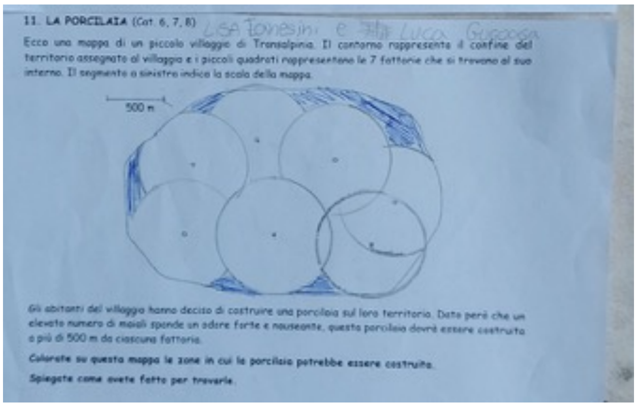
Paola ha posizionate a terra, in modo casuale delle corde lunghe tutte 2 metri in modo da formare delle linee curve e ha chiesto agli allievi di posizionarsi a coppie agli estremi delle corde. Ad ogni coppia, potendo modificare la disposizione della corda, ha chiesto come potevano allontanarsi rimanendo agli estremi della corda. Gli allievi hanno sperimentato concretamente e poi ogni coppia ha verbalizzato le conclusioni; hanno tutti capito che dovevano disporre in modo rettilineo la corda, perché così la distanza tra loro diventava massima. Nel corso della sperimentazione, in modo spontaneo un alunno, Davide C., ha cominciato a girare su se stesso, tenendo con la mano una estremità della corda; quando Paola ha chiesto cosa avesse capito da questo gioco, ha risposto che la compagna, per non essere presa dalla corda, doveva disporsi ad una distanza maggiore della lunghezza della corda.

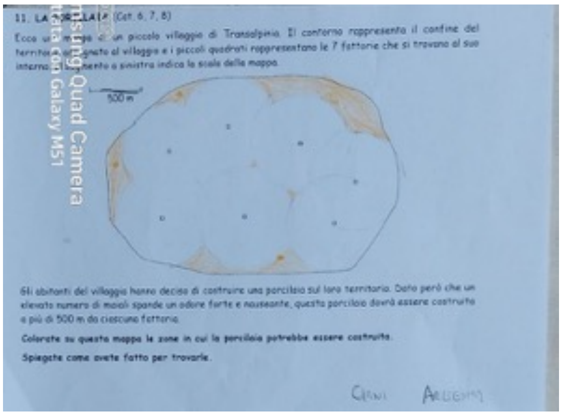
La circonferenza è "entrata in modo spontaneo" nell'attività in corso.

È stata sistemata un'estremità di ogni corda (rettilinea) dove si trovava Davide, e gli allievi si sono posizionati, in circolo, alle altre estremità delle corde.

Le domande che scaturiscono da una tale configurazione possono portare, in maniera pratica, a trovare che Davide, dal quale gli altri allievi hanno tutti la medesima distanza, è sistemato al centro di una circonferenza, il cui raggio è individuato da ogni corda.
Si rientra in classe e… come rappresentare la situazione sul foglio? Entra in gioco il compasso.

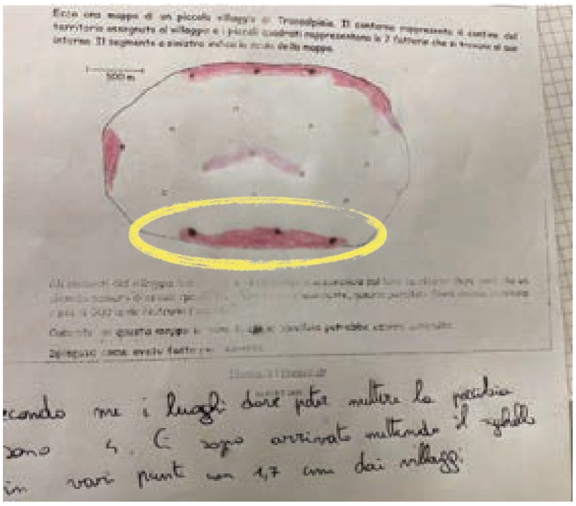
- **Seconda fase**: distanza tra due punti
Si propone alla classe il problema "La porcilaia (cat. 6-8) 24.II.11 La scelta di questo problema mira a condurre gli allievi a capire che si può fare una lista ordinata di distanze tra due punti, anche utilizzando il compasso, prima di misurarle.
L'attività di Paola, nella sua classe di categoria 6, è proseguita attraverso l'utilizzazione didattica di diversi problemi RMT, a partire proprio dal problema in oggetto.
Gli allievi hanno lavorato a coppie, in maniera autonoma. Tutti hanno utilizzato il compasso per tracciare le 7 circonferenze.
Tutti hanno colorato le zone esterne; una coppia ha colorato 5 zone esterne e due coppie hanno anche colorato 2 zone interne per mancanza di precisione nell'utilizzo del compasso e nell'apertura di tale strumento. Questi errori hanno suggerito a Paola di fare in classe altri esercizi legati all'utilizzo del compasso.

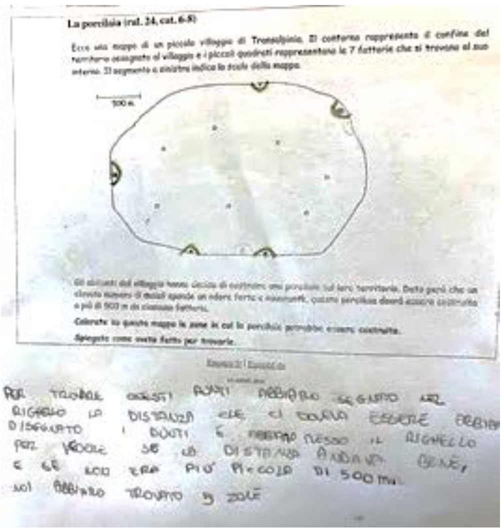




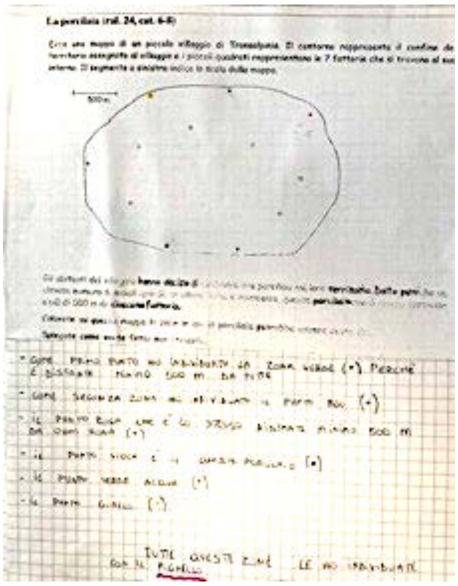
Luciana Rapposelli lo ha proposto, da parte sua, in due seconde (cat. 7) e in una prima (cat. 6) della scuola secondaria di primo grado, è stato dato agli allievi di seconda seguendo la modalità di somministrazione della gara del rally matematico: gli allievi si sono riuniti in piccoli gruppi e hanno provato a risolvere il problema.

Qui sotto figurano alcune delle soluzioni.



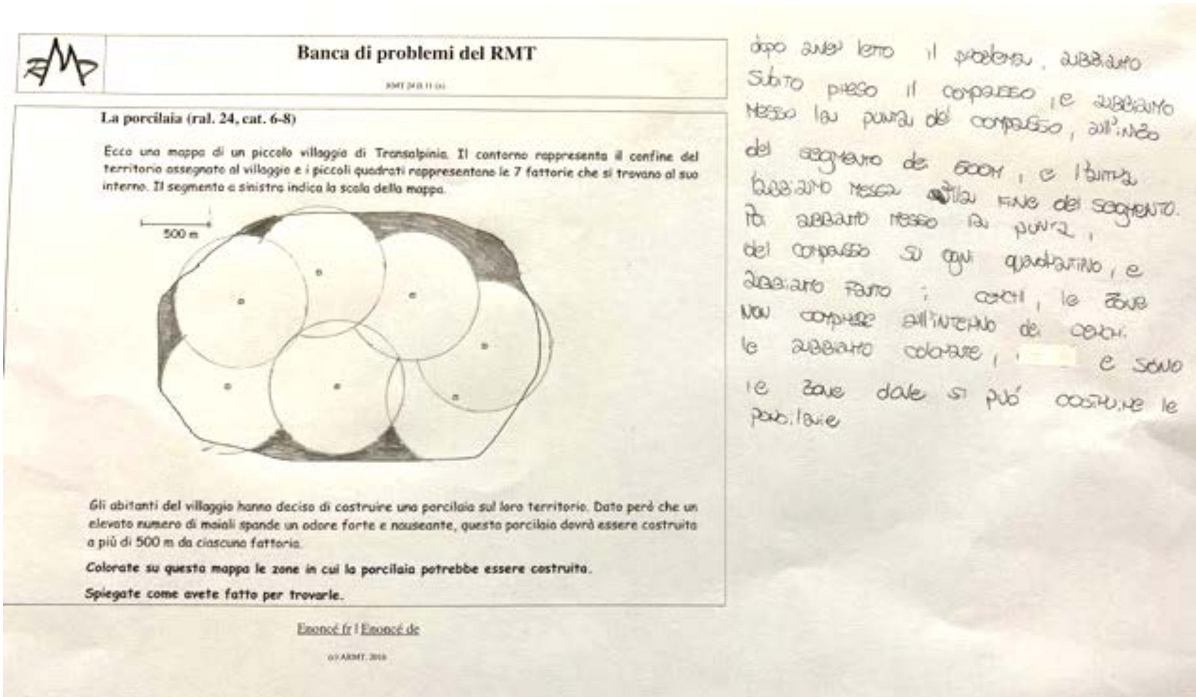


la maggioranza dei gruppi ha utilizzato il righello per poter individuare le zone nelle quali poter posizionare la porcilaia. Le aree evidenziate dagli allievi sono simili come posizione a quelle esatte ma manca la precisione data dell'utilizzo dello strumento di misurazione più adatto. In alcuni casi sono stati individuati dei punti distanti 500 m e poi uniti da delle linee per formare delle zone:



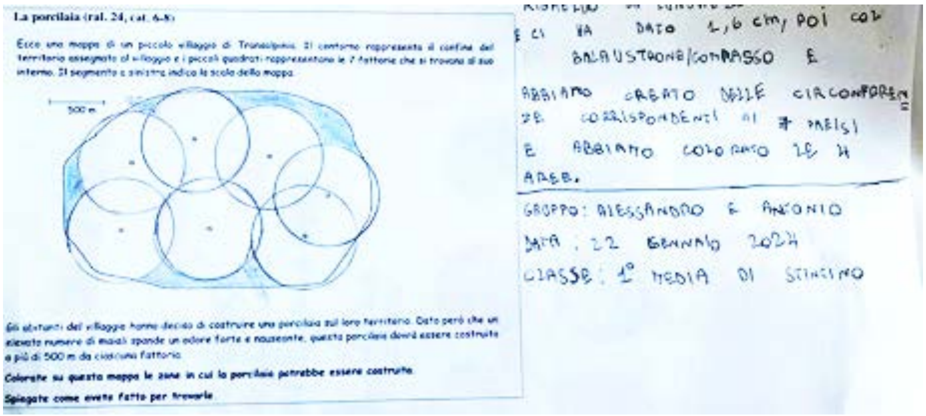
In questo caso il gruppo ha utilizzato il righello ma ha individuato dei punti che sono in corrispondenza delle zone esatte ma forse non è stato letto e compreso bene il problema ed è stato confuso il concetto di zona con quello di punto.

Nel caso seguente il gruppo ha individuato immediatamente nel compasso lo strumento più adatto per la risoluzione del problema e l'individuazione delle zone, come spiegato chiaramente dagli allievi



Il problema è stato dato alla classe prima ma dopo aver effettuato un percorso didattico di gioco sul piano cartesiano con circonferenze e poi una caccia al tesoro su mappa da risolvere con diversi strumenti tra i quali il compasso. Come si può vedere dalle soluzioni, gli alunni hanno affrontato il problema con maggior sicurezza, utilizzando il compasso come strumento per misurare e poter individuare le aree in maniera più precisa..

Rosanna Sanna ha proposto tale problema in una classe di categoria 6 nell'ambito di un percorso programmato avente lo scopo di portare gli allievi ad acquisire un corretto concetto di distanza e altezza. L'esperienza e i risultati



relativi ai problemi del Rally matematico transalpino hanno evidenziato infatti difficoltà nel riconoscere, rappresentare e applicare correttamente altezze.

- La classe in oggetto è formata da 18 alunni di cui 12 presentano grosse problematicità sia in ambito didattico che nella sfera personale e di relazione.
- Carenti le capacità di osservazione, di manipolazione e di lavoro autonomo. Grandi difficoltà nella comprensione di un testo.
- Nota positiva! Sono disponibili al lavoro..

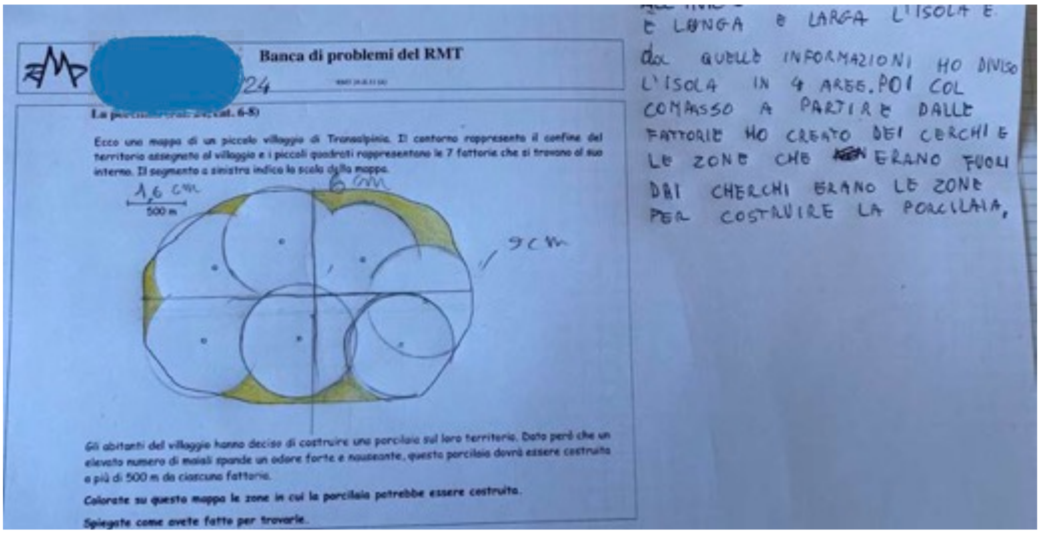
Senza alcuna attività preliminare si propone agli allievi il problema dopo avere suddiviso la classe in 4 gruppi (4 alunni assenti + 1 alunna diversamente abile che non partecipa alla risoluzione del problema).

Comprensione del testo

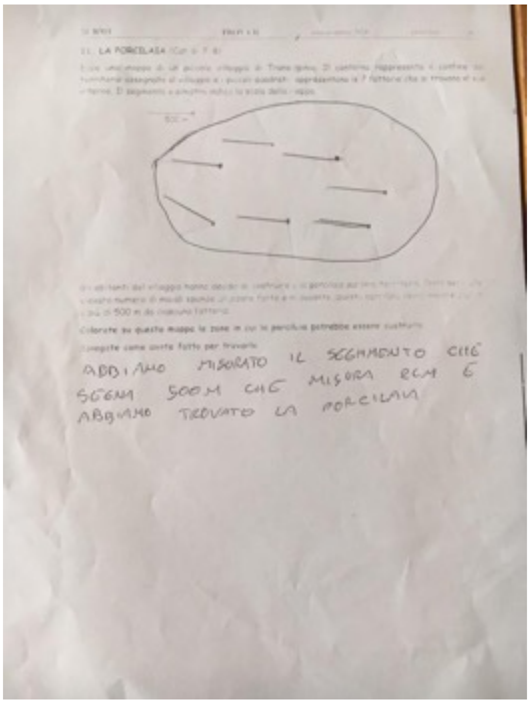
- 2 gruppi non hanno chiesto nessuna spiegazione relativa al testo
- Per gli altri 2 gruppi è stato richiesto l'intervento dell'insegnante per alcuni chiarimenti riferiti al testo (spiegazione semplificata di ciò che chiedeva il problema).

Procedure risolutive seguite

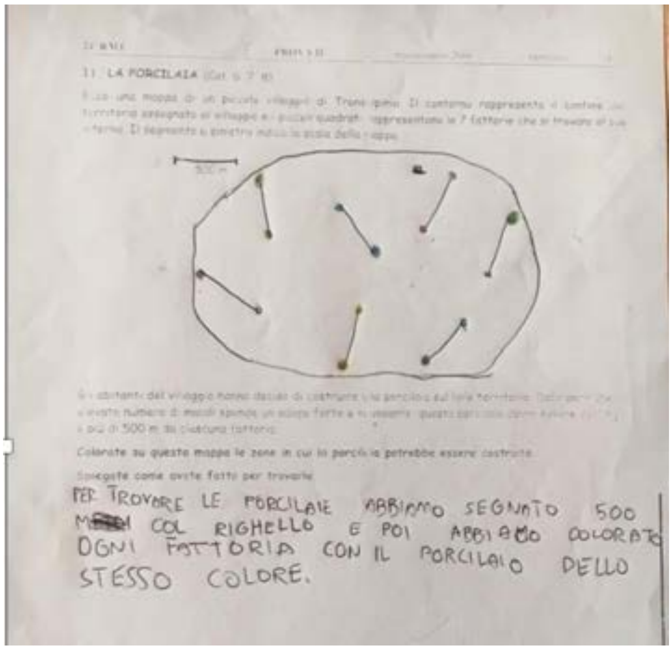
Tutti gli allievi (13/13) trasformano il segmento indicante la scala della mappa in cm e riportano tale distanza a partire da ciascuna fattoria.



a) 4 allievi disegnano sulla mappa un unico segmento (corrispondente alla scala) a partire da ciascuna fattoria e non individuano le zone o i punti in cui la porcilaia potrebbe essere costruita. Durante la condivisione spiegano che per loro la porcilaia si trova sull'altro estremo del segmento. Non capiscono che per trovare le zone in cui si deve costruire la porcilaia occorre trovare più punti che distano dalle fattorie una distanza maggiore della distanza assegnata.

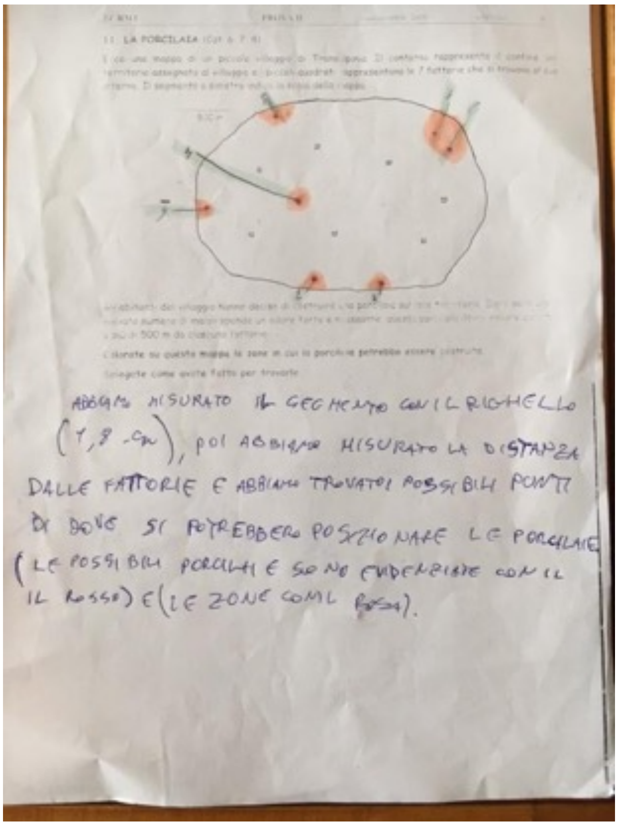


b) 3 allievi disegnano sulla mappa un unico segmento (corrispondente alla scala) a partire da ciascuna fattoria e indicano l'estremo del segmento come possibile posizione della porcilaia.

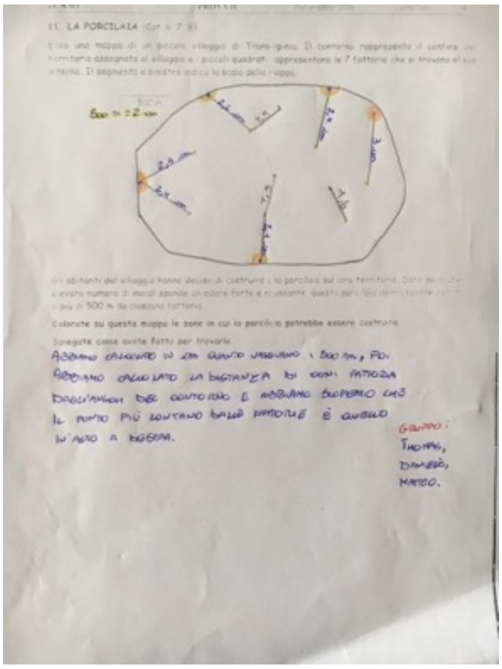


In questi due casi è mancata la comprensione del problema che richiede che la porcilaia debba essere a più di 500 m da ciascuna fattoria, mentre nei due casi che seguono gli allievi hanno mostrato di essersi appropriati del problema stesso benché poi abbaino incontrato qualche difficoltà o non hanno concluso.

c. 3 allievi colorano sulla mappa le zone in cui potrebbe essere costruita la porcilaia e in ciascuna zona indicano dei punti in cui si potrebbe localizzare la porcilaia. Questi punti si trovano però ad una distanza uguale alla distanza assegnata e alcuni punti ad una distanza minore. Solo 1 punto si trova ad una distanza maggiore rispetto alla distanza assegnata. Le aree individuate sono approssimate e ricadono ad una distanza inferiore a quella assegnata.



d. 3 allievi disegnano sulla mappa alcuni segmenti a partire da ciascuna fattoria, alcuni di lunghezza inferiore alla scala e altri di lunghezza superiore. Questi segmenti, nella maggior parte dei casi, hanno direzione dalla fattoria verso il confine della mappa. Gli allievi riconoscono come luogo in cui può essere costruita la porcilaia gli estremi dei segmenti che hanno lunghezza maggiore di 500 m da ciascuna fattoria. Tra i 5 punti individuati, quattro sono corretti. Nella spiegazione non è presente la risposta alla domanda posta dal problema.



A questo punto diventa importante un dibattito tra i gruppi prima di proporre altri problemi su distanze e altezze. Per confrontare distanze potrebbe essere costruttivo proporre Romeo e Giulietta (cat. 4-5) 16.I.06 e Attraverso la quadrettatura (cat. 5-6-7) 08.II.08. Questi problemi mirano a stimolare gli allievi a riflettere sul confronto tra lunghezze (lato e diagonale di quadretto[15]).

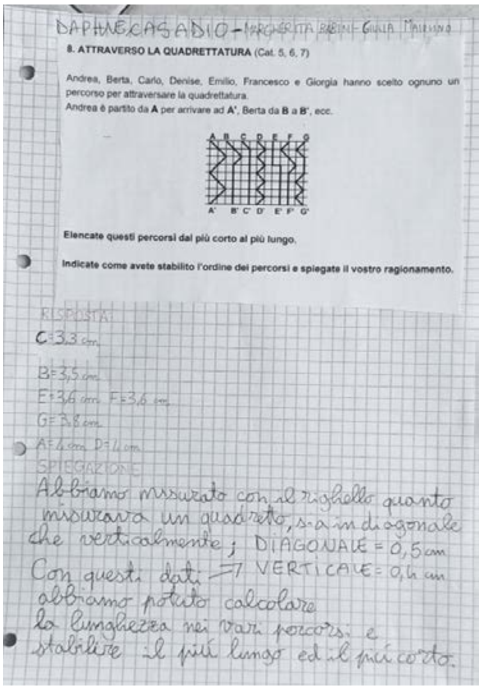
Torniamo con Paola nella sua classe

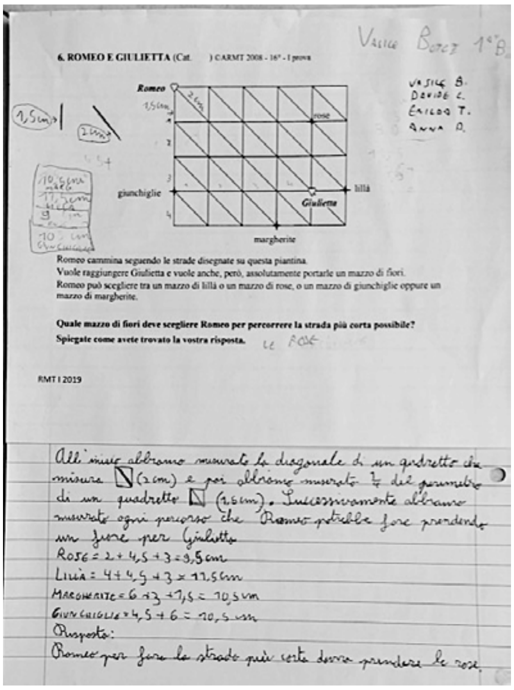
Paola, sempre nella sua classe di categoria 6, propone ad alcuni gruppi il primo di tali problemi e ad altri gruppi il secondo.

---

[15] Si veda la proposta del medesimo problema nel paragrafo "Misure e approssimazione".

I gruppi che hanno lavorato sul secondo problema hanno risposto in modo errato; utilizzando il righello, hanno fatto misure approssimate, ottenendo somme non corrette. I gruppi che hanno lavorato sul primo problema, pur lavorando prendendo le misure dei segmenti, hanno risposto correttamente (probabilmente perché lato e diagonale del quadretto differivano maggiormente come misura).





Dopo un confronto fra i gruppi, sembra che tutti abbiano capito che la diagonale del quadretto è più lunga del lato del quadretto. Nel dibattito si è anche discusso sulla necessità o meno, della conoscenza delle misure per mettere a confronto i percorsi.

La terza fase con la classe si Paola: distanza tra un punto e una retta; distanza tra due rette parallele

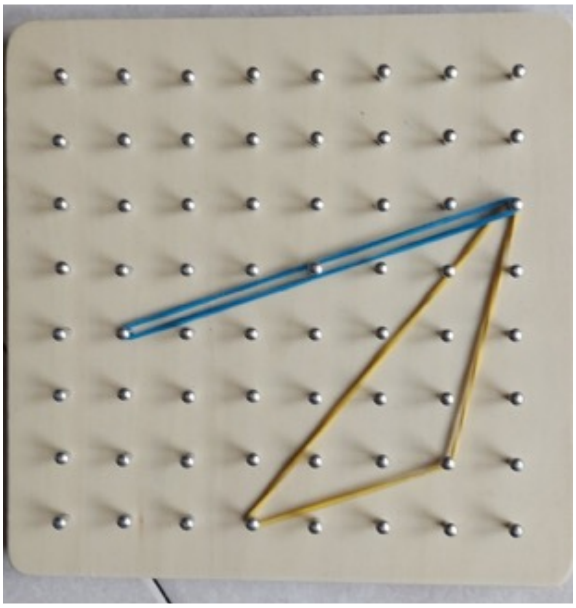
a) Si ritorna in giardino. Paola chiede agli allievi di disporsi uno accanto all'altro "in faccia" all'entrata della scuola, a una certa distanza da essa. "Chi farà il percorso più corto per entrare seguendo un percorso rettilineo?" Gli allievi fanno ricorso a corde, stese in modo "rettilineo". L'allievo posto veramente di fronte all'entrata è quello che fa il percorso più corto dichiarano tutti. Gli allievi dispongono per terra una corda di fronte a lui. Com'è la corda rispetto alla "retta sulla quale erano disposti in faccia" all'entrata?". Discussione per arrivare a stabilire che ha una posizione diversa dalle altre: è quella perpendicolare all'entrata. In classe sono stati fatti esercizi sulla distanza di un punto da una retta, ricordando l'esperienza vissuta in giardino.

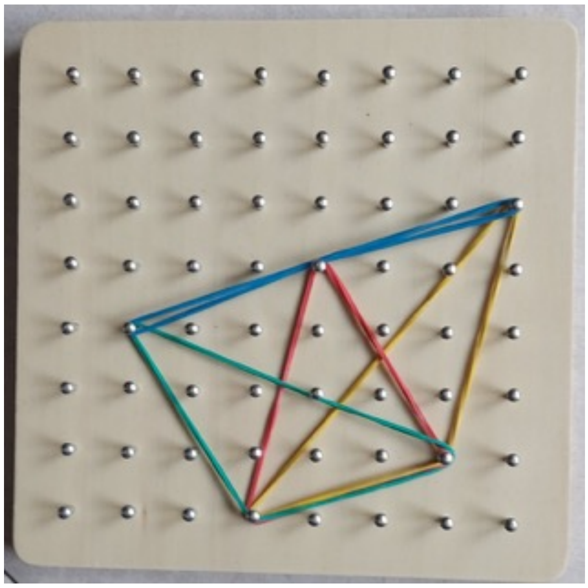
b) E la distanza tra due rette parallele? Tornati in classe, diversi allievi hanno capito e hanno disegnato un segmento perpendicolare alle rette L'immagine di una scala a pioli proposta da Paola alla Lim ha permesso a tutti di visualizzare il parallelismo tra i montanti e la distanza tra due di essi data dai pioli. Un primo passo!

c) Paola prende spunto dal problema Triangoli sul geopiano (27.I.18 cat.8-9-10) per riprodurre su un effettivo geopiano il triangolo proposto.

Sul geopiano Paola ha posizionato un elastico giallo per riprodurre il triangolo del problema. Ha anche posizionato un elastico blu rappresentante una retta parallela alla retta a cui appartiene la base del triangolo. Gli allievi sono stati liberi di sperimentare, anche sul quaderno, lavorando insieme o singolarmente, riproducendo il geopiano con punti (i chiodi) distanti un centimetro orizzontalmente e verticalmente. Sono allievi di categoria 6 e Paola ha pensato, in questo caso, di proporre un'attività guidata. Ha fatto notare che l'altezza doveva rimanere costante, dato che rimaneva costante la misura della base. Ha suggerito di pensare all'altezza del triangolo come distanza da un punto (vertice del triangolo) a una retta (quella a cui appartiene la base del triangolo).

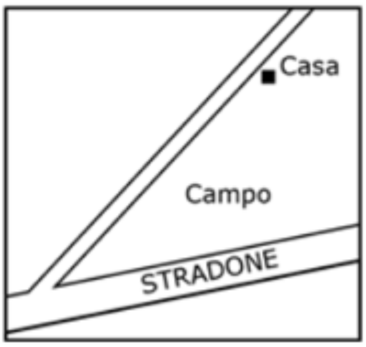
Alcuni alunni sono riusciti a individuare i vertici di altri triangoli. Per spiegare ai compagni hanno lavorato sul geopiano e, utilizzando due elastici, hanno posizionato i due nuovi triangoli.





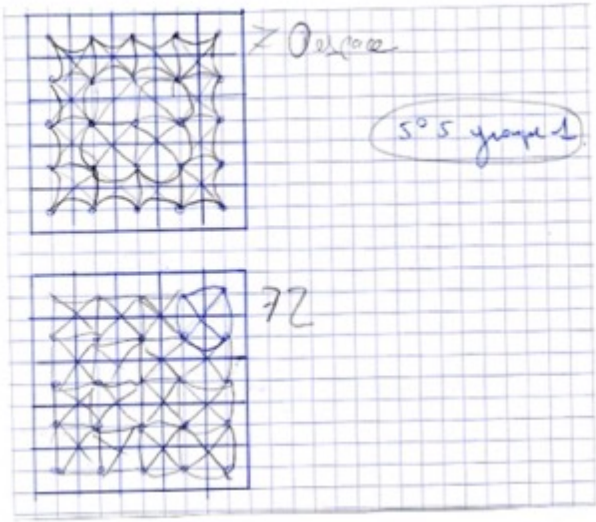
La quarta fase con la classe si Paola: costruire e utilizzare altezze per risolvere problemi relativi al triangolo.
I triangoli costruiti con il geopiano sono stati l'occasione per introdurre la nozione di altezza di triangoli. Gli allievi hanno ragionato sul quaderno, riproducendo la figura del problema "triangoli sul geopiano" e con l'apporto della squadretta hanno tracciato l'altezza del triangolo rosso acutangolo. Sono stati guidati nel tracciare le altezze dei triangoli ottusangoli, ricordando loro la situazione della scala a pioli.
È stato poi proposto il problema L'orto (I) (26.II.12 cat. 6-7-8).
Gli allievi hanno capito che l'altezza dei 2 triangoli rimaneva costante, ma alcuni hanno avuto difficoltà nel comprendere che la misura della base doveva essere divisa in due parti, una il doppio dell'altra. Questo ha suggerito a Paola di fare esercizi sulle relazioni tra segmenti.
E infine Paola ha chiesto agli allievi di svolgere, singolarmente, l'esercizio seguente:

"Osserva l'immagine:
disegna un sentiero che parte dalla casa e arriva perpendicolare allo stradone passando attraverso il campo."



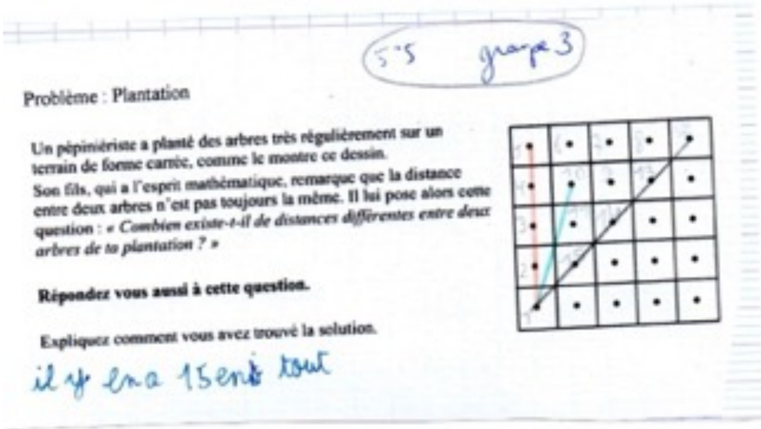
Su 25 allievi, 15 hanno risposto correttamente. C'è ovviamente ancora da lavorare su questa non semplice problematica, ma l'intera attività ha certamente portato i suoi frutti.
In effetti, gli allievi di Paola, ma di categoria 7, che non avevano fatto un'attività di questo tipo, basata su problemi RMT, laddove è stato loro proposto il medesimo esercizio, nel complesso si sono trovati a disagio e solo 8 allievi su 23 hanno risposto correttamente.
Il problema A quale distanza? (cat. 7-8) 12.II.14 potrebbe permettere agli allievi di comprendere che le "distanze" menzionate nell'enunciato si misurano tra due punti in "linea retta" e che si tratterà di confrontare le lunghezze dei segmenti tra due punti sul disegno. Anche in questo problema si potranno confrontare le distanze mediante l'utilizzo del compasso. Ipotesi di sperimentazione in classe: dopo qualche minuto di ricerca individuale o in gruppo, una messa in comune permetterà a tutti di appropriarsi del compito: percepire le "distanze"/"lunghezze di segmenti" ed eliminare i segmenti congruenti partendo da un punto fisso. Se si considerano i segmenti come diagonali di rettangoli, il confronto delle lunghezze di due segmenti "vicini" (o diagonali di due rettangoli aventi la medesima larghezza) si può fare per deduzione.
La descrizione di una sperimentazione è proposta da Florence Falguères:

2 classes de 5e (Catégorie 7) ont participé à cette expérimentation.
Les élèves ont organisé leur groupe librement (seule consigne : groupes de 4 maxi)
Contrairement aux conditions habituelles d'une épreuve,
Dans la 1re classe j'ai lu à voix haute l'énoncé en insistant sur « la distance entre deux arbres n'est pas toujours la même »… « Combien existe-t-il de distances différentes entre deux arbres de la plantation ? ». Il semble que cela n'ait pas suffit à la compréhension du problème car beaucoup d'élèves ont supposé que l'on s'intéressait à la distance entre 2 arbres qui se suivaient, soit à l'horizontal, soit à la verticale, soit en diagonale.
Sur 7 copies 5 présentent une incompréhension du problème[16] (voir copie 5e5 groupe 1.



Parmi les 2 autres :

- Une copie qui présente un raisonnement juste mais l'erreur vient dans le décompte du nombre de distances différentes. Les arbres placés à des distances différentes d'un arbre de départ sont numérotés, ce qui pourrait convenir si l'élève n'avait pas affecté le numéro 1 à l'arbre de départ. Voir copie ci-jointe 5e5 groupe 3.


5°5 groupe 3

Problème : Plantation

Un pépiniériste a planté des arbres très régulièrement sur un terrain de forme carrée, comme le montre ce dessin.
Son fils, qui a l'esprit mathématique, remarque que la distance entre deux arbres n'est pas toujours la même. Il lui pose alors cette question : « *Combien existe-t-il de distances différentes entre deux arbres de la plantation ?* »

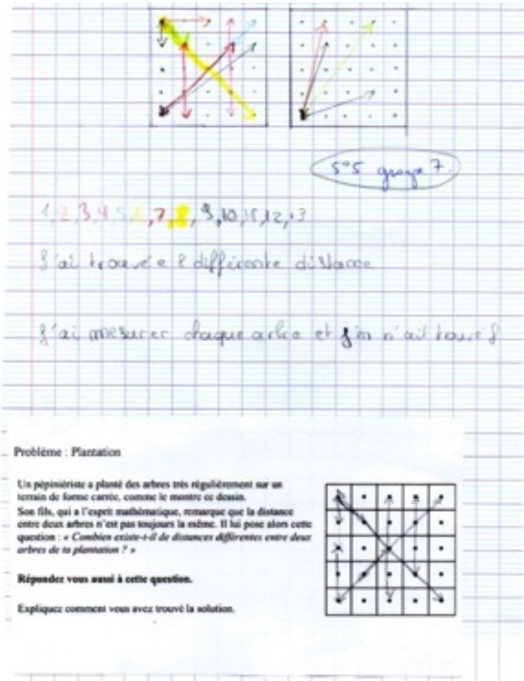
Répondez vous aussi à cette question.

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

il y en a 15en tout

- Sur la 2e copie, la recherche n'est pas assez bien organisée pour obtenir le bon nombre de distances différentes ou l'erreur est due à une imprécision dans les mesures. Voir copie ci-jointe 5e5 groupe 7.

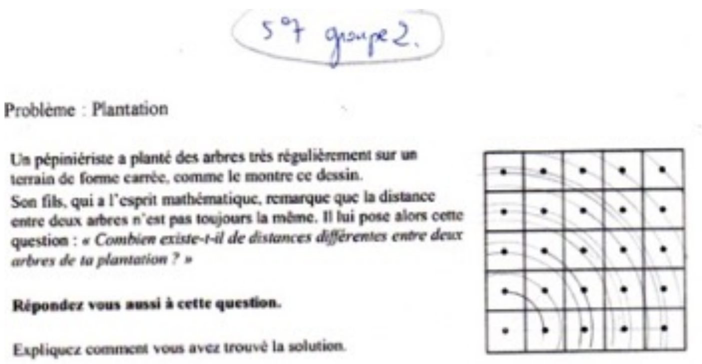
[16] j'ai renommé le problème « Plantation » car « combien de distances ? » me semblait un titre un peu énigmatique en français.



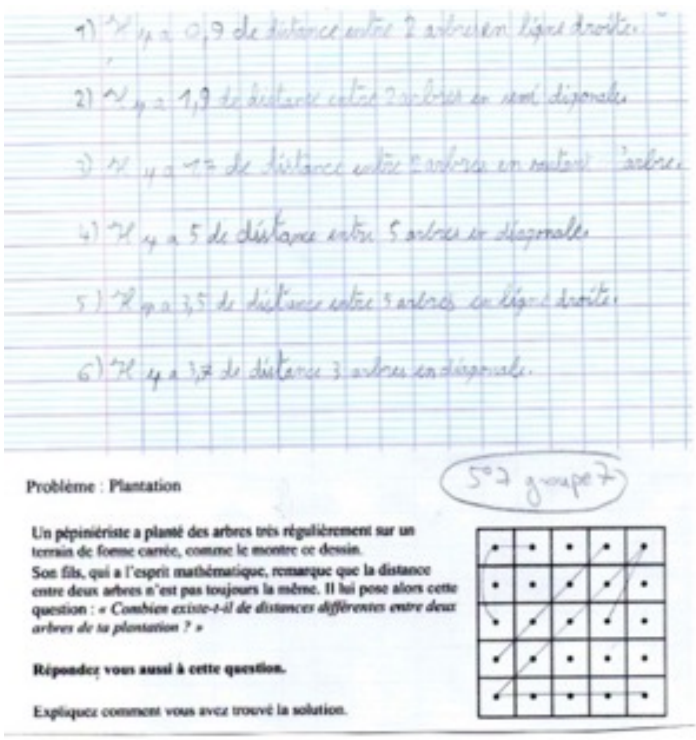
Dans la 2e classe, j'ai lu la consigne **et** j'ai vidéoprojeté l'énoncé, j'ai montré un exemple de distance entre 2 arbres non consécutifs et non disposés sur une ligne verticale ou horizontale ou diagonale.
Sur les 7 copies :

- Une copie montre une incompréhension de la situation avec la réponse 24 distances différentes (voir copie ci-jointe 5^{e}7 groupe 3)

- Une copie montre l'utilisation du compas mais une erreur dans la précision des tracés amène le groupe à donner comme réponse 13 distances différentes (voir copie ci-jointe 5^{e}7 groupe 2)



- 4 groupes n'ont pas assez bien organisé leur recherche et n'ont pas trouvé toutes les possibilités, avec une difficulté évidente à sortir de l'horizontale, la verticale et la diagonale pour une copie (voir copie ci-jointe 5^{e}7 groupe 7)


1) Il y a 0,9 de distance entre 2 arbres en ligne droite.
2) Il y a 1,9 de distance entre 2 arbres en semi diagonale.
3) Il y a 1,7 de distance entre 2 arbres en sautant 1 arbre.
4) Il y a 5 de distance entre 5 arbres en diagonale.
5) Il y a 3,5 de distance entre 5 arbres en ligne droite.
6) Il y a 3,7 de distance 3 arbres en diagonale.

Problème : Plantation

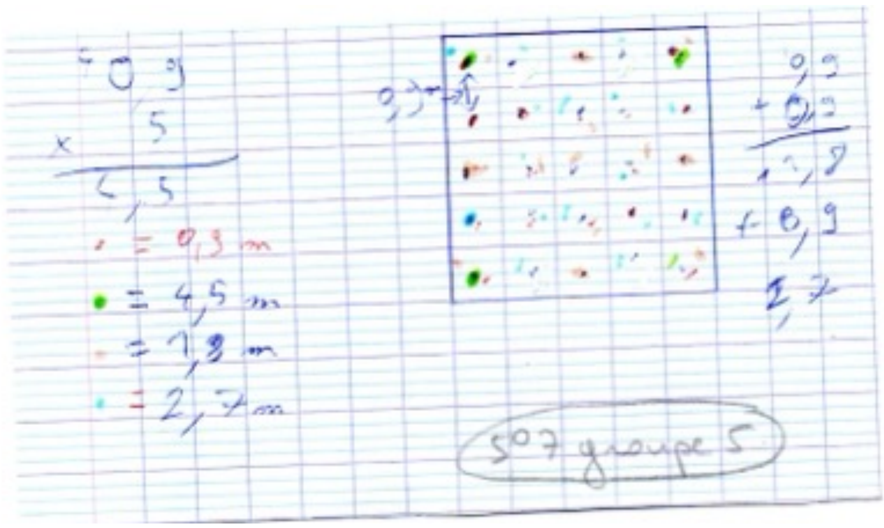
5°7 groupe 7

Un pépiniériste a planté des arbres très régulièrement sur un terrain de forme carrée, comme le montre ce dessin.
Son fils, qui a l'esprit mathématique, remarque que la distance entre deux arbres n'est pas toujours la même. Il lui pose alors cette question : « *Combien existe-t-il de distances différentes entre deux arbres de sa plantation ?* »

Répondez vous aussi à cette question.

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

- Une autre copie présente un raisonnement pas assez détaillé et clair (voir copie ci-jointe 5e7 groupe 5) pour pouvoir être analysé.



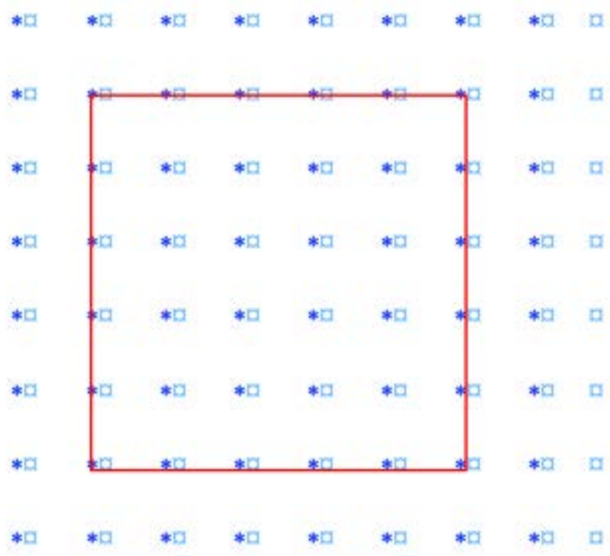
En conclusion,
- L'énoncé gagnerait à être légèrement modifié ou clarifié à l'aide d'un exemple.
- Les élèves n'ont que très peu recours au compas qui apparait pourtant comme un instrument intéressant dans cette situation.
- Organiser une recherche ne semble pas habituel pour eux et ils manquent de méthodologie.

François Jaquet propone qui di seguito la sua analisi del problema "A quale distanza":

Le problème date du 12e RMT, (12.II.14) ; la rédaction de la fiche est postérieure, de quelques années disons qu'elle a été écrite il y a environ 15 ans, après regroupement de 276 copies de 5 sections. On y lit sous « Procédures, obstacles et erreurs relevés » : *On ne dispose pas d'analyse a posteriori des copies de ce problème mais on peut aisément imaginer que les pourcentages élevés d'insuccès sont dus à des difficultés d'appropriation de la situation.* La fiche correspondante de la Banque, dans sa rubrique « Exploitations didactiques » dit ceci : *Malgré les moyennes basses obtenues dans les conditions de passation de l'épreuve, on se rend compte que la situation proposée par l'énoncé peut être largement exploitée en classe* puis donne quelques idées d'activités à propos de diagonales de rectangles et de carrés construits sur ces diagonales.

Nous sommes en 2024, Florence nous communique les résultats d'une pratique de ce problème dans deux classes, qui confirment ce que nous supposions à la lecture des résultats d'il y a 20 ans.
Il problema risale al 12° RMT, (12.II.14) la stesura della scheda è successiva, di qualche anno, diciamo che è stata redatta circa 15 anni fa, dopo aver raggruppato 276 elaborati di 5 sezioni. Nella rubrica "Procedure, ostacoli ed errori rilevati" si legge: *Non abbiamo un'analisi a posteriori degli elaborati di questo problema ma possiamo facilmente immaginare che le alte percentuali di insuccessi siano dovute a difficoltà nell'appropriarsi della situazione.*
La rubrica "Indicazioni didattiche" riporta quanto segue: *Nonostante le medie basse ottenute nelle condizioni di svolgimento della prova, ci rendiamo conto che la situazione proposta dall'enunciato può essere ampiamente utilizzata in classe* quindi fornisce alcuni spunti per attività su diagonali di rettangoli e quadrati costruiti su queste diagonali.
Siamo nel 2024, Florence ci comunica i risultati di un'attività con questo problema in due classi, che confermano quanto ipotizzavamo leggendo i risultati di 20 anni fa.
On se met à la place de l'enseignant qui propose le problème « Combien de distances » à sa classe, par groupes, suivi d'une discussion et de ce qu'on peut appeler « institutionnalisation ». Dans cette dernière phase, on peut imaginer que le concept de « distance » s'est étendu aux arbres qui ne sont pas sur la même ligne ou la même colonne ; que l'usage du compas et son efficacité a été perçue et que les élèves ont compris la nécessité d'un inventaire systématique pour arriver aux 14 distances cherchées.
On ne peut - ou même on ne doit pas - s'arrêter là ! Le dénombrement a abouti à la réponse 14, toute la classe l'admet, cependant la discussion ne nous garantit pas que le concept de « distance » en géométrie a été « construit » ou « reconstruit » ou encore « enrichi » par les élèves. Ne nous faisons pas d'illusion, la phase d'institutionnalisation (ou la « leçon ») de quelques dizaines de minutes ne peut pas avoir fait évoluer sensiblement ce concept. Il reste, pour une majorité d'élèves, au statut de la « distance » dans son acception commune, se rapportant à leurs déplacements, à leurs jeux, à l'éloignement de personnes ou d'objets… et l'**É**cole ne voit pas la nécessité d'introduire dans ses programmes une notion aussi évidente et naturelle.
C'est le RMT qui a fait découvrir cette nécessité par l'observation de productions d'élèves.
Mettiamoci nei panni dell'insegnante che propone alla sua classe, in gruppi, il problema "A quale distanza", seguito da una discussione e da quella che possiamo chiamare "istituzionalizzazione". In quest'ultima fase possiamo immaginare che il concetto di "distanza" si sia esteso agli alberi che non si trovano sulla stessa fila o sulla stessa colonna; che l'uso del compasso e la sua efficacia siano stati percepiti e che gli allievi abbiano compreso la necessità di un inventario sistematico per arrivare alle 14 distanze cercate.
Non possiamo – e non dobbiamo – fermarci qui! Il conteggio ha dato come risultato la risposta 14, tutta la classe lo ammette, tuttavia la discussione non ci garantisce che il concetto di "distanza" in geometria sia stato "costruito" o "ricostruito" o addirittura "arricchito" dagli allievi. Non facciamoci illusioni, la fase di istituzionalizzazione (o "lezione") di poche decine di minuti non può aver cambiato significativamente questo concetto. Per la maggior parte degli allievi, rimane lo status di "distanza" nel senso comune, relativo ai loro movimenti, ai loro giochi, alla distanza di persone o oggetti... e la Scuola non vede la necessità di introdurre una misura così ovvia e nozione naturale nei suoi programmi.
È il RMT che ha portato alla luce questa necessità tramite l'osservazione degli elaborati degli allievi.
C'est ici que l'enseignant doit imaginer une activité de **structuration**, phase qui suit la résolution d'un problème du RMT en classe (après les phases de recherche, débat et institutionnalisation). On peut donner d'autres noms que « structuration » à cette phase qui va durer beaucoup plus longtemps que les premières et permettra à l'élève de mettre en pratique, de consolider, d'entraîner les savoirs abordés ou renforcés précédemment ou simplement « d'étudier ». L'enseignant retrouve sa fonction plus « habituelle » de sa profession : gestionnaire et animateur d'une activité de classe : il intervient sous des modes divers : ex-cathedra, conseiller, aides individuelles ou par groupes, guide …
È qui che l'insegnante deve immaginare un'attività di **strutturazione,** fase che segue la risoluzione di un problema RMT in classe (dopo le fasi di ricerca, dibattito e istituzionalizzazione). Possiamo dare nomi diversi da "strutturazione" a questa fase che durerà molto più a lungo della prima e permetterà all'allievo di mettere in pratica, consolidare, allenare le conoscenze abbordate o rafforzate in precedenza o semplicemente "di studiare".
L'insegnante ritorna alla sua funzione più "consueta" della sua professione: gestore e facilitatore di un'attività di classe: intervenendo in varie modalità: ex-cathedra, consulente, aiuto individuale o di gruppo, guida, ecc.
On se remet dans la peau de l'enseignant que j'étais il y a bien longtemps et j'essaie d'imaginer ce que je ferais avec ma classe après la résolution du problème : **une étude des distances entre deux points** de coordonnées entières (« planche à clous » d'un réseau de 6 × 6 (comme dans le problème, mais sans le dessin du quadrillage et un peu plus grand que 5 × 5 pour le plaisir égoïste de voir apparaître un triplet très intéressant).
Matériel : une planche à clous et des élastiques, qui devraient faire partie du « matériel de classe de mathématiques », de catégories 1 à 11 », feuilles quadrillées et/ou réseau ci-dessous, règle, crayon, gomme, téléphone portable. (Calculatrice avec une touche √ ou références à un Grec célèbre, de Samos, du VIe av. JC sont rigoureusement interdites.)
Rimettiamoci nei panni dell'insegnante e proviamo a immaginare cosa avremmo fatto con la nostra classe dopo aver risolto il problema: uno studio delle distanze tra due punti di coordinate intere ("geopiano" di una rete di 6 ´

6 (come nel problema, ma senza il disegno della griglia e poco più grande di 5 ´ 5 per il piacere egoistico di veder comparire una terna molto interessante).
Materiale: un geopiano ed elastici, che dovrebbero far parte dei "materiali per l'attività di matematica in classe", categorie da 1 a 11", fogli a quadretti e/o griglia a punti sottostante, righello, matita, gomma, telefono cellulare. (Sono severamente vietate le calcolatrici con il tasto √ o i riferimenti ad un famoso greco, di Samo, del VI secolo a.C.)



Buts de l'activité :

- passer du dénombrement de distances différentes entre deux clous à leurs comparaisons, puis à leur mesure,
- déterminer les relations entre la mesure d'un côté de carré et celle de sa surface (ou aire),
- découvrir des nombres non entiers et non décimaux et non rationnels,
- trouver des approximations de nombres que la calculatrice n'est pas en mesure d'afficher précisément.

Durée prévue : 4 à 6 périodes (de 50 min) après les phases de résolution, da mise en commun, et d'institutionnalisation.
Tâche : Dresser et organiser l'inventaire des distances entre deux points d'un réseau (sommets d'un quadrillage 6 ´ 6) marqué par un élastique rouge sur une partie de la planche à clous. (voir ci-dessus)
L'enseignant explique aux élèves qu'ils devront construire un tableau sur le modèle que je leur présente au tableau noir ou sur écran (ou que je peux leur distribuer sous forme de photocopies) encore vide. Puis je leur décris ce que signifie les titres des colonnes et je remplis avec eux les deux premières lignes et les quelques cases supplémentaires de deux premières colonnes.
Scopo dell'attività:

- passare dal conteggio delle diverse distanze tra due chiodi al loro confronto, quindi alla loro misura
- determinare le relazioni tra la misura di un lato di un quadrato e quella della sua superficie (o area)
- scoprire i numeri non interi, non decimali e non razionali
- trovare approssimazioni di numeri che la calcolatrice non è in grado di visualizzare con precisione.

Durata prevista: da 4 a 6 periodi (di 50 min) dopo le fasi di risoluzione, della messa in comune e della istituzionalizzazione.
Compito: fare e organizzare l'inventario delle distanze tra due punti di una griglia (vertici di una quadrettatura 6 ´ 6) indicato con un elastico rosso su una parte del geopiano (si veda più sotto).
L'insegnante spiega agli allievi che dovranno costruire una tabella sulla base del modello che verrà presentato loro alla lavagna o sullo schermo (o che si potrà distribuire loro sotto forma di fotocopie) che è ancora vuoto. Poi si descrive loro cosa significano i titoli delle colonne e vengono riempite con essi le prime due righe e i pochi riquadri aggiuntivi delle prime due colonne.

diagonale /côté	aire du carré	distance ou mes. côté	Nb carrés dans 6 × 6	appr. 1/10	appr. 1/100	appr. 1/1000
(0 ;0	0	0		0,0	0,00	0,000
(1 ; 0) ou (0 ; 1)	1	1	25			
(1 ; 1)	2	√2	16	1,4	1,41	1,414
(2 ; 0) ou (0 ; 2)	4	4	16	2,0	2,00	2,000
(2 ; 1) ou (1 ; 2)	5	√5	9	2,2	2,24	2,236
(2 ; 2)	8	2√2 = √8	4	2,8	2,83	2,828
(3 ; 0) ou (0 ; 3)	9	3	9			
(3 ; 1) ou (1 ; 3)	10	√10	4	3,2	3,16	3,162
(3 ; 2) ou (2 ; 3)	13	√13	2	3,6	3,61	3,606
(4 ; 0) ou (0 ; 4)	16	4	4			
(4 ; 1) ou (1 ; 4)	17	√17	2	4,1	4,12	4,123
(3 ; 3)	18	3√2 = √18	0	4,2	4,24	4,243
(4 ; 2) ou (2 ; 4)	20	2√5 = √20	0	4,5	4,47	4,472
(4 ; 3) ou (3 ; 4)	25	5	0			
(5 ; 0) ou (0 ; 5)	25	5	1			
(5 ; 1) ou (1 ; 5)	26	√26	0	5,1	5,10	5,099
(5 ; 2) ou (2 ; 5)	29	√29	0	5,4	5,39	5,585
(4 ; 4)	32	4√2 = √32	4	5,7	5,66	5,657
(5 ; 3) ou (3 ; 5)	34	√34	0	5,8	5,83	5,831
(5 ; 4) ou (4 ; 5)	41	√41	0	6,4	6,40	6,403
(5 ; 5)	50	5√2 = √50	0	7,1	7,07	7,071

La première colonne du tableau donne la disposition des segments représentant les distances de deux points dans l'ordre croissant. On peut les envisager comme des diagonales ou côtés de rectangles (ou carrés). L'ordre est déterminé au compas, comme sur la figure 2 de la fiche du problème, rubrique Tâche de résolution et savoirs mobilisés. Les élèves « apprennent » ou « se rendent compte » que les « distances » de deux points ne se mesurent pas seulement verticalement ou horizontalement sur le réseau mais aussi « en diagonales » ; que le compas est un instrument de report et comparaison de distances, et non seulement un instrument de dessin de cercles. La mesure avec les instruments (figure 1 ci-dessous) est aussi possible mais plus délicate (par exemple pour 4, √17 et √18).
Dans la figure 2, le point fixe de comparaison de distances avec les autres points est en haut à gauche, s'il était placé en bas à gauche, on se trouverait dans la position traditionnelle de l'origine d'un système d'axes de coordonnées orthogonales, dans la cinquième ligne on trouve « (2 ; 1) ou (1 ; 2) » qui sont les coordonnées de deux points « à la même distance » de l'origine parce qu'ils sont sur l'arc de cercle (4).
Les élèves dessineront 20 arcs de cercle, qui passent par 35 points, le 36^{e} étant le centre. Que de découvertes ou redécouvertes !

La prima colonna della tabella riporta la disposizione dei segmenti che rappresentano le distanze di due punti in ordine crescente. Possiamo pensarli come diagonali o lati di rettangoli (o quadrati). L'ordine viene determinato utilizzando un compasso, come nella Figura 2 della scheda del problema, rubrica Compito per la risoluzione e saperi mobilizzati. Gli allievi“ imparano” o “si rendono conto” che le “distanze” di due punti non si misurano solo verticalmente o orizzontalmente sulla griglia ma anche “diagonalmente”; che il compasso è uno strumento per riportare e confrontare le distanze, e non solo uno strumento per tracciare cerchi. È anche possibile la misurazione con riga e squadretta (figura 1 sotto), ma più delicata (ad esempio per 4, √17 e √18).
Nella figura 2 il punto fisso per il confronto delle distanze con gli altri punti è in alto a sinistra, se fosse posto in basso a sinistra ci troveremmo nella tradizionale posizione dell'origine di un sistema di assi di coordinate cartesiane ortogonali, nella quinta riga troviamo “(2; 1) oppure (1; 2)” che sono le coordinate di due punti “alla stessa distanza” dall'origine perché si trovano sull'arco di cerchio (4).
Gli allievi disegneranno 20 archi di cerchio che passano per 35 punti, di cui il 36esimo è il centro. Quante scoperte o riscoperte!

Fig 1

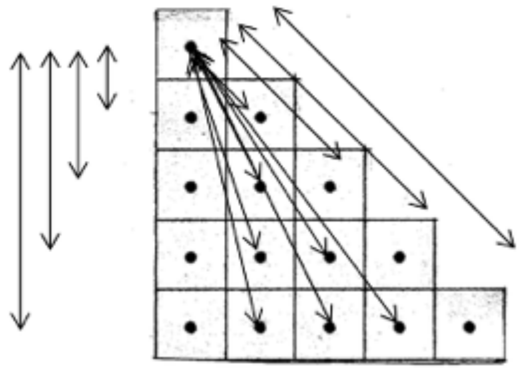
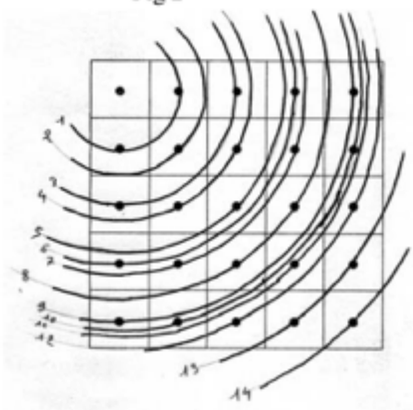


Fig 2



La deuxième colonne du tableau « aire du carré » demande une explication accompagnée d'un exemple car le « carré » est celui qui est construit sur le côté ou la diagonale de la première colonne.

La seconda colonna della tabella "area del quadrato" richiede una spiegazione accompagnata da un esempio in quanto il "quadrato" è quello costruito sul lato o sulla diagonale della prima colonna.

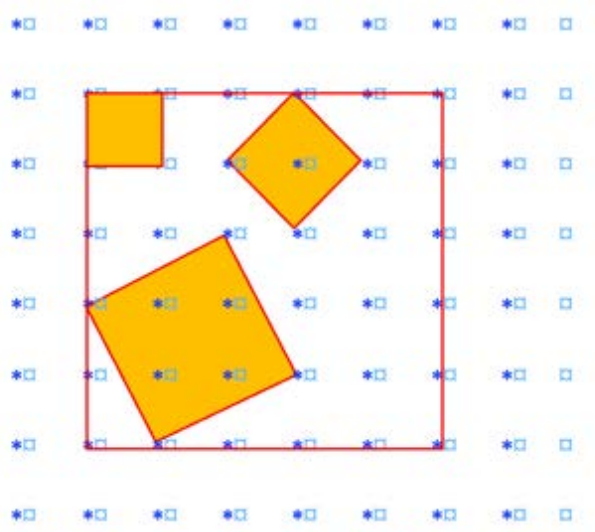


Fig 3. Trois exemples.

- le carré construit sur le segment (1 ; 0) ou (0 ; 1) de la deuxième ligne, en haut à gauche,
- sur le segment (1 ; 1) de la troisième ligne en haut au milieu,
- sur le segment (2 ; 1) ou (1 ; 2) de la cinquième ligne en bas à gauche.

Le premier carré d'aire 1 (unité d'aire, u.a) va permettre de déterminer la mesure de son côté, 1 (unité de longueur u.l) , de la **troisième colonne.**

Le deuxième a une aire de 2 (u.a) !!! Les élèves peuvent le découvrir dès les catégories 4 à 6. (ils savent que si le côté d'un carré mesure, en cm, 2 ou 3 ou éventuellement un nombre décimal comme 4,5, l'aire du carré est respectivement, en cm^2, 4 ou 9 ou 20,25 ; selon l'algorithme « mesure du côté $\times$ mesure du côté. Mais savent-ils que si l'aire du carré est 2 son côté est déterminé ?). Il s'agit d'une clé essentielle pour les catégories suivantes et pour les adultes (relevée par Brunella, voir « Appendice I »). Cette clé nous permet de remplir la case correspondante de la 3e colonne, par définition, c'est le nombre qui, multiplié par lui-même (ou élevé au carré) donne 2. Et il n'y a qu'une seule manière de l'écrire : $\sqrt{2}$, que les écrans des calculatrices ne sont pas encore capables de visualiser.

Le troisième carré a une aire de 5, que les élèves de catégories 3 à 5 découvrent facilement (nombreux problèmes du RMT). Ils retrouveront cette construction dans d'autres problèmes de la liste établie par le Groupe géométrie plane. Le côté de ce carré mesure $\sqrt{5}$ (u.l)

Il y a 20 carrés différents à construire, avec des élastiques, ou à dessiner sur réseau. De quoi retenir cette connaissance élémentaire de géométrie plane : il n'y a pas besoin de l'algorithme de Pythagore pour connaître les 20 mesures des côtés de la troisième colonne.

Si l'on revient aux 20 aires de carrés de la deuxième colonne, on peut se demander pourquoi il n'y a pas un carré d'aire 3 u.a , ni, 6, ni 7, ni de carrés dont l'aire vaut 1 de moins qu'un multiple de 4 ? On pourra s'y intéresser en dès les catégories 11 et suivantes.

Fig 3.Tre esempi.

- Il quadrato costruito sul segmento (1; 0) o (0; 1) della seconda riga, in alto a sinistra,
- sul segmento (1; 1) della terza riga in alto verso il centro,
- sul segmento (2; 1) o (1; 2) della quinta riga in basso a sinistra.
-

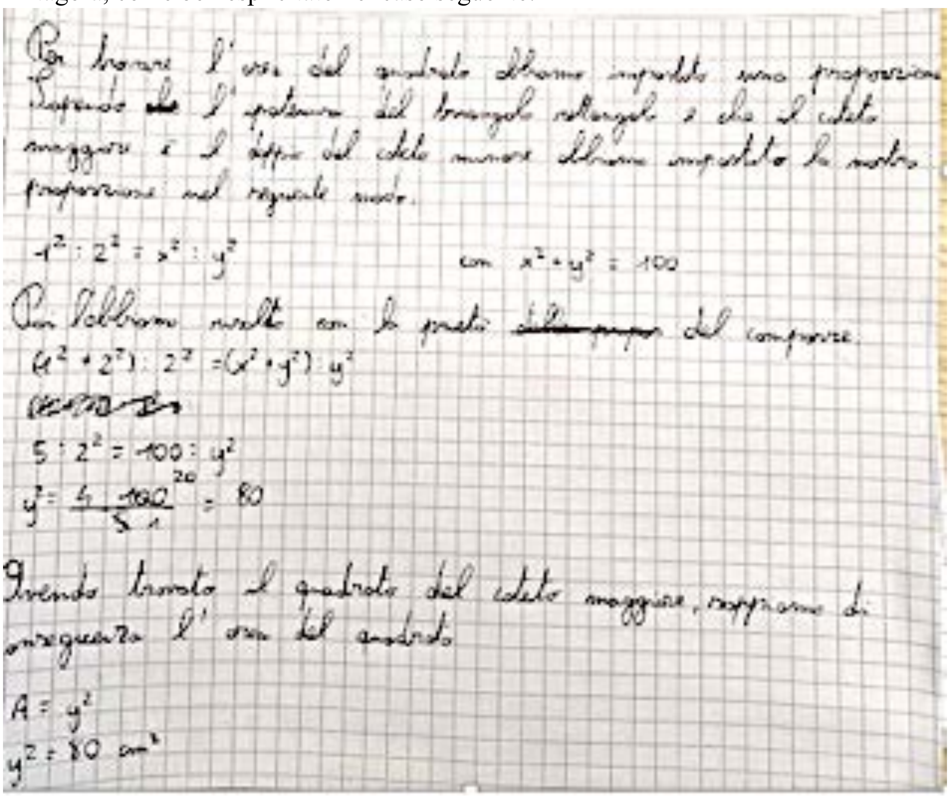
Il primo quadrato di area 1 (unità di superficie, u.a) permetterà di determinare la misura del suo lato, 1 (unità di lunghezza u.l), **della terza colonna**.
Il secondo ha una superficie di 2(u.a)!!! Gli allievi lo possono scoprire dalle categorie da 4 a 6 (sanno che se il lato di un quadrato misura, in cm, 2 o 3 o eventualmente un numero decimale come 4,5, l'area del quadrato è rispettivamente, in cm^2, 4 oppure 9 oppure 20.25; secondo l'algoritmo "misura lato x misura lato".
Ma sanno che se l'area del quadrato è 2 il lato è determinato?). Questa è una chiave essenziale per le categorie successive e per gli adulti (annotato da Brunella, come riportato in Appendice I). Questa chiave ci permette di riempire la casella corrispondente della 3a colonna, per definizione è il numero che moltiplicato per se stesso (o al quadrato) dà 2. E c'è un solo modo per scriverlo: √2, che le calcolatrici non sono ancora in grado di visualizzare.
Il terzo quadrato ha un'area di 5, che gli allievi delle categorie da 3 a 5 scoprono facilmente (molti problemi RMT). Troveranno questa costruzione in altri problemi della lista stabilita dal Gruppo Geometria Piana. Il lato di questo quadrato misura √5 (u.l)
Ci sono 20 quadrati diversi da costruire, con gli elastici, o da disegnare su una griglia. Basti ricordare questa conoscenza elementare della geometria piana: non è necessario applicare il teorema di Pitagora per trovare le 20 misure dei lati della terza colonna.
Se torniamo alle 20 aree dei quadrati della seconda colonna, possiamo chiederci perché non esiste un quadrato con area 3 u.a, né 6, né 7, né quadrati la cui area sia 1 di meno di un multiplo di 4? Possiamo interessarci a questo aspetto dalla categoria 11 e seguenti.
On peut cependant remplir la **quatrième colonne** qui répond à la question : combien y a-t-il de carrés de chacune des 20 grandeurs qu'on peut construire, ou voir, avec leurs sommets dans l'espace de la planche à clous 6 ´ 6 ? ou en tout ? Il y a là des pistes intéressantes pour organiser un dénombrement exhaustif.
Une question que les élèves vont se poser en construisant l'arc de cercle de rayon correspondant à la ligne (4 ; 3) ou (3 ; 4). C'est le premier cas pour lequel il semble qu'il y a plus de deux points de notre réseau 6 ´ 6. Est-ce que la diagonale d'un rectangle 3 ´ 4 est vraiment de la même longueur que le segment de 0 ´ 5 ? Le comptage des carreaux unités aboutit à 25 pour chacun des deux carrés ; sera-t-il suffisant pour arriver à une conviction ?
Possiamo però compilare la **quarta colonna** che risponde alla domanda: quanti quadrati ci sono di ciascuna delle 20 dimensioni che possiamo costruire, o vedere, con i loro vertici nello spazio del geopiano 6 ´ 6? O in tutto? Esistono piste interessanti per organizzare un conteggio esaustivo.
Una domanda che gli allievi si porranno costruendo l'arco di cerchio con raggio corrispondente alla riga (4; 3) o (3; 4). È il primo caso per il quale sembra che ci siano più di due punti della nostra griglia 6 ´ 6. La diagonale di un rettangolo 3 ´ 4 ha davvero la stessa lunghezza del segmento 0 ´ 5? Contando i quadratini unità si ottiene 25 per ciascuno dei due quadrati; basterà per arrivar a convincersi?
La troisième colonne permet encore des considérations liées à la proportionnalité liée à l'écriture des racines carrées. « √2 » se retrouve dans l'écriture de √8, √18, √32, √50. Quel sera l'écriture du nombre suivant dans laquelle on la retrouvera ? Pourquoi ? Il y a ici l'occasion de lier la décomposition en facteurs de l'arithmétique aux transformations géométriques (similitude).
Les colonnes 5, 6, 7 … nous entraînent dans le domaine des approximations, souvent réduites à la lecture des premiers chiffres qui apparaissent sur l'écran d'une calculatrice. Un exercice indispensable si l'on veut que l'élève comprenne quelque chose à l'approximation est le suivant : Trouvez les deux nombres décimaux d'un chiffre après la virgule les plus proche de √2 (qui l'encadrent), et indiquez lequel en est le plus proche, recommencez avec les nombres décimaux de deux chiffres, puis de trois chiffres, puis de quatre chiffres après la virgule. (Vous pouvez vous aider d'une calculatrice sans la touche √.)
Il faut tout d'abord trouver 1,4 et 1,5 dont les carrés sont 1,96 et 2,25 et choisir 1,4 ;
puis trouver 1,41 et 1,42 dont les carrés sont 1,9881 et 2,0164 et choisir 1,41 ;
puis trouver 1,414 et 1,415 dont les carrés sont 1,999396 et 2,0002225 et choisir 1,414 ;
puis trouver 1,4144 et 1,4145 dont les carrés sont 1,999396 et 2,0002225 et choisir 1,4144.
La **terza colonna** consente anche considerazioni legate alla proporzionalità legata alla scrittura delle radici quadrate. "√2" si ritrova nella scrittura di √8, √18, √32, √50. Quale sarà la scritta del numero successivo in cui lo troveremo? Perché? C'è qui l'opportunità di collegare la fattorizzazione dell'aritmetica alle trasformazioni geometriche (similitudine).
Le colonne 5, 6, 7... ci portano nel regno delle approssimazioni, spesso ridotte alla lettura dei primi numeri che appaiono sul visore di una calcolatrice. Un esercizio indispensabile se vogliamo che l'allievo capisca qualcosa sull'approssimazione è il seguente: trovate i due numeri decimali con una cifra dopo la virgola più vicini a √2 (che lo "circondano" e indicate quale dei due è il più vicino, ricominciate con i numeri decimali di due cifre, poi di tre cifre, poi di quattro cifre dopo la virgola (potete aiutarvi con una calcolatrice senza il tasto √).
Dovete prima trovare 1.4 e 1.5 i cui quadrati sono 1,96 e 2,25 e scegliere 1,4;

poi trovate 1,41 e 1,42 i cui quadrati sono 1,9881 e 2,0164 e scegliete 1,41;
poi trovate,.414 e 1,415 i cui quadrati sono 1,999396 e 2,0002225 e scegliete 1,414;
poi trovate 1,4144 e 1,4145 i cui quadrati sono 1,999396 e 2,0002225 e scegliete 1,4144.

Suddivisione di un quadrato (cat. 8, 9, 10; 31.II.16)
Il compito matematico indicato nell'analisi a priori recita Calcolare l'area di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa misura 10 cm e il cateto minore misura la metà del cateto maggiore e questa ricerca è quella che permette di rispondere alla domanda del problema.

L'analisi a posteriori degli elaborati della sezione di Siena condotta da Patrizia Sabatini ha invece evidenziato che per una parte piuttosto cospicua di gruppi di allievi di categoria 8, ma anche talvolta di categoria 9, Il triangolo centrale è ritenuto **equilatero**, cosa che porta, in alcuni casi, all'uso della formula h = l√3/2 per trovare l'altezza del triangolo centrale che sanno essere congruente al lato del quadrato. Interessante come nessuno di loro si renda conto della situazione paradossale in cui si imbattono: se do per scontato che il triangolo sia equilatero e con tale formula trovo un'altezza inferiore a 10 cm, allora la figura in cui è inscritto il triangolo non può essere un quadrato!

In altri casi si considera che i due segmenti che dividono il quadrato nel punto medio del lato siano uguali alle diagonali del quadrato (talvolta alle semi-diagonali); in questi casi il lato del quadrato viene trovato sfruttando la relazione d= l√2 , con conclusioni tipo l=10√2, per cui A = 200 cm² o l=10/√2 e A =50 cm². Altra possibile interpretazione dell'errore che porta all'area di 200 cm² è che gli alunni abbiano applicato per il triangolo centrale il teorema di Pitagora, anche se tale triangolo chiaramente non è rettangolo. (risoluzione tramite queste operazioni 10: 1,414 = 7,07 cm= mezzo lato quadrato; 7,07 x 2 = 14, 14 lato del quadrato; 14, 14 ² = 200 = area del quadrato).
Il problema in oggetto, viste queste tipologie di errori, legate a interpretazioni essenzialmente "visive" dei triangoli in gioco, potrebbe costituire un'interessante attività in classe che potrebbe portare a **un'analisi comparativa tra "ciò che vedo" e "ciò che è, dal punto di vista formale"**.
Non mancano risoluzioni corrette, anche in categoria 8, con il ricorso in alcuni casi, ad una sorta di "impostazione algebrica personalizzata" che fa ricorso al pensiero proporzionale, visto il rapporto 1 a 2 dei due cateti in gioco e al teorema di Pitagora, come ben esplicitato nel caso seguente:


Per trovare l'area del quadrato abbiamo impostato una proporzione. Sapendo che l'ipotenusa del triangolo rettangolo e che il cateto maggiore è il doppio del cateto minore abbiamo impostato la nostra proporzione nel seguente modo.

$1^2 : 2^2 = x^2 : y^2$ con $x^2 + y^2 = 100$

Poi l'abbiamo risolta con la proprietà ~~dello~~ del comporre.

$(1^2 + 2^2) : 2^2 = (x^2 + y^2) : y^2$

$5 : 2^2 = 100 : y^2$

$y^2 = \frac{4 \cdot 100}{5} = 80$

Avendo trovato il quadrato del cateto maggiore, sappiamo di conseguenza l'area del quadrato

$A = y^2$

$y^2 = 80\ cm^2$

Gli allievi creativi ci sorprendono sempre, con piacere.

4. Misure e approssimazione

Approssimazione come misura che sappiamo che esiste, ma non riusciamo ad esprimerla.
Cerchiamo dunque di esprimerla come possiamo.
Dal concetto di approssimazione non si può prescindere nella problematica della misura, vista nei suoi diversi aspetti e contesti, sia fisici sia matematici.
Diventa necessario ripensare l'insegnamento-apprendimento anche di questa fondamentale branca della matematica.

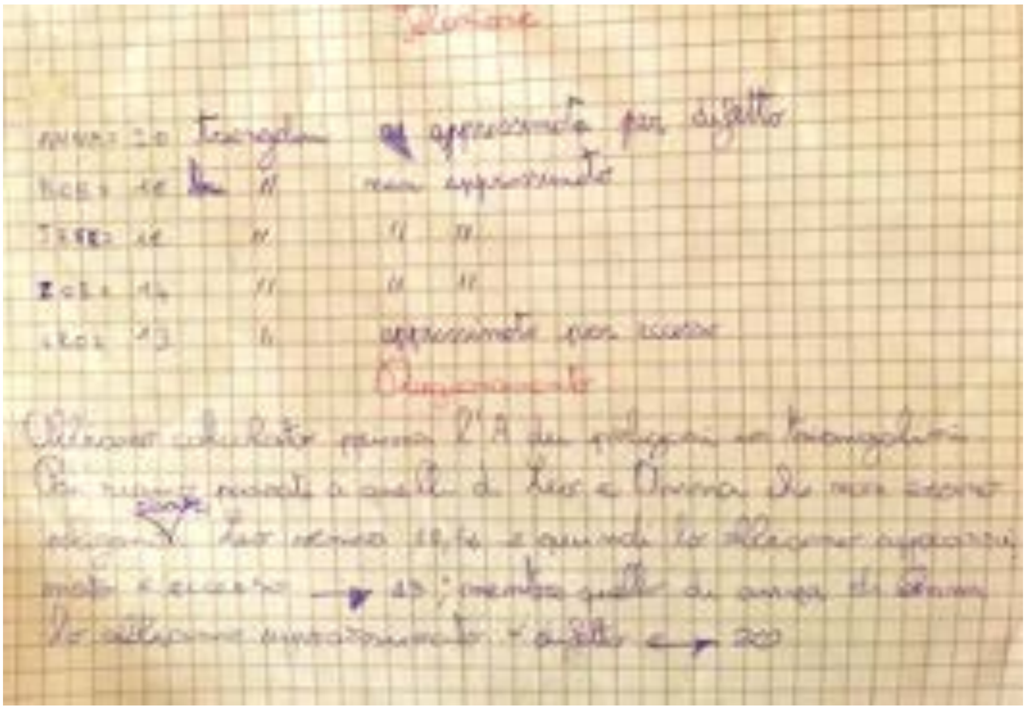
I problemi elementari legati alla misura (di lunghezze, di aree, di volumi), presenti nei programmi di matematica in tutti i livelli scolastici, si riducono, salvo qualche eccezione nella scuola primaria, al calcolo di perimetri, aree e volumi solo attraverso formule specifiche.
Questa impostazione alimenta negli allievi la convinzione che ogni problema matematico si risolva con una formula o un algoritmo particolare e che non sia del tutto lecito, in matematica, utilizzare metodi di approssimazione (Il sogno di Cirillo e la sfida della tartaruga del Gruppo Zeroallazero, 2009)

4.1. Proposta di percorso per la problematica misure e approssimazione

La ricerca di problemi del RMT in merito alla problematica della misura che implica anche l'approssimazione ha portato alla possibilità di predisporre il suggerimento di un percorso che, per forza di cose, implica le problematiche analizzate nei paragrafi precedenti.
Una volta scelti i problemi si è deciso di riproporli in diverse classi delle categorie da 6 a 8, con un lavoro a gruppetti di due o tre allievi.

Biscotti (cat. 4-6) 14.II.07. Problema intrigante con "unità" rappresentata da semi-quadratini di una griglia triangolare, che ha lo scopo precipuo di portare gli allievi a confrontarsi con valori del tipo "minore di" o "maggiore di" e non automaticamente "esattamente uguale a". Si tratta in effetti di mettere a confronto le dimensioni delle figure disegnate su una rete a maglia triangolare effettuando le approssimazioni necessarie, non ancora in termini prettamente numerici, con i decimali.
L'analisi a posteriori di alcuni elaborati delle tre categorie ha permesso di evidenziare due aspetti interessanti, uno dei quali ci porta a riflettere sulle "convinzioni" degli allievi, anche di categoria 6.
Il primo aspetto mette in evidenza il ricorso opportuno al conteggio dei "triangolini" della trama del disegno, come ipotizzato già nell'analisi a priori del problema. Il secondo ha portato alla luce, nella quasi totalità di tali elaborati, la "convinzione" che i tratti curvilinei siano da considerare alla stessa stregua dei tratti rettilinei. È con problemi di questo tipo, che rompono la tradizione scolastica di problemi "non provocatori", che convinzioni errate possono venire alla luce. In un solo elaborato di categoria 5 si trova il riferimento ben chiaro all'approssimazione. Sarebbe interessante aprire in classe una discussione su due risoluzioni come le seguenti:

1) Abbiamo continuato le linee anche dentro ai biscotti e poi abbiamo contato i quadrati e unito le metà.
   Quello che ne ha una quantità minore è Leo, poi Zoe, seguito da Jeffe e Bob e Anna.
   Leo = 6; Zoe = 7, Jeff = Bob = 8; Anna = 9.
2)



entrambe con l'ordine del numero dei biscotti corretto, ma, nel primo caso, con numeri "esatti" di biscotti e l'altro con l'approssimazione. Nel primo caso i tratti curvilinei non vengono presi in considerazione in quanto tali!

Attraverso la quadrettatura (cat. 5-7) 08.II.08. Interessante problema, ricco di potenzialità, che rientra a buon diritto anche tra quelli suggeriti per la tematica relativa alle distanze. Agli allievi questo problema propone di distinguere le "unità lati del quadrato" dalle "unità diagonali". Alla luce di diverse analisi a posteriori che a suo tempo erano sfociate anche nella pubblicazione di due articoli (2001 e 2012) si pensa di proporre agli allievi, quando avranno terminato di risolvere, una variante della figura con un ingrandimento della quadrettatura con il lato di un centimetro, chiedendo poi loro se vogliono apportare modifiche rispetto alla prova appena svolta, o se confermano ciò che avevano proposto. Le analisi a posteriori avevano evidenziato da un lato, che un errore piuttosto frequente, presente in tutti e tre i livelli ai quali era stato proposto è consistito nel valutare la diagonale la metà del lato. Si tratta di un problema che apre ovviamente la strada all'importanza della precisione delle misure, soprattutto prima che gli allievi arrivino all'acquisizione di aspetti più "dotti" come la radice di 2 con una "luce" sulla incommensurabilità.

Patrizia Sabatini, nella sua classe di categoria 6, ha svolto una ricca attività di tipo sperimentale, in diverse fasi, nel corso dell'anno scolastico 2023-24.

I fase: risoluzione iniziale (novembre)

Ogni alunno ha ricevuto la fotocopia, con le dimensioni originali, del problema "Attraverso la quadrettatura". È stato chiesto di lavorare in gruppi di due o tre persone e di produrre una risposta da non condividere, almeno inizialmente, con il resto della classe.

In 6 dei 7 gruppi di lavoro **non viene fatta distinzione tra la diversa lunghezza dei segmenti.**

In 2 di questi gruppi si concorda che per determinare il percorso più lungo basti **contare i segmenti**, per cui tutti i percorsi hanno uguale lunghezza, tranne il percorso E.

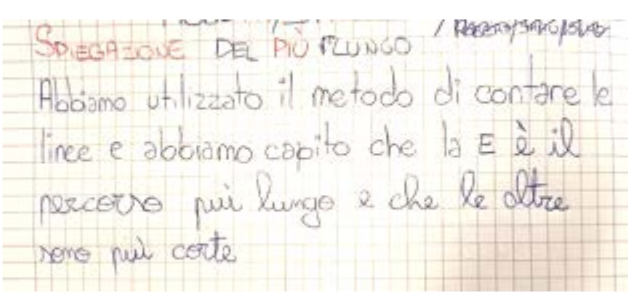


Fig. 1

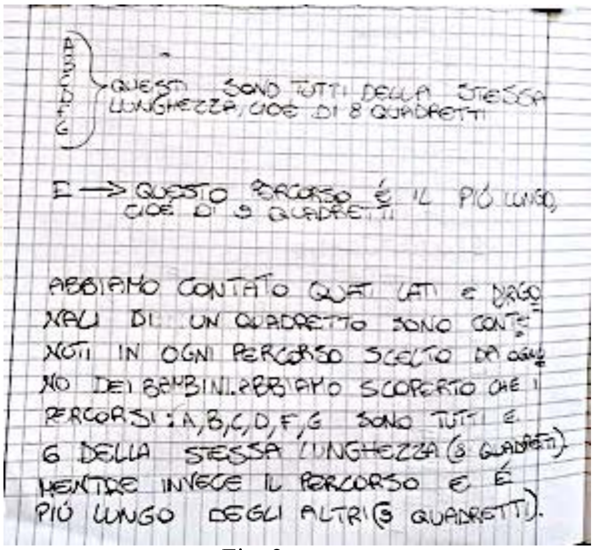


Fig. 2

In altri 3 gruppi prevale invece l'esperienza personale relativa al tempo impiegato per percorrere le strade e viene fatta **confusione tra la lunghezza** di un percorso e il **tempo** di percorrenza.

Viene così considerato più breve il percorso "con meno curve".

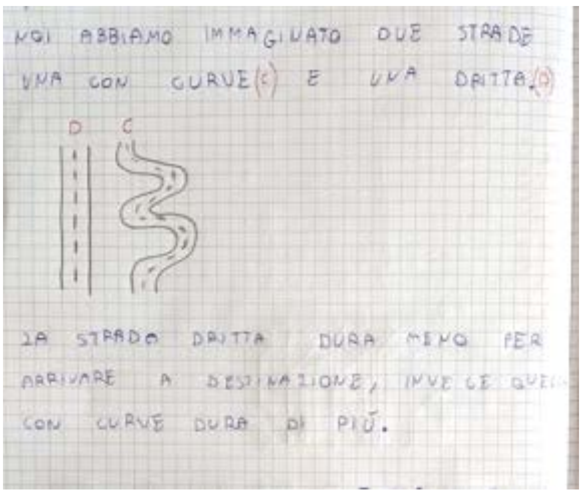


Fig. 3

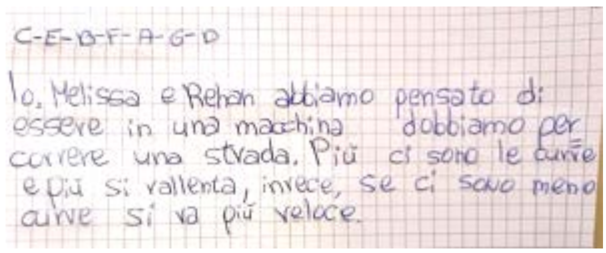


Fig. 4

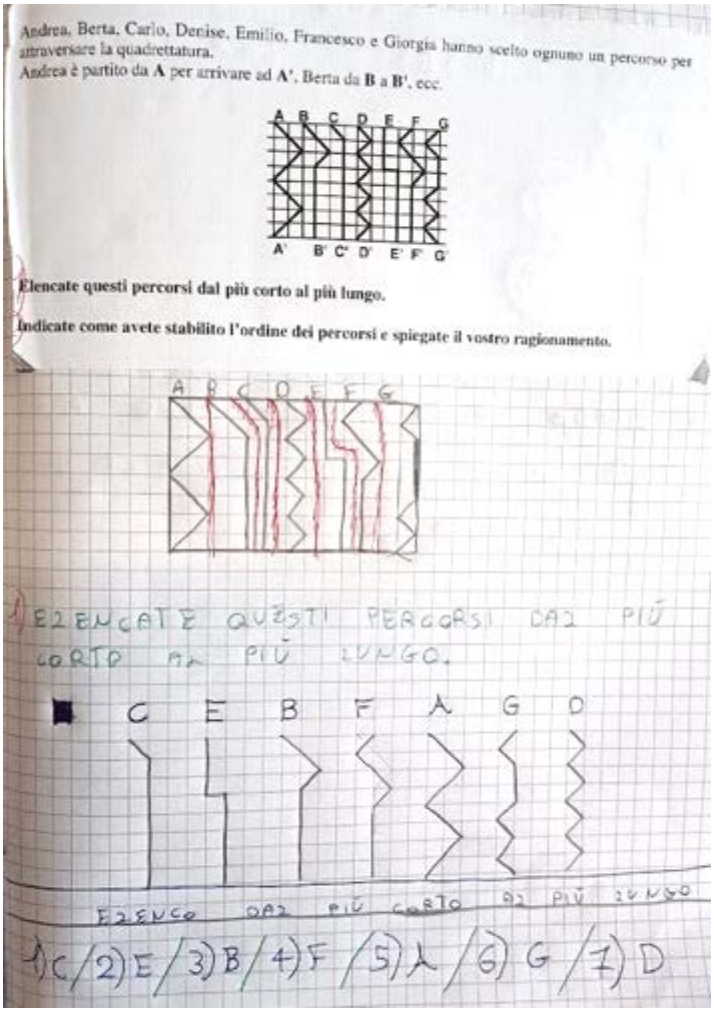


Fig. 5

Nell'elaborato di questo gruppo, almeno dalle parole sembra emergere un confronto tra i diversi segmenti, "la diagonale" e quello "dritto", ma la conclusione a cui arrivano è identica ai gruppi di lavoro precedenti.

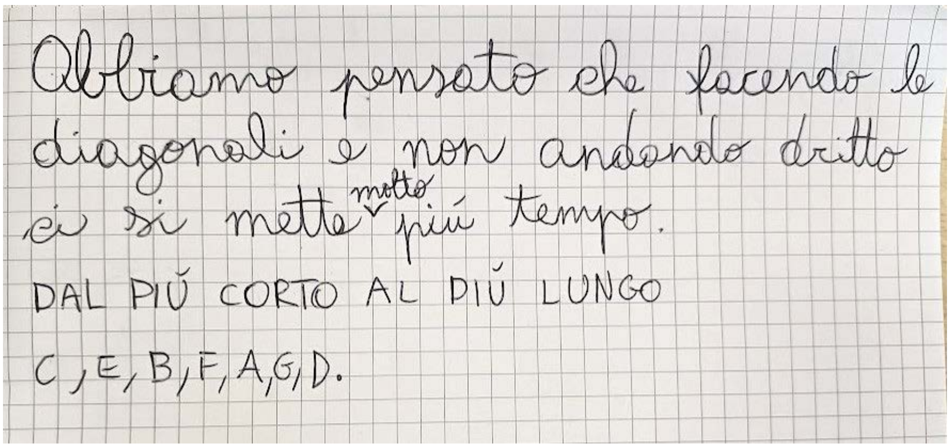


Fig. 6

Un gruppo di lavoro è particolarmente cauto nel procedere: il problema viene riletto e l'immagine osservata con particolare attenzione. L'uso del righello conferma il dubbio emerso riguardo alla diversa lunghezza del segmento "diagonale" e del "lato". La risposta corretta viene data svolgendo i calcoli ottenuti assegnando le misure di 4 mm per il lato e di 6 mm per la diagonale.

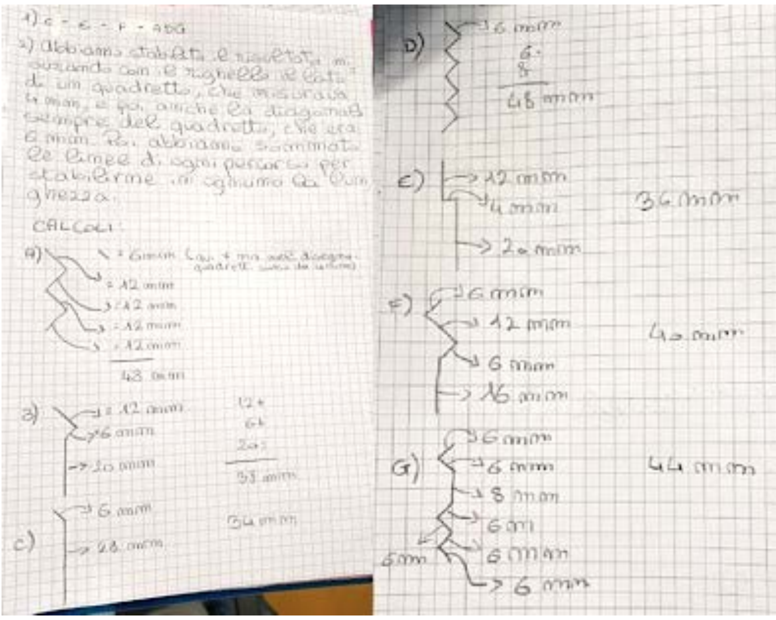


Fig. 7

II fase: revisione con fotocopia ingrandita

Successivamente, nello stesso giorno, viene distribuito agli alunni il problema ma con una fotocopia ingrandita e viene chiesto loro se confermare o meno la risposta data precedentemente.

Solo un gruppo di lavoro (quello dell'elaborato in Fig 2) prende la mia richiesta con particolare serietà e dopo un po' chiede di modificare la risposta, perché, secondo quanto riportato oralmente sul finire della lezione, l'immagine più grande ha permesso di osservare la differenza tra le lunghezze dei due segmenti e tale differenza è confermata dall'uso del righello.

III fase: condivisione e approfondimento

Nella lezione successiva viene riaperto l'argomento con una condivisione di maggiore respiro da parte delle alunne dei due gruppi che si sono accorti che i segmenti hanno una lunghezza diversa e che verte sostanzialmente sulle due diverse misure rilevate con il righello.

A questo punto ho fatto disegnare agli alunni i percorsi sulla carta con quadrettatura da 1 cm e, per rafforzare la differenza tra la lunghezza dei due tipi di segmento, ho chiesto di utilizzare il rosso per la diagonale del quadrato e il blu per il lato.

L'uso di questi colori sarà stato ripreso nei problemi "Miss tre punte" e "Mosaico del Marocco".

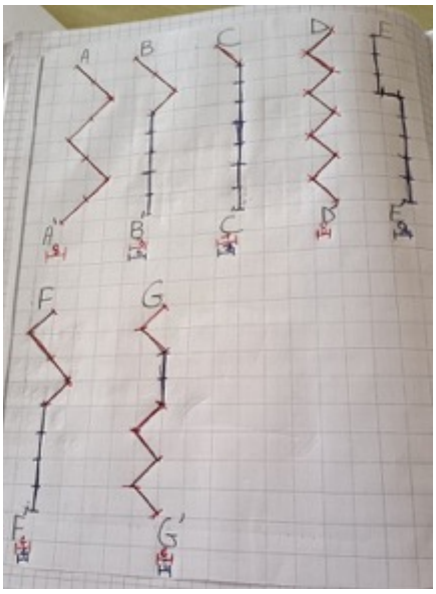


Fig. 8

L'uso di questi colori sarà stato ripreso nei problemi "Miss tre punte" e "Mosaico del Marocco".

La condivisione della scoperta con il resto della classe è il punto di partenza per un percorso che, oltre a cercare di superare l'ostacolo del riconoscimento della diversa lunghezza tra il lato del quadrato e la sua diagonale, ha tra gli obiettivi anche il riconoscimento dell'angolo retto, il concetto di distanza tra segmento e retta e il riconoscimento delle altezze. Si tratta di un percorso elicoidale che cerca di raggiungere questi traguardi tramite varie attività laboratoriali, come la costruzione e l'uso di modelli dinamici (Emma Castelnuovo, Beppe Pea), la piegatura della carta, il ricorso a disegni su griglie quadrettate particolarmente grandi, come quelle date dalle mattonelle della classe, e l'uso di altri problemi del rally, atti a far emergere nuovamente i nodi concettuali da affrontare.

Per risolvere il problema, oltre a ricorrere ad un'espressione aritmetica con somma e moltiplicazione delle varie misure dei segmenti (fig. 7), cercando di avviare un lavoro prealgebrico, propongo di indicare i segmenti blu con la lettera B e i rossi con la lettera R. In tal modo è possibile ordinare i percorsi composti da 8 segmenti, confrontando il numero di segmenti rossi, senza ricorrere alle misure.

Per il confronto tra il percorso E (l'unico con 9 segmenti) e quello C emerge una strategia interessante che ricorda quanto descritto nel documento di Federica Curreli e Cinzia Utzeri (si veda l'allegato II), dove gli alunni avevano lavorato per sottrazione di segmenti di egual misura nei vari percorsi.

Alla lavagna cerco di rappresentare tale idea ricorrendo all'uso di una sorta di "bilancia" che consente una scrittura simbolica del confronto in oggetto.

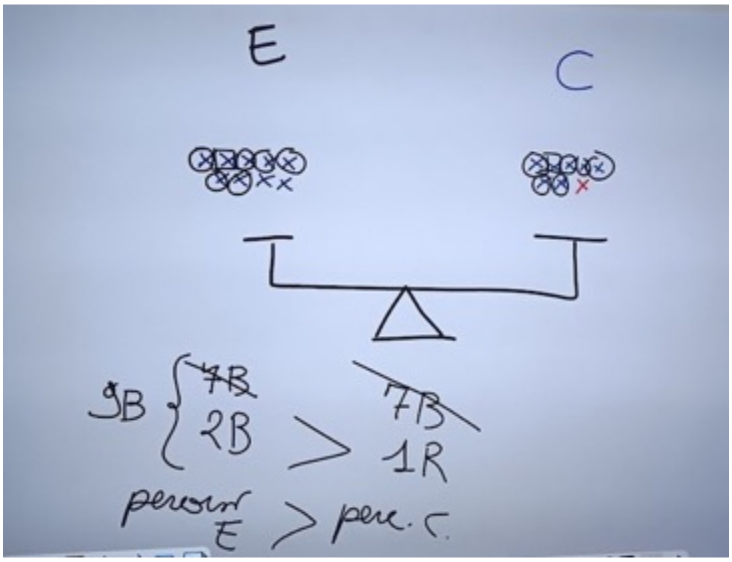


Fig. 9

IV fase: verifica degli apprendimenti

A maggio ho nuovamente assegnato il problema, chiedendo di lavorare prima singolarmente e poi in gruppo.

Purtroppo, per alcuni alunni rimane invariata la convinzione che il tragitto più breve sia quello con meno "curve" (Fig. 10); troppi non sono riusciti ad interiorizzare che la diagonale e il lato del quadrato siano segmenti di misure diverse.

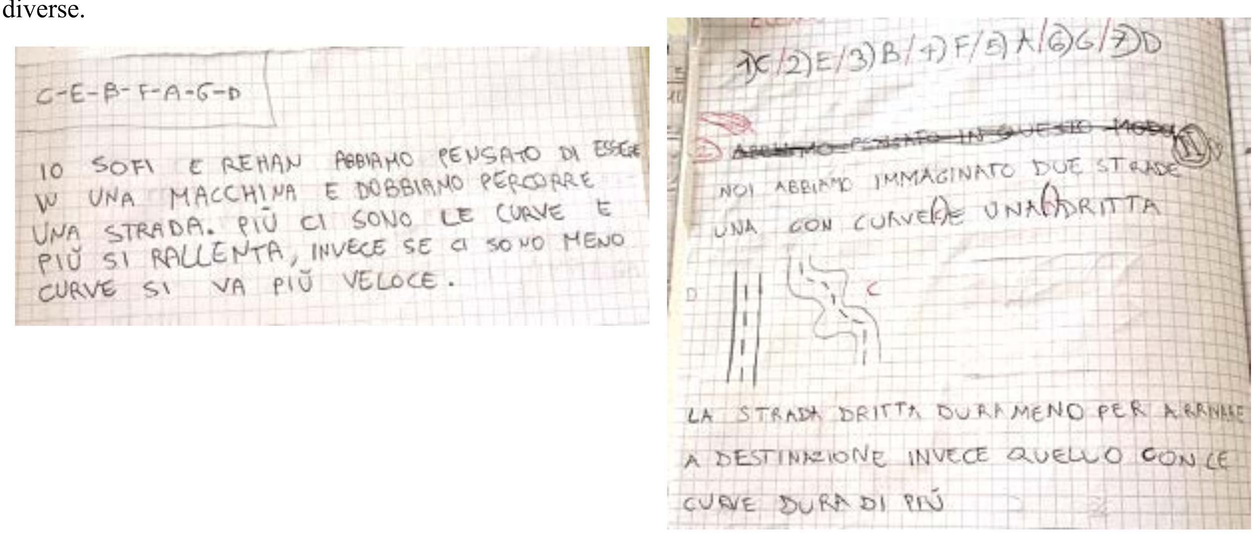


Fig. 10

Ricorriamo così all'uso del filo per tracciare i percorsi, seguendo la quadrettatura delle mattonelle (foto 1), per poi procedere alla loro rettificazione, al confronto "a occhio" e alla misurazione con il metro (foto 2).

Questa attività pratica mette bene in evidenza, ancora una volta, le differenze di risultati nella misurazione tra quelli empirici e quelli teorici. Nel caso specifico, il numero delle “curve” fatte dallo spago porta ad una piccola differenza tra i percorsi A e D, che invece dal punto di vista teorico sono uguali.

Le difficoltà persistenti nei miei alunni nella risoluzione di questo problema, insieme ai frequenti errori emersi durante la correzione degli elaborati delle categorie più elevate (8, 9 e 10) in “Suddivisione di un quadrato”, indicano la necessità di ulteriori attività didattiche per superare gli ostacoli concettuali nel confronto tra segmenti.

La divisione del rettangolo (cat. 8-9-10) 30.I.18, analizzato nell’articolo “Il difficile cammino dei problemi di geometria piana” (2023[17]). Questo problema può essere visto come intersezione fra le problematiche della misura e quella dell’approssimazione. Mette in gioco diverse conoscenze sui triangoli, sul teorema di Pitagora che porta con sé numeri irrazionali e sull’approssimazione. L’analisi a posteriori ha evidenziato diverse difficoltà anche sull’applicazione del teorema di Pitagora a triangoli non rettangoli, ad esempio, abituati in genere a risolvere problemi nei quali sono dati direttamente i triangoli rettangoli! L’uso in classe di questo problema, come altri del RMT, forse contribuirebbe a condurre gli allievi a uscire da schemi prefissati!!

- **Spirale di quadrati (I)** (cat. 6-7-8) 23.II.11, che potrebbe andare bene anche per “area e perimetro” In un problema come il presente, non convenzionale e interessante dal punto di vista didattico, le figure e le relazioni fra esse non sono evidenti, ma sta agli allievi capire che sono loro a doverle portare alla luce.

---

[17] La Gazzetta di Transalpino n. 13, pp 113-154)

In questo problema ci sono due aspetti cognitivi diversi: la costruzione di due successivi quadrati e la maniera di trovare le misure delle aree. Si può addirittura pensare a un'attività in classe in due tempi: fermarsi dapprima alla costruzione del settimo e ottavo quadrato con carta, forbici e colla (in effetti nell'enunciato si parla di quadrati di carta). Questa costruzione implica già per il secondo quadrato capire quale sia il suo lato. Entra così in gioco, in maniera costruttiva, la diagonale! Solo dopo la costruzione effettiva degli otto quadrati incollati sul foglio, si passerà alla ricerca delle misure delle aree e gli allievi metteranno in atto strategie forse differenziate.
Poi discussioni, messa in comune e sintesi di ciò che è scaturito.
I contenuti sono molteplici e coinvolgono, a seconda della strada risolutiva scelta, anche problematiche di approssimazione.

Quindi:
- successioni di quadrati "di carta",
- figure geometriche da costruire,
- triangoli da individuare,
- diagonali di quadrati,
- approssimazioni,
- successioni di misure dei lati,
- successioni di aree.

Problema globalmente non ben riuscito in sede di gara, ma molto ricco sul quale lavorare in classe senza pensare che si stia perdendo tempo!!
Si potrebbe quindi pensare di proporre la variante o individualmente o a gruppetti.

- L'analisi di elaborati del **Pannello decorativo** (Cat. 8, 9, 10)[18] 28.I.16 di diverse sezioni ha messo bene in evidenza che una delle difficoltà, spesso sottovalutata in classe, che gli allievi hanno incontrato nella risoluzione del problema del pannello decorativo, è stata l'errata conversione delle unità di misura in gioco, o ancora, la mancanza di consapevolezza dell'utilità del passaggio da un'unità di misura ad un'altra.
Queste difficoltà sono, da un lato, insite nel concetto di misura di grandezze e, dall'altro, pensiamo siano di tipo didattico.
La misura è un'operazione che (in *La matematica dalla scuola materna alla maturità, edizione italiana*[19]) viene definita "molto elaborata"; basti pensare che i numeri razionali e gli irrazionali positivi, sono generati proprio "dalle misure".
Va tenuto in debita considerazione il fatto fondamentale secondo il quale, data una grandezza, ci sono tante misure possibili quante sono le scelte possibili di un'unità di misura e queste scelte sono peraltro in numero infinito.
Lo studio delle misure ingloba quello delle unità e della proporzionalità inversa. Più l'unità di misura è grande, più la misura è piccola. Esso comporta anche la pratica delle stime, l'osservazione degli ordini di grandezza, la scelta di un'unità comoda e la valutazione degli errori di misura.
Da tutto ciò discende una grande attenzione didattica che va posta al concetto di misura e al suo uso.
È chiaro dunque che, nella pratica in classe, non sono assolutamente sufficienti esercizi ripetitivi e meccanici sulle conversioni di misure (dette anche equivalenze), ma che sia necessario passare attraverso contesti problematici che ne mostrino il senso.
Un altro tipo di difficoltà osservato, quando l'ostacolo della conversione di unità è superato, è quello della percezione delle regolarità nella successione dei termini ottenuti, come somme successive delle aree (procedura lunga) o delle aree rimanenti (procedura corta). Sembra opportuno approfittare di questo problema del Pannello decorativo per esaminare con attenzione le scritture di termini successivi, cercare di semplificarle, connetterle alle scritture esponenziali, insegnare a leggere i numeri su una calcolatrice, a distinguere i numeri decimali dalle loro approssimazioni e, perché no, utilizzare in questo caso un foglio elettronico.
Comme l'analyse des copies des différentes sections l'a bien mis en évidence, une des difficultés que les élèves ont rencontré dans la résolution du problème "Panneau décoratif" a été la mauvaise conversion des unités de mesure en jeu ou encore, l'absence de prise de conscience du nécessaire passage d'une unité de mesure à l'autre. Ces difficultés sont, d'une part, inhérentes au concept de mesure de grandeurs et, d'autre part, nous pensons qu'elles sont didactiques. Les analyses des copies ayant montré que les élèves des classes de Suisse romande rencontraient moins de difficultés que les élèves des classes d'autres sections, françaises et italiennes, nous avons pensé qu'il aurait été utile de vérifier comment le thème « conversion d'unité » est proposé dans les manuels des trois pays. Dans l'annexe, il y a quelques considérations à propos de certains des manuels, sur ce sujet.

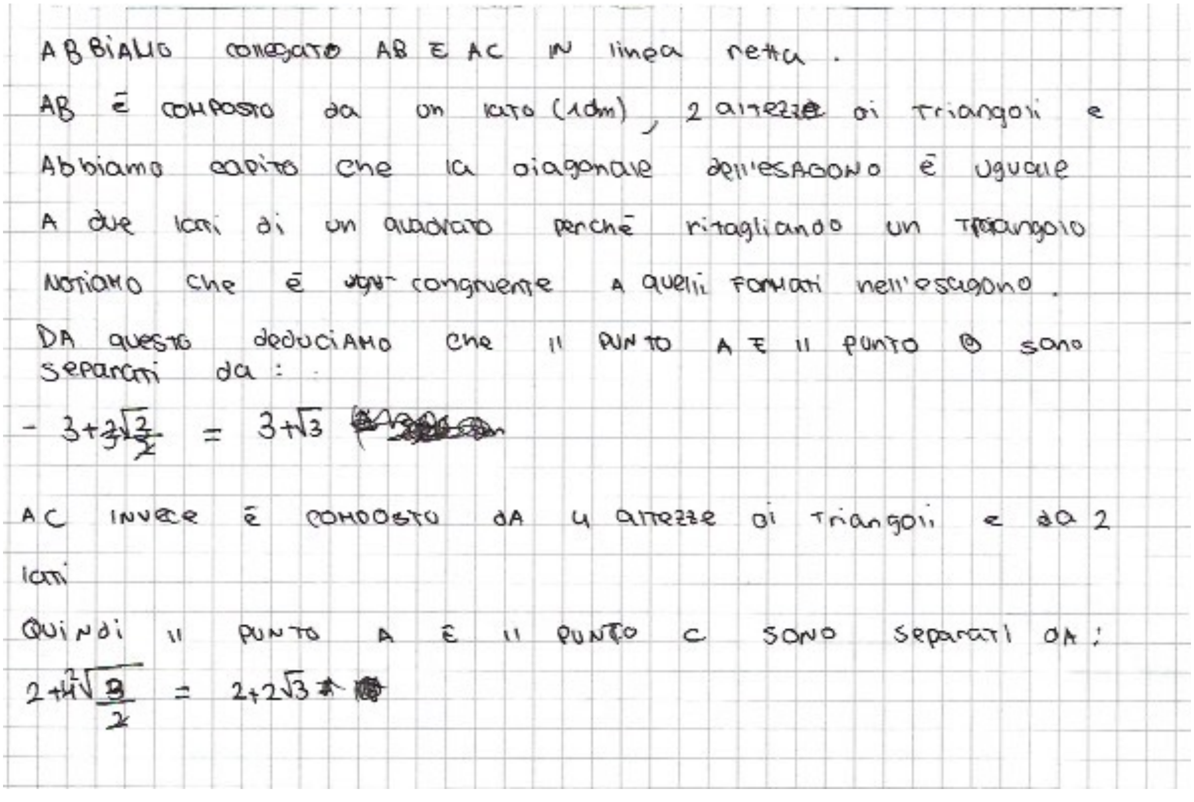
---

[18] Dall'articolo "Pannello decorativo" Gazzetta n. 11.

[19] Edizione italiana a cura di L. Grugnetti et V. Villani (traduzione di S. Gregori) – Pitagora Editrice Bologna, 1999.

La mesure est une notion qui (dans *Les Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*[20]) est définie comme "très élaborée", il suffit de penser que les nombres positifs rationnels et les irrationnels, sont générés justement par des mesures. Plus l'unité de mesure est grande, plus la mesure est petite. Cela implique également la pratique d'estimations, l'observation d'ordres de grandeur, le choix d'une unité appropriée et l'évaluation des erreurs de mesure.
De tout cela découle qu'une grande attention didactique qui doit être portée au concept de mesure et à son utilisation.
Il est donc clair que, dans la pratique de la classe, les exercices répétitifs et mécaniques de conversion de mesures (également appelés équivalences) ne sont absolument pas suffisants, mais qu'il est nécessaire de passer par des contextes problématiques qui en montre le sens.
Un autre type de difficultés observé, au cas où l'obstacle des conversions d'unité est surmonté, se rapporte à la perception des régularités dans la suite des termes obtenus, comme sommes successives des aires (en procédure longue) ou des aires restantes (en procédure courte).
Il paraît opportun de profiter de ce problème du Panneau décoratif pour examiner attentivement les écritures des termes successifs, chercher à les simplifier, profiter de les lier aux écritures exponentielles, apprendre à lire l'affichage des nombres sur une calculatrice, à distinguer les nombres décimaux de leurs approximations et, pourquoi pas, utiliser pour ce cas un tableur.

Due formiche a passeggio (cat. 8, 9,10) 31.I.17, propone la ricerca di alcune distanze e in particolare delle misure di lunghezza in figure geometriche che comprendono gli esagoni regolari e, di conseguenza, i triangoli equilateri, i quali portano a doversi confrontare con √3.
E l'analisi a posteriori evidenzia… la perdita di identità di questo numero che, insieme a suo "cugino" √2, potrebbe avere un ruolo importante anche per lavorare con una "matematica intrigante" e con un'ottimizzazione di "lavoro".
I due esempi che seguono evidenziano, in questo senso, due procedure, entrambe corrette, ma l'una sintetica e opportuna e l'altra inutilmente più lunga e, in certi casi, potrebbe essere foriera di errori di calcolo:


ABBIAMO CONSIDERATO AB E AC IN linea retta.
AB È COMPOSTO da un lato (1dm), 2 altezze di triangoli e
Abbiamo capito che la diagonale dell'ESAGONO è uguale
A due lati di un quadrato perché ritagliando un triangolo
NOTIAMO che è ~~ugu~~ congruente a quelli formati nell'esagono.
DA questo deduciamo che il punto A e il punto B sono separati da:
- $3+2\frac{\sqrt{3}}{2} = 3+\sqrt{3}$

AC invece è composto da 4 altezze di triangoli e da 2 lati
Quindi il punto A e il punto C sono separati da:
$2+4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2+2\sqrt{3}$

[20] CREM a.s.b.l., 1995)

Noi per trovare la distanza tra i 3 punti ABC abbiamo costruito un triangolo rettangolo che ha come vertici i punti elencati in precedenza. Innanzitutto per trovare il lato AB abbiamo trovato la diagonale del rombo, che è uguale a 2 lati del triangolo equilatero, e quindi 2 dm. Poi abbiamo trovato l'altezza del triangolo equilatero $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}87$ dm

$0{,}87 \cdot 2 + \cancel{2}\ 1 = \cancel{3{,}74}\ 2{,}74$ dm

~~3,74 + 2 = 5,74 dm~~ $2{,}74 + 2 = 4{,}74$ dm

la distanza tra B e C è uguale all'altezza di 2 triangoli equilateri + il lato del quadrato, e quindi 2,74 dm

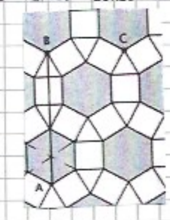
$\sqrt{4{,}74^2 + 2{,}74^2} \cong 5{,}47$ dm

La distanza diretta tra A e B è 4,74 dm e quella da A a C è 5,47 dm

Emblematico anche un elaborato nel quale i due aspetti sono entrambi contemplati. Si sente la "necessità" di estrarre la radice quadrata di 3!

SECONDO NOI IL PERCORSO DEL SEGMENTO $\overline{AB}$ È CIRCA UGUALE A 4,7 dm PERCHÉ:

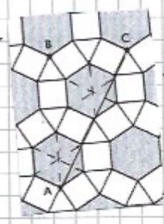
$\overline{AB} = 1 \cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 3 + \sqrt{3} \cong 4{,}7$ dm



IL PERCORSO CHE PASSA PER L'ESAGONO È UGUALE A 2 LATI DI UN TRIANGOLO EQUILATERO, 2 dm

SECONDO NOI IL PERCORSO DEL SEGMENTO $\overline{AC}$ È CIRCA UGUALE A 5,5 dm PERCHÉ:

$\overline{AC} = 1 \cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2 + 2\sqrt{3} \cong 5{,}5$ dm



IL PERCORSO CHE PASSA PER L'ESAGONO È UGUALE A 2 ALTEZZE DI UN TRIANGOLO EQUILATERO

$\sqrt{3} : 2 \cdot 2 = \sqrt{3}$

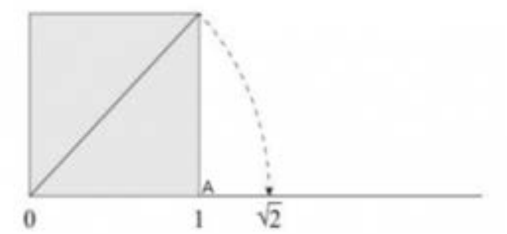
Le misure delle diagonali rispettive di un quadrato di lato unitario e di un cubo anch'esso di lato unitario, sono lì. sotto i nostri occhi, sotto gli occhi degli allievi, ma poi, se li si trasforma in forma decimale… le cifre decimali sono illimitate e anche non periodiche!

Per errata comodità si taglia corto con queste lungaggini e si prendono (se va bene) i valori 1,41 e 1,73, senza aggiungere altro!

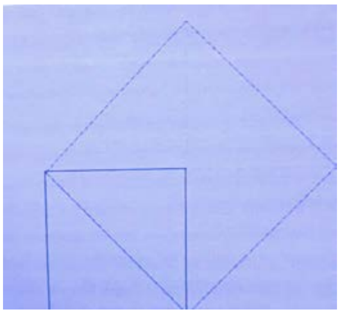
Questi due numeri li si omologa erroneamente ai numeri razionali, ma loro vorrebbero ribellarsi e raccontare ai nostri allievi una storia che affonda le sue radici a millenni fa.

Perché negare agli allievi "il dramma" dei pitagorici che si scontrano con l'incommensurabilità?

Umanizziamo questa matematica avulsa troppo spesso dalla realtà anche storica.
Che cosa significa incommensurabilità? Con gli allievi si può dibattere su quale possa essere il significato di questo termine per arrivare a stabilire, se si tratta di due grandezze, che esse non ammettono una misura comune.
E allora, queste diagonali quanto misurano?
Ebbene, rispettivamente √2 e √3. Anch'essi sono numeri, ma con caratteristiche diverse da quelli incontrati in precedenza.
In che rapporto stanno rispetto al lato unitario? Gli allievi potrebbero ritagliare dei pezzetti sempre più piccoli del lato unitario e provare a metterli sulla diagonale del quadrato. Per quanto piccoli, non si riuscirà a ricoprire **esattamente** la diagonale.
Ma questa misura esiste, visto che la diagonale esiste.
Se proprio vogliamo vedere dove si colloca sulla retta dei numeri… torniamo alla rappresentazione geometrica.



E quanto misurerà, per esempio, l'area del quadrato che ha per lato √2? In che rapporto sta questo nuovo quadrato con quello di area 1?



Ecco un'idea di matematica intrigante.
Detto tutto ciò, è comunque molto più pratico lasciare √2 e √3 in questa forma, a meno che non si debba trovare una misura **approssimata**, ma allora è necessario dichiararlo.
√2 e √3, a questo punto, non si ribelleranno e si accontenteranno di questa rappresentazione, purché dichiaratamente **approssimata**.
Federica Curreli e Cinzia Utzeri hanno svolto su queste problematiche e con problemi citati più sopra una ricca attività didattica riportata nell'allegato II".

Allegato I

TRIANGOLI TASCHINI E … OCCHI CHE BRILLANO

Brunella Brogi

Nello scrivere queste righe ho in mente alcuni dei miei alunni: un ragazzo brillante, ormai alla scuola secondaria di II grado, che dette questo nome ai triangoli rettangoli isosceli (modelli di Paolo Bascetta) che avevo fatto piegare alla sua classe e un'alunna dell'attuale seconda, alla quale brillavano gli occhi nel momento in cui, l'altro giorno, ha scoperto la relazione esistente tra un quadrato e quello di superficie doppia, proprio disponendo questi triangoli sul banco.

Penso anche ai miei alunni più fragili, sia per motivi linguistici, nella mia scuola ci sono molti ragazzi non italofoni, soprattutto di nazionalità cinese, o cognitivi, oppure per disturbi dell'attenzione o dell'apprendimento. Per tutti loro, l'esplorazione tramite la manipolazione di un modello cartaceo è sicuramente un aiuto nel processo di costruzione del concetto. La stessa realizzazione del modello è un significativo momento di apprendimento.

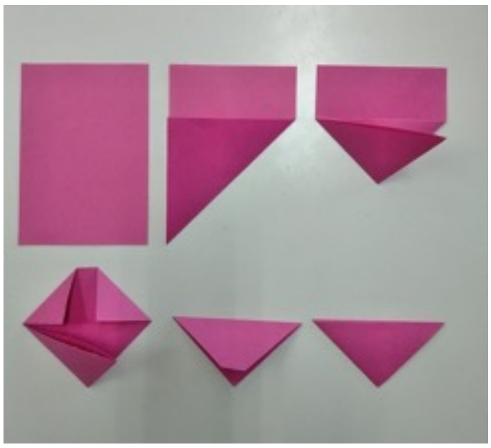
Per esperienza, in varie situazioni ho vissuto la difficoltà dei ragazzi nel riconoscere le figure geometriche e le loro proprietà. Per esempio, in un quadrato, il lato e la diagonale non vengono percepiti di lunghezza diversa, oppure un triangolo rettangolo isoscele viene considerato equilatero. La manipolazione di un modello cartaceo permette all'alunno di lavorare con figure in posizioni diverse da quelle "standard", con cui le trova raffigurate sul libro, e di imparare a riconoscerle per le loro reali caratteristiche.

Questo percorso è pensato per una classe seconda della scuola secondaria di I grado, ma nella sua parte iniziale può essere proposto anche in una classe prima. Permette di lavorare su:

- linguaggio necessario a descrivere i passaggi della piegatura del modello;
- riconoscimento delle figure ottenute dopo ogni piega del foglio, o nel crease pattern del modello;
- riconoscimento di triangoli rettangoli isosceli e analisi delle loro proprietà;
- riconoscimenti di angoli e determinazione della loro ampiezza senza misurazione con il goniometro;
- riconoscimento di poligoni ottenuti dall'affiancamento di 4 triangoli rettangoli isosceli (poliaboli) e analisi delle loro proprietà;
- isometrie, per riconoscere tramite simmetria, traslazione o rotazione se due poliaboli sono uguali o diversi;
- uso di unità di superficie diverse dal centimetro quadrato per determinare l'area dei poliaboli;
- analisi e confronto di poligoni equivalenti, i poliaboli, ma non sempre isoperimetrici;
- costruzione di un quadrato di superficie doppia di uno assegnato;
- giustificazione geometrica del valore $\sqrt{2}$;
- teorema di Pitagora;

AREA E PERIMETRO

Questa attività può essere svolta in una classe prima, come ho fatto nel corrente anno scolastico con la mia classe. Alcuni alunni avevano difficoltà a riconoscere le figure in posizioni diverse da quelle con le quali vengono di solito rappresentate nei libri di testo. Costruirle sul banco e poi riprodurle sul quaderno ha permesso di risolvere, almeno in parte, questa difficoltà.



Ogni alunno piega 4 triangoli rettangoli isosceli (per es. usando 4 foglio A6 per il modello di P. Bascetta, o 4 fogli quadrati di lato 10 cm per il modello di Francesco Decio).

Non è facile spiegare il procedimento e usare in modo corretto il lessico matematico, ma un'attività di questo tipo aiuta.

Gli alunni, all'interno di gruppi di lavoro, costruiscono poliaboli accostando i lati della stessa lunghezza dei 4 triangoli.
Si lavora sulle isometrie per verificare se poliaboli che sembrano diversi lo sono realmente, sui concetti di superficie, di area e di figure equivalenti, sul confronto dei perimetri, per i quali vengono usati i cateti e l'ipotenusa come unità di misura di lunghezza, senza ricorrere all'uso del righello per determinarne la misura.
Manipolando i moduli, l'alunno verifica, tramite il loro confronto, che i lati del triangolo hanno lunghezze diverse. Il perimetro del poliabolo viene espresso, con un linguaggio prealgebrico, come addizione del relativo numero di cateti e di ipotenuse del modulo triangolare.

La Banca di problemi del Rally Matematico Transalpino (http://www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/bp-rmtacces-ctrb-it.html) può fornire ricchi problemi per consolidare questa prima parte del percorso, come per esempio "Attraverso la quadrettatura" o "La mucca nel frutteto" oppure, da usare come stimolo iniziale, prima di piegare i modelli.

VERSO LA RELAZIONE PITAGORICA

Viene chiesto di costruire un quadrato e di costruirne un altro di superficie doppia. Se non è finalizzata alla scoperta della relazione Pitagorica, questa attività può essere proposta anche nella classe prima.
Si confrontano i due quadrati anche relativamente al loro perimetro, ma senza misurare con il righello. Il perimetro maggiore, al pari della superficie, è probabilmente percepito come doppio dagli alunni. Si arriva a scoprire il valore del lato del quadrato di area doppia: se il lato del quadrato piccolo viene preso come unitario, l'altro si scopre essere $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ viene scoperto e usato tramite una "giustificazione" geometrica, ed è anche il valore dell'ipotenusa del "triangolo taschino", se la lunghezza dei suoi cateti viene presa come unità di riferimento.
"Il tangram del falegname" può consolidare le scoperte fatte tramite la tessera triangolare.
Una costruzione simile, ottenuta affiancando un quadrato a ciascun cateto del modulo triangolare, permette di scoprire la relazione pitagorica, tramite il conteggio delle tessere triangolari utilizzate.

Allegato II

ATTIVITÀ MISURE E APPROSSIMAZIONE

Federica Curreli e Cinzia Utzeri

Abbiamo condotto un'esperienza laboratoriale nelle nostre classi prime e seconde di scuola secondaria di primo grado (categorie 6 e 7) con i problemi "I percorsi delle scimmie (I)", "La divisione del rettangolo" e "Spirale di quadrati (I)", due dei quali menzionati nell'articolo del quale questa appendice fa parte.

Obiettivi dall'attività:

- la misura e i suoi strumenti;
- approssimazione e misura;
- equiestensione per somma di parti congruenti e confronto tra le parti diverse (capire che la diagonale del quadrato è più lunga del lato);
- avvio al calcolo algebrico;
- approssimazione come misura che esiste ma non riusciamo ad esprimerla;
- uso della $\sqrt{2}$ lasciato indicato (non estratto) con la radice e non scritto come numero decimale illimitato.

Fase 1: attività laboratoriale sulla misura "la misura e i suoi strumenti"
Si è lavorato sulla sensibilità dello strumento e sulla precisione della misurazione, per poi impattare positivamente sulla significatività degli apprendimenti e sulla validità dell'accertamento con prove concrete incitando positivamente lo sviluppo degli apprendimenti attraverso un'attività sulla misura per tutti i gruppi ma in particolare per quelli che non hanno mai lavorato per confronto.
L'attività pratica ha condotto gli alunni a misurare con le mani, con i piedi, con oggetti, fino alla costruzione di strumenti di misura come metro, decimetro/centimetro quadrato, metro quadrato, metro cubo. La sperimentazione è stata condotta con l'uso e il confronto della misura di diverse grandezze fatta attraverso l'uso di strumenti di misura come dinamometri, bilance a due braccia e di precisione, cilindri, becher, siringhe di capacità diverse, termometri, uso di diversi tipi di metro da sarta, da muratore, ecc. Misura per confronto.

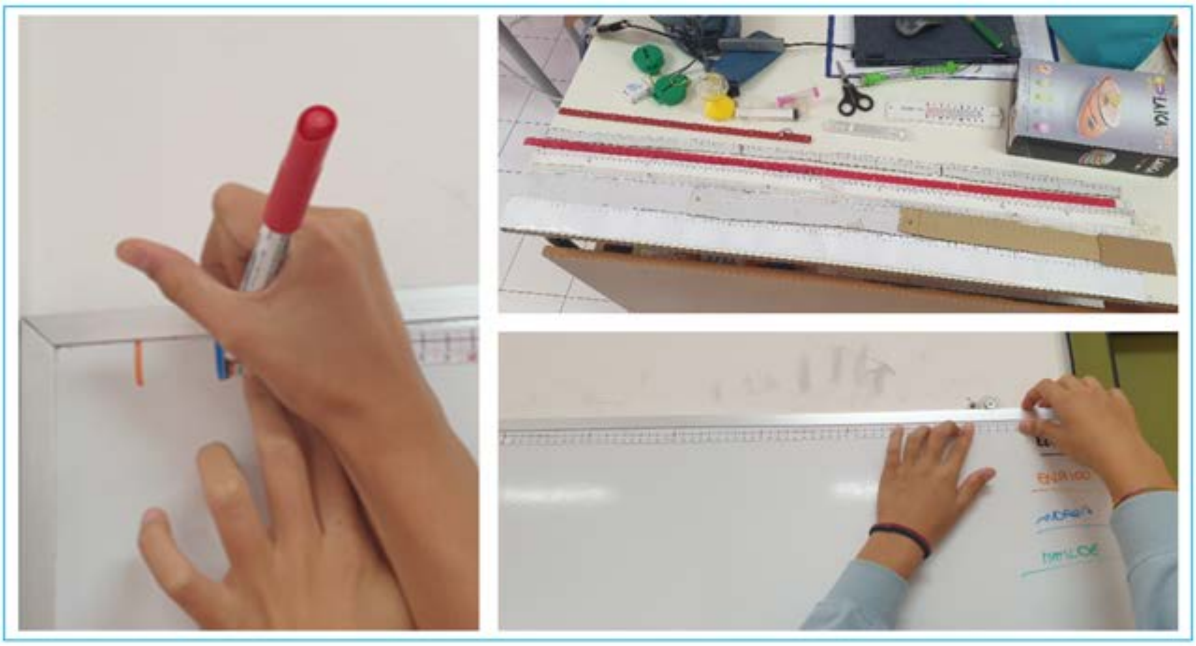


Fig. 1 Lunghezza del primo metro raggiungeva la linea arancione, il secondo la blu e il terzo la verde ecc.

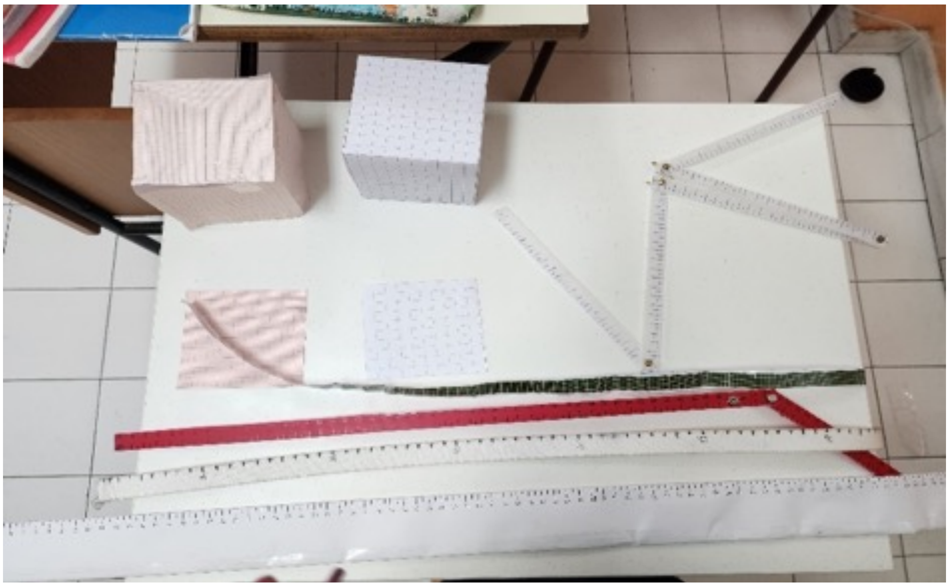


Fig. 2

Nella costruzione del metro gli alunni erano liberi di costruirli utilizzando il materiale che preferivano, si è riscontrato che non tutti gli alunni sono stati accurati nella costruzione, alcuni hanno costruito il metro senza nessun sottomultiplo, altri hanno mancato di precisione. Per prima cosa dovevano misurare il loro banco e si sono resi conto che non tutti potevano con il loro metro misurarlo (perché non avevano riportato i sottomultipli) e altri hanno riportato diverse misurazioni per mancanza di precisione, perché ad esempio non partivano dallo zero ecc. Dopo il confronto alcuni alunni volevano perfezionare il loro strumento, o aggiungendo il pezzo mancante o aggiungendo i sottomultipli, purtroppo anche in questo caso alcuni lo hanno fatto "ad occhio" senza la base del metro di confronto (i centimetri aggiunti ai decimetri non in scala). L'insegnante ha chiesto agli alunni che avevano costruito strumenti inadeguati di ricostruirli e di essere precisi perché durante l'anno avrebbero fatto con i loro strumenti altre misurazioni e già avevano constatato l'inadeguatezza dello strumento. Gli altri alunni che avevano misurato in maniera imprecisa gli è stato chiesto di rimisurare con il tutoraggio di altri alunni.

Fase 2: Approccio all'approssimazione "misura per confronto di tratti curvilinei e diagonali di quadrati". Equiestensione per somma di parti congruenti e confronto tra le parti diverse (capire che la diagonale del quadrato è più lunga del lato) e avvio al calcolo algebrico. Lavorare e confrontarsi con valori del tipo "minore di" o "maggiore di" e non automaticamente "esattamente uguale a" per superare le problematiche della misura e dell'approssimazione.

Nella sperimentazione in classe abbiamo dato il problema **I percorsi delle scimmie (I)** (cat. 5-6-7) 23.fin.30, che differisce dal problema "Attraverso la quadrettatura" per avere nel percorso anche tratti curvilinei collegandosi anche al problema I biscotti. La scelta di questo problema ha come compito matematico confrontare le lunghezze di quattro percorsi che seguono linee orizzontali, verticali, diagonali o quarti di circonferenza ed elencarli in ordine crescente di lunghezza e ha la particolarità che a colpo d'occhio non si percepisce quale sia il percorso più lungo.

Attraverso la risoluzione del problema si vuole portare gli alunni ad impattare sulla difficoltà (riscontrata durante l'analisi a posteriori delle prove analizzate) nel non riconoscere che i tratti curvilinei e le diagonali di un quadrato non possono essere uguali al lato/segmento verticale e nell'errore in cui incorrono molto spesso anche nella misurazione considerando la diagonale/segmento obliquo uguale al lato/segmento verticale.

Prima di iniziare gli alunni vengono invitati a disporsi in gruppi di due o tre, l'insegnante consegna il problema e osserva le diverse dinamiche, procedure e strategie di svolgimento di ciascun gruppo.

Dopo lo svolgimento invita i gruppi a presentare alla classe argomentando alla lavagna il percorso risolutivo svolto. La discussione collettiva deve essere finalizzata ad individuare tutte le possibili soluzioni, tutte, utili per arrivare a confrontare le lunghezze dei quattro percorsi che seguono linee orizzontali, verticali, diagonali o quarti di circonferenza ed elencarli in ordine crescente.

In questa fase di analisi, avendo osservato durante la risoluzione dei problemi i vari gruppi e avendo visto le diverse strategie utilizzate nella risoluzione del problema e i diversi errori, poniamo alcune domande stimolo in modo da far scaturire, durante la discussione, tutte le difficoltà emerse:

1) errori di conteggio e di confronto che si potranno superare per sovrapposizione e per sottrazione e confronto. A parer nostro vuol dire che probabilmente l'errore nasce dalla poca abitudine fare il confronto con le misure per sovrapposizione;
2) errori di misura dove non vedono la differenza di lunghezza tra i diversi percorsi; si può provare anche ad ingrandire ma ci vuole il prerequisito dell'attività pratica della misurazione.

Dalla discussione è emerso che la maggior parte dei gruppi ha utilizzato il righello per misurare sia il segmento verticale, che quello obliquo che quello curvilineo, considerando della stessa lunghezza sia il segmento verticale che quello curvo. (Fig. 3).

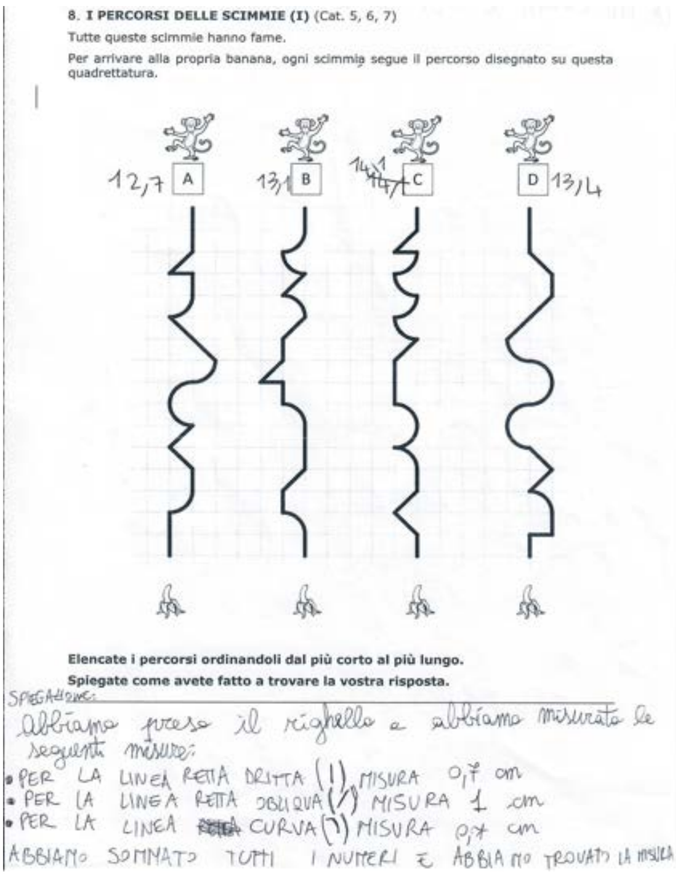


Fig. 3

Nella Fig. 4 gli alunni scrivono "Abbiamo contato tutte le linee su ogni quadretto e abbiamo scoperto che ogni percorso ha la stessa lunghezza, ma per esserne certi, abbiamo svolto diverse prove: abbiamo raddrizzato tutti i percorsi e nuovamente risultano uguali".

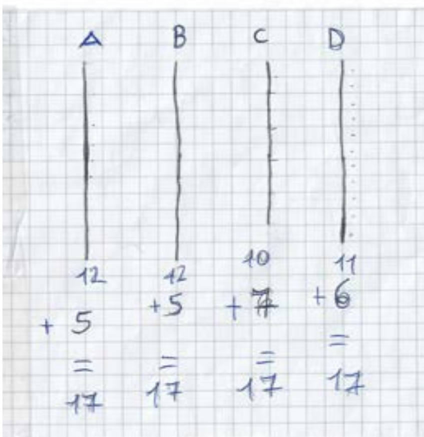


Fig. 4

Due gruppi affermano di aver lavorato sovrapponendo/confrontando i diversi segmenti. Fig. 5 a e b e lavorando per sottrazione, "eliminando tratti uguali in ogni gruppo".

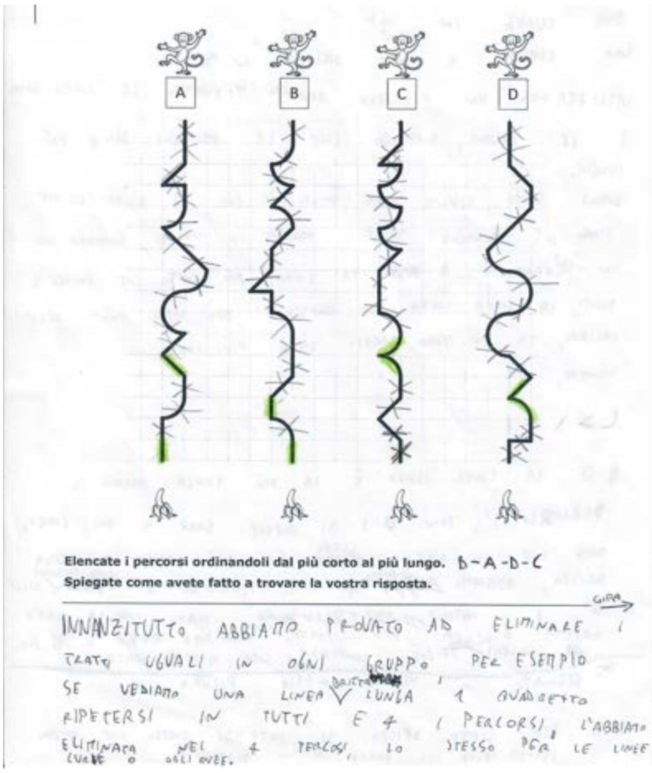
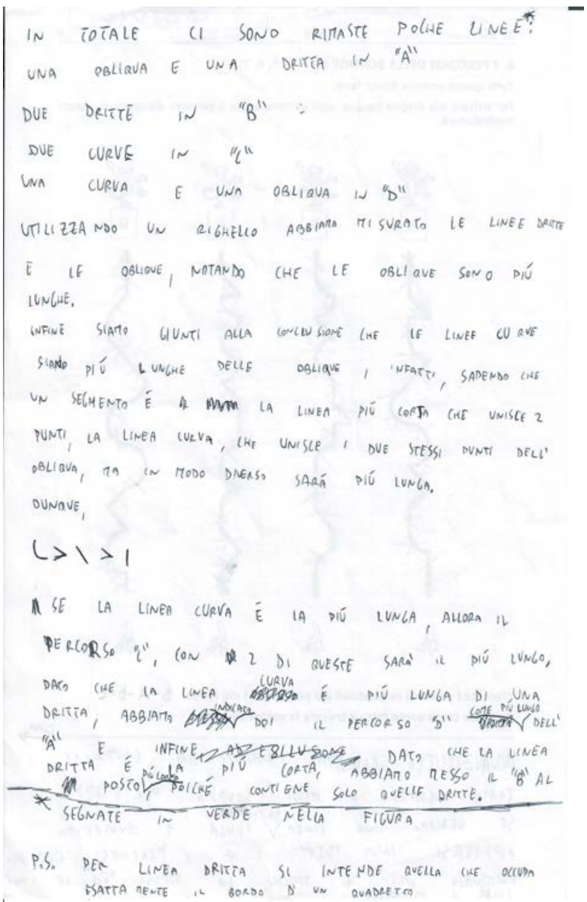


Fig. 5a



IN TOTALE CI SONO RIMASTE POCHE LINEE*:
UNA OBLIQUA E UNA DRITTA IN "A"
DUE DRITTE IN "B"
DUE CURVE IN "C"
UNA CURVA E UNA OBLIQUA IN "D"
UTILIZZANDO UN RIGHELLO ABBIAMO MISURATO LE LINEE DRITTE E LE OBLIQUE, NOTANDO CHE LE OBLIQUE SONO PIÙ LUNGHE.
INFINE SIAMO GIUNTI ALLA CONCLUSIONE CHE LE LINEE CURVE SIANO PIÙ LUNGHE DELLE OBLIQUE, INFATTI, SAPENDO CHE UN SEGMENTO È ~~A~~ LA LINEA PIÙ CORTA CHE UNISCE 2 PUNTI, LA LINEA CURVA, CHE UNISCE I DUE STESSI PUNTI DELL'OBLIQUA, MA IN MODO DIVERSO SARÀ PIÙ LUNGA.
DUNQUE,
C > \ > |
SE LA LINEA CURVA È LA PIÙ LUNGA, ALLORA IL PERCORSO "C", CON 2 DI QUESTE SARÀ IL PIÙ LUNGO, DATO CHE LA LINEA CURVA È PIÙ LUNGA DI UNA DRITTA, ABBIAMO INDICATO POI IL PERCORSO "D" COME PIÙ LUNGO DELL'"A" E INFINE, DATO CHE LA LINEA DRITTA È LA PIÙ CORTA, ABBIAMO MESSO IL "B" AL POSTO PIÙ CORTO POICHÉ CONTIENE SOLO QUELLE DRITTE.
* SEGNATE IN VERDE NELLA FIGURA
P.S. PER LINEA DRITTA SI INTENDE QUELLA CHE OCCUPA ESATTAMENTE IL BORDO DI UN QUADRETTO

Fig. 5b

Dopo un'animata discussione, un gruppo, per spiegare ai compagni la risoluzione del problema, riproduce col nastro carta sul pavimento della classe i percorsi. Ogni gruppo costruisce sul pavimento uno dei diversi percorsi si va così a delineare una variante della figura con un ingrandimento della quadrettatura; variante della proposta fatta inizialmente, questa proposta degli alunni ci ha portato a modificare le attività del percorso programmate si pensa di proporre agli allievi, quando avranno terminato di risolvere, una variante della figura con un ingrandimento della quadrettatura con il lato di un centimetro, chiedendo poi loro se vogliono apportare modifiche rispetto alla prova appena svolta, o se confermano ciò che avevano proposto".

Dopo averlo costruito si pone il problema di come verificare la differenza di lunghezza tra i diversi segmenti. I gruppi hanno a disposizione diversi materiali: spago, righelli, gomitolo di lana, metro.

Alcuni continuano ad utilizzare il righello anche per le linee curve altri invece intuiscono che possono utilizzare lo spago per poi rettificare la curva.

Fig. 6

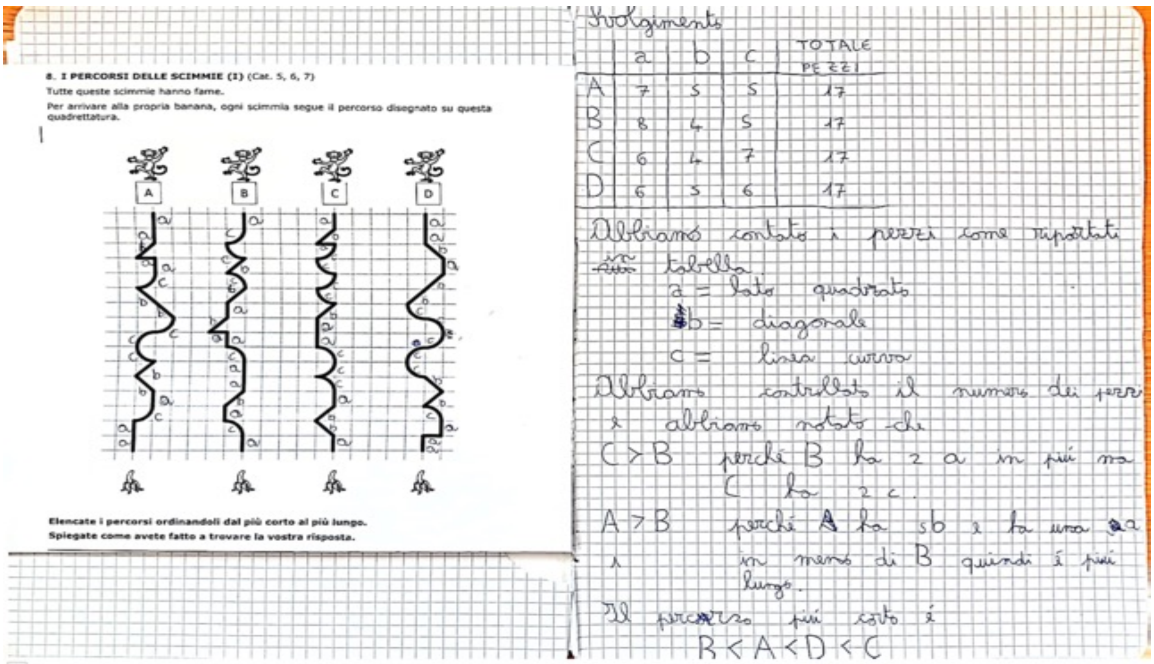


Fig. 7

Queste attività di misurazione le abbiamo proposte anche durante i nostri laboratori scientifici, in particolare sull'errore commesso con un'approssimazione alla prima, seconda o … altra cifra decimale. In questo ambito la comprensione dell'ordine di grandezza dell'approssimazione è fondamentale come approfondimento. Qui di seguito riportiamo l'approfondimento sulla manipolazione dei numeri reali radice di 2 e pi greco.

Fase 3: Approssimazione come misura che esiste ma non riusciamo ad esprimerla

Avendo svolto la sperimentazione del percorso in una classe prima e seconda si è deciso di lavorare sull'uso dei numeri irrazionali.
La maggior parte dei problemi di geometria che vengono dati a scuola si riducono al calcolo di perimetri e di aree che richiedono l'utilizzo di una formula specifica, non portando gli alunni a lavorare sull'approssimazione come misura che esiste ma non riusciamo ad esprimerla.
Partendo dal concetto che la misura di grandezza è un rapporto tra due numeri interi che danno come risultato un numero reale, e che il numero decimale dal punto di vista matematico è un numero espresso da un rapporto che arriva ai numeri reali e $\sqrt{2}$ è un numero, abbiamo chiesto agli alunni di calcolare la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1; gli alunni hanno subito esclamato "È facile!"
Col teorema di Pitagora trovano la lunghezza della diagonale, si chiede agli allievi che numero hanno ottenuto, chi dice 1,4 chi 1,41 chi 1,4142135… nessuno dice $\sqrt{2}$ pur avendo già lavorato sui numeri irrazionali. A questo punto si ribadisce che $\sqrt{2}$ è un numero e in molti casi se vogliamo essere precisi lo si deve scrivere così com'è possiamo anche dire che è compreso tra due valori o che è circa 1,41… .
A questo punto abbiamo chiesto agli alunni di rappresentare geometricamente un segmento lungo $\sqrt{2}$.
Gli alunni provano a rappresentarlo estraendo la radice quadrata ma non riescono a posizionarlo sulla retta.
Non tutti i numeri sono quadrati perfetti$\sqrt{2}$ per esempio non lo è non è possibile trovare il valore esatto della radice è un numero illimitato non periodico, il numero esatto va lasciato indicato come $\sqrt{2}$.
Se vogliamo individuare dei valori approssimati della sua radice 1^2 e 2^2 in cui 1^2=1 e 2^2=4 quindi $\sqrt{2}$ è un numero compreso tra 1 e 2, ossia $1 < \sqrt{2}$<2 approssimazione per difetto e per eccesso. Proviamo a restringere l'intervallo individuando il valore della prima cifra decimale la radice sarà compresa tra 1,3 e 1,4, potremmo continuare a restringere l'intervallo ai centesimi e ai millesimi ma non arriveremo mai ad un numero preciso poiché non esiste nessuna frazione di numeri interi che sia uguale a $\sqrt{2}$ per questo è detto numero incommensurabile.
Successivamente abbiamo chiesto agli allievi di posizionare la misura della diagonale sulla retta dei numeri partendo dalla costruzione del lato del quadrato di lato 1 sul piano Cartesiano.

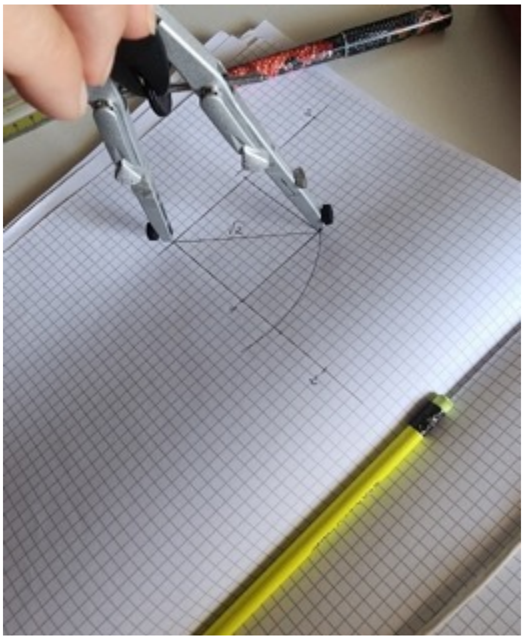


Fig. 8

In questo modo grazie all'uso del compasso sono riusciti a posizionare sulla retta dei numeri il numero $\sqrt{2}$. L'irrazionalità di $\sqrt{2}$ è dovuta al fatto che in un quadrato non esiste nessun sottomultiplo comune al lato e alla diagonale, pur provando non riusciamo ad inserire nella retta dei numeri nessun segmentino che possa stare un numero intero di volte nel lato e un altro numero intero di volte nella diagonale, non esiste infatti il rapporto tra questi due numeri, cioè non è possibile avere un'unità di misura comune, sono incommensurabili.
Un altro numero incommensurabile è π.
Si propone in classe un'attività a gruppi in cui dopo aver ritagliato da dei cartoncini tanti cerchi tutti uguali, costruiti con l'uso di un barattolo che avevamo in classe si è chiesto agli alunni di misurare la lunghezza della circonferenza

e il suo diametro. Hanno circondato con il filo il recipiente per poi tagliare il filo nel punto in cui si incontravano i due estremi. Hanno così misurato la lunghezza della circonferenza, attraverso la lunghezza dello spago (circonferenza rettificata) le due misure vengono riportate nel loro quaderno.
La maggior parte inaspettatamente ha utilizzato lo spago e il patafix per bloccarlo lungo la circonferenza.

Fig. 9

Durante la discussione collettiva gli alunni riportano alla lavagna le misure trovate del rapporto tra la misura della circonferenza e del suo diametro C/d = π= 3,141592653589793238… $\pi\approx$3,14.

Fig. 10

Si è riscontrato, come si può osservare anche dai valori riportati alla lavagna, che non tutti gli alunni sono stati precisi nel prendere le misure, nonostante le raccomandazioni dell'insegnante e inoltre nella maggior parte dei casi nessuno degli alunni ha usato il simbolo "≈", (probabilmente perché in precedenza pur avendo sperimentato laboratori sull'approssimazione non si è utilizzato abbastanza questo simbolo per indicarle).
Per lavorare sull'approssimazione è stato dato il problema "La divisione del rettangolo". Nella maggior parte dei gruppi le misure dei lati dei triangoli vengono ricavate con il teorema di Pitagora e sono approssimate ai centesimi senza mai utilizzare il simbolo "≈". Alcuni erroneamente applicano il teorema di Pitagora anche ai triangoli G e B.
La maggior parte dei gruppi non utilizza il righello, probabilmente per il fatto che volutamente i margini dei triangoli che formano la bandiera sono ondulati, come se stesse volteggiando. Dall'osservazione fatta dalle

insegnanti in classe, durante lo svolgimento del problema, si evidenzia la difficoltà nell'analizzare figure non convenzionali che gli alunni esprimono come "righe curve tutte diverse tra loro".

Fase 4: uso di $\sqrt{2}$ lasciato indicato con la radice e non scritto come numero decimale illimitato non estratto

Nell'esperienza precedente abbiamo usato il lato come unità di misura senza riuscire mai a conoscere con esattezza quanti decimetri misura la diagonale.
A questo punto chiediamo agli alunni se il lato del quadrato raddoppia o triplica cosa succede alla diagonale?
Gli alunni riportano nel quaderno la loro esperienza scoprendo la relazione tra il lato e la diagonale.

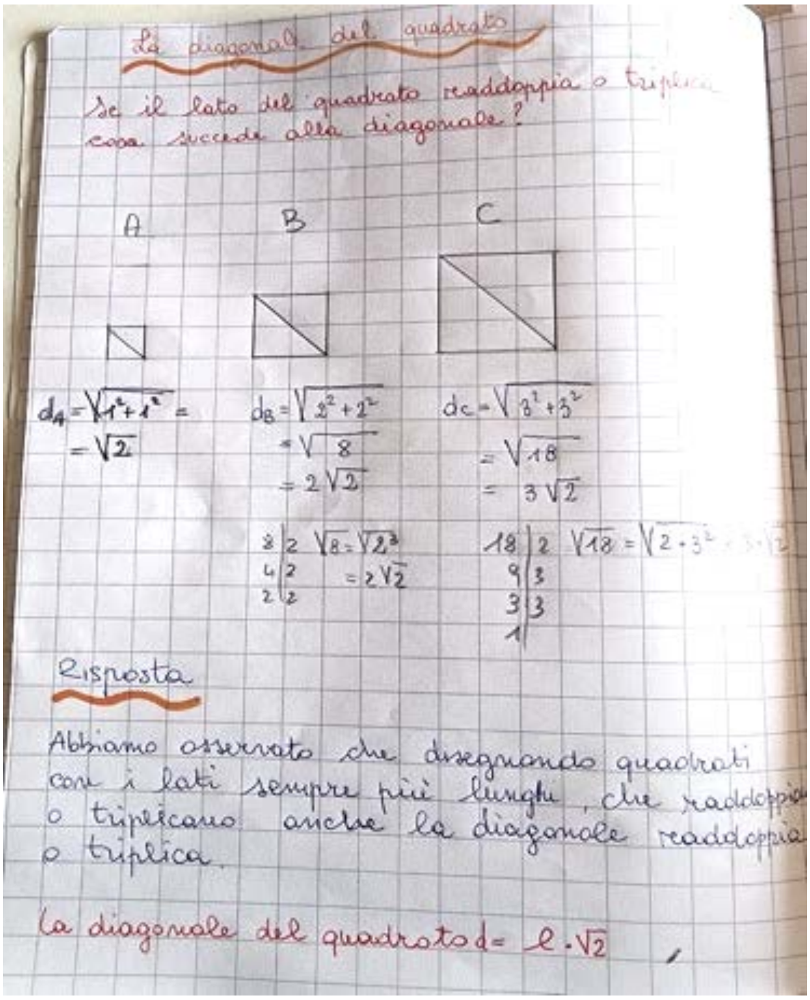


Fig. 11

A questo punto abbiamo proposto in classe un altro bellissimo problema: Spirale di quadrati (I). Le figure poste in posizione non convenzionale e le relazioni fra esse non sono evidenti, ma dovranno venire alla luce attraverso la risoluzione del problema.
Durante la sperimentazione in classe, la maggior parte dei gruppi ha utilizzato la figura disegnandoci sopra, successivamente hanno iniziato a disegnare su carta i singoli quadrati per arrivare a trovare la diagonale e poi il lato del quadrato successivo.
Le difficoltà emerse sono legate all'uso del quadrettato piccolo che li ha portati a commettere errori nella rappresentazione dei quadrati e in particolar modo nella costruzione del successivo quadrato utilizzando la diagonale del quadrato precedente posizionato non lungo i lati della quadrettatura ma lungo la diagonale della quadrettatura del foglio. Solo in un caso hanno estratto la radice, in generale la maggior parte dei gruppi lo ha svolto come di seguito riportato.

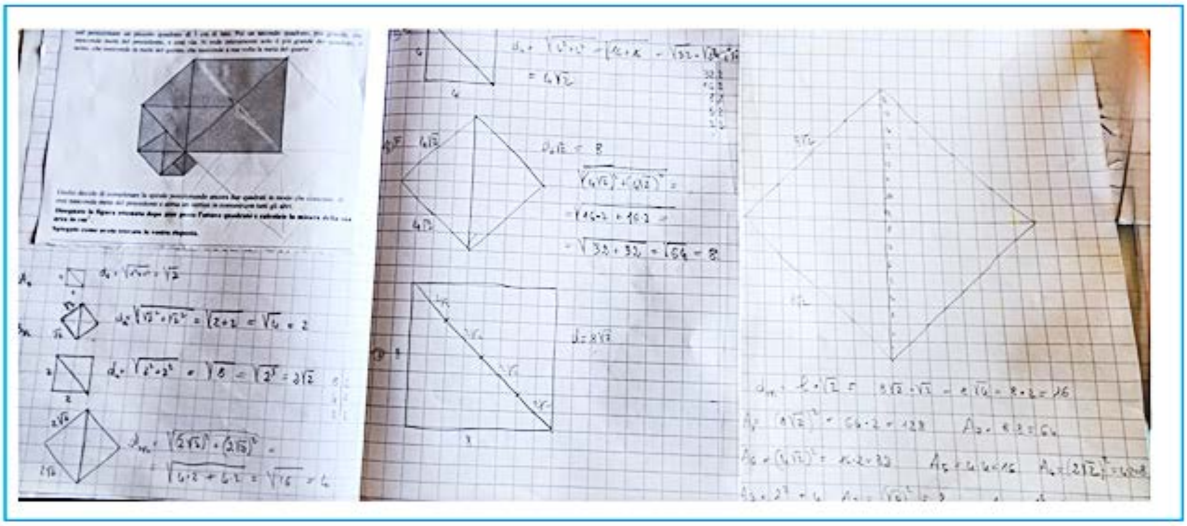


Fig. 12

Il lavoro successivo li ha portati a ritagliare i quadrati, partendo dal più grande e a posizionarli correttamente, poi a calcolare l'area per sottrazione dal più grande al più piccolo (meno ¼ dell'area escluso il più piccolo che ne ricopriva la metà meno ½ dell'area).

Fig. 13

Un gruppo ha provato a ricostruire la figura disegnandola su quella data ma hanno avuto difficoltà e si sono bloccati.

Un altro gruppo ha costruito la figura partendo dal primo triangolo "Abbiamo scoperto che è lui (il quadrato diviso in 4 triangoli lo hanno indicato con la freccia) partendo dal triangolo rettangolo più piccolo si crea un triangolo rettangolo più grande ogni triangolo precedente è la metà del successivo" ma fanno errori nel calcolo dell'area ottenuta sommando le aree dei singoli triangoli.

Alla fine dell'attività è stato chiesto agli alunni di fare un resoconto sull'attività svolta e dichiarano: "Ho imparato di più perché ho fatto l'attività insieme anche ai miei compagni", "Il fatto di averlo fatto me lo ha fatto imparare", "Il circa non me lo dimenticherò più", "Lasciare indicata la radice di due mi ha reso più facile il lavoro", "anche pi greco".

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

LA PROPORTIONNALITÉ ET SES PROBLÈMES

François Jaquet et Stefania Massai

Au nom du Groupe Proportionnalité

Résumé

Le début de l'article rappelle que le concept de proportionnalité est problématique pour toutes les disciplines des sciences humaines, et non seulement pour l'enseignement des mathématiques, et a évolué au cours du 20e siècle, lors du passage de la traditionnelle « théorie des proportions » aux tendances actuelles de la proportionnalité envisagée dans le cadre algébrique des fonctions linéaires.

Après un rappel de ce qu'on entend actuellement à propos de « proportionnalité », on entre dans les recherches sur ce thème au sein de l'ARMT, de son groupe de travail et se sa Banque de problèmes.

Un premier exemple analyse deux problèmes isomorphes qui ne se distinguent que par une modification d'une variable didactique qui entraîne une baisse très significative des résultats. C'est l'occasion d'une réflexion sur les raisons de l'échec des élèves de certaines catégories par rapport à leurs camarades plus âgés.

Un deuxième exemple cherche à approfondir le type de représentations que se font les élèves d'une opération qu'ils doivent mettre en œuvre dans un problème élémentaire de « passage à l'unité » où la réponse s'obtient en divisant un nombre par deux puis en multipliant par 3 le résultat obtenu.

Quelques conclusions montrent l'intérêt de la démarche du RMT consistant à faire résoudre le même problème à des milliers d'élèves de classes de degrés différents sans aucune intervention de l'enseignant, à leur demander de donner leur solution mais aussi de décrire leur démarche de résolution, à attribuer des points à leurs copies, selon des critères communs, à dresser les statistiques des résultats et à analyser les copies a posteriori. C'est cette démarche qui permet de fournir des données aux enseignants lorsqu'ils choisissent de reprendre un problème avec leur classe entière en vue d'une exploitation didactique.

1. La proportionnalité et sa problématique

> *La capacité de raisonner en utilisant des relations proportionnelles résulte d'un processus complexe qui est long à assimiler. De nombreuses expériences concrètes variées sont nécessaires pour comprendre la nature d'une relation proportionnelle et il faut plus de temps encore pour acquérir la capacité d'en faire des applications abstraites.*
> *… La notion de « proportionnalité » trouve également un terrain d'application au sein de la discipline juridique. Mieux, elle imprégnerait même toutes les sphères du droit...*

La citation ci-dessus est tirée d'un article « Sur les traces du principe de proportionnalité : une esquisse généalogique » publié dans une revue de droit de l'Université McGill au Québec[1] dans le cadre de recherches doctorales intitulées : « Le principe de proportionnalité à l'aune des technologies de l'information. »

On aurait pu trouver d'autres citations, par exemple à propos de la « Divine proportion » dans le domaine de l'art et de l'architecture.

Le sujet a des retombées politiques, culturelles, sociales et il n'y a donc pas que l'enseignement des mathématiques qui se préoccupe de proportionnalité.

A est à B comme C est à D.

Qui, parmi les écoliers, de la période d'Euclide à la fin du 20e siècle, a pu donner du sens à cette étrange expression ? Qui a vraiment compris la règle de trois, les produits en croix et autres algorithmes faisant appel aux « proportions » sans connaissances algébriques ? Du point de vue de l'enseignant, la proportionnalité a toujours été un chapitre ardu, source d'obstacles difficilement surmontables pour de très nombreux élèves, assimilable à la quadrature du cercle.

Des recherches bibliographiques font apparaître beaucoup d'articles, livres, thèses sur le sujet, qui s'accordent sur sa difficulté du point de vue didactique et sur l'évolution de son enseignement au cours du 20e siècle et du début de 21e.

Dès les années 1970, on a cherché à placer l'élève dans des situations plus faciles à maîtriser. Est apparu alors le lien avec la « linéarité » tiré des fonctions linéaires qui ont fait leur apparition dans les programmes à la suite des réformes des « maths modernes ».

---

[1] Antoine Guilmain. Revue de droit de McGill. Vol. 61, numéro 1, september 2015, p. 87–137.

Dans les programmes scolaires, le thème de la proportionnalité, traditionnellement réservé aux trois dernières années de l'école obligatoire, apparaît maintenant à partir de nos catégories 5 et/ou 6 selon les pays, lorsque les problèmes mettent en jeu des rapports, sous forme de fractions ou nombres rationnels non naturels.
Cependant, bien avant de citer le terme explicitement, une majorité de problèmes traités avec des nombres naturels se situent dans des contextes de proportionnalité : en numération lorsqu'il s'agit de passer d'unités aux dizaines ; lors de conversions de mètres en centimètres ou de minutes en heures ; dans tous les problèmes multiplicatifs où, par exemple, connaissant le prix d'un certain nombre objets on demande de déterminer le prix d'un autre nombre d'objets de même nature.

Un récent article[2] de la revue MathémaTICE laisse bien entrevoir que cette anticipation de l'introduction de la proportionnalité a des conséquences didactiques : *Cette complexité est due en particulier à ce qu'on travaille la proportionnalité bien avant d'avoir à sa disposition les outils nécessaires. Mais il n'est pas possible de procéder autrement : s'en priver éliminerait trop de notions, de savoirs, de supports pour développer des compétences, et ne permettrait pas de comprendre le monde de la même façon. Alors on assume que ce soit un casse-tête : modéliser la proportionnalité est en réalité impossible pendant des années, et on ne peut que l'illustrer en exhibant des exemples et des contre-exemples, on va essayer de rendre les élèves compétents pour la reconnaître et l'utiliser.*

2. La proportionnalité, définition élémentaire

On trouve actuellement des définitions de la proportionnalité liées à la notion de « suite » et non limitée aux quatre éléments de la « recherche de la quatrième proportionnelle », comme par exemple dans Wikipedia :

En mathématiques, on dit que deux suites de nombres sont ***proportionnelles*** *quand, en multipliant (ou en divisant) par une même constante non nulle, les termes de l'une on obtient les termes de l'autre. Le facteur constant entre l'une et l'autre de ces suites est appelé* ***coefficient de proportionnalité.*** *Ces suites de nombres étant par exemple des grandeurs mesurées.*

…

Cette définition vulgarisée est simple. En quatre lignes elle dit effectivement tout ce qu'il faut savoir mais en laissant des questions ouvertes :

- Il y a une première suite de nombres ; plus que les deux nombres des algorithmes classiques, même beaucoup plus, vraisemblablement, des centaines, des milliers, une infinité ?
- De quels types de nombres s'agit-il ? naturels, entiers, décimaux, rationnels, réels ?
- Les nombres de cette suite sont-ils ordonnés ?

Elle demande aussi une « traduction » en opérations généralisées :

- On peut multiplier les nombres de cette première suite, par une même constante non nulle ou par un facteur constant appelé coefficient et à chaque fois on obtient un nombre correspondant de la deuxième suite ce qui se traduit en algèbre par $x \longrightarrow f(x) = k\,x$.
- Cette dernière relation a, par nature de la multiplication qui est associative et distributive sur l'addition, deux propriétés que les mathématiciens écrivent ainsi (et qui se lisent « facilement » si l'on a de bons yeux) :
  - propriété additive si $x \longrightarrow k(x)$ alors $x + y \longrightarrow k(x + y) = kx + ky$
  - propriété multiplicative si $x \longrightarrow k(x)$ alors $nx \longrightarrow k(n\,x) = n(k\,x)$

  ou qui s'expriment ainsi aussi « facilement » (si l'on a une bonne élocution ou de bonnes oreilles) :
  - propriété additive : si l'image d'un nombre est ce nombre multiplié par un coefficient k, l'image d'une somme de deux nombres est la somme des images de chacun des deux nombres ;
  - propriété multiplicative : si l'image d'un nombre est ce nombre multiplié par un coefficient k, l'image du produit de ce nombre est le produit de son image par k.

L'adulte qui connaît un peu de mathématique ne se pose pas les questions ci-dessus, car il sait à peu près ce qu'est une fonction linéaire, car il a entendu parler de croissance ou de continuité, car il dispose d'un modèle des nombres réels, la droite numérique, et car il connaît aussi les deux propriétés, au moins intuitivement.

Comme l'élève ne sait pas tout cela, on lui propose des instruments, en particulier le tableau de proportionnalité[3] pour remplacer les algorithmes de la « recherche de la quatrième proportionnelle » traditionnelle, (produits croisés, « proportion », règle de trois, … On imagine maintenant une disposition en deux lignes ou deux colonnes comme ci-dessous :

[2] Claire Lommé. *La proportionnalité, une notion essentielle (en maths et dans la vie citoyenne)* Revue MathémaTICE no 83, janvier 2023

[3] Suite de la définition de Wikipedia citée en début de chapitre 2. Un tableau de proportionnalité est un tableau où chaque ligne est proportionnelle aux autres. C'est une manière d'organiser les données qui permet de reconnaître les situations de proportionnalité, de déterminer le coefficient de proportionnalité et d'utiliser la loi proportionnelle. C'est un outil qui est a été très utilisé en didactique des mathématiques, notamment dans les années 70[1] ; en France, il est utilisé, parmi d'autres outils de proportionnalité, dès le *cycle 3* (CM1, CM2, 6e).

Deuxième su	A		…	

Les nombres de la première ligne (notés ici en minuscules) et ceux de la deuxième suite (en majuscules) sont en liaison (verticalement), par la « clé » de la relation multiplicative de « facteur » k : **« × *k* ».**

Dans son parcours scolaire, l'élève rencontre très tôt le cas le plus simple de la proportionnalité lié à l'opération arithmétique de multiplication, par exemple : Quel est le prix de 3 objets à 5 euros la pièce ? Évidemment il ne sait pas qu'il s'agit de proportionnalité ni qu'il y a deux « suites de nombres » en jeu. Si l'on voulait analyser sa procédure de résolution par un tableau de proportionnalité on obtiendrait quelque chose du genre :

Prix des obje	5		5	5 + 5 = 15	›u 3 × 5 = 15	…

À ce stade, le « 3 × 5 » qui donne la solution est encore de type additif et le signe « × » a le sens d'une répétition (« fois ») et non encore d'une multiplication par un coefficient réel qui fait passer d'une ligne à l'autre.

Un peu plus tard, on demande à l'élève de calculer le prix unitaire, par exemple Combien coûte un objet si 3 objets coûtent 21 euros au total. La tâche est alors moins évidente. Il ne sait toujours pas qu'il s'agit de proportionnalité et que, si chaque objet n'avait pas le même prix, le problème serait indéterminé. Avec les deux données 3 et 21 il se retrouve dans la situation précédente : 3 × (fois) un prix encore inconnu donne 21 » (ou 3 × ? = 21). Avec sa conception additive ou répétitive du « × », ou « fois », il doit chercher un nombre qui, répété trois fois, donne 21. Dans ce cas, la division, montre le bout de son nez comme opération qui effectue l'inverse de ce que fait la multiplication-répétition, lorsque cette dernière devient progressivement une nouvelle opération distincte de l'addition mais entretenant toujours des liens étroits par la distributivité sur cette dernière.

Finalement, on arrive à la recherche de la « 4^e proportionnelle » avec un tableau d'au moins 2 × 2 cases et une multitude de situations, par exemple, avec 120 Euros j'achète 15 objets, combien coûteront 18 objets ?

Une méthode simple, qui « marche » facilement consiste à ajouter aux couples (15 ; 120) et (18 ; ?) d'autres couples faciles à compléter pour arriver au couple donnant le prix d'un objet (1 ; …) qui permettra de retrouver la situation précédente où le prix de l'unité est donné.

Prix des obje	120		120 × 2 = 2⁴	24		144

Dans l'exemple du tableau ci-dessus, les propriétés multiplicative (et divisive) permettent à l'élève de passer du « 15 » du premier couple à « 30 » par l'opération « le double », puis à « 3 » par une division par 10, puis à « 1 » par une nouvelle division, par 3.

Les même transformations reproduites dans la seconde ligne des prix permettent d'arriver à « 240 », « 24 » et « 8 ». À ce moment, le couple (1 ; 8) est connu et donne le coefficient de proportionnalité « × 8 » qui donne la « clé » pour passer de la première à la deuxième ligne pour compléter le deuxième couple (18 ; ?) par (18 ; 18 × 8 =144).

Cette procédure de « passage par l'unité » peut être appliquée ou même « comprise » par l'élève, qui lui donne du sens dans le contexte où il la construit. Je connais le prix d'une unité, si on me demande de calculer le prix de plusieurs unités il suffit de le répéter le même nombre de fois. On ne parle pas ici de « proportionnalité » ni de son « facteur » ; on est dans un contexte de grandeurs, aux caractéristiques connues (un type d'objet et son prix comme dans notre exemple, un autre type de grandeur et son poids, etc..)

Nous l'avons lu et relu dans les copies d'élèves, les problèmes que nous appelons de proportionnalité sont résolus dans leurs contextes, au cas par cas, par essais successifs. Les tableaux lorsqu'ils apparaissent, sont là pour situer spatialement les objets et leurs mesures.

C'est du point de vue de l'adulte qu'ils sont utiles, pour généraliser, organiser les relations numériques dans le langage mathématique, quasi algébrique.

On peut citer à ce propos un commentaire caractéristique de l'introduction de la thèse de Eugène Comin[4]

[4] Eugene Comin, Proportionnalité et fonction linéaire : Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, tel.archives-ouvertes.fr, Mai 2013.

En France les concepts de rapport ***et*** *de proportion ont disparu des programmes du secondaire depuis 1970 où la* ***fonction linéaire*** *est censée reformuler la* ***proportionnalité*** *entre grandeurs. Mais dans la nouvelle organisation des savoirs à enseigner la «* ***fonction linéaire*** *» n'est qu'un exemple banal de relation numérique de telle sorte qu'aujourd'hui les professeurs de tous les niveaux n'ont ni l'usage de la «* ***fonction linéaire*** *» ni celui des « rapports* ***et*** *proportions » pour traiter convenablement les problèmes de l'arithmétique élémentaire.*

… Le sentiment d'échec ressenti par la société à la suite de cette « rupture conceptuelle » de l'objet ***proportionnalité*** *n'a pas de solution pédagogique ou psychologique. Les différentes institutions concernées ont à traiter ce problème par une approche scientifique, technique* ***et*** *politique avec des connaissances de micro didactique mais aussi de macro didactique dont l'ignorance a été probablement une des causes des difficultés engendrées par les réformes successives.*

En résumé de ce chapitre retenons que la fonction linéaire et ses propriétés illustrées par ses tableaux de valeurs sont un instrument efficace d'analyse, pour l'enseignant qui pourra reconnaître l'évolution des procédures de résolution d'un problème de proportionnalité.

Mais il faudra du temps à l'élève pour accéder aux concepts essentiels du domaine : la notion de fonction, celle de variable, et surtout celle de rapport de deux mesures qui est un nombre rationnel par essence.

3. La proportionnalité dans la Banque de problèmes du RMT

Vu l'importance du thème de la proportionnalité, il était évident qu'un des groupes de travail de l'ARMT (créés en 2005) s'y consacre, puis qu'un des domaines de la Banque de problèmes (élaborée dès 2011) y soit réservé. Les idées de problèmes ne manquaient pas et les résultats se sont accumulés mais on s'est vite rendu compte de la difficulté à classer les problèmes dans les familles de ce domaine qui « déborde » sur tous les autres, en géométrie particulièrement.

Le groupe a aussi constaté au cours des années, que la résolution des problèmes de ces familles fait appel aux opérations arithmétiques et a décidé de modifier son appellation en « Groupe Calcul et Proportionnalité. »

Dans le domaine PR (proportionnalité, de notre Banque de problèmes, on trouve deux familles principales, 4P et SP.[5]

4P- Rechercher la quatrième proportionnelle

Cette famille regroupe une quarantaine de problèmes traditionnellement situés dans le domaine du calcul des « proportions », où les aspects algorithmiques ont la priorité sur les propriétés de la proportionnalité et la reconnaissance de grandeurs proportionnelles. Dans la majorité des cas, on connaît trois éléments d'une « proportion » et la tâche est de trouver le quatrième. La proportionnalité n'est pas remise en cause ; la « proportion », qui n'est pas un objet bien défini d'un point de vue mathématique, est une « égalité de deux rapports ».

SP- Traiter des suites proportionnelles

Les problèmes de cette deuxième famille, une cinquantaine, proposent deux grandeurs proportionnelles, dont on connaît au moins trois valeurs (mesures) pour chacune. La tâche des élèves est de distinguer les deux grandeurs, d'en extraire les mesures, de les ordonner et de mettre en relation les termes correspondants, selon leur niveau de perception du lien entre les deux grandeurs : une différence ou un rapport constant.

Ces deux familles reflètent très globalement l'évolution du thème de la proportionnalité dans les pratiques scolaires, mais elles restent très hétérogènes. Les critères de classification, dépendant actuellement des responsables de la Banque, pourront être remis en question lorsqu'on connaîtra mieux les connaissances nécessaires aux élèves pour résoudre chaque problème, à la suite des analyses a posteriori de leurs copies.

Il a fallu plusieurs années pour que les groupes de travail, dont celui de la proportionnalité, se rendent compte de la valeur des données recueillies après la passation des problèmes dans les classes. Le dispositif du RMT permet de passer des résultats d'une seule classe à ceux de centaines, voire de milliers de classes ; d'un épisode limité à une observation à grande échelle. Le groupe Calcul et proportionnalité, comme les autres groupes de travail, prend peu à peu conscience de l'intérêt de ces observations à grande échelle : pour un élève, une procédure, une erreur, un obstacle, dépendent de son parcours d'apprentissage et de sa personnalité, on ne peut pas en tirer de généralisation. Lorsque ces procédures, erreurs, obstacles, apparaissent systématiquement la réflexion peut se développer à propos des qualités du problème et des profits didactiques qu'on peut en tirer ; c'est-à-dire en analysant résultats et copies a posteriori. Les données recueillies dans la Banque de problèmes comprennent des statistiques sur l'attribution de points et analyses a posteriori, à comparer avec les analyses a priori établies avant l'épreuve. Et dans les archives des sections de l'ARMT s'accumulent des centaines de témoignages d'élèves transcrits dans leurs copies.

[5] Il existe encore une autre famille RP - Traiter une relation de proportionnalité qui n'est plus vraiment alimentée car on ne voit plus son utilité et une famille PROB - Traiter des probabilités, issue d'un premier choix lors de la création de la Banque vu ses liens avec la proportionnalité.

4. Des Confitures à Gabrielle la petite sorcière

Nous présentons ici un premier exemple de ce long chemin d'examen des données statistiques, puis de copies, pour arriver à des considérations d'ordre didactique : d'une recette de confitures à un contexte de sorcellerie.

4.1 Un ancien problème : Confitures

Tout a commencé il y a quinze ans après la résolution du problème Les confitures par 171 classes finalistes du 15e RMT (2007)

C'est la récolte des cerises. Grand-mère prépare des confitures dans son énorme chaudron, pour sa famille et ses voisins.

Lundi, elle cuit 8 kg de cerises avec 5 kg de sucre.

Mardi, elle cuit 10 kg de cerises avec 7 kg de sucre.

Jeudi, jour de la plus grande récolte, elle cuit 16 kg de cerises avec 10 kg de sucre.

Samedi, fin de la récolte, elle cuit 5 kg de cerises avec 3 kg de sucre.

Quel est le jour où elle a fait la confiture qui a le goût le plus sucré ?

Y a-t-il des jours où les confitures ont le « même goût » en sucre ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

Les résultats statistiques font apparaître des moyennes de points attribués variant de 1,2 ; 2,0 et 2,5 selon les catégories respectives de 6 à 8 pour des finalistes.

Chacun sait que ces données dépendent des critères d'attribution des points et des jurys qui les attribuent, sujets à des variations subjectives et que la marge d'incertitude est large. La Banque de problèmes les affiche néanmoins, comme indices généraux. Ici, on se limite à la progression d'une catégorie à l'autre, qui paraît très significative.

S'il observe les pourcentages de « 0 point » ou « incompréhension du problème » le visiteur de la banque constate un passage de 62 % en catégorie 6 à 23 % en catégorie 8 ; et une réponse « correcte et complète » (« 3 et 4 points ») passant de 24 % en catégorie 6 à 54 % en catégorie 8.

Il sait aussi que ce sont 171 classes de finalistes qui ont résolu le problème et que les résultats des autres classes non sélectionnées auraient été inférieurs.

Catégorie	0	1	2	3	4	Nb. de classes	Moyenne
Cat 6	39 (62%)	1 (2%)	8 (13%)	2 (3%)	13 (21%)	63	1.19
Cat 7	19 (34%)	3 (5%)	11 (20%)	4 (7%)	19 (34%)	56	2.02
Cat 8	12 (23%)	6 (12%)	6 (12%)	2 (4%)	26 (50%)	52	2.46
Total	70 (41%)	10 (6%)	25 (15%)	8 (5%)	58 (34%)	171	1.85

Compte tenu de ces observations, on ne peut qu'être intéressé de savoir ce qu'il y a derrière ces indices statistiques, c'est-à-dire aller voir les quelques copies à disposition. Comme il y n'y en a que quelques-unes par section (pour une finale), le Groupe Calcul et Proportionnalité a décidé de les regrouper et de les analyser a posteriori lors d'une finale des finales virtuelles durant la 11e rencontre internationale de Bard, en 2007. [6]

Pour certains de ses membres, l'examen des copies a été une vraie découverte : les élèves ont répondu lundi et mardi dans leur grande majorité en catégorie 6 en se référant à la différence de 3 kg entre les quantités de sucre et fruit entre ces deux jours. Aucun groupe n'a vu « le double » entre lundi et jeudi.

Ces résultats ont été confirmés par de très nombreuses expérimentations du problème en classes, par groupes ou individuellement, en Val d'Aoste et en Suisse romande. En catégorie 6, dans des classes non finalistes, la moyenne est descendue nettement au-dessous de 1. Il faut attendre les degrés 7 et 8 pour voir progressivement les procédures par « rapports » l'emporter sur celles des « écarts.

[6] Jaquet. F, avec la participation de Gianna Bellò, Rossana Fassy, Graziella Telatin, M. Gabriella Rinaldi, Centro risorse per la Didattica della Matematica, sezione ARMT della Valle d'Aosta, ARMT. La proportionnalité dans les problèmes du RMT. In *ACTES DES JOURNEES D'ETUDES SUR LE RMT, (Vol. 7, 11e rencontre : Bard 2007). RMT fra pratica e ricerca in didattica della matematica/RMT entre pratique et recherche en didactique des mathématiques (2008)*.pp 129-142. Bard (Valle d'Aosta).

4.2 Autres problèmes comparables

La démarche suivie dans le cas de ce problème est emblématique de celle du RMT. On élabore un problème avec une analyse a priori, puis, lorsqu'on observe les indices statistiques qui incitent à aller au-delà, on passe à une analyse a posteriori des copies, puis à une réflexion didactique et parfois à l'organisation d'expérimentations ou à la rédaction d'autres problèmes pour en « savoir plus » sur la manière dont les élèves les résolvent.

Le Groupe Calcul et Proportionnalité, au cours des années, a proposé cinq autres problèmes de recettes, classés dans la famille SP- Traiter des suites proportionnelles. et observé que les taux de réussite moyenne varient sensiblement de l'un à l'autre :

- 21.I.10. Mousse au chocolat. (5-7) Parmi les trois couples (4 ; 200), (6 ; 250) et (10 ; 500) trouver celui qui n'est pas proportionnel aux deux autres, dans un contexte de recette de mousse au chocolat.
  Moyennes des points attribués : de 2,50 à 3,42 en cat. 5 à 7.
- 21.II.10 Lancers francs au basket. (6-7) Parmi les trois couples (18;7), 20;8) et (25;10) trouver celui qui est le plus favorable à une certaine issue et chercher si deux d'entre eux sont équivalents par rapport à la même issue, dans un contexte de lancers francs au basket. de 0,82 à 2,14 en cat. 6 et 7
- 21.F.11 La confiture de prunes. (6-8) Trouver lequel des deux couples (33 ;10) et (30 ; 9) donne le même rapport que (35 ;10,5), dans un contexte de recette de confitures.
  Moyennes des points attribués : de 2,14 à 3,29 en cat. 6 à 8.
- 26.II.09. Citronnade fraîche. (5-8) Dans le contexte d'une recette à deux ingrédients, étant données deux quantités déjà préparées à mélanger, trouver de combien il faut augmenter la quantité d'un des ingrédients pour respecter la proportionnalité des ingrédients donnés dans la recette d'origine.
  Moyennes des points attribués (de 1,14 à 3,07 en cat. 5 à 8.
- 27.I.12 Le confiseur confus. (6-8) Un premier mélange ayant été réalisé en inversant les masses nécessaires de deux composants, calculer la masse de celui des deux composants qu'il faut ajouter au premier mélange pour rétablir une proportion correcte.
  Moyenne des points attribués : de 1,77 à 3,12 en cat. 6 à 8.

Les moyennes des points attribués à ce dernier problème (1,77 en catégorie 6) apparaissent nettement supérieures à celles du problème des Confitures obtenues 12 ans auparavant. « Mieux vaut tard que jamais » pourrait-on dire avec une pointe d'ironie, mais il faut compter avec une certaine inertie à laquelle on peut s'attendre dans un groupe de travail hétérogène par nature et constitué d'enseignants qui n'ont pas que de l'évolution des problèmes du RMT à s'occuper ! Et on peut ajouter que, sans le dispositif du RMT qui recueille des données sous forme écrite dans sa « Banque de problèmes », l'augmentation des moyennes de points aurait pu passer inaperçue.
Fortuite ou non, chanceuse ou non, la découverte de ce qui paraît une « meilleure réussite » pour le problème du Confiseur confus paraît suspecte.
Pour le vérifier, le Groupe Calcul et Proportionnalité a élaboré une nouvelle version du « même » problème, en conservant le contexte d'une erreur d'application d'une recette mais en modifiant les masses des deux composants ; 1000g de sucre pour 250 grammes d'eau dans Le confiseur confus deviennent 800 grammes de poudre pour 1000 grammes de lait, dans la version qui deviendra Gabrielle la petite sorcière :

4.3 Les deux énoncés

27.I.12. LE CONFISEUR CONFUS (Cat. 6, 7, 8)

Charles le confiseur prépare le sirop pour les bonbons à l'orange. D'après la recette qu'il consulte, ce sirop doit contenir 1 000 g de sucre pour 250 g d'eau.

Après avoir pesé les ingrédients et les avoir mélangés, il réalise qu'il a inversé les deux quantités : il a dissous 250 g de sucre dans 1 000 g d'eau.

Charles ne veut pas jeter le premier sirop qu'il a préparé. En ajoutant un seul ingrédient, il pense qu'il peut obtenir un sirop qui respecte la recette.

Quel ingrédient doit être ajouté à son premier sirop et en quelle quantité pour obtenir un sirop qui respecte la recette ?

Expliquez votre raisonnement et montrez les calculs que vous avez faits.

29.I.12. GABRIELLE LA PETITE SORCIÈRE (Cat. 6, 7, 8)

Gabrielle, la petite sorcière, prépare une potion magique pour remettre en forme ses elfes. Selon son livre de magie, il faut mélanger exactement 800 g de poudre de champignons bleus à 1 000 g de lait de licorne.

Distraite par son bâton magique, Gabrielle réalise qu'elle a inversé les deux quantités : elle a dissous 1 000 g de poudre de champignons bleus dans 800 g de lait de licorne. Comme la poudre de champignons bleus est difficile à trouver au pays des elfes, Gabrielle décide de ne pas jeter sa préparation.

Quel ingrédient Gabriella devra-t-elle ajouter et en quelle quantité pour obtenir une potion qui respecte la recette du livre de magie ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

La tâche mathématique consiste, en cinq étapes :

	pour *Le confiseur confus*	pour *Gabrielle, la petite sorcière*
a)	on part de la recette : 250 g d'eau pour 1000 g de sucre	 800 g de poudre pour 1000 g de lait
b)	la confusion consiste à intervertir les deux quantités 1000 g d'eau pour 250 g de sucre	 1000 g de poudre pour 800 g de lait
c)	la conséquence est qu'il faudra une compensation il y a trop d'eau il faudra ajouter du sucre ;	 il y a trop de poudre, il faudra ajouter du lait ;
d)	le calcul de la quantité totale du deuxième ingrédient 1000 g d'eau pour ??? de sucre au total (C))	en respectant la recette d'origine 1000 g de poudre pour ??? g de lait au total (G)
e)	calculer la quantité de sucre à ajouter : 250 g	calculer la quantité de lait à ajouter : 800g

Ce dernier calcul est souvent oublié, l'effort pour trouver C ou G est très fatigant !!

En reprenant le tableau de proportionnalité de l'adulte les analogies apparaissent plus clairement pour les deux dernières étapes d) et e)

eau		~~1000~~	

poudre		~~1000~~	1000

Les modalités de résolution sont, selon le chapitre 2 La proportionnalité, définition **:**

1. Procédure algorithmique du « produit croisé » ou de la « Règle de trois », tirée de la tradition des « proportions »

2a Procédure se référant au concept de linéarité ou « fonction linéaire » et la recherche de son « facteur constant »

On détermine le coefficient à partir de la recette originale :
1000 / 250 = 4 pour le Confiseur confus
1000 / 800 = 1,25 pour Gabriella
Puis on « l'applique » pour calculer C = 4 × 1000 = 4000 et G = 1,25 × 1000 = 1250

2b Procédure se référant au propriétés de la « fonction linéaire » multiplicative et/ou additive

Les modalités sont multiples et peuvent être très longues dans leur progression, avec éventuellement un passage par l'unité. Par exemple :

Nous pouvons donc établir une analyse a priori des procédures de l'élève conduisant à la réponse correcte.

4.4. Les points attribués

On aura vite compris en voyant apparaître les valeurs 4 et 1,25 des coefficients de proportionnalité des deux problèmes que l'hypothèse d'une variation des moyennes de points attribués n'était pas difficile à imaginer.

Voici les deux tableaux de résultats obtenus :

27.I.12. *Le confiseur confus / Il pasticcere pasticcione*

Catégorie	0	1	2	3	4	Nb. de classes	Moyenne
Cat 6	680 (46%)	56 (4%)	94 (6%)	218 (15%)	429 (29%)	1477	1.77
Cat 7	332 (26%)	44 (3%)	100 (8%)	257 (20%)	542 (43%)	1275	2.5
Cat 8	85 (10%)	23 (3%)	64 (7%)	216 (25%)	467 (55%)	855	3.12
Total	1097 (30%)	123 (3%)	258 (7%)	691 (19%)	1438 (40%)	3607	2.35

Selon les critères d'attribution des points :

4 Réponse correcte (ajouter 3 750 g de sucre au sirop) avec explications claires et complètes (tous les calculs explicités et de manière qu'il soit bien clair que le rapport entre les grandeurs est constant)

3 Réponse correcte mais avec explications peu claires et calculs incomplets

ou réponse 4 000 g, qui ne tient pas compte du fait que dans la mauvaise préparation il y a déjà 250 g de sucre, avec une explication claire et complète

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse 4 000 g, avec une explication incomplète

1 Début de raisonnement correct, par exemple explication que les rapports des deux préparations doivent être égaux

0 Incompréhension du problème ou réponse 1 750 (ou 1500 = 1 750 – 250) due à une confusion entre conservation de la différence et conservation du rapport

29.I.12. *Gabriella la petite sorcière/ Gabriella la piccola strega*

Catégorie	0	1	2	3	4	Nb. de classes	Moyenne
Cat 6	634 (77%)	60 (7%)	11 (1%)	42 (5%)	76 (9%)	823	0.62
Cat 7	590 (67%)	87 (10%)	20 (2%)	64 (7%)	119 (14%)	880	0.90
Cat 8	36 (8%)	40 (9%)	22 (5%)	73 (16%)	297 (63%)	468	3.19
Total	1260 (58%)	187 (9%)	53 (2%)	179 (8%)	492 (23%)	2171	1.29

Selon les critères d'attribution des points :

4 Réponse correcte (ajouter 450 g de lait à la potion) avec explications claires et complètes (tous les calculs explicités de manière qu'il soit bien clair que le rapport entre les grandeurs est constant)

3 Réponse correcte avec explications peu claires (calculs incomplets ou inexpliqués)

ou réponse 1 250 de lait = 1,25 × 1 000 g, qui ne tient pas compte du fait que dans la mauvaise préparation il y a déjà 800 g de lait, avec une explication claire et complète : prenant en compte qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse 1 250 g de lait avec une explication incomplète

1 Début de raisonnement correct, par exemple explication que des rapports entre des masses d'ingrédients doivent être égaux

0 Incompréhension du problème ou réponse 200 g de lait (c'est-à-dire 1 000 – 800 = 200) due à une confusion entre conservation de la différence et conservation du rapport

4.5. Les réponses des élèves

Les résultats statistiques ci-dessus, pour deux variantes d'un même problème, avec la même tâche, des contextes très proches, les mêmes critères d'attribution des points laissent apparaître l'influence du changement de valeur de la variable didactique « coefficient de proportionnalité ».

La moyenne de catégorie 6 passe de 1,77 à 0,62 et les « 0 point) de 46% à 77%. Les constatations sont du même ordre pour la catégorie 7. Il est donc légitime, voire indispensable d'ouvrir les copies d'élèves et de les lire. C'est l'entrée dans la phase-clé de l'analyse a posteriori.

Voici un compte rendu de la section de SI pour Gabrielle la petite sorcière.

Catégorie 6.

- 20 copies avec réponse 200 g et utilisation de la stratégie additive
- 43 copies avec réponse 400 g (1200 - 800) utilisation de la stratégie additive
- 6 copies avec une réponse de 600 g ou 200 g, difficile à catégoriser, avec erreurs conceptuelles entre addition et multiplication : doublement des doses et modification conséquente des deux ingrédients, ce qui est incorrect de ce fait mais l'abandon de la pensée additive apparaît pour un début de raisonnement proportionnel où apparaît le besoin d'une pensée multiplicative.

Les élèves tentent de trouver l'équilibre entre les composants à travers un processus manipulateur

- 1 copie avec les doses triplées
- 8 copies avec la réponse 450 g de lait de licorne et la bonne procédure correctement expliquée avec preuve de conscience de la relation qui apparaît tout au long du processus et de l'utilisation appropriée du verbe ajouter sans tomber dans la structure additive
- 4 copies blanches
- 4 copies avec des résultats incorrects et hors stratégies et résultats incorrects

86 copies au total avec 9 % de réponses correctes

Catégorie 7

- 4 copies avec réponse de 250 g qui impliquent le passage au rapport. Dans une copie il est entendu que le rapport doit rester constant mais une erreur apparaît dans la représentation graphique des segments, ce qui pourrait être utile, mais la représentation n'est pas soignée.
- 4 copies avec doublement des doses
- 8 copies avec réponse 200 g (stratégie additive)
- 45 copies avec réponse 400 g (stratégie additive)
- 10 copies avec réponse exacte 450 g et bonne stratégie de résolution
- 5 copies avec une réponse incorrecte. Dans une copie, les élèves trouvent l'unité sur la part totale et utilisent les pourcentages
- 5 copies avec réponse 1250 g utilisent la proportion mais en oubliant de faire la différence
- 3 copies blanches

84 copies au total avec 12 % de réponses correctes

Catégorie 8

- 12 copies avec réponse correcte et explications claires et complètes
- 9 copies avec réponse correcte mais explications non claires
- 1 copie avec con réponse fausse (1250 g) mais raisonnement correct
- 3 copies avec réponse fausse (250 g) avec raisonnement correct par proportion
- 9 copies avec réponse fausse (400 g) et conception additive
- 7 copies avec réponse fausse et une stratégie peu claire
- 3 copies blanches

44 copies au total avec 27 % de réponses correctes

Ces résultats sont conformes à ceux de toutes les autres sections qui ont conduit une analyse a posteriori des copies d’élèves, et dans les travaux du Groupe lors de la rencontre internationale de Lyon : les réponses 200 ou 400 sont nettement majoritaires en catégories 6 et 7.

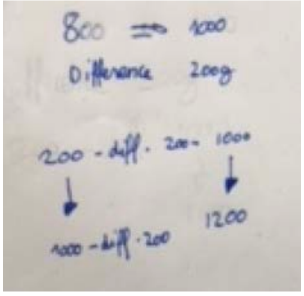
Il faut maintenant chercher à expliquer pourquoi et faire un pas de plus dans l’analyse a posteriori : après avoir découvert les erreurs et leur fréquence, écouter ce que nous disent les élèves sur leur manière de trouver ces réponses, que nous considérons évidemment, de notre point de vue, comme des erreurs.

4.6. Quelques exemples

Les réponses 200 et 400

Exemple 1 (cat 6) :

La plus fréquente et la plus caractéristique, avec le commentaire : *Gabrielle devra ajouter 200 g de lait de licorne pour obtenir une potion qui respecte la recette*.
le schéma montre le calcul de la différence entre 800 et 1000 puis le passage à 1200.



Exemple 2 (cat 6) : *Il y a 200 grammes de différence, 800 et 1000 –>1000 et 1200 par rapport à la potion fausse 1000 et 800 il faut ajouter 400 (ou 200 + 200)*

Exemple 3 (cat 7) : *Il y a toujours 200 grammes de différence entre 800 et 1000 ou entre 1000 et 1200*

Exemple 4 (cat 8): *Gabriella doit compenser les valeurs qu'elle a modifiées. Nous avons remarqué que la différence entre la poudre et le lait est 200 g. Donc pour retrouver la recette original, il suffira à Gabriella d'ajouter 200 g de lait à la poudre.*

Exemple 5 (cat 8) : *Puisqu'il doit y avoir plus de lait de licorne que de poudre de champignons bleus qui doit être dissoute dans le lait, nous considérons la différence numérique entre 1000 g et 800 g qui est 200g ; donc nous devons ajouter un nombre tel que la différence reste de 200 grammes entre les deux mesures. Ce nombre est 400, donc on devra ajouter 200 grammes de lait d'licorne*.

Toutes ces explications sont claires évidentes, et argumentées. Elles ne correspondent cependant pas à la réalité et sont considérées comme des « erreurs » par l'adulte, alors qu'elles reflètent la conviction de ceux qui les ont exprimées. Plutôt que de les juger négativement, il faut se demander pourquoi elles apparaissent dans une majorité de groupes et pourquoi elles s'expriment avec les mots-clés *différence*, *augmenter*, *ajouter*.

Les réponses 600 grammes de poudre et 1200 g de lait

Elles sont peu nombreuses (5 % environ) mais on les trouve dans chaque analyse a posteriori des sections ou du Groupe Calcul et Proportionnalité.

Exemple 6 (cat 8) : *Pour ne pas devoir jeter de champignons, il faut doubler les quantités donc il faut soustraire des quantités doublées ce qu'on a déjà 1600 – 1000 = 600 grammes de poudre et 2000 – 800 = 1200 grammes de lait*

Exemple 7 (cat 7) : *On double la potion exacte 800 e 1000 –> 1600 et 2000 qui devient 1600 g P et 2000 g de L.U ; en ajoutant aux 1000 g de P 600 g on obtient 1600 g et puis aux 800 g de L.U on ajoute 1200 g pour arriver à 2000 g de L.U. De cette façon la différence double aussi (400 g.)*

Exemple 8 (cat 6) :

Siccome in ogni 1000g di latte di unicorno ci deve stare 800g di polvere di fungo deve arrivare al doppio di ogni ingredi-ente.
Quindi dovrà aggiungere agli 800g di polvere di fungo 1200g di esso per arrivare a 2000g (il doppio, dove ci sono 1600g di polvere di fungo).
E deve aggiungere ai 1000g di latte di unicorno 600g di quest'ultimo per arrivare a 1600g.

Traduction. *Puisque pour chaque 1000 g de lait de licorne il faut 800 g de poudre de champignon, on doit arriver au double de chaque ingrédient. Donc il faudra ajouter à chaque 800 g de poudre de champignon 1200 g de cette poudre pour arriver à 2000 g (le double, où il y a 1600 g de poudre de champignon). Et il faudra ajouter aux 1000 g de lait de licorne 600 g de lait pour arriver à 1600 g.*

L'idée de doubler les quantités respecte la recette mais le calcul des écarts reste dans une perspective de soustraction et d'addition (*différence*, *augmenter*, *ajouter*).

Les réponses 450 grammes

Nous en donnons de nombreux exemples malgré le faible pourcentage de leur présence effectivement relevée. C'est la lecture de ces « explications » d'élèves qui doit permettre de se rende compte de l'importance du « saut épistémologique » nécessaire entre de la perspective additives à la multiplicative.

Exemple 9 (cat 8) :
Le 1/4 de 800 = 200 ; 800 + le 1/4 = 1000
le quart de 100 = 250 ; 1000 + 250 = 1250
800 + 450 = 1250

Exemple 10 (cat 8) :
1/4 de 800 = 200 ; 800 + 1/4 = 1000
Le quart de 1000 = 250 ; 1000 + 250 = 1250
800 + 450 = 1250

Exemple 11 (cat 7) : *1000 : 800 = x : 1000 donc x = 1250 et puis 1250 – 800 = 450 g*

Exemple 12 (cat 7):
Ajout de 450 g de lait de licorne car pour 200 g de poudre de champignon bleu il faut ajouter 250 g de lait d'licorne.

Exemple 13 (cat 8):
*1000 : 800 = 1,25 il faut donc s'assurer que le lait de licorne divisé par la poudre de champignon est = 1,25 ce qui signifie que le lait de licorne sera = 1000 * 1,25 = 1250 g et donc il faut ajouter 450 g de lait de licorne (800 + 450 = 1250 g)*

Exemple 14 :
Vu que 1000 est 1/5 plus grand que 800 nous ajoutons 450 g pour rendre le lait d' licorne 1/5 de la poudre de champignon bleu.

Exemple 15 :
Si elle a ajouté 200 g de poudre de champignon bleu aux 800 g, cela signifie qu'elle a ajouté ¼ de ce qu'il fallait ajouter. Il faut donc ajouter ¼ de 1000 au lait de licorne en ajoutant 250 g. Donc dans la potion il y aura 1000 g de poudre de champignon bleu et 1250 de lait de licorne (en suivant les calculs).

Exemple 16 : *En divisant la quantité initiale des deux ingrédients ou, après avoir calculé leur différence, j'ai multiplié les deux résultats en trouvant la quantité de l'ingrédient manquant.*
1000 : 800 = 1,25
1000 – 800 = 200
1,25 × 1 200 = 250 g de lait de licorne que devra ajouter Gabriella.

Autre exemple : *on a appliqué la règle de trois et tableau avec « : 8 » et « × 10 »*
Autre exemple : tableau et flèches *« 1,25 fois plus »*

5. Synthèse de l'analyse des résultats des deux problèmes

Nous constatons qu'une majorité de groupes d'élèves de catégories 6 et 7, autonomes et en coopération, ont une perception additive (*différence, ajouter, augmenter*) de la relation entre les masses de poudre de champignon et de lait de licorne, pour le problème de *Gabriella la petite sorcière* alors qu'une perception multiplicative (rapport) était majoritaire dans le cas des mesures de sucre et d'eau pour le problème *Le confiseur confus*.
Un simple changement de valeur de la variable didactique « quantités des deux ingrédients de la recette » a conduit à une modification incontestable et significatives des résultats obtenus, qui rejoignent celles du problème d'origine *Les confitures* !
Comme pour toute analyse a posteriori de nos problèmes du RMT, les données recueillies de manière rigoureuse appellent une réflexion didactique. La balle est alors dans le camp des enseignants qui cherchent à améliorer l'apprentissage de leurs élèves ou leur formation didactique. C'est à eux de tirer profit des analyses et de leurs résultats.

5.1. La variable « nombres »

Il est évident que, du point de vue arithmétique, les liens entre 250 et 1000 et ceux entre 800 et 1000 (première ligne de chacun des deux tableaux ci-dessous) sont perçus différemment selon la maîtrise des deux opérations qui, dans l'esprit des élèves, peuvent être associée à une « augmentation » du premier au deuxième nombre.

eau	250	1000
sucre	1000	1000 + 750 ou 1000 × 4

poudre	800	1000
lait	1000	1000 + 200 ou 1000 × 1,25

Dans leur langage, les élèves se posent la question suivante : *Pour passer de 250* (recette correcte) *à 1000* (après la confusion) *que dois-je faire ? un « plus » ou un « fois » ?*
Comme on sait que les élèves, en cas de doute ou de difficulté, se réfèrent aux relations les plus familières entre les nombres de l'énoncé ils décident plus volontiers de choisir la relation « quatre fois » pour le premier cas au lieu de « +750 » et « +200 » au lieu de « 1,25 fois » pour le deuxième cas.

Dans le problème des Confitures, les données de l'énoncé étaient, dans l'ordre :

sucre	5	7	10	3
cerises	8	10	16	5

Et la relation « +3 » pour les deux premiers couples était plus évidente que « fois 8/5 ou 16/10 » du premier et du troisième couple.
La conviction des élèves dépend de leur familiarité avec les nombres en présence : lorsqu'apparaît un lien qui peut s'exprimer facilement en nombre entiers, ils le préfèrent.
La comparaison des procédures : 50 % des groupes de cat 6 et 71 % des groupes de cat. 7 ont utilisé une procédure multiplicative - celle que l'enseignant espérait - pour *Le confiseur confus* ; mais seulement 15 % de cat. 6 et 23 % de cat. 7 pour *Gabriella la petite sorcière* montre une « meilleur réussite » du premier problème. S'agit-il d'une meilleure perception de la proportionnalité ?

5.2. Différence ou rapport

Deux suites de nombres peuvent être liées par la différence de deux nombres correspondants. Par exemple, pour les âges de deux personnes. La relation est de type additif.
Elles peuvent aussi être liées par le rapport (quotient) de deux nombres correspondants. Ce sont alors des suites proportionnelles, dont la relation est de type multiplicatif.
D'un point de vue didactique il est important de savoir que, dans la tête de l'enfant, l'addition précède la multiplication, comme la soustraction précède la division.
Il faut aussi savoir que la « nature » du nombre évolue avec l'âge. L'enfant perçoit les chiffres et les écritures numériques en « nombres de … »[7] associés à des objets, des images, des grandeurs. L'adulte les perçoit « désincarnés » comme éléments d'ensembles définis en mathématiques : les nombres naturels, les nombres entiers (positifs et négatifs), les nombres rationnels (quotients de deux nombres entiers) puis les nombres irrationnels,

[7] Concept précisé par Stella Baruk in *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Paris. Seuil 1995, Librairie Eyrolles 2019
Référence de l'édition italienne, *Dizionario di matematica elementare, a cura di Francesco Speranza e Lucia Grugnetti,* Zanichelli Editore, 1998.

jusqu'aux nombres réels, puis imaginaires … Là-dessus se greffent les nombres décimaux et les approximations décimales de la calculatrice.
Nous l'avons déjà évoqué précédemment, l'addition est la première opération à disposition de l'enfant qui lui permet d'ordonner ses « nombres de … » par la répétition de « + 1 ». Lorsqu'on lui présente la multiplication, il accepte volontiers l'adjonction d'un nouveau signe d'opérations « × » avec la représentation d'une répétition d'addition : *La maîtresse nous a dit que « 4 + 4 + 4 » peut aussi s'écrire « 4 × 3 » qui se prononce « 4 multiplié par 3 » ou « 3 fois 4 ». Elle nous a encore dit que « 3 + 3 + 3 + 3 » s'écrit « 3 × 4 » qui se prononce « 3 multiplié par 4 » ou 4 fois 3 ».* Il accepte volontiers ces nouvelles notations qui lui font gagner du temps puisqu'une somme de très nombreux termes identiques peut être remplacée par un produit, beaucoup plus court à déterminer. Mais, dans son esprit, il ne s'agit toujours que d'une addition répétée.
Cette représentation est confirmée lorsqu'on lui présente le calcul de l'aire d'un rectangle selon le modèle traditionnel : un rectangle, dont les côtés sont parallèles au bord de la feuille sur laquelle, constitué de trois rangs de quatre carreaux ou quatre colonnes de trois carreaux. (Présentation qui ne justifie pas la nécessité de faire intervenir une nouvelle opération pour des additions aussi élémentaires et qui renforce la prédominance des « nombres de … », en évitant intentionnellement l'apparition de parties non entières de carreaux et surtout de soulever la problématique du produit de mesures en cm qui aboutissent à d'autres mesures en cm^2).[8]
Le modèle de la multiplication comme répétition, caractéristique du modèle additif apparaît clairement dans le problème Gâteau aux châtaignes (I) (ral. 30.I.04 ; cat. 3-4) où il s'agit de « Trouver un nombre (de gâteaux) correspondant à 3 petits récipients sachant que 18 (gâteaux) correspond à un grand récipient et qu'un petit récipient contient la moitié (des gâteaux) du grand récipient.
L'analyse a posteriori de ce problème révèle que ce sont les observations des écritures numériques qui s'avèrent intéressants car elles semblent caractéristiques de deux conceptions de la répartition des gâteaux. Pour l'adulte qui situe le problème dans le champ conceptuel de la multiplication et applique la propriété multiplicative de la proportionnalité, « la moitié » des 18 gâteaux se détermine par une division par 2 suivie, pour trouver le nombre total des gâteaux des trois plaques, d'une multiplication par 3 (18 : 2 = 9, puis 3 × 9 = 27).
Dans une partie importante des copies, près de la moitié en catégorie 3, on voit cependant apparaître des écritures du champ conceptuel de l'addition : 9 + 9 = 18 puis 18 + 9 = 27 ou 9 + 9 + 9 = 27.
On se rend compte alors que pour ces élèves, trouver « la moitié » des 18 gâteaux de la grande plaque semble ressentie comme une réunion de deux parts égales qui constituent le tout. En écrivant 9 + 9 = 18, ils résolvent l'égalité lacunaire … + … = 18, en sachant bien que le seul nombre qui convient pour compléter l'égalité correctement est 9.

5.3. La « pensée proportionnelle » et ses aspects didactiques

Il y a un obstacle, qui relève du domaine de l'épistémologie génétique, que l'on pourrait appeler « conflit différence – rapport », (comme celui qu'on observe en géométrie et qu'on appelle « conflit aire-périmètre »).
L'élève « voit » la différence de deux quantités lorsque l'une est plus haute, plus longue, plus volumineuse, plus lourde … que l'autre. Cette comparaison peut se faire directement entre objets, masses, et aussi parfois figures géométriques dans les contextes de similitude. Elle peut se faire concrètement par juxtaposition ou reproduction. L'opération arithmétique requise pour déterminer cette différence est l'addition/soustraction de quantités ou de « nombres d'objets », …
Le rapport des deux grandeurs n'est plus perceptible par les sens, il exige une analyse de leurs mesures, qu'il faut considérer comme des nombres, au sens mathématique et non plus comme des quantités ou nombres d'objets. La détermination du rapport ne peut plus se faire par l'addition répétée mais par une opération nouvelle : la multiplication / division, parfois entre nombres naturels, mais en général rationnels.
Les données de nos analyses nous permettent d'affirmer que l'obstacle est trop élevé pour la grande majorité d'élèves, jusqu'en catégorie 8, car ils ne maîtrisent pas encore la multiplication / division de nombres rationnels.
Nous avons cependant constaté que dans de nombreux problèmes, classés dans le domaine de la proportionnalité de notre Banque du RMT, par exemple, Une course matinale (24.II.01 ; cat. 3-4) ; Les tablettes de chocolat (27.I.03 ; cat. 3-4) ; Gâteau aux châtaignes (I) (30.I.04 ; cat. 3-4) ; Le gâteau de Lucie (31.F.06 ; cat. 4-5)[9] 80 % les élèves des catégories 3 à 5 arrivent à la « bonne réponse ». Ces problèmes sont souvent considérés comme une « approche » de la proportionnalité, qui peuvent se résoudre sans calculer de « rapport » ni sans être conscient de son existence. Les élèves arrivent à la réponse en appliquant une seule opérations avec des nombres naturels : « prendre le double », « diviser par trois », … en passant parfois par l'unité, et pourtant lorsque ces

---

[8] Voir à ce propos les problèmes Rectangles de papier quadrillé (I) (ral. 29.I.04 ; cat. 3-4) et Rectangles de papier quadrillé (II) (ral. 29.I.08 ; cat. 5-6)
[9] Il s'agit d'un problème récent de la finale du 31e et dernier RMT dont la fiche de la Banque de problèmes présente quelques propositions d'exploitations didactiques, au-delà des nombres naturels.

mêmes élèves seront en catégories 6 et 7, ils répondront presque tous à la question du problème *Gabrielle la petite sorcière* : *Gabrielle devra ajouter 200 g e lait de licorne* pour obtenir une potion qui respecte la recette. !

On arrive ainsi au choix didactique de l'enseignant : que faire de ces problèmes qui évitent « conflit différence – rapport » que les jeunes élèves résolvent facilement ? Faut-il y renoncer ? Peut-on les exploiter tout de même pour le développement futur de la pensées proportionnelle ?
La réponse actuelle du Groupe Calcul et Proportionnalité est claire : la solution de n'aborder la pensée proportionnelle qu'à partir des catégories 8 et suivantes est à rejeter puisque les situations et contextes où elle se construit sont ceux de la vie courante de l'élève, dès son plus jeune âge.[10] Il faut plutôt envisager la poursuite de nos expérimentations de ces problèmes accessibles en catégories 3 à 5 pour voir s'il est possible de les exploiter au plan didactique en allant au-delà du contrôle et de l'explication de la réponse. Même si l'on sait que le chemin est encore long pour construire la notion de rapport, une exploitation didactique où elle entre en « conflit » avec celle de différence est à envisager, ne serait-ce que dans le but de renforcer les procédures par passage à l'unité (dans lesquelles le « rapport » n'est pas explicite) ou simplement habituer les élèves à travailler avec des nombres non naturels avec lesquels la multiplication n'est plus une addition répétée.

La voie est ouverte à ceux qui ont envie de poursuivre la réflexion et l'expérimentation, dans un cadre nouveau à définir, en lien avec les développements futurs de la Banque de problèmes du RMT.

[10] Dans un ouvrage quasi encyclopédique de la collection *Des grandeurs aux espaces vectoriels, La linéarité comme fil conducteur* (Edition CREM 2002), Nicolas Rouche illustre par des situations-problèmes les grandeurs, la proportionnalité, la similitude, les vecteurs, les fonctions et transformations linéaires, avec leurs origines géométriques et physiques, avec un lien structurel : celui de la linéarité ou de la « pensée proportionnelle » qu'on retrouve dans toutes les étapes de l'enseignement, de la maternelle à la fin du secondaire.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

LA PROPORZIONALITÀ E I SUOI PROBLEMI

François Jaquet e Stefania Massai

A nome del Gruppo Proporzionalità

Sunto

L'inizio dell'articolo ricorda che il concetto di proporzionalità è problematico per tutte le discipline delle scienze umane, e non solo per l'insegnamento della matematica, e si è evoluto nel corso del XX secolo, nel passaggio dalla "teoria delle proporzioni" alle attuali tendenze della proporzionalità inserita nel quadro algebrico delle funzioni lineari.

Dopo aver ricordato che cosa intendiamo attualmente per "proporzionalità", considereremo le ricerche su questo tema nell'ambito dell'ARMT, del suo gruppo di lavoro e della sua Banca dei problemi.

Un primo esempio analizza due problemi isomorfi che si distinguono solo per la modifica di una variabile didattica e che portano ad un calo dei risultati molto significativo. Questa è un'occasione per riflettere sulle ragioni del fallimento degli allievi di alcune categorie rispetto ai loro coetanei più grandi.

Un secondo esempio cerca di approfondire il tipo di rappresentazioni che gli allievi hanno di un'operazione che devono prendere in considerazione in un problema elementare di "ricerca del valore corrispondente a l'unità" dove la risposta si ottiene dividendo un numero per due e poi moltiplicando il risultato ottenuto per 3.

Alcune conclusioni mostrano l'interesse dell'approccio RMT che consiste nel far risolvere a migliaia di allievi di classi di diversi livelli scolari lo stesso problema senza alcun intervento da parte dell'insegnante, nel chiedere loro di fornire la loro soluzione ma anche di descrivere il loro approccio risolutivo, nell'attribuire dei punteggi ai loro elaborati, secondo criteri comuni, nell'elaborare statistiche dei risultati e nell'analizzare gli elaborati a posteriori. È questo approccio che rende possibile fornire dati agli insegnanti quando scelgono di affrontare un problema con l'intera classe per uso didattico.

1. La proporzionalità e la sua problematica

> *La capacità di ragionare utilizzando relazioni proporzionali risulta da un processo complesso che richiede tempo per essere assimilato. Sono necessarie molte e diverse esperienze concrete per comprendere la natura di una relazione proporzionale e ci vuole ancora più tempo per acquisire la capacità di farne applicazioni astratte.*
>
> *... La nozione di "proporzionalità" trova applicazione anche nell'ambito della disciplina giuridica. Meglio ancora, permeerebbe addirittura tutti gli ambiti del diritto...*

La citazione sopra è tratta da un articolo "Sulle orme del principio di proporzionalità: uno schizzo genealogico" pubblicato in una rivista giuridica presso la McGill University in Québec[31] nell'ambito di una ricerca di dottorato intitolata: "Il principio di proporzionalità alla luce della tecnologia dell'informazione."

Avremmo potuto trovare altre citazioni, ad esempio sulla "Divina proporzione" nel campo dell'arte e dell'architettura.

La materia ha ricadute politiche, culturali e sociali e non è quindi solo l'insegnamento della matematica ad occuparsi di proporzionalità.

A sta a B come C sta a D.

Chi, tra gli allievi, da Euclide alla fine del XX secolo, è riuscito a dare un senso a questa strana espressione? Chi ha veramente capito la regola del tre, i prodotti incrociati e altri algoritmi che utilizzano le "proporzioni" senza conoscenze algebriche? Dal punto di vista dell'insegnante, la proporzionalità è sempre stata un capitolo arduo, fonte di ostacoli difficilmente superabili per molti allievi, paragonabili alla quadratura del cerchio.

Una ricerca bibliografica rivela numerosi articoli, libri, tesi sull'argomento che ne riflettono le difficoltà dal punto di vista didattico e l'evoluzione del suo insegnamento nel corso del XX secolo e dell'inizio del XXI.

A partire dagli anni '70, si è cercato di collocare l'allievo in situazioni più facili da padroneggiare. Poi è apparso il legame con la "linearità" tratto dalle funzioni lineari dei programmi successivi alla riforma della "matematica moderna".

Nei programmi scolastici, il tema della proporzionalità, tradizionalmente riservato agli ultimi tre anni della scuola dell'obbligo, appare ora a partire dalle nostre categorie 5 e/o 6 a seconda dei paesi, quando i problemi coinvolgono i rapporti, sotto forma di frazioni o di numeri razionali

---

[31] Antoine Guilmain. Revue de droit de McGill. Vol. 61, numéro 1, september 2015, p. 87–137

Tuttavia, molto prima di menzionare esplicitamente il termine, la maggior parte dei problemi trattati con i numeri naturali si situano in contesti di proporzionalità: nella numerazione quando si tratta di passare dalle unità alle decine; quando si passa dai metri ai centimetri o dai minuti alle ore; in tutti i problemi moltiplicativi dove, ad esempio, conoscendo il prezzo di un certo numero di oggetti, ci viene chiesto di determinare il prezzo di un altro numero di oggetti della stessa natura.

Un recente articolo[32] sulla rivista MathémaTICE mostra chiaramente che questa anticipazione dell'introduzione della proporzionalità ha conseguenze didattiche.

Questa complessità è dovuta soprattutto al fatto che si lavora sulla proporzionalità ben prima di avere a disposizione gli strumenti necessari. Ma non è possibile procedere diversamente: privarsene eliminerebbe troppe nozioni, saperi, supporti per lo sviluppo delle competenze, e non permetterebbe di comprendere il mondo allo stesso modo. Quindi presumiamo che si tratti di un rompicapo: modellare la proporzionalità è in realtà impossibile per anni, e possiamo solo illustrarlo mostrando esempi e controesempi, cercheremo di rendere gli allievi competenti a riconoscerlo e utilizzarlo.

2. La proporzionalità, definizione elementare

Si trovano ora definizioni di proporzionalità legate alla nozione di "successione" e non limitate ai quattro elementi della "ricerca del quarto proporzionale", come ad esempio in Wikipedia:

*In matematica si dice che due successioni di numeri sono **proporzionali** quando, moltiplicando (o dividendo) per la stessa costante diversa da zero, i termini dell'una si ottengono i termini dell'altra. Il fattore costante tra l'una e l'altra di queste successioni è chiamato **coefficiente di proporzionalità** e queste successioni di numeri sono, ad esempio, quantità misurate . ...*

Questa definizione popolare è semplice. In quattro righe dice effettivamente tutto quello che c'è da sapere, ma lascia aperte le domande:

- C'è una prima successione di numeri. Più dei due numeri classici, anzi molto di più, centinaia, migliaia, un'infinità?
- Che tipi di numeri sono questi? Naturali, interi, decimali, reali?
- I numeri in questa successione sono ordinati?

Richiede anche una "traduzione" in operazioni generalizzate:

- Si possono moltiplicare i numeri di questa prima successione per una stessa costante diversa da zero oppure per un fattore costante chiamato coefficiente e ogni volta ottenere un numero corrispondente della seconda sequenza che si traduce in algebra con x—> f(x) = kx.

Quest'ultima relazione ha, per la natura della moltiplicazione che è associativa e distributiva rispetto all'addizione, due proprietà che i matematici scrivono così (e che si leggono facilmente se si ha buon occhio):

- proprietà additiva se x —> k(x) allora $x + y$ —> k($x + y$) = kx + ky
- proprietà moltiplicativa se x —> k(x) allora nx —> k(nx) = n(kx)

o che si esprimono con la stessa facilità (se uno ha buona elocuzione o buone orecchie):

- additivo: se l'immagine di un numero è questo numero moltiplicato per un coefficiente k, l'immagine di una somma di due numeri è la somma delle immagini di ciascuno dei due numeri;
- moltiplicativo: se l'immagine di un numero è questo numero moltiplicato per un coefficiente k, l'immagine del prodotto di questo numero è il prodotto della sua immagine per k.

L'adulto che conosce un po' di matematica non si pone le domande precedenti perché sa grosso modo cos'è una funzione lineare, perché ha sentito parlare di crescita o continuità, perché ha un modello di numeri reali: la retta numerica. E conosce anche entrambe le proprietà, almeno intuitivamente.

Poiché l'allievo non sa tutto questo, gli proponiamo degli strumenti, in particolare la tabella di proporzionalità[33], in sostituzione degli algoritmi della tradizionale "ricerca del quarto proporzionale", (prodotti incrociati, "proporzione", regola del tre, ...

Attualmente si propone spesso una tabella su due righe o due colonne come la seguente:

Seconda successione		B		

[32] Claire Lommé. *La proportionnalité, une notion essentielle (en maths et dans la vie citoyenne)* Revue MathémaTICE no 83, janvier 2023cution

[33] Suite de la définition de Wikipedia citée en début de chapitre 2. Un tableau de proportionnalité est un tableau où chaque ligne est proportionnelle aux autres. C'est une manière d'organiser les données qui permet de reconnaître les situations de proportionnalité, de déterminer le coefficient de proportionnalité et d'utiliser la loi proportionnelle. C'est un outil qui est a été très utilisé en didactique des mathématiques, notamment dans les années 70[1] ; en France, il est utilisé, parmi d'autres outils de proportionnalité, dès le *cycle 3* (CM1, CM2, 6e).

I numeri della prima riga (qui segnati in minuscolo) e quelli della seconda successione (in maiuscolo) sono legati (verticalmente), dalla "chiave" della relazione moltiplicativa del "fattore" k : **« × k ».**

Nel suo percorso scolastico, l'allievo si imbatte molto presto nel caso più semplice di proporzionalità legato all'operazione aritmetica della moltiplicazione, ad esempio: quanto costano 3 oggetti a 5 euro al pezzo? Ovviamente non sa che è una questione di proporzionalità né che ci sono due "successioni di numeri" in gioco. Se volessimo analizzare la sua procedura di risoluzione utilizzando una tabella di proporzionalità otterremmo qualcosa del tipo:

A questo livello il "3 × 5" che dà la soluzione è ancora di tipo additivo e il segno "×" ha il significato di una ripetizione "volte" e non ancora di una moltiplicazione per un coefficiente reale che fa passare di una riga all'altra.

Poco dopo, all'allievo viene chiesto di calcolare il prezzo unitario, ad esempio Quanto costa un oggetto se 3 oggetti costano 21 euro in totale. Il compito è quindi meno ovvio. Non sa ancora che è una questione di proporzionalità e che, se ogni oggetto non avesse lo stesso prezzo, il problema sarebbe indeterminato. Con i due dati 3 e 21 ci si ritrova nella situazione precedente: "3 × (per) un prezzo ancora sconosciuto dà 21" (ovvero 3 × ? = 21). Con la sua concezione additiva o ripetitiva di "×", o di "volte", deve cercare un numero che, ripetuto tre volte, dia 21. In questo caso, la divisione, mostra la punta del suo naso come un'operazione che svolge l'operazione inversa di ciò che fa la moltiplicazione-ripetizione, quando quest'ultima diventa gradualmente una nuova operazione distinta dall'addizione ma mantenendo su quest'ultima stretti legami attraverso la distributività.

Infine si arriva alla ricerca del "quarto proporzionale" con almeno una tabella di 2 × 2 caselle e una moltitudine di situazioni, ad esempio con 120 euro compro 15 oggetti, quanto costeranno 18 oggetti?

Un metodo semplice, che "funziona" facilmente, consiste nell'aggiungere alle coppie (15; 120) e (18; ?) altre coppie facili da completare per arrivare alla coppia "il prezzo di un oggetto; …" o (1; …) che consentirà di ritrovare la situazione precedente in cui viene fornito il prezzo dell'unità.

Nell'esempio della tabella sopra, le proprietà moltiplicative (e della divisione) permettono all'allievo di passare da "15" della prima coppia a "30" tramite l'operazione "il doppio", poi a "3" con una divisione per 10, quindi a "1" con una nuova divisione, per 3.

Le stesse trasformazioni riprodotte nella seconda riga del prezzo ci permettono di arrivare a "240", "24" e "8". A questo punto la coppia (1; 8) è nota e dà il coefficiente di proporzionalità "× 8" che dà la "chiave" per passare dalla prima alla seconda riga per completare la seconda coppia (18; ?) mediante (18; 18 × 8 =144).

Questa procedura di "passare par l'unità" può essere applicata o addirittura "compresa" dall'allievo che le dà senso nel contesto in cui la costruisce. Conosco il prezzo di una unità, se mi viene chiesto di calcolare il prezzo di più unità devo solo ripeterlo lo stesso numero di volte. Non stiamo parlando qui della "proporzionalità" o del suo "fattore"; siamo in un contesto di grandezze, con caratteristiche note (un tipo di oggetto e il suo prezzo come nel nostro esempio, un altro tipo di grandezza e il suo peso, ecc.)

Lo abbiamo letto e riletto nei elaborati degli allievi, i problemi che chiamiamo di proporzionalità si risolvono nei loro contesti, caso per caso, per tentativi successivi. Le tabelle, quando compaiono, servono per localizzare spazialmente gli oggetti e le loro misure. È dal punto di vista dell'adulto che sono utili per generalizzare e organizzare le relazioni numeriche in un linguaggio matematico, quasi algebrico.

A questo proposito possiamo citare un commento caratteristico dell'introduzione alla tesi di Eugène Comin.[34]

In Francia i concetti di rapporto e proporzione sono scomparsi dai programmi delle scuole secondarie dal 1970 dove si suppone che la ***funzione lineare*** *riformuli la* ***proporzionalità*** *tra le quantità. Ma nella nuova organizzazione dei saperi da insegnare, la* ***"funzione lineare"*** *è solo un banale esempio di relazione numerica*

[34] Eugene Comin,
Proportionnalité et fonction linéaire : Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, tel.archives-ouvertes.fr, Mai 2013.

tale che oggi gli insegnanti di tutti i livelli non usano né la "funzione lineare" né "rapporti e proporzioni" per affrontare adeguatamente i problemi di aritmetica elementare.

... Il sentimento di fallimento provato dalla società a seguito di questa "rottura concettuale" dell'oggetto proporzionalità non ha soluzione pedagogica o psicologica. Le diverse istituzioni interessate devono affrontare questo problema attraverso un approccio scientifico, tecnico e politico con la conoscenza della micro didattica ma anche della macro didattica, la cui ignoranza è stata probabilmente una delle cause delle difficoltà generate dalle successive riforme.

Come sintesi di questo capitolo, teniamo presente che la funzione lineare, le sue proprietà e le sue tabelle di valori costituiscono un efficace strumento di analisi per l'insegnante che sarà in grado di riconoscere l'evoluzione delle procedure per la risoluzione di un problema di proporzionalità.

Ma ci vorrà del tempo perché l'allievo possa accedere ai concetti essenziali della materia: la nozione di funzione, quella di variabile e soprattutto quella di rapporto tra due misure che è in sostanza un numero razionale.

3. La proporzionalità nella Banca dei problemi del RMT

Data l'importanza del tema della proporzionalità, era ovvio che uno dei gruppi di lavoro dell'ARMT (istituito nel 2005) dovesse dedicarcisi e che una delle aree della Banca dei problemi (sviluppata nel 2011) gli fosse dedicata. Le idee per i problemi non mancavano e i risultati si sono accumulati, ma ben presto è emersa la difficoltà di classificare i problemi nelle famiglie di questo dominio, che " sconfina" in tutti gli altri, in particolare nella geometria.
Nel corso degli anni, il gruppo ha anche notato che la risoluzione dei problemi di queste famiglie richiede operazioni aritmetiche, per cui ha deciso di cambiare il proprio nome in "Gruppo Calcolo e Proporzionalità".

Nel dominio PR (proporzionalità) della nostra Banca dei problemi ci sono due famiglie principali, 4P e SP.

4P- Elaborare Successioni proporzionali

Questa famiglia comprende una quarantina di problemi tradizionalmente correlati all'area del calcolo delle "proporzioni", in cui gli aspetti algoritmici hanno la precedenza sulle proprietà della proporzionalità e sul riconoscimento delle quantità proporzionali. Nella maggior parte dei casi, tre elementi di una "proporzione" sono noti e il compito è trovare il quarto. La proporzionalità non è messa in discussione; la "proporzione", che non è un oggetto ben definito dal punto di vista matematico, è una "uguaglianza di due rapporti".

SP- Gestire successioni proporzionali

I problemi di questa seconda famiglia, che sono una cinquantina, propongono due quantità proporzionali, di cui si conoscono almeno tre valori (misure) di ciascuna. Il compito degli alunni è quello di distinguere le due grandezze, di ricavare le misure, ordinarle e mettere in relazione i termini corrispondenti, secondo il loro livello di percezione del legame tra le due quantità: una differenza o un rapporto costante

Queste due famiglie riflettono ampiamente l'evoluzione del tema della proporzionalità nella pratica scolastica, ma rimangono molto eterogenee. I criteri di classificazione, che attualmente dipendono dai responsabili della Banca, potranno essere rimessi in discussione quando si conosceranno meglio le conoscenze necessarie agli alunni per risolvere ciascun problema, a seguito delle analisi a posteriori dei loro elaborati.

Ci sono voluti diversi anni perché i gruppi di lavoro, compreso il gruppo della proporzionalità, si rendessero conto del valore dei dati raccolti dopo lo svolgimento dei problemi nelle classi. Il sistema RMT permette di passare dai risultati di una singola classe a quelli di centinaia o addirittura migliaia di classi; da un episodio limitato a un'osservazione su larga scala. Il gruppo Calcolo e proporzionalità, come gli altri gruppi di lavoro, si sta gradualmente rendendo conto del valore di queste osservazioni su larga scala: una procedura, un errore o un ostacolo dipendono dall'individuo, dal suo percorso di apprendimento e dalla sua personalità, e non è possibile trarne alcuna generalizzazione. Quando queste procedure, errori e ostacoli appaiono sistematicamente, possiamo riflettere sulle qualità del problema e sui benefici didattici che se ne possono trarre, cioè analizzando i risultati e gli elaborati a posteriori. I dati raccolti nella Banca dei problemi: statistiche sull'assegnazione dei punti da confrontare con le analisi a priori stabilite prima della prova. E negli archivi delle sezioni ARMT, ci sono centinaia di testimonianze di allievi trascritte nei loro elaborati.

4. Da “Marmellate” a “Gabriella la piccola strega”

Presentiamo qui un primo esempio di questo lungo processo di esame di dati statistici, poi d ielaborati, per arrivare a considerazioni didattiche: da una ricetta di marmellata a un contesto di stregoneria.

4.1. Un vecchio problema: “Marmellate”

Tutto è cominciato quindici anni fa, dopo che 171 classi finaliste del 15° RMT (2007) avevano risolto il problema “Marmellate”.

> È il periodo della raccolta delle ciliegie. La nonna prepara la marmellata nel suo enorme pentolone per la famiglia e i vicini.
> Lunedì cuoce 8 kg di ciliegie con 5 kg di zucchero.
> Martedì cuoce 10 kg di ciliegie con 7 kg di zucchero.
> Giovedì, il giorno del maggior raccolto, cuoce 16 kg di ciliegie con 10 kg di zucchero.
> Sabato, alla fine del raccolto, cuoce 5 kg di ciliegie con 3 kg di zucchero.
> **In quale giorno ha preparato la marmellata più dolce?**
> **Ci sono giorni in cui le marmellate hanno lo stesso sapore di zucchero?**
> **Spiegate come avete trovato le vostre risposte**

I risultati statistici mostrano una media di punti assegnati che varia da 1,2, 2,0 e 2,5 a seconda delle rispettive categorie, da 6 a 8 per le classi finaliste.

Sappiamo tutti che queste cifre dipendono dai criteri di assegnazione dei punti e dalle giurie che li assegnano, che sono soggetti a variazioni soggettive, e che il margine di incertezza è ampio. La Banca dei Problemi li riporta comunque come indici generali. Qui ci limitiamo alla progressione da una categoria all'altra, che sembra molto significativa.

Se si guarda alle percentuali di "0 punti" o di "mancata comprensione del problema", il/la visitatore/visitatrice della Banca dei Problemi osserva un calo dal 62% della categoria 6 al 23% della categoria 8; e una risposta "corretta e completa" ("2 e 3 punti") che passa dal 24% della categoria 6 al 54% della categoria 8.

Sa anche che 170 classi finaliste hanno risolto il problema e che i risultati delle classi non selezionate sarebbero stati inferiori.

Categorie	0	1	2	3	4	N. classi	Medie
Cat 6	39 (62%)	1 (2%)	8 (13%)	2 (3%)	13 (21%)	63	1.19
Cat 7	19 (34%)	3 (5%)	11 (20%)	4 (7%)	19 (34%)	56	2.02
Cat 8	12 (23%)	6 (12%)	6 (12%)	2 (4%)	26 (50%)	52	2.46
Total	70 (41%)	10 (6%)	25 (15%)	8 (5%)	58 (34%)	171	1.85

Alla luce di queste osservazioni, non si può che essere interessati a sapere cosa c'è dietro questi indici statistici, ovvero andare a vedere i pochi elaborati disponibili. Poiché ce ne sono solo alcuni per sezione (per una finale), il Gruppo Calcolo e Proporzionalità ha deciso di raggrupparle e analizzarle a posteriori durante una finale delle finali virtuali dell'11° incontro internazionale di Bard, nel 2007.[35]

Per alcuni dei suoi membri, l'esame degli elaborati è stato una vera e propria scoperta: la stragrande maggioranza degli allievi di categoria 6 aveva risposto il lunedì e il martedì, riferendosi alla differenza di 3 kg tra le quantità di zucchero e di frutta in quei due giorni. Nessun gruppo ha visto " il doppio" tra il lunedì e il giovedì.

Questi risultati sono stati confermati da numerosi esperimenti con il problema in classe, in gruppo o individualmente, in Val d'Aosta e nella Svizzera romanda. Nella categoria 6, nelle classi non finaliste, la media è scesa ben al di sotto di 1. Solo nelle categorie 7 e 8 le procedure del "rapporto" hanno gradualmente prevalso su quelle della " differenza".

---

[35] Jaquet. F, con la participation de Gianna Bellò, Rossana Fassy, Graziella Telatin, M. Gabriella Rinaldi, Centro risorse per la Didattica della Matematica, sezione ARMT della Valle d’Aosta, ARMT. La proportionnalité dans les problèmes du RMT. In *ACTES DES JOURNEES D’ETUDES SUR LE RMT, (Vol. 7, 11e rencontre : Bard 2007). RMT fra pratica e ricerca in didattica della matematica/RMT entre pratique et recherche en didactique des mathématiques (2008).*pp 129-142. Bard (Valle d’Aosta).

4.2. Altri problemi confrontabili

L'approccio seguito nel caso di questo problema è emblematico del RMT.

Un problema viene elaborato con un'analisi a priori, poi quando si osservano gli indici statistici che suggeriscono di andare oltre, si passa ad un'analisi a posteriori degli elaborati, seguita da una riflessione didattica e talvolta dall'organizzazione di sperimentazioni o dalla stesura di altri problemi per "saperne di più" sul modo in cui gli alunni risolvono.

Nel corso degli anni, il Gruppo Calcolo e Proporzionalità ha proposto una serie di altri problemi di ricette, classificati nella famiglia SP – successioni proporzionali, e ha osservato che le percentuali medie di successo variano sensibilmente da un problema all'altro:

- 20.I.10; Crema al cioccolato. Tra le tre coppie (4; 200), (6; 250) e (10; 500) trovare quella che non è proporzionale alle altre due, nel contesto di una ricetta di mousse al cioccolato.

Media dei punti assegnati: da 2,50 a 3,42 nelle cat. da 5 a 7.

- 21.II.10; Tiri liberi a basket. nella pallacanestro Tra le tre coppie (18;7), 20;8) e (25;10) trovare quella più favorevole a un certo risultato e scoprire se due di esse sono equivalenti in relazione allo stesso risultato, in un contesto di tiri liberi nella pallacanestro.

Media dei punti assegnati: da 0,82 a 2,14 nelle cat. 5, 6 e 7.

- 21.F.11. La marmellata di susine. Trovare quale delle due coppie (33 ; 10) e (30 ; 9) dà lo stesso rapporto di (35 ; 10,5), nel contesto di una ricetta di marmellata.

Media dei punti assegnati: da 2,14 a 3,29 nelle categorie da 6 a 8.

- 26.II.09 La spremuta di limone. Nell'ambito di una ricetta con due ingredienti, date due quantità già preparate da mescolare, trovare di quanto è necessario aumentare la quantità di uno degli ingredienti per rispettare la proporzionalità degli ingredienti data nella ricetta originale.

Media dei punti assegnati: da 1,14 a 3,07 nelle cat. da 5 a 8.

- 27.I.12. IL pasticcere pasticcione. Realizzato un primo impasto invertendo le quantità necessarie dei due ingredienti, calcolare la quantità di uno dei due ingredienti che deve essere aggiunto al primo impasto per ristabilire una corretta proporzione.

Media dei punti assegnati: da 1,77 a 3,12 nelle cat. da 6 a 8.

Le medie dei punteggi assegnati a quest'ultimo problema (1,77 nella categoria 6), risultavano significativamente più alte di quelle assegnate al problema delle Marmellate di 12 anni prima. "Meglio tardi che mai", si potrebbe dire con un pizzico di ironia, ma bisogna fare i conti con una certa inerzia che è prevedibile in un gruppo di lavoro per sua natura eterogeneo e composto da insegnanti che hanno ben altro di cui preoccuparsi che l'evoluzione dei problemi del RMT! E possiamo aggiungere che, senza il sistema di raccolta dei dati in forma scritta, nella "Banca dei problemi" l'aumento della media dei punti sarebbe potuto passare inosservato.

Casuale o meno, fortunata o meno, la scoperta di quello che sembrava essere un "successo migliore" per il problema del Pasticciere Confuso apparve sospetta.

Per verificarlo, il Gruppo Calcolo e Proporzionalità ha elaborato una nuova versione dello "stesso" problema, mantenendo il contesto di un errore nell'applicazione di una ricetta ,ma cambiando le quantità dei due componenti: 1000 g di zucchero per 250 g di acqua in «Il pasticcere pasticcione» diventano 800 g di polvere per 1000 g di latte, nella versione che diventa il problema «Gabriella la piccola strega» :

4.3. I due enunciati

27.I.12. il pasticcere pasticcione (Cat. 6, 7, 8)

Il pasticcere Carlo sta preparando lo sciroppo per candire le arance: secondo la ricetta che consulta, questo sciroppo deve contenere 1000 g di zucchero per 250 g di acqua.

Dopo aver pesato gli ingredienti e averli miscelati, si accorge di aver invertito le due quantità: ha sciolto 250 g di zucchero in 1000 g di acqua.

Carlo non vuole buttare lo sciroppo che ha preparato. Aggiungendo un solo ingrediente, pensa di poter ottenere uno sciroppo che rispetti la ricetta.

Quale ingrediente Carlo deve aggiungere al suo sciroppo e in quale quantità per ottenere uno sciroppo che rispetti la ricetta?

Spiegate il vostro ragionamento e mostrate i calcoli che avete fatto.

29.I.12 **GABRIELLA LA PICCOLA STREGA** (Cat. 6, 7, 8)

Gabriella, la piccola strega, prepara una pozione magica per rimettere in forma i suoi elfi. Secondo il libro delle magie, è necessario utilizzare 800 g di polvere di fungo blu per 1000 g di latte di unicorno.

Distratta dalla sua scopa magica, Gabriella si rende conto di avere invertito le quantità dei due ingredienti: ha sciolto 1000 g di polvere di fungo blu in 800 g di latte di unicorno. Poiché la polvere di fungo blu è difficile da trovare nella terra degli elfi, Gabriella decide di non buttare via la sua preparazione.

Quale ingrediente dovrà aggiungere Gabriella e in quale quantità per ottenere una pozione che rispetti la ricetta del libro delle magie?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Il compito matematico prevede cinque fasi :

pour Il pasticcere pasticcione	pour Gabriella,
f) si parte dalla ricetta	
250 g di acqua per 1000 g di zucchero	800 g di polvere per 1000 g di latte
g) la confusione sta nello scambiare le due quantità	
1000 g di acqua per 250 g di zucchero	1000 g di polvere per 800 g di latte
h) la conseguenza è che è necessario una compensazione	
se c'è troppa acqua, bisogna aggiunger lo zucchero;	se c'è troppa polvere, bisogna aggiunger il latte;
i) calcolare la quantità totale del secondo ingrediente in base alla ricetta originale	
1000 g di acqua per ??? g di zucchero in totale (C))	1000 g di polvere per ??? g di latte in totale (G)
j) calcolare la quantità di zucchero da aggiungere C - 250 g	calcolare la quantità di latte da aggiungere. C G – 800 g

Quest'ultimo calcolo viene spesso dimenticato, lo sforzo per trovare C o G è molto faticoso!

Con la tabella di proporzionalità dell'adulto, le analogie diventano più chiare per le ultime due fasi d) ed e).

I metodi per risolvere il problema sono quelli del Capitolo 2. La proporzionalità, definizione:

1. Procedura algoritmica del "prodotto incrociato" o "regola del tre", tratta dalla tradizione delle "proporzioni".

2a. Procedimento che si riferisce al concetto di linearità o "funzione lineare" e alla ricerca del suo "fattore di proporzionalità".
Si determina il coefficiente a partire dalla ricetta originale:
1000 / 250 = 4 per il Pasticcere pasticcione
1000 / 800 = 1,25 per Gabriella
Quindi " si applica" per calcolare C = 4 x 1000 = 4000 e G = 1,25 x 1000 = 1250

2b. Procedimento che utilizza le proprietà della "funzione lineare" moltiplicativa e/o additiva.
Ci sono molti modi per farlo e possono essere molto lunghi nella loro progressione, includendo eventualmente un passaggio per l'unità.
Ad esempio :

Possiamo quindi stabilire un'analisi a priori delle procedure dell'allievo che porta alla risposta corretta.

4.4 I punteggi assegnati

Dai valori di 4 e 1,25 per i coefficienti di proporzionalità dei due problemi si evince facilmente che l'ipotesi di una variazione delle medie dei punti assegnati non era difficile da immaginare.
Ecco le due tabelle dei risultati ottenuti:

27.I.12. *Il pasticcere pasticcione*

Categorie	0	1	2	3	4	N. di classi	Medie
Cat 6	680 (46%)	56 (4%)	94 (6%)	218 (15%)	429 (29%)	1477	1.77
Cat 7	332 (26%)	44 (3%)	100 (8%)	257 (20%)	542 (43%)	1275	2.5
Cat 8	85 (10%)	23 (3%)	64 (7%)	216 (25%)	467 (55%)	855	3.12
Total	1097 (30%)	123 (3%)	258 (7%)	691 (19%)	1438 (40%)	3607	2.35

Secondo i criteri di attribuzione dei punteggi:
4 Risposta corretta (aggiungere 3 750 g di zucchero allo sciroppo) con spiegazioni chiare e complete (tutti i calcoli sono spiegati in modo che sia chiaro che la relazione tra le quantità è costante).
3 Risposta corretta, ma con spiegazioni poco chiare e calcoli incompleti.
o 4 000 g, che non tiene conto del fatto che il preparato sbagliato contiene già 250 g di zucchero, con una spiegazione chiara e completa.
2 Risposta corretta senza spiegazione
o 4 000 g, con una spiegazione incompleta
1 Inizio di un ragionamento corretto, ad esempio spiegazione che i rapporti tra le due preparazioni devono essere uguali
0 Incomprensione del problema o della risposta 1 750 (o 1500 = 1 750 - 250) per confusione tra conservazione della differenza e conservazione del rapporto

29.I.12. *Gabriella la piccola strega*

Categorie	0	1	2	3	4	N. di classi	Medie
Cat 6	634 (77%)	60 (7%)	11 (1%)	42 (5%)	76 (9%)	823	0.62
Cat 7	590 (67%)	87 (10%)	20 (2%)	64 (7%)	119 (14%)	880	0.90
Cat 8	36 (8%)	40 (9%)	22 (5%)	73 (16%)	297 (63%)	468	3.19
Total	1260 (58%)	187 (9%)	53 (2%)	179 (8%)	492 (23%)	2171	1.29

Secondo i criteri di attribuzione dei punteggi:
4 Risposta corretta (aggiungere 450 g di latte) con spiegazioni chiare e complete (tutti i calcoli spiegati in modo tale che sia chiaro che il rapporto tra le due quantità è costante)
3 Risposta corretta con spiegazioni poco chiare (calcoli incompleti o non spiegati) oppure risposta 1250 g di latte = 1,25 × 1000 g, che non tiene conto del fatto che nella preparazione sbagliata vi sono già 800 g di latte, con una spiegazione chiara e completa che tiene conto del fatto che si tratta di una situazione di proporzionalità
2 Risposta corretta senza spiegazioni
oppure risposta 1250 g di latte con spiegazione incompleta
1 Inizio di ragionamento corretto, per esempio indicazione che il rapporto tra le masse degli ingredienti deve essere uguale
0 Incomprensione del problema oppure risposta 200 g di latte (ossia 1000 – 800 = 200) dovuta allo scambio fra conservazione della differenza e conservazione del rapporto

4.5 Le risposte degli allievi

I risultati statistici sopra riportati, per due varianti dello stesso problema, con lo stesso compito, contesti molto simili e gli stessi criteri di punteggio, sembrano mostrare l'influenza del cambiamento di valore della variabile didattica "coefficiente di proporzionalità".

La media della categoria 6 passa da 1,77 a 0,62 e gli "0 punti" dal 46% al 77%. I risultati sono simili per la categoria 7. È quindi legittimo, per non dire essenziale, aprire gli elaborati degli allievi e leggerli. Inizia così la fase chiave dell'analisi a posteriori.

Ecco un primo resoconto della sezione SI per Gabriella la piccola strega.

Nella Categoria 6 la percentuale di errori è molto alta rispetto alla categoria 7 e soprattutto alla categoria 8

Categoria 6:

- 20 elaborati con risposta 200 g e utilizzo della strategia additiva
- 43 elaborati con risposta 400 g (1200 - 800) utilizzo della strategia additiva
- 6 elaborati con risposta 600 g o 200 g non categorizzabili con errore concettuale tra additivo e moltiplicativo; quelli con raddoppio di dosi e conseguente modifica di entrambe gli ingredienti che è errato come risultato ma compare l'abbandono del pensiero additivo per un inizio di ragionamento proporzionale dove appare l'esigenza del pensiero moltiplicativo.

Gli alunni cercano di ritrovare l'equilibrio tra i componenti attraverso un processo manipolativo

- 1 elaborato triplica le dosi

- 8 elaborati con risposta 450 g di latte di unicorno e procedura corretta spiegata correttamente con evidenza della presa di coscienza del rapporto che compare in tutto il percorso e l'utilizzo opportuno del verbo aggiungere senza scadere nella struttura additivo (SI06063)
(SI 06051) evidenza del confronto e del rapporto
- 4 elaborati in bianco
- 4 elaborati con risultato errato e fuori dalle strategie e risultati non corretti.

86 elaborati totali con il 9% di risposte esatte

Categoria 7:

- 4 elaborati con risposta 250 g che implicano il passaggio al rapporto. Nell'elaborato (SI 07055) si comprende che il rapporto deve rimanere costante ma appare un errore nella rappresentazione grafica dei segmenti, che potrebbe essere utile, ma la rappresentazione non è attenta.
- 4 elaborati con il raddoppio delle dosi
- 8 con risposta 200 g (strategia additiva
- 45 elaborati con risposta 400 g (strategia additiva)
- 10 elaborati con risposta corretta 450 g e strategia risolutiva corretta
- 5 elaborati con risposta errata. Nell'elaborato SI06063 trovano l'unità sulla pozione totale e utilizzano le percentuali
- 5 elaborati con risposta 1250 g utilizzano la proporzione ma dimenticano di fare la differenza
- 3 bianchi

84 elaborati totali con 11% di risposte corrette

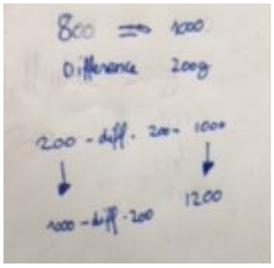
Categoria 8

- 12 elaborati con risposta corretta e spiegazione chiara e completa
- 9 elaborati con risposta corretta ma spiegazione non chiara
- 1 elaborato con risposta errata (1250 g) ma ragionamento corretto
- 3 elaborati con risposta errata (250 g) con ragionamento corretto attraverso la proporzione
- 9 elaborati con risposta errata (400 g) e pensiero additivo
- 7 elaborati con risposte errate ma strategie poco chiare
- 3 elaborati bianchi

44 elaborati totali con 27 % di risposte corrette e con spiegazione corretta e 38% totali con risposta corretta (compresi quelli con spiegazione non chiara)

Questo resoconto si ritrova in tutte le altre sezioni che hanno condotto un'analisi a posteriori delle copie degli allievi, e nei lavori del Gruppo Proporzionalità all'incontro internazionale di Lione: le risposte 200 o 400 sono nettamente in maggioranza nelle categorie 6 e 7.

Dobbiamo ora cercare di spiegare perché, e fare un ulteriore passo nell'analisi a posteriori: dopo aver scoperto gli errori e la loro frequenza, ascoltiamo cosa ci dicono gli allievi sul loro modo di trovare queste risposte, che ovviamente consideriamo, dal nostro punto di vista, degli errori.



4.6. Qualche esempio

Le risposte 200 et 400

Esempio 1 (cat 6):

La più frequente e la più caratteristica, con il commento: *Gabriella dovrà aggiungere 200 g di latte di unicorno per ottenere una pozione conforme alla ricetta.*

L'immagine mostra il calcolo della differenza tra 800 e 1000 e poi il passaggio a 1200.

Esempio 2 (cat 6) : *C'è una differenza di 200 grammi, 800 e 1000 --> 1000 e 1200 rispetto alla falsa pozione 1000 e 800 è necessario aggiungere 400 (o 200 + 200)*

Esempio 3 (cat 7): *Ci sono sempre 200 grammi di differenza tra 800 e 1000 o tra 1000 e 1200*

Esempio 4 (cat 8): *Gabriella deve compensare i valori da lei modificati, abbiamo percepito che la differenza tra la polvere e il latte è di 200g. Perciò per tornare alla ricetta originale a Gabriella basterà aggiungere 200 g di latte in più rispetto alla polvere.*

Esempio 5 (cat 8): *Poiché il latte di unicorno deve essere in quantità maggiore rispetto alla polvere di fungo blu che deve essere sciolta nel latte, consideriamo la differenza numerica tra 1000 grammi 800 grammi, che è 200 grammi, quindi dobbiamo aggiungere un numero tale che faccia in modo che la differenza resti di 200 grammi tra le due misure. Questo numero è 400, quindi dovrà aggiungere 200 grammi di latte di unicorno.*

Tutte queste spiegazioni sono chiare, ovvie e ben argomentate. Non corrispondono alla realtà e sono considerati errori dagli adulti, ma corrispondono alle convinzioni di chi li ha espressi. Piuttosto che giudicarli negativamente, dobbiamo chiederci perché compaiono nella maggioranza dei gruppi e perché vengono espressi con le parole chiave differenza, aumento, aggiunta.

Le risposte 600 grammi di polvere e 1200 g di latte

Sono poco numerose (circa il 5%), ma si trovano in ogni analisi a posteriori effettuata dalle sezioni o dal Gruppo di Calcolo e Proporzionalità

Esempio 6 (cat.8):

Per evitare di dover buttare via dei funghi, dobbiamo raddoppiare le quantità, quindi dobbiamo sottrarre dalle quantità raddoppiate ciò che abbiamo già 1600 - 1000 = 600 grammi di polvere e 2000 - 800 = 1200 grammi di latte.

Esempio 7 (cat. 7):

Raddoppiamo la pozione esatta 800 e 1000 -> 1600 e 2000 che pertanto diventa 1600 g PF e 2000 g di LU ; aggiungono ai 1000 g di PF 600 g e ne ottengono 1600 g e poi agli 800 g di LU aggiungono 1200 g per arrivare a 2000 g di LU. In questo modo si raddoppia anche la differenza (400 g.)

Esempio 8 (cat. 6):

Siccome in ogni 1000g di latte di unicorno ci deve stare 800g
di polvere di fungo deve arrivare al doppio di ogni ingredi-
ente.
Quindi dovrà aggiungere agli 800g di polvere di fungo 1200g
di esso per arrivare a 2000g (il doppio, deve ci sono 1600 g
di polvere di fungo).
E deve aggiungere ai 1000g di latte di unicorno 600g di
quest'ultimo per arrivare a 1600g.

L'idea di raddoppiare le quantità rispetta la ricetta, ma il calcolo delle differenze rimane in una prospettiva di sottrazione e addizione (differenza, aumentare, aggiungere).

Le risposte 450 grammi

Esempio 9 (cat 8):

1/4 di 800 = 200; 800 + 1/4 = 1000

Il quarto di 1000 = 250; 1000 + 250 = 1250

800 + 450 = 1250

Esempio 10 (cat 7): *1000 : 800 = x : 1000 quindi x = 1250 e poi 1250 – 800 = 450 g*

Esempio 11 (cat. 7): *Aggiunta di 450 g di latte di unicorno perché ogni 200 g di polvere di fungo blu bisogna aggiungere 250 g di latte di unicorno)*

Esempio 12 (cat. 8): *1000 : 800 = 1,25 quindi bisogna fare in modo che latte di unicorno diviso polvere di fungo sia = a 1,25 ciò significa che il latte di unicorno sarà = 1000 * 1,25 = 1250 g e perciò bisogna aggiungere 450 g di latte di unicorno (800 + 450 = 1250 g)*

Esempio 13 (cat 8): *Visto he 1000 è 1/5 più grande di 800 aggiungiamo 450 g per rendere il latte di unicorno 1/5 della polvere di fungo blu.*

Esempio 14: (Cat 7) *se ha aggiunto 200 g di polvere di fungo blu agli 800 g vuol dire che ha aggiunto ¼ di quello che doveva aggiungere. Quindi dobbiamo aggiungere ¼ di 1000 al latte di unicorno aggiungendo 250 g. Quindi nell'intruglio ci saranno 1000 g di polvere di fungo blù e 1250 di latte di unicorno* (seguono i calcoli).

Esempio 15: (Cat 7): *dividendo la quantità iniziale dei due ingredienti o, dopo aver calcolato la loro differenza ho moltiplicato i due risultati trovando la quantità di ingrediente mancante. 1000 :800 = 1,25 1000 – 800 = 200*

1,25 × 200 = 250 g di latte di unicorno che Gabriella dovrà aggiungere.

Esempio 16 (cat 8): *abbiamo applicato la regola del tre e la tabella con ": 8" e "× 10"*
Esempio 17 (cat 8): tabella e frecce *"1,25 volte di più".*

5. Sintesi dell'analisi dei risultati dei due problemi

Notiamo che la maggioranza dei gruppi d'allievi delle categorie 6 e 7, autonomamente e in cooperazione, hanno una percezione additiva (*differenza, aggiunta, aumento*) del rapporto tra le quantità di polvere di funghi e latte di unicorno, al problema di *Gabriella la piccola strega*, mentre nel caso delle misurazioni di zucchero e acqua per il problema *Il pasticcere pasticcione* era prevalente una percezione moltiplicativa (rapporto).
Un semplice cambiamento nel valore della variabile didattica "quantità dei due ingredienti nella ricetta" porterebbe a un cambiamento così indiscutibile e significativo nei risultati ottenuti, che sono paragonabili a quelli del problema originale, *Le Marmellate*!
Come per qualsiasi analisi a posteriori dei nostri problemi di RMT, i dati raccolti in modo rigoroso richiedono una riflessione didattica. La palla passa quindi agli insegnanti che cercano di migliorare l'apprendimento dei loro alunni o la loro formazione didattica. Spetta a loro sfruttare le analisi e i risultati.

5.1. La variabile "numeri"

È evidente che, dal punto di vista aritmetico, il legame tra 250 e 1000, nel *Pasticcere pasticcione* con quello tra 800 e 1000, nel*Gabriella la piccola strega*, è di natura diversa, poiché 1000 è il quadruplo di 250 o 250 è un quarto di 1000, mentre il legame tra 800 e 1000 non può essere espresso con le parole del linguaggio quotidiano riservate ai numeri interi o alle frazioni unitarie.
Nella loro lingua gli allievi si pongono la seguente domanda: *Per passare da 250 (ricetta corretta) a 1000* (dopo la confusione) *cosa devo fare? un "più" o un "per"?*
Poiché sappiamo che gli alunni, in caso di dubbio o di difficoltà, fanno riferimento alle relazioni più familiari tra i numeri dell'enunciato, è più probabile che scelgano la relazione "quattro volte" per il primo caso e il legame tra "+750" e "+200" invece di "1,25 volte" per il secondo caso.

acqua	250	1000
zucchero	1000	C

polvere	800	1000
latte	1000	G

Nel problema delle *Marmellate*, i dati dell'enunciato erano, nell'ordine :

zucchero	5	7	10	3
ciliegie	8	10	16	5

E la relazione "+3" per le prime due coppie era più evidente di "per 8/5 o 16/10 per la prima e la terza coppia.
La persuasione degli alunni dipendeva dalla loro familiarità con i numeri: quando appariva un legame che poteva essere facilmente espresso in numeri interi, lo preferivano.
Confronto tra le procedure: il 50% dei gruppi di cat. 6 e il 71% di quelli di cat. 7 hanno utilizzato una procedura moltiplicativa - quella auspicata dall'insegnante - per *Il pasticcere pasticcione*; ma solo il 15% di cat. 6 e il 23% di cat. 7 per *Gabriella la piccola strega*. Si tratta di una migliore percezione della proporzionalità?

5.2. Differenza o rapporto

Due successioni di numeri possono essere collegate dalla differenza tra due numeri corrispondenti.
Ad esempio, l'età di due persone. La relazione è di tipo additivo.
Possono anche essere collegate dal rapporto (quoziente) di due numeri corrispondenti. In questo caso, si tratta di successioni proporzionali, in cui la relazione è di tipo moltiplicativo.
Dal punto di vista didattico, è importante sapere che, nella mente di un allievo, l'addizione prevale sulla moltiplicazione, così come la sottrazione prevale sulla divisione.
È inoltre importante ricordare che la "natura" del numero cambia con l'età. L'allievo percepisce le cifre e le scritture come "numeri di" [36] associati a oggetti, immagini e grandezze. Gli adulti li percepiscono "disincarnati" come elementi di insiemi definiti in matematica: i numeri naturali, i numeri interi (positivi e negativi), i numeri razionali

---

[36] Concetto definito da Stella Baruk nel *Dizionario di matematica elementare (edizione italiana* a cura di Francesco Speranza, Lucia Grugnetti), Zanichelli, 1998.

(quozienti di due numeri interi), poi numeri irrazionali, fino ai numeri reali, poi numeri immaginari, ecc. Poi ci sono i numeri decimali e le approssimazioni decimali della calcolatrice.

Come abbiamo detto in precedenza, l'addizione è la prima operazione a disposizione del bambino, che gli permette di ordinare i suoi "numeri di ..." ripetendo "+ 1". Quando gli si introduce la moltiplicazione, il bambino accetta prontamente l'aggiunta di un nuovo segno di operazione « × » con la rappresentazione mentale di una ripetizione di addizione: *ce lo ha detto l'insegnante "4 + 4 + 4" può essere scritto anche "4 × 3 " e che quest'ultimo si pronuncia "4 moltiplicato per 3" o "3 volte 4"* o *"3 per 4"* . *Ci ha anche detto che "3 + 3 + 3 + 3" si scrive "3 × 4 " che si pronuncia "3 moltiplicato per 4" o "4 volte 3".* Egli accetta queste nuove notazioni, che gli fanno risparmiare tempo perché una somma di molti termini identici può essere molto più breve. Ma, nella sua mente, si tratta sempre di un'addizione ripetuta. mediante la ripetizione di "+ 1".

Questa rappresentazione viene confermata quando gli presentiamo il calcolo dell'area di un rettangolo secondo il modello tradizionale: un rettangolo, i cui lati sono paralleli al bordo del foglio di carta su cui è disegnato, composto da tre file di quattro quadrati e anche da quattro colonne di tre quadrati (una presentazione che non giustifica la necessità di far intervenire una nuova operazione per addizioni così elementari e che rafforza la predominanza dei "numeri di..." evitando come la peste di passare alle parti non intere dei quadrati e soprattutto sollevando il problema del prodotto di misure, in cm, che portano ad altre misure in cm^2)[37].

Il modello della moltiplicazione come ripetizione, caratteristico del modello additivo, appare chiaramente nel problema Dolcetti di castagne (I) (ral. 30.I.04; cat. 3-4) dove si tratta di Trovare un numero (di dolcetti) corrispondente a 3 recipienti piccoli, sapendo che 18 (dolcetti) corrispondono a un recipiente grande e che un recipiente piccolo contiene la metà (dei dolcetti) del recipiente grande.

L'analisi a posteriori di questo problema rivela che:

Sono le osservazioni numeriche a rivelarsi interessanti, in quanto sembrano caratterizzare due concezioni della distribuzione delle torte. Per l'adulto che colloca il problema nel campo concettuale della moltiplicazione e applica la proprietà moltiplicativa della proporzionalità, la "metà" delle 18 torte si determina dividendo per 2 e poi moltiplicando per 3 per trovare il numero totale di torte sui tre piatti:

18 : 2 = 9, poi 3 × 9 = 27

Tuttavia, in una percentuale significativa di elaborati, quasi la metà nella categoria 3, si nota la comparsa di una scrittura nel campo concettuale dell'addizione: 9 + 9 = 18 allora 18 + 9 = 27 oppure 9 + 9 + 9 = 27.

Possiamo notare che per questi alunni trovare la "metà" dei 18 dolcetti sul piatto grande sembra essere come mettere insieme due parti uguali per ottenere il tutto. Scrivendo 9 + 9 = 18, risolvono l'uguaglianza incompleta ... + ... = 18, sapendo che l'unico numero adatto per completare correttamente l'uguaglianza è 9.

5.3. Il «pensiero proporzionale» e i suoi aspetti didattici

In sintesi, c'è un ostacolo che rientra nell'ambito dell'epistemologia genetica, che potremmo chiamare "conflitto differenza-rapporto" (come quello che osserviamo in geometria e che chiamiamo "conflitto area-perimetro").

L'allievo "vede" la differenza tra due quantità quando una è più alta, più lunga, più voluminosa, più pesante… dell'altra. Questo confronto può essere effettuato direttamente tra oggetti, quantità e talvolta anche figure geometriche in contesti di similitudine. Può essere fatto concretamente per giustapposizione o riproduzione. L'operazione aritmetica necessaria per determinare questa differenza è l'addizione/sottrazione di quantità o "numeri di oggetti", …

Il rapporto tra due quantità non è più percepibile dai sensi, richiede un'analisi delle loro misue, che devono essere considerate come numeri, in senso matematico e non più come quantità o numeri di oggetti. La determinazione del rapporto non può più essere effettuata mediante addizioni ripetute ma mediante una nuova operazione: moltiplicazione/divisione, a volte tra numeri naturali, ma generalmente razionali.

I dati delle nostre analisi ci permettono di affermare che l'ostacolo è troppo alto per la stragrande maggioranza degli allievi, fino alla categoria 8, perché non hanno ancora padroneggiato la moltiplicazione/divisione dei numeri razionali.

Abbiamo riscontrato, tuttavia, che molti problemi, classificati nell'area di proporzionalità della nostra Banca della RMT, ad esempio, Una corsa mattutina (ral. 24.II.01 ; cat. 3-4), Tavolette di cioccolato (ral. 27.I.03 ; cat. 3-4); Dolcetti di castagne (I) (ral. 30.I.04 ; cat. 3-4), La torta di Lucia (ral. 31.F.06 ; cat. 4-5); ci mostrano che l'80% dei gruppi di alunni delle prime categorie è arrivato alla "risposta corretta". Questi problemi sono spesso visti come un "approccio" alla proporzionalità e che possono essere risolti senza calcolare una "rapporto" o senza essere consapevoli della sua esistenza. Gli allievi arrivano alla risposta applicando un'unica operazione con i numeri naturali: "prendere il doppio", "dividere per tre",… a volte ripercorrendo l'unità, eppure quando questi stessi allievi saranno nelle categorie 6 e 7, risponderanno quasi tutti alla domanda del problema *Gabriella la piccola strega*: *Gabriella dovrà aggiungere 200 g di latte di unicorno* per ottenere una pozione che rispetti la ricetta!

[37] Si vedano a tale proposito i problemi **Rettangoli di carta quadrettata (I)**(ral. 29.I.04; cat. 3-4) e **Rettangoli di carta quadrettata (II)**(ral. 29.I.08 ; cat. 5-6).

Arriviamo così alla scelta didattica dell'insegnante: cosa fare con questi problemi che evitano il “conflitto differenza – rapporto” che i giovani allievi risolvono facilmente? Dovremmo rinunciarci? Possiamo ancora sfruttarli per lo sviluppo futuro del pensiero proporzionale?
La risposta attuale del Gruppo Calcolo e Proporzionalità è chiara: la soluzione di avvicinarsi solo al pensiero proporzionale a partire dalle categorie 8 e seguenti è da respingere poiché le situazioni e i contesti in cui viene costruito sono quelli della vita quotidiana degli allievi fin dalla più tenera età[38] . Dobbiamo invece considerare di continuare la nostra sperimentazione con questi problemi accessibili nelle categorie da 3 a 5 per vedere se è possibile sfruttarli a livello didattico andando oltre il controllo e la spiegazione della risposta. Anche se sappiamo che c'è ancora molta strada da fare per costruire la nozione di rapporto, andrebbe considerata una strumentalizzazione didattica laddove essa entri in "conflitto" con quella di differenza, anche solo allo scopo di rafforzare le procedure di transizione al passaggio all’unità (in cui la “relazione” non è esplicita) o semplicemente abituare gli allievi a lavorare con numeri innaturali con i quali la moltiplicazione non è più un’addizione ripetuta.

La via è aperta per coloro vogliono continuare la riflessione e la sperimentazione, in un quadro nuovo da definire, in relazione agli sviluppi futuri della Banca di Problemi del RMT.

[38] In un'opera quasi enciclopedica dalla collezione *Des grandeurs aux espaces vectoriels, La linéarité comme fil conducteur* ((Edizione CREM 2002, Nicolas Rouche illustra attraverso situazioni problematiche grandezze, proporzionalità, somiglianza, vettori, funzioni e trasformazioni lineari, con le loro origini geometriche e fisiche, con un nesso strutturale: quello della linearità o “pensiero proporzionale” che si ritrova in tutte le fasi dell'istruzione, dalla scuola dell'infanzia fino alla fine della scuola secondaria.

RUBRICA DEDICATA AI POSTER PRESENTATI AL CONVEGNO INTERNAZIONALE DI FAENZA

Sezione Parma

RUOLO COSTRUTTIVO DEI PROBLEMI DEL RMT NELLA DIDATTICA DELLA CLASSE

a cura di Daniela Porro, Manuela Andreata, Maria Giuseppina Vallisa
Istituto comprensivo Amaldi Roveleto di Cadeo (PC)

Introduzione

Costruire la propria conoscenza attraverso un'esperienza diretta è una delle possibilità offerte dai problemi del RMT: è anche per questo che la partecipazione alla gara rappresenta per le classi del nostro Istituto un'attività irrinunciabile e per i docenti uno strumento importantissimo nella didattica quotidiana. Osservare gli alunni mentre producono le loro soluzioni fa prendere coscienza agli insegnanti di come si sviluppa nel tempo l'acquisizione dei concetti matematici e delle abilità ad essi collegate consentendo di adeguare e modulare i propri interventi didattici sulla base di queste evidenze.
Da questa consapevolezza è nata nel nostro Istituto l'idea di progettare un'attività rivolta a più classi di diverso livello scolare con l'obiettivo di sperimentare il ruolo costruttivo di uno stesso problema all'interno di un percorso laboratoriale. L'esperienza è stata presentata nella sessione poster del 26° convegno internazionale ARMT tenutosi a Faenza.

L'idea progettuale

Il percorso, svolto nell'anno scolastico 2023/24, ha visto impegnate cinque classi nella risoluzione del problema Zollette di zucchero (30°RMT, II, 7) proposto alle cat. 5, 6. Oltre ad alcune classi di cat. 5 e 6 la sperimentazione è stata estesa anche ad una classe di cat.7. Le docenti hanno organizzato l'attività progettando varie fasi e definendo un tempo complessivo superiore a quello previsto normalmente per la ricerca della soluzione. La presenza contemporanea in classe di più docenti durante lo svolgimento delle attività ha consentito di osservare con maggior cura il lavoro degli alunni che è stato documentato attraverso immagini, registrazioni audio e brevi video.

Ampio spazio è stato dato all'aspetto metacognitivo e alla condivisione tra docenti degli esiti del problema e della documentazione del percorso.

Motivazioni della scelta del problema

Le motivazioni che hanno guidato la scelta del problema sono le seguenti:
- consente di lavorare in verticale perché offre un contesto interessante, adatto a allievi di diverse età e può essere affrontato con diversi approcci: oltre all'applicazione di strategie strettamente matematiche è possibile un'esplorazione concreta grazie al supporto del materiale manipolativo fornito dall'insegnante;
- è funzionale al lavoro didattico svolto in ciascuna classe coinvolta ed è in grado di integrarsi con i contenuti curriculari specifici di ogni livello scolare, offrendo opportunità di approfondimento e di consolidamento delle conoscenze già acquisite;
- offre un contesto concreto per ragionare sull'idea complessa di volume che richiede tempi lunghi ed esperienze diversificate: di frequente tale contenuto viene affrontato alla primaria in forma esperienziale, per poi essere ripreso alla secondaria solo in terza media. Lasciare un lasso di tempo così lungo senza creare occasioni per fare esperienza in questo ambito non gioca a favore di un'acquisizione graduale del concetto.
- presenta inoltre aspetti legati al numero e la ricerca della soluzione richiede pazienza, flessibilità e pensiero critico per esplorare efficacemente tutte le possibilità e riconoscerne le soluzioni.
- il problema non ha riscontrato un buon esito nelle classi afferenti alla sezione di Parma: in entrambe le categorie si evidenziano punteggi molto bassi, con un'alta percentuale di incomprensione del problema. Di seguito si riportano i punteggi attribuiti al problema "Zollette di zucchero" nella sezione di Parma.

Categoria	0	1	2	3	4	Num. classi
Cat 5	54 (73,9%)	12 (16.4%)	2 (2,7%)	3 (4,1%)	2 (2,7%)	73
Cat 6	55 (71,4%)	16 (20,7%)	1 (1,3%)	3 (3,9%)	2 (2,6%)	77

Testo del problema e analisi del compito

7. ZOLLETTE DI ZUCCHERO (Cat. 5, 6)

Lo zuccherificio CUBOSUGAR confeziona zollette di zucchero dei seguenti tipi:

- Zucchero di barbabietola
- Zucchero di canna semolato
- Zucchero di canna integrale
- Zucchero Demerara
- Brown sugar

Ogni zolletta ha la forma di un cubetto con spigolo di un centimetro.

CUBOSUGAR desidera confezionare ciascun tipo di zucchero in scatole diverse, ciascuna delle quali contenga esattamente 54 zollette, senza spazi vuoti. Tutte le scatole devono avere forma di un parallelepipedo con dimensioni diverse, ma sempre minori di 30 cm.

Si potrà avere una scatola diversa per ciascun tipo di zucchero, con ognuna delle tre dimensioni minore di 30 cm?

Se "sì", indicate le dimensioni delle scatole, altrimenti spiegate perché non è possibile.

Ecco l'analisi del compito, così come è stata preparata per la gara .

Compito matematico

Individuare in quanti modi è possibile ottenere il numero 54 come prodotto tre numeri naturali minori di 30.

Analisi del compito

- Immaginare le scatole descritte nell'enunciato: sono parallelepipedi rettangoli che contengono 54 cubetti con il lato di 1 cm e rendersi conto che sono oggetti tridimensionali composti da diversi "strati" di cubi disposti su rettangoli che hanno due dimensioni (righe e colonne).
- Applicare la "formula" elementare del volume del parallelepipedo formato da cubi di 1 cm di spigolo o scoprirlo o "inventarlo" e rendersi conto che il compito consiste nel trovare l'insieme di tre numeri naturali che hanno come prodotto 54
- Organizzare la ricerca, per esempio, a partire da $1 \times 2 \times 27$ (dopo aver eliminato $1 \times 1 \times 54$ che dà un numero maggiore di 30) e poi scoprire le altre terne e concludere che sono state trovate cinque terne diverse per 5 tipi diversi di zucchero.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta: "Sì", con la lista delle 5 possibilità: $1 \times 2 \times 27$; $1 \times 3 \times 18$; $1 \times 6 \times 9$; $2 \times 3 \times 9$; $3 \times 3 \times 6$

3 Risposta "Sì", ma manca una scatola della lista
oppure risposta "No" perché trovate e indicate solo 4 scatole

2 Risposta "Sì", ma mancano due scatole della lista
oppure risposta "No" perché trovate e indicate solo 3 scatole
oppure un errore nelle terne

1 Una o due scatole trovate
oppure più errori nelle terne o presenza di doppioni

0 Incomprensione del problema

Nel problema il compito dell'allievo è quello di immaginare le scatole descritte nell'enunciato e la costruzione di parallelepipedi rettangoli di volume dato. Per trovare tutte le possibili soluzioni occorre individuare in quanti modi è possibile ottenere il numero 54 come prodotto di tre numeri naturali minori di 30.

La nostra sperimentazione

Modalità organizzative e fasi del percorso

Il problema è stato proposto con la stessa metodologia in cinque classi: due classi di cat.5; due classi di cat. 6; una classe di cat. 7. L'attività si è svolta in tre fasi con le stesse modalità e tempi in tutte le classi.

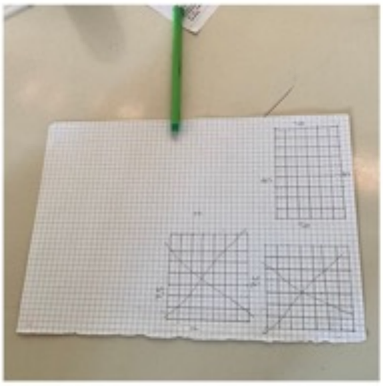
Fase 1. Risoluzione del problema

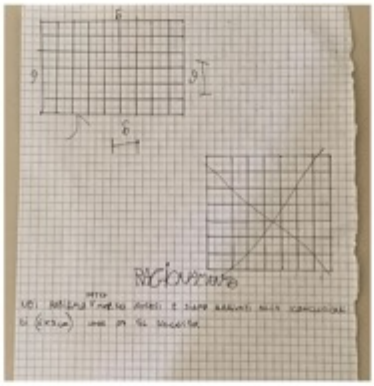
Nella prima fase viene proposto il problema secondo la modalità classica del Rally che tutti gli alunni hanno già affrontato in precedenza. La proposta viene fatta agli alunni motivandoli sulla necessità di affrontare un problema che non è stato risolto con successo durante l'anno scolastico precedente, incoraggiandoli a dimostrare le loro capacità e competenze matematiche.
Gli allievi, divisi in gruppi, sono invitati a produrre una soluzione collettiva utilizzando il materiale che reputano necessario: forbici, colla, righello, compasso, carta, matite, calcolatrice. Si chiede a ciascuno di annotare sul quaderno le possibili soluzioni che emergono dalla discussione di gruppo e di produrre un unico foglio risposta per gruppo con spiegazioni chiare.

Si stabilisce per la prima fase un tempo di 30 minuti; l'insegnante nel ruolo di osservatore documenta lo sviluppo delle strategie e dei dibattiti.

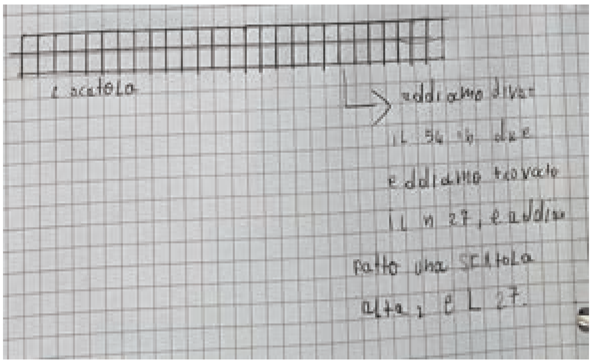
Osservazioni nella Fase 1

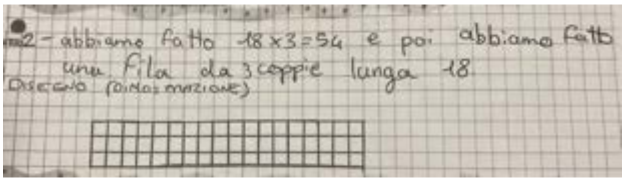
In cat. 5 la maggioranza degli allievi ha affrontato il problema attraverso strategie basate su tentativi. In particolare, gli allievi hanno lavorato sperimentando diverse combinazioni di numeri, cercando di individuare coppie di fattori che danno come risultato 54. Questo approccio è stato supportato da una rappresentazione visiva delle soluzioni mediante l'uso di rettangoli nel piano.

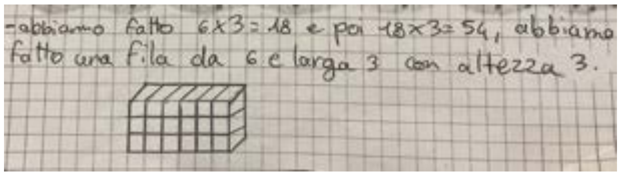




Non tutti gli alunni hanno raggiunto la comprensione del problema. Alcuni gruppi si sono trovati disorientati nel processo di ricerca e non sono stati in grado di trovare soluzioni valide. Questo può essere dovuto a diversi fattori, tra cui la complessità del problema, la mancanza di familiarità con alcune strategie di risoluzione di problemi o una comprensione incompleta dei concetti matematici coinvolti.
In cat. 6 gli alunni continuano ad utilizzare l'approccio basato su tentativi, ma in diversi casi si concentrano sulla divisione anziché sulla moltiplicazione. L'obiettivo è individuare il divisore corretto che, moltiplicato per un altro numero, dia come risultato 54. Tuttavia, la ricerca del divisore non segue un processo organizzato e strutturato. Gli allievi esplorano varie combinazioni di numeri senza una chiara strategia di ricerca.
Alcuni cercano di visualizzare la situazione in tre dimensioni, ad esempio rappresentando la scatola che potrebbe contenere 54 zollette. Tuttavia, la descrizione di questa rappresentazione tridimensionale è spesso associata ad una semplice coppia di numeri, trascurando la terza dimensione.







Nella cat.7 gli allievi mostrano un approccio alla risoluzione del problema più consapevole e organizzato. Sebbene continuino a utilizzare il metodo per tentativi, alcuni gruppi iniziano a sviluppare strategie più organizzate per cercare tutti i divisori del numero dato. Questo indica una maggiore consapevolezza della necessità di una metodologia strutturata nella risoluzione dei problemi. Tuttavia, le soluzioni proposte dagli alunni rimangono limitate alla rappresentazione bidimensionale sul piano: quando si tratta di rappresentare le scatole che potrebbero contenere 54 cubetti, le descrizioni sono ancora rese prevalentemente con coppie di numeri.

Fase 2. Esplorazione e verifica con l'uso dei materiali

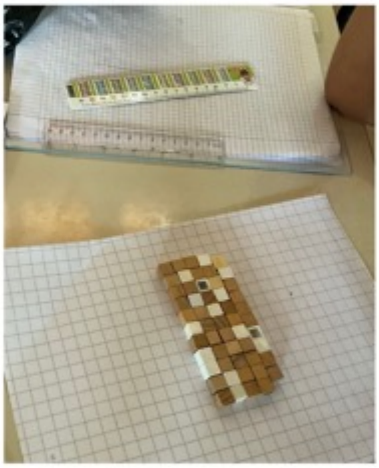
Durante la fase di verifica delle soluzioni, viene fornito a ciascun gruppo del materiale utile per eseguire un controllo delle soluzioni in modo operativo e concreto. Grazie a questo materiale, che consiste in 54 cubetti da 1 cm^3 e fogli quadrettati da 1 cm, gli allievi hanno la possibilità di visualizzare e manipolare le configurazioni proposte come soluzioni del problema.
Viene posta agli alunni una domanda guida volta a stimolare un'analisi critica delle loro soluzioni: "Con il materiale a disposizione controllate se le vostre soluzioni sono possibili. Se vi accorgete che qualcosa non funziona, formulate una nuova soluzione."
Gli alunni vengono così incoraggiati a verificare se le soluzioni trovate sono praticabili e realistiche. Ogni gruppo documenta, sul proprio quaderno, il processo di verifica e le eventuali modifiche apportate. Questo permette agli allievi di riflettere sulle proprie strategie e di registrare le nuove soluzioni elaborate durante il processo di verifica.
Si stabilisce per questa fase una durata approssimativa di 45 minuti, durante i quali gli allievi hanno il tempo sufficiente per esplorare le loro soluzioni, eseguire i controlli necessari e formulare eventuali aggiustamenti.
Si suggerisce agli insegnanti di svolgere la fase 1 seguita dalla fase 2 in sequenza.
I comportamenti attesi durante questa fase sono i seguenti:

- conferma delle soluzioni corrette: i gruppi che hanno risolto correttamente il problema troveranno conferma concreta della correttezza delle loro risposte. Utilizzando i materiali forniti, potranno visualizzare e manipolare le configurazioni proposte, confermando che soddisfano effettivamente i requisiti del problema.
- riscontro degli errori e correzione: per i gruppi che non hanno trovato soluzioni o che hanno commesso errori, la fase di verifica offre un riscontro evidente e immediato. Utilizzando il materiale a disposizione, gli errori diventano più visibili e possono essere identificati in modo più chiaro. Questo consente loro di correggere le risposte sbagliate e di apportare eventuali modifiche per allinearsi correttamente con le condizioni del problema.

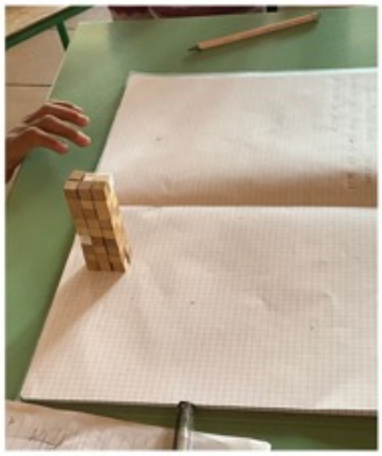
Osservazioni nella fase 2

Dopo aver fornito il materiale, abbiamo notato un miglioramento significativo nella comprensione del problema da parte di tutti i gruppi, compresi quelli che inizialmente avevano incontrato difficoltà nel proporre soluzioni. L'uso dei materiali manipolativi ha giocato un ruolo cruciale nel facilitare la comprensione e nel migliorare l'efficacia della risoluzione del problema.
Tutti i gruppi hanno dimostrato di aver individuato o verificato le configurazioni su un piano. Inoltre, il valore aggiunto del materiale è stato fondamentale nel consentire ai gruppi di "far crescere la scatola" e individuare soluzioni che coinvolgono più piani che nella prima fase non erano emerse. Questa prospettiva tridimensionale, resa possibile dall'utilizzo dei cubetti e dei fogli quadrettati, ha permesso agli alunni di esplorare la profondità e l'altezza della struttura in modo più concreto e tangibile raggiungendo un nuovo livello di comprensione.
La difficoltà nell'esprimere il parallelepipedo nelle sue tre dimensioni, emersa durante la risoluzione del problema e riscontrata in tutti i livelli scolari, è evidentemente sintomo dell'ostacolo creato dall'abitudine a lavorare in geometria piana. Anche dopo aver costruito un modello concreto utilizzando il materiale manipolativo, molti allievi hanno trovato difficile formalizzare il calcolo e rappresentare correttamente tutte e tre le dimensioni del

parallelepipedo. Questo ha portato a una rappresentazione semplificata della soluzione, in cui vengono riportati solo due fattori anziché tutti e tre.
Per superare questa difficoltà, è stato fondamentale coinvolgere gli allievi in una discussione approfondita in classe: è stato incoraggiato il confronto per scambiare punti di vista e strategie di risoluzione, per la rappresentazione tridimensionale dei parallelepipedi e per formalizzare la "formula" elementare del volume del parallelepipedo .





Durante queste discussioni, è stato possibile chiarire i significati di alcuni termini incontrati (es. zolletta, spigolo) e chiarire eventuali ambiguità o fraintendimenti.

Fase 3. Riflessione sul lavoro svolto

La terza fase del percorso è dedicata al processo metacognitivo: agli allievi viene chiesto di riflettere criticamente sulle modalità di lavoro del loro gruppo attraverso l'utilizzo di una scheda contenente domande guida mirate.
Si fornisce la scheda cartacea con domande guida per riflettere sull'esperienza.

Domande guida per la riflessione collettiva:
Ripensate al lavoro svolto nel vostro gruppo

- Quante scatole siete riusciti a individuare?
- Le avete trovate nella prima o nella seconda fase del lavoro?
- C'è stata un'idea geniale di qualcuno che ha orientato il lavoro del gruppo? Spiegatela.
- Vi ha aiutato avere a disposizione i cubetti? Perché?
- Quali difficoltà avete incontrato?
- Cosa avete imparato di nuovo?

Questo momento di autovalutazione è fondamentale per aiutare gli allievi a sviluppare una consapevolezza delle strategie messe in atto, per favorire una migliore comprensione dei concetti matematici coinvolti e per analizzare le dinamiche di collaborazione all'interno del gruppo.
La condivisione finale viene facilitata da una discussione collettiva di classe guidata dall'insegnante. Durante questa discussione, vengono messe in luce le difficoltà incontrate e le strategie utilizzate dai diversi gruppi durante il processo di risoluzione del problema. Questo momento permette agli alunni di confrontarsi tra loro, di condividere le proprie esperienze e di apprendere gli uni dagli altri.
Per rendere questo processo più efficace, le discussioni degli allievi vengono registrate o filmate. Questo permette di conservare un registro accurato delle conversazioni e di riascoltarle in seguito per analizzarle più approfonditamente. L'ascolto attento delle discussioni degli allievi permette all'insegnante di cogliere sfumature, punti di forza o debolezza nel processo di apprendimento e di collaborazione del gruppo; emergono spesso nuove piste di lavoro e possibilità di approfondimento.
Riportiamo di seguito alcuni stralci delle conversazioni svolte nelle classi:

"All'inizio abbiamo avuto l'idea di elencare tutti i divisori che poi ci avrebbero aiutato a trovare le scatole. Dato che 54 aveva abbastanza divisori, abbiamo trovato scatole con due dimensioni e una con la terza dimensione cioè abbiamo fatto 6×3×3. Quando ci sono arrivati i cubetti ci è venuto in mente che potevamo fare il secondo piano"
"Prima avevo pensato di farla piatta, ma poi volevo trovare un modo per farla crescere, cioè ...non riuscivo a trovare un altro divisore...con i cubetti poi ci siamo riusciti".
"All'inizio abbiamo lavorato su un piano solo, poi con i cubetti ci è venuto in mente di fare più piani, con i cubetti potevamo disporli e vedere se andava bene o meno, con i cubetti non si può sbagliare, vedevamo subito se restavano fuori mentre sul quaderno era difficile fare più piani"
"Con i cubetti abbiamo potuto rivedere le nostre ipotesi e costruire le scatole con precisione usando tutti i 54 cubetti senza lasciare buchi"
"Avere a disposizione i cubetti ci ha aiutato a trovare lo spessore delle costruzioni"
"Sul quaderno e sulle griglie non riuscivamo a rappresentare più piani"

Conclusioni

Riteniamo che gli aspetti più significativi emersi da questa attività possano riferirsi alla potenzialità dei materiali e al valore delle parole e dei pensieri degli allievi.
Il materiale concreto introdotto durante la fase di rilancio, si è rivelato un supporto estremamente prezioso per lo sviluppo dell'apprendimento matematico degli allievi, con un impatto positivo sulla riduzione del divario cognitivo all'interno di ogni classe, promuovendo così un ambiente inclusivo. Questo approccio si è dimostrato particolarmente efficace quando le risposte ottenute nella prima fase non sono risultate soddisfacenti. La manipolazione attiva di oggetti, che gli allievi possono toccare e spostare fisicamente, si è rivelata fondamentale e altamente produttiva ad ogni livello di competenza. Questa metodologia ha permesso agli allievi di verificare le proprie ipotesi in modo pratico e tangibile, offrendo loro la possibilità di esplorare concetti matematici complessi in modo più concreto e intuitivo. Inoltre, l'uso del materiale ha facilitato la visualizzazione della terza dimensione, consentendo agli allievi di comprendere meglio concetti spaziali e geometrici che altrimenti potrebbero risultare astratti o difficili da concepire. Un altro vantaggio significativo dell'utilizzo del materiale è stato il supporto fornito per l'autocorrezione attraverso la visualizzazione degli errori. Manipolando gli oggetti concreti gli allievi hanno potuto identificare e comprendere gli errori insiti nei ragionamenti effettuati in modo più chiaro e immediato, consentendo loro di apportare correzioni e miglioramenti in modo autonomo.
La discussione collettiva e le argomentazioni portate avanti dagli alunni hanno giocato un ruolo fondamentale nel favorire scambi significativi, confronti costruttivi e riflessioni metacognitive all'interno della classe. Questo processo ha consentito agli allievi di esplorare diversi punti di vista, condividere le proprie idee e sviluppare una consapevolezza critica del proprio apprendimento. Lo scambio reciproco ha favorito lo sviluppo di una comprensione più profonda dei concetti matematici trattati e delle diverse strategie utilizzate durante la risoluzione del problema.

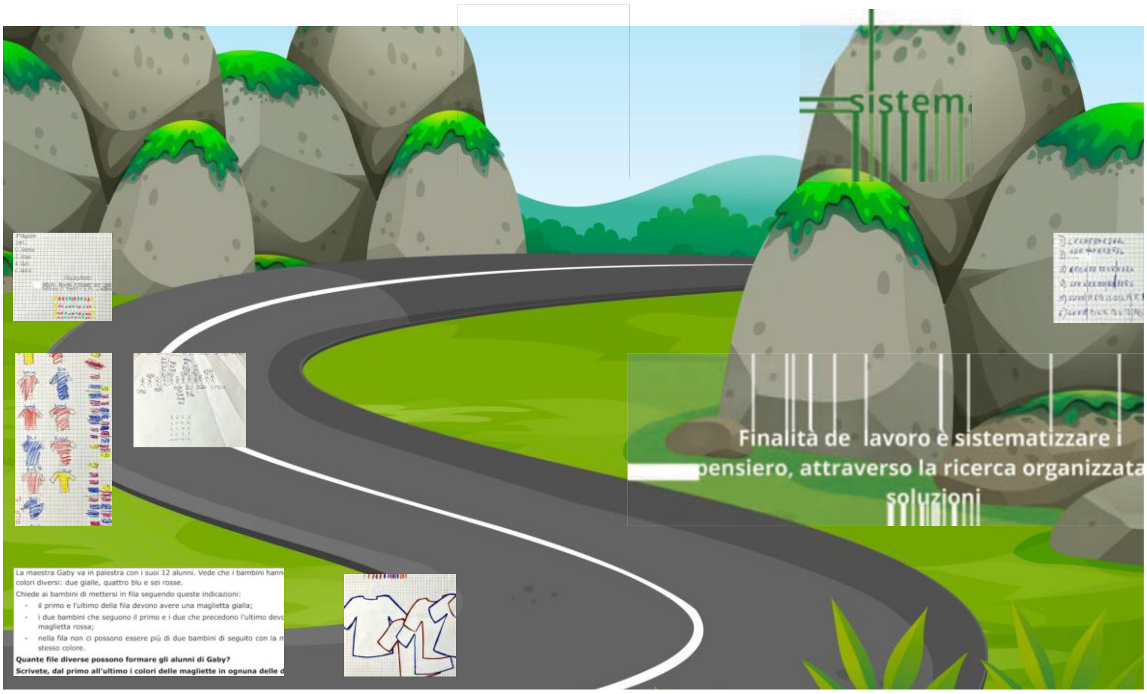
Inoltre, la discussione collettiva ha offerto all'insegnante preziosi spunti per comprendere meglio il pensiero dei propri allievi e per adattare le attività future in base alle loro esigenze e capacità. Ascoltando attentamente le argomentazioni degli alunni e osservando i loro processi di pensiero, l'insegnante ha potuto identificare punti di forza, difficoltà e aree di miglioramento, orientando così la progettazione di percorsi didattici più efficaci e personalizzati.
Il rispetto delle idee degli allievi è stato un elemento centrale di questo processo. L'insegnante ha dato valore alle opinioni e alle prospettive degli allievi, incoraggiandoli ad esprimere liberamente le proprie idee e a contribuire attivamente alla discussione. Questo approccio ha favorito un clima di fiducia e rispetto reciproco all'interno della classe, permettendo agli allievi di sentirsi coinvolti e valorizzati nel processo di apprendimento.

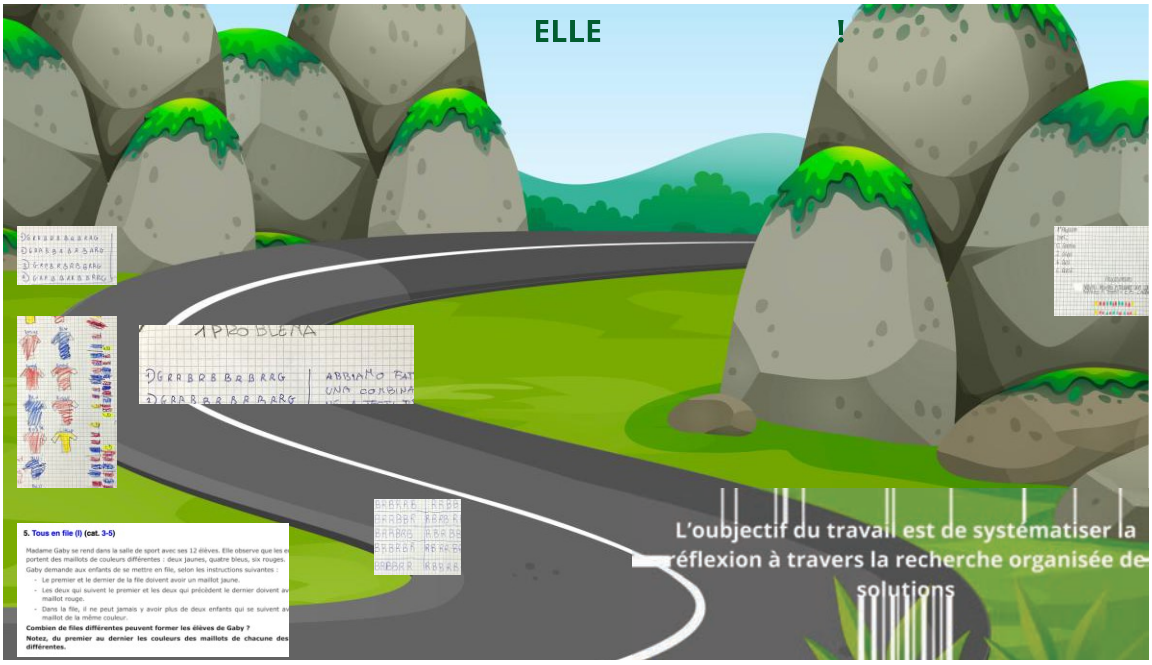
Link al poster presentato al convegno di Faenza: https://bit.ly/zollettedizucchero

Sezione Puglia

CHE COMBINAZIONE!

A cura di Maria Felicia Andriani, Antonella Canestro, Rosanna Diliddo, Anna Rita Lupoli, Vanessa Raso, Apollonia Santoniccolo, Valeria Zagaria.





Sunto

I membri della sezione Puglia hanno voluto cogliere l'occasione offerta dal titolo e dal tema del 26° incontro internazionale dell'ARMT 'Ruolo costruttivo dei problemi nella didattica nella classe' per presentare uno dei tanti percorsi che un insegnante potrebbe proporre ai propri allievi per cominciare o continuare un cammino nel mondo "delle combinazioni" scegliendo opportunamente i problemi dalla Banca del RMT nell'Ambito LR-logica e ragionamento e le Famiglie CO – cercare combinazioni e CO/DE - contare combinazioni. Non è stata una scelta superficiale ma finalizzata all'osservazione di alcuni comportamenti degli allievi dalla terza categoria in poi quando nella risoluzione di una situazione problematica rientra la ricerca e la creatività nel rappresentare la questione in oggetto.

1. Quasi per gioco

Quando si parla di problemi in classe e non si è abituati ad andare oltre la gara del Rally Matematico Transalpino, gli allievi sono soliti andare alla ricerca di numeri nel testo per poi operare con questi per giungere ad un risultato **numerico**. I docenti spesso si comportano allo stesso modo: scelgono quasi sempre situazioni che richiedono una sequenza più o meno lunga di operazioni da somministrare ai propri allievi per constatare una certa abilità di applicazione di regole assegnate. Le diverse analisi a posteriori sui problemi del RMT, di qualsiasi ambito concettuale, hanno spesso evidenziato la difficoltà ad appropriarsi di un problema se nel testo non ci sono molti numeri. Abbiamo ritenuto quindi che il 'cercare combinazioni' e/o 'contare combinazioni' come richiesto da un buon numero di problemi della Banca del RMT fosse un'occasione per scardinare la convinzione che:

a) per risolvere un problema si debba solo eseguire una sequenza di "operazioni";
b) la soluzione di un problema sia sempre unica;
c) il disegno o altri tipi di rappresentazioni grafiche siano procedure meno valide in rapporto all'applicazione delle 'formule'.

Questi problemi sono caratterizzati dalla ricerca delle configurazioni di collezioni finite di oggetti e dei loro conteggi al fine di stilare un inventario delle diverse disposizioni, combinazioni, permutazioni o altro senza disporre delle formule della combinatoria o di eventuali risultati teorici sugli insiemi finiti. Gli allievi devono riconoscere i diversi elementi della situazione, il loro numero e comprendere come associarli per contare le varie 'possibilità'. Possono allora creare elenchi, tabelle, disegni con colori e a volte anche operazioni aritmetiche.[1]

Questa tipologia di problemi, può essere anche un aiuto per insegnare con l'idea di coinvolgere quel gran numero di allievi, soprattutto quelli di categorie più elevate, che si trovano in difficoltà, che hanno collezionato delle situazioni poco felici e che considerano la matematica tutta inserita nella dimensione razionale dell'uomo, legata a regole e concetti piovuti dal cielo, di cui sono legittimati a parlare solo pochi sapienti isolati, fanatici, nati con quel pallino. Sono allievi che si dichiarano loro malgrado nemici della matematica a causa dei cattivi voti ottenuti, che, secondo loro, non rispecchiano gli sforzi fatti; questo mancato riconoscimento li mortifica e li fa sentire un nulla rispetto agli altri compagni e toglie loro ogni motivazione residua per continuare ad impegnarsi: non potendo ogni tanto sperimentare la sensazione di riuscire, preferiscono ritirarsi e porre la matematica sul banco degli accusati come imputata principale dei loro insuccessi.[2] Questo è un altro motivo che ci ha condotte nella scelta di questi problemi che risultano essere un'occasione favorevole per migliorare l'autostima degli allievi nei confronti di questa disciplina.

2. La scelta

In una riunione organizzativa tra i membri della sezione, sono stati selezionati alcuni problemi dalla Banca in modo tale che l'attività in aula da un lato, con la messa in comune, e i dati rilevati durante la gara dall'altro, consentissero la rielaborazione e un'analisi a posteriori in verticale e sul campo, da poter presentare durante l'incontro internazionale di Faenza.

I problemi scelti e principalmente somministrati sono:[3]

- Tutti in fila! (I) (30° RMT, I.5. - cat. 3, 4, 5)
- Tutti in fila! (II) (30° RMT, I. 11. - cat. 5, 6, 7)
- In gelateria (30° RMT, F.7. – cat. 5, 6, 7)

[1] Osservazioni nella Banca del RMT.

[2] Osservazioni da un lavoro di M.F. Andriani e S. Foglia al Convegno Nazionale n. 7 – Matematica e affettività. Chi ha paura della matematica – 28 febbraio – 1 marzo 1998 tenutosi a Castel San Pietro Terme (BO).

[3] Sono problemi del 30° RMT che sono risultati difficili per tutte le categorie coinvolte.

Tutti in fila! (I) (30° RMT, I.5. - cat. 3, 4, 5)

La maestra Gaby va in palestra con i suoi 12 alunni. Vede che i bambini hanno magliette di colori diversi: due gialle, quattro blu e sei rosse.

Chiede ai bambini di mettersi in fila seguendo queste indicazioni:

- il primo e l'ultimo della fila devono avere una maglietta gialla;
- i due bambini che seguono il primo e i due che precedono l'ultimo devono avere una maglietta rossa;
- nella fila non ci possono essere più di due bambini di seguito con la maglietta dello stesso colore.

Quante file diverse possono formare gli alunni di Gaby?

Scrivete, dal primo all'ultimo i colori delle magliette in ognuna delle diverse file.

I dati rilevati (nella fase della "gara") su 830 classi di 19 sezioni sono i seguenti:

Categoria	0	1	2	3	4	N.classi	Media
Cat 3	304 (45%)	181 (27%)	70 (10%)	74 (11%)	54 (8%)	683	1.11
Cat 4	248 (30%)	183 (22%)	109 (13%)	134 (16%)	156 (19%)	830	1.72
Totale	552 (36%)	364 (24%)	179 (12%)	208 (14%)	210 (14%)	1513	1.44

Si ricorda che il problema è stato affrontato nelle condizioni particolari del RMT: intera classe, allievi in completa autonomia, da 5 a 7 problemi da risolvere, un solo foglio risposta per problema.

Tutti in fila! (II) (30° RMT, I.11. - cat. 5, 6, 7)

La maestra Gaby va in palestra con i suoi 14 alunni. Vede che i bambini hanno magliette di colori diversi: due grigie, cinque blu e sette rosse.

Chiede ai bambini di mettersi in fila seguendo queste indicazioni:

- il primo e l'ultimo della fila devono avere una maglietta grigia;
- i due bambini che seguono il primo e i due che precedono l'ultimo devono avere una maglietta rossa;
- nella fila non ci possono essere più di due bambini di seguito con la maglietta dello stesso colore.

Quante file diverse possono formare gli alunni di Gaby?

Scrivete, dal primo all'ultimo, i colori delle magliette in ognuna delle diverse file.

I dati rilevati (nella fase della "gara") su 3332 classi in 19 sezioni sono i seguenti:

Categoria	0	1	2	3	4	N.classi	Media
Cat 5	505 (55%)	203 (22%)	143 (15%)	63 (7%)	9 (1%)	923	0.77
Cat 6	705 (56%)	237 (19%)	211 (17%)	89 (7%)	18 (1%)	1260	0.79
Cat 7	497 (43%)	258 (22%)	249 (22%)	118 (10%)	27 (2%)	1149	1.06
Totale	1707 (51%)	698 (21%)	603 (18%)	270 (8%)	54 (2%)	3332	0.88

Si ricorda che il problema è stato affrontato nelle condizioni particolari del RMT: intera classe, allievi in completa autonomia, da 5 a 7 problemi da risolvere, un solo foglio risposta per problema.

In gelateria (30° RMT, F. 7. - cat. 5, 6, 7)

Per la festa di compleanno di Luca la mamma ha pensato di offrire coppette di gelato a tutti gli invitati. La mamma ha comprato:

- due gusti di gelato: vaniglia e cioccolato
- panna montata e granella di nocciole per la guarnizione.

Decide che ogni coppetta conterrà tre palline di gelato.

Ogni invitato potrà scegliere una coppetta con un solo gusto oppure con i due gusti. Inoltre, chi vuole, potrà anche aggiungere solo la panna montata o solo la granella di nocciole oppure entrambe.

Quante coppette di gelato diverse si potranno preparare? Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

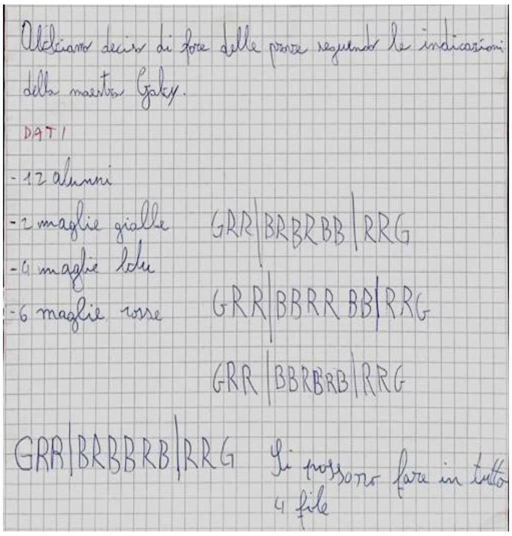
I dati della "gara" trattandosi di una prova finale, almeno per la sezione Puglia non sono significativi. È certo comunque che il problema ha riportato una media di 1 come punteggio per la categoria 5, una media di 1,5 come punteggio per la categoria 6 e solo per la categoria 7, in finale la media supera i 3 punti.

3. ATTIVITÀ IN AULA

I problemi citati sono stati somministrati in due classi di categoria 3 e 4, due classi di categoria 5, una classe di categoria 6, una classe di categoria 7 e una classe di categoria 8. Anche nelle classi di categorie più alte, si è partiti con Tutti in fila (I), visti i risultati della gara. Mentre l'attività con il problema "In gelateria" è stata abbandonata per questioni di organizzazione e di tempo.

Nelle due classi di categorie 3 e 4 gli allievi si sono divisi autonomamente in gruppi e hanno lavorato per circa 50 minuti. A questa fase è seguita la messa in comune e di conseguenza la discussione tra i vari gruppi coordinati dalla docente attenta a non influenzare le risposte ma a far raccontare spontaneamente dagli allievi le procedure adottate e a far emergere ostacoli, errori e abitudini consolidate.

Nell'analisi degli elaborati degli allievi di categoria 3, 4 e 5 si può notare una vastità di realizzazioni grafiche e l'utilizzo di disegni e di colori caratteristici dell'età ma che allo stesso tempo sono particolarmente interessanti perché trattasi di procedure per la risoluzione di una situazione problematica. Ciò che si vuole sottolineare è il divertimento inteso come gioco e la serietà del compito stesso da cui traspare, da parte di allievi di categorie basse, una ricerca che tende alla sistematizzazione che con il tempo si vuole raggiungere.



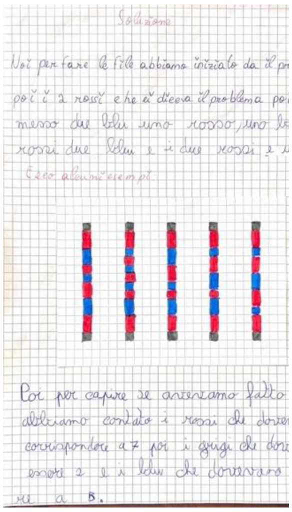
Cat. 4
Abbiamo deciso di seguire le indicazioni della maestra Gaby.

-12 alunni
-2 maglie gialle GRR BRBRBB RRG

- 4 maglie blu GRR BBRRBB RRG

- 6 maglie rosse GRR BBRBRB. RRG
GRR BRBBRB RRG Si possono fare in tutto quattro file

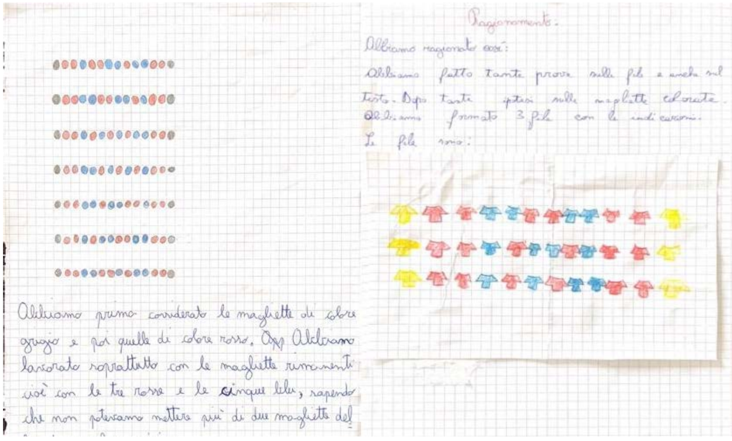
Fig. 1



concludere il lavoro con la verifica e il conteggio (osservazione a Fig. 2 di cat. 5)

Fig. 2

Fig. 3 (Al lavoro!)



realtà…disegnano le maglie!

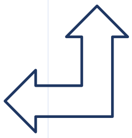


Fig. 4 (cat. 5… abbiamo lavorato soprattutto con le magliette rimanenti…)

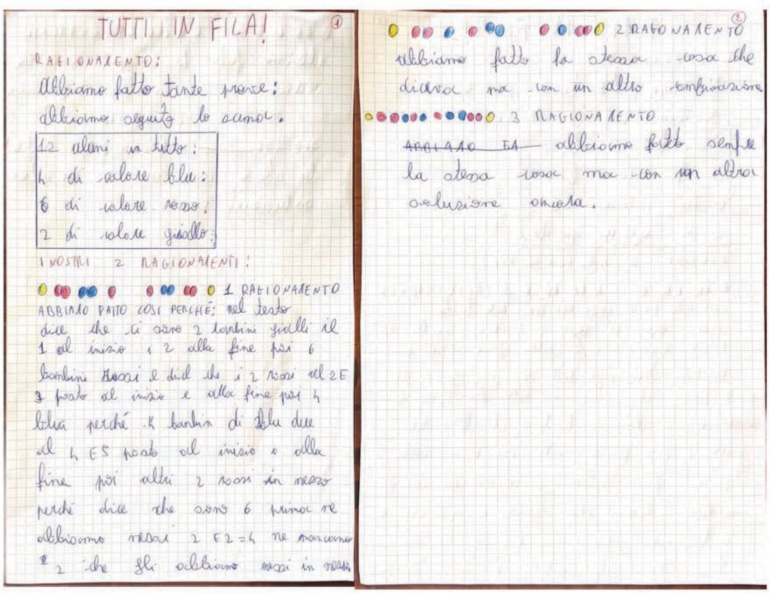


Fig. 5

Nelle classi di categorie più alte l'attività si è svolta diversamente:

è stato dedicato un primo momento alla lettura del testo del problema e ad una prima condivisione della strategia da utilizzare per risolverlo. La maggior parte dei gruppi (di tutte le categorie coinvolte, dalla 5 alla 8) ha scelto di fare una rappresentazione grafica. Molti hanno usato i colori che venivano menzionati nel testo del problema. I primi due dati sono stati facilmente compresi e rappresentati (primo e ultimo giallo, secondo, terzo, decimo ed undicesimo rossi). Invece la decodifica del terzo dato ("nella fila non ci possono essere più di due bambini di seguito con la maglietta dello stesso colore") non è stata immediata, nel senso che non si è compreso da subito che si poteva tradurre nel fissare anche la quarta e la nona maglietta (che dovevano essere necessariamente blu). Inizialmente alcuni gruppi hanno trovato una combinazione e pensavano di aver terminato il problema, quindi una prima sollecitazione necessaria è stata far riflettere (soprattutto i più piccoli) che forse ci poteva essere più di un modo per rispondere alle richieste del problema. A questo punto i gruppi sono partiti a fare altre prove per trovare altre combinazioni.

Si è osservato che nella maggior parte dei gruppi non è stata messa in atto nessuna strategia, ovvero si costruiva una possibile soluzione e poi si ripartiva ad ogni passo da zero. In questo modo gli alunni sono andati avanti fino ad un certo numero di combinazioni (in alcuni casi trovandole tutte), ma, non sapendo quale fosse il numero di soluzioni possibili, alla domanda "Siete certi di averle trovate proprio tutte?" non sapevano rispondere con certezza (Fig. 7).

Si è discussa insieme la risoluzione del primo problema (dove le combinazioni sono solo 4 e quindi sono state trovate con facilità). I gruppi hanno condiviso il modo di procedere e con l'insegnante si è provato a riflettere sulla possibilità di usare delle strategie più ordinate per essere sicuri di trovare tutte le soluzioni.

In alcune classi è stato proposto l'utilizzo di un grafico ad albero, in altre l'uso di elementi dinamici (rappresentazione delle magliette).

Alcuni gruppi di allievi hanno raccolto le sollecitazioni e provato ad applicarle nel problema successivo.

Il secondo problema è stato senz'altro più impegnativo, perché le combinazioni da trovare erano 10 e quindi, procedendo in modo casuale, molti gruppi hanno avuto difficoltà a rintracciarle tutte.

Da evidenziare una strategia messa in atto da un gruppo che una volta trovata una combinazione costruiva immediatamente quella speculare (invertendo i colori), procedendo quindi con un minimo di ordine (Fig. 8).

Interessante anche l'intuizione di un gruppo di categoria 8 che dopo aver trovato le 5 combinazioni che

iniziavano con un colore, ha pensato che ce ne dovessero essere altrettante con l'altro colore, trovando quindi il numero totale di combinazioni.

Un gruppo ha provato ad utilizzare il grafico ad albero, ma questo schema si è rivelato troppo complesso per tenere conto di tutte le strade possibili: gli alunni non sono riusciti ad andare fino in fondo con le ramificazioni e anche a ricostruire tutti i percorsi possibili Fig. 9.

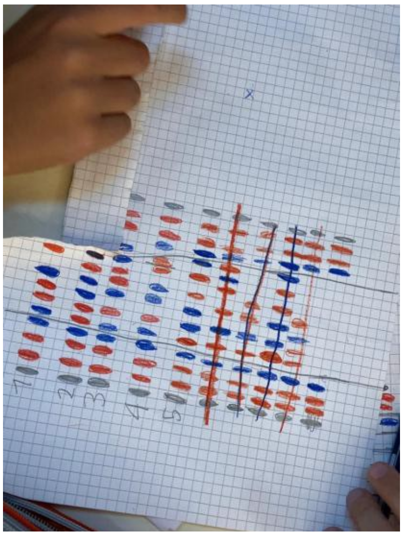


Fig. 7

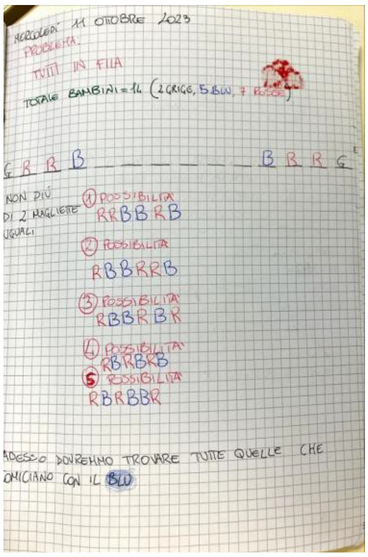


Fig. 8

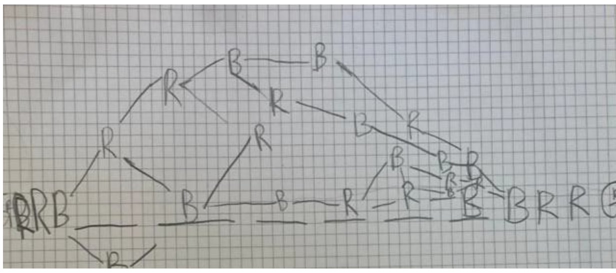


Fig. 9

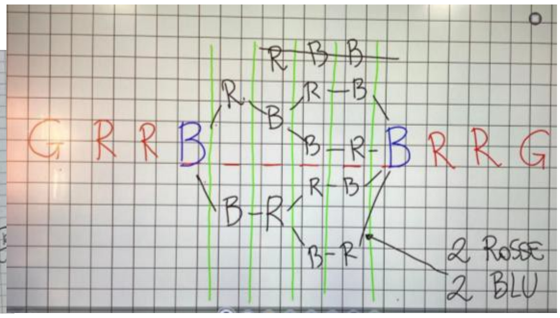


Fig. 10 (ripreso dall'insegnante nella discussione)

In sintesi gli allievi coinvolti dalla categoria 5 alla categoria 8, tendono, più di quelli delle categorie 3 e 4, a cercare le combinazioni in modo disordinato: una volta trovata una possibilità, la azzerano e ripartono da capo. "Guidati anche dall'insegnante hanno faticato a capire che, partendo da una combinazione valida, era più conveniente cambiare un elemento per volta nella sequenza per vedere se era possibile costruire una nuova soluzione".
"Bisogna comunque fare attenzione al fatto che, se le combinazioni aumentano troppo, facilmente gli alunni si annoiano e si scoraggiano e si rischia di perdere la loro attenzione. In questo senso il problema "Tutti in fila (II)" con le sue 10 combinazioni da trovare è stato al limite.
Nessuno dei gruppi ha pensato di costruire un materiale dinamico (es: rappresentare le magliette da posizionare e poi ritagliarle in modo da poterle manipolare più facilmente). Nella discussione del secondo problema, in una classe, questa possibilità è stata proposta dall'insegnante, ma è stata accolta tiepidamente dagli alunni; la sensazione è che sia vista come una perdita di tempo e non come uno strumento utile"[4]

4. Conclusioni

Le attività presentate non sono certamente esaustive e, a nostro avviso, per far nascere l'esigenza di generalizzare le situazioni, andrebbero ampliate scegliendo opportunamente dalla Banca altri problemi della stessa famiglia. D'altro canto, questa tipologia di problemi che conduce spesso alle rappresentazioni grafiche di ciò che viene indicato dal testo del problema, suggerisce la scelta di procedure risolutive alternative al calcolo che potrebbero essere d'aiuto in situazioni legate ad altri ambiti concettuali.

E ancora …dai racconti delle insegnanti, sono emerse sostanziali differenze di comportamenti nella gestione delle classi. Tutto ciò ci invita, a seguito dei risultati ottenuti, di riflettere in maniera più approfondita su tali aspetti.

Riferimenti bibliografici

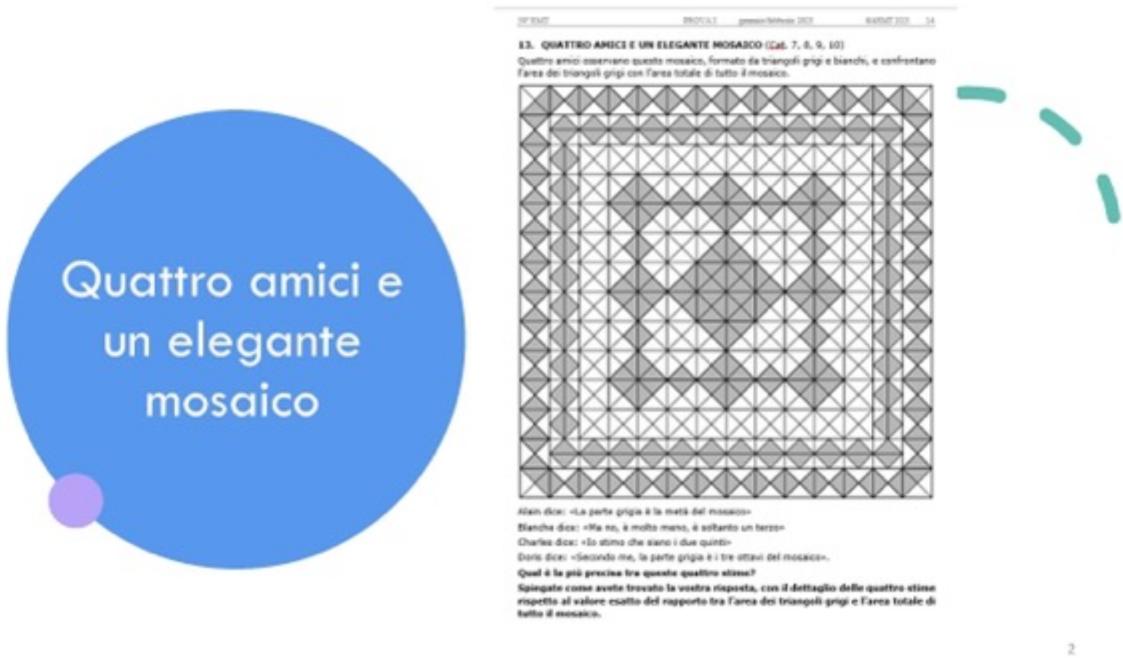
Andriani M. F., Foglia S., 1998, Comici Spaventati Matematici in Atti del Convegno Nazionale "Matematica e difficoltà, n. 7 – 27 -28 febbraio – 1 marzo 1998, Castel S. Pietro Terme, 101 – 106.
ATTI DELLE GIORNATE DI STUDIO SUL RMT (Vol. 1, 1° e 2° incontro). 1999, Il Rally matematico transalpino. Quali apporti per la didattica? / Le Rallye mathématique transalpin. Quels apports pour la didactique ? Brigue 1997-98, L. Grugnetti & F. Jaquet (Eds) Dipartimento di Matematica, Università di Parma & Institut de recherche et de documentation pédagogique, Neuchâtel.

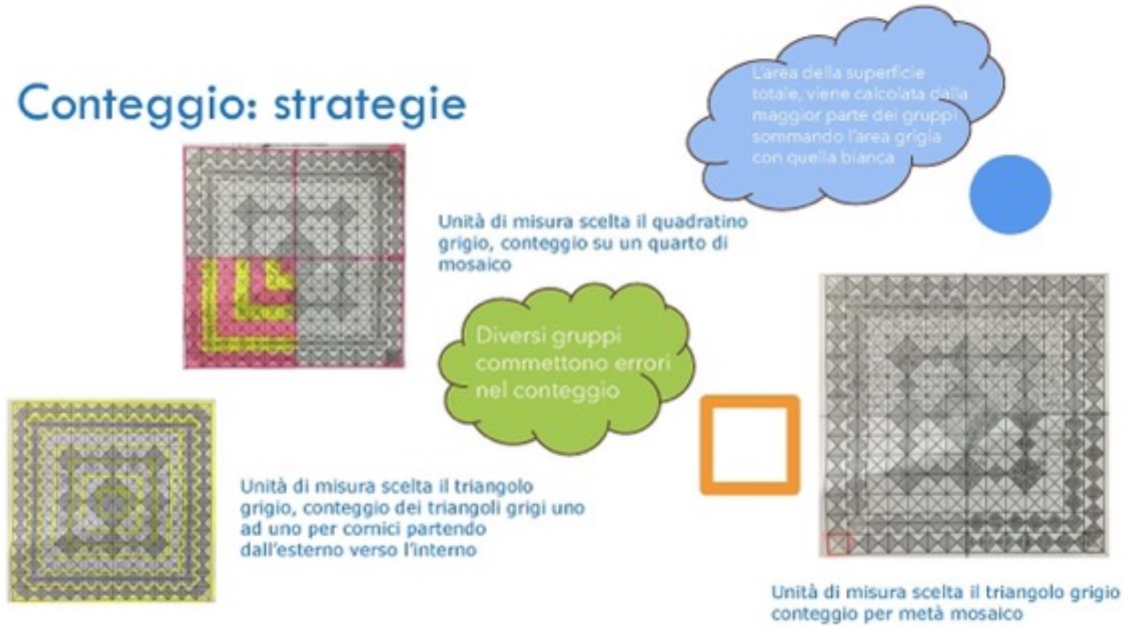
[4] Analisi dell'insegnante che ha condotto l'attività in classe.

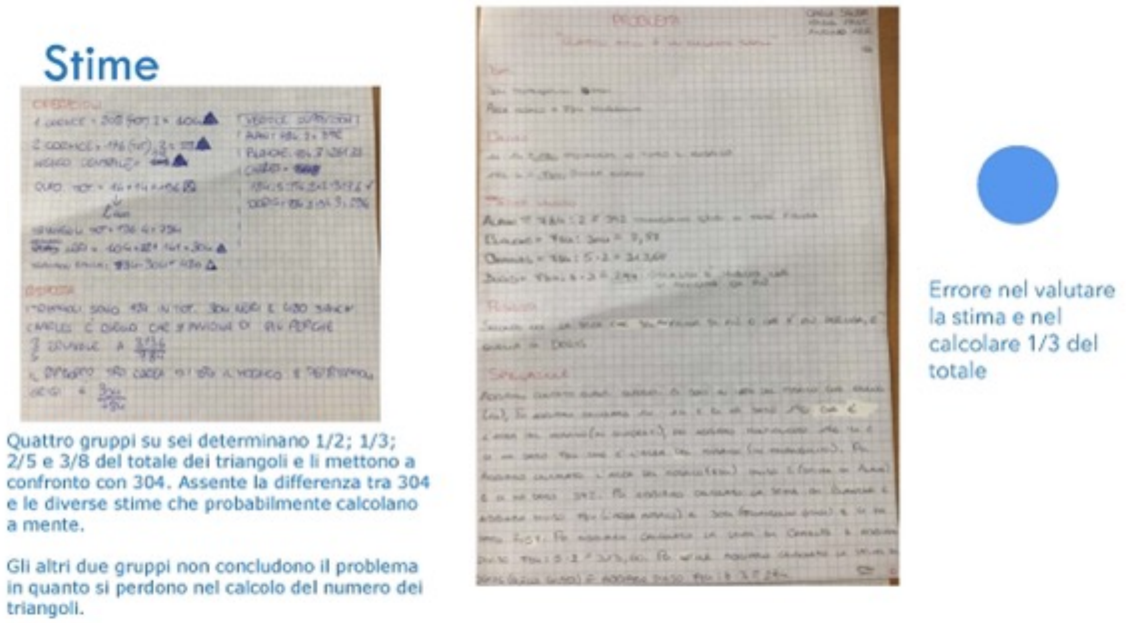
Sezione Sassari

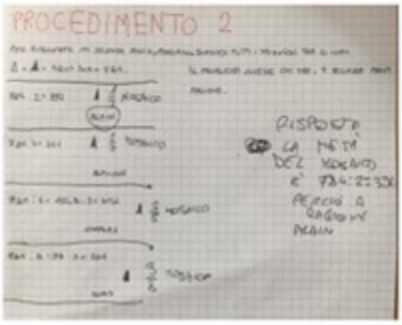
CAPOVOLGIAMO L'APPROCCIO ALLA GEOMETRIA

A cura di Rosanna Sanna




Conteggio: strategie
L'area della superficie totale, viene calcolata dalla maggior parte dei gruppi sommando l'area grigia con quella bianca
Unità di misura scelta il quadratino grigio, conteggio su un quarto di mosaico
Diversi gruppi commettono errori nel conteggio
Unità di misura scelta il triangolo grigio, conteggio dei triangoli grigi uno ad uno per cornici partendo dall'esterno verso l'interno
Unità di misura scelta il triangolo grigio conteggio per metà mosaico


Stime
Quattro gruppi su sei determinano 1/2; 1/3; 2/5 e 3/8 del totale dei triangoli e li mettono a confronto con 304. Assente la differenza tra 304 e le diverse stime che probabilmente calcolano a mente.
Gli altri due gruppi non concludono il problema in quanto si perdono nel calcolo del numero dei triangoli.
Errore nel valutare la stima e nel calcolare 1/3 del totale



Il calcolo dei triangoli grigi e totale è corretto. È corretta la determinazione di ½, 1/3, 2/5, 3/8 del totale dei triangoli ma… si perdono nel determinare qual è la stima più precisa, non la mettono cioè a confronto con il rapporto 304/784

5

Consolidiamo il concetto di rapporto come confronto

«Da Singolo a Doppio»

30° RMT PROVA I gennaio/febbraio 2023 ©ARMT 2023 20

17. DA SINGOLO A DOPPIO (Cat. 8, 9, 10)

L'insegnante dà agli allievi le seguenti consegne: "*Disegnate un primo rettangolo; quindi disegnate un secondo rettangolo la cui area è il doppio di quella del primo rettangolo. Infine, spiegate come avete cambiato le dimensioni del primo per arrivare al secondo.*"

Gli allievi rispondono:

Ada: "*Ho raddoppiato entrambe le dimensioni.*"

Bice: "*Ho raddoppiato solo una delle due dimensioni senza modificare l'altra.*"

Carlo: "*Ho aumentato una dimensione della sua metà e aumentato l'altra della sua metà.*"

Diego: "*Ho aumentato una dimensione della sua metà e aumentato l'altra della sua terza parte.*"

Elsa: "*Ho aumentato una dimensione del 20% e l'altra dell'80%.*"

Fabio: "*Ho diminuito una dimensione del 20% e aumentato l'altra del 150%.*"

Quali sono gli allievi il cui secondo rettangolo ha un'area doppia del primo?

Per gli altri indicate il rapporto tra l'area del secondo e l'area del primo.

Spiegate come avete trovato le risposte e mostrate il dettaglio dei vostri calcoli.

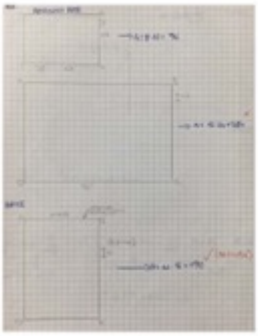
03/ 7

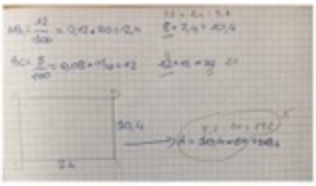
Il gruppo di allievi gestisce bene il calcolo e sostiene che le affermazioni di Diego non permettono la costruzione di un rettangolo di area doppia per una differenza di 0,01.
Non hanno pensato di cambiare le dimensioni del rettangolo di partenza per verificare ulteriormente l'affermazione di Diego.

La tesi sostenuta da questo gruppo è stata confutata da altri gruppi che invece hanno dimostrato che l'affermazione di Diego era vera.

La discussione in classe ha portato alla conclusione che le verifiche andassero fatte non su un solo rettangolo ma almeno su un altro.
Nessun gruppo ha effettuato questa doppia verifica

8





I calcoli sono esatti mentre i disegni di alcuni rettangoli non sono precisi. Alcuni errori di calcolo nel rettangolo di Fabio che porta ad affermare che questo non è un rettangolo di area doppia.

9

Incomprensione del problema

Diversi gruppi calcolano correttamente i rettangoli di Ada e di Bice mentre commettono errori nel calcolo degli altri rettangoli.

In questo caso non aggiunge la metà del lato al lato stesso.

Nessun gruppo completa l'ultima parte del problema nei 50 minuti assegnati.

La seconda parte viene completata in classe con la partecipazione di tutti.

10

Dal problema «Da Singolo a Doppio» ai Rettangoli Simili

Si chiede agli allievi di ridisegnare i rettangoli dei sei personaggi del problema partendo da un rettangolo con dimensioni diverse rispetto a quello utilizzato nella prova e di stabilire quali tra questi si rassomiglia di più al rettangolo di partenza. Gli allievi concordano nell'affermare che i rettangoli di Ada, Carlo e Diego sono quelli che si rassomigliano di più.

11

Ecco il nostro lavoro!!!

Si scopre, con la determinazione del rapporto tra i lati corrispondenti, con il rapporto tra i perimetri e il rapporto tra le aree, il significato di tale rassomiglianza. Si parla quindi di rettangoli Simili!

Dall'uguaglianza di rapporti tra lati corrispondenti si è parlato di proporzionalità e di proporzioni.

I rettangoli di Ada e di Carlo sono simili al rettangolo di partenza mentre il rettangolo di Diego no.

12

"Rettangoli ingranditi"

(19° RMT Prova II cat. 5-6-7)

8. RETTANGOLI INGRANDITI (Cat. 5, 6, 7)

A Giulia è piaciuto molto questo disegno con due rettangoli e ha deciso di riprodurlo, ma ingrandendolo.

Ha cominciato a fare il nuovo disegno, ma non lo ha finito:

Completate il disegno che Giulia non ha finito.
Spiegate come avete fatto.

13

"Rettangoli ingranditi"

(19° RMT Prova II cat. 5-6-7)

Ho presupposto che gli allievi, nella risoluzione del problema avrebbero utilizzato le conoscenze sulla similitudine. Nessun gruppo opta per questa strategia! Tutti i gruppi, poiché si trattava di un rettangolo, disegnano quello ingrandito per via geometrica: a partire dal lato già tracciato, sfruttano la perpendicolarità e il parallelismo dei lati.

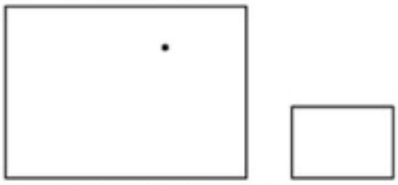
In questo elaborato è presente un tentativo di risoluzione numerica che viene abbandonato. Optano per una procedura geometrica ma il disegno del rettangolo ingrandito non è preciso.

14

"Dove si posa la mosca?"

(7° RMT Prova I Cat. 6-7-8)

15. DOVE SI POSA LA MOSCA? (Cat 6, 7, 8)



Il rettangolo di destra è la fotografia del grande rettangolo di sinistra.
Nel momento in cui la fotografia è stata scattata, una mosca si è posata sul rettangolo grande.
Il fotografo però quando ha stampato la fotografia l'ha cancellata.

Rimettete la mosca al posto giusto sulla foto.

Spiegate come avete proceduto.

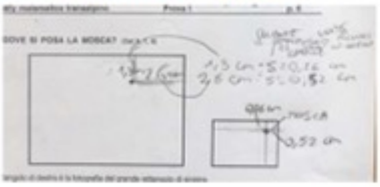
0

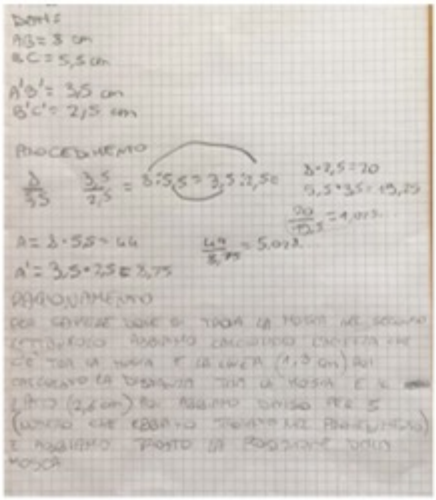
15

"Dove si posa la mosca? (7° RMT Prova I Cat. 6-7-8)

Questo problema mi ha permesso di introdurre il concetto di omotetia non ancora sviluppato.

Solo un gruppo su sei completa il problema (sarà quindi necessario consolidare le conoscenze con nuovi problemi). La procedura utilizzata è quella numerica. Misurano le lunghezze dei lati sulla carta ma non trovano il rapporto di similitudine. Trovano il rapporto tra le aree e utilizzano quello per determinare le coordinate della mosca nel rettangolo ridotto. Non ricordano che il rapporto tra le aree è uguale al quadrato del rapporto di similitudine!

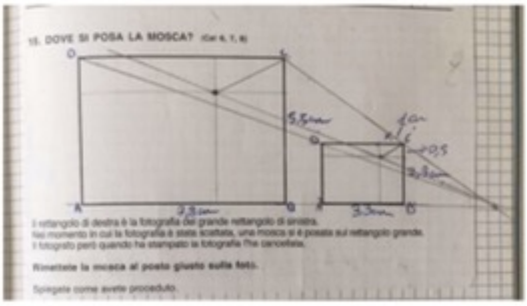




16

"Dove si posa la mosca? (7° RMT Prova I Cat. 6-7-8)

Questo problema mi ha dato la possibilità di parlare di omotetie, di osservarne le caratteristiche e di proporre una procedura geometrica al problema "Dove si posa la mosca?"


15. DOVE SI POSA LA MOSCA? (Cat 6, 7, 8)

Il rettangolo di destra è la fotografia del grande rettangolo di sinistra.
Nel momento in cui la fotografia è stata scattata, una mosca si è posata sul rettangolo grande.
Il fotografo però quando ha stampato la fotografia l'ha cancellata.

Rimettete la mosca al posto giusto sulla foto.

Spiegate come avete proceduto.

17

Mettiamo alla prova gli allievi!

Il giardino degli animali

(28° RMT Prova I Cat. 8-9-10)

15. IL GIARDINO DEGLI ANIMALI (Cat. 8, 9, 10)

Carlo ha costruito per i suoi animali un recinto di forma quadrata come mostrato in figura.

Ha diviso la superficie interna del recinto in quattro zone:

- una zona di forma quadrata per le galline;
- una zona di forma rettangolare per i conigli;
- una zona per i tacchini;
- una via di accesso alle tre zone che ha una lunghezza di 3,5 m.

Carlo si rende conto che la via di accesso è un po' stretta e decide quindi di ingrandire tutto il recinto. Nel nuovo recinto la via di accesso misura 1,80 m di larghezza e le dimensioni di ciascuna zona sono state aumentate secondo le medesime proporzioni.

Qual è l'area della nuova zona a disposizione dei tacchini?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

19


Il giardino degli animali (28° RMT Prova I Cat. 8-9-10)
SPIEGAZIONE
ZONA G
ZONA C
ZONA T
Per determinare le lunghezze del nuovo recinto, aggiungono 0.80 m alle lunghezze di partenza.
Si dovrà ancora lavorare sul concetto di proporzionalità.
Una bella strategia! Per determinare le nuove lunghezze le raddoppiano e tolgono 1/5.
20


Il nostro lavoro continua…
Il fiore al posto giusto (30° RMT Prova II Cat. 8-9-10)
Storia di rettangoli (8° RMT Prova II Cat. 8)
RMT 2007 (15° RMT Prova Finale Cat. 8-9-10)
La Torre di Transalpino (13° RMT Prova Finale Cat. 8-9)
21