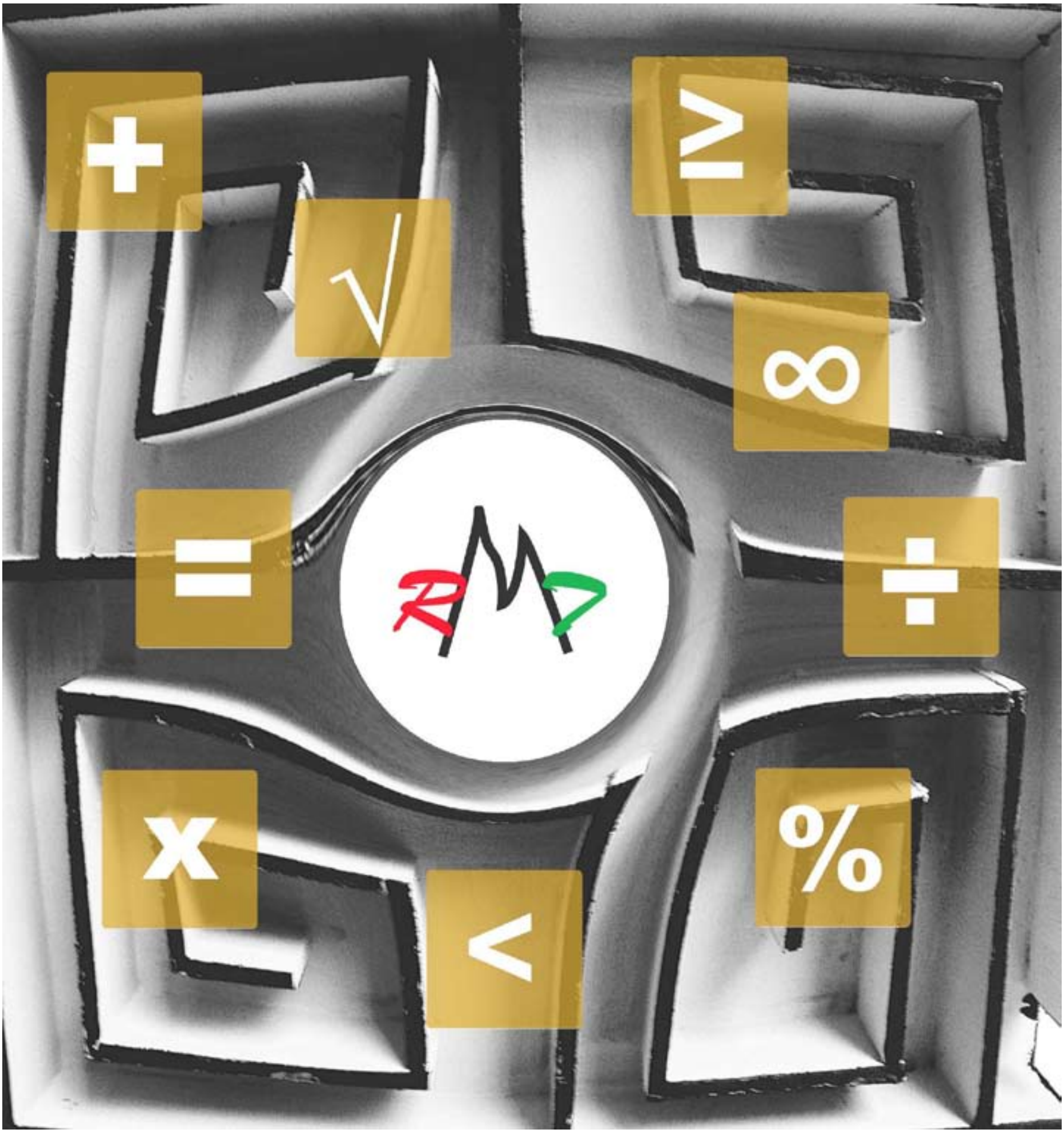
La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 13 octobre / ottobre 2023



Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.eu

ISSN 223
4-9596

TABLE DES MATIÈRES / INDICE

Numéro 13, octobre 2023 / Numero 13, ottobre 2023

Études / Approfondimenti

ÉDITORIAL : DU PROBLÈME DE CONCOURS À LA CONSTRUCTION DE CONNAISSANCES[1]

François Jaquet

Un problème du RMT se présente sous la forme d'un énoncé, issu d'une intense réflexion collective, construit en référence à d'autres problèmes expérimentés.

Durant les 50 minutes d'une épreuve du RMT, le problème devient une activité où les élèves d'une classe se répartissent 5 à 7 énoncés, et s'organisent par groupes pour sa résolution puis pour la rédaction d'un texte commun donnant la(les) réponse(s) et le récit de la manière dont elle a été trouvée.

Après cette phase de résolution et d'explications où l'enseignant était absent, plusieurs scénarios s'ouvrent :

- Les 5 à 7 copies produites par la classe sont envoyées à la section pour l'attribution des points ; l'enseignant peut se contenter de les lire, de les apprécier, d'en discuter avec les élèves, groupe par groupe.
- L'enseignant peut choisir un ou plusieurs problèmes et les proposer à la classe entière peu après l'épreuve (selon différentes modalités : autre répartition des groupes, deux ou trois problèmes pour éviter qu'un groupe retrouve un problème qu'il avait résolu durant l'épreuve, … ou en débat collectif de la classe entière où les élèves qui ont résolu l'un ou l'autre des problèmes choisis expliquent à leurs camarades comment ils ont procédé, …)
- L'enseignant peut aussi choisir un problème d'une ancienne épreuve et le propose à sa classe durant une durée qu'il détermine lui-même, avec dévolution de la tâche de résolution aux élèves, comme dans les épreuves. Il n'interviendra que plus tard, par l'organisation d'un débat collectif, suivi d'une phase d'institutionnalisation et d'exploitations didactiques du problème.

Ce dernier type d'organisation est celui qui correspond aux finalités du RMT : le problème peut atteindre alors le statut d'activité constructive dans le parcours d'apprentissage de la classe.

L'exploitation didactique immédiate

L'énoncé du problème, en soi, n'a aucun pouvoir magique. Il ne peut jouer un rôle constructif que sous certaines conditions, déterminées a priori par l'enseignant et organisées en plusieurs phases sur une durée qui dépassera de loin celle qui est prévue pour la recherche de la solution.

La période d'appropriation puis de résolution d'un problème est dévolue aux élèves selon la conception constructiviste de l'apprentissage. C'est-à-dire qu'une grande importance est attribuée à leurs interactions : discussions, argumentations où les uns doivent chercher à convaincre les autres, en coopération, chacun sur le même niveau de « celui qui apprend ».

Les échanges se poursuivent collectivement lors de la confrontation et la validation des solutions, avec la participation de l'enseignant qui joue le rôle de modérateur des débats.

Suit encore la phase d'institutionnalisation au cours de laquelle l'enseignant fait le point sur ce qui a été utilisé, construit ou rappelé lors de la résolution et lors du débat en classe : explicitations de vocabulaire, description des propriétés mise en œuvre, rappels d'autres situations où sont apparues la ou les connaissances en jeu.

À ce moment, la durée de l'activité « problème » a plus que doublé par rapport à celle de la résolution par les groupes d'élèves, mais elle est encore loin d'être terminée. L'enseignant le sait bien : même si un élève était arrivé à la solution du problème, même s'il était présent lors du débat collectif ou en phase d'institutionnalisation, rien n'assure qu'il ait progressé dans sa construction de la connaissance visée. À ce stade, encore, la résolution du problème et son exploitation didactique immédiate n'ont aucun pouvoir magique et il est inutile de rappeler à l'élève distrait qu'il aurait dû être plus attentif !

L'insertion dans un parcours d'apprentissage

La connaissance en construction a besoin d'être répétée dans plusieurs contextes, reliée à d'autres savoirs, pratiquée pour acquérir un meilleur niveau d'efficacité et devenir ainsi mobilisable pour de nouvelles situations. Il faut l'insérer dans un « parcours d'apprentissage » qui demandera du temps et du travail.

Ce parcours n'est pas forcément une routine ennuyeuse constituée d'exercices, de répétitions, d'applications de type algorithmique. Il doit être constitué d'activités où la connaissance se renforce progressivement, mûrit, et parfois remise en cause, revisitée ou substituée par une nouvelle connaissance, reconstruite à un niveau de maîtrise plus efficace.

---

[1] Cet éditorial reprend la discussion du thème de la 26éme rencontre international de l'ARMT à Faenza.

La tâche de l'enseignant est ici essentielle pour assurer le dynamisme nécessaire à cette phase de maturation. Elle exige tout à la fois une programmation du parcours d'apprentissage permettant de retrouver les connaissances visées sous des aspects nouveaux, d'affronter des obstacles non encore décelés, de résoudre des conflits avec d'autres connaissances voisines. Elle demande aussi beaucoup de souplesse pour être adaptée aux besoins des élèves.

Une des ambitions de l'ARMT est d'aider l'enseignant dans la recherche d'activités créatives pour établir son parcours d'apprentissage en mettant à sa disposition son imposant recueil de données. L'instrument privilégié est sa Banque de problèmes.

En plus des énoncés, des résultats statistiques, des erreurs et obstacles observés, ce sont les rubriques « Exploitations didactiques » qui peuvent apporter une aide efficace pour l'élaboration de parcours didactiques. En analysant a posteriori nos problèmes, les idées pour enrichir ces rubriques ne manquent pas. Elles peuvent aussi aboutir à des propositions d'activités de plus « longue haleine » pour des parcours didactiques. Il suffit alors de les glisser dans les rubriques « Pour aller plus loin », et aider ainsi les enseignants dans leur pratique en classe basée sur le rôle constructif de nos problèmes du RMT.

EDITORIALE: DAL PROBLEMA DI UNA GARA ALLA COSTRUZIONE DI CONOSCENZE[1]

François Jaquet

Un problema del RMT si presenta sotto forma di enunciato scaturito da una profonda riflessione collettiva, costruito in riferimento ad altri problemi sperimentati.

Durante i 50 minuti di una prova del RMT il problema diventa un'attività nell'ambito della quale gli allievi si spartiscono da 5 a 7 enunciati e si organizzano in gruppi per la risoluzione e poi per la redazione di un testo comune che fornisce la (o le) risposte e la spiegazione della maniera in cui (è) o sono state trovate.

Dopo questa fase di risoluzione e di spiegazione mentre l'insegnante non era presente, si aprono diversi scenari:

- Gli elaborati, da 5 a 7, che sono stati prodotti dalla classe sono trasmessi alla sezione di riferimento per l'attribuzione dei punteggi; l'insegnante può accontentarsi di leggerli, di apprezzarli, di discuterne con gli allievi, gruppo per gruppo.
- L'insegnante può scegliere uno o più problemi e proporli alla classe intera poco dopo la prova (secondo diverse modalità: altre ripartizioni in gruppi, due o tre problemi per evitare che un gruppo si ritrovi con il problema risolto durante la prova… o con un dibattito collettivo della classe intera dove gli allievi che avevano risolto l'uno o l'altro problema spiegano ai compagni come avevano proceduto, …)
- L'insegnante può anche scegliere un problema di una prova precedente e proporlo alla classe per una durata che reputa opportuna con devoluzione del compito di risoluzione agli allievi, come durante la prova. Interverrà solo più tardi per l'organizzazione di un dibattito collettivo, seguito da una fase di istituzionalizzazione e di utilizzo didattico del problema.

Quest'ultimo tipo di organizzazione è quello che corrisponde alle finalità del RMT: il problema può allora acquisire lo status di attività costruttiva nel percorso di apprendimento della classe.

L'utilizzazione didattica immediata

L'enunciato del problema, in sé, non ha alcun potere magico. Può giocare un ruolo costruttivo solo in presenza di certe condizioni, determinate a priori dall'insegnante e organizzate secondo varie fasi su una durata che supererà di molto quella che è prevista per la ricerca della soluzione.

Il periodo di appropriazione poi di risoluzione di un problema è devoluto agli allievi secondo la concezione costruttivista dell'apprendimento. Nel senso che è attribuita una grande importanza alle loro interazioni: discussioni, argomentazioni nel corso delle quali gli uni devono cercare di convincere gli altri in una modalità di cooperazione, ciascuno sul medesimo livello di "colui che apprende".

Gli scambi si susseguono collettivamente durante il confronto e la validazione delle soluzioni, con la partecipazione dell'insegnante, che gioca il ruolo di moderatore dei dibattiti.

Segue ancora la fase di istituzionalizzazione nel corso della quale l'insegnante fa il punto su ciò che è stato utilizzato, costruito o ripreso nel corso della risoluzione e del dibattito in classe: esplicitazione del vocabolario, descrizione delle proprietà utilizzate, riferimento ad altre situazioni nelle quali erano apparse la o le conoscenze in gioco.

A questo punto la durata dell'attività "problema" è più che raddoppiata in rapporto a quella della risoluzione dei gruppi di allievi, ma è ancora lontana dall'essere finita. L'insegnante lo sa bene: anche se un allievo trova la soluzione del problema, anche se è presente al dibattito collettivo o alla fase di istituzionalizzazione, nulla assicura che abbia progredito nella costruzione della conoscenza immaginata dall'insegnante. A questo stadio, ancora, la risoluzione del problema e la sua utilizzazione didattica immediata non ha alcun potere magico ed è inutile ricordare all'allievo distratto che avrebbe dovuto essere più attento!

L'inserimento in un percorso di apprendimento

La conoscenza in costruzione ha bisogno di essere ripresa in diversi contesti, legata ad altri saperi messi in pratica per raggiungere un livello migliore di efficacia e diventare così utilizzabile in nuove situazioni. Bisogna inserirla in un "percorso di apprendimento" che richiederà del tempo e del lavoro.

Questo percorso non è per forza una noiosa routine costituita da esercizi, ripetizioni, applicazioni di tipo algoritmico. Deve essere costituito da attività nelle quali la conoscenza si rinforza progressivamente, alimentata e talvolta rimessa in causa, rivisitata o sostituita da una nuova conoscenza, ricostruita a un livello di gestione più efficace.

E qui il compito dell'insegnante è essenziale al fine di assicurare il dinamismo necessario a questa fase di maturazione, che esige anche una programmazione del percorso di apprendimento che permetta di ritrovare le conoscenze alle quali si vorrebbe arrivare sotto nuovi aspetti, di affrontare ostacoli non ancora scoperti, di risolvere

[1] Questo editoriale riprende la discussione del tema del 26° incontro internazionale dell'ARMT a Faenza.

conflitti con altre conoscenze similari. Questa fase richiede anche molta elasticità per essere adattata ai bisogni degli allievi.

Una delle ambizioni dell'ARMT è quella di aiutare l'insegnante nella ricerca di attività creative per l'organizzazione del percorso di apprendimento mettendo a disposizione la sua imponente raccolta di dati. Lo strumento privilegiato è la sua Banca di problemi.

Oltre agli enunciati, ai risultati statistici, a errori e ostacoli osservati, sono le rubriche dal titolo "Indicazioni didattiche" che possono apportare un aiuto efficace all'elaborazione di percorsi didattici. Nell'analizzare a posteriori i nostri problemi non mancano idee per arricchire tali rubriche, che possono anche portare a proposizioni di attività a "lungo raggio" per percorsi didattici. È allora sufficiente immergersi nelle rubriche "Per andare più lontano" per aiutare gli insegnanti nella loro pratica di classe basata sul ruolo costruttivo dei nostri problemi del RMT.

PRESENTAZIONE DEL NUMERO

Questo numero 13 de *La Gazzetta di Transalpino* presenta, in una prima parte, i due articoli che si riferiscono alle due conferenze dell'incontro di Lione e. nella seconda parte, articoli di approfondimento relativi ad analisi a posteriori di nostri problemi, elaborati da gruppi di lavoro tematici dell'ARMT.
Tali analisi riguardano globalmente tutte le categorie.

- **Mathias Front e Marie-Line Gardes,** nel loro articolo dal titolo ***Risoluzione di problemi per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica in classe*** si propongono di ritornare su una serie di progressi nella risoluzione dei problemi che figurano nel mondo della ricerca e dell'educazione e che possono essere utili per mettere in chiaro le pratiche di RMT.

- **Clara Bisso, AnnaMaria D'Andrea, François Jaquet e Angela Rizza**, in ***Elaborare un problema del RMT, un compito complesso***, sviluppano la tematica basandosi su quattro problemi analizzati nei dettagli. Nella sintesi finale chiariscono che quattro esempi non sono sufficienti, ma danno un'idea delle attuali linee di evoluzione del processo di elaborazione dei nostri problemi: sono gli allievi che ci dicono a che punto si trovano nel processo di costruzione delle loro conoscenze e noi possiamo capirlo solamente ascoltandoli, cioè, leggendo i loro elaborati e assistendo alle loro discussioni.

Études / Approfondimenti

- Il **Gruppo Geometria dello spazio** presenta un articolo relativo all'analisi a posteriori del problema ***Una scatola particolare*** nato proprio con l'intento di stimolare gli allievi e le allieve a gestire una scatola che non avesse la forma standard di un parallelepipedo, aiutandoli ad inserire nel loro repertorio di immagini anche prismi con base differente da quelle rappresentate abitualmente nei libri di testo. I risultati analizzati offrono interessanti spunti di riflessione.

- L'articolo del **Gruppo Numerazione** presenta l'analisi *a posteriori* dei problemi ***Le uova di Caterina*** (cat. 4, 5, 6) (I prova) e ***Sfida matematica*** (cat.5, 6, 7) (I prova) che sono sembrati interessanti per poter consolidare i concetti legati alla divisione con resto, quando si lavora in situazioni non standard come avviene con i problemi del RMT. L'esame degli elaborati dei due problemi ha offerto molti spunti di riflessione, non solo riguardo ai concetti relativi alla divisione, ma anche alla ricerca di tutti i divisori di un numero, del M.C.D. fra due numeri, sulla riduzione ai minimi termini di una frazione, sulle frazioni equivalenti e così via.

- L'articolo ***Il difficile cammino dei problemi di "geometria piana"***, per l'appunto del **Gruppo Geometria piana** riguarda in particolare le analisi a posteriori di tre problemi della prima e della seconda prova del 30°RMT: ***Da singolo a doppio***, ***La divisione del rettangolo*** e ***Il fiore al posto giusto***. Per ciascuno dei tre problemi analizzati, nella prima parte dell'articolo sono sintetizzate le fasi salienti del percorso di preparazione. Nella seconda parte vengono presentate le analisi a posteriori che evidenziano, ancora una volta, le difficoltà a "mettersi davvero nella testa degli allievi", pur tenendo conto di analisi di tanti altri problemi di geometria del nostro RMT.

- Il **Gruppo Funzioni** presenta l'analisi a posteriori del problema ***Gita in pullman*** 29.I.17 con riflessioni a carattere didattico. Da un'attenta analisi delle prestazioni degli allievi, è infatti possibile monitorare l'evoluzione del loro livello di competenza su aspetti di algebrizzazione e modellizzazione, aspetti che si conquistano a lungo termine e vanno esaminati sistematicamente in un lungo periodo, rispetto ai vari livelli di scolarità. Gli elaborati esaminati mostrano con chiarezza il passaggio graduale dalla scrittura su alcuni casi numerici della procedura, alla generalizzazione in parte verbale, in parte simbolica, che spesso si accompagna alle relazioni numeriche, fino a giungere alla scrittura di una relazione simbolica che illustra la procedura generale.

PRÉSENTATION DU NUMÉRO

Ce numéro 13 de *La Gazette de Transalpie* présente, dans une première partie, les deux articles qui se réfèrent aux deux conférences de la rencontre de Lyon et, dans la deuxième des études relatives à l'analyse a posteriori de nos problèmes, élaborées par des groupes de travail thématiques de l'ARMT.
Ces analyses couvrent globalement toutes les catégories d'élèves.

- **Mathias Front et Marie-Line Gardes,** dans leur article ***Résolution de problèmes pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en classe*** proposent de revenir sur un certain nombre d'avancées sur la résolution de problèmes développées dans le monde de la recherche et de l'éducation et qui peuvent être utiles pour éclairer les pratiques du RMT.

- **Clara Bisso, AnnaMaria D'Andrea, François Jaquet et Angela Rizza**, dans ***Élaborer un problème du RMT, une tâche complexe,*** développent leur thème à partir de quatre problèmes analysés dans le détail. Dans leur synthèse ils reconnaissent que ces exemples ne sont pas suffisants mais donnent une idée de l'évolution du processus d'élaboration de nos problèmes : ce sont les élèves qui nous disent à quel niveau ils se situent dans le développement de leurs connaissances et que nous ne pouvons le déterminer qu'en lisant les copies qu'ils nous rendent, qui nous font percevoir leurs compétences réelles.

Études / Approfondissements

- **Le Groupe Géométrie de l'espace** présente un article sur l'analyse a posteriori du problème ***Une boîte particulière*** qui est né dans l'intention de stimuler les élèves à manipuler une boîte qui n'a pas la forme standard d'un parallélépipède, en les aidant à inclure dans leur répertoire d'images des prismes avec des bases différentes de celles qui sont habituellement représentées dans les manuels. Les résultats analysés offrent des pistes de réflexion intéressantes.

- L'article du **Groupe Numération** présente l'analyse *a posteriori* des problèmes ***Les œufs de Catherine*** (cat. 4, 5, 6) (30.I) et ***Défi mathématique*** (cat. 5, 6, 7) (30.I) qui ont été jugés intéressants afin de consolider les concepts liés à la division avec reste. L'examen des copies des deux problèmes a offert de nombreuses pistes de réflexion, non seulement en ce qui concerne les concepts relatifs à la division, mais aussi sur la recherche de tous les diviseurs d'un nombre et de leur pgdc, sur la réduction d'une fraction, sur les fractions équivalentes, etc.

- L'article **Le chemin difficile des problèmes de « géométrie plane »,** justement du **Groupe Géométrie plane**, concerne notamment les analyses a posteriori de trois problèmes de la première et deuxième épreuve du 30e RMT : ***Du simple au double***, ***La division du rectangle*** et ***La fleur au bon endroit***. Pour chacun des trois problèmes, on présente, dans la première partie de l'article, les phases saillantes du parcours de préparation. Dans la deuxième, on présente les analyses a posteriori qui font apparaître les difficultés, encore une fois, à « se mettre vraiment dans la tête des élèves », tout en tenant compte de l'analyse de nombreux autres problèmes de géométrie de notre RMT.

- Le **Groupe Fonctions** présente l'analyse a posteriori du problème ***Voyage en bus*** (29.I.17) avec des réflexions didactiques. À partir d'une analyse attentive des procédures des élèves, il est intéressant de suivre l'évolution de leur niveau de compétence sur les aspects d'algébrisation et de modélisation, aspects qui s'acquièrent sur une longue période et qui doivent être systématiquement examinés en fonction des différents niveaux de scolarité. Les copies examinées montrent clairement la procédure du passage progressif de l'écriture de quelques exemples numériques, à la généralisation partiellement verbale, partiellement symbolique, qui accompagne souvent les relations numériques, jusqu'à l'écriture d'une relation symbolique illustrant la procédure générale.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES POUR L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÈMATIQUES EN CLASSE

Mathias Front
Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation, Académie de Lyon, France
IREM de Lyon, S2HEP, Université Claude Bernard Lyon1
mathias.front@univ-lyon1.fr

Marie-Line Gardes
Haute École Pédagogique du Canton de Vaud, Lausanne, Suisse
IREM de Lyon, France
marie-line.gardes@hepl.ch

Quelques mots d'introduction

La rédaction de cet article de la Gazette de Transalpie a été l'occasion, pour nous auteurs, de revenir sur les multiples réflexions en cours, issues du travail de plusieurs années dans différents contextes. Il est ici possible de citer l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Lyon et le groupe DREAM qui interrogent depuis longtemps la nature et la mise en œuvre en classe des « problèmes ouverts » et de façon plus globale l'usage des « Démarches de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissages des Mathématiques ». Ce travail se développe aujourd'hui dans de nombreuses autres structures de recherche et d'enseignement. Citons le laboratoire S2HEP de l'UCBL (Université Claude Bernard Lyon 1), l'Inspé (Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation) de l'académie de Lyon, la Haute École Pédagogique du canton de Vaud, le Léa (Lieu d'éducation associé) ECL@Math de l'Ifé (Institut français de l'éducation). Nous nous proposons ici de revenir sur un certain nombre d'avancées sur la résolution de problèmes développées dans le monde de la recherche et de l'éducation et qui peuvent être utiles pour éclairer les pratiques du RMT.
Nous avons choisi d'introduire cet article par un retour sur la dimension expérimentale des mathématiques et l'hypothèse didactique qu'elle permet de poser dans le projet d'un enseignement fondé sur la résolution de problèmes. Nous détaillerons ensuite le type de problèmes que nous considérons et les situations d'apprentissage que nous proposons en lien avec ceux-ci. Nous finirons en proposant la réflexion en cours sur les mises en œuvre effectives dans les classes.

1. La dimension expérimentale des mathématiques

Nulle part, le monde de la théorie et le monde de l'expérience ne sont séparés d'avance.
(Gonseth, 1955)

La pratique de recherche de problèmes des mathématiciens nous amène à prendre en considération les longues phases d'exploration, d'essais, de retour sur les erreurs, de nouvel essai, de validation d'un résultat partiel que chacun parcourt lors d'une véritable recherche mathématique. Bkouche (2008) reconnaît ainsi un caractère expérimental aux mathématiques dans la mesure où elles relèvent des sciences expérimentales qu'il définit selon deux principes : l'origine empirique des objets étudiés et des concepts ainsi mis en jeu d'une part, et la méthode (ou les méthodes), qui participe à la fois de l'observation empirique et du raisonnement rationnel d'autre part.
Pour un des concepts les plus usités des mathématiques, le nombre, l'origine empirique fait peu de doute. Pour Giusti (2000, p.46), « dans un premier temps les objets à dénombrer ont été représentés par des signes, puis à ces signes des noms furent donnés, sans plus besoin de l'intermédiaire des signes. Chaque nombre est généré par la répétition d'un acte simple : tracer un signe. ». Puis pour Bkouche (1982, p.307), « Il y a un constat expérimental des propriétés de commutativité et d'associativité de l'addition et de la multiplication, constat qui précède les justifications théoriques et celles-ci naissent de la nécessité de validation générale de tels constats ».
Au-delà de la dimension empirique de la construction du nombre que nous ne développerons pas ici, le propos de Bkouche illustre la dimension expérimentale des mathématiques qui se traduit ainsi par « le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets. » (Durand-Guerrier, 2006, p.1).
Cette première approche peut se schématiser dans un premier temps comme ci-dessous :

Sous cette modélisation, « la multiplication des expériences, en appui sur des objets, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves, et contribue de manière essentielle au processus de conceptualisation » (Durand-Guerrier, 2010, p.5).
Nos travaux (Aldon et. al., 2010 ; Gardes, 2018 ; Front, 2015) montrent de nombreux exemples de ces conceptualisations qui se construisent par des allers-retours permettant des élaborations théoriques de plus en plus complexes.
Il en est ainsi, par exemple, de la découverte des pavages archimédiens du plan par des élèves confrontés à l'étude de pavages du plan par des polygones réguliers. Rappelons que les pavages archimédiens du plan (figure 1) sont des pavages du plan avec des polygones réguliers (Front et Legrand, 2010).

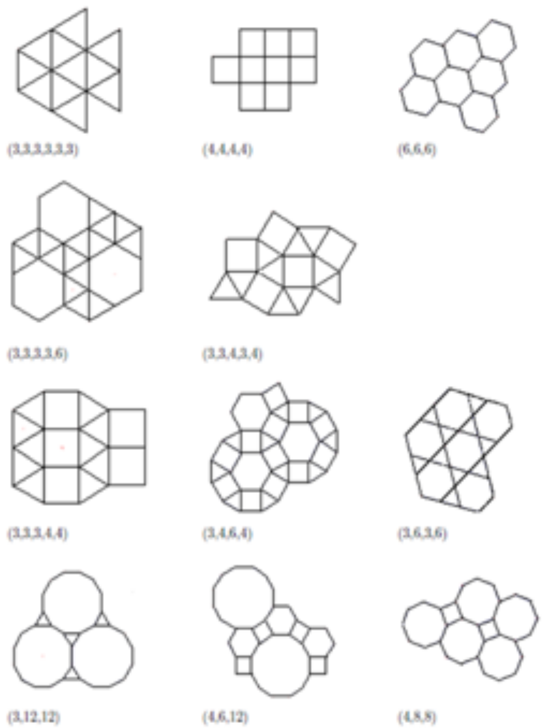


Figure 1 : les 11 pavages archimédiens du plan

Chez des élèves, à qui l'on pose la question suivante « Peut-on paver le plan avec des polygones réguliers ? », il est possible d'identifier plusieurs phases d'élaborations théoriques qui se construisent par des allers-retours entre les manipulations de polygones réguliers avec lesquels ils sont familiers et le concept de « pavage archimédien » en cours d'élaboration.
Les figures 2 et 3 rendent compte en partie de la production d'un groupe d'élèves confrontés à cette recherche. Un premier regard permet d'identifier les objets naturalisés et d'autres objets en cours d'exploration, par exemple les essais d'assemblages de polygones d'angles α et α'comme on peut le voir sur la figure 3.

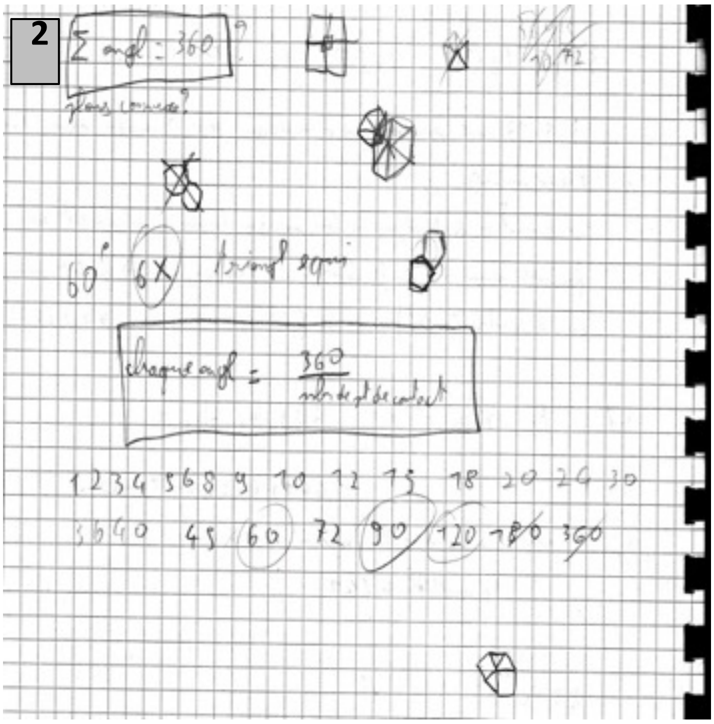


Figure 2 : Conceptualisation des pavages réguliers

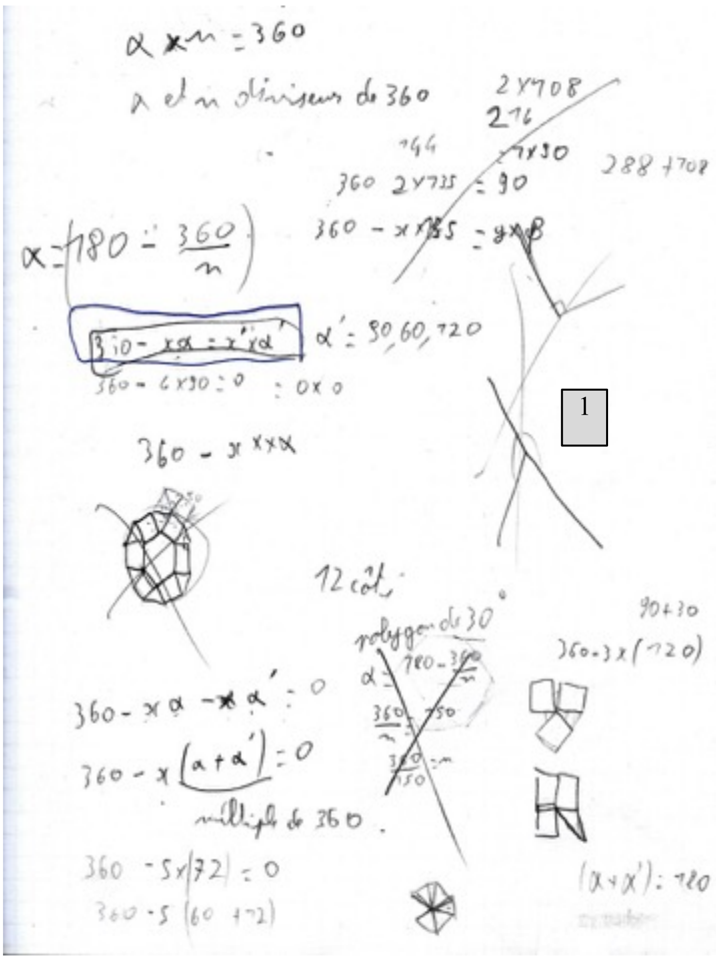


Figure 3 : Exploration des pavages archimédiens du plan

Une analyse très fine des productions des élèves (Bloch, Front & Gibel, sous presse) peut être faite pour mettre en évidence la construction étape par étape du concept de pavages archimédiens, en appui sur les allers-retours, les obstacles rencontrés, les leviers. Par une analyse multidimensionnelle des raisonnements à différents niveaux, il est ainsi possible de voir en particulier l'évolution du concept de pavage régulier de l'étape (1) de la figure 3 lors de laquelle un élève représente un nœud, aux différentes étapes de la figure 2 où l'on observe l'émergence de conditions nécessaires sur la somme des angles autour d'un nœud et l'évolution du signe de simple intuition à la formule comme icône, puis indice et symbole[3]. Lors de cette évolution, la valeur de vérité du signe « Σ angl = 360 » se fixe et le signe devient le cadre potentiel d'une action sur les objets familiers. Plus précisément, l'action s'inscrit dans la théorie portée par le signe, peut être régie par ce signe. Il est notable que dans cette dimension de recherche du sens, la syntaxe soit tout d'abord mixte, mobilisant du texte et des symboles mathématiques, et non encore complètement mathématique.

On a ici un exemple en action de l'expérimentation en mathématiques : « une méthode d'investigation systématique » que Perrin (2007, p.10) n'hésite pas à désigner sous le nom de « méthode expérimentale » pour résoudre des problèmes mathématiques. Cette méthode comprend plusieurs étapes à répéter éventuellement : expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuve, contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures, nouvelles tentatives de preuve, etc.

Pour préciser, l'expérimentation s'appuie en fait sur un double raisonnement ; en amont pour élaborer une expérience pertinente et en aval pour la lecture des résultats. Son rôle est de vérifier l'adéquation entre la théorie et l'expérience dans le but de créer de nouveaux objets mathématiques. Ainsi, l'expérimentation est un processus dialectique empirique/théorique qui n'a de sens que par ses articulations avec la formulation et la validation (Dias, 2008 ; Gardes, 2018).

Comme Halmos (1985), « I do believe that problems are the heart of Mathematics », nous estimons que la prise en compte explicite du caractère expérimental en mathématiques est une nécessité pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques tout au long du curriculum de la maternelle à l'université. Ceci est lié à la nécessité de penser et d'organiser les articulations entre abstrait et concret dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et va de pair avec la thèse didactique selon laquelle le travail sur les objets, leurs propriétés et les relations qu'ils entretiennent entre eux joue un rôle central dans le processus de conceptualisation en mathématiques.

2. Résolution de problèmes en classe : de quels problèmes parle-t-on ?

Pour préciser l'environnement didactique que nous proposons, nous revenons sur le choix des problèmes que nous considérons. Il s'agit de problèmes mathématiques avec les caractéristiques suivantes (Gardes, 2013, 2018) :

- Un énoncé court qui ne donne ni la méthode, ni la solution ;
- un problème qui se trouve dans un domaine conceptuel familier aux élèves ;
- un problème qui permet de mettre en œuvre une dimension expérimentale ;
- la recherche du problème met en jeu une dialectique entre mobilisation d'objets naturalisés, l'approfondissement de connaissances et le développement d'heuristiques.

A la suite de Ghys (2010) reprenant les termes de la conférence de Hilbert, nous caractériserons aussi les problèmes concernés de robustes : « [...] un problème mathématique doit être difficile, mais non pas inabordable, sinon il se rit de nos efforts ; il doit au contraire être un véritable fil conducteur à travers les dédales du labyrinthe vers les vérités cachées, et nous récompenser de nos efforts par la joie que nous procure la découverte de la solution. ».

Commençons par illustrer cette proposition en observant « Le problème qui déchire »[4], dont voici un énoncé :

> Je prends une feuille de papier, je la déchire en 2 morceaux. Ensuite, je prends l'un des deux morceaux et je le déchire en 2. J'ai donc 3 morceaux de feuille. Et je recommence ce procédé, je prends l'un des trois morceaux de papier et je le déchire en 2, etc.
> Est-ce que je peux avoir 19 morceaux de papier ? 20 morceaux de papier ? 21 morceaux de papier ? 2016 morceaux de papier ?
> Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?

[3] On renvoie ici à la sémiotique de Pierce et à son usage dans l'analyse des raisonnements (Bloch & Gibel, 2011). Le lien avec l'objet peut se faire par un rapport de similarité, de contiguïté contextuelle ou de loi. Suivant cette trichotomie, le signe est appelé respectivement une icône, un indice ou un symbole.

[4] https://math.univ-lyon1.fr/dream/

Et en déchirant en 3 morceaux…
Est-ce que je pourrais avoir 19 morceaux de papier ? 20 morceaux de papier ? 21 morceaux de papier ? 2016 morceaux de papier ?
Et en déchirant en 4 morceaux, 5 morceaux…

Plus généralement, quelles sont les découpes qui me permettraient d'obtenir 2016 morceaux ?

Du point de vue mathématique, un nombre p sera atteint par des découpes en n si et seulement si n - 1 est un diviseur de p - 1. Ainsi, 2017 sera atteint pour des découpes n quand n - 1 est un diviseur de 2016, c'est à dire n appartient à l'ensemble {2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 13; 15; 17; 19; 22; 25; 29; 33; 37; 43; 49; 57; 64; 73; 85; 97; 113; 127; 145; 169; 225; 253; 289; 337; 505; 673; 1009; 2017}.

Un premier regard sur une mise en œuvre en classe permet d'observer (figure 4), un extrait de production d'élèves de catégorie 4, 5 et 6 :

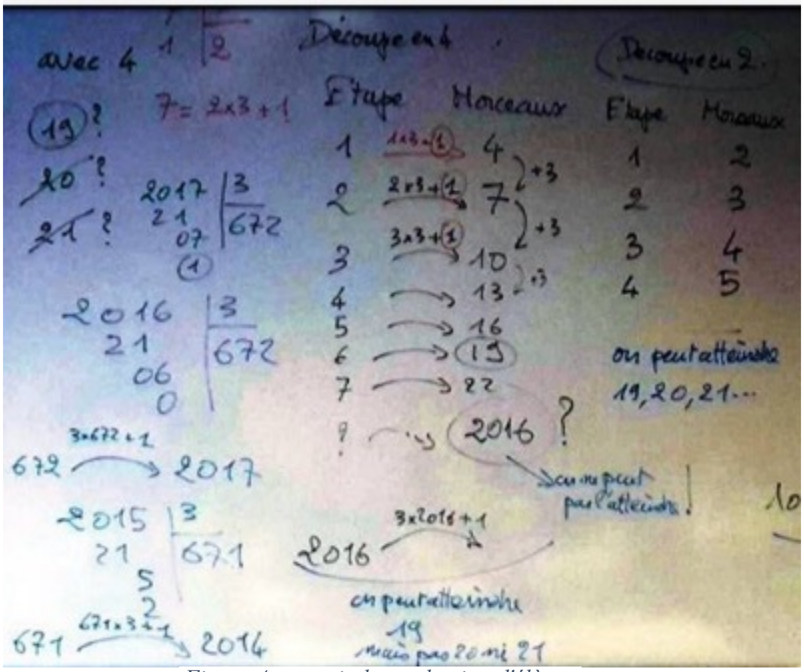


Figure 4 : extrait de production d'élèves

Sur cet extrait apparaît une activité importante du groupe d'élèves avec :
- Des expériences en appui sur le nombre d'étapes et le nombre de morceaux obtenus,
- Des recherches de régularités, par exemple sur le nombre de morceaux,
- Des résultats partiels : « 2016 ? … on ne peut pas l'atteindre ! »,
- Des allers-retours en particulier pour tester des régularités sur de nouveaux cas de déchirures.

Ce problème croise ainsi toutes les caractéristiques attendues pour faire vivre la dimension expérimentale et produire des allers-retours entre objets naturalisés et élaboration de concepts permettant d'agir.

Et les problèmes du RMT ? Regardons ce qu'il en est d'un problème du 14ème RMT, « Le temps des vendanges », en catégorie 8 :

Le temps des vendanges

Dans les vignes de M. Brunello, un jour de vendanges, avec le raisin recueilli on a rempli 18 grandes cuves et 13 cuves moyennes. Pour les transporter à la cave, M. Brunello dispose de trois tracteurs :

- le tracteur A peut transporter, à pleine charge, 3 grandes cuves et 2 moyennes,
- le tracteur B peut transporter, à pleine charge, 2 grandes cuves et 1 moyenne,
- le tracteur C peut transporter, à pleine charge, 1 grande cuve et 1 moyenne,

Ce jour-là, M Brunello a utilisé au moins une fois tous ses tracteurs et toujours à pleine charge.
Combien de voyages peut avoir fait M. Brunello avec chacun de ses tracteurs pour transporter toutes les cuves à la cave ?
Décrivez tous les voyages possibles et expliquez comment vous les avez trouvés.

Le problème demande de trouver les différentes manières d'obtenir le couple (18 ; 13) par addition de trois types de couples (3 ; 2), (2 ; 1) et (1 ; 1) dans un contexte de transports de deux types de récipients par trois transporteurs. Il peut se ramener à l'étude d'un système linéaire de deux équations à trois inconnues entières et strictement positives : $3x + 2y + z = 18$ et $2x + y + z = 13$. Il y a quatre triplets solutions : (4, 1, 4), (3, 2, 5), (2, 3, 6), (1, 4, 7) … et il n'existe pas de méthode immédiatement disponible aux niveaux considérés.

Les productions d'élèves permettent d'observer des élaborations de raisonnement en appui sur les premières manipulations dès la mise en place de la situation de référence (l'élève a la possibilité d'agir dans un milieu objectif).
En catégorie 8, il est possible d'observer la mise en place de procédures figuratives avec **la manipulation** de charges plus ou moins symboliques. On peut noter des manipulations organisées (d'objets sensibles ? De nombres ?) et systématisées, dans le champ multiplicatif et additif, avec des entiers… mais les productions des figures 5 et 6 ne montrent pas d'apparition de nouvel outil théorique. Le milieu permet les manipulations, l'apparition d'une situation de référence avec des sujets agissants, mais pas toujours l'émergence de concepts nouveaux.

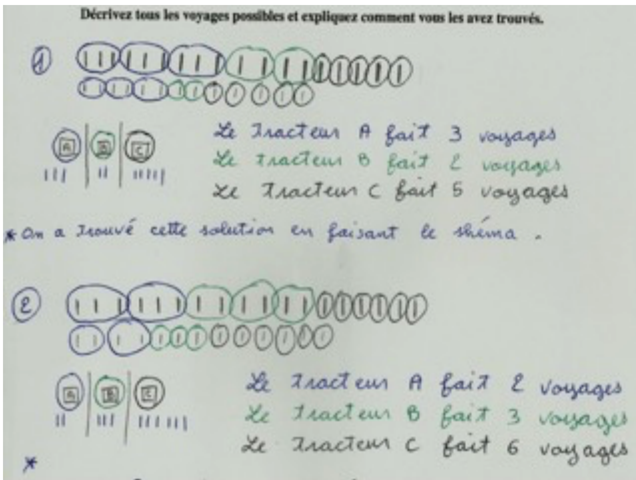


Figure 5 : une procédure figurative

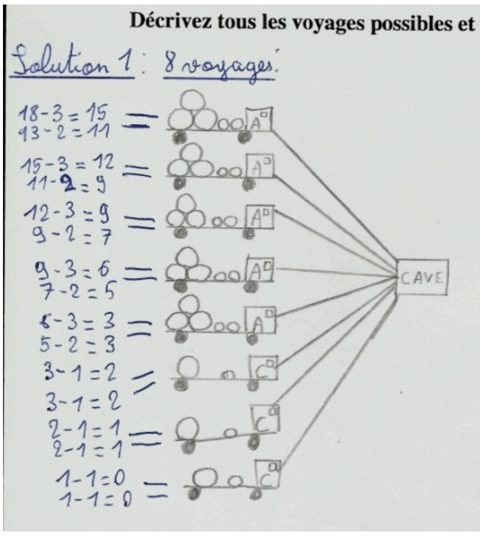
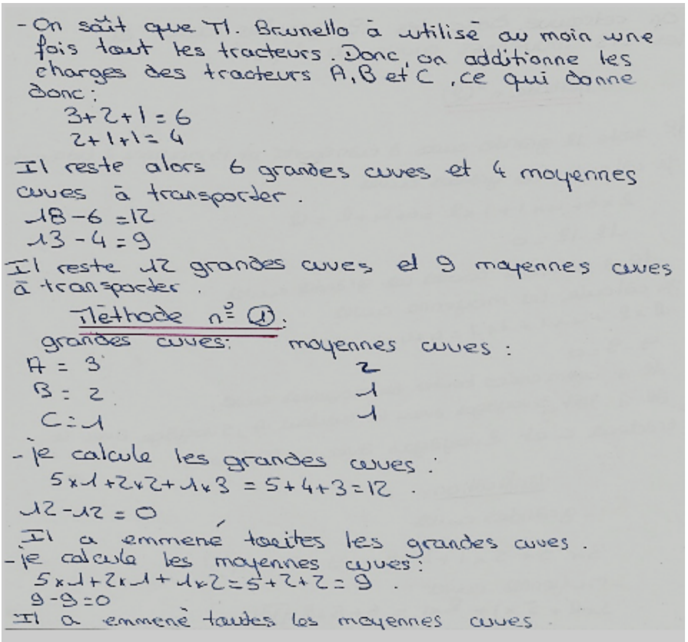


Figure 6 : une procédure erronée

D'autres productions mettent, elles, en évidence des raisonnements plus élaborés. Pour ce groupe d'élèves (figure 7), le milieu matériel permet :

- la mobilisation de connaissances stabilisées (opérations dans le champ additif et multiplicatif, proportionnalité, …),
- la mise en place de raisonnements permettant de « réduire le problème »,
- la possibilité de réaliser des essais dans un périmètre plus limité,
- l'obtention de résultats partiels,
- …



- On sait que M. Brunello à utilisé au moin une fois tout les tracteurs. Donc, on additionne les charges des tracteurs A, B et C, ce qui donne donc :

3+2+1 = 6
2+1+1 = 4

Il reste alors 6 grandes cuves et 4 moyennes cuves à transporter.

18 - 6 = 12
13 - 4 = 9

Il reste 12 grandes cuves et 9 moyennes cuves à transporter.

Méthode n° 1.

grandes cuves :	moyennes cuves :
A = 3	2
B = 2	1
C = 1	1

- Je calcule les grandes cuves :

5×1+2×2+1×3 = 5+4+3 = 12.

12 - 12 = 0

Il a emmené toutes les grandes cuves.

- Je calcule les moyennes cuves :

5×1+2×1+1×2 = 5+2+2 = 9.

9 - 9 = 0

Il a emmené toutes les moyennes cuves.

Figure 7 – Une production avec l'obtention de résultats partiels

D'autres productions (figures 8 et 9) mettent en évidence des raisonnements dont la validité pourra être mise en débat.

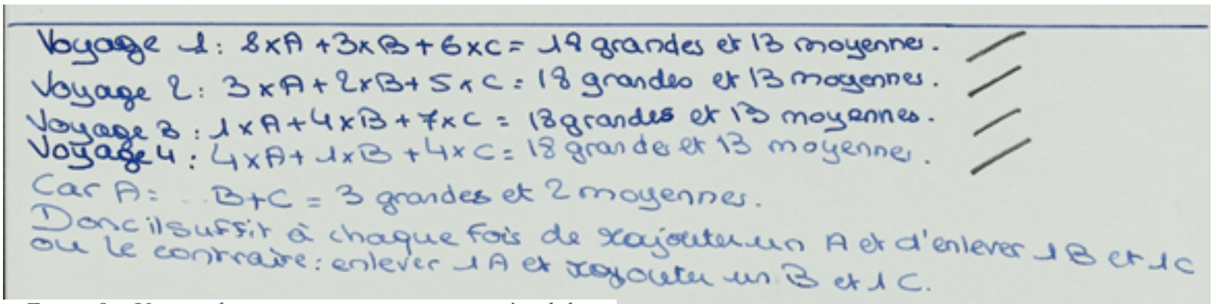

Voyage 1 : 8xA + 3xB + 6xC = 19 grandes et 13 moyennes.
Voyage 2 : 3xA + 2xB + 5xC = 18 grandes et 13 moyennes.
Voyage 3 : 1xA + 4xB + 7xC = 18 grandes et 13 moyennes.
Voyage 4 : 4xA + 1xB + 4xC = 18 grandes et 13 moyennes.
Car A = B+C = 3 grandes et 2 moyennes.
Donc il suffit à chaque fois de rajouter un A et d'enlever 1B et 1C ou le contraire : enlever 1A et rajouter un B et 1C.

Figure 8 – Une production avec un raisonnement à valider

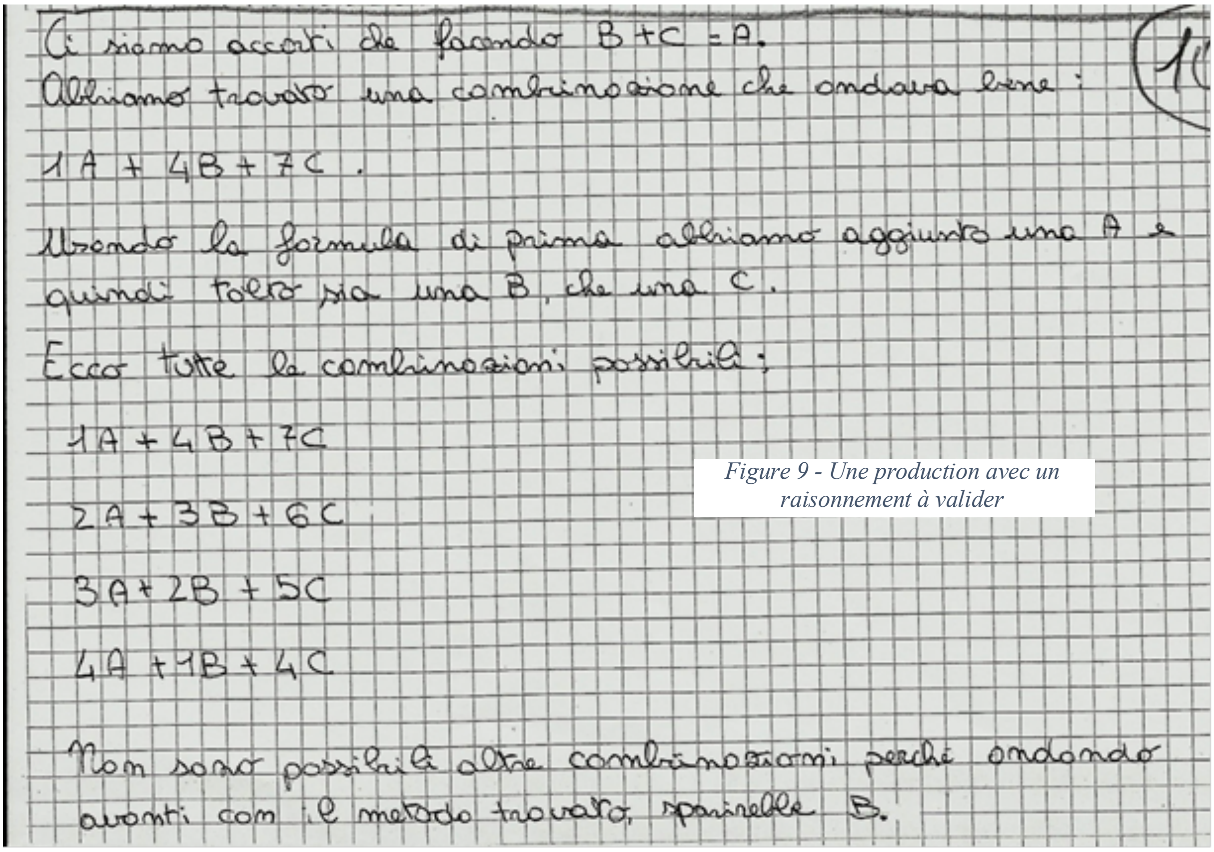

Ci siamo accorti che facendo B+C = A.
Abbiamo trovato una combinazione che andava bene :
1A + 4B + 7C.
Usando la formula di prima abbiamo aggiunto una A e quindi tolto sia una B, che una C.
Ecco tutte le combinazioni possibili :
1A + 4B + 7C
2A + 3B + 6C
3A + 2B + 5C
4A + 1B + 4C
Non sono possibili altre combinazioni perché andando avanti con il metodo trovato, sparirebbe B.

Figure 9 - Une production avec un raisonnement à valider

Ces présentations succinctes de productions d'élèves sur la résolution d'un problème mettent en évidence une manipulation d'objets naturalisés qui permet, mais pas toujours, l'émergence de représentations nouvelles, de premières formalisations, la possibilité d'une action qui commence à s'inscrire dans une nouvelle théorie, une évolution vers un nouvel objet conceptualisé et ses propriétés.

Dans le point 3 suivant, nous détaillons la proposition de situations didactiques pour la classe après être revenus sur la vigilance nécessaire quant aux manipulations improductives.

3. Des situations d'apprentissage en classe

Nombreux sont les groupes d'enseignants, de formateurs qui travaillent à la diffusion des problèmes de recherche et à leur utilisation en classe. Pour autant, et malgré un certain nombre de recommandations institutionnelles, ces pratiques ne se sont pas généralisées. L'équipe DREAM porte, elle aussi, un projet qui vise à construire des situations d'apprentissage et plus globalement un enseignement fondé sur la recherche de problèmes, permettant de travailler les allers et retours entre la partie expérimentale de la recherche et la construction structurée de notions mathématiques.

Avant de détailler le projet, il nous semble nécessaire de revenir sur le terme de « manipulation » que l'on retrouve dans de nombreuses propositions, par exemple celles associant les verbes manipuler, verbaliser, abstraire. Or, nous l'avons vu, la manipulation ne produit pas toujours l'émergence de raisonnements nouveaux et l'élaboration de nouveaux concepts. Ce que nous entendons par « manipulation » c'est une phase d'action sur des objets tangibles ou symboliques. Elle renvoie à des verbes d'action, par exemple : déplacer, manier, toucher, palper, actionner, mettre en œuvre, utiliser, opérer, calculer, etc.

Voici un exemple (figure 10) de manipulation d'objets tangibles (des polygones réguliers en carton) au sein de la recherche du problème des pavages archimédiens. Les élèves cherchent à construire le plus possible de pavages archimédiens en déplaçant, associant, positionnant les polygones en cartons.

Figure 10 : Exemple de manipulation d'objets tangibles dans le problème de pavages archimédiens

Voici un exemple (figure 11) de manipulation d'objets symboliques (des nombres entiers) au sein de la recherche du problème qui déchire. Les élèves cherchent une régularité entre les morceaux obtenus après les découpages successifs, en testant sur de nombreuses valeurs numériques.

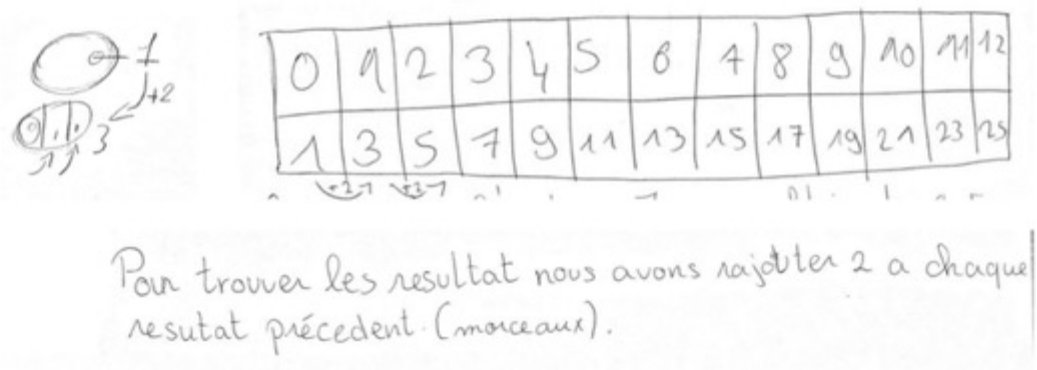
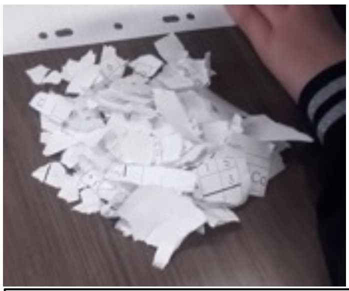


Figure 7 - Exemple de manipulation d'objets symboliques au sein du problème qui déchire

Les deux exemples ci-dessus renvoient à des manipulations productrices au moins de résultats partiels et que l'on peut a priori qualifier d'actives, dans le sens où il y a une intentionnalité dans les actions, avec une recherche de résultats. Mais il est possible de voir des enfants manipuler longuement des polygones réguliers sans jamais se projeter dans le résultat de l'action. Il est donc nécessaire de prendre quelques précautions quand on souhaite décrire une activité orientée vers la recherche de résultats, autrement dit quand on souhaite faire la différence entre manipuler et expérimenter. C'est pourquoi, nous parlerons de manipulation passive s'il n'y a pas d'intentionnalité vis-à-vis de l'objet d'apprentissage visé ou de la résolution du problème. L'action a alors peu de chance d'aboutir à un apprentissage. Et nous parlerons de manipulation active (qui renvoie à l'expérimentation) s'il y a une intentionnalité vis-à-vis de l'objet d'apprentissage visé ou de la résolution du problème. Mais attention, d'une part, la manipulation passive peut être une étape intermédiaire importante permettant de s'engager dans une manipulation active, et d'autre part, la manipulation active n'est pas garante des apprentissages même si elle favorise l'initiation du processus (Croset et Gardes, 2022). Ainsi, ce que nous visons c'est bien la dynamique manipuler-expérimenter-formuler-valider pour favoriser la construction de savoirs (Dias, 2008 ; Gardes, 2018 ; Croset & Gardes, 2022).

Revenons maintenant au projet d'un enseignement fondé sur la recherche de problèmes. L'objectif des situations didactiques que nous devons construire est d'aider au passage progressif de la perception d'un objet à l'abstraction du concept qu'il représente. Et c'est bien la possibilité d'expérimenter sur cet objet qui peut permettre le passage à l'abstraction. Par exemple, dans « le problème qui déchire », les manipulations de morceaux de papiers permettent aux élèves de construire petit à petit l'ensemble des solutions, en appui sur la notion de diviseurs puis de division euclidienne.



Ainsi, 2017 sera atteint pour des découpes n avec $n-1$ diviseur de 2016, c'est à dire :

$$n \in \{2,3,4,5,7,8,9,10,13,15,17,19,22,25,29,33,37,43,49,57,64,73,85,97,113,127,145,169,225,253,289,337,505,673,1009,2017\}$$

Mais 2018, dont le prédécesseur 2017 est premier, ne sera atteint que par 2 et 2018 !

Du point de vue de la Théorie des Situations Didactiques (TSD, Brousseau, 1998), nous proposons ce que nous nommons des situations didactiques de recherche de problèmes (SDRP).
Ce sont des situations (Front, 2015) :

- didactiques, c'est-à-dire des situations où le maître cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation a-didactique,
- d'apprentissage, c'est-à-dire des situations où l'élève fait fonctionner ses connaissances puis modifie son système de connaissances, pour répondre à la situation proposée,
- où le projet commun de l'enseignant et des élèves est avant tout l'engagement dans la résolution du problème proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels, la genèse de savoirs sur des objets mathématiques nouveaux,
- où la dimension expérimentale est fortement présente.

La mobilisons du modèle de la TSD permet de renvoyer :

- à la confrontation aux objets (situation d'action),
- au discours sur les objets, les propriétés, les relations (situation de formulation),
- à l'insertion dans un réseau de connaissances dans un processus d'argumentation et de preuve (situations de validation et d'institutionnalisation),

comme on peut l'identifier dans la figure 12 ci-dessous pour « le problème qui déchire » :

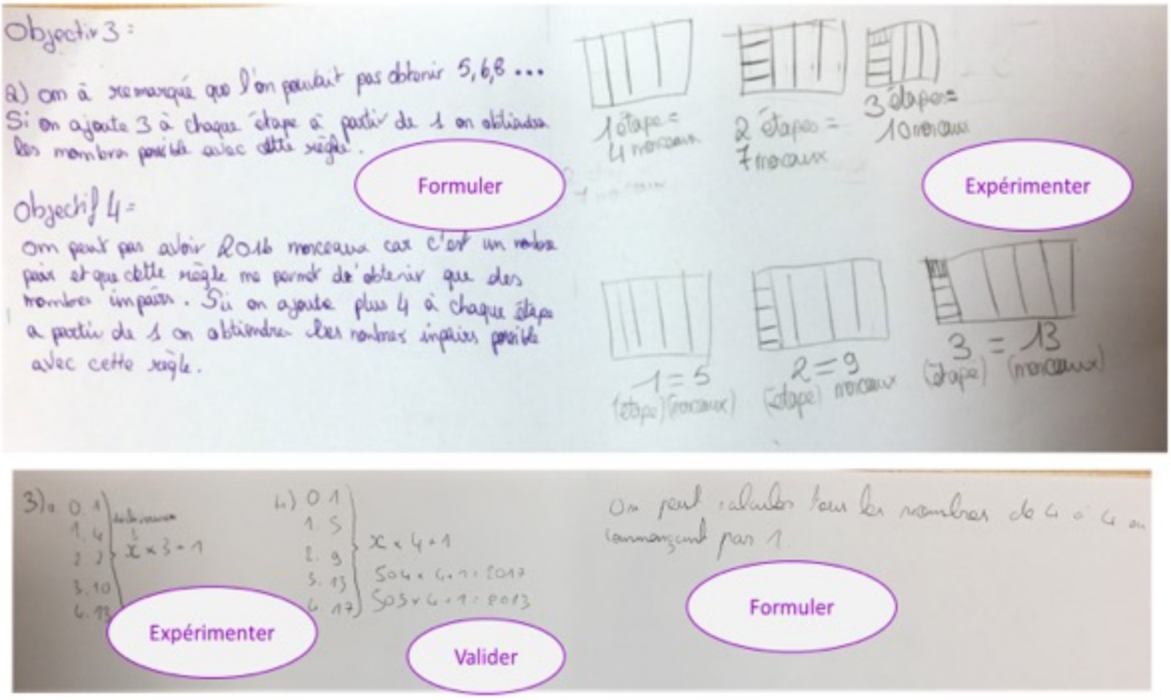


Figure 12 – Des situations d'action, formulation et validation dans le problème qui déchire

A la croisée des modèles on obtient le schéma suivant (figure 13) :

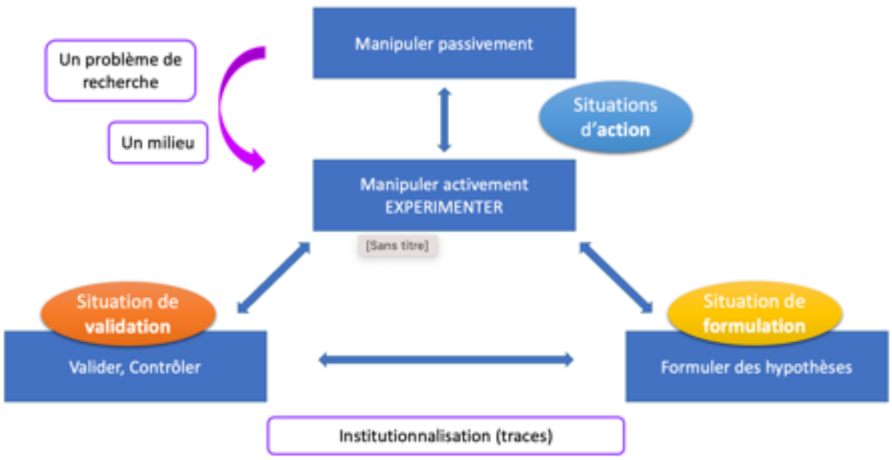


Figure 13 – Schématisation d'une démarche Manipuler – Expérimenter – Formuler - Valider

Le passage de la manipulation passive à la manipulation active (l'expérimentation) est un premier niveau d'abstraction pour l'élève. En effet, il doit être capable de se détacher de ses actions sur le matériel présent dans le milieu pour anticiper l'impact de ses actions. Il s'enclenche alors un processus d'apprentissage reposant sur la manipulation active, la formulation d'hypothèses et la validation de ces hypothèses (Figure 13).

Terminons par une proposition d'organisation de séquences d'enseignement fondé sur la résolution de problèmes.

3.1. Quelle mise en œuvre en classe ? Organiser une séquence d'enseignement fondée sur la recherche de problèmes.

Le groupe DREAM a souhaité approfondir ses recherches sur l'enseignement et l'apprentissage fondés sur la recherche de problèmes en interrogeant la possibilité de créer une organisation plus globale permettant :

- de rendre plus régulière la pratique de recherche de problèmes en classe,
- d'approfondir la recherche d'un problème en classe,

- de traiter les éléments mathématiques du programme à partir des recherches faites par les élèves,
- de relier la progression d'un niveau donné à ces situations didactiques de recherche de problèmes.

Cette réflexion a mené à l'élaboration de séquences fondées sur la recherche de problèmes avec la structure suivante (figure 14) :

- Mise en œuvre d'une situation didactique de recherche de problème
- Bilan sur les savoirs, notions, méthodes utilisées …
- Approfondissements ou développements techniques, pour avancer dans le problème et pour toutes les notions le nécessitant, nommés « études »
- Synthèse de la recherche du problème
- Traces écrites / institutionnalisations sur l'ensemble des différents savoirs travaillés

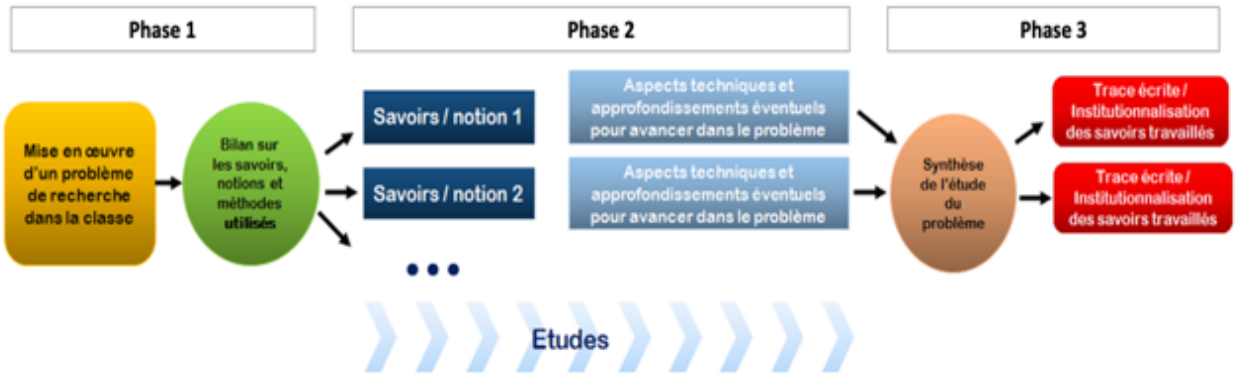


Figure 14 – Canevas d'une séquence fondée sur une situation didactique de recherche de problème

Pour « le problème qui déchire » et une mise en œuvre en catégorie 4, 5 ou 6, il est envisageable de prévoir une recherche du problème sur deux temps : environ 45 minutes de recherche individuelle puis collective et 1h45 de finalisation de la recherche, présentation des résultats, débats, bilan sur les savoirs et les notions et méthodes utilisées. Le bilan pourra, dans une dialectique compétences (Chercher, Raisonner, Calculer, Représenter, Modéliser, Communiquer) / connaissances, porter sur les multiples et diviseurs des nombres d'usage courant, les critères de divisibilité (par 2, 3, 4, 5, 9, 10), la résolution de problèmes mettant en jeu les quatre opérations, le sens des opérations, les calculs, le calcul littéral, les outils pour représenter un problème, les suites, les premières équations diophantiennes. Voici un exemple d'un bilan produit avec des élèves (figure 15) :

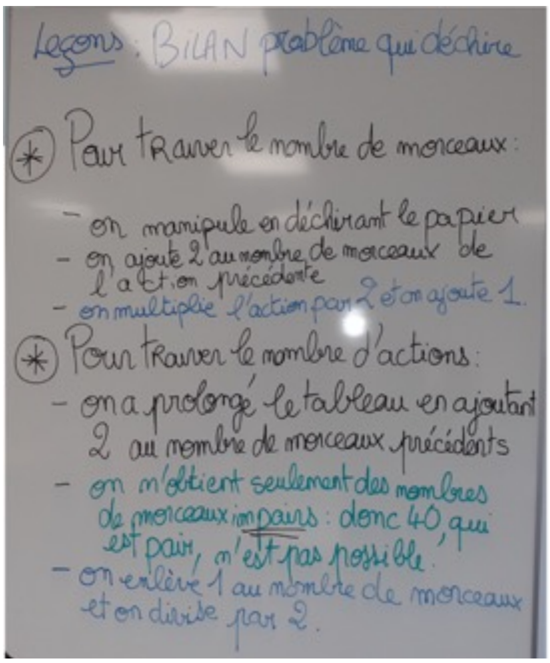


Figure 15 – Exemple d'un bilan produit avec des élèves sur le problème qui déchire

Les études pourront, suivant les niveaux considérés, porter sur la notion de parité, l'écriture des nombres pairs et impairs, la notion de division euclidienne, les suites, … Chacune des études pourra se dérouler sur une séance d'une heure minimum (figure 16).

> En particulier, quand les élèves seront amenés à représenter une division euclidienne sous la forme : dividende = diviseur x quotient + reste, réinvestir le fait que le problème qui déchire nous avait conduit à représenter un nombre impair de morceaux par : 2 x nombre entier (ou numéro d'action) + 1, et que pour remonter au numéro de l'action à partir du nombre de morceaux, le dernier groupe avait indiqué 'enlever 1' au nombre de morceaux, puis diviser le résultat obtenu par 2, en verbalisant eux-mêmes le fait qu'il s'agissait de l'« opération inverse ».

Figure 16 – Exemple d'un projet d'étude portant sur la division euclidienne en appui sur le problème qui déchire

La figure 17 illustre une synthèse de d'étude du problème qui déchire.

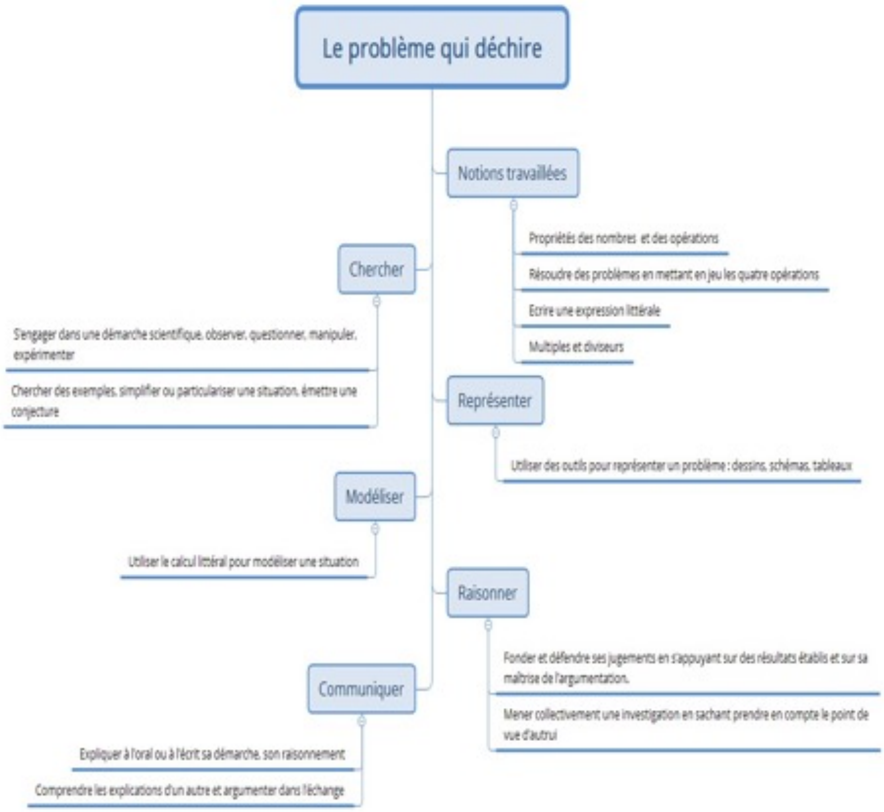


Figure 17 – Exemple d'une synthèse d'étude du problème qui déchire

3. Conclusion

Les travaux de nature historique, épistémologique, didactique menés autour de la résolution de problèmes fondent et confortent l'intérêt de la résolution de problèmes pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les positions institutionnelles interrogent désormais la dimension expérimentale des mathématiques et les questions de manipulation, d'expérimentation, de débat et de validation… l'ensemble des compétences nécessaires pour avoir une réelle activité mathématique et construire les savoirs mathématiques. Tout semble réuni pour que la pratique de recherche de problèmes progresse en classe. Mais cela ne se fera pas sans que les enseignants s'engagent dans ce changement de paradigme, ce qui leur permettrait d'opérer une rupture avec un enseignement qu'eux même ont reçu et qu'ils reproduisent. Cela ne se fera pas non plus sans que la recherche et la formation poursuivent le développement des ressources mises à la disposition des enseignants sur les problèmes de recherche, sur les situations didactiques de recherche de problème, sur les séquences fondées sur la recherche de problèmes et sur les programmations annuelles intégrant ces séquences.

Bibliographie

Bkouche, R. (2008). Du caractère expérimental des mathématiques. *Repères IREM, 70*, 33 - 76.

Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 31- 2*, 191-227. Grenoble : La Pensée Sauvage. hal-02525901

Bloch I., Front M., Gibel P. (sous presse). Analyse didactique des raisonnements en classe de mathématiques par l'usage d'un modèle spécifique. Exemples d'études de situations à différents niveaux de scolarité. In *Actes de la XXI^e^ école d'été de didactique des mathématiques*, octobre 2021.

Croset & Gardes (2019). *Manipuler, verbaliser, abstraire en mathématiques*. Parcours M@gistère du Plan Mathématiques.

Croset, M.-C. & Gardes, M.-L. (2022). Des leviers identifiés pour enseigner l'abstraction. *Tangente Education, 62*, 6-8.

Dias, T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. *Thèse de doctorat*, Université Claude Bernard Lyon 1.

Durand-Guerrier, V. (2006). La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique. In L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas, & A. Mercier (Eds.), *Actes des journées mathématiques de l'INRP (p. 17-23)*. INRP.

Front, M. et Legrand, P. (2010). Pavages semi-réguliers du plan. *Bulletin de l'APMEP*, *486*, 60-66.

Front, M. (2012). Pavages archimédiens du plan : une exploration favorable aux élaborations mathématiques. *Repères IREM, 89*, 5-37.

Front, M. (2015). Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan. *Thèse de doctorat*, l'Université de Lyon.

Gardes, M. (2013). Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. *Thèse de doctorat*, Université de Lyon.

Gardes, M.-L. (2018). Démarches d'investigation et recherche de problèmes. In G. Aldon, *Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux !* Canopé Éditions, pp. 73-96.

Ghys, E. (2010). Les problèmes de Hilbert. *Images des Mathématiques*, CNRS.

Giusti, E. (2000). *La naissance des objets mathématiques*. Ellipses.

Gonseth, F. (1955). *La géométrie et le problème de l'espace*. Éditions du Griffon.

Halmos, P. (1985). *I want to be a mathematician: An automathography*, Springer Verlag, New York.

Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x, 7*, 6-34.

Site du groupe DREAM : https://math.univ-lyon1.fr/dream/

RISOLUZIONE DI PROBLEMI PER L'INSEGNAMENTO E L'APPRENDIEMNTO DELLA MATEMATICA IN CLASSE

Mathias Front
Institut National Supérieur du Professorat et de'Éducation, Académie de Lyon, France
IREM de Lyon, S2HEP, Université Claude Bernard Lyon1
mathias.front@univ-lyon1.fr

Marie-Line Gardes
Haute École Pédagogique du Canton de Vaud, Lausanne, Suisse
IREM de Lyon, France
marie-line.gardes@hepl.ch

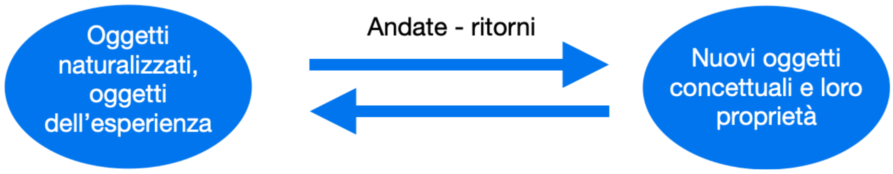
Qualche parola di presentazione

La stesura di questo articolo per la Gazzetta di Transalpino è stata per noi autori l'occasione per tornare sulle molteplici riflessioni in corso, frutto del lavoro di diversi anni in contesti diversi. Citiamo qui l'IREM di Lione e il gruppo DREAM che da tempo si interrogano sulla natura e l'attuazione in classe dei "problemi aperti" e più in generale sull'uso delle "Procedure di ricerca per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica". Questo lavoro è ora in fase di sviluppo in molte altre strutture di ricerca e di insegnamento. Citiamo il laboratorio S2HEP dell'UCBL (Università Claude Bernard Lyon 1), l'Inspé (Institut National Supérieur du Professorat et de l'Education) dell'Accademia di Lione, la Haute Ecole Pédagogique del cantone di Vaud, il Léa (Lieu d'éducation associé), ECL@Math de l'Ifé (Institut français de l'éducation). Ci proponiamo qui di ritornare su una serie di progressi nella risoluzione dei problemi che figurano nel mondo della ricerca e dell'educazione e che possono essere utili per mettere in chiaro le pratiche di RMT.
Abbiamo scelto di cominciare questo articolo con un ritorno alla dimensione sperimentale della matematica e all'ipotesi didattica che essa consente di porre nel progetto di un insegnamento basato sulla risoluzione di problemi. Descriveremo poi in dettaglio il tipo di problemi che consideriamo e le situazioni di apprendimento che proponiamo. Concluderemo proponendo la riflessione in corso sulle effettive implementazioni nelle classi.

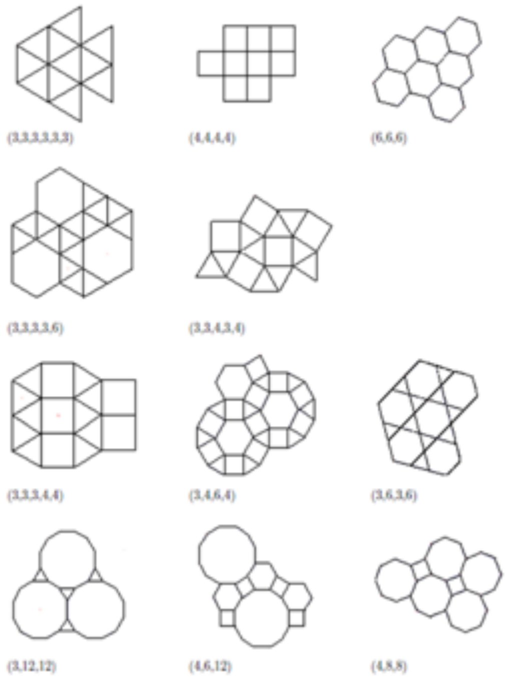
1. La dimensione sperimentale della matematica

Nulle part, le monde de la théorie et le monde de l'expérience ne sont séparés d'avance.
(Gonseth, 1955)

La pratica di ricerca di problemi matematici ci porta a prendere in considerazione le lunghe fasi di esplorazione, tentativi revisione degli errori, nuova verifica, validazione di un risultato parziale che ciascuno vive durante una vera ricerca matematica. Bkouche (2008) riconosce così un carattere sperimentale alla matematica nella misura in cui rientra nelle scienze sperimentali che definisce secondo due principi: l'origine empirica degli oggetti studiati e dei concetti così messi in gioco da un lato, e il metodo (o metodi), che, dall'altro, contribuisce sia all'osservazione empirica che al ragionamento razionale.
Per uno dei concetti più usati in matematica, il numero, ci sono pochi dubbi sull'origine empirica. Per Giusti (2000, p.46), "inizialmente gli oggetti da contare erano rappresentati da segni, poi a questi segni venivano dati dei nomi, senza più bisogno dell'intermediazione dei segni. Ogni numero è generato dalla ripetizione di un gesto semplice: tracciare un segno.". Poi per Bkouche (1982, p.307), "Esiste una constatazione sperimentale delle proprietà di commutatività e associatività dell'addizione e della moltiplicazione, una constatazione che precede le giustificazioni teoriche e queste nascono dalla necessità di validazione generale di tali constatazioni".
Al di là della dimensione empirica della costruzione del numero che qui non svilupperemo, le osservazioni di Bkouche illustrano la dimensione sperimentale della matematica che si traduce così con "l'andirivieni tra un lavoro con gli oggetti che si cerca di definire e delimitare e l'elaborazione e/o la verifica di una teoria, il più delle volte locale, volta a rendere conto delle proprietà di questi oggetti. (Durand-Guerrier, 2006, p.1). Questo primo approccio può essere schematizzato inizialmente come segue:



Secondo questo modello, "la moltiplicazione delle esperienze, basate su oggetti, metodi e conoscenze naturalizzate per il soggetto, promuove l'elaborazione di nuovi oggetti concettuali e le loro proprietà, nuovi risultati e le loro prove, e contribuisce in maniera essenziale al processo di concettualizzazione" (Durand-Guerrier, 2010, p.5).
I nostri lavori (Aldon et. al., 2010; Gardes, 2018; Front, 2015) illustrano molti esempi di tali concettualizzazioni che si costruiscono con andate e ritorni che consentono elaborazioni teoriche sempre più complesse. È il caso, ad esempio, della scoperta delle tassellature archimedee del piano da parte degli alunni confrontati con lo studio delle tassellature del piano con poligoni regolari. Ricordiamo che le tassellature archimedee del piano (figura 1) sono tassellature del piano con poligoni regolari (Front e Legrand, 2010).



Nel caso degli allievi ai quali viene posta la seguente domanda "Possiamo pavimentare il piano con poligoni regolari?", è possibile individuare diverse fasi di elaborazioni teoriche che si costruiscono con andate e ritorni tra le manipolazioni di poligoni regolari a loro familiari e il concetto di "piastrellatura o tassellatura archimedea" in via di elaborazione.
Le figure 2 e 3 riflettono in parte la produzione di un gruppo di allievi confrontati con questa ricerca. Un primo sguardo permette di identificare gli oggetti naturalizzati e altri oggetti in corso di esplorazione, ad esempio i tentativi di assemblare poligoni con angoli α e α' come si può vedere in figura 3.

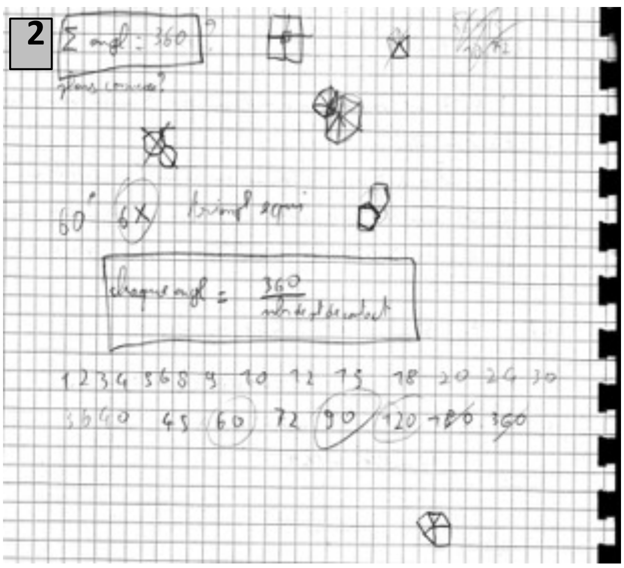


Figura 8: concettualizzazione delle pavimentazioni regolari

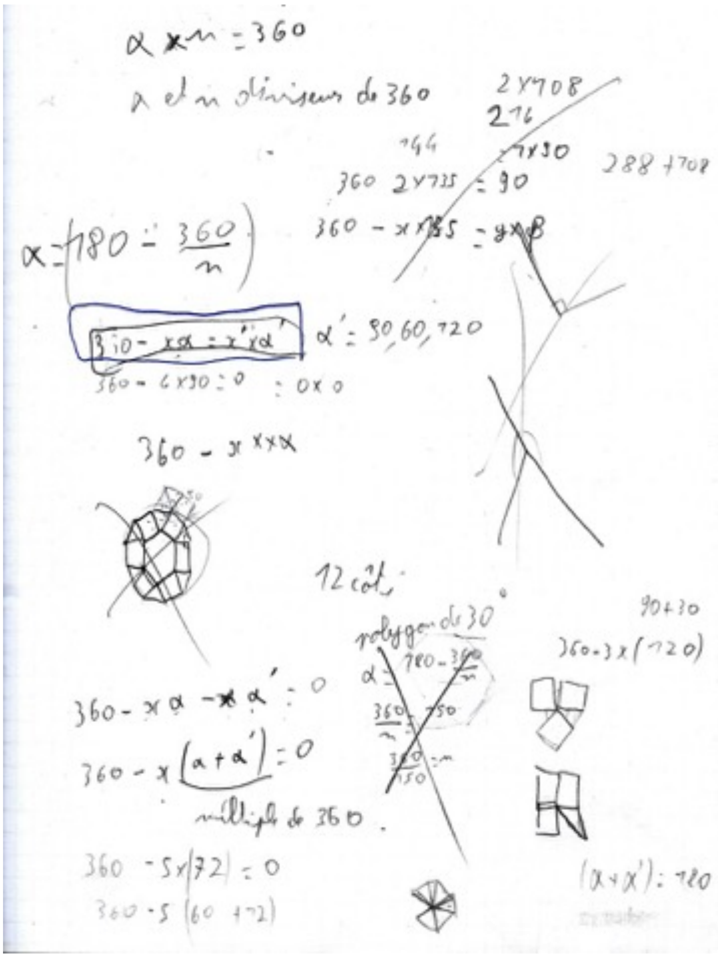


Figure 9: esplorazione delle pavimentazioni archimedee del piano

Un'analisi molto dettagliata delle produzioni degli allievi (Bloch, Front & Gibel, in corso di stampa) può evidenziare la costruzione passo dopo passo del concetto di tassellatura archimedea, basata sulle andate e ritorni, sugli ostacoli incontrati, sulle leve (nel loro senso metaforico). Attraverso un'analisi multidimensionale del ragionamento a diversi livelli, è così possibile vedere in particolare l'evoluzione del concetto di tassellatura regolare dalla tappa (1) della figura 3 nella quale un allievo rappresenta un nodo, alle tappe della figura 2 dove si osserva l'emergere di condizioni necessarie sulla somma degli angoli intorno a un nodo e l'evoluzione del segno da semplice intuizione a formula come icona, poi indice e simbolo[1]

Durante questa evoluzione, il valore di verità del segno "Σ angl = 360" viene fissato e il segno diventa il potenziale quadro per un'azione su oggetti familiari. Più precisamente, l'azione fa parte della teoria portata dal segno, può essere governata da questo segno. È interessante notare che in questa dimensione della ricerca di senso, la sintassi è prima di tutto mista, mobilitando testo e simboli matematici, e non ancora completamente matematici.

Durante questa evoluzione, il valore di verità del segno "Σ angl = 360" viene fissato e il segno diventa il potenziale quadro per un'azione su oggetti familiari. Più precisamente, l'azione fa parte della teoria portata dal segno, può essere governata da questo segno. È interessante notare che in questa dimensione della ricerca di senso, la sintassi è prima di tutto mista, mobilitando testo e simboli matematici, e non ancora completamente matematica.

Questo metodo prevede diversi passaggi eventualmente da ripetere: esperienza, osservazione dell'esperienza, indicazioni di congetture, tentata dimostrazione, contro-esperienza, possibile produzione di controesempi, indicazioni di nuove congetture, nuovi tentativi di dimostrazione, ecc.

---

[1] Ci riferiamo qui alla semiotica di Pierce e al suo uso nell'analisi del ragionamento (Bloch & Gibel, 2011). Il legame con l'oggetto può essere costituito da un rapporto di somiglianza, di contiguità contestuale o di diritto. A seguito di questa tricotomia, il segno viene chiamato rispettivamente icona, indizio o simbolo.

Per precisare, l'esperimento si basa infatti su un doppio ragionamento; a monte per elaborare un'esperienza pertinente e a valle per la lettura dei risultati. Il suo ruolo è quello di verificare l'adeguatezza tra teoria ed esperienza al fine di creare nuovi oggetti matematici. Pertanto, la sperimentazione è un processo dialettico empirico/teorico che ha senso solo attraverso le sue articolazioni con la formulazione e la convalida (Dias, 2008; Gardes, 2018).
Come Halmos (1985), "Credo che i problemi siano il cuore della matematica", crediamo che l'esplicita considerazione dell'esperienza in matematica sia una necessità per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica durante tutto il curriculum, dalla scuola materna all'università.
Ciò si lega alla necessità di pensare e organizzare le articolazioni tra astratto e concreto nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica e va di pari passo con la tesi didattica secondo la quale il lavoro sugli oggetti, le loro proprietà e le relazioni che essi hanno giocano un ruolo centrale nel processo di concettualizzazione in matematica.

2. Risoluzione di problemi in classe: di quali problemi parliamo?

Per precisare l'ambiente didattico che proponiamo, torniamo sulla scelta dei problemi che consideriamo. Si tratta di problemi matematici con le seguenti caratteristiche (Gardes, 2013, 2018):

- Un enunciato breve che non fornisce né il metodo né la soluzione;
- Un problema che si trova in un dominio concettuale familiare agli allievi;
- Un problema che permette di implementare una dimensione sperimentale;
- La ricerca del problema mette in gioco una dialettica tra la mobilitazione di oggetti naturalizzati, l'approfondimento della conoscenza e lo sviluppo dell'euristica.

Seguendo Ghys (2010) riprendendo i termini della conferenza di Hilbert, caratterizzeremo anche i problemi in questione come robusti: “[...] un problema matematico deve essere difficile, ma non inavvicinabile, altrimenti si fa beffe dei nostri sforzi; al contrario, deve essere un vero e proprio filo conduttore attraverso i meandri del labirinto verso le verità nascoste, e premiare i nostri sforzi con la gioia che ci dà la scoperta della soluzione. ". Cominciamo illustrando questa proposizione osservando "Il problema dello strappo", di cui ecco un enunciato:

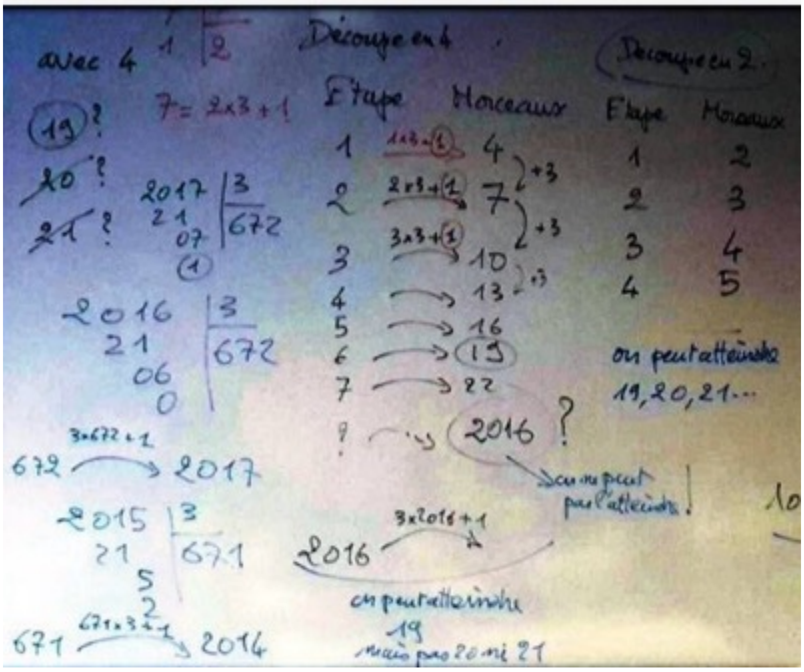
> Prendo un foglio di carta, lo strappo in 2 pezzi. Poi prendo uno dei due pezzi e lo strappo in 2. Quindi ho 3 pezzi di carta. E ripeto questo processo, prendo uno dei tre pezzi di carta e lo strappo in 2, ecc.
>
> Posso avere 19 pezzi di carta? 20 pezzi di carta? 21 pezzi di carta? 2016 pezzi di carta?
>
> Quante volte devo fare questa operazione per avere 2016 pezzi di carta?

> E strappando in 3 pezzi...
> Potrei avere 19 pezzi di carta? 20 pezzi di carta? 21 pezzi di carta? 2016 pezzi di carta?
> E strappando in 4 pezzi, 5 pezzi...

> Più in generale, quali sono i tagli che mi permetterebbero di ottenere 2016 pezzi di carta?

Dal punto di vista matematico, un numero p sarà raggiunto da n-tagli se e solo se n - 1 è un divisore di p - 1. Quindi, 2017 sarà raggiunto per n-tagli quando n - 1 è un divisore di 2016, cioè n appartiene all’insieme {2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 13; 15; 17; 19; 22; 25; 29; 33; 37; 43; 49; 57; 64; 73; 85; 97; 113; 127; 145; 169; 225; 253; 289; 337; 505; 673; 1009; 2017}.

Un primo sguardo su un'utilizzazione in classe ci permette di osservare (figura 4), un estratto dalla produzione degli alunni di categoria 4, 5 e 6:



Questo estratto mostra un'attività importante del gruppo di allievi con:

- Esperimenti basati sul numero di passaggi e sul numero di pezzi ottenuti;
- Ricerca di regolarità, ad esempio sul numero di pezzi;
- Risultati parziali: "2016?... non possiamo raggiungerlo!";
- Andata e ritorno in particolare per testare le regolarità sui nuovi casi di strappi .

Questo problema si interseca quindi con tutte le caratteristiche attese a dare vita alla dimensione sperimentale e produrre scambi (andate e ritorni) tra oggetti naturalizzati e lo sviluppo di concetti che consentono l'azione.

E i problemi del RMT? Diamo un'occhiata a un problema del 14° RMT, "Tempo di vendemmia", nella categoria 8:

> Nella vigna del signor Brunello, in un giorno di vendemmia sono stati riempiti 18 cassoni grandi e 13 cassoni medi con l'uva raccolta. Per trasportare alla cantina i cassoni pieni d'uva, il signor Brunello dispone di 3 trattori:
> - il trattore A può trasportare, a pieno carico, 3 cassoni grandi e 2 medi;
> - il trattore B può trasportare, a pieno carico, 2 cassoni grandi e 1 medio;
> - il trattore C può trasportare, a pieno carico, 1 cassone grande e 1 medio.
>
> Quel giorno, il signor Brunello ha utilizzato almeno una volta tutti i suoi trattori e sempre a pieno carico.
>
> **Quanti viaggi possono essere stati fatti dal signor Brunello con ciascun tipo di trattore per il trasporto di tutti i cassoni d'uva alla cantina?**
>
> **Descrivete tutti i possibili viaggi e spiegate come li avete trovati.**

Il problema richiede di trovare le diverse modalità per ottenere la coppia (18; 13) sommando tre tipi di coppie (3; 2), (2; 1) e (1; 1) in un contesto di trasporto di due tipi di contenitori mediante tre trasporti. Può essere ridotto allo studio di un sistema lineare di due equazioni con tre incognite intere e strettamente positive: $3x + 2y + z = 18$ e $2x + y + z = 13$. La soluzione prevede quattro terne: (4, 1, 4), (3, 2, 5), (2, 3, 6), (1, 4, 7)… e non esiste un metodo immediatamente disponibile ai livelli considerati.

Le produzioni degli allievi permettono di osservare lo sviluppo del ragionamento a supporto delle prime manipolazioni non appena si è instaurata la situazione di riferimento (l'allievo ha la possibilità di agire in un ambiente oggettivo).

In categoria 8 è possibile osservare procedure figurative con la manipolazione di carichi più o meno simbolici. Si notano manipolazioni organizzate (di oggetti sensibili? Di numeri?) e sistematizzate, nel campo moltiplicativo e additivo, con numeri interi… ma le produzioni nelle figure 5 e 6 non mostrano l'apparizione di un nuovo strumento teorico. L'ambiente consente manipolazioni, la comparsa di una situazione di riferimento con soggetti che agiscono, ma non sempre l'emergere di nuovi concetti.

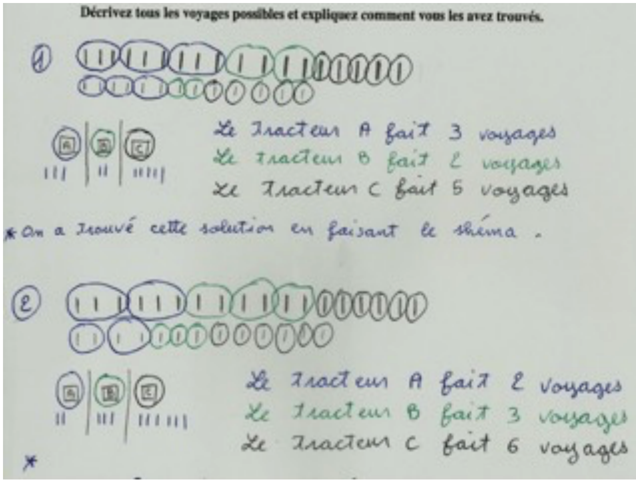


Figura 10: una procedura figurativa

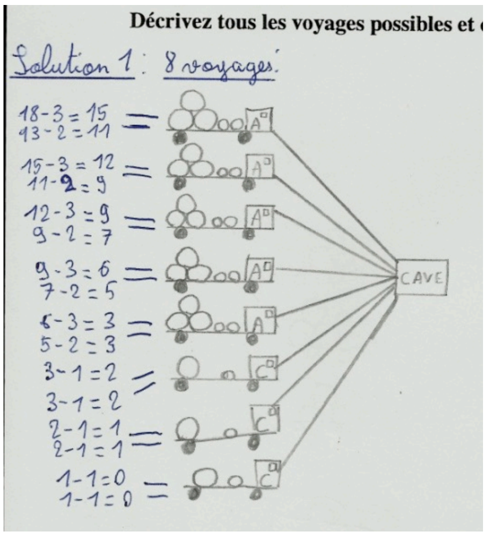


Figure 11: una procedura errata

Altre produzioni evidenziano ragionamenti più elaborati. Per questo gruppo di allievi (Figura 7), l'ambiente materiale consente:

- La mobilizzazione di conoscenze stabilizzate (operazioni in campo additivo e moltiplicativo, proporzionalità, ecc.);
- Un ragionamento per "ridurre il problema";
- La possibilità di effettuare tentativi in un ambito più limitato;
- Il raggiungimento risultati parziali;

- …

- On sait que M. Brunello à utilisé au moin une fois tout les tracteurs. Donc, on additionne les charges des tracteurs A, B et C, ce qui donne donc :

3+2+1=6

2+1+1=4

Il reste alors 6 grandes cuves et 4 moyennes cuves à transporter.

18-6=12

13-4=9

Il reste 12 grandes cuves et 9 mayennes cuves à transporter.

Méthode n° 1.

grandes cuves:	moyennes cuves :
A = 3	2
B = 2	1
C = 1	1

- je calcule les grandes cuves :

5×1+2×2+1×3 = 5+4+3=12.

12-12=0

Il a emmené toutes les grandes cuves.

- je calcule les moyennes cuves :

5×1+2×1+1×2=5+2+2=9.

9-9=0

Il a emmené toutes les moyennes cuves.

Figura 7 – Una produzione con descrizione di risultati parziali

Altre produzioni (figure 8 e 9) mettono in evidenza ragionamenti la cui validità potrà dar luogo a un dibattito.

Voyage 1 : 8×A+3×B+6×C= 19 grandes et 13 moyennes.

Voyage 2 : 3×A+2×B+5×C : 18 grandes et 13 moyennes.

Voyage 3 : 1×A+4×B+7×C = 18 grandes et 13 moyennes.

Voyage 4 : 4×A+1×B+4×C : 18 grandes et 13 moyenne.

Car A = B+C = 3 grandes et 2 moyennes.

Donc il suffit à chaque fois de rajouter un A et d'enlever 1 B et 1 C ou le contraire : enlever 1 A et rajouter un B et 1 C.

Figura 8 – Una produzione con un ragionamento da validare

Ci siamo accorti che facendo B+C = A.

Abbiamo trovato una combinazione che andava bene :

1A + 4B + 7C.

Usando la formula di prima abbiamo aggiunto una A e quindi tolto sia una B, che una C.

Ecco tutte le combinazioni possibili:

1A + 4B + 7C

2A + 3B + 6C

3A + 2B + 5C

4A + 1B + 4C

Non sono possibili altre combinazioni perché andando avanti con il metodo trovato, sparirebbe B.

Figure 9 - Una produzione con un ragionamento da validare

Queste sintetiche presentazioni di produzioni degli allievi sulla risoluzione di un problema mettono in luce una manipolazione di oggetti naturalizzati che consente, ma non sempre, l'emergere di nuove rappresentazioni, di prime formalizzazioni, la possibilità di un'azione che comincia a far parte di una nuova teoria, un'evoluzione verso un nuovo oggetto concettualizzato e le sue proprietà.

Nel successivo punto 3, dettagliamo la proposta di situazioni didattiche per la classe dopo essere tornati sulla necessaria vigilanza rispetto alle manipolazioni improduttive.

3. Situazioni di apprendimento in classe

Sono molti i gruppi di docenti e formatori che lavorano alla diffusione dei problemi della ricerca e al loro utilizzo in classe. Tuttavia, e nonostante una serie di raccomandazioni istituzionali, queste pratiche non si sono diffuse in maniera generalizzata. Il team DREAM sta inoltre portando avanti un progetto che mira a costruire situazioni di apprendimento e più in generale basate sulla ricerca di problemi che consentano di lavorare in alternanza (andate e ritorni) tra la parte sperimentale della ricerca e la costruzione strutturata.
Prima di entrare nei dettagli del progetto, ci sembra necessario tornare sul termine "manipolazione" che ritroviamo in molte proposte, ad esempio quelle che associano i verbi manipolare, verbalizzare, astrarre. Tuttavia, come abbiamo visto, la manipolazione non sempre produce l'emergere di nuovi ragionamenti e l'elaborazione di nuovi concetti. Ciò che intendiamo per "manipolazione" è una fase di azione su oggetti tangibili o simbolici. Si riferisce ai verbi di azione, ad esempio: spostare, maneggiare, toccare, sentire, operare, implementare, usare, operare, calcolare, ecc.
Ecco un esempio (figura 10) di manipolazione di oggetti tangibili (poligoni regolari di cartone) nell'ambito della ricerca del problema delle tassellature archimedee. Gli allievi cercano di costruire quante più tassellature archimedee possibili spostando, associando e posizionando i poligoni di cartone.

Figura 10: esempio di manipolazione di oggetti tangibili nel problema di pavimentazioni archimedee

E qui un esempio (figura 11) di manipolazione di oggetti simbolici (numeri interi) all'interno della ricerca del problema che strappa i fogli. Gli alunni cercano una regolarità tra i pezzi ottenuti dopo i tagli (o strappi) successivi, testando su numerosi valori numerici.

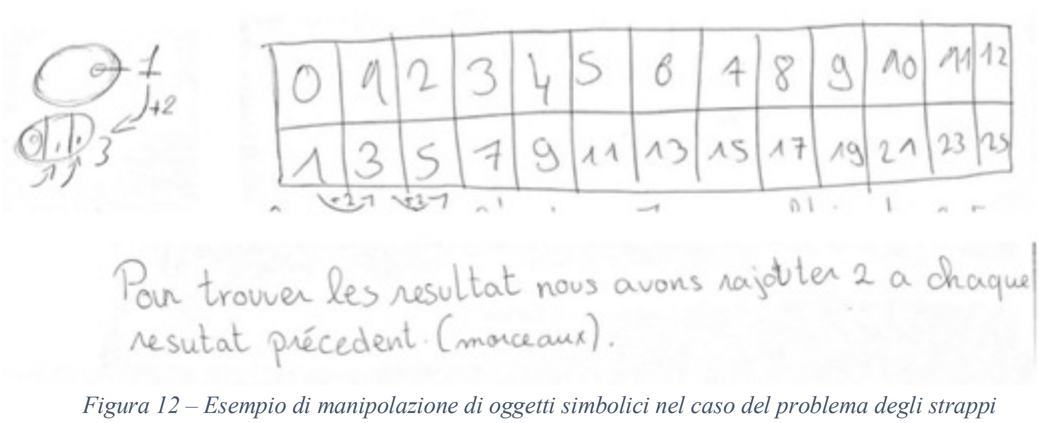
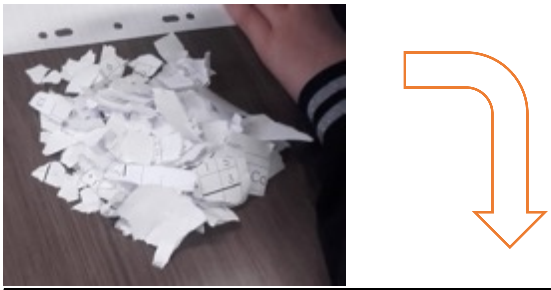


Figura 12 – Esempio di manipolazione di oggetti simbolici nel caso del problema degli strappi

I due esempi precedenti si riferiscono a manipolazioni che producono almeno risultati parziali e che possiamo a priori qualificare come attive, nel senso che c'è un'intenzionalità nelle azioni, con una ricerca di risultati. Ma è possibile vedere allievi che manipolano a lungo poligoni regolari senza mai proiettarsi nel risultato dell'azione.

Occorre quindi prendere alcune precauzioni quando si vuole descrivere un'attività orientata alla ricerca di risultati, cioè quando si vuole fare la differenza tra manipolare e sperimentare.
Questo è il motivo per cui parleremo di manipolazione passiva se non c'è intenzionalità nei confronti dell'oggetto di apprendimento previsto o della risoluzione del problema. L'azione ha quindi poche possibilità di portare all'apprendimento. E parleremo di manipolazione attiva (che si riferisce alla sperimentazione) se c'è un'intenzionalità rispetto all'oggetto di apprendimento mirato o alla risoluzione del problema. Ma attenzione, da un lato, la manipolazione passiva può essere un importante passaggio intermedio che consente di impegnarsi in una manipolazione attiva, e dall'altro, la manipolazione attiva non garantisce l'apprendimento anche se promuove l'inizio del processo (Croset e Gardes, 2022). Pertanto, ciò a cui miriamo è la dinamica manipolare-sperimentare-formulare-convalidare per promuovere la costruzione della conoscenza (Dias, 2008; Gardes, 2018; Croset & Gardes, 2022).

Torniamo ora al progetto dell'insegnamento basato sulla ricerca di problemi. L'obiettivo delle situazioni didattiche che dobbiamo costruire è quello di aiutare il passaggio graduale dalla percezione di un oggetto all'astrazione del concetto che esso rappresenta. Ed è la possibilità di sperimentare su questo oggetto che può permettere il passaggio all'astrazione. Ad esempio, nel problema degli strappi, manipolazioni di pezzi di carta permettono agli allievi di costruire gradualmente tutte le soluzioni, basate sulla nozione di divisori e poi di divisione euclidea.



Ainsi, 2017 sera atteint pour des découpes n avec $n-1$ diviseur de 2016, c'est à dire :

$$n \in \{2,3,4,5,7,8,9,10,13,15,17,19,22,25,29,33,37,43,49,57,64,73,85,97,113,127,145,169,225,253,289,337,505,673,1009,2017\}$$

Mais 2018, dont le prédécesseur 2017 est premier, ne sera atteint que par 2 et 2018 !

Dal punto di vista della Teoria delle Situazioni Didattiche (Brousseau, 1998), proponiamo quelle che chiamiamo situazioni didattiche di ricerca dei problemi (SDRP).
Queste sono situazioni (Front, 2015):

- didattiche, cioè situazioni in cui l'insegnante cerca di devolvere all'allievo una situazione a-didattica;
- di apprendimento, cioè situazioni in cui l'allievo utilizza le sue conoscenze e poi modifica il suo sistema di conoscenze, per rispondere alla situazione proposta;
- dove il progetto comune dell'insegnante e degli allievi è soprattutto l'impegno nella risoluzione del problema proposto e l'elaborazione di risultati almeno parziali, la genesi della conoscenza su nuovi oggetti matematici;
- dove la dimensione sperimentale è fortemente presente.

La mobilitazione del modello della TSD permette di rinviare:

- al confronto con gli oggetti (situazione di azione),
- ai discorsi sugli oggetti, le proprietà, le relazioni (situazione di formulazione),
- all'inserzione in una rete di conoscenze in un processo di argomentazione e di prova (situazione di validazione e istituzionalizzazione)

come possiamo trovare nella figura 12 che segue per il problema degli strappi:

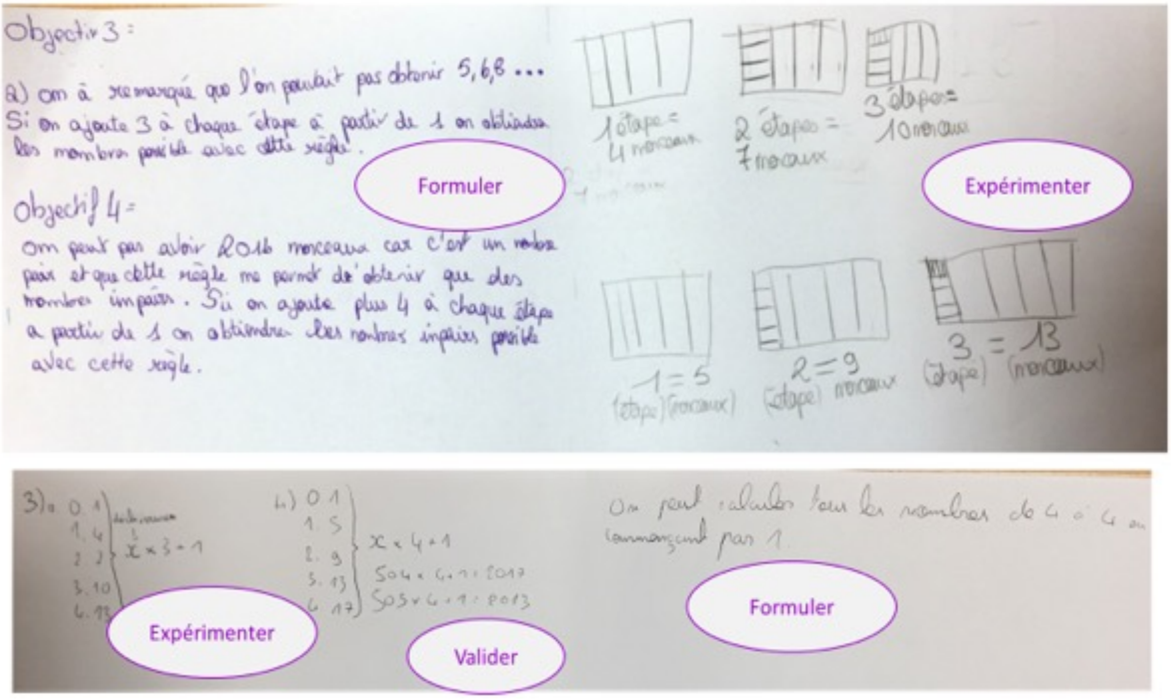


Figura 12 – Dalle situazioni di azione, formulazione e validazionenel problema degli strappi

Nell'intersecare i modelli si ottiene lo schema seguente (figura 13):

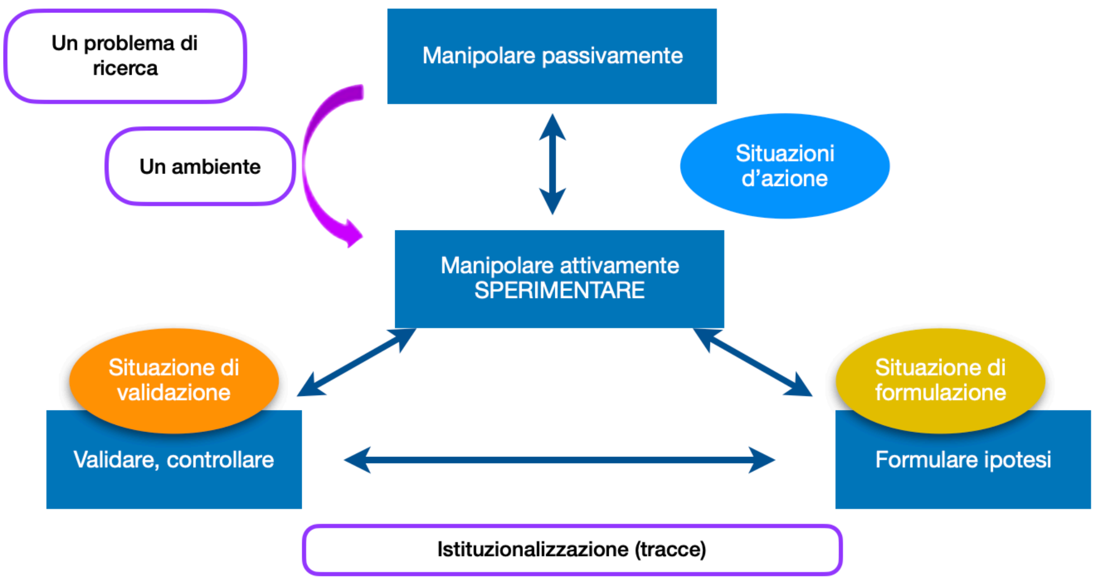


Figura 13 – Schematizzazione di una procedura manipolare-sperimentare-formulare-validare

Il passaggio dalla manipolazione passiva alla manipolazione attiva (sperimentazione) è un primo livello di astrazione per l'allievo. Deve infatti essere in grado di distaccarsi dalle sue azioni sul materiale presente nell'ambiente per anticipare l'impatto delle sue azioni. Inizia quindi un processo di apprendimento, basato sulla manipolazione attiva, la formulazione di ipotesi e la convalida di queste ipotesi (Figura 13).
Concludiamo con una proposta di organizzazione di sequenze didattiche basate sulla risoluzione di problemi.

3.1. Quale attività in classe? Organizzare una sequenza di insegnamento basato sulla ricerca di problemi.

Il gruppo DREAM ha voluto approfondire le sue ricerche sull'insegnamento e l'apprendimento basate sulla ricerca dei problemi tenendo conto della possibilità di creare un'organizzazione più globale che consenta:

- di rendere più regolare la pratica della ricerca dei problemi in classe;
- di approfondire la ricerca di un problema in classe;
- di affrontare gli elementi matematici del programma sulla base delle ricerche effettuate dagli alunni;
- di collegare la progressione di un livello dato a queste situazioni didattiche di ricerca di problemi.

Questa riflessione ha portato allo sviluppo di sequenze basate sulla ricerca di problemi con la seguente struttura (Figura 14):

- Introduzione di una situazione didattica di ricerca di problema
- Bilancio su saperi, nozioni, metodi utilizzati, ecc.
- Approfondimenti o sviluppi tecnici, per avanzare nel problema e per tutte le nozioni necessarie, dette "studi"
- Sintesi della ricerca del problema
- Tracce scritte / istituzionalizzazioni sull'insieme dei diversi saperi utilizzati

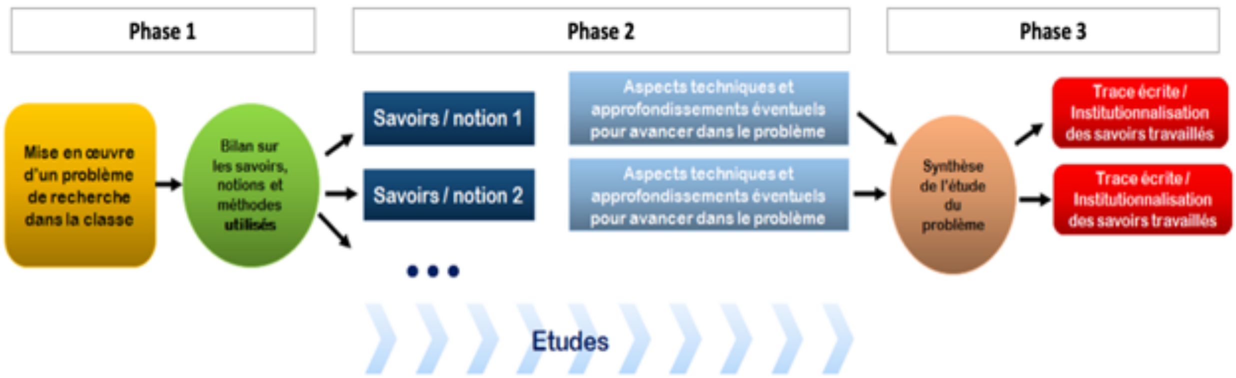


Figura 14 –Schema di una sequenza basata su una situazione didattica di ricerca di problema

Per "il problema degli strappi" e una applicazione in categoria 4, 5 o 6, bisognerebbe prevedere una ricerca del problema in due fasi: circa 45 minuti di ricerca individuale poi collettiva e 1:45 di finalizzazione della ricerca, presentazione dei risultati, dibattiti, bilancio sui saperi e le nozioni e i metodi utilizzati. Tale bilancio potrà, in una dialettica di competenze (cercare, ragionare, calcolare, rappresentare, modellare, comunicare, comunicare)/conoscenze, focalizzarsi sui multipli e i divisori dei numeri di uso corrente, sui criteri di divisibilità (2, 3, 4, 5, 9, 10), sulla risoluzione di problemi che mettono in gioco le quattro operazioni, sul significato delle operazioni, i calcoli, il calcolo letterale, gli strumenti per rappresentare un problema, le successioni, le prime equazioni diofantee. Ecco un esempio di bilancio prodotto con gli allievi (Figura 15):

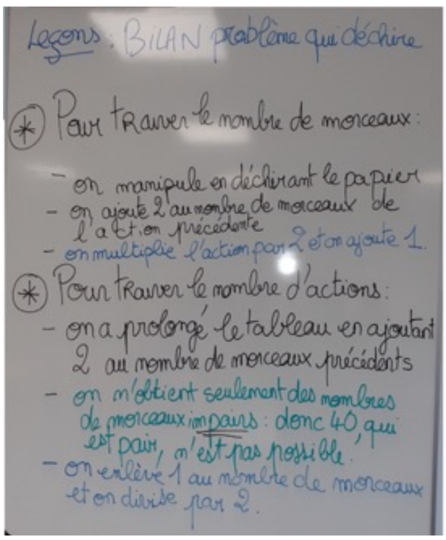


Figura 15 – Esempio di bilancio prodotto con gli allievi sul problema degli strappi

Gli studi potranno, a seconda dei livelli considerati, concentrarsi sulla nozione di parità, la scrittura di numeri pari e dispari, la nozione di divisione euclidea, le successioni, … . Ciascuno degli studi potrà svolgersi in una sessione di almeno un'ora (figura 16).
In particolare, quando gli allievi saranno condotti a rappresentare una divisione euclidea nella forma: dividendo = divisore x quoziente + resto, reinvestire il fatto che il problema degli strappi ci aveva condotto a rappresentare un numero dispari di pezzi tramite : 2 x numero intero (o numero di azione) + 1, e che per arrivare al numero dell'azione a partire dal numero di pezzi, l'ultimo gruppo aveva indicato 'togliere' 1 al numero di pezzi, poi dividere il risultato ottenuto per 2, nel verbalizzare essi stessi il fatto che si trattava della "operazione inversa".

Figura 16 – Esempio di un progetto di studio sulla divisione euclidea nel problema degli strappi

La figura 17 illustra una sintesi dello studio del problema degli strappi:

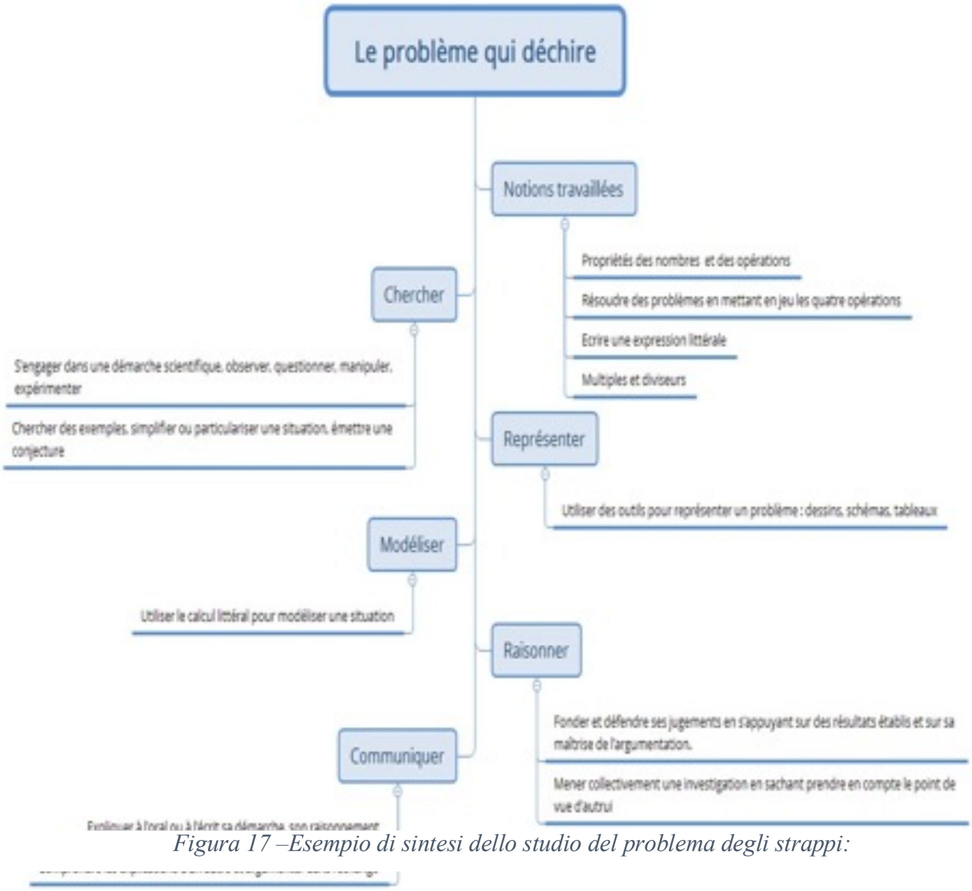


Figura 17 –Esempio di sintesi dello studio del problema degli strappi:

4. Conclusione

I lavori di natura storica, epistemologica e didattica svolti attorno alla risoluzione di problemi stabiliscono e rafforzano l'interesse per la risoluzione di problemi per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica. Le posizioni istituzionali ormai discutono sulla dimensione sperimentale della matematica e le questioni della manipolazione, della sperimentazione, del dibattito e della validazione… tutte competenze necessarie per avere una vera attività matematica e costruire conoscenze matematiche. Tutto sembra essere preso in considerazione perché la pratica di ricerca di problemi progredisca in classe, ma ciò non avverrà senza che gli insegnanti si impegnino in questo cambio di paradigma che consentirà loro di rompere con un insegnamento che essi stessi hanno ricevuto e che riproducono e che la ricerca e la formazione continuino a sviluppare le risorse messe a disposizione degli insegnanti su problemi di ricerca, situazioni didattiche di ricerca di problema, sequenze basate sulla ricerca di problemi, programmi annuali che integrino queste sequenze.

Traduzione a cura di AnnaMaria D'Andrea e Lucia Grugnetti

Bibliografia

Bkouche, R. (2008). Du caractère expérimental des mathématiques. *Repères IREM, 70*, 33- 76.
Bloch, I., & Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 31- 2*, 191-227. Grenoble : La Pensée Sauvage. hal-02525901
Bloch I., Front M., Gibel P. (sous presse). Analyse didactique des raisonnements en classe de mathématiques par l'usage d'un modèle spécifique. Exemples d'études de situations à différents niveaux de scolarité. In *Actes de la XXI^{e} école d'été de didactique des mathématiques*, octobre 2021.
Croset & Gardes (2019). *Manipuler, verbaliser, abstraire en mathématiques*. Parcours M@gistère du Plan Mathématiques.
Croset, M.-C. & Gardes, M.-L. (2022). Des leviers identifiés pour enseigner l'abstraction. *Tangente Education, 62*, 6-8.
Dias, T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. *Thèse de doctorat*, Université Claude Bernard Lyon 1.
Durand-Guerrier, V. (2006). La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique. In L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas, & A. Mercier (Eds.), *Actes des journées mathématiques de l'INRP (p. 17-23)*. INRP.
Front, M. et Legrand, P. (2010). Pavages semi-réguliers du plan. *Bulletin de l'APMEP*, *486*, 60-66.
Front, M. (2012). Pavages archimédiens du plan : une exploration favorable aux élaborations mathématiques. *Repères IREM, 89*, 5-37.
Front, M. (2015). Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan. *Thèse de doctorat*, l'Université de Lyon.
Gardes, M. (2013). Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. *Thèse de doctorat*, Université de Lyon.
Gardes, M.-L. (2018). Démarches d'investigation et recherche de problèmes. In G. Aldon, *Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux ! (pp. 73-96)*. Canopé Éditions, pp. 73-96..
Ghys, E. (2010). Les problèmes de Hilbert. *Images des Mathématiques*, CNRS.
Giusti, E. (2000). *La naissance des objets mathématiques*. Ellipses.
Gonseth, F. (1955). *La géométrie et le problème de l'espace*. Éditions du Griffon.
Halmos, P. (1985). *I want to be a mathematician: An automathography*. Springer Verlag New York.
Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x, 7*, 6-34.
Site du groupe DREAM : https://math.univ-lyon1.fr/dream/

ÉLABORER UN PROBLÈME DU RMT, UNE TÂCHE COMPLEXE !

Clara Bisso, AnnaMaria D'Andrea, François Jaquet, Angela Rizza

du Groupe de pilotage de l'ARMT (GPIL)

Introduction[1]

Cette photo est celle d'une classe au travail lors d'une épreuve du RMT, suivie de trois questions :
Que font-ils ? Pourquoi ? Comment ?

Que font-ils ?

Ils résolvent un problème du RMT. C'est-à-dire :
- qu'ils cherchent, hésitent, vérifient, constatent qu'ils ont fait fausse route,
- puis recommencent, discutent, ou même se disputent,
- puis, en cas d'accord, rédigent leur solution et la manière dont ils l'ont trouvée,
- finalement ils sont déçus de ne pas avoir trouvé la solution ou contents d'avoir terminé leur tâche, en étant plus ou moins certains que leur solution est correcte.

Mais on ne sait pas s'ils ont « construit quelque chose » en mathématiques ! On en saura un peu plus en lisant leurs copies.

Pourquoi ?

Pour atteindre (du point de vue des « gentils organisateurs ») un des buts de l'ARMT, qui est de *promouvoir la résolution de problèmes* ***pour améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques*** *par une confrontation entre classes.*
Un autre but est de ***contribuer à la formation des enseignants*** *et* ... (on en reparlera plus loin)

Comment ?

Durant les premières 50 minutes, ce sont les règles de passation de l'épreuve qui sont en vigueur, sans contrôle sur les éventuelles acquisitions.
Lorsque le problème est repris en classe les modalités changent :
Le « Comment ? » et le « Pourquoi ?» gérés par l'enseignant sont indissociables. On se situe dans un parcours d'apprentissage.
Le travail d'élaboration d'un problème doit en tenir compte :
- il ne suffit plus de préparer un « beau » problème pour le Rallye que les élèves chercheront à résoudre avec plaisir,
- il faut analyser en profondeur la tâche de résolution et les connaissances nécessaires du point de vue de ceux qui devront le résoudre : **les élèves**.

---

[1] Ce document reprend les textes des diapos de la présentation, lors de la rencontre internationale de Lyon le 25 octobre 2022, avec des modifications mineures dues au passage des diapos au texte en ligne.

- Il faut aussi envisager comment **l'enseignant** pourra l'exploiter pour sa classe.

Comment ? Dévolution de la tâche

Dans la perspective constructiviste du RMT, la tâche de résolution est confiée aux élèves, sans intervention du maître (qui a une tendance « professionnelle » à « aider » ou « expliquer » à la première perception d'une difficulté).
Lorsque nos statistiques font apparaître une majorité de « 0 point » ou « incompréhension du problème », la « dévolution » a échoué !
Ce n'est pas la faute aux élèves ! Ils ne « savent pas encore ». C'est parce que la tâche n'a pas été envisagée en fonction de leur niveau de connaissances.
C'est la raison pour laquelle cette analyse de la tâche doit se faire en résolvant soi-même le problème en se mettant dans la peau de « l'élève moyen ». La réponse où les commentaires de quelqu'un « qui sait déjà » sont des obstacles à une bonne perception de la tâche.
Pour apprendre à conduire ces analyses de la tâche, le meilleur moyen est de lire comment les élèves ont procédé pour des tâches analogues, lors de résolution d'anciens problèmes. Pas ceux qui ont obtenu « 4 points » et nous font plaisir parce qu'ils s'approchent de notre niveau, mais plutôt ceux de « 0 point » ou « 1 point ».
Ce sont eux qui nous apprennent le métier « d'élaborateur de problèmes », ce sont nos professeurs !

Comment ? Le débat entre élèves, en classe

Entre eux, les élèves sont de meilleurs « professeurs » que l'adulte.
Ils peuvent entrer en conflit, se dire « non, tu as tort », ce qu'ils ne peuvent pas dire à l'enseignant dont le rôle est « d'avoir toujours raison ».
Les conflits sont positifs car ils permettent de rejeter un savoir inapproprié et d'en construire un autre.
Par exemple, beaucoup de nos problèmes de géométrie font apparaître ce que nous appelons le « conflit aire-périmètre ». Certains le craignent et préfèrent enseigner les périmètres puis aborder les aires afin d'éviter les confusions. Mais lorsque leurs élèves résolvent un problème du RMT dont l'énoncé ne précise pas s'il s'agit de périmètre ou d'aires … !!
Nos analyses a posteriori ne nous laissent aucun doute : les deux concepts ne sont pas distingués.
Les « meilleurs » problèmes du RMT sont ceux qui permettent de résoudre des conflits de ce genre, révélés par nos analyses précédentes et/ou par une réflexion approfondie sur la tâche de résolution.

Comment ? L'institutionnalisation

Après le débat entre élèves, où l'enseignant « n'enseigne pas » et se contente de modérer, questionner, relancer, arrive le moment de la synthèse.
« Institutionnalisation » est un terme qui paraît peut-être pompeux, mais traduit bien la fonction du moment. Il faut tout le génie et la sensibilité de l'enseignant pour résumer, à l'intention et dans les langages des élèves ce qu'ils viennent d'apprendre, en relation avec leurs autres savoirs ou connaissances.
Les « élaborateurs » du problème ne peuvent évidemment pas se substituer à l'enseignant mais ils rédigent l'analyse a priori ; dans laquelle ils vont glisser des remarques d'ordre didactique, à l'intention de ceux qui vont attribuer les points dans un premier temps, puis des lecteurs des copies, en attendant les résultats des analyses a posteriori.

Les conséquences tirées de nos pratiques de plus de vingt ans.

Pour comprendre pourquoi aujourd'hui on n'écrit plus un problème comme il y a 20 ans, il faut se référer aux

- réponses données par les groupes d'élèves,
- leurs « explications »,
- les statistiques des points attribués,
- les copies conservées.

et à l'évolution permise par nos analyses a posteriori, qui entraînent

- une amélioration de nos connaissances didactiques,
- une observation de plus en plus fine des langages et représentations,
- un nouveau regard sur les « niveaux » des savoirs des élèves,
- des pistes d'exploitation didactiques entrevues.

Pour illustrer cette évolution et le travail d'élaboration qui en découlent, nous présentons quatre exemples de préparation de l'épreuve I du 30e RMT.

I. Exemple 1. La boîte de boutons

I.1. L'énoncé d'origine

La boîte de boutons (Cat. 3, 4)
Aurora a trouvé une boîte contenant 50 boutons, en forme de cœur ou carrés.
Elle décide de les répartir selon leurs couleurs et constate que :

- il y a 24 boutons blancs
- les boutons carrés sont ou blancs ou verts
- les boutons en forme de cœur sont la moitié des blancs et sont tous rouges
- les boutons blancs sont tous carrés

Combien y a-t-il de boutons verts ?
Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

I.2. La lecture du point de vue de l'élève

Voici trois copies, fictives, mais pas difficiles à imaginer quand on a analysé a posteriori des centaines de copies réelles.

1. *Il y a une boîte avec 50 boutons. On a dessiné 24 boutons blancs, puis 12 rouges parce qu'on a vu que 12 c'est la moitié de 24. Puis on les a comptés : 1, 2, 3 … 36, puis on a continué à dessiner des boutons verts en le comptant : 36, 37 … 50. Puis on a compté les verts. Il y en a 14.*
2. *On a vu qu'il y a 50 boutons en tout. Comme il y a 24 blancs, on a fait 50 – 24 = 26. Puis on a pris la moitié de 24, c'est 12 parce que 24 : 2 = 12. Puis on a fait 26 – 12 = 14. Il reste 14 boutons verts.*
3. *On sait qu'il y a 24 blancs et que les rouges sont la moitié des blancs c'est 12. Alors il faut faire 24 + 12 = 36. Puis, pour arriver à 50 il faut encore ajouter 14 boutons verts.*

La réponse est correcte dans les trois cas, et les élèves ont « montré comment ils ont trouvé leur réponse ».

I.3. Combien de points va-t-on attribuer à ces trois copies ?

Va-t-on attribuer 3 points à la première parce que les élèves ont procédé par comptage un à un, ou parce les 12 boutons rouges ne sont pas dessinée en forme de cœur ? Ou 3 points à la troisième parce que le récit ne mentionne pas la soustraction 50 – 36 = 14 ?

I.4. Analyse de la tâche de l'élève

L'exercice d'addition lacunaire (24 + 12 + ? = 50) est réussi dans les trois cas précédents, avec ou sans opérations, avec ou sans soustraction.
Mais les élèves ont-ils résolu le ***problème du RMT*** imaginé par les auteurs ?
On ne sait pas, en particulier, si la structure du contenu de la boîte de boutons a été perçue, analysée et comprise.
On ne sait pas si les trois informations : *les boutons carrés sont ou blancs ou verts* ; *les boutons en forme de cœur … sont tous rouges* ; *les boutons blancs sont tous carrés* ont été lues.
En première conclusion, la tâche de dessin, ou de comptage, ou d'addition lacunaire, ou de deux soustractions successives ne semble pas être suffisante pour attribuer le titre de « problème du RMT » à cette proposition.
Les élèves ont certes été contents de résoudre ce problème, de coopérer, d'être à peu près certains d'avoir trouvé la solution. Les moyennes des points attribués se situeront certainement entre 3 et 4.
Mais … y aura-t-il une « construction » de connaissances mathématiques ? Des exploitations didactiques futures ?

I.5. Notre réflexion sur la tâche de résolution

Nous, adultes, représentons volontiers une partition d'ensemble par un tableau.

	Blancs	Rouges	Verts	tot
Coeur	0	12	?	?
Carré	24	0	0	?
tot	**24**	12	?	**50**

Les totaux 50 et 24 sont donnés. *Les boutons en forme de cœur sont la moitié des blancs et sont tous rouges* permet de placer 12 dans la case « Rouges - Cœur » et 0 au-dessous.

La ligne « total » n'a ainsi plus qu'une case inconnue qui ne peut être que complétée que par 14. *Les boutons blancs sont tous carrés* permettrait de placer 24 dans la case « Blancs-carrés » et 0 au-dessus ; puis l*es boutons carrés sont ou blancs ou verts* justifierait un 0 dans la case « Verts-carrés ».
Ces consignes sont complexes pour de jeunes élèves, et les deux dernières inutiles pour trouver la solution.
Notre première idée a été de les simplifier, d'ajouter une information disant qu'il n'y a que trois couleurs et de poser une question nouvelle pour sensibiliser les élèves à l'existence des deux formes de boutons.

I.6. Un nouvel énoncé

La boîte de boutons (Cat. 3, 4)
Aurora a trouvé une boîte contenant 50 boutons, de trois couleurs différentes.
Certains boutons sont carrés et les autres sont en forme de cœur.
Aurora voit que :

- il y a 24 boutons blancs ;
- les boutons rouges, et seulement eux, sont en forme de cœur ;
- le nombre de boutons rouges est la moitié du nombre de boutons blancs.

Combien y a-t-il de boutons verts carrés ?
Combien y a-t-il de boutons verts en forme de cœur ? …
La première phrase mentionne qu'il y a trois couleurs, mais on pourrait dire aussi que chaque bouton est d'une seule couleur et non de deux ou trois couleurs.
La deuxième phrase modifiée suppose que ***les autres*** sont bien perçus comme le complémentaire de ***certains de ceux-ci.***.
La deuxième consigne : *les boutons rouges, et seulement eux, sont en forme de cœur* ; nous paraissait plus simple à comprendre.

I.7. Notre réflexion sur la tâche de résolution

La deuxième question ***Combien y a-t-il de boutons verts en forme de cœur ?*** Partait d'une bonne intention : comme les élèves pouvaient répondre correctement à la question sur le nombre de boutons verts du problème d'origine sans se préoccuper des formes des boutons, il fallait trouver une manière de les sensibiliser à envisager des carrés et en forme de cœur pour ces boutons verts.
Mais cette question a suscité de très vives réactions et critiques lors de la discussion au sein du GPIL élargi : demande incongrue ou inutile, puisqu'il est écrit que *les boutons rouges, et seulement eux, sont en forme de cœur,* par conséquent il n'y a pas de *boutons verts en forme de cœur***.** Elle a même été considérée comme un obstacle ou un piège !
Il a donc fallu modifier plus profondément la proposition d'origine pour assurer une prise en compte - **nécessaire** - de la partition des boutons selon les critères « couleur » et « forme », le premier avec trois valeurs, le second avec deux valeurs, déterminant six sous-ensembles.

I.8. Dernière version

La boîte de boutons (Cat. 3,4)
Aurore a trouvé une boîte qui contient 50 boutons de deux formes différentes : carrés ou en forme de cœur. Certains boutons sont rouges, certains sont verts et les autres sont blancs.
Aurora remarque que :

- il y a 24 boutons blancs ;
- il n'y a pas de boutons blancs carrés ni de boutons rouges en forme de cœur ;
- il y a le même nombre de boutons rouges carrés que de boutons verts carrés ;
- le nombre de boutons rouges est la moitié du nombre de boutons blancs.

Combien y a-t-il de boutons verts en forme de cœur ?
Montrez comment vous avec trouvé votre réponse.

I.9. La tâche de résolution

La représentation schématique de la partition des 50 boutons est modifiée en conséquence.

	Blancs	Rouges	Verts	tot
Coeur	24	0	?	?
Carré	0	12	12	24
tot	**24**	12	?	**50**

Comme *il n'y a pas de boutons blancs carrés ...* les élèves peuvent déduire, par négation, que les 24 boutons blancs sont en forme de cœur, donc 0 dans la case « carré-blancs »
Puis*…ni de boutons rouges en forme de cœur* permet de déduire, aussi par négation, que les boutons rouges sont tous carrés (12, la moitié de 24 selon la dernière donnée) donc 0 dans la case « carré-rouges ».
Puis, comme *il y a le même nombre de boutons rouges carrés que de boutons verts carrés,* il a aussi 12 boutons verts carrés.
Les nombres de boutons blanc (24) et rouges (12) étant connus, l'addition lacunaire 24 + 1 + … = 50, permet de trouver le nombre total des boutons verts (14). Il reste encore une étape : trouver les boutons verts en forme de cœur qui n'existaient pas dans les versions précédentes, par la soustraction 14 – 2 = 2, ou par l'addition lacunaire … + 12 = 14.

I.10. Résumé

Nous sommes partis d'un problème potentiellement riche : un ensemble de boutons à répartir selon deux critères par des opérations de logique, permettant de dénombrer les nombres d'objets par des addition et soustractions élémentaires.
Nos observations des procédures effectives mises en œuvre dans ce type de problème nous montrent que la majorité des élèves vont pouvoir résoudre le problème sans se soucier de la structure, par une simple addition lacunaire.
Nous avons modifié les conditions de la répartition afin qu'il ne soit plus possible d'arriver à la solution sans construire le réseau des relations entre les différentes parties de l'ensemble de boutons.
Le problème devient un peu plus « consistant », et sa résolution met en œuvre des opérations logiques importantes qui sont souvent négligées au profit de tâches algorithmiques.
Si l'on envisage le problème dans le cadre limité des 50 minutes d'une épreuve du RMT on peut s'attendre à une diminution de la « moyenne des points attribués ». Mais cette moyenne est éphémère et sera vite oubliée. C'est ce qu'on peut tirer du problème repris en classe qui nous intéresse.

I.11. Potentialités didactiques

C'est évidemment l'enseignant qui organisera le débat et exploitera les propositions des groupes.
Le schéma en tableau que nous avons utilisé pour illustrer la répartition est une construction d'adulte ; il y a d'autres représentations plus naturelles. L'important est l'apparition des six parties (piles, tas, groupes, …) que l'on peut imaginer à partir de la consigne, puis regrouper graphiquement.
La dernière version du problème favorise la prise de conscience qu'il y six sous-ensembles de boutons à envisager. Pourquoi 6 ? Et non 5 ? … La situation est ici essentiellement multiplicative, de caractère combinatoire. Si on avait donné une forme de plus, le nombre des sous-ensembles n'aurait pas augmenté de 1 mais de 3 ! Avec 7 formes et 5 couleurs on serait en présence de 35 combinaisons. Cette approche de la multiplication, différente d'une addition répétée, est à cultiver pour développer le concept de l'opération.
Puis, il y aura un débat autour des mots essentiels d'un raisonnement logico-déductif comme par exemple : *il* ***n'y a pas*** *de boutons blancs carrés* ***ni*** *de boutons rouges en forme de cœur.*
Et au niveau des opérations, le passage de l'addition lacunaire à la soustraction, les associations de termes et l'usage des parenthèses, les différentes écritures, ...
En bref, l'exploitation didactique de cette situation des boutons et du débat qui suivra entre les groupes d'élèves est potentiellement intéressante.

I.12. À retenir pour l'élaboration de nos problèmes

En résolvant ce problème du point de vue de l'élève, sans connaître la solution, nous avons constaté que la majorité des groupes pouvait « passer à côté » de la tâche intéressante et ne rien construire en mathématiques.

En cherchant à aménager la situation nous nous sommes rendu compte que, même pour nous, l'élaboration d'un problème de partition d'ensemble n'est pas évidente.
La version définitive nous semble plus consistante pour l'élève, fait appel à des règles de logique et est susceptible d'exploitations didactiques.
En conclusion, le statut de la *Boite de boutons* passe d'une *occupation* même plaisante à celui d'un *problème* qui, s'il est exploité en classe, a des potentialités didactiques intéressantes.

II. Exemple 2. Girouette de triangles

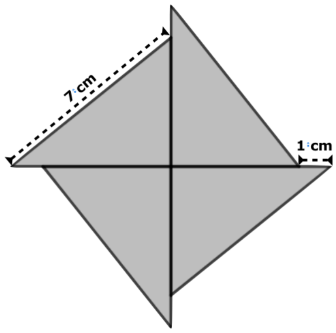
II.1. L'énoncé d'origine

Girouette de triangles (Cat. 4, 5, 6, 7)

En fouillant dans le grenier, Michelle trouve une boîte avec cette image sur le couvercle. À l'intérieur, il y a quatre triangles en bois, tous identiques.
Michelle montre la boîte à son frère David qui en un coup d'œil lui dit qu'on peut facilement trouver l'aire exacte d'un triangle.
Michèle ne trouve pas facilement et David lui suggère alors de construire un carré de 7 cm de côté en utilisant les quatre triangles.

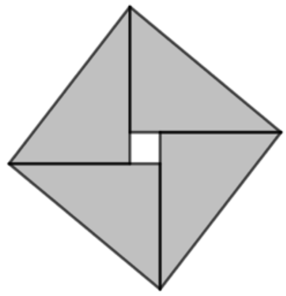
Quelle est l'aire exacte de chaque triangle ?

Montrez comment vous avez trouvé la réponse.



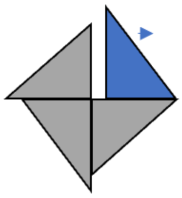
II.2. Première lecture, « voir » la figure

David est certainement très doué en puzzles.
Suivons sa suggestion de *construire un carré de 7 cm avec ces quatre figures.*
On voit bien les quatre côtés de 7 cm, mais la difficulté vient du mot « carré ».
Pour beaucoup d'élèves, comme d'adultes, le passage de la « girouette » au « carré » ne se fait pas seulement mentalement en imaginant les déplacements des pièces : par exemple, en trois translations :

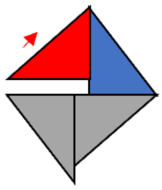


II.3. Les déplacements

Une première translation, du triangle bleu, vers la droite.

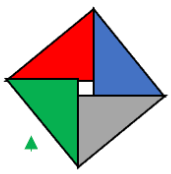


Puis une deuxième du triangle rouge vers le haut et la droite.



Et enfin une troisième du triangle vert vers le haut.

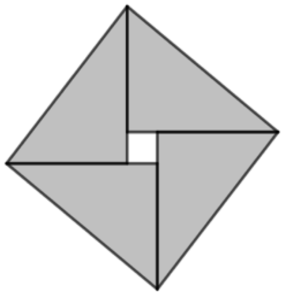
Et, surprise, la figure obtenue n'est pas vraiment un « carré », mais un « carré avec un trou ».



Certes, les élèves peuvent découper les quatre triangles de la feuille d'énoncé. Le résultat n'est cependant pas une figure géométrique, mais un collage bien imprécis à propos de la forme du trou en particulier.

II.4. La lecture du point de vue du mathématicien

Quelle belle découverte !
Il est possible de déterminer l'aire de n'importe quel triangle rectangle à partir de la mesure de son hypoténuse et de la différence entre les mesures des deux côtés de l'angle droit, sans Pythagore, sans passer par la résolution d'une équation du second degré. Le GPIL ne le savait pas !!



En cm^2, l'aire du « carré » est 49 (7^2), l'aire du trou 1, l'aire des quatre triangles 48 (49 – 1) et l'aire d'un triangle 12 (48 : 4).
Élémentaire, mon cher Watson !

Mais peut-être pas pour nos élèves ?

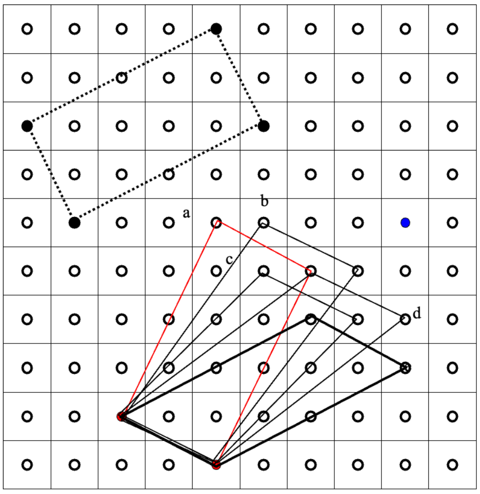
II.5. Objets et figures géométriques, nos données du RMT

Dans sa conférence à notre rencontre d'Alghero en 2019, R. Duval nous a dit que *la majorité des élèves n'entrent pas dans la manière mathématique de « VOIR » les « figures » Car ce sont la PERCEPTION et les Mesures faites qui, pour eux, déterminent CE QUE les « figures » REPRÉSENTENT, et non pas la connaissance des PROPRIÉTÉS enseignées (concepts).*
Nos expériences et observations nous avaient déjà appris déjà beaucoup de choses. Et les prochaines nous en apprendront encore !
Voir les familles de notre Banque de problèmes et quelques problèmes dont il faut tenir compte pour notre *Girouette de triangles.*

Identifier des figures - Utiliser des mesures de longueurs et aires, Rechercher ou utiliser des dimensions - Déterminer des aires et/ou périmètres
Carrés avec ou sans trou (17.I.04 ; cat. 3-4)
Trois photos sur une page (27.II.04 ; cat. 3-5);
Le carré change de forme (I) (24.F.07 ; cat. 4-5);
Les dix points (18.I.08 ; cat. 5-7)
La table à déplacer (16.F.24 ; cat. 4-5) dont voici l'énoncé de la première partie, correspondant à la figure suivante est un problème caractéristique de ces familles et des surprises qu'ils peuvent nous révéler.

Ce dessin représente le sol de la cuisine de Julie avec des petits cercles au centre de chaque carreau.
Julie a remarqué une chose étonnante : dans certaines positions, les quatre pieds de la table de cuisine recouvrent exactement quatre petits cercles du carrelage.
Julie place tout d'abord la table dans une certaine position, avec les quatre pieds qui recouvrent exactement les quatre cercles marqués en noir sur le dessin (en haut à gauche).
Julie la déplace de manière que les quatre pieds de la table recouvrent exactement quatre autres cercles. Deux de ces cercles sont marqués en rouge sur le dessin.
Marquez en rouge les deux autres cercles recouverts par les deux autres pieds de la table dans cette deuxième position.

II.6. La table à déplacer, les premières réponses



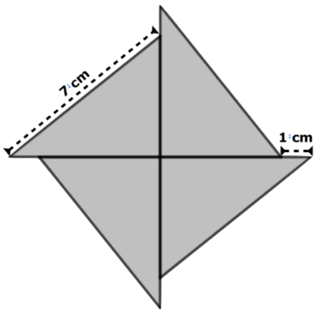
Sur 12 classes (Cat 5)
a 3; b 1; c 2; d 2; e 4

2008. Finale internationale de Brigue.
Incrédulité ! Puis confirmation jusqu'en cat. 7 !

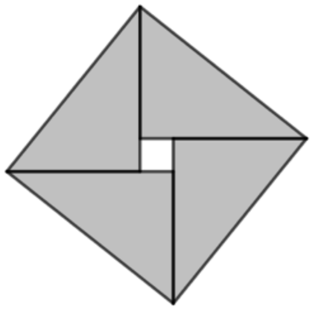
(***Le rectangle… pas si évident!*** B. Anselmo, C. Bisso, L. Grugnetti, au nom du Groupe Géométrie plane. La Gazette di Transalpie n. 1)

II.7. Notre analyse de la « vision » d'une « figure »

La figure de départ contient deux informations numériques : 7 et 1, les mesures des côtés du périmètre de la figure. La nouvelle « figure » l'assemblage des quatre triangles découpés est un carré, ou au moins un losange) de côté 7 et un trou qui semble aussi carré (selon la précision des découpages et la « stabilité » de l'assemblage) dont on ne peut déterminer le côté que par un raisonnement de géométrie déductive : il s'agit de la **différence** entre les mesures des deux côtés de l'angle droit. Cette différence est un segment (« 1D » selon Duval) qui se situe aux extrémités éloignées de l'angle droit dans la figure de départ, contigüe à l'angle droit dans la deuxième figure.



Lorsqu'on passe aux aires (2D), il faut être convaincu que l'aire de l'assemblage des quatre découpages en papier est celle de la figure de départ. Mais la « figure » de l'assemblage n'a pas le même statut que la précédente ; elle n'est pas « dessinée » et elle est constituée de deux carrés. C'est la représentation par le « dessin des deux figures » qui permet de percevoir l'égalité des parties grises ! Et l'on va retrouver une nouvelle **différence** celle des aires !



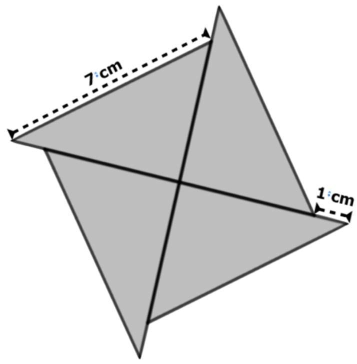
II.8. Une nouvelle version du problème ?

Nous sommes devant une problématique nouvelle, à propos de laquelle nous avons quelques données issues d'anciens problèmes, des article théoriques, et encore beaucoup de doutes.
L'idée de la transformation de la figure par une autre disposition des triangles nous paraît très intéressante et nous souhaiterions par conséquent conserver le problème.
On ne peut agir que sur le texte : le scénario de David qui propose de construire « carré » qui n'en est pas vraiment un.
On propose de conserver la tâche de « puzzle » consistant à disposer les quatre triangles rectangles égaux en une forme carrée, sans préciser la mesure du côté, qui « annule » tout l'intérêt de la recherche.
C'est le choix des catégories qui sera déterminant pour l'avenir du problème.

II.9. Nouvel énoncé (pour la consultation)

Girouette de triangles (Cat. 4, 5, 6, 7)

En fouillant dans le grenier, Michelle trouve une boîte avec cette image sur le couvercle.
À l'intérieur, il y a quatre triangles rectangles en bois, tous égaux.
Michelle apporte la boîte à son frère David qui, après un rapide coup d'œil, lui dit qu'il peut facilement trouver l'aire exacte de chacun des quatre triangles égaux.
Cela ne semble pas si facile pour Michelle, mais elle essaie de jouer avec les quatre pièces et de les disposer pour former un carré avec un trou. Elle trouve ainsi immédiatement la solution en utilisant uniquement les mesures qu'elle voit sur la figure.
Quelle est l'aire exacte de chaque triangle ?
Montrez comment vous avez trouvé la réponse.



II.10. Perspectives didactiques

Pour une exploitation en classe, le problème serait très riche.
La tâche de découpage et de formation du carré avec trou permettra de passer d'une activité de « puzzle » à celle de la construction de la figure, en vraie grandeur.
La recherche de la forme du « trou » et de ses dimensions permettra de vérifier ou encourager les raisonnements de géométrie déductive, en repérant les segments et les angles droits sur la figure dessinée.
La comparaison des deux figures avec les quatre triangles permettra de déterminer l'équivalence des parties grises.
Le passage entre les aires connues des deux carrés de la deuxième figure permettra de déterminer une « différence d'aires » liée à l'opération arithmétique de soustraction. (Nous avons constaté dans les problèmes d'aires sur quadrillage, par exemple Les sept polygones (29.I.13 ; cat. 7-8) que la prise en compte de différences d'aires est beaucoup plus difficile que les additions d'aires)
Mais à condition d'avoir proposé le problème aux catégories d'élèves capables de « voir » les carrés, les triangles, leur disposition et de percevoir leurs aires.

II.11. À retenir pour l'élaboration de nos problèmes

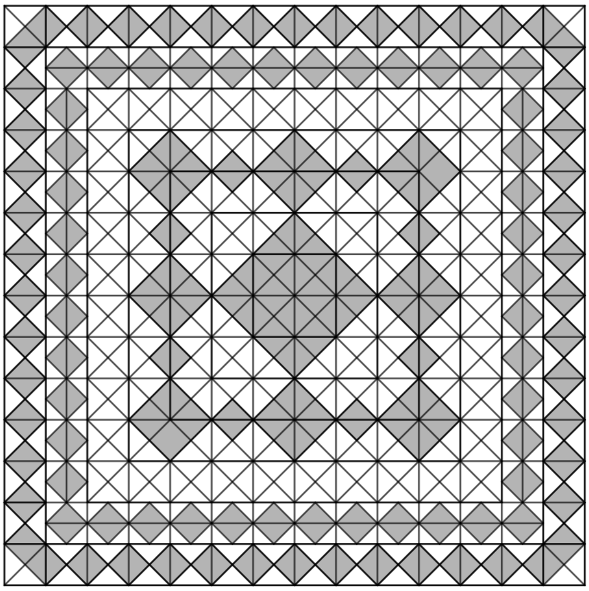
Le GPIL connaît l'étendue de son ignorance et ne prend donc pas la responsabilité du choix des catégories pour ce problème.
Ce sont les sections (dont on ne connaît pas l'étendue de leur ignorance) qui donneront leur avis :

- supprimer les catégories 4 et 5 conserver 6, 7 ?
- supprimer les catégories 4 à 6, passer à 7 à 10 ?
- expérimenter le problème dans quelques classes (en épreuve d'entraînement par exemple, à condition d'analyser les réponses et explications) pour en savoir plus et reprendre éventuellement le problème dans une prochaine édition ?

III. Exemple 3. Quatre amis et une belle mosaïque

III.1. L'énoncé d'origine

Quatre amis et une belle mosaïque (Cat. 6, 7, 8)



Quatre amis observent cette mosaïque constituée de triangles gris et blancs et comparent l'aire des triangles gris avec l'aire totale de la mosaïque.
Aldo dit : « La partie grise est la moitié de la mosaïque ».
Bice dit : « Mais non, c'est beaucoup moins, c'est seulement un tiers ».
Carla dit : « Pour moi la partie grise est les deux cinquièmes de la mosaïque ».
Dino dit : « Selon moi la partie grise est les trois huitièmes de la mosaïque ».
Trouvez exactement quelle fraction de la mosaïque représente la partie grise et ordonnez les valeurs des quatre amis, de la moins précise à la plus précise.
Donnez les détails de vos calculs.

III.2. Notre réflexion sur la tâche de résolution

Les élèves de catégories 6 à 8 n'ont pas de peine à s'approprier la tâche de comptage des parties grises.
On sait comment ils le font - comme nous, adultes, le faisons - : une à une, avec des marques sur la figure pour repérer celles qui ont été comptées ; ou par lignes, ou par quarts de la figure. … Il n'y a pas de formules, ni de méthodes « apprises ».
Il suffit d'organiser le dénombrement de manière rigoureuse pour trouver qu'il y a 304 triangles gris alors que la mosaïque en compte 784. (en carreaux du quadrillage, ces deux valeurs sont respectivement 76 et 198).
Nos problèmes du RMT nous ont fait constater que les difficultés des élèves sont liées à leur maîtrise insuffisante des fractions ou nombres rationnels qui seront indispensables pour la comparaison des quatre estimations avec la valeur exacte.
Décimaux coloriés (28.I.17 ; cat. 8-10) Le grillon sauteur (26.I.14 ; cat. 7-10) Billets de théâtre (25.I.16 ; cat. 7-10) La table de division (20.I.18 ; cat. 8-10)
L'essentiel de la tâche de résolution de *la Mosaïque* n'est pas le comptage de triangles gris, mais bien la comparaison de nombres rationnels

III.3. Les exploitations didactiques

- Traduction d'expressions littérales en écritures numériques : « moitié », « un tiers », « deux cinquièmes » et « trois huitièmes », 1/2, 1/3, 2/5, 3/8.
- Décomposition en facteurs premiers : 2 ; 3 ; 5 ; pour trouver un dénominateur commun : pour aboutir à $2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2 = 5880$.
- Comparaisons de fractions : 1/2, 1/3, 2/5, 3/8 avec 19/49.
- Passage de codes fractionnaires en codes décimaux.
- Approximations, au dixième près, au centième près …
- Conventions d'écriture et affichage de sa calculatrice.
- Opérations arithmétiques correspondant à une « fraction de … » (commutativité de la division et de la multiplication ou multiplication par un nombre non entier).
- Pourcentages …

En bref, tout ce qu'il faudrait savoir sur les opérations avec des nombres rationnels !

III.4. À retenir pour l'élaboration de nos problèmes

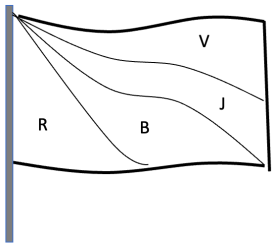
Ce sont les résultats statistiques et les analyses a posteriori des problèmes du domaine des nombres rationnels qui nous préoccupent.

Une grande majorité d'élèves ne maîtrisent ni les fractions, ni les rapports de proportionnalité.
Un constat : les élèves rencontrent des obstacles dans ce domaine, il faudrait qu'on leur propose des problèmes et, paradoxalement on ne répond pas à ce besoin.
Pour illustrer cette insuffisance il suffit d'examiner la fréquence de certains mots-clés dans nos fiches de la banque de problèmes :
« nombre rationnel » 7/1400
« nb décimal » 18/1400
« fraction » 40/1400
« proportionnalité » 70/1400
contre 137/1400 pour « nombre naturel »

IV. Exemple 4. La division du rectangle[2]

IV.I. Version d'origine

La division du rectangle (Cat. 8, 9, 10)
Le drapeau de la République de Transalpie flotte fièrement sur la tour du château du gouvernement.
Le drapeau représenté ici dessous est en effet un rectangle de 3 m sur 5 m, composé de quatre triangles de même aire, aux couleurs de la république : rouge (R), blanc (B), jaune (J) et vert (V).



Combien mesure le périmètre de chaque triangle ?
Justifiez votre procédure et donnez le détail de vos calculs ?

IV.2. La lecture du point de vue de l'adulte

L'adulte sait bien que les triangles de même aire n'ont pas nécessairement le même périmètre et le constate facilement, en particulier pour les triangles R-B e J-V.
Il sait que la condition « quatre triangles de même aire » permet de savoir que les extrémités des deux segments obliques divisent les côtés du rectangle en deux parties égales.
Il sait que le théorème de Pythagore lui donnera les mesures des segments obliques et lui permettra de calculer exactement les quatre périmètres.
Pour lui, le problème consiste à « reconstituer » les quatre parties de la « photo » du drapeau en quatre figures géométriques connues, des triangles ; dont on calcule facilement la mesure des bases, isométriques deux à deux (2,5 et 1,5 mètres) en raison de l'équivalence des aires ; puis à calculer les mesures des côtés par Pythagore et trouver les quatre périmètres par addition.

IV.3. Et l'élève ?

Nos analyses a posteriori nous montrent que

1. Les concepts d'aire et de périmètre sont parfois confondus et qu'un plus grand périmètre est souvent associé à une plus grande aire.
2. Il n'est pas nécessaire de démontrer des choses qui semblent évidentes (comme le fait que les extrémités des deux segments obliques sont les points milieux des côtés du rectangle).
3. L'habitude de prendre les mesures directement sur la figure est très répandue et quasi « naturelle » dans la vie courante, sans savoir toujours les gérer correctement en mathématiques.

---

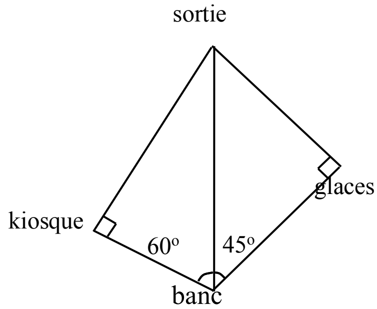
[2] Voir aussi l'article *Le chemin difficile des problèmes de « géométrie plane »* dans ce même numéro de la Gazette.

IV.4. Un exemple d'une épreuve précédente

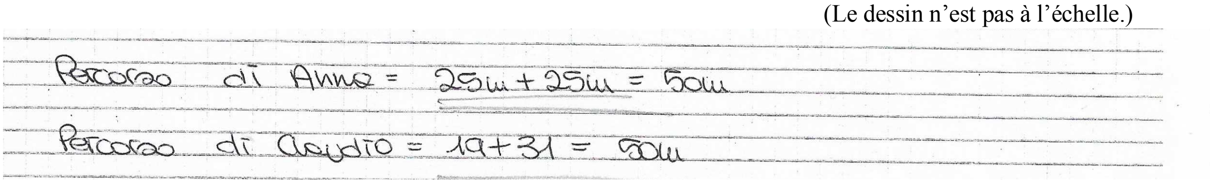
18. Promenade dans le parc (Cat. 9, 10)

Cette figure représente les sentiers d'un parc.
La distance en ligne droite du banc à la sortie est de 200 mètres.
Anne et Claudio sont sur le banc et vont quitter le parc.
Pour arriver à la sortie, Anne veut passer s'acheter une glace alors que Claudio veut prendre un journal au kiosque.

Les parcours d'Anne et de Claudio seront-ils de la même longueur ?
Justifiez votre réponse.



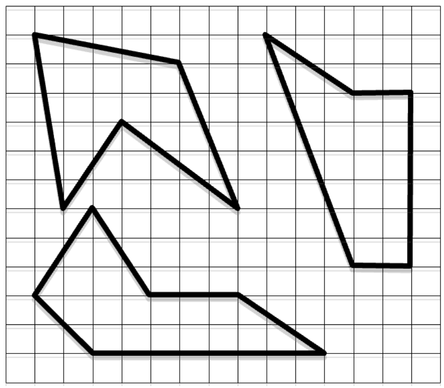
(Le dessin n'est pas à l'échelle.)



Dans cette copie de cat.10 du problème 18.I.18, les élèves ont noté les mesures prises à la règle sur la figure, en millimètres ; ils les ont simplement reportées en mètres, sans réfléchir au fait que le résultat est incompatible avec la longueur (200 m) de l'hypoténuse prévue par le texte …

IV.5. Un autre exemple

L'exemple précédent n'est pas unique, on le retrouve aussi dans tous les problèmes où un quadrillage est à disposition.
Ici dans le problème Comparaison de figures (26.I.122, cat. 6, 7, 8) où de très nombreux élèves recourent aux mesures prises à la règle plutôt qu'aux unités de longueur et d'aire offertes par le quadrillage



IV.6. Digressions sur les mesures de longueurs

La mesure des longueurs est liée au choix d'une unité et aux moyens de l'exprimer par un nombre. L'enfant apprend à utiliser une unité (pas, baguettes, segments) qu'il reporte sur l'objet à mesurer, puis qu'il compte un à un. La règle graduée est l'instrument qui lui permet d'éviter le comptage et de lire directement une marque de la graduation : résultat du comptage, c'est à-dire un nombre naturel.
Lorsque l'objet à mesurer ne se trouve pas sur un trait de la graduation, la situation devient gênante pour l'enfant qui aurait tendance à déplacer l'objet ou la règle, mais qui doit admettre qu'il faut passer du nombre naturel à « quelque chose » entre deux graduations ou entre deux nombres naturels. On arrive ainsi aux nombres décimaux, puis à la notion d'intervalle, puis à l'approximation indispensable lorsque l'instrument ne permet plus de décider de la mesure exacte.
L'obstacle constitué par les approximations est énorme, il fait appel aux concepts de nombres rationnels, réels, à la continuité, aux probabilités. Il ne faut donc pas s'étonner qu'il ne soit pas surmonté avant … la faculté de mathématiques à l'Université !

IV.7. Notre discussion

Quelles connaissances mathématiques les élèves peuvent-ils construire lorsqu'ils prennent des mesures directement sur un dessin, même s'ils le font correctement ?
En acceptant cette procédure, le problème devient un simple *exercice* de dessin pour des élèves dès la catégorie 5 :

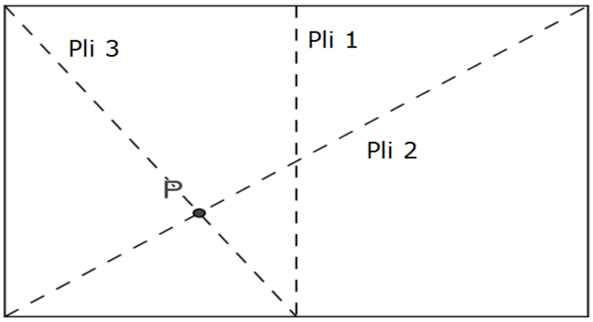
Dessinez un rectangle de 3 cm sur 5 cm, une de ses diagonale et deux autres segments à partir d'un sommet aboutissant aux milieux des côtés opposés (voir figure). Mesurez les périmètres des quatre triangles.
Mais surtout quel serait le but de cet *exercice* ?
Et comment pourrait-on attribuer 3 ou 4 points aux groupes qui auraient donné une réponse correcte et justifiée soit de *l'exercice* soit du *problème ?*

IV.8. « Interdire » ou convaincre ?

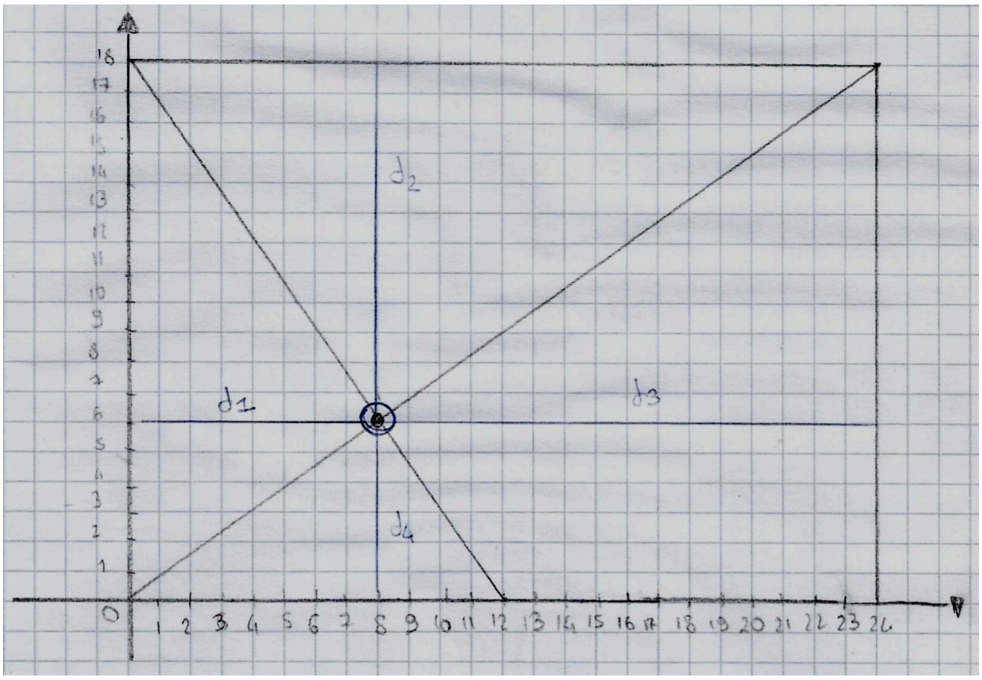
Dans le passé, on a choisi « d'interdire » les procédures basées sur des mesures directes, par exemple dans le problème Pliages (ral. 27.I.20 ; cat. 10), dont la moyenne des points est seulement 0,85 sur 4.
La figure ci-dessous représente une feuille rectangulaire, dont les côtés mesurent 18 cm et 24 cm, pliée et dépliée trois fois :

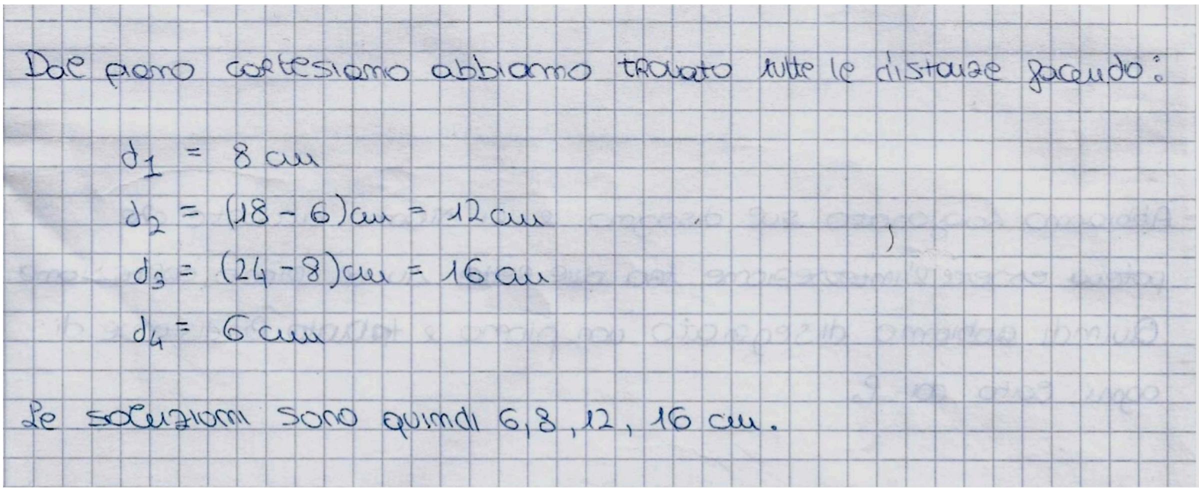
- une première fois en amenant les deux côtés de 18 cm l'un sur l'autre ;
- une deuxième fois par un pli suivant une diagonale du rectangle ;
- une troisième fois par un pli passant par un sommet et l'intersection du côté opposé et du premier pli.

Le point P est l'intersection du deuxième et du troisième pli.
Calculez la distance de P à chacun des quatre côtés de la feuille, mais sans prendre de mesures sur cette figure ou sur un autre dessin à l'échelle.
Justifiez votre réponse.



IV.9. Comment les élèves « contourneront » l'interdiction




Dal piano cartesiano abbiamo trovato tutte le distanze facendo:

$d_1 = 8$ cm

$d_2 = (18 - 6)$ cm $= 12$ cm

$d_3 = (24 - 8)$ cm $= 16$ cm

$d_4 = 6$ cm

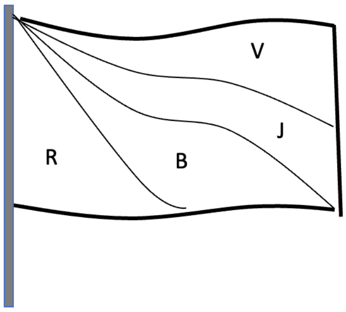
Le soluzioni sono quindi 6, 8, 12, 16 cm.

sur feuille quadrillée, dessin d'un rectangle de 18 x 24 *Nous avons trouvé les distances $d_1 = 8$ cm, $d_2 = (1 \; - 6)$ cm $= 12$ cm, $d_3 = (24 - 8)$ cm $= 16$ cm $d_4 = 6$ cm.*
Les solutions sont donc 6, 8, 12, 16 cm

IV.10. « Interdire » ou convaincre ? Nouvel énoncé

Le partage du rectangle (Cat. 8, 9, 10)

Le drapeau de la République de Transalpie flotte fièrement sur la tour du château du gouvernement.
Le drapeau représenté ici dessous est en effet un rectangle de 3 m sur 5 m, composé de quatre triangles de même aire, aux couleurs de la république : rouge (R), blanc (B), jaune (J) et vert (V).



Anna dit : « D'après moi, les quatre triangles ont le même périmètre ».
Marco dit : « Non, tous les périmètres sont différents. Sans dessins ni instruments de mesure, je peux les calculer et te dire quel est le plus grand ».
Indiquez quel triangle a le plus grand périmètre et calculez-le.
Justifiez votre démarche (selon la méthode de Marco) **et donnez le détail de vos calculs.**

IV.11. À retenir pour l'élaboration de nos problèmes

Plutôt que d'utiliser la formule restrictive du problème *Pliages* présenté précédemment : *mais sans prendre de mesures sur cette figure ou sur un autre dessin à l'échelle*, nous avons imaginé un dialogue et un défi d'un des personnages : *sans dessins ni instruments de mesure, je peux les calculer et te dire quel est le plus grand* .
C'est in vieux truc dont il ne faut pas abuser, mais bien utile pour ce problème
Il nous semble que cette formulation renverse positivement la perspective, suggère et valorise l'outil mathématique comme plus fiable et plus sûr que la prise de mesure à la règle.
La consultation des sections dira s'il faudra attribuer 0 ou 1 point aux groupes qui seront arrivés à une solution correcte sans avoir tenu compte de la suggestion de relever le défi de Marco.

V. Un travail de longue haleine

Quatre exemples ne suffisent pas mais donnent déjà les caractéristiques actuelles de l'évolution de l'élaboration de nos problèmes :

- Ce sont les élèves qui nous disent où ils en sont dans la construction de leurs connaissances et nous ne pouvons le savoir qu'en les écoutant- c'est-à-dire en lisant leurs copies, puis en assistant à leurs débats (pour ceux qui ont la chance de pouvoir les organiser). *La table à déplacer ... pour l'exemple. 2; Pliages ... pour l'exemple 4* ; et pour des centaines d'autres.
- Nous avons encore beaucoup à apprendre en didactique des mathématiques et c'est en continuant à travailler en coopération que nous pouvons espérer améliorer nos connaissances. Nos doutes pour *l'exemple 2* le montrent bien.
- La souhait *d'amélioration de l'enseignement et de la formation des enseignants* qui nous conduit au « pourquoi » élaborer des problèmes qui sont d'une part utiles pour les élèves et ne servent pas seulement à les *occuper* et d'autre part exploitables d'un point de vue didactique par les enseignants. Les *quatre exemples* l'affirment.

L'édifice actuel des mathématiques s'est construit sur des milliers d'années, il nous offre des formules, des algorithmes, des théorèmes, …
Mais pour l'enseignement ces résultats ne sont pas transmissibles directement à l'élève, ou « importables ».
Celui-ci doit accomplir un long travail de construction, organisé par l'enseignant, pour pouvoir se servir des outils mathématiques qu'il est capable d'utiliser et de maîtriser avec ses propres limites intellectuelles.
L'ARMT cherche modestement, mais avec ténacité, à aider l'élève et l'enseignant dans cette entreprise de reconstruction, en coopération, sachant que certains en savent plus que d'autres et que chacun peut progresser.
Dans ce processus, il faut éviter les illusions à tous les niveaux : les problèmes n'ont aucun pouvoir miraculeux ; nos réflexions et nos données recueillies n'apportent pas de solution aux problèmes de l'enseignement des mathématiques si elles ne sont pas partagées et reproduites.
Le GPIL a mentionné l'étendue de son ignorance. Ce n'est pas un simple jeu de mots d'origine socratique. Il propose, au lieu de transmettre, de chercher à élaborer ensemble des problèmes tenant compte des besoins et compétences de chacun.

ELABORARE UN PROBLEMA DEL RMT, UN COMPITO COMPLESSO!

Clara Bisso, AnnaMaria D'Andrea, François Jaquet, Angela Rizza

del gruppo di pilotaggio dell'ARMT (GPIL)

Introduzione[1]

Questa è la foto di una classe al lavoro durante una prova del RMT, seguita da tre domande:
Che cosa fanno? Perché? Come?

Che cosa fanno?

Risolvono un problema del RMT. Vale a dire:
- ricercano, esitano, verificano, constatano che hanno sbagliato strada,
- poi ricominciano, discutono, o addirittura litigano,
- poi, se d'accordo, redigono la loro soluzione e come l'hanno trovata,
- infine, sono delusi per non aver trovato la soluzione o felici d'aver portato a termine il loro compito, essendo più o meno certi che la loro soluzione sia corretta.

Ma non sappiamo se abbiano "costruito qualcosa" in matematica! Ne sapremo un po' di più leggendo i loro elaborati.

Perché?

Per raggiungere (dal punto di vista dei "*gentili organizzatori*") uno degli scopi dell'ARMT, che è *promuovere la risoluzione dei problemi* ***per migliorare l'apprendimento e l'insegnamento della matematica*** *attraverso un confronto fra classi.*
Un altro scopo è ***contribuire alla formazione degli insegnanti*** *e …* (ne riparleremo più avanti)

Come?

Durante i primi 50 minuti, sono in vigore le regole di somministrazione della prova, senza controllo sulle eventuali acquisizioni.
Quando il problema viene ripreso in classe le modalità cambiano.
I "Come?" e i "Perché?" gestiti dall'insegnante sono inscindibili. Ci si situa in un *percorso d'apprendimento*.
Il lavoro d'elaborazione di un problema deve tenerne conto:
- non basta più preparare un "bel" problema per il Rally che gli allievi cercheranno di risolvere con piacere,
- bisogna analizzare in profondità il compito di risoluzione e le conoscenze necessarie dal punto di vista di coloro che dovranno risolverlo, **gli allievi**;

[1] Questo documento riprende i testi delle diapositive della conferenza, nell'ambito dell'incontro internazionale di Lione del 25 ottobre 2022, con modifiche minori dovute al passaggio dalle diapositive al testo in word.

- occorre anche considerare come **l'insegnante** potrà utilizzarlo per la sua classe.

Come? Devoluzione del compito

Nella prospettiva costruttivista del RMT, il compito di risoluzione è affidato agli allievi, senza l'intervento del docente (che ha una tendenza "professionale" ad "aiutare" o "spiegare" alla prima percezione di una difficoltà).
Quando le nostre statistiche mostrano una maggioranza di "0 punti" o "incomprensione del problema", la "devoluzione" ha fallito!
Non è colpa degli allievi! Loro "non sanno ancora". È perché il compito non è stato progettato in base al loro livello di conoscenza. Ecco la ragione per cui l'analisi del compito va fatta risolvendo da soli il problema e mettendosi nei panni dell'"allievo medio". La risposta o i commenti di qualcuno "che già sa" sono ostacoli a una buona percezione del compito.
Per imparare come condurre queste analisi del compito, il miglior modo è *leggere come gli allievi hanno proceduto per compiti analoghi*, durante la risoluzione di vecchi problemi. Non quelli che hanno ottenuto "4 punti" e ci fanno piacere perché si avvicinano al nostro livello, ma quelli con "0 punti" o "1 punto".
Sono loro che ci insegnano il mestiere "di elaboratori di problemi", sono loro i nostri insegnanti!

Come? La discussione fra allievi, in classe

Tra di loro, gli allievi sono "insegnanti" migliori dell'adulto.
Possono entrare in conflitto, dirsi "no, tu hai torto", cosa che non possono dire all'insegnante il cui ruolo è "di avere sempre ragione".
I conflitti sono positivi poiché permettono di rifiutare un sapere inappropriato e di costruirne un altro.
Per esempio, molti dei nostri problemi di geometria fanno emergere quello che chiamiamo "conflitto area-perimetro". Alcuni lo temono e preferiscono insegnare i perimetri poi affrontare le aree al fine di evitare le confusioni. Ma quando i loro allievi risolvono un problema del RMT nel quale l'enunciato non precisa se si tratti di perimetro o di area … !!
Le nostre analisi a posteriori non ci lasciano alcun dubbio: i due concetti non vengono distinti.

I "migliori" problemi del RMT sono quelli che permettono di risolvere conflitti di questo genere, rivelati dalle nostre analisi precedenti e/o da una riflessione approfondita sul compito di risoluzione.

Come? L'istituzionalizzazione

Dopo la discussione fra gli allievi, dove l'insegnante "non insegna" e si accontenta di moderare, chiedere, rilanciare arriva il momento della sintesi.
"Istituzionalizzazione" è un termine che sembra forse pomposo, ma traduce bene la funzione del momento. Ci vuole tutto il genio e la sensibilità dell'insegnante per riassumere, negli intendimenti e nel linguaggio degli allievi ciò che hanno appena appreso, in relazione con gli altri loro saperi o conoscenze.
Gli "elaboratori" del problema ovviamente non possono sostituirsi all'insegnante ma redigono l'analisi a priori; nella quale inseriscono delle osservazioni di natura didattica, destinate a coloro che inizialmente attribuiranno i punteggi, poi ai loro lettori in attesa dei risultati delle analisi a posteriori.

Le conseguenze tratte dalle nostre pratiche più che ventennali

Per capire perché oggi non si redige più un problema come vent'anni fa, dobbiamo fare riferimento
- alle risposte date dai gruppi di allievi,
- alle loro "spiegazioni",
- alle statistiche dei punteggi attribuiti,
- agli elaborati conservati.

e all'evoluzione tramite le nostre analisi a posteriori, le quali consentono
- un miglioramento delle nostre conoscenze didattiche,
- un'osservazione sempre più dettagliata dei linguaggi e delle rappresentazioni,
- un nuovo sguardo sui "livelli" dei saperi degli allievi,
- piste di utilizzazioni didattiche "intraviste".

Per illustrare questa evoluzione e il conseguente lavoro di elaborazione, presentiamo quattro esempi di preparazione della prova I del 30º RMT

I. Esempio 1. La scatola di bottoni

I.1. l'enunciato originale

La scatola di bottoni (Cat. 3, 4)
Aurora ha trovato una scatola contenente 50 bottoni, a forma di cuore o quadrati.
Decide di suddividerli in base al colore e si rende conto che:

- i bottoni bianchi sono 24
- i bottoni quadrati sono o bianchi o verdi
- i bottoni a forma di cuore sono la metà dei bianchi e sono tutti rossi
- i bottoni bianchi sono tutti quadrati

Quanti sono i bottoni verdi?
Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

I.2. La lettura dal punto di vista dell'allievo

Ecco tre elaborati, fittizi, ma non difficili da immaginare dopo aver analizzato a posteriori centinaia di elaborati reali.

1. *C'è una scatola con 50 bottoni. Abbiamo disegnato 24 bottoni bianchi, poi 12 rossi perché abbiamo visto che 12 è la metà di 24. Poi li abbiamo contati: 1, 2, 3, ..., 36, poi abbiamo continuato a disegnare bottoni verdi contandoli: 36, 37, ..., 50. Poi abbiamo contato i verdi. Ce ne sono 14.*
2. *Abbiamo visto che ci sono 50 bottoni in tutto. Dato che ci sono 24 bianchi, abbiamo fatto 50 – 24 = 26. Poi abbiamo preso metà di 24, cioè 12 perché 24 : 2 = 12. Poi abbiamo fatto 26 – 12 = 14. Sono rimasti 14 bottoni verdi.*
3. *Sappiamo che ci sono 24 bianchi e che i rossi sono la metà dei bianchi, cioè 12. Quindi dobbiamo fare 24 + 12 = 36. Quindi, per arrivare a 50, dobbiamo ancora aggiungere 14 bottoni verdi.*

La risposta è corretta in tutti e tre i casi e gli allievi hanno "mostrato come hanno trovato la loro risposta".

I.3. Quanti punti verranno attribuiti a questi tre elaborati?

Si assegneranno 3 punti al primo perché gli allievi hanno proceduto contando uno a uno, o perché i 12 bottoni rossi non sono disegnati a forma di cuore? Oppure 3 punti al terzo perché la descrizione non menziona la sottrazione 50 – 36 = 14?

1.4. Analisi del compito dell'allievo

L'esercizio di addizione lacunare (24 + 12 + ? = 50) ha avuto successo nei tre casi precedenti, con o senza operazioni, con o senza sottrazione.
Ma gli allievi hanno risolto il **problema RMT** immaginato dagli autori?
Non è noto, in particolare, se la struttura del contenuto della scatola dei bottoni sia stata percepita, analizzata e capita. Non è chiaro se le tre informazioni: ***i bottoni quadrati sono bianchi o verdi***; ***i bottoni a forma di cuore...sono tutti rossi; i bottoni bianchi sono tutti i quadrati*** siano stati letti.
Come prima conclusione, il compito di disegnare, o contare, o l'addizione lacunare, o due sottrazioni successive non sembra essere sufficiente per attribuire il titolo di "problema RMT" a questa proposta.
Gli allievi sono stati sicuramente felici di risolvere questo problema, di collaborare, di essere quasi certi di aver trovato la soluzione. La media dei punti assegnati sarà sicuramente compresa tra 3 e 4.
Ma... ci sarà una "costruzione" della conoscenza matematica? Future indicazioni didattiche?

I.5. Nostra riflessione sul compito di risoluzione

Noi, adulti, rappresentiamo volentieri una partizione attraverso una tabella

	Bianchi	Rossi	verdi	tot
Cuore	0	12	?	?
Quadrato	24	0	0	?
tot	**24**	12	?	**50**

I totali 50 e 24 sono dati. ***I bottoni a forma di cuore sono la metà dei bianchi e sono tutti rossi*** permette di sistemare 12 nella casella "Rossi – Cuore" e 0 al di sotto.

La riga "totale" ha solo una casella sconosciuta che può essere completata solo con 14.
I bottoni bianchi sono tutti quadrati permetterà di sistemare 24 nella casella "Bianchi-quadrati" e 0 al di sopra; poi **i *bottoni quadrati sono o bianchi o verdi*** giustificherà uno 0 nella casella "verdi-quadrati".
Queste consegne sono complesse per giovani allievi e le ultime due inutili per trovare la soluzione.
La nostra prima idea è stata di semplificarle, di aggiungere un'informazione dicendo che ci sono solo tre colori e di porre una nuova domanda per sensibilizzare gli allievi riguardo all'esistenza delle due forme di bottoni.

I.6. Un nuovo enunciato

La scatola di bottoni (Cat. 3, 4)
Aurora ha trovato una scatola contenente 50 bottoni, di tre colori diversi.
Alcuni sono quadrati e gli altri sono a forma di cuore.
Aurora vede che:

- ci sono 24 bottoni bianchi;
- i bottoni rossi, e soltanto loro, sono a forma di cuore;
- il numero dei bottoni rossi è la metà del numero dei bottoni bianchi.

Quanti sono i bottoni verdi quadrati?
Quanti sono i bottoni verdi a forma di cuore? …

La prima frase dice che ci sono tre colori, ma si potrebbe anche dire che ogni bottone è di un solo colore e non di due o tre colori.
La seconda frase modificata suppone che **gli altri** siano chiaramente percepiti come il complementare di **alcuni di questi**.
La seconda consegna: *i bottoni rossi, e solo loro, sono a forma di cuore,* ci sembrava più semplice da capire.

I.7. Nostra riflessione sul compito di risoluzione

La seconda domanda ***Quanti bottoni verdi a forma di cuore ci sono?*** Partiva da una buona intenzione: poiché gli allievi potevano rispondere correttamente alla domanda sul numero dei bottoni verdi del problema originale, senza preoccuparsi della forma dei bottoni, occorreva trovare un modo per sensibilizzarli a considerare le forme quadrata e a cuore per questi bottoni verdi.
Ma questa domanda ha suscitato vivaci reazioni e critiche durante la discussione in seno al GPIL allargato: domanda incongrua o inutile, poiché c'è scritto che i *bottoni rossi, e solo loro, sono a forma di cuore,* di conseguenza non ci sono *bottoni verdi a forma di cuore***.** È stata anche considerata come un ostacolo o un tranello! Abbiamo quindi dovuto modificare più profondamente la proposta originaria per assicurare la presa in considerazione - **necessaria** - della partizione dei bottoni secondo i criteri "colore" e "forma", il primo con tre valori, il secondo con due valori, determinanti sei sottoinsiemi.

I.8. Ultima versione

La scatola di bottoni (Cat. 3,4)
Aurora ha trovato una scatola contenente 50 bottoni di due forme diverse: quadrati o a forma di cuore.
Alcuni bottoni sono rossi, alcuni sono verdi e gli altri sono bianchi.
Aurora osserva che:

- ci sono 24 bottoni bianchi;
- non ci sono bottoni bianchi quadrati né bottoni rossi a forma di cuore;
- i bottoni rossi quadrati sono tanti quanti i bottoni verdi quadrati;
- il numero dei bottoni rossi è la metà del numero di bottoni bianchi.

Quanti sono i bottoni verdi a forma di cuore?
Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

I.9. Il compito di risoluzione

La rappresentazione schematica della partizione dei 50 bottoni è modificata di conseguenza.

	Bianchi	Rossi	verdi	tot
Cuore	24	0	?	?
Quadrato	0	12	12	24
tot	**24**	12	?	**50**

Dal momento che *non ci sono bottoni bianchi quadrati…* gli allievi possono dedurre, per negazione, che i 24 bottoni bianchi sono a forma di cuore quindi 0 nella casella "quadrati-bianchi"
Poi…*né bottoni rossi a forma di cuore* permette di dedurre, ancora per negazione, che i bottoni rossi sono tutti quadrati (12, metà di 24 secondo l'ultima informazione) quindi 0 nella casella "quadrato-rosso".
Poi, *siccome i bottoni rossi quadrati sono tanti quanti i bottoni verdi quadrati,* ci sono anche 12 bottoni verdi quadrati.
Conoscendo il numero dei bottoni bianchi (24) e rossi (12), l'addizione lacunare 24 + 12 + … = 50, permette di trovare il numero totale dei bottoni verdi (14). C'è ancora un altro passaggio: trovare i bottoni verdi a forma di cuore, che non esistevano nelle versioni precedenti, per sottrazione 14 – 2 = 2, o per addizione lacunare … + 12 = 14.

I.10. Riepilogo

Siamo partiti da un problema potenzialmente ricco: un insieme di bottoni da ripartire secondo due criteri mediante operazioni di logica, che consentono di contare i numeri di oggetti per addizione e sottrazione elementare.
Le nostre osservazioni delle procedure effettive utilizzate in questo tipo di problema ci mostrano che la maggior parte degli allievi sarà in grado di risolvere il problema senza preoccuparsi della struttura, con una semplice addizione lacunare.
Abbiamo modificato le condizioni della ripartizione in modo che non sia più possibile arrivare alla soluzione senza costruire la rete di relazioni tra le diverse parti dell'insieme dei bottoni.
Il problema diventa un po' più "consistente", e la sua risoluzione fa entrare in gioco importanti operazioni logiche che spesso vengono trascurate a favore di compiti algoritmici.
Se consideriamo il problema nell'ambito limitato dei 50 minuti di una prova del RMT, possiamo aspettarci una diminuzione della "media dei punti assegnati". Ma questa media è effimera e sarà presto dimenticata. Quello che ci interessa è ciò che possiamo trarre dal problema quando verrà ripreso in classe.

I.11. Potenzialità didattiche

Sarà ovviamente l'insegnante che organizzerà il dibattito e utilizzerà appieno e valorizzerà le proposte dei gruppi.
La tabella che abbiamo utilizzato per illustrare la ripartizione è una costruzione da adulti; ci sono altre rappresentazioni più naturali. L'importante è la comparsa delle sei parti (pile, mucchi, gruppi, …) che si possono immaginare a partire dalle consegne, poi raggruppare graficamente.
L'ultima versione del problema promuove la consapevolezza che ci sono sei sottoinsiemi di bottoni da considerare. Perché 6? E non 5? … La situazione qui è essenzialmente moltiplicativa, di carattere combinatorio. Se avessimo dato una forma in più, il numero di sottoinsiemi non sarebbe aumentato di 1 ma di 3! Con 7 forme e 5 colori saremmo in presenza di 35 combinazioni. Questo approccio alla moltiplicazione, diverso dall'addizione ripetuta, è da coltivare per sviluppare il concetto dell'operazione.
Poi, ci sarà una discussione intorno ai termini essenziali di un ragionamento logico-deduttivo come per esempio: **non ci sono** bottoni bianchi quadrati **né** bottoni rossi a forma di cuore;
E a livello di operazioni, il passaggio dall'addizione lacunare alla sottrazione, le associazioni di termini e l'uso delle parentesi, le diverse scritture, ...
Insomma, l'uso didattico di questa situazione dei bottoni e del dibattito che seguirà tra i gruppi di allievi è potenzialmente interessante.

I.12. Da ricordare per l'elaborazione dei nostri problemi

Risolvendo questo problema dal punto di vista dell'allievo, senza conoscere la soluzione, abbiamo scoperto che la maggior parte dei gruppi potrebbe "sfiorare" il compito interessante e non costruire nulla in matematica.
Mentre cercavamo di sistemare la situazione ci siamo resi conto che, anche per noi, l'elaborazione di un problema di partizione d'insieme non è così scontata.
La versione definitiva ci sembra più consistente per l'allievo, si avvale di regole della logica e ha possibilità di utilizzo didattico.
In conclusione, il ruolo del *La Scatola di bottoni* passa da un'"occupazione" anche piacevole a quello di un problema che, se utilizzato in classe, ha delle potenzialità didattiche.

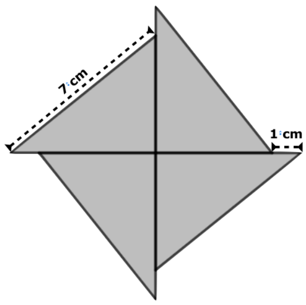
II. Esempio 2. Girandola di triangoli

II.1. L'enunciato originale

Girandola di triangoli (Cat. 4, 5, 6, 7)

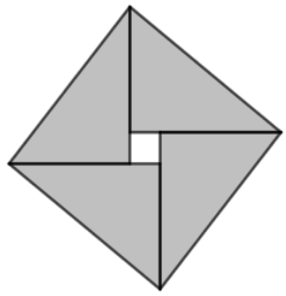
Rovistando in soffitta, Michelle trova una scatola che ha questa immagine sul coperchio. Al suo interno ci sono quattro triangoli di legno, tutti uguali.
Michelle mostra la scatola a suo fratello Davide che, dopo una rapida occhiata, le dice di saper trovare facilmente l'area esatta di un triangolo.
A Michelle non sembra così facile e Davide le suggerisce di costruire un quadrato di 7 cm di lato usando i quattro triangoli.

Qual è l'area esatta di ciascun triangolo?
Mostrate come avete trovato la vostra risposta



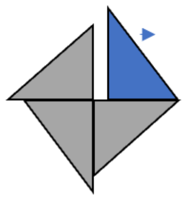
II.2. Prima lettura, "vedere" la figura

Davide è sicuramente molto bravo con i puzzle.
Seguiamo il suo suggerimento di costruire *un quadrato di 7 cm con queste quattro triangoli*
Si vedono i quattro lati di 7 cm, ma la difficoltà deriva dalla parola "quadrato". Per molti allievi, come per gli adulti, il passaggio dalla "girandola" al "quadrato" non avviene solo mentalmente immaginando i movimenti dei pezzi: ad esempio, in tre traslazioni.

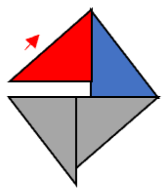


II.3. Gli spostamenti

Una prima traslazione del triangolo blu verso destra.

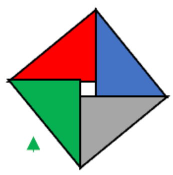


Poi una seconda del triangolo rosso verso l'alto e verso destra.



Infine una terza del triangolo verde verso l'alto.

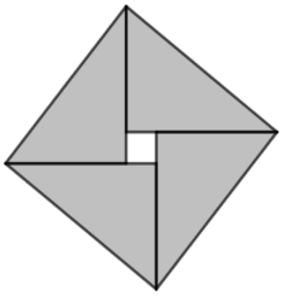
E, sorpresa, la figura ottenuta non è un "quadrato", ma un "quadrato con un buco".



Certamente, gli allievi possono ritagliare i quattro triangoli dal foglio dell'enunciato. Il risultato non è una figura geometrica, ma un *collage* molto impreciso, soprattutto sulla forma del buco.

II.4. La lettura del punto di vista del matematico

Che bella scoperta!
È possibile determinare l'area di qualsiasi triangolo rettangolo dalla misura della sua ipotenusa e dalla differenza tra le misure dei due lati dell'angolo retto, senza Pitagora, senza passare per la risoluzione di un'equazione quadratica. Il GPIL non lo sapeva!!



(In cm^2, l'area del "quadrato" è 49 (7^2), l'area del buco 1, l'area dei quattro triangoli 48 (49 – 1) e l'area di un triangolo 12 (48 : 4).

Elementare mio caro Watson!

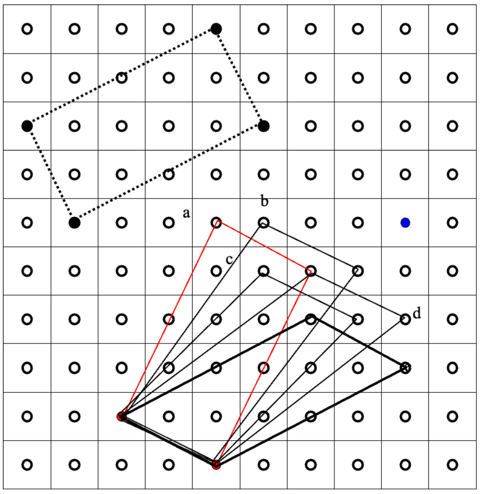
Ma forse non per i nostri allevi?

II.5. Oggetti e figure geometriche, i nostri dati del RMT

Nella sua conferenza al Convegno d'Alghero nel 2019, R. Duval ci ha detto che *la maggior parte degli allievi non entra nel modo matematico di "VEDERE" le "figure". Poiché sono la PERCEZIONE e le misure fatte che, esse stesse, determinano ciò che le "figure" RAPPRESENTANO, e non la conoscenza delle PROPRIETÀ insegnate (concetti).*
Le nostre esperienze e osservazioni ci avevano già insegnato molte cose. E le prossime ci insegneranno ancora di più!
Vediamo quali famiglie della Banca di problemi e quali problemi possiamo considerare per il nostro *Girandola di triangoli*
Identificare figure - Utilizzare misure di lunghezze e aree - Ricercare o utilizzare dimensioni - - Determinare aree e/o perimetri
Quadrati con o senza fori (17.I.04; cat. 3-4)
Tre foto su una pagina (27.II.04; cat. 3-5);
Il quadrato cambia forma (24.F.07; cat. 4-5);
I dieci punti (18.I.08; cat. 5-7)
Il tavolo da spostare (ral. 16.F.24; cat. 4-5) di cui ecco l'enunciato della prima parte, corrispondente alla figura che segue; è un problema caratteristico di queste famiglie e delle sorprese che esse possono rivelarci.

Questo disegno rappresenta il pavimento della cucina di Giulia con un cerchietto al centro di ciascuna piastrella quadrata.
Giulia osserva una cosa sorprendente: in certe posizioni, i quattro piedi del tavolo di cucina ricoprono esattamente quattro cerchietti del pavimento.
Per cominciare Giulia sistema il tavolo in una certa posizione, con i quattro piedi che ricoprono esattamente i quattro cerchietti segnati in nero sul disegno (in alto a sinistra).
Poi lo sposta in modo che i quattro piedi del tavolo poggino su altri quattro cerchietti. Due di questi cerchietti sono segnati in rosso sul disegno.
Segnate in rosso gli altri due cerchietti ricoperti dagli altri due piedi del tavolo in questa seconda posizione.

II.6. Il tavolo da spostare, le prime risposte



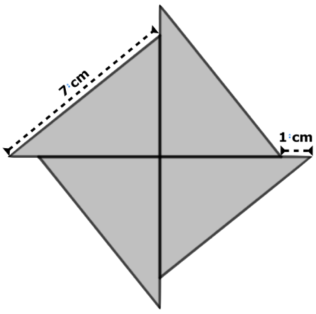
Su 12 classi (Cat. 5)
a 3; b 1; c 2; d 2; e 4.

2008. Finale internazionale di Briga.
Incredulità! Poi conferma fino alla cat. 7!

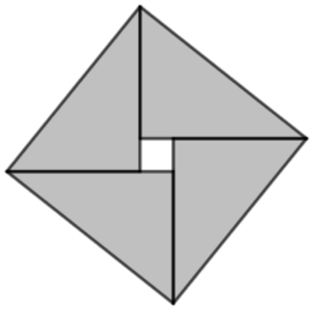
(***IL rettangolo…non così evidente!*** B. Anselmo, C. Bisso, L. Grugnetti, a nome del Gruppo geometria piana. La Gazzetta di Transalpino n. 1**)**

II.7. La nostra analisi della "visione" delle "figure"

La figura di partenza contiene due informazioni numeriche: 7 e 1, le misure dei lati del perimetro della figura.
La nuova "figura" ritagliata dall'assemblaggio dei quattro triangoli è un quadrato, o almeno un rombo) di lato 7 e un foro che sembra anch'esso quadrato (a seconda della precisione dei ritagli e della "stabilità" dell'assieme) del quale si può determinare il lato solo mediante ragionamento geometrico deduttivo: è la **differenza** tra le misure dei due lati dell'angolo retto. Questa differenza è un segmento ("1D" secondo Duval) che si trova agli estremi dell'angolo retto nella figura originale, contiguo all'angolo retto nella seconda figura.



Quando si passa alle aree (2D), bisogna essere convinti che l'area dell'assemblaggio dei quattro ritagli di carta è quella della figura di partenza. Ma la "figura" assemblata non ha lo stesso statuto della precedente; non è "disegnata" ed è composta da due quadrati. È la rappresentazione mediante il "disegno delle due figure" che permette di percepire l'uguaglianza delle parti grigie! E troveremo una nuova **differenza,** quella delle aree!



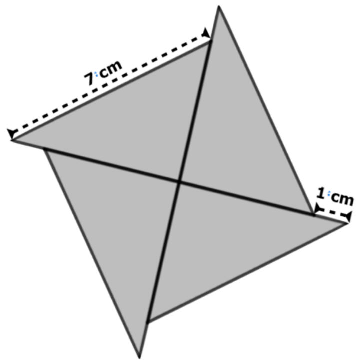
II.8. Una nuova versione del problema?

Siamo di fronte a un nuovo problema, sul quale abbiamo alcuni dati da vecchi problemi, articoli teorici e… ancora molti dubbi.
L'idea di trasformare la figura in un'altra con una diversa disposizione dei triangoli ci sembra molto interessante e vorremmo quindi mantenere il problema.
Possiamo agire solo sul testo: lo scenario di Davide che propone di costruire un "quadrato" che non lo è propriamente.
Si propone di mantenere il compito "puzzle" di disporre i quattro triangoli rettangoli uguali in una forma quadrata, senza specificare la misura del lato, che "disfa" tutto l'interesse della ricerca.
È la scelta delle categorie che sarà decisiva per il futuro del problema.

II.9. Nuovo enunciato (per la consultazione)

Girandola di triangoli (Cat. 4, 5, 6, 7)

Rovistando tra i giochi che aveva messo da parte, Michelle trova una scatola che ha questa immagine sul coperchio.
Al suo interno ci sono quattro triangoli rettangoli di legno, tutti uguali.
Michelle porta la scatola a suo fratello Davide che, dopo una rapida occhiata, le dice di saper trovare facilmente l'area esatta di ciascuno dei quattro triangoli uguali.
A Michelle non sembra così facile, ma prova a giocare con i quattro pezzi e a disporli in modo da formare un quadrato con un buco. Trova così immediatamente la soluzione utilizzando solo le misure che vede sulla figura.
Qual è l'area esatta di ogni triangolo?
Mostrate come avete fatto a trovare la risposta.



II.10. Potenzialità didattiche

Per uno sfruttamento in classe, il problema sarebbe molto ricco.
Il compito di ritagliare e formare il quadrato con un foro consentirà di passare da un'attività di "puzzle" a quella di costruire la figura, a grandezza naturale.
La ricerca della forma del "buco" e delle sue dimensioni verificherà o incoraggerà il ragionamento nella geometria deduttiva, individuando segmenti e angoli retti nella figura disegnata.
Il confronto delle due figure con i quattro triangoli permetterà di determinare l'equivalenza delle parti grigie.
Il passaggio tra le aree note dei due quadrati della seconda figura determinerà una "differenza di area" relativa all'operazione aritmetica di sottrazione. (Abbiamo riscontrato in problemi di area su una griglia, ad esempio I sette poligoni (29.I.13 ; cat. 7-8) che tenere conto delle differenze di area è molto più difficile delle addizioni di area).
Ma a condizione di aver proposto il problema alle categorie di alunni capaci di "vedere" i quadrati, i triangoli, la loro disposizione e di percepirne le aree.

II.11. Da ricordare per l'elaborazione dei nostri problemi

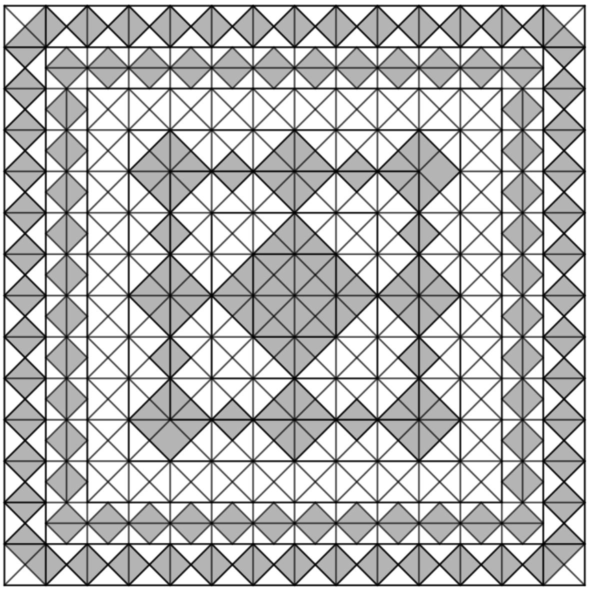
IL GPIL *conosce l'entità della sua ignoranza* e quindi non si assume la responsabilità della scelta delle categorie per questo problema.
Saranno le sezioni (*di cui non conosciamo l'entità dell'ignoranza*) che daranno il loro parere:

- eliminare le categorie 4 e 5 conservare 6, 7?
- eliminare le categorie da 4 a 6, passare da 7 a 10?
- provare il problema in alcune classi (ad esempio in una prova d'allenamento, a patto di analizzare le risposte e le spiegazioni) per saperne di più ed eventualmente riprendere il problema in una prossima edizione.

III. Esempio 3. Quattro amici e un elegante mosaico

III.1. Versione originale

Quattro amici e un elegante mosaico (Cat. 6, 7, 8)



Quattro amici osservano questo mosaico costituito da triangoli grigi e bianchi e confrontano l'area dei triangoli grigi con l'area totale del mosaico.
Aldo dice: "La parte grigia è la metà del mosaico"
Bice dice: "Ma no, è molto meno, è solo un terzo"
Carla dice: "Per me la parte grigia è i due quinti del mosaico"
Dino dice: "Secondo me la parte grigia è i tre ottavi del mosaico".

Qual è la più precisa tra queste quattro stime? Spiegate come avete trovato la vostra risposta, con il dettaglio delle quattro stime rispetto al valore esatto del rapporto tra l'area dei triangoli grigi e l'area totale di tutto il mosaico.

III.2. La nostra riflessione sul compito di risoluzione

Gli allievi delle categorie da 6 a 8 non hanno difficoltà ad appropriarsi del compito di contare le parti grigie. Sappiamo come lo fanno - come noi adulti -: uno a uno, con i segni sulla figura per identificare cosa è stato contato; per linee, o per quarti della figura. … Non ci sono formule o metodi "appresi".
Basta organizzare il conteggio in modo rigoroso per scoprire che i triangoli grigi sono 304 mentre il mosaico ne ha 784 (in quadrati della griglia questi due valori sono rispettivamente 76 e 196).
I nostri problemi RMT ci hanno mostrato che le difficoltà degli allievi sono legate alla loro insufficiente padronanza delle frazioni o dei numeri razionali che saranno essenziali per il confronto delle quattro stime con il valore esatto.
Decimali colorati (28.I.17) ; cat. 8-10) Il grillo salterino (26.I.14); cat. 7-10) Biglietti per il teatro (ral. 25.I.16) ; cat. 7-10). La tabella della divisione (ral. 20.I.18 ; cat. 8-10)
L'essenza del compito di risoluzione de *Il Mosaico* non è il conteggio dei triangoli grigi, ma il confronto di numeri razionali.

III.3. Potenzialità didattiche

- Traduzione di espressioni letterali in scritture numeriche: "metà", "un terzo", "due quinti" e "tre ottavi", 1/2, 1/3, 2/5, 3/8.
- Scomposizione in fattori primi: 2; 3; 5, per trovare un denominatore comune : per arrivare a $2^3 \times 3 \times 5 \times 7^2 = 5880$.
- Confronti fra frazioni: 1/2, 1/3, 2/5, 3/8 con 19/49.
- Passaggio da codici frazionari a codici decimali.
- Approssimazioni, al decimo più vicino, al centesimo più vicino …
- Convenzioni di scrittura e visualizzazione sulla calcolatrice.
- Operazioni aritmetiche corrispondenti ad una "frazione di ... (commutatività della divisione e della moltiplicazione o moltiplicazione per un numero non intero).
- Percentuali …

Insomma, tutto quello che c'è da sapere sulle operazioni con numeri razionali!

III.4. Da ricordare per l'elaborazione dei nostri problemi

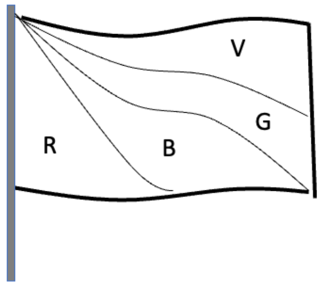
Sono i risultati statistici e le analisi a posteriori dei problemi nell'ambito dei numeri razionali che ci preoccupano. La gran parte degli allievi non padroneggia né le frazioni, né i rapporti di proporzionalità.

Una constatazione: gli allievi incontrano ostacoli in questo ambito, dovrebbero essere proposti loro dei problemi e, paradossalmente, questa esigenza non viene soddisfatta.
Frequenza di parole chiave delle schede della nostra banca di problemi:
"numero razionale" 7/1400
"numero decimale" 18/1400
"frazione" 40/1400
"proporzionalità" 70/1400
contro 137/1400 per "numero naturale"
Ragione per cui non si deve aver paura di problemi come questo!

IV. Esempio 4. La divisione del rettangolo[2]

IV.1. versione originale

La divisione del rettangolo (Cat. 8, 9, 10)
La bandiera qui sotto raffigurata è in effetti un rettangolo di 3 m su 5 m, composto da quattro triangoli aventi la medesima area, con i colori della repubblica: rosso (R), bianco (B), giallo (G) e verde (V).



Quanto misura il perimetro di ciascun triangolo?
Giustificate la vostra procedura e date i dettagli dei vostri calcoli.

IV.2. Lettura dal punto di vista dell'adulto

L'adulto sa bene che triangoli con la stessa area non necessariamente hanno lo stesso perimetro e lo vede bene in particolare sulle coppie di triangoli R-B e G-V.
Sa che la condizione "*quattro triangoli aventi la medesima area*" permette di stabilire che gli estremi di due segmenti obliqui dividono i lati del rettangolo a metà.
Sa che il teorema di Pitagora fornirà le misure dei segmenti obliqui e permetterà di calcolare in modo esatto i quattro perimetri.
Per l'adulto il problema consiste nel "trasformare" le quattro parti dell'immagine della bandiera in quattro figure geometriche note, triangoli, di cui si calcolano facilmente le misure delle basi, congruenti a due a due (2,5 e 1,5 metri) per l'equiestensione dei triangoli; consiste poi nel calcolare le misure dei lati con il teorema di Pitagora e infine trovare i quattro perimetri con un'addizione.

IV.3. E l'allievo?

Le nostre analisi a posteriori mostrano che:

4. I concetti di area e perimetro talvolta sono confusi fra loro e che spesso ad area maggiore è associato un perimetro maggiore
5. Non è avvertita l'esigenza di dimostrare cose che appaiono evidenti (come il fatto che gli estremi di due segmenti obliqui siano i punti medi)
6. L'abitudine a prendere direttamente misure sulla figura è diffusa e quasi "naturale" nella vita pratica, ma le misure non sempre vengono gestite correttamente dal punto di vista matematico.

[2] Cfr. anche l'articolo *Il difficile percorso dei problemi di "geometria piana"* nello stesso numero della Gazzetta.

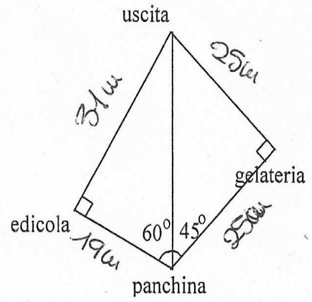
IV.4. Un esempio da una prova precedente

18. PASSEGGIATA NEL PARCO (Cat. 9, 10)

Questa figura rappresenta i sentieri di un parco.
La distanza in linea retta dalla panchina all'uscita è di 200 metri.
Anna e Claudio sono sulla panchina e vogliono uscire dal parco. Per arrivare all'uscita Anna vuole passare a prendersi un gelato, mentre Claudio vuole andare a comprarsi un giornale all'edicola.

I percorsi di Anna e Claudio saranno di uguale lunghezza?

Giustificate la vostra risposta.



(Il disegno non è in scala)

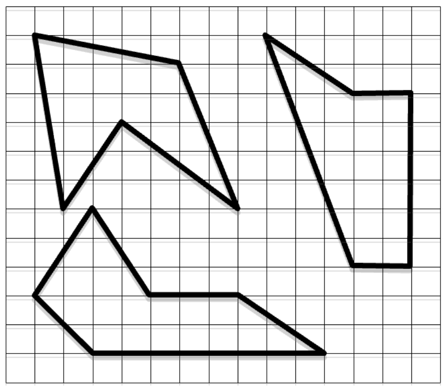
Percorso di Anna = 25m + 25m = 50m

Percorso di Claudio = 19+31 = 50m

In questo elaborato di cat.10 del problema 18.I.18, le misure riportate sulla figura corrispondono a quelle fornite in millimetri da un righello; sono state poi semplicemente riportare in metri, senza riflettere sul fatto che il risultato è incompatibile con la lunghezza (200 m) dell'ipotenusa fornita dal testo.

IV5. Un altro esempio

L'esempio precedente non è unico, lo si ritrova anche in tutti i problemi con figure su una quadrettatura.
Nel problema Confronto di figure (26.I.12, cat. 6, 7, 8) molti studenti ricorrono a misure prese col righello piuttosto che utilizzare le unità di misura di lunghezza e di area offerte dalla quadrettatura.



IV.6. Digressione sulle misure di lunghezza

La misura di una lunghezza è legata alla scelta dell'unità e al modo di esprimerla con un numero. L'allievo impara ad utilizzare un'unità (passi, bastoncini, segmenti) che riporta più volte sull'oggetto da misurare e poi conta quante volte lo ha utilizzato. Il righello è uno strumento che gli permette di evitare il conteggio e di leggere direttamente un segno della scala graduata: in ogni caso il risultato del conteggio è un numero naturale.
Quando l'oggetto da misurare non si trova in corrispondenza di un segno della graduazione, la situazione diventa fastidiosa per l'allievo, che avrebbe la tendenza a spostare l'oggetto o il righello, e che deve poi ammettere di dover passare da un numero naturale a "qualcosa" che sta tra due segni della scala, cioè tra due numeri naturali. Si arriva così ai numeri decimali, poi alla nozione di intervallo, poi all'approssimazione, necessaria quando lo strumento non permette di stabilire la misura esatta.
L'ostacolo costituito dalle approssimazioni è enorme, fa riferimento ai numeri razionali, ai reali, alla continuità, alla probabilità. Non bisogna quindi stupirsi che non sia completamente superato prima… dell'università!

IV.7. La nostra discussione

Che conoscenza matematica costruiscono gli allievi che prendono direttamente le misure su un disegno, anche eseguito in modo corretto?
Accettando questa procedura, il problema diventa un semplice *esercizio* di disegno, per allievi a partire dalla cat.5:

Disegnate un rettangolo di 3 cm per 5 cm, una delle sue diagonali e altri due segmenti a partire da un vertice fino al punto medio dei lati opposti (vedi figura). Misurate i perimetri dei quattro triangoli.
Ma soprattutto quale sarebbe l'obiettivo di questo *esercizio*?
E come si potrebbero attribuire 3 o 4 punti ai gruppi che danno una risposta corretta e giustificata sia dell'*esercizio* che del *problema*?

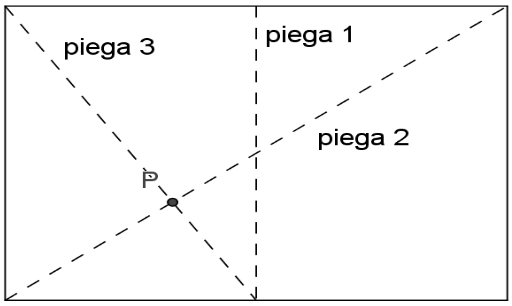
IV.8. "Vietare" o convincere?

In passato si è fatta, in alcune situazioni, la scelta di "vietare" le procedure basate sulla misura diretta. Per esempio nel problema Piegature (ral. 27.I.20 ; cat. 10), la cui media dei punteggi è solamente 0,85 su 4.

Piegature (Cat. 10)
La figura qui sotto rappresenta un foglio rettangolare, i cui lati misurano 18 cm e 24 cm, che è stato piegato e ripiegato tre volte:

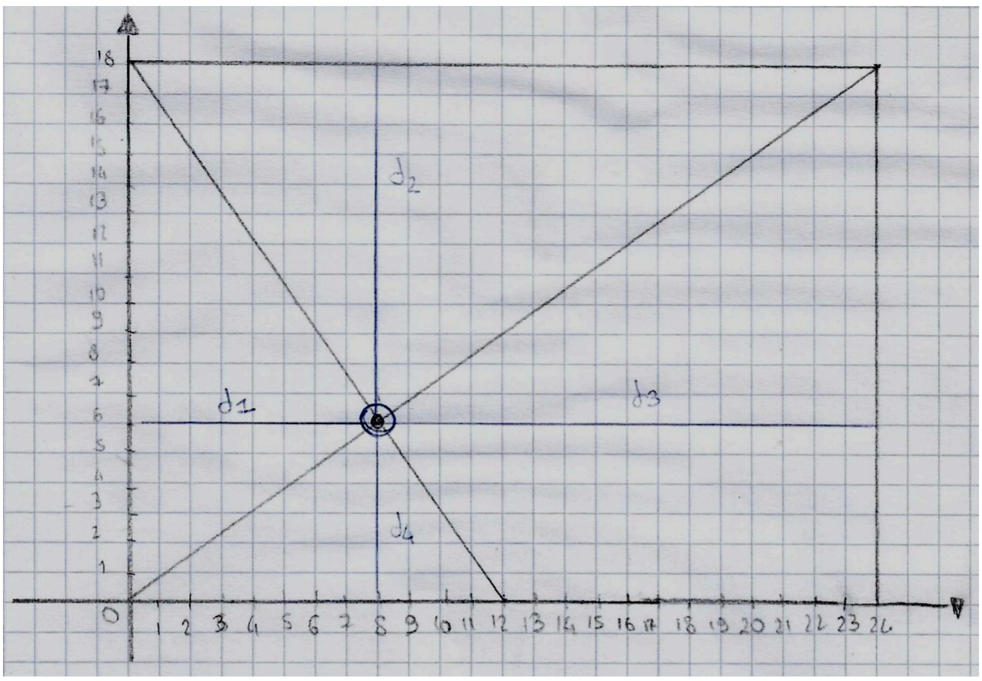
- una prima volta portando i due lati di 18 cm l'uno sull'altro,
- una seconda volta con una piegatura lungo una diagonale del rettangolo,
- una terza volta con una piegatura passante per un vertice e l'intersezione tra il lato opposto e la prima piegatura.

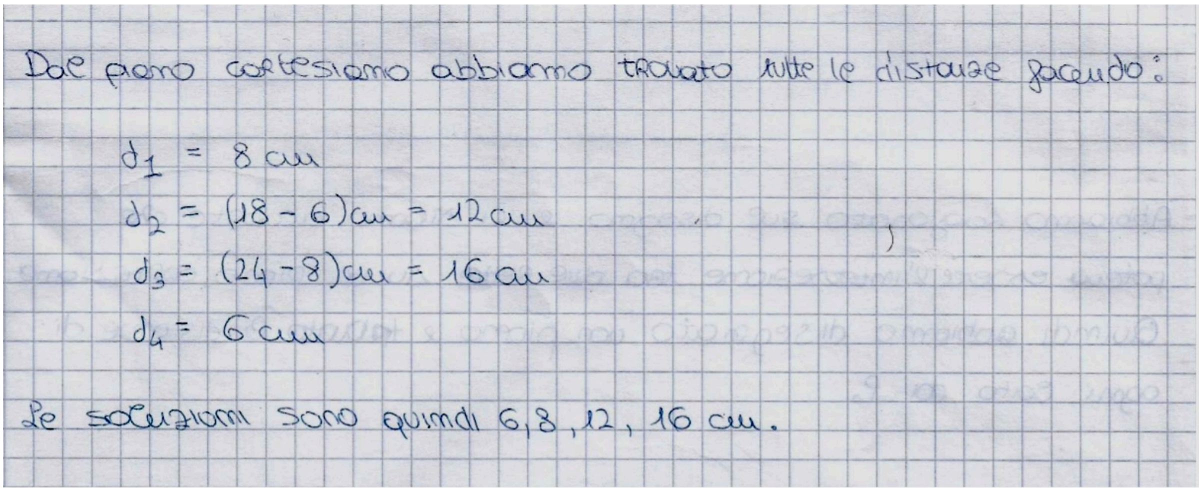
Il punto P è l'intersezione tra la seconda e la terza piegatura.



Calcolate la distanza di P da ciascuno dei quattro lati del foglio, ma senza prendere delle misure su questa figura o su un altro disegno in scala.
Giustificate la vostra risposta.

IV.9. Come gli allievi "aggireranno" il divieto



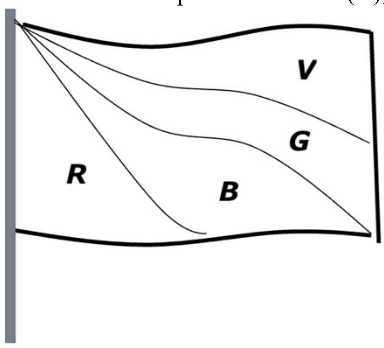

Dal piano cartesiano abbiamo trovato tutte le distanze facendo:

$d_1 = 8$ cm
$d_2 = (18 - 6)$ cm $= 12$ cm
$d_3 = (24 - 8)$ cm $= 16$ cm
$d_4 = 6$ cm

Le soluzioni sono quindi 6, 8, 12, 16 cm.

IV.10. "Vietare" o convincere? Un nuovo enunciato

La divisione del rettangolo (Cat. 8, 9, 10)
La bandiera della Repubblica di Transalpino sventola fieramente sulla torre del castello del Presidente.
Anna e Marco osservano la bandiera, qui sotto raffigurata, che è un rettangolo di 3 m per 5 m, composto da quattro triangoli aventi la medesima area, con i colori della Repubblica: rosso (R), bianco (B), giallo (G) e verde (V).



Anna dice: "Secondo me i quattro triangoli hanno lo stesso perimetro."
Marco dice: "No, tutti i perimetri sono diversi. Posso calcolarli senza disegni né strumenti di misura e dirti quale è il maggiore."
Indicate quale triangolo ha il perimetro maggiore e calcolatelo.
Giustificate la vostra procedura (secondo il metodo di Marco) e date i dettagli dei vostri calcoli.

IV.11. Da ricordare per l'elaborazione dei nostri problemi

Piuttosto che utilizzare la formula restrittiva del problema *Piegature, "senza prendere delle misure su questa figura o su un altro disegno in scala"*, abbiamo immaginato un dialogo e una sfida di uno dei due personaggi, "*senza disegni né strumenti di misura, posso calcolarli e dirti quale è il maggiore".*
È un vecchio trucco di cui non bisogna abusare, ma in questo caso si rivela molto utile.
Ci sembra che questa formulazione ribalti la prospettiva in positivo, in quanto suggerisce e valorizza lo strumento matematico come più affidabile e sicuro rispetto al righello.
La consultazione delle sezioni deciderà poi se attribuire 0 punti o 1 punto ai gruppi che arrivano alla soluzione corretta senza tenere in considerazione il suggerimento di Marco.

V. Un lavoro a lungo termine

Quattro esempi non sono sufficienti ma danno un'idea delle attuali linee di evoluzione del processo di elaborazione dei nostri problemi.

- Sono gli allievi che ci dicono a che punto sono nel processo di costruzione delle loro conoscenze e noi possiamo capirlo solo ascoltandoli, cioè leggendo i loro elaborati e assistendo alle loro discussioni (per chi ha la fortuna di poterle organizzare). *Il tavolo da spostare…* per es. 2*; Piegature …* per es. 4; e centinaia d'altri.
- Abbiamo ancora molto da imparare nella didattica della matematica ed è solo continuando a lavorare in collaborazione che possiamo sperare di migliorare le nostre conoscenze. *I nostri dubbi per l'esempio. 2 e la nostra discussione per l'esempio. 4*
- Il desiderio di *migliorare l'insegnamento e la formazione degli insegnanti* ci ha portato a riflettere sul "*perché"* elaborare problemi utili per gli allievi, che non servano solo a *tenerli occupati* e che siano utilizzabili dagli insegnati da un punto di vista didattico. *I quattro esempi.*

L'attuale edificio della matematica si è formato in migliaia di anni e ci offre formule, algoritmi, teoremi, ….
Nell'insegnamento questi risultati non sono trasferibili direttamente all'allievo o "importabili".
Egli deve svolgere un lungo lavoro di costruzione, organizzato dall'insegnante, per potersi servire degli strumenti matematici che è capace di padroneggiare con i propri limiti intellettuali.
L'ARMT cerca modestamente, ma tenacemente, di aiutare allievo ed insegnante in questa impresa di ricostruzione, in cooperazione, sapendo che alcuni ne sanno più di altri e che tutti possono progredire.
In questo processo, occorre evitare di farsi illusioni: i problemi non hanno alcun potere miracoloso; le nostre riflessioni e i dati che raccogliamo non risolvono i problemi dell'insegnamento della matematica se non sono condivise e sviluppate.
Il GPIL ha menzionato *l'entità della sua ignoranza.* Non è un semplice gioco di parole di origine socratica. Propone, invece di trasmettere, di cercare di elaborare insieme dei problemi che tengano conto dei bisogni e delle competenze di ciascuno.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

UNA SCATOLA PARTICOLARE

UNE BOÎTE PARTICULIÈRE

Gruppo Geometria 3D / Groupe de Géométrie 3D

Cristina Bertaccini, Antonella Canestro, Chiara Cateni, Lucia Fazzino, Angela Loseto, Francesca Ricci, Rosa Santori

con la collaborazione dei membri del gruppo di Geometria 3D: Stefania Archinti, Ester Bonetti, Rita Orsola D'Agata, Luca Fioretti, Nicoletta Giardini, Andrea Gorini, Luca Lamanna, Andrea Malossini, Michela Mattei, Antonella Pino

1. Introduzione generale/ Introduction générale

A dieci anni di distanza dalla pubblicazione sulla Gazzetta di Transalpino dell'articolo di Roberto Battisti "La visualizzazione spaziale… dimenticata", il gruppo di Geometria 3D continua ad interrogarsi su come e quanto venga trattata l'abilità di visualizzazione spaziale nella scuola italiana.

Le "Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione" (2012) furono pubblicate nello stesso periodo in cui veniva scritto e poi pubblicato l'articolo. Nonostante questo documento ministeriale, che ancora oggi è il riferimento fino al terzo anno della scuola secondaria di I grado, metta al centro della pratica didattica "la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola", con particolare attenzione alla capacità di esporre e di discutere con i compagni le diverse strategie risolutive, riguardo allo sviluppo dell'abilità di visualizzazione spaziale non si dice quasi niente.

Dix ans après la publication dans la Gazette de Transalpie de l'article de Roberto Battisti "La visualisation spatiale... oubliée", le groupe Géométrie 3D continue de s'interroger sur comment et dans quelle mesure les compétences en visualisation spatiale sont traitées dans l'école italienne.

Les « Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione » (2012) ont été publiées au cours de la même période au cours de laquelle l'article a été rédigé puis publié. Bien que ce document ministériel, qui reste la référence jusqu'à la troisième année du collège, place l'accent de la pratique pédagogique sur « la résolution de problèmes, qui doivent être compris comme des enjeux authentiques et significatifs, liés à la vie quotidienne, et non seulement comme des exercices à caractère répétitif ou des questions auxquelles on répond simplement en se souvenant d'une définition ou d'une règle », avec une attention particulière à la capacité d'expliquer et de discuter différentes stratégies de résolution avec des camarades de classe, mais ne disent presque rien à propos du développement de la visualisation spatiale.

Uno degli obiettivi alla fine del quinto anno della scuola primaria è il seguente:

- Riconoscere rappresentazioni piane di oggetti tridimensionali, identificare punti di vista diversi di uno stesso oggetto (dall'alto, di fronte, ecc.).

Tuttavia non si trovano indicazioni didattiche su come raggiungere tale obiettivo, che alla fine del terzo anno della scuola secondaria di I grado diventa:

- Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali
- L'un des objectifs à la fin de la cinquième année du primaire est le suivant :
- Reconnaître des représentations planes d'objets en trois dimensions, identifier différents points de vue d'un même objet (de dessus, de face, etc.).
- Cependant, il n'y a pas de consigne pédagogique sur la manière d'atteindre cet objectif qui, à la fin de la troisième année du secondaire inférieur, devient :
- Visualiser des objets tridimensionnels à partir de représentations bidimensionnelles

Noi riteniamo, come all'epoca dell'articolo citato e come ribadito nell'articolo pubblicato sulla Gazzetta di Transalpino n.11 "Le scatole di Caterina": analisi di un problema, che sia importante utilizzare fin dai primi anni della scuola primaria modelli tridimensionali e situazioni problematiche che facciano riferimento alla realtà, anche alternandole con attività di geometria piana.

Ragionare in tre dimensioni allena la mente allo sviluppo di abilità visuo-spaziali che si dimostrano essere molto importanti, non solo per l'apprendimento della geometria, ma di tutta la matematica e delle scienze in generale (incolonnamento, gestione del foglio…).

Nous pensons, comme à l'époque de l'article cité et comme réaffirmé dans l'article publié dans la Gazette de Transalpie n.11 qui analyse le problème "Les boîtes de Catherine": qu'il est important d'utiliser des modèles tridimensionnels dès les premières années de l'école primaire et des situations problématiques qui renvoient à la réalité, en les alternant également avec des activités de géométrie plane.

Le raisonnement en trois dimensions entraîne l'esprit à développer des compétences visuo-spatiales qui s'avèrent très importantes, non seulement pour l'apprentissage de la géométrie, mais de toutes les mathématiques et des science en général (mise en file d'attente, gestion de la feuille...).

In un articolo del 1987, Vinicio Villani invita il corpo docente a chiedersi quali attività didattiche siano più vicine all'esperienza degli allievi, facendo notare che, essendo immersi nella realtà tridimensionale, è con questa che i bambini hanno da subito più confidenza. "D'altra parte, la rappresentazione della realtà tridimensionale mediante disegni, fotografie, su schermi di televisori o di calcolatori, ecc.…, presuppone un continuo passaggio dallo spazio al piano (per realizzare l'immagine bidimensionale) e, viceversa, dal piano allo spazio (nella fase di ricostruzione - mentale o effettiva - dell'oggetto tridimensionale a partire dalla sua immagine). Di conseguenza è opportuno un collegamento sistematico tra le nozioni di geometria spaziale e quelle di geometria piana, senza barriere artificiose tra l'una e l'altra."

Dans un article de 1987, Vinicio Villani invite le corps enseignant à se demander quelles sont les activités pédagogiques les plus proches de l'expérience des élèves, en soulignant que, immergées dans la réalité tridimensionnelle, c'est avec elles que les enfants se familiarisent et prennent confiance. "En revanche, la représentation de la réalité tridimensionnelle par le dessin, la photographie, l'écran de télévision ou d'ordinateur, etc., suppose un passage continu de l'espace au plan (pour réaliser une image bidimensionnelle) et, inversement, du plan à l'espace (dans la phase de reconstruction - mentale ou réelle - de l'objet tridimensionnel à partir de son image plane). Par conséquent, il convient d'établir un lien systématique entre les notions de géométrie spatiale et celles de géométrie plane, sans barrières artificielles entre l'une et l'autre".

Diverse ricerche successive confermano come la geometria tridimensionale sia quella più intuitiva perché più vicina all'esperienza (Arrigo G., Sbaragli S., 2004. - Sbaragli S., Mammarella I.C., 2010).
Inoltre, anche se le rappresentazioni utilizzate per far comprendere un concetto matematico sono solo modelli e quindi lontani dall'idealità, i modelli in tre dimensioni sono più vicini alla realtà perché, almeno dimensionalmente, corrispondono all'oggetto matematico. Questo a differenza delle rappresentazioni a 0, 1 o 2 dimensioni (punti, segmenti, superfici), che invece non trovano nessuna correlazione fra la realtà e l'oggetto matematico (Duval R., 2020).

Des recherches ultérieures confirment que la géométrie tridimensionnelle est la plus intuitive parce qu'elle est la plus proche de l'expérience (Arrigo G., Sbaragli S., 2004 - Sbaragli S., Mammarella I.C., 2010).
En outre, bien que les représentations utilisées pour faire comprendre un concept mathématique ne soient que des modèles et donc loin de l'idéalité, les modèles en trois dimensions sont plus proches de la réalité car, au moins sur le plan dimensionnel, ils correspondent à l'objet mathématique. Contrairement aux représentations en 0, 1 ou 2 dimensions (points, segments, surfaces) qui, elles, ne trouvent pas de corrélation entre la réalité et l'objet mathématique (Duval R., 2020).

Abbiamo scelto questo problema, tipico della famiglia VS/SV (problemi che sollecitano la costruzione o il disegno di modelli reali e la gestione di sviluppi di solidi) perché va a completare i dati del problema **Scatoline (17.I.05)** già affrontati in un articolo di Graziella Telatin pubblicato sulla Gazzetta di Transalpino n. 4. Il testo del problema "Una scatola particolare" è nato proprio con l'intento di stimolare gli allievi e le allieve a gestire una scatola che non avesse la forma standard di un parallelepipedo, aiutandoli ad inserire nel loro repertorio di immagini anche prismi con base differente da quelle rappresentate abitualmente nei libri di testo. I risultati che analizzeremo ci offrono degli interessanti spunti di riflessione.

Nous avons choisi ce problème, typique de la famille VS/SV (problèmes qui sollicitent la construction ou le dessin de modèles réels et la gestion de développements de solides) parce qu'il complète les données du problème **Boîtes (17.I.05)** déjà abordé dans un article de Graziella Telatin publié dans la Gazette de Transalpie n°4. Le texte du problème "Une boîte particulière" est né précisément dans l'intention de stimuler les élèves à manipuler une boîte qui n'a pas la forme standard d'un parallélépipède, en les aidant à inclure dans leur répertoire d'images également des prismes avec des bases différentes de celles qui sont habituellement représentées dans les manuels. Les résultats que nous analyserons offrent des pistes de réflexion intéressantes.

2. Introduzione al problema/ Introduction au problème

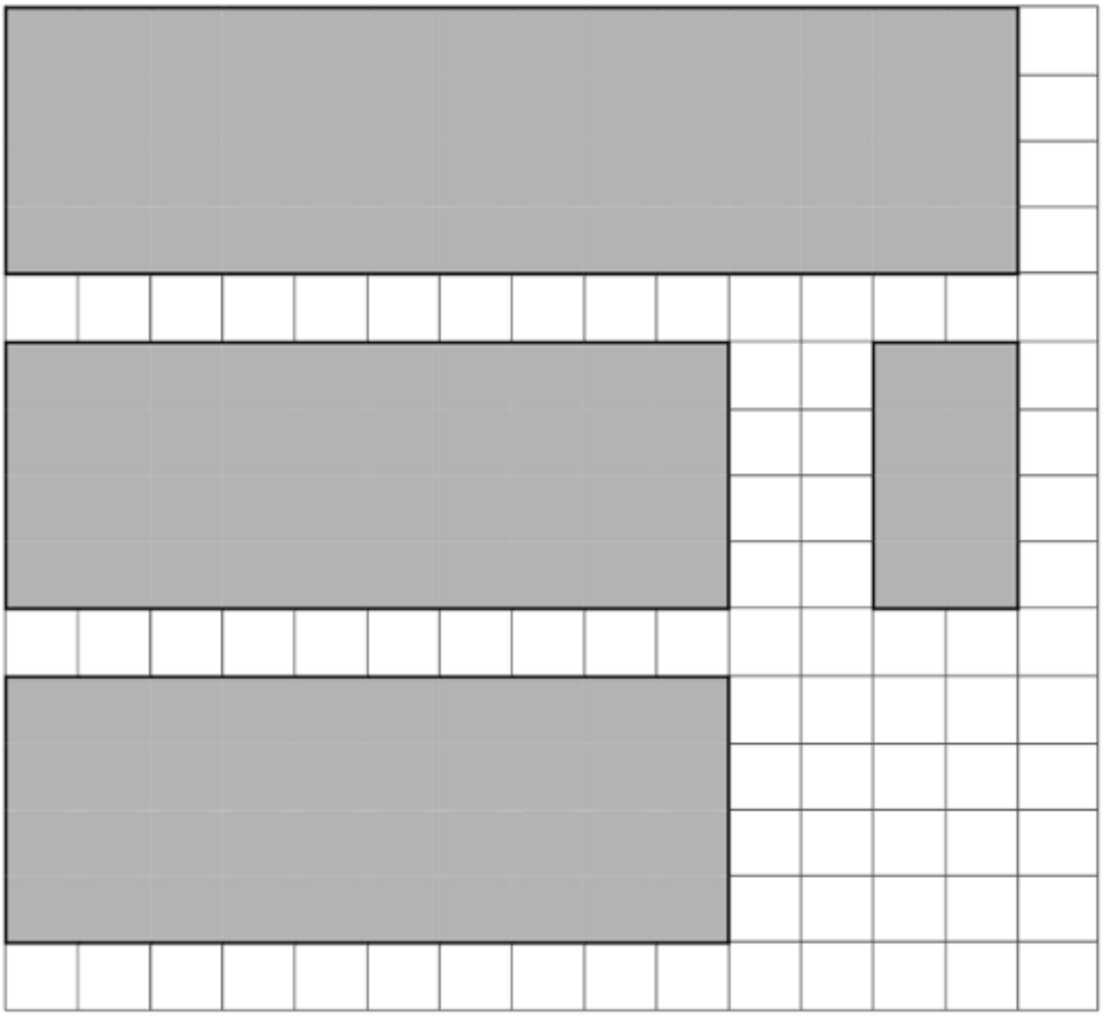
"Una scatola particolare" è il problema n.13 della II prova del 25° Rally Matematico Transalpino.
Di seguito sono riportati l'enunciato e l'analisi a priori:

« Une boîte particulière », est le 13e problème de la finale du 26e Rallye Mathématique Transalpin.
Voici son énoncé et son analyse a priori :

UNA SCATOLA PARTICOLARE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Giovanni vuole costruire una scatola a sei facce. E' una scatola di forma particolare che vuole usare per fare un regalo a sua sorella.

Per costruirla utilizza le quattro facce che vedete disegnate qui sotto e vuole farne altre due per chiuderla. Egli desidera che ogni faccia che non ha ancora disegnato abbia un solo asse di simmetria.



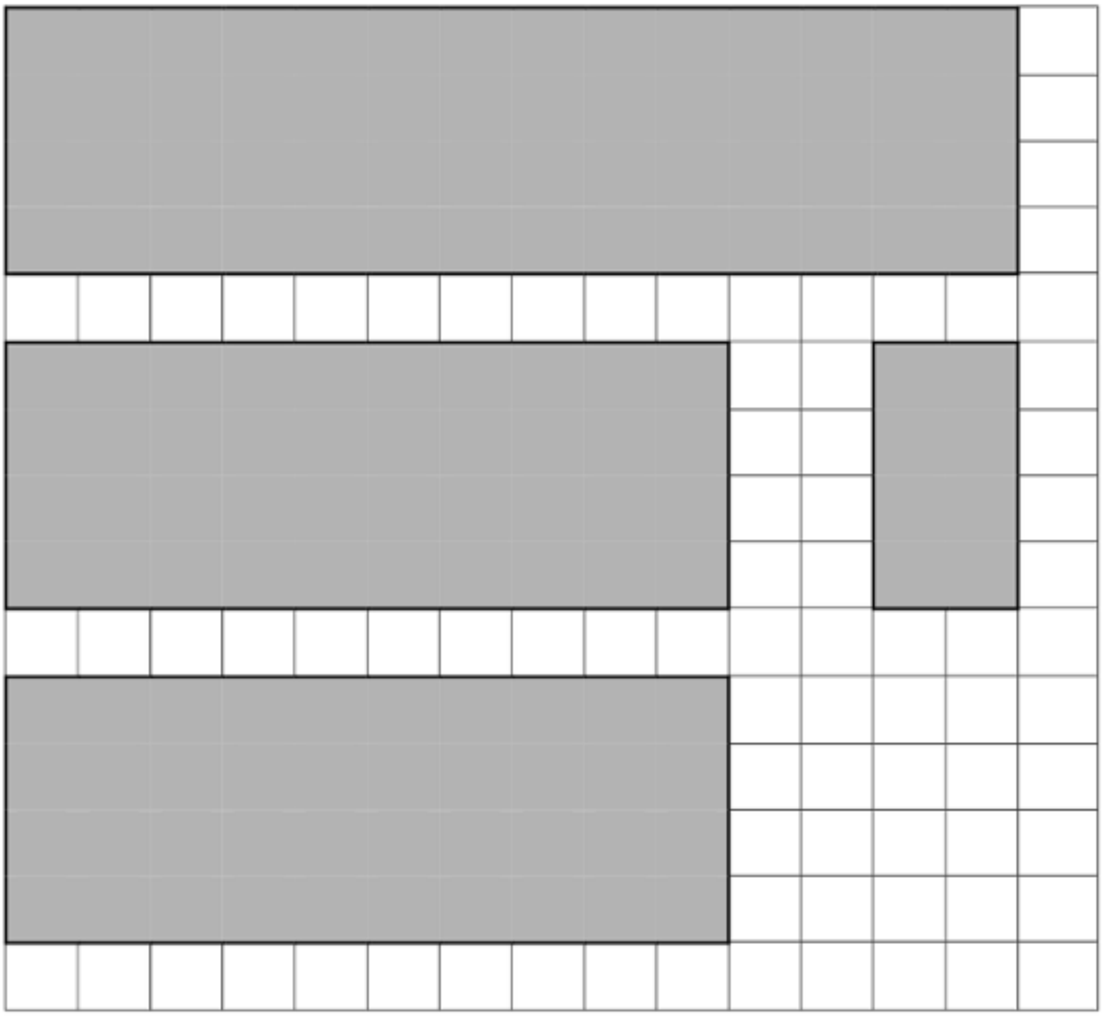
Disegnate sul foglio quadrettato che segue le facce che mancano per completare la scatola.

Spiegate come le avete trovate.

UNE BOITE PARTICULIÈRE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Jean veut construire une boîte à six faces. C'est une boîte de forme particulière qu'il veut utiliser pour faire un cadeau à sa sœur.

Pour la construire, il utilise les quatre faces dessinées ci-dessous et il veut en faire deux autres pour fermer la boîte. Il veut que chaque face qu'il n'a pas encore dessinée, ait un axe de symétrie.



Dessinez sur la feuille quadrillée qui suit les faces qui manquent pour compléter la boîte.

Expliquez comment vous les avez trouvées.

Analisi a priori / Analyse a priori

Compito matematico / Tâche mathématique

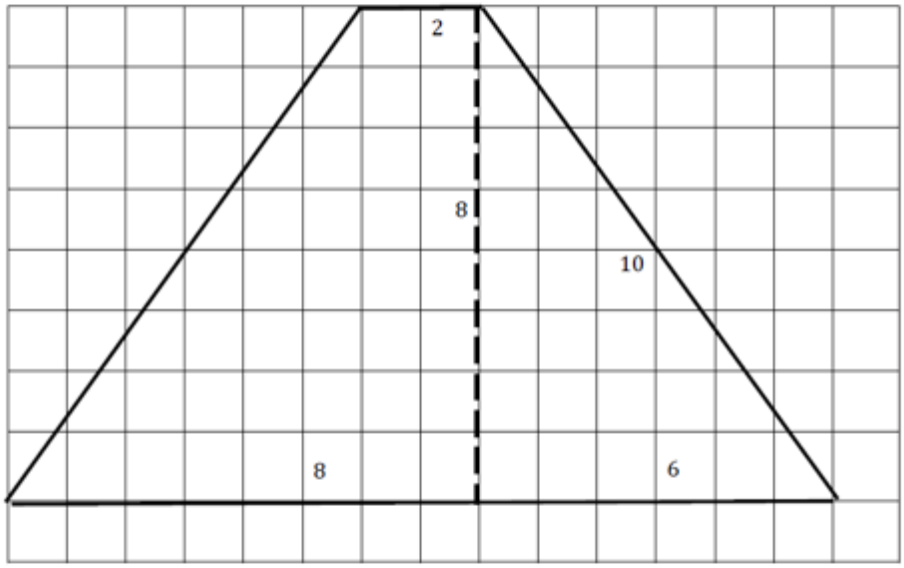
Riconoscere che un solido è un prisma retto a partire da 4 delle sue facce rettangolari. Disegnare le sue altre due facce sapendo che esse hanno un solo asse di simmetria.

Reconnaître qu'un solide est un prisme droit à partir de 4 de ses faces rectangulaires. Dessinez ses deux autres faces en sachant qu'elles n'ont qu'un seul axe de symétrie.

Analisi del compito/ Analyse de la tâche

- Capire che bisogna cominciare analizzando le informazioni date dalle misure dei quattro rettangoli.
- Comprendere che, a partire dalle quattro facce rettangolari date, si può costruire un prisma retto.
- Comprendere che le facce date sono facce laterali e che le due facce da disegnare sono le due basi identiche non rettangolari.

- Osservare che due dei quattro rettangoli hanno misure identiche e che tutti e quattro i rettangoli hanno una misura in comune.
- Fare dei tentativi di posizionamento delle facce le une in rapporto alle altre: provare a mettere su piani paralleli i due rettangoli delle stesse dimensioni e constatare che le altre due facce già disegnate non si adattano a questa disposizione. Dedurne che così non si può costruire il solido cercato.
- Comprendere che è possibile posizionare le facce date le une a fianco delle altre utilizzando la loro misura comune e capire, chiudendo la costruzione, che le facce mancanti saranno le basi di un prisma retto.
- Riorganizzare il posizionamento delle facce date in modo che le facce mancanti abbiano un asse di simmetria.
- Riconoscere che le basi saranno quindi dei trapezi isosceli le cui dimensioni si deducono dai rettangoli già dati.
- Disegnare le figure rispettando le misure.
- Costruendo un triangolo rettangolo all'interno del trapezio, verificare con la terna pitagorica 6, 8, 10 che l'altezza del trapezio è di 8 lati di quadretto, il lato obliquo di 10 e la base maggiore di 14 = 6 + 2 + 6.



- Comprendre qu'il faut commencer en analysant les informations données par les mesures des quatre rectangles.
- Comprendre qu'à partir des quatre faces rectangulaires données, on peut construire un prisme droit.
- Comprendre que les faces données sont des faces latérales et que les deux faces à dessiner sont les deux bases identiques non rectangulaires.
- Remarquer que sur les quatre rectangles, deux ont des mesures totalement identiques et que les quatre rectangles ont une mesure commune.
- Faire des essais de positionnement des faces les unes par rapport aux autres : Essayer de mettre dans des plans parallèles les deux rectangles de mêmes dimensions et constater que les deux faces déjà dessinées ne s'adaptent pas à cette disposition. En déduire qu'ainsi on ne peut pas construire le solide recherché.
- Comprendre qu'il est possible de positionner les faces données les unes au bout des autres en utilisant leur mesure commune et comprendre en refermant la construction que les faces manquantes seront les bases d'un prisme droit.
- Réorganiser le positionnement des faces données pour que les faces manquantes aient un axe de symétrie
- Reconnaître que les bases seront donc des trapèzes isocèles dont les dimensions se déduisent des dimensions des rectangles déjà donnés
- Construire les figures en respectant les mesures
- En construisant un triangle rectangle à l'intérieur du trapèze, on vérifie avec la relation de Pythagore 6, 8, 10 que la hauteur du trapèze sera de 8 côtés de carreaux, le côté oblique de 10 et que la grande base du trapèze mesure 6 + 2 + 6

L'analisi a priori del compito dell'alunno riportata qui sopra è stata redatta al momento dell'elaborazione del problema, prima della prova del RMT. Quindi è ancora ipotetica. Sarà convalidata, adattata o modificata in base ai risultati della sperimentazione e alla lettura degli elaborati degli allievi, quindi diventerà l'analisi a posteriori del problema. È quest'ultima che permetterà di redigere le rubriche *Compito per la risoluzione e saperi mobilitati*,

Procedure, ostacoli ed errori rilevati e *Indicazioni didattiche* della scheda del problema nella Banca di problemi del RMT.
L'analyse *a priori* de la tâche de l'élève ci-dessus a été rédigée lors de l'élaboration du problème avant l'épreuve du RMT. Elle est donc encore hypothétique. Elle sera validée, adaptée ou modifiée selon les résultats de l'expérimentation, à la lecture des copies rendues et deviendra l'analyse *a posteriori* du problème. C'est cette dernière qui permettra de rédiger les rubriques *Tâche de résolution et savoirs mobilisées, Procédures, obstacles et erreurs relevées et Indications didactiques* de la fiche du problème dans la Banque de problèmes du RMT.

Si ricorda che il problema è stato affrontato nelle condizioni particolari del RMT: intera classe, allievi in completa autonomia, da 5 a 7 problemi da risolvere, un solo foglio risposta per problema, senza la presenza dell'insegnante.
On rappelle que le problème a été abordé dans les conditions particulières du RMT : toute la classe, élèves en totale autonomie, de 5 à 7 problèmes à résoudre, une seule feuille réponse par problème, hors de la présence de l'enseignant.

3. Risultati/ Résultats

Punteggi attribuiti su 2199 classi di 19 sezioni:
Points attribués, sur 2199 classes de 19 sections :

Punti/ Points :	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Classi/ Classes**	**Media/ Moyenne**
Cat 7	638 (59%)	78 (7%)	127 (12%)	109 (10%)	127 (12%)	1079	1.08
Cat 8	372 (48%)	80 (10%)	86 (11%)	102 (13%)	133 (17%)	773	1.41
Cat 9	71 (38%)	30 (16%)	24 (13%)	17 (9%)	43 (23%)	185	1.63
Cat 10	69 (43%)	15 (9%)	24 (15%)	15 (9%)	39 (24%)	162	1.63
Tot.	**1150 (52%)**	**203 (9%)**	**261 (12%)**	**243 (11%)**	**342 (16%)**	**2199**	**1.28**

Secondo i criteri determinati nell'analisi a priori:
- **4 punti**: Disegno corretto delle due facce mancanti o di una sola, indicando che l'altra è identica (un trapezio isoscele con i lati di misura 10-2-10-14 in lati di quadretto), con spiegazioni chiare
- **3 punti**: Disegno dei due trapezi isosceli ma con la misura errata dei lati obliqui
  oppure disegnato correttamente un solo trapezio isoscele senza specificare che l'altra faccia mancante è ad esso congruente
- **2 punti**: Disegno di un trapezio isoscele con tutte le misure errate, ma con spiegazioni
  oppure disegno di un quadrilatero irregolare che rispetta le misure dei lati (4,10,10,14) ma che non rispetta la condizione di avere un asse di simmetria
- **1 punto**: Inizio di ragionamento corretto con costruzione di un quadrilatero che verifica due delle misure
  oppure dichiarazione verbale che si tratta di un trapezio isoscele
- **0 punti**: Incomprensione del problema

Selon les critères déterminés lors de l'analyse *a priori* :
- **4** Dessin correct des deux figures manquantes ou d'une seule en indiquant que l'autre est identique (un trapèze isocèle avec les côtés mesurant 10-2-10-14 en côtés de carreaux), avec des explications claires
- **3** Dessin de deux trapèzes isocèles, mais avec une mesure erronée des côtés obliques
  ou un seul trapèze isocèle correctement dessiné sans préciser que l'autre figure manquante lui est égale
- **2** Dessin d'un trapèze isocèle avec toutes les mesures erronées, mais avec des explications
  ou dessin d'un quadrilatère irrégulier qui respecte les mesures des côtés (4, 10, 10 et 14) mais qui ne respecte pas la condition d'avoir un axe de symétrie
- **1** Début de raisonnement correct avec une construction d'un quadrilatère qui vérifie deux des mesures
  ou déclaration verbale qui traite d'un trapèze isocèle
- **0** Incompréhension du problème

Nella tabella riportata sopra si nota che circa il 60% degli elaborati ha ottenuto un punteggio 0 o 1 e che i risultati migliori sono stati realizzati dalle categorie 9 e 10. Questo andamento denota una migliore comprensione del testo

probabilmente dovuta a un crescente sviluppo cognitivo. Si deve comunque anche tener conto che la griglia sulla quale sono posizionati i disegni delle facce della scatola non ha una quadrettatura corretta, in quanto l'immagine ha subito una deformazione che ha trasformato i quadretti in rettangoli, creando difficoltà nella realizzazione delle parti mancanti.
Occorre inoltre ricordare che i punti sono attribuiti da una ventina di giurie diverse, a partire da criteri che lasciano un ampio margine di interpretazione. Le medie e le occorrenze ottenute non sono quindi che indici globali, da considerare con un margine d'errore di circa mezzo punto.
Dans le tableau ci-dessus, on constate qu'environ 60 % des copies ont obtenu 0 ou 1 point et que les meilleurs résultats ont été obtenus par les catégories 9 et 10. Cette tendance dénote une meilleure compréhension du texte, probablement due à un développement cognitif croissant. Cependant, il faut également tenir compte du fait que la grille sur laquelle les dessins des faces de la boîte sont placés ne comporte pas de carrés corrects, car l'image a subi une déformation qui a transformé les carrés en rectangles, ce qui crée des difficultés pour réaliser les parties manquantes.
Il faut aussi rappeler que les points sont attribués par une vingtaine de jurys différents, à partir de critères laissant une grande marge d'interprétation. Les moyennes et occurrences obtenues ne sont donc que des indices globaux, à considérer avec une marge de signification d'un demi-point environ.

Per l'analisi *a posteriori* abbiamo potuto utilizzare 692 elaborati delle sezioni Puglia, Rozzano e Siena e le osservazioni sulle categorie 7 e 8 sono del tutto comparabili con quelli riportati nella tabella precedente.
Per quanto riguarda gli elaborati delle categorie 9 e 10, abbiamo potuto analizzare solo quelli delle sezioni Puglia e Siena che confermano comunque le percentuali precedenti.
Pour l'analyse *a posteriori*, nous avons pu utiliser 692 copies des sections de Puglia, Rozzano et Siena et les observations sur les catégories 7 et 8 sont tout à fait comparables à celles du tableau ci-dessus.
En ce qui concerne les épreuves des catégories 9 et 10, nous n'avons pu analyser que celles des sections de Puglia et Siena, ce qui confirme toutefois les pourcentages précédents.

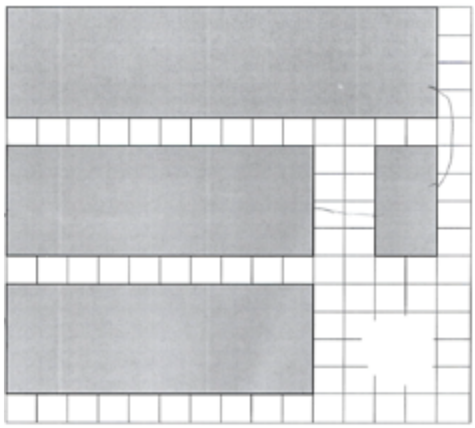
4. Procedure, ostacoli ed errori rilevati / Procédures, obstacles et erreurs relevés

4.1. Le risposte corrette / Les réponses correctes

In molti degli elaborati con punteggio 3 si trova il solo disegno del trapezio isoscele senza spiegazione del procedimento risolutivo. La maggior parte dei gruppi di lavoro si muove per tentativi costruendo, con le facce date, la superficie laterale del solido senza avere la visione mentale della scatola da costruire (esempio 1). Nella categoria 7 solo i punteggi 4 tengono conto del vincolo di un solo asse di simmetria, mentre nelle categorie superiori le strategie adottate dagli allievi sembrano corrispondere a quelle presenti nell'analisi a priori pur utilizzando un linguaggio approssimativo. Non abbiamo rilevato alcun elaborato in cui venisse utilizzata una strategia non prevista nell'analisi *a priori*.
Dans de nombreuses copies ayant obtenu 3 points, on ne trouve que le dessin du trapèze isocèle sans explication de la procédure de résolution. La plupart des équipes procèdent par tâtonnement en construisant, avec les faces données, la surface latérale du solide sans avoir une vision mentale de la boîte à construire (exemple 1). Dans la catégorie 7, seuls les scores 4 prennent en compte la contrainte d'un seul axe de symétrie, alors que dans les catégories supérieures, les stratégies adoptées par les élèves semblent correspondre à celles de l'analyse a priori malgré l'utilisation d'un langage approximatif. Nous n'avons pas trouvé de copies dans lesquelles une stratégie non incluse dans l'analyse *a priori* a été utilisée.

Esempio 1 (Cat. 7) / Exemple 1 (Cat. 7)

Abbiamo ripreso tutte le misure dei lati e le abbiamo unite in modo che tutti i lati potessero attaccarsi agli altri.
Nous avons pris toutes les mesures des côtés et les avons assemblés de manière à ce que tous les côtés puissent se coller l'un à l'autre.



Negli elaborati di categoria 8 degli esempi 2 e 3, il ragionamento degli allievi è esplicitato e segue i passi dell'analisi *a priori*.
Dans les copies de catégorie 8 des exemples 2 et 3 le raisonnement des élèves est explicité et suit les étapes de l'analyse *a priori*.

Esempio 2 (Cat. 8) / Exemple 2 (Cat. 8)

Per prima cosa abbiamo provato a capire quale poteva essere la forma della figura e visto che le 2 facce da trovare dovevano avere la forma di un quadrilatero con un solo asse di simmetria, l'unica figura era il trapezio isoscele.
Dopo esserci accertati della forma che avrebbe dovuto avere la scatola abbiamo applicato il teorema di Pitagora tra il lato obliquo del trapezio e la metà della differenza tra la base maggiore e la base minore per trovare l'altezza del trapezio.

$$\frac{B-b}{2} = \frac{14-2}{2} = 6\ cm$$

$\sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8\ cm\ (h)$

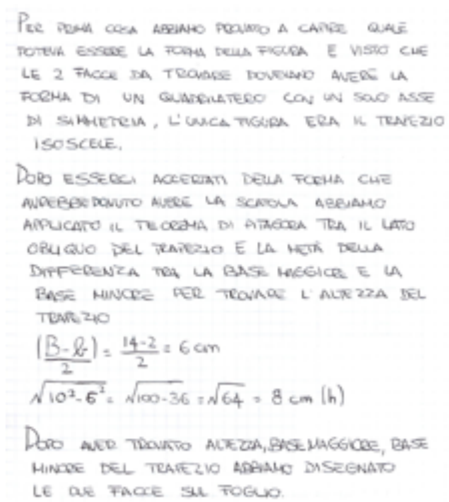
Dopo aver trovato altezza, base maggiore, base minore del trapezio abbiamo disegnato le due facce sul foglio.

Nous avons d'abord cherché à comprendre quelle pouvait être la forme de la figure et comme les 2 faces à trouver devaient avoir la forme d'un quadrilatère avec un seul axe de symétrie, la seule figure était le trapèze isocèle.
Après s'être assuré de la forme que devait avoir la boîte, on a appliqué le théorème de Pythagore entre le côté oblique du trapèze et la moitié de la différence entre la grande base et la petite base pour trouver la hauteur du trapèze.

$$\frac{B-b}{2} = \frac{14-2}{2} = 6\ cm$$

$\sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8\ cm\ (h)$

Après avoir trouvé la hauteur, la grande base et la petite base du trapèze, nous avons dessiné les deux faces sur la feuille.


PER PRIMA COSA ABBIAMO PROVATO A CAPIRE QUALE POTEVA ESSERE LA FORMA DELLA FIGURA E VISTO CHE LE 2 FACCE DA TROVARE DOVEVANO AVERE LA FORMA DI UN QUADRILATERO CON UN SOLO ASSE DI SIMMETRIA, L'UNICA FIGURA ERA IL TRAPEZIO ISOSCELE.

DOPO ESSERCI ACCERTATI DELLA FORMA CHE AVREBBE DOVUTO AVERE LA SCATOLA ABBIAMO APPLICATO IL TEOREMA DI PITAGORA TRA IL LATO OBLIQUO DEL TRAPEZIO E LA METÀ DELLA DIFFERENZA TRA LA BASE MAGGIORE E LA BASE MINORE PER TROVARE L'ALTEZZA DEL TRAPEZIO

$\left(\frac{B-b}{2}\right) = \frac{14-2}{2} = 6\ cm$

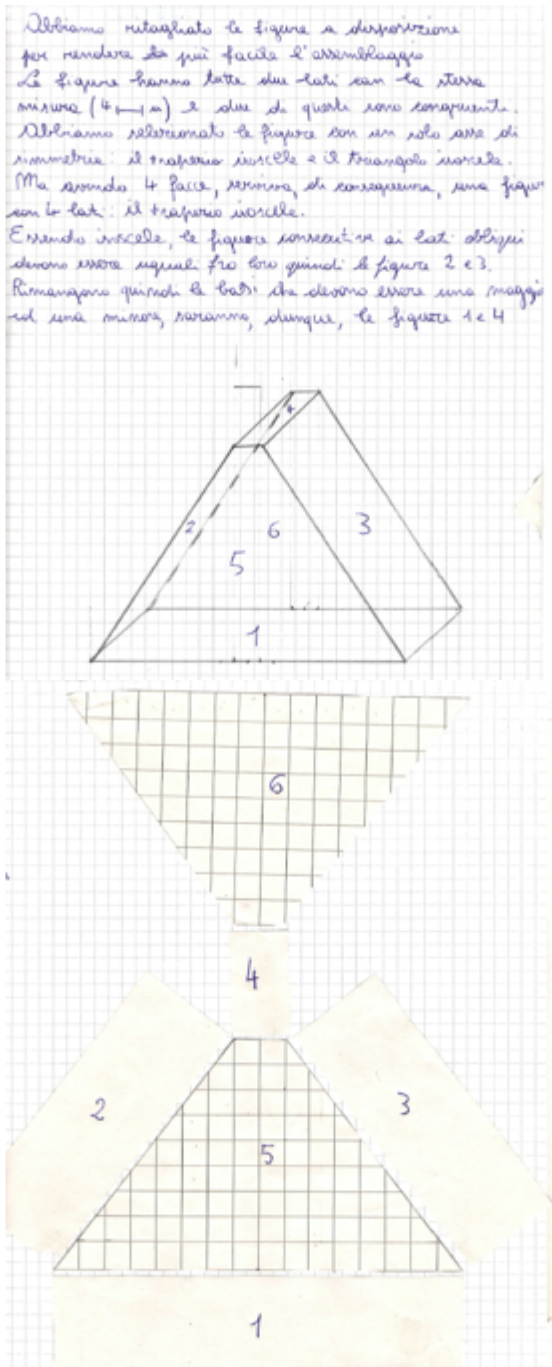
$\sqrt{10^2-6^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8\ cm\ (h)$

DOPO AVER TROVATO ALTEZZA, BASE MAGGIORE, BASE MINORE DEL TRAPEZIO ABBIAMO DISEGNATO LE DUE FACCE SUL FOGLIO.

Esempio 3 (Cat. 8) / Exemple 3 (Cat. 8)

Abbiamo ritagliato le figure a disposizione per rendere più facile l'assemblaggio. Le figure hanno tutte due lati con la stessa misura (4u) e due di questi sono congruenti. Abbiamo selezionato le figure con un solo asse di simmetria: il trapezio isoscele e il triangolo isoscele. Ma avendo 4 facce, serviva, di conseguenza, una figura con 4 lati: il trapezio isoscele.
Essendo isoscele, le figure consecutive ai lati obliqui devono essere uguali tra loro quindi le figure 2 e 3.
Rimangono quindi le basi che devono essere una maggiore e una minore, saranno, dunque, le figure 1 e 4.

Nous avons découpé les figures pour faciliter l'assemblage. Les figures ont toutes deux côtés de même mesure (4u) et deux d'entre elles sont congruentes. Nous avons choisi les figures ayant un seul axe de symétrie : le trapèze isocèle et le triangle isocèle. Mais comme nous avions quatre côtés, il nous fallait une figure à quatre côtés : le trapèze isocèle.
Comme elles sont isocèles, les figures consécutives dont les côtés sont obliques doivent être égales entre elles, d'où les figures 2 et 3.
Il reste donc les bases, qui doivent être l'une majeure et l'autre mineure, d'où les figures 1 et 4.



4.2. L'appropriazione del problema / L'appropriation du problème

Immagine mentale della scatola come parallelepipedo / Image mentale de la boîte comme un parallélépipède

Analizzando gli elaborati è evidente che per gli allievi è stato un compito arduo visualizzare e ricostruire il solido proposto: un solido non standard.

Queste difficoltà sono legate alle abilità visuospaziali che hanno dovuto mettere in campo i risolutori, ovvero quelle abilità che permettono di elaborare i movimenti e le informazioni spaziali e che rispondono alle domande "dove si trova un oggetto" e "che forma possiede" - ("Geometria Test - prove di valutazione per la scuola primaria e secondaria di I grado" I.C. Mammarella, M. Todeschini, G. Englaro, D. Lucangeli e C. Cornoldi).
L'analyse des travaux montre qu'il a été difficile pour les élèves de visualiser et de reconstruire le solide proposé : un solide non standard.
Ces difficultés sont liées aux compétences visuospatiales que les résolveurs ont dû mettre en œuvre, c'est-à-dire les compétences qui permettent de traiter les mouvements et les informations spatiales et qui répondent aux questions "où se trouve un objet" et "quelle est sa forme" - ("Geometria Test - prove di valutazione per la scuola primaria e secondaria di I grado" I.C. Mammarella, M. Todeschini, G. Englaro, D. Lucangeli et C. Cornoldi).

Un primo ostacolo potrebbe essere stato l'utilizzo del termine scatola che, in qualche misura, ha impedito agli allievi più fragili di immaginare un prisma a base trapezoidale e hanno forzato la chiusura del solido addirittura suddividendo le facce a loro disposizione pur di arrivare ad una scatola a forma di comune parallelepipedo.
Un premier obstacle pourrait être l'utilisation du terme boîte qui, dans une certaine mesure, a empêché les élèves les plus « fragiles » d'imaginer un prisme à base trapézoïdale, et ils ont forcé la fermeture du solide en subdivisant les faces à leur disposition pour arriver à une boîte en forme de parallélépipède rectangle.

Un secondo ostacolo deriva proprio dall'insegnamento della geometria: troppo spesso vengono proposte tipologie di solidi convenzionali e ancora più spesso questi solidi vengono presentati solo in una certa posizione. Un esempio significativo è dato dal prisma a base triangolare: se appoggiato su di una faccia laterale a rappresentare una tenda da campeggio, non viene riconosciuto facilmente e più spesso scambiato per una piramide offrendo all'osservatore inesperto la sua faccia triangolare come elemento principale da classificare, ad esempio nel problema **La tenda canadese** (ral. 27.I.06 ; cat. 4-6). Offrire agli allievi molteplici punti di vista rispetto a quello standard diventa importante per potenziare le diverse rappresentazioni mentali, sia quelle egocentriche che allocentriche dello spazio, e permette allo studente di visualizzare i solidi indipendentemente dal proprio punto di vista.
Un deuxième obstacle provient de l'enseignement de la géométrie : trop souvent, des types conventionnels de solides sont proposés et, plus souvent encore, ces solides ne sont présentés que dans une certaine position. Un exemple significatif est le prisme à base triangulaire : s'il est placé sur sa face latérale pour représenter une tente de camping, il n'est pas facilement reconnaissable et est le plus souvent confondu avec une pyramide en offrant à l'observateur inexpérimenté sa face triangulaire comme élément principal à classer, par exemple dans le problème **La tente canadienne** (ral. 27.I.06 ; cat. 4-6). Il est important de proposer aux élèves plusieurs points de vue autres que le point de vue standard afin d'améliorer les différentes représentations mentales, à la fois les représentations égocentriques et allocentriques de l'espace, et de permettre aux élèves de visualiser les solides indépendamment de leur propre point de vue.

Esempio 4 (Cat. 7) / Exemple 4 (Cat. 7) - In questo esempio gli allievi utilizzano le facce date dal problema, piegandone alcune e sommandone altre (2 facce B), in modo da ottenere un parallelepipedo a base quadrata. Da notare che alcune facce vengono chiamate lati intendendo che vanno a costituire la superficie laterale.
Dans cet exemple, les élèves utilisent les faces données dans le problème, en plient certaines et en ajoutent d'autres (2 faces B) afin d'obtenir un parallélépipède à base carrée. À noter que certaines faces sont appelées côtés, ce qui signifie qu'elles forment la surface latérale.

DATI: scatola a 6 facce
4= facce già fatte
3= facce che dobbiamo costruire.

La faccia D è la base della scatola. La B (la faccia) è l'altezza. La A e la C sono i lati.

Per costruire la scatola ci occorre un'altra faccia A e altre 2 facce B (lettere nell'illustrazione delle pagine precedenti). Sono le seguenti.
Con queste immagini siamo riusciti ad ottenere la scatola a 6 facce che occorre a Giovanni.
IL PROCEDIMENTO:
Per far coincidere tutti i lati occorre piegarne alcuni.
La faccia A va piegata di 4 quadri. La faccia B non va piegata. Sono illustrate (le piegature) sopra.

DONNÉES : boîte à 6 faces
4= faces déjà réalisées
3= faces à construire.

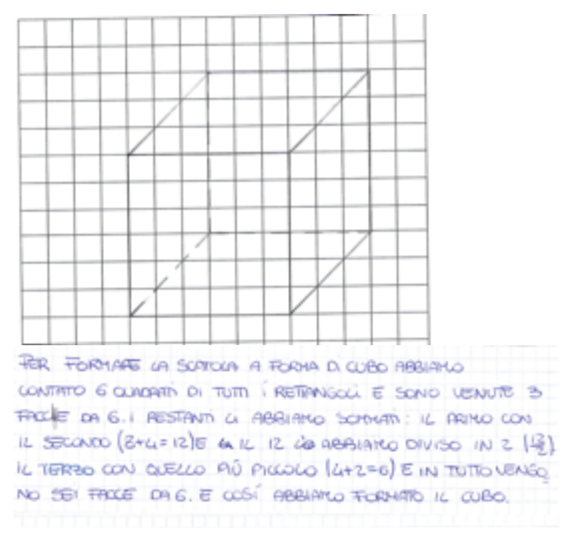
La face D est la base de la boîte. B (la face) est la hauteur. A et C sont les côtés.

Pour construire la boîte, nous avons besoin d'une autre face A et de deux autres faces B (lettres dans l'illustration des pages précédentes). Elles sont les suivantes.
Grâce à ces illustrations, nous avons pu obtenir la boîte à 6 faces dont John a besoin.
LA PROCEDURE :
Pour faire coïncider toutes les faces, il faut en plier certaines.
La face A doit être pliée de 4 carrés. La face B ne doit pas être pliée. Les plis sont illustrés ci-dessus.

<u>Esempio 5</u> (Cat. 8) / <u>Exemple 5</u> (Cat. 8) - Nell'esempio sottostante gli allievi partono dal presupposto errato, ma che non viene mai messo in discussione, che la scatola sia un cubo e di conseguenza articolano tutto il loro lavoro. Inoltre l'unico dato preso in considerazione è stata l'area totale in quadretti delle facce date dal problema. Il procedimento risolutivo si è basato quindi sul calcolo di quadretti necessari per comporre il cubo che avevano immaginato.
Dans l'exemple ci-dessous, les élèves font l'hypothèse erronée, jamais remise en cause, que la boîte est un cube et articulent en conséquence l'ensemble de leur travail. De plus, la seule donnée prise en compte est l'aire totale, en carrés, des faces données par le problème. La procédure de résolution est donc basée sur le calcul des carrés nécessaires pour composer le cube qu'ils ont imaginé.

Per formare la scatola a forma di cubo abbiamo contato i quadratini di tutti i rettangoli e sono venute 3 facce da 6. I restanti li abbiamo sommati: il primo con il secondo (8+4=12) e il 12 lo abbiamo diviso in 2 (12/2). Il terzo con quello più piccolo (4+2=6) e in tutto vengono sei facce da 6. E così abbiamo formato il cubo.

Pour former la boîte cubique, nous avons compté les carrés de tous les rectangles et nous avons obtenu 3 faces de 6. Nous avons additionné les faces restantes : la première avec la deuxième (8+4=12) et les 12 ont été divisés en 2 (12/2), la troisième avec la plus petite (4+2=6) et nous avons obtenu 6 faces de 6. Le troisième avec le plus petit (4+2=6) et nous avons obtenu en tout six faces de 6. C'est ainsi que nous avons formé le cube.



Esempio 6 (Cat. 8) / Exemple 6 (Cat. 8) - Anche in questo caso gli allievi partono dal presupposto che la scatola sia un parallelepipedo e tagliano le facce date dal problema in modo da ottenere la figura immaginata. La soluzione fornita consiste in 2 facce diverse, una 4 × 10 e l'altra 4 × 2, che sono effettivamente quelle mancanti dopo il ritaglio e l'assemblamento.

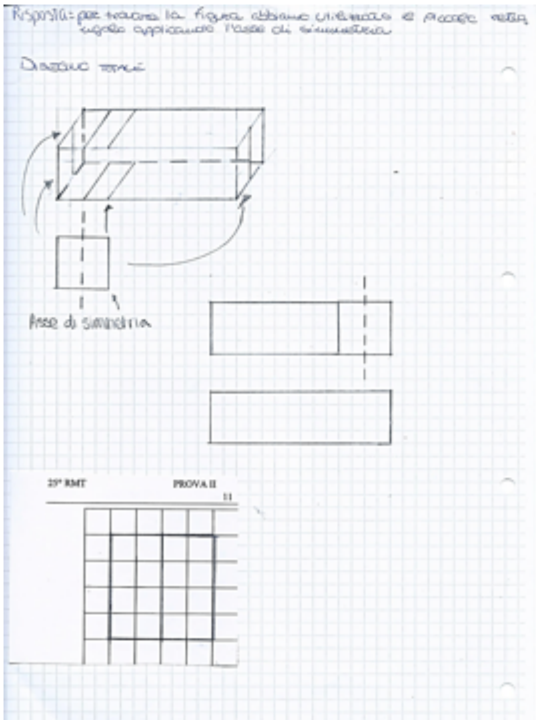
À nouveau, les élèves supposent que la boîte est un parallélépipède et découpent les faces données par le problème afin d'obtenir la figure imaginée. La solution proposée consiste en 2 faces différentes, l'une 4 × 10 et l'autre 4 × 2, qui sont en fait celles qui manquent après le découpage et l'assemblage.

Abbiamo immaginato di costruire una scatola aggiungendo altre due facce. Quindi lo abbiamo poi disegnato e ritagliato, controllando che tornasse tutto.

Nous avons imaginé construire une boîte en ajoutant deux faces supplémentaires. Nous l'avons ensuite dessinée et découpée, en vérifiant qu'elle s'emboîtait bien.

Esempio 7 (Cat. 8) / Exemple 7 (Cat. 8) - In questo esempio, come nei precedenti, gli allievi partono dall'immagine mentale di scatola come parallelepipedo. A questo aggiungono l'informazione sull'asse di simmetria, trasformando

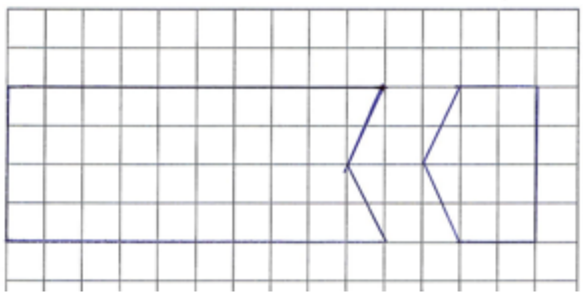
il rettangolo 2x4 in un quadrato con un ribaltamento rispetto al lato di 4 quadretti. Tale faccia così ottenuta è stata applicata più volte per ottenere il parallelepipedo.
Dans cet exemple, comme dans les précédents, les élèves partent de l'image mentale d'une boîte en tant que parallélépipède. Ils y ajoutent des informations sur l'axe de symétrie, transformant le rectangle 2x4 en un carré avec un côté retourné de 4 carrés. Cette face ainsi obtenue a été appliquée plusieurs fois pour obtenir le parallélépipède.

Risposta: per trovare la figura abbiamo utilizzato il piccolo rettangolo applicando l'asse di simmetria *Réponse : Nous avons utilisé le petit rectangle pour trouver la figure en appliquant l'axe de symétrie*	

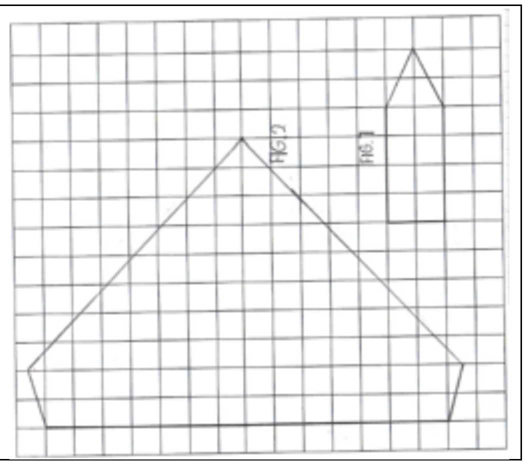
Ricerca forzata di un solo asse di simmetria / Recherche forcée d'un axe unique de symétrie

In molti elaborati si ritrovano disegni delle facce mancanti come se si ricercassero incastri per dare senso all'informazione contenuta nel testo sull'asse di simmetria. In alcuni casi tale informazione prende il sopravvento su tutte le altre, condizionando l'immagine mentale della scatola da ottenere.
Dans de nombreuses copies, on trouve des dessins des faces manquantes, comme si l'on cherchait des articulations pour donner un sens aux informations contenues dans le texte sur l'axe de symétrie. Dans certains cas, cette information prime sur toutes les autres, conditionnant l'image mentale de la boîte à obtenir.

Esempio 8 (Cat. 10) / Exemple 8 (Cat. 10) - Ancora partendo dall'immagine della scatola come parallelepipedo, gli allievi trovano che le due facce mancanti sono il rettangolo 4 × 10 e il rettangolo 4 × 2. Tuttavia, siccome il rettangolo ha due assi di simmetria, trasformano le figure in due pentagoni, uno concavo e l'altro convesso, in modo che perdano un asse di simmetria ciascuno.
Toujours à partir de l'image de la boîte comme parallélépipède, les élèves constatent que les deux faces manquantes sont le rectangle 4 × 10 et le rectangle 4 × 2. Cependant, comme le rectangle possède deux axes de symétrie, ils transforment les figures en deux pentagones, l'un concave et l'autre convexe, de sorte qu'ils perdent chacun un axe de symétrie.

Per coprire lo spazio mancante dovrei usare dei rettangoli, ma essi hanno 2 assi di simmetria *Ma se facciamo parte concava e una convessa* *rimuovo un asse di simmetria ottenendo un rettangolo mettendo insieme questi pezzi ma senza le due assi di simmetria* *Pour couvrir l'espace manquant, je devrais utiliser des rectangles, mais ils ont deux axes de symétrie* *Mais si on fait une partie concave et une partie convexe* *J'enlève un axe de symétrie et j'obtiens un rectangle en assemblant ces pièces mais sans les deux axes de symétrie.*	

Esempio 9 (Cat. 7) / Exemple 9 (Cat. 7) - Partendo dal testo in cui è descritta una scatola a 6 facce, gli allievi, avendo a disposizione facce rettangolari con misure diverse, pensano a un prisma con base pentagonale. Questa figura ha un solo asse di simmetria, come richiesto. Tuttavia la base della scatola, che si otterrebbe usando le facce date come superficie laterale, non corrisponde alle misure dei lati del pentagono rappresentato. Inoltre non viene rispettato il vincolo delle 6 facce, che è in qualche modo colmato dall'affermazione che la scatola sia senza coperchio.
À partir du texte décrivant une boîte à 6 côtés, les élèves, ayant des faces rectangulaires de tailles différentes, pensent à un prisme à base pentagonale. Cette figure n'a qu'un seul axe de symétrie, comme il se doit. Cependant, la base de la boîte, qui serait obtenue en utilisant les faces données comme surfaces latérales, ne correspond pas aux mesures des côtés du pentagone représenté. De plus, la contrainte des 6 faces n'est pas respectée, ce qui est en quelque sorte comblé par l'affirmation que la boîte n'a pas de couvercle.

Abbiamo pensato che, avendo sei facce, potesse essere un prisma irregolare a base pentagonale, ovviamente senza coperchio. Le facce date erano quattro di quelle ai lati del pentagono: ne mancava una (figura 1), a cui abbiamo aggiunto "uno spunzone", e la base (figura 2) *Nous avons pensé qu'avec ses six faces, il pouvait s'agir d'un prisme irrégulier à base pentagonale, évidemment sans couvercle. Les faces données étaient quatre de celles situées de part et d'autre du pentagone : il en manquait une (figure 1), à laquelle nous avons ajouté "un coin", et la base (figure 2)*	

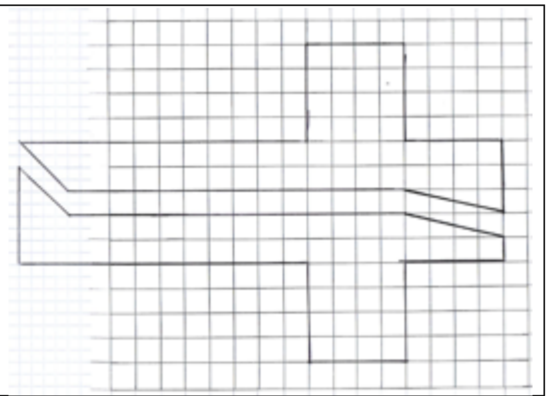
Gli allievi non conoscono la simmetria dei quadrilateri. Perché? / Les élèves ne connaissent pas la symétrie des quadrilatères. Pourquoi ?

La simmetria è presente ovunque intorno a noi e lo è a tal punto che l'abbiamo interiorizzata in modo inconsapevole, facendola diventare criterio per l'attribuzione di bellezza. Riteniamo infatti più bello tutto ciò che è simmetrico. Questa bellezza l'abbiamo riprodotta nelle opere d'arte, infatti le ritroviamo nelle decorazioni delle chiese, nelle pavimentazioni, nelle strutture architettoniche. Si introduce fin dalle prime classi della scuola primaria, nonostante questo, spesso a scuola non le si attribuisce la necessaria attenzione didattica e viene spesso presentata come il completamento intuitivo di una figura.
La symétrie est présente partout autour de nous et c'est à tel point que nous l'avons intériorisée inconsciemment, la faisant devenir un critère d'attribution de la beauté. En effet, nous considérons que tout ce qui est symétrique est plus beau. Nous avons reproduit cette beauté dans les œuvres d'art, nous la retrouvons en effet dans les décorations d'églises, les revêtements de sol, les structures architecturales. Elle est introduite dès les premières années de l'école primaire, malgré cela, souvent à l'école, elle ne reçoit pas l'attention didactique nécessaire et elle est souvent présenté comme l'achèvement intuitif d'une figure.

Malgré cela, à l'école, le concept de symétrie est peu considéré et didactiquement développé de manière incorrecte.

Si introduce fin dalla classe prima della scuola primaria, ma le viene spesso dedicato pochissimo spazio, sia nei libri di testo che nella didattica in classe e viene perlopiù presentata come il completamento intuitivo di una figura. Nel proseguire del percorso scolastico si chiede agli allievi di osservare alcune particolarità non significative o addirittura fuorvianti, come la direzione dell'asse (verticale, orizzontale, obliquo) o la sua posizione (interna o esterna), senza proporre invece attività che consentano agli studenti di coglierne le proprietà e di mettere in evidenza varianti ed invarianti. É forse la poca attenzione data a questo concetto il motivo per il quale anche nello studio dei quadrilateri non si lavora a sufficienza sulla loro classificazione rispetto agli assi di simmetria, per cui si confondono le diagonali del rettangolo con gli assi di simmetria, non si riconoscono quali sono i quadrilateri con un solo asse, come nel caso del trapezio isoscele, e non si sa che possono esserci quadrilateri senza assi di simmetria, come nel caso del parallelogramma.
Elle est introduite dès la première année de l'école primaire, mais souvent très peu de place lui est consacrée, que ce soit dans les manuels ou dans l'enseignement en classe, et elle est le plus souvent présentée comme la réalisation intuitive d'une figure. Au fil de la scolarité, on demande aux élèves d'observer quelques caractéristiques insignifiantes, voire trompeuses, comme la direction de l'axe (vertical, horizontal, oblique) ou sa position (interne ou externe), sans pour autant proposer des activités permettant d'en saisir les propriétés et d'en mettre en évidence les variantes et les invariants. C'est peut-être le manque d'attention portée à ce concept qui explique que même dans l'étude des quadrilatères, on ne travaille pas suffisamment sur leur classification par rapport aux axes de symétrie, de sorte que les diagonales du rectangle sont confondues avec les axes de symétrie, que les quadrilatères à un seul axe ne sont pas reconnus, comme dans le cas du trapèze isocèle, et que l'on ne sait pas qu'il peut y avoir des quadrilatères sans axe de symétrie, comme dans le cas du parallélogramme.

Esempio 10 (Cat. 8) / Exemple 10 (Cat. 8) - Come nell'esempio 5, il procedimento risolutivo si è basato sul calcolo di quadretti necessari per comporre il cubo che avevano immaginato come scatola. Avendo ben presente l'informazione sull'asse di simmetria, l'hanno utilizzata per dividere lo sviluppo piano del cubo in due figure, che nella loro intenzione dovevano essere simmetriche rispetto a un asse. Il risultato è la totale assenza di assi di simmetria.
Comme dans l'exemple 5, la procédure de résolution était basée sur le calcul des carrés nécessaires pour composer le cube qu'ils avaient imaginé comme une boîte. Ayant en tête l'information sur l'axe de symétrie, ils l'ont utilisée pour diviser le développement plan du cube en deux figures qui, dans leur intention, devaient être symétriques par rapport à un axe. Le résultat est l'absence totale d'axes de symétrie.

Ho unito tutte le figure e ho diviso in due lo spazio rimanente in modo che non si formassero due assi di simmetria *J'ai joint toutes les figures et divisé l'espace restant en deux de manière à ce qu'il n'y ait pas deux axes de symétrie.*	

Lessico non appropriato / Vocabulaire inapproprié

In molti elaborati il linguaggio usato dagli allievi è spesso inesatto, si capisce che si riferiscono al concetto/oggetto corretto ma con nomenclatura errata: per esempio usando lato al posto di faccia, quadrato al posto di cubo e area al posto di volume (esempio 11).
Dans de nombreuses copies, le langage utilisé par les élèves est souvent inexact, on comprend qu'ils se réfèrent au bon concept/objet mais avec une nomenclature incorrecte : par exemple en utilisant côté au lieu de face, carré au lieu de cube et aire au lieu de volume (exemple 11).

Interessante notare come, nell'esempio 12, gli allievi utilizzino il termine pentagono per indicare una scatola aperta (con 5 facce) a forma di parallelepipedo.
Il est intéressant de noter que dans l'exemple 12, les élèves utilisent le terme pentagone pour se référer à une boîte ouverte (avec 5 faces) en forme de parallélépipède.

Pur non utilizzando i termini specifici in modo adeguato il procedimento utilizzato e le spiegazioni fornite, fanno spesso pensare che la rappresentazione mentale corrisponda alla situazione rappresentata dagli allievi.
Bien que les termes spécifiques ne soient pas utilisés de manière adéquate, la procédure utilisée et les explications données suggèrent souvent que la représentation mentale correspond à la situation décrite par les élèves.

Esempio 11 (Cat.8) / Exemple 11 (Cat. 8) - Nell'esempio riportato, il termine lato viene utilizzato sia in modo proprio sia al posto di faccia.
Dans l'exemple donné, le terme « côté » est utilisé à la fois correctement et à la place de « face ».

Il lato più lungo che ha disegnato Giovanni in realtà nella scatola compone 2 lati.

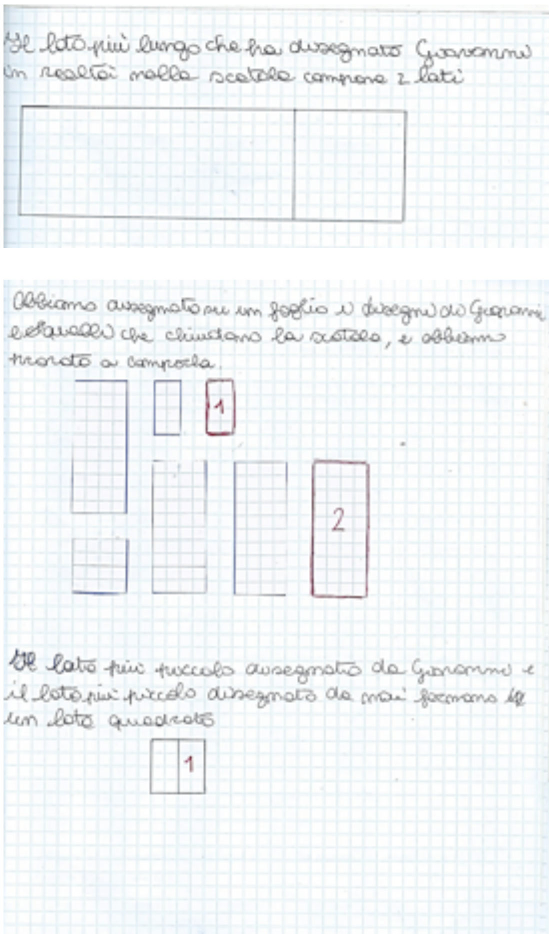
Abbiamo disegnato su un foglio i disegni di Giovanni e quelli che chiudono la scatola, e abbiamo provato a comporla.

Il lato più piccolo disegnato da Giovanni e il lato più piccolo disegnato da noi formano un lato quadrato.

Le côté le plus long que Giovanni a dessiné constitue en fait deux côtés de la boîte.

Nous avons dessiné les dessins de John et ceux qui ferment la boîte sur une feuille de papier et nous avons essayé de les reconstituer.

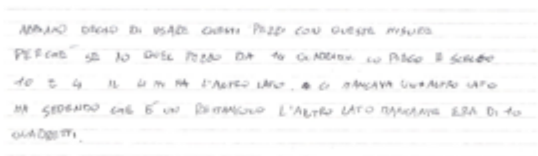
Le plus petit côté dessiné par John et le plus petit côté dessiné par nous forment un côté carré.



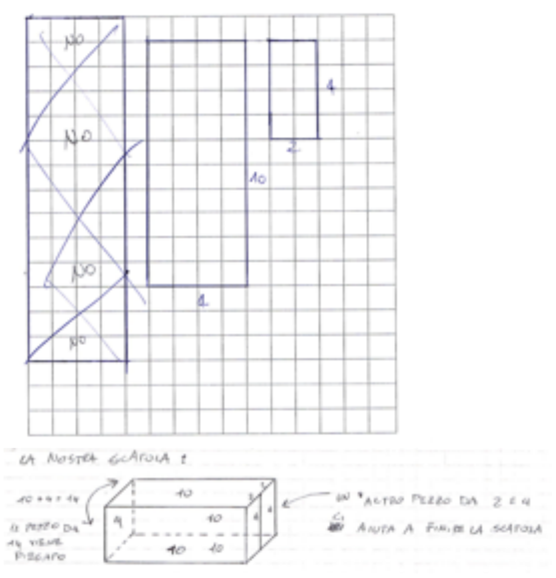
Esempio 12 (Cat. 9) / Exemple 12 (Cat. 9) - In questo esempio gli allievi ottengono una scatola aperta a forma di parallelepipedo. Poiché in questo modo la scatola ha 5 facce, chiamano impropriamente il solido "pentagono"
Dans cet exemple, les élèves obtiennent une boîte ouverte en forme de parallélépipède. Comme la boîte a 5 faces, ils appellent improprement le solide un "pentagone".

Abbiamo deciso di usare questi pezzi con queste misure perchè se io quel pezzo da 14 quadratini lo piego e scelgo 10 e 4 il 4 mi fa l'altro lato. Ci mancava un altro lato ma sapendo che è un pentagono l'altro lato mancante era di 10 quadretti.

La nostra scatola:
10+4 = 14
Il pezzo da 14 viene piegato
Un altro pezzo da 2 e 4 ci aiuta a finire la scatola
Nous avons décidé d'utiliser ces pièces avec ces



mesures parce que si je plie cette pièce de 14 carrés et que je choisis 10 et 4, le 4 me donne l'autre côté. Il nous manquait un autre côté, mais sachant qu'il s'agit d'un pentagone, l'autre côté manquant était de 10 carrés.
Notre boîte :
10+4 = 14
La pièce de 14 est pliée
Une autre pièce de 2 et 4 nous aide à terminer la boîte.



5. Indicazioni didattiche / Indications didactiques

Il problema può essere usato in percorsi di geometria solida, con i seguenti obiettivi:
Le problème peut être utilisé dans des parcours de géométrie solide, avec les objectifs suivants :

Cercare di migliorare la visualizzazione spaziale

La visualizzazione spaziale è una competenza che non si insegna nel senso stretto della trasmissione dall'insegnante all'allievo, né con esercizi, né con consigli, né con imposizioni. Spetta all'allievo costruire questa abilità. Lo fa fin dall'infanzia manipolando gli oggetti a sua disposizione. Si pensa che "giochi", in realtà la sua attività va ben oltre l'aspetto giocoso: muove questi oggetti, li giustappone, li impila, li tasta, ... Questa sperimentazione gli permette di scoprire relazioni e proprietà. Per migliorare la visualizzazione spaziale è importante stimolare la manipolazione in classe, per tutto il tempo necessario. Come per il problema **Le scatole di Caterina** (ral. 26.F.07 ; cat. 4-6) già analizzato in un articolo del gruppo Geometria 3D, gli allievi che non hanno trovato la soluzione devono iniziare tagliando, incollando, costruendo di fatto figure geometriche tridimensionali per verificare le loro ipotesi.

Essayer d'améliorer la visualisation spatiale

La visualisation spatiale est une compétence qui ne s'enseigne pas au sens strict de la transmission d'un enseignant à un apprenant, ni par des exercices, ni par des conseils, ni par des impositions. C'est à l'élève de construire cette compétence. Il le fait dès l'enfance en manipulant les objets mis à sa disposition. On croit qu'il « joue », en réalité son activité va bien au-delà de l'aspect ludique : il déplace ces objets, les juxtapose, les empile, les palpe, ... Cette expérimentation lui permet de découvrir des relations et des propriétés. Pour améliorer la visualisation spatiale, il est important de stimuler la manipulation en classe, aussi longtemps que nécessaire. Comme pour le problème **Les boîtes de Catherine** (26.F.07 ; cat. 4-6) déjà analysé dans un article du groupe Géométrie 3D, les élèves qui n'ont pas trouvé la solution doivent commencer par découper, coller, voire construire des figures géométriques en trois dimensions pour vérifier leurs hypothèses.

Cercare di fornire immagini di prismi non standard

Nella gran parte dei libri di testo e nella maggior parte delle attività di geometria solida vengono proposti solidi standard come parallelepipedi a base rettangolare o quadrata e posizionati sempre con le basi appoggiate; quindi gli allievi non riescono a immaginare posizioni diverse, come, per esempio una tenda canadese (**La tenda canadese, 26-I-06**) o scatole con base trapezoidale come quella del problema analizzato. Per questo motivo è fondamentale fornire immagini diverse agli allievi, in modo da contribuire ad arricchire il repertorio mentale da cui attingere per trovare esempi che si avvicinino alla figura richiesta.

Essayer de fournir des images de prismes non standards

Dans un grande partie de manuels et dans la plupart des activités de géométrie des solides, les solides standards tels que les parallélépipèdes à base rectangulaire ou carrée sont proposés et toujours positionnés avec les bases posées sur un plan horizontal ; l'élève ne peut donc pas imaginer des positions différentes comme, par exemple, une tente canadienne (**La tente canadienne, 26-I-06**) ou des boîtes à base trapézoïdale comme celle du problème analysé. C'est pourquoi il est essentiel de proposer aux élèves des images différentes, afin de contribuer à enrichir le répertoire mental dans lequel ils pourront puiser pour trouver des exemples se rapprochant de la figure demandée.

Lavorare sugli assi di simmetria delle figure piane
È importante lavorare con gli allievi sulla simmetria delle figure piane, fin dalle prime classi della scuola primaria, utilizzando attività che consentano di coglierne le proprietà e di mettere in evidenza varianti ed invarianti delle figure geometriche piane. Si può cominciare dal riconoscimento di simmetrie in natura, negli oggetti di uso comune, nel nostro corpo, per poi passare ad attività più strutturate che prevedano l'uso di carta e forbici e/o di specchi. Un problema che si può utilizzare per lavorare sulla simmetria di quadrilateri è **I laghi** (ral. 07.I.17 ; cat. 7-8).

Travailler sur les axes de symétrie des figures planes
Il est important de travailler avec les élèves sur la symétrie des figures planes, dès les premières classes de l'école primaire, en utilisant des activités qui permettent d'appréhender les propriétés et de mettre en évidence les variantes et les invariants des figures géométriques planes. On peut commencer par reconnaître les symétries dans la nature, dans les objets quotidiens, dans notre corps, puis passer à des activités plus structurées impliquant l'utilisation de papier et de ciseaux et/ou de miroirs. Un problème qui peut être utilisé pour travailler sur la symétrie des quadrilatères est **Les lacs** (07.I.17 ; cat. 7-8).

6. Per andare più lontano / Pour aller plus loin

È essenziale esercitare la visualizzazione spaziale, aspetto che oggi, più che mai, è indispensabile costruire attraverso molteplici esperienze reali mirate: "osservare" un oggetto ad occhi chiusi e descriverlo con linguaggio naturale che solo dopo diventa specifico.
Il est essentiel de pratiquer la visualisation spatiale, un aspect qu'il est aujourd'hui plus que jamais essentiel de construire à travers de multiples expériences ciblées de la vie réelle : « observer » un objet les yeux fermés et le décrire dans un langage naturel qui ne devient spécifique qu'à ce moment-là.

Un laboratorio che si può realizzare con gli allievi di grado da 7 a 9 è l'attività Mat@bel "Solidi noti e solidi misteriosi", riadattata da Matematica 2001 da Roberto Battisti, Fabio Brunelli, Carmela Milone. L'attività punta a stimolare la visione spaziale di solidi tramite loro rappresentazioni fisiche, grafiche, mentali e si basa sulla scoperta e costruzione di alcuni di essi e sulla descrizione delle loro proprietà geometriche. All'interno delle proposte laboratoriali troviamo anche il problema **Povero ottaedro** (ral. 10.F.16 ; cat. 8)
L'activité Mat@bel "Solidi noti e solidi misteriosi", riadattata da Matematica 2001 da Roberto Battisti, Fabio Brunelli, Carmela Milone, est un atelier qui peut être réalisé avec des élèves de la 7e à la 9e année. L'activité vise à stimuler la vision spatiale des solides à travers leurs représentations physiques, graphiques et mentales. Elle est basée sur la découverte et la construction de certains d'entre eux et sur la description de leurs propriétés géométriques. Le problème **Pauvre octaèdre** (10.F.16 ; cat. 8) fait également partie des propositions de l'atelier.

Altra attività laboratoriale interessante (per allievi di grado 8) è quella proposta da Castellini, Fazzino, Santori (2009), in cui si forniscono istruzioni per la costruzione di un solido senza dire a priori di quale solido si tratta. Successivamente si pongono domande-stimolo per suscitare la discussione didattica sulle proprietà del solido ottenuto, che non è un solido standard. Questo approccio, di tipo costruttivista, favorisce la motivazione alla scoperta e l'apprendimento attivo. In una società dove si usano sempre meno le abilità manuali, progettare, ritagliare e costruire rappresenta una modalità di lavoro "nuova" e stimolante.
Une autre activité d'atelier intéressante (pour les élèves de 8e année) est celle proposée par Castellini, Fazzino, Santori (2009), dans laquelle des instructions sont données pour la construction d'un solide sans dire a priori de quel solide il s'agit. Des questions sont ensuite posées pour stimuler la discussion didactique sur les propriétés du solide obtenu, qui n'est pas un solide standard. Cette approche constructiviste encourage la motivation pour la découverte et l'apprentissage actif. Dans une société où les compétences manuelles sont de moins en moins utilisées, concevoir, découper et construire représente une manière "nouvelle" et stimulante de travailler.

Tra i problemi del dominio 3D della banca del RMT, alcuni permettono di riprendere le operazioni in un contesto di scatole, in particolare **La scatola di zuccheri (ral. 05.I.03)** e **Goloserie (ral. 21.I.01)**. Altri sono più centrati sulla visualizzazione spaziale delle facce di un parallelepipedo, come **La scatola da ricoprire (ral. 18.I.04), Scatoline (ral. 17.I.05), Le scatole di Caterina (26.F.07)**, oppure di prismi a base triangolare come **La tenda canadese (ral. 26-I-06).**
Parmi les problèmes du domaine 3D de la banque RMT, certains permettent de reprendre des opérations dans un contexte de boîte, notamment **La boîte de sucres (05.I.03)** et **Gourmandises (21.I.01)**. D'autres sont plus axés

sur la visualisation spatiale des faces d'un parallélépipède, comme **La boîte à recouvrir (18.I.04)**, **Boîtes (17.I.05)**, **Les boîtes de Catherine (ral. 26.F.07)**, ou les prismes à base triangulaire comme **La tente canadienne (26-I-06)**.

7. **Conclusioni / Conclusions**

La didattica laboratoriale sta prendendo piede nella scuola, ma… non è ancora divenuta una vera e propria prassi di lavoro sistematico, poiché non corrisponde ad un cambiamento nella scansione didattica della maggior parte degli insegnanti, ancora troppo ancorati al libro di testo. Il laboratorio si fa ma, nelle due ultime ore del venerdì, quando i ragazzi sono stanchi e la motivazione cala, dando così l'impressione di qualcosa che serve per riempire "tempi morti". Il laboratorio deve diventare parte integrante della didattica per guardare la realtà con attenzione e profondità, ponendosi e condividendo domande, tenendo traccia delle proprie e altrui esperienze, tenendo conto dei vincoli dati e mettendo in relazione più conoscenze che possono essere utili per risolvere il problema.
L'enseignement en laboratoire se développe dans les écoles, mais... il n'est pas encore devenu une véritable pratique de travail systématique, car il ne correspond pas à un changement dans l'analyse didactique de la plupart des enseignants, qui sont encore trop ancrés dans le manuel. L'atelier se fait mais dans les deux dernières heures du vendredi, quand les enfants sont fatigués et que la motivation diminue, donnant ainsi l'impression d'un remplissage de « temps mort ». L'atelier doit devenir une partie intégrante de l'enseignement pour regarder la réalité avec attention et profondeur, en posant et partageant des questions, en gardant trace de sa propre expérience et de celle des autres, en tenant compte des contraintes données et en mettant en relation d'autres connaissances qui peuvent être utiles pour résoudre le problème.

Il laboratorio prevede la manipolazione di "oggetti" matematici, mettendo le basi per migliorare la visualizzazione spaziale. Nei dieci anni intercorsi dalla pubblicazione dell'articolo di Roberto Battisti citato in apertura, le attività che favoriscono le abilità di visualizzazione spaziale sono ancora poche e spesso relegate a momenti di svago che non vengo correlati, da docenti e allievi, all'apprendimento. Riteniamo fondamentale continuare a lavorare in maniera laboratoriale inserendo nel percorso didattico degli allievi attività, che fin dai primi anni della scuola primaria, vadano a rinforzare le abilità di visualizzazione spaziale, partendo dalla manipolazione, per arrivare alla verbalizzazione di quanto visualizzato mentalmente.
L'atelier implique la manipulation « d'objets" mathématiques », jetant les bases d'une amélioration de la visualisation spatiale. Dix ans après la publication de l'article de Roberto Battisti cité au début, les activités qui favorisent la visualisation spatiale sont encore peu nombreuses et souvent reléguées à des moments de loisir qui ne sont pas liés, par les enseignants et les élèves, à l'apprentissage. Nous pensons qu'il est essentiel de continuer à travailler en atelier, en incorporant dans le parcours d'apprentissage des élèves des activités qui renforcent les compétences de visualisation spatiale dès les premières années de l'école primaire, en commençant par la manipulation et en aboutissant à la verbalisation de ce qui est mentalement visualisé.

Bibliografia / Bibliographie

Arrigo G., Sbaragli S., 2004: I solidi. Riscopriamo la geometria, Carocci.
Battisti R., 2013: La visualizzazione spaziale… dimenticata. La Gazzetta di Transalpino n.3, ARMT.
Battisti R., Brunelli F., Milone C., Mat@bel "Solidi noti e solidi misteriosi", riadattata da Matematica 2001.
Castellini A., Fazzino A.L., Santori R., 2009: Nelle nostre classi. Solido sconosciuto?... Non proprio!!!! Prima situazione problematica. in L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Centro ricerche didattiche Ugo Morin.
Cateni C., Ricci F., 2021: "Le scatole di Caterina": analisi di un problema. La Gazzetta di Transalpino n.11, ARMT.
Duval R., 2020: Il primo passo nell'apprendimento della geometria: "vedere" le "figure". La Gazzetta di Transalpino n.10, ARMT.
MIUR, 2012: Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.
Sbaragli S., Mammarella I.C., 2010: L'apprendimento della geometria. In: Lucangeli D., Mammarella I.C. (2010). Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento. Franco Angeli.
Telatin, G., 2015: Ripartiamo da... 0 punti. La Gazzetta di Transalpino n.4, ARMT.
Villani V., 1987: Geometria dello spazio, Centro Ricerche Didattiche U. Morin.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

DALL'ANALISI A POSTERIORI DI ALCUNI PROBLEMI…

DE L'ANALYSE A POSTERIORI DE CERTAINS PROBLÈMES…

… spunti di lavoro in classe /… idées de travail en classe

a cura di Carla Crociani e Rita Spatoloni

con il contributo di Lidia Abate, Serena Guerri, Claudia Mazzoni, Maria Teresa Nughedu, Giunia Percario, Carla Pradella, Silvana Tramontana, Arcangela Quacquarelli, Damiana Sforzi, afferenti al Gruppo Numerazione[1].

Introduzione/Introduction

Nella 30ª edizione del RMT, in ogni categoria, sono stati molti i problemi legati al concetto di divisione con resto e a quelli di scomposizione in fattori primi per la ricerca dei divisori di un numero, del M.C.D, del m.c.m. …

Dans la 30ème édition du RMT, dans toutes le catégories, il y avait beaucoup de problèmes liés à la notion de division avec reste et à ceux de factorisation pour la recherche des diviseurs d'un nombre, du pgdc, du ppmc.

Al Gruppo di lavoro Numerazione, come Coordinatrici, abbiamo proposto l'analisi *a posteriori* dei problemi **Le uova di Caterina** (cat. 4, 5, 6) (I prova) e **Sfida matematica** (cat.5, 6, 7) (I prova) che ci sono sembrati interessanti per poter consolidare i concetti evidenziati, quando si lavora in situazioni non standard come avviene con i problemi del RMT e che abbiamo corretto personalmente in occasione dell'attività in presenza effettuata all'interno del corso di formazione "*Dalla gara alla classe con i problemi del Rally Matematico Transalpino"* (Siena 2023).

En tant que coordinatrices du Groupe de travail Numération, nous avons proposé l'analyse *a posteriori* des problèmes Les œufs de Catherine (cat. 4, 5, 6) (30.I) et Défi mathématique (cat. 5, 6, 7) (30.I) que nous avons trouvé intéressants afin de consolider les concepts mis en évidence, lorsque l'on travaille dans des situations non standard comme cela arrive avec les problèmes du RMT et que nous avons corrigé personnellement lors de l'activité en présence réalisée dans le cadre de la formation "*Du concours à la classe avec les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin*" (Siena 2023).

Gli elaborati esaminati mostrano che raramente gli allievi si sono resi conto di poter sfruttare i concetti di scomposizione in fattori, di divisori, … per la ricerca delle soluzioni di un problema e, talvolta, soltanto dopo averle trovate, ne intuiscono e constatano il legame. Questa evidenza ci spinge a porci due interrogativi a livello didattico:

Les copies examinées montrent que rarement les élèves ont réalisé qu'ils peuvent exploiter les concepts de décomposition en facteurs, ou de diviseurs, ... pour la recherche de solutions à un problème et, parfois, seulement après les avoir trouvées, ils pressentent et constatent le lien. Cette évidence nous pousse à nous poser deux questions au niveau didactique :

1) *Quanto il conoscere e, forse, anche il padroneggiare gli strumenti matematici implica di saperli utilizzare in contesti differenti ed in particolare per la soluzione di problemi di tipo aritmetico?*

2) *Quanto può essere utile e necessario modificare, o meglio diversificare, l'approccio didattico nel proporre la conoscenza di questi stessi strumenti?*

1) *Dans quelle mesure connaître et, peut-être, même maîtriser des outils mathématiques implique-t-il de savoir les utiliser dans différents contextes et, notamment, pour résoudre des problèmes arithmétiques ?*

2) *Dans quelle mesure peut-il être utile et nécessaire de modifier, ou plutôt de diversifier, l'approche didactique en proposant la connaissance de ces mêmes outils ?*

---

[1] Membri del gruppo Numerazione sono anche F. Bernetière, I. Bernetière, E .Fornari, M .Mandelli, I. Parisi, F. Pétiard, C. Provitera, D. Raul, J.B. Romain, S. Tronconi.

Dall'analisi degli elaborati sono emerse sia strategie non considerate nell'analisi a priori, ma molto naturali (es. lavorare per decine nel problema *Le uova di Caterina*), sia errori imprevisti (es. lacune sul concetto di minore fra numeri, di significato di terna di numeri o di numero naturale nella *Sfida matematica*) o anche la mancanza della consapevolezza di aver trovato tutte le soluzioni del problema.

De l'analyse des copies, des stratégies non considérées dans l'analyse a priori, mais très naturelles ont émergé (par exemple, travailler par dizaines dans le problème *Les œufs de Catherine*), et des erreurs inattendues (par exemple des lacunes dans le concept du plus petit de deux nombres, la signification de triplets de nombres ou nombre naturel dans le *Défi mathématique*) ou encore le manque de conscience d'avoir trouvé toutes les solutions au problème.

Nei problemi del RMT indirizzati alle categorie più basse, nella domanda del problema si ricorre a frasi del tipo *Quali sono…?* quando la soluzione è una sola oppure *Quali possono…?* per far capire che le soluzioni sono più di una. Spesso tuttavia questo non è sufficiente a indirizzare gli alunni alla ricerca di tutte le soluzioni possibili.

Dans les problèmes de RMT visant les catégories les plus basses, des phrases telles que *Quelles sont… ?* quand il n'y a qu'une seule solution ou *Lesquelles peuvent… ?* pour préciser qu'il y a plus d'une solution sont utilisées. Souvent, cependant, cela ne suffit pas pour inciter les élèves à rechercher toutes les solutions possibles.

Con gli allievi delle categorie più alte sarebbe pertanto auspicabile una riflessione sulle opportunità offerte a questo proposito dallo strumento algebrico, il cui utilizzo è supporto per raggiungere questa consapevolezza, indipendentemente da come viene formulata la domanda.

Avec les élèves des catégories les plus élevées, il serait donc souhaitable de réfléchir aux opportunités offertes à cet égard par l'outil algébrique, dont l'utilisation est un support pour atteindre cette prise de conscience, quelle que soit la formulation de la question.

Nei primi due paragrafi verrà fatta un'analisi a posteriori sui due problemi selezionati, riportando alcuni elaborati che mostrano i modi di ragionare degli allievi, sia utilizzando gli strumenti a loro disposizione sia a partire dalle proprie intuizioni, spesso differenziate per le categorie, ma sicuramente diverse rispetto a quelle degli adulti esperti.

Dans les deux premiers paragraphes, une analyse a posteriori sera faite sur les deux problèmes sélectionnés, en rapportant quelques copies qui montrent les façons de raisonner des élèves, à la fois en utilisant les outils à leur disposition et en partant de leurs propres intuitions, souvent différenciées par catégorie mais certainement différents de ceux des adultes expérimentés.

Nel corso dell'analisi i componenti del gruppo, oltre ad aver selezionato gli elaborati, hanno messo in evidenza gli aspetti positivi e le criticità emerse ed è proprio a partire da queste che, nel paragrafo conclusivo, abbiamo cercato di fornire spunti di lavoro che potrebbero essere di aiuto nella costruzione di un percorso da calibrare sulla propria realtà didattica.

Au cours de l'analyse, les membres du groupe, en plus d'avoir sélectionné les copies, ont mis en évidence les aspects positifs et les points critiques qui sont ressortis et c'est précisément à partir de ceux-ci que, dans le paragraphe de conclusion, nous avons essayé de fournir des idées de travail qui pourraient être une aide à la construction d'un parcours à calibrer sur sa propre réalité didactique.

1. Problema *Le uova di Caterina*

Caterina oggi ha raccolto 138 uova nel suo allevamento di galline.

Per poter vendere tutte le uova al mercato, è riuscita a riempire completamente 28 contenitori, alcuni da quattro uova e alcuni da sei uova.

Quanti contenitori da quattro uova e quanti da sei uova ha utilizzato Caterina?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Compito matematico

Trovare due numeri naturali conoscendo la loro somma (28) e la somma (138) del primo moltiplicato per 4 e del secondo moltiplicato per 6.

Riportiamo i dati statistici che documentano i risultati poco soddisfacenti.

Le uova di Caterina 30.I.06

Cat.	Occ. 0	Occ. 1	Occ. 2	Occ. 3	Occ. 4	Tot.elab.	p. medio
4	267 (32%)	168 (20%)	112 (14%)	113(14%)	169(20%)	829	1.7
5	255 (27%)	200 (22%)	134 (14%)	144(16%)	195(21%)	928	1.8
6	434 (35%)	200 (16%)	289 (23%)	153(12%)	181(14%)	1257	1.6
totale	**957 (32%)**	**568 (19%)**	**535 (18%)**	**410**(14%)	**545(18%)**	**3015**	**1.7**

L'**analisi a priori** ufficiale del problema mette in evidenza quali sono i vincoli da tenere presenti nel corso del procedimento risolutivo (il numero preciso dei contenitori, la loro differente capacità, il numero totale di uova da distribuire): si tratta di elementi importanti da rilevare nella correzione perché possono fornire indizi riguardo a quanto gli allievi, di diversa categoria, siano in grado di trattenerli tutti. Prosegue indicando strategie risolutive a partire da quella per tentativi, da verificare e condurre in maniera più o meno organizzata: l'organizzazione e la conseguente esplicitazione costituiscono, per l'insegnante, un altro elemento utile per tracciare o modificare il percorso didattico nella classe. Passa, successivamente, a prevedere un confronto tra la capacità dei due tipi di contenitori che potrebbe condurre ad un livello di generalizzazione più alto (rapporto tra i due numeri di contenitori) e che potrebbe suggerire un lavoro di approfondimento con la classe, dopo averne individuato il livello di partenza.

Si riportano le procedure indicate sulla scheda "Prima analisi" in occasione della correzione della prova.

A Accorgersi che sostituendo un contenitore da 6 con uno da 4 uova (o viceversa), diminuiamo (o aumentiamo) di 2 il numero delle uova, ad esempio: con 10 scatole da 6 uova e 18 scatole da quattro uova, abbiamo 132 uova, mancano sei uova; quindi, dobbiamo aggiungere 3 (6 : 2 = 3) contenitori da sei e togliere 3 contenitori da 4, arrivando a 13 scatole da sei uova e 15 scatole da quattro uova.

B Partire da un certo numero di contenitori di un tipo (da 6 o da 4 uova), rendersi conto che due contenitori da sei possono essere sostituiti con tre da quattro e che così il numero totale dei contenitori utilizzati aumenta (o diminuisce) di uno. Procedere quindi operando sostituzioni successive di due contenitori da sei con 3 contenitori da quattro fino ad arrivare a 28 contenitori totali.

C C'è un procedimento più "naturale": *Faccio gruppi di 4 uova: 28 gruppi per preparare le 28 scatole (le disegno o le conto o faccio un "per" e trovo 112 uova in 28 gruppi. Ma non sono ancora 138 uova! Ce ne sono ancora alcune. Metto altre 2 uova per un gruppo, poi due uova in un altro gruppo ... (o le disegno o le conto 112 + 2 = 114; 114 + 2 = 116, ... fino a 138; o faccio calcoli) e vedo che ci sono 13 gruppi di 6 e 15 gruppi di 4. Poi riempio 15 scatole da 4 uova e 13 scatole da 6 uova.*

È opportuno ricordare che i suggerimenti dell'analisi a priori, oltre a costituire una traccia per la correzione e per la raccolta dei dati a livello globale, costituiscono per ciascun insegnante un ricco supporto per la progettazione personale dell'impianto didattico.

Gli allievi hanno spesso affrontato il problema per tentativi.

In alcuni elaborati il tentativo, non previsto nell'analisi a priori, è quello di dividere a metà il numero dei contenitori (28:2= 14) e di considerarne una metà da 4 uova e l'altra da 6 uova. Il controllo (14x4= 56 e 14x6=84, da cui 56+84=140 uova permette subito di stabilire che basta togliere 2 uova da un contenitore da 6 che diventa così da 4, ed il numero di uova è così 138 disposte in 13 (=14-1) contenitori da 6 uova e 15 (=14+1) contenitori da 4 uova. Questo tipo di strategia di bilanciamento è utile e nella discussione in classe perché diventi familiare a tutti.

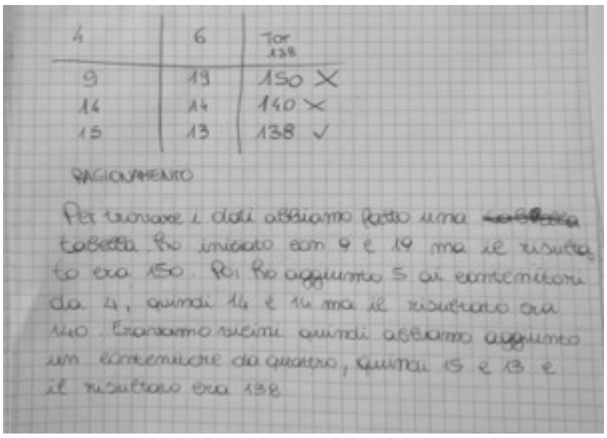


Fig. 1

RAGIONAMENTO

Per trovare i dati abbiamo fatto una tabella. Ho iniziato con 9 e 19 ma il risultato era 150. Poi ho aggiunto 5 ai contenitori da 4, quindi 14 e 14 ma il risultato era 140. Eravamo vicini quindi abbiamo aggiunto un contenitore da quattro, quindi 15 e 13 e il risultato era 138

La procedura A è più frequente, spesso non ben spiegata e si confonde con la procedura per tentativi. Il problema viene quasi sempre risolto con il disegno, in tutte le categorie, questo permette talvolta di capire che c'è stata almeno un'intuizione di questa procedura: si parte dal numero dei contenitori e poi si sistema il numero delle uova.

Tale procedura può essere sintetizzata da una delle due seguenti tabelle: A1 e A2. Nella prima si ipotizza che le uova siano sistemate in contenitori tutti da 6 uova mentre nella seconda che siano sistemate in contenitori tutti da 4 uova.

A1

Totale scatole	Scatole da 6	Scatole da 4	Totale uova
28	28	0	168
28	26	2	164
28	24	4	160
28	22	6	154
…	…	…	…
28	**13**	**15**	138

A2

Totale scatole	Scatole da 4	Scatole da 6	Totale uova
28	28	0	112
28	26	2	116
28	24	4	120
28	22	6	124
…	…	…	…
28	**15**	**13**	138

Nel seguente esempio gli allievi ragionano come sintetizzato nella prima tabella A1.

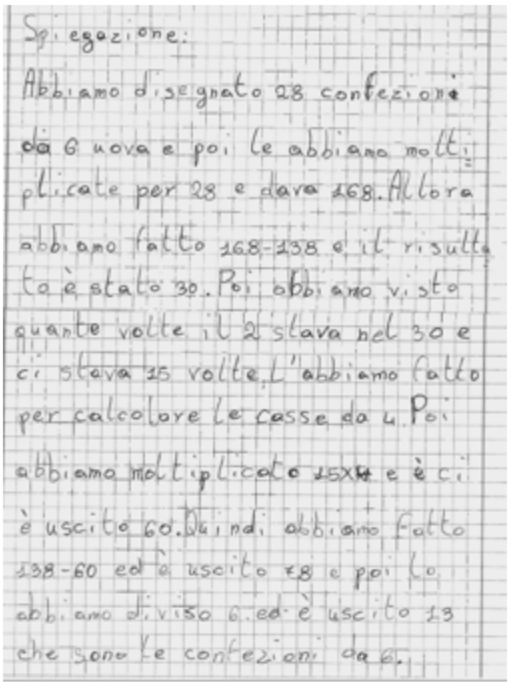

Spiegazione:
Abbiamo disegnato 28 confezioni da 6 uova e poi le abbiamo moltiplicate per 28 e dava 168. Allora abbiamo fatto 168-138 e il risultato è stato 30. Poi abbiamo visto quante volte il 2 stava nel 30 e ci stava 15 volte. L'abbiamo fatto per calcolare le casse da 4. Poi abbiamo moltiplicato 15x4 e è ci è uscito 60. Quindi abbiamo fatto 138-60 ed è uscito 78 e poi lo abbiamo diviso 6 ed è uscito 13 che sono le confezioni da 6.

Fig. 2

Spiegazione

Abbiamo disegnato 28 confezioni da 6 uova e poi le abbiamo moltiplicate per 28 e dava 168.

Allora abbiamo fatto 168 -138 e il risultato è stato 30. Poi abbiamo visto quante volte il 2 stava nel 30 e ci stava 15 volte.

L'abbiamo fatto per calcolare le casse da 4.

Poi abbiamo moltiplicato 15 x 4 e ci è uscito 60.

Quindi abbiamo fatto 138 – 60 ed è uscito 78 e poi lo abbiamo diviso 6 ed è uscito 13 che sono le confezioni da 6.

Se i contenitori fossero tutti da 6 uova si avrebbero 168 uova, 30 in più del dovuto. **Perché dividere per2**?
Non perché sono 2 tipi di contenitori ma perché 2 è la differenza di capienza fra i 2 tipi di contenitori e togliendo 2 uova a 15 contenitori da 6 si ottengono 30 uova da distribuire in 15 (=30:2) contenitori da 4 uova.

I contenitori da 6 sono così rimasti in 13 =(28-15) e quelli da 4 sono diventati 15 (verifica 13×6 +15 ×4= 138). Gli allievi si sono resi conto pienamente della strategia che stavano utilizzando? A volte non è così chiaro.

In molti elaborati è il disegno che permette di rilevare un'intuizione di questo ragionamento.

Nel seguente esempio gli allievi ragionano come sintetizzato nella tabella A2: si fissa sempre il numero dei contenitori (28) ma si riempiono con 4 uova. In questo modo si sistemano solo 112 uova si distribuiscono le 26 (=138-112) uova ancora da sistemare in 13 contenitori contenenti 4 uova che così diventano da 6 uova.

L'incipit del ragionamento è sempre lo stesso: *se i 28 contenitori fossero tutti da 6 (o analogamente tutti da 4) uova quante uova avanzano (mancano) per arrivare ad averne 138?*

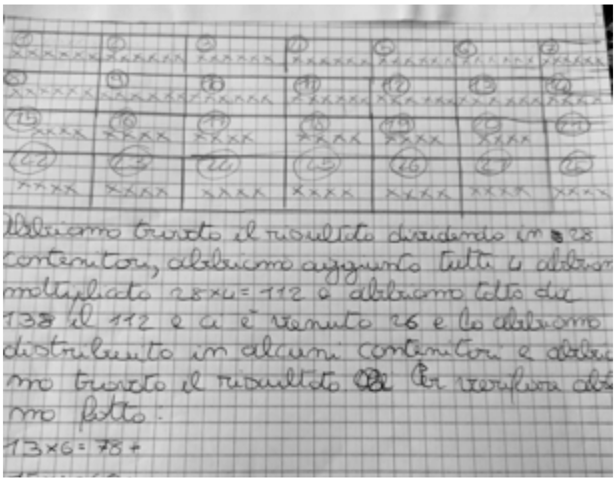


Fig. 3

Abbiamo trovato il risultato dividendo in 28 contenitori, abbiamo aggiunto tutti 4, abbiamo moltiplicato 28 x 4 = 112 e abbiamo tolto da 138 il 112 e ci è venuto 26 e lo abbiamo distribuito in alcuni contenitori e abbiamo trovato il risultato.

Per verificare abbiamo fatto:

13 x 6=78 +

15x 4 =60

....

Nel seguente elaborato (cat. 5) risulta molto chiaro il perché si divida 26 per 2.

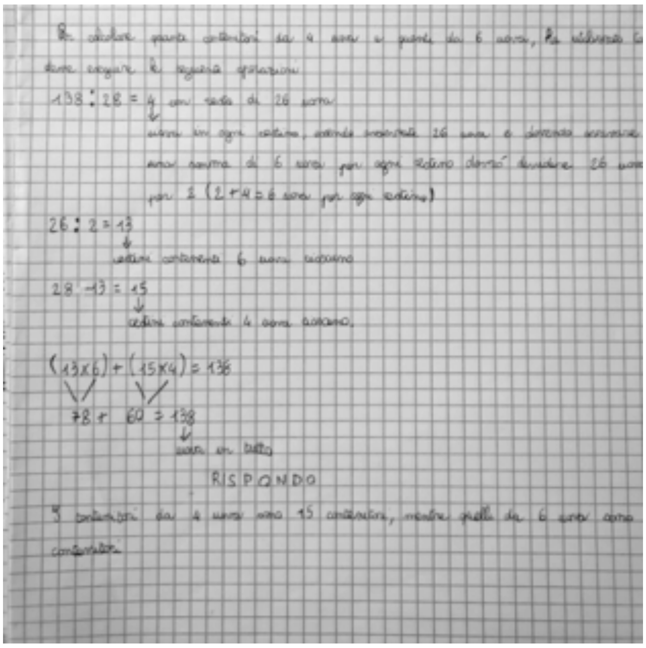


Fig. 4

Per calcolare quanti contenitori da 4 uova e quanti contenitori da 6 uova ha utilizzato Caterina deve eseguire le seguenti operazioni:

138:28=4 con resto di 26 uova

uova in ogni cestino, essendo avanzate 26 uova e dovendo arrivare ad una somma di 6 uova per ogni cestino dovrà dividere 26 uova per 2 (2+4=6 uova per ogni cestino)

26:2=13 cestini contenenti 6 uova ciascuno

28-13=15 cestini contenenti 4 uova ciascuno

(13 x6) + (15x4)=138

78 + 60 =138 uova in tutto

RISPONDO

I contenitori da 4 uova sono 15 contenitori, mentre quelli da 6 uova sono 13 contenitori.

La procedura B è stata meno riscontrata. Tale procedura può essere sintetizzata dalla seguente tabella B1: tiene fisso il numero di uova e poi si sistema il numero dei contenitori.

Totale uova	Scatole da 6	Scatole da 4	Totale scatole
138	23	0	23
138	21	3	24
138	19	6	25
138	17	9	26
138	15	12	27
138	13	15	28

B1

Il seguente elaborato (cat.6) mostra il ragionamento sintetizzato in B

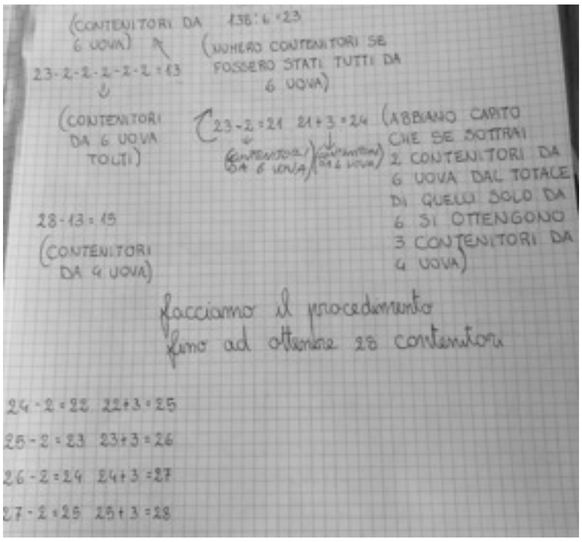


Fig. 5

138 : 6=23 numero dei contenitori se fossero stati tutti da 6

23 - 2=21 *21+3 = 24*

(2 contenitori da 6 uova) *(3 contenitori da 4 uova)*

(Abbiamo capito che se sottrai 2 contenitori da 6 uova dal totale di quelli solo da 6, si ottengono 3 contenitori da 4 uova)

23 – 2 – 2 –2– 2 –2= 13

(contenitori da 6 uova tolti)

Facciamo il procedimento fino ad ottenere 28 contenitori

24 – 2 = 22 *22 + 3 = 25*

25-2=23 *23+3=26*

26-2=24 *24+3=27*

27-2=25 *25+3=28*

Sicuramente, strada facendo, gli allievi hanno scoperto la relazione fra i due tipi di contenitori: *2 contenitori da 6 equivalgono a 3 contenitori da 4.* Si saranno resi conto che questa relazione corrisponde ad effettuare il m.c.m. (4, 6) che indica ogni volta le 12 uova coinvolte nello scambio?

La divisione 138:6 ha resto 0 e quindi la strategia utilizzata è risultata naturale. *Avranno provato anche a partire da 138:4 rendendosi conto che 4 non è divisore di 138?* Non possiamo saperlo ma, in tal caso, avrebbero dovuto gestire il resto della divisione.

Il ragionamento si poteva condurre in modo analogo rendendosi conto che il resto 2 della divisione 138:4 obbligava ad eliminare subito un contenitore da 4 per poterne formare 1 da 6. In ogni passaggio le uova "in gioco" sono 12, m.c.m.(4,6).

contenitori da 4	contenitori da 6	Totale contenitori
33	1	34
30	3	33
27	5	32
24	7	31
21	9	30
18	11	29
15	13	28

La procedura C, assimilabile alla procedura A, è stata veramente più “naturale” e riscontrata nella maggior parte degli elaborati di tutte le categorie. Si osserva, con l’aumentare di categoria, una progressiva crescita del numero di elaborati dove la spiegazione chiarisce che spesso il primo tentativo è quello di dividere a metà il numero dei contenitori.

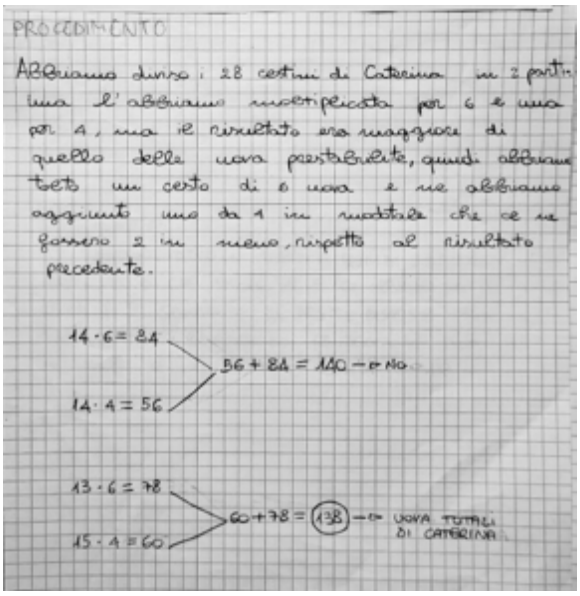


Fig. 6

PROCEDIMENTO

Abbiamo diviso i 28 cestini di Caterina in due parti, una l’abbiamo moltiplicata per 6 e una per 4, ma il risultato era maggiore di quello delle uova prestabilite, quindi abbiamo tolto un cesto di 6 uova e ne abbiamo aggiunto uno da 4 in modo tale che ce ne fossero 2 in meno rispetto al risultato precedente

14 x 6 = 84
56 + 84 = 140 NO
14 x 4 = 56

13 x 6 = 78
60 +78 =138 Uova totali di Caterina
15 x 4 = 60

Se il partire dalla metà dei contenitori, è un tentativo che porta molto presto alla soluzione, in altri elaborati, se pur organizzati, la ricerca è più lunga.

Fig. 7

DATI

138= uova

28 = contenitori alcuni da 4 e alcuni da 6

1°TENTATIVO	*27×4=108 6×1=6 108+6=114*
2°TENTATIVO	
3°TENTATIVO	
4°TENTATIVO	
5°TENTATIVO	
6°TENTATIVO	
7°TENTATIVO	
8°TENTATIVO	
9° TENTATIVO	
10°TENTATIVO	
11°TENTATIVO	
12°TENTATIVO	
13°TENTATIVO	*15×4=60 6×13=78 60+78=138*

Nel caso sopra riportato, la tabella mostra tentativi ordinati a partire dal numero dei contenitori dei due tipi che, sommati, rispettino il vincolo 28 e le verifiche, di volta in volta, del totale delle uova fino a trovare la soluzione.

Nel primo tentativo gli allievi tengono sotto controllo il numero dei contenitori da 4 e ne considerano 27 (il numero massimo possibile dal momento che i contenitori sono di due tipi) ma procedono senza percepire alcuna regolarità, anche se la tabella le mostra chiaramente. Potrebbe essere interessante esaminare questa procedura in una discussione in classe.

Nel successivo elaborato (cat. 6) i tentativi sono descritti verbalmente senza alcuna riflessione sull’andamento della ricerca.

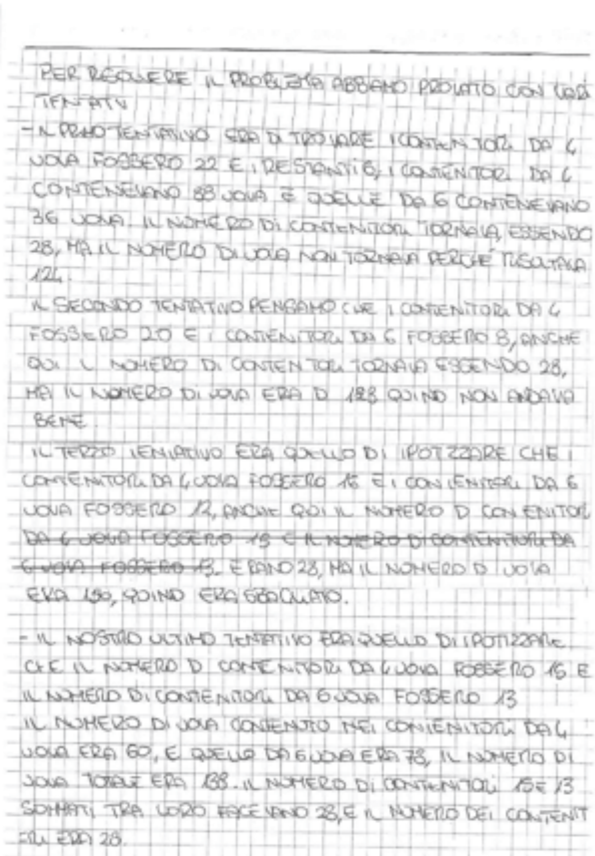


Fig. 8

Per risolvere il problema abbiamo provato con i tentativi

-Il primo tentativo era di trovare i contenitori da 4 uova fossero 22 e i restanti 6; i contenitori da 4 contenevano 88 uova e quelli da 6 contenevano 36 uova. Il numero dei contenitori tornava, essendo 28, ma il numero delle uova non tornava perché risultava 124.

- Il secondo tentativo pens(ava)*mo che i contenitori da 4 fossero 20 e i contenitori da 6 fossero 8, anche qui il numero di contenitori tornava essendo 28 ma il numero di uova era 128 quindi non andava bene.*

- Il terzo tentativo era quello di ipotizzare che i contenitori da 4 fossero 16 e i contenitori da 6 fossero 12, anche qui il numero dei contenitori erano 28 ma il numero delle uova era 136, quindi era sbagliato.

- Il nostro ultimo tentativo era quello di ipotizzare che il numero di contenitori da 4 fossero 15 e il numero dei contenitori da 6 fossero 13. Il numero di uova contenuto nei contenitori da 4 era 60 e quello da 6 uova era 78, il numero totale era 138, il numero di contenitori 15 e 13 sommati tra loro facevano 28 e il numero dei contenitori era 28.

Nell'elaborato di categoria 4 in Fig. 9, gli allievi disegnano i 28 contenitori e li completano con le uova. D'altra parte i numeri in gioco consentono questo tipo di approccio ma sarà compito dell'insegnante favorire una discussione che spinga alla riflessione sul procedimento e avvii il processo della "generalizzazione"

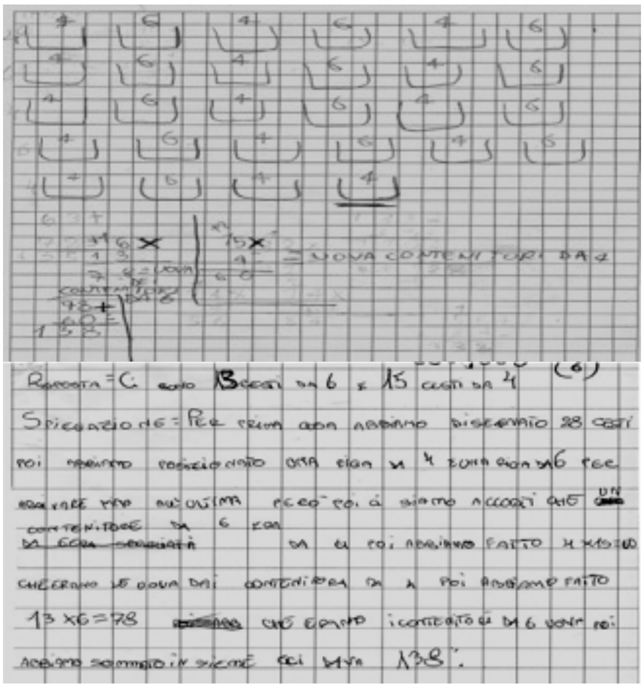


Fig. 9

RISPOSTA = ci sono 13 cesti da 6 e 15 cesti da 4

SPIEGAZIONE = Per prima cosa abbiamo disegnato 28 cesti, poi abbiamo posizionato una riga di 4 e una di 6 per arrivare fino all'ultima, però ci siamo accorti che un contenitore da 6 era da 4 poi abbiamo fatto 4 ×15=60 che erano le uova dei contenitori da 4 poi abbiamo fatto 13×6=78 che erano i contenitori da 6 uova poi abbiamo sommato insieme ci dava 138.

Osservando a posteriori si nota una discrepanza tra ciò che gli allievi hanno disegnato e ciò che hanno scritto: potrebbero aver proceduto per righe alternando contenitori da 4 e da 6 in modo da ottenere delle decine (probabilmente per facilitare il conteggio delle uova) e da riempire tutta la riga con i contenitori. Disegnano 4 righe complete di contenitori (30×4=120 uova), la quinta riga è composta da un contenitore da 4 e uno da 6 (10 uova) e completata da due contenitori da 4. Non è certo che si siano resi conto di lavorare per decine. Oppure potrebbero aver lavorato per colonne, anche se hanno scritto righe (righe equivale a linee verticali), ed hanno aggiustato i numeri.

Un altro modo di rappresentare associando i multipli di 4 e di 6 (cat.6):

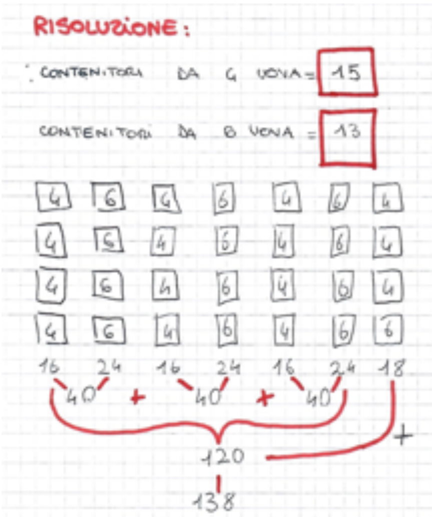


Fig. 9a

Utilizzano i raggruppamenti per facilitare il conteggio

Una procedura non prevista, usata alcune volte in cat. 4, più volte in cat. 5 e in cat. 6 è la seguente: osservano che una coppia di contenitori (uno da 4 uova e l'altro da 6 uova) forma una decina di uova, quindi procedono dividendo per decine il numero totale delle uova (13 decine e resto 8 uova), quindi deducono 13 contenitori da 6 e 13 da 4, con le uova rimaste aggiungono due contenitori da 4 uova e rispondono correttamente.

Nel seguente elaborato, ancora di cat. 4, è evidente che gli allievi hanno lavorato per decine.

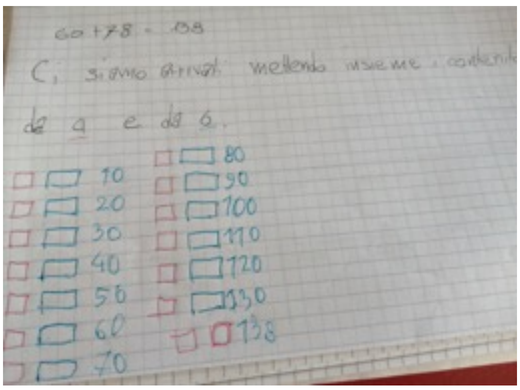


Fig.10

60 + 78=138

Ci siamo arrivati mettendo insieme i contenitori da 4 e da 6

(v. disegno)

Alcuni elaborati di cat. 5 e 6 mostrano il progredire di questo tipo di spiegazione:

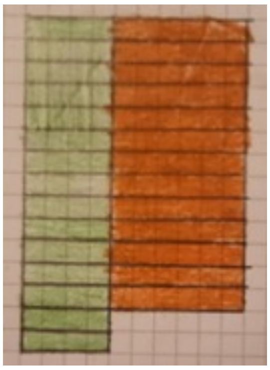


Fig. 11

La schematizzazione e la colorazione fanno intendere che si siano serviti di un conteggio per decine.

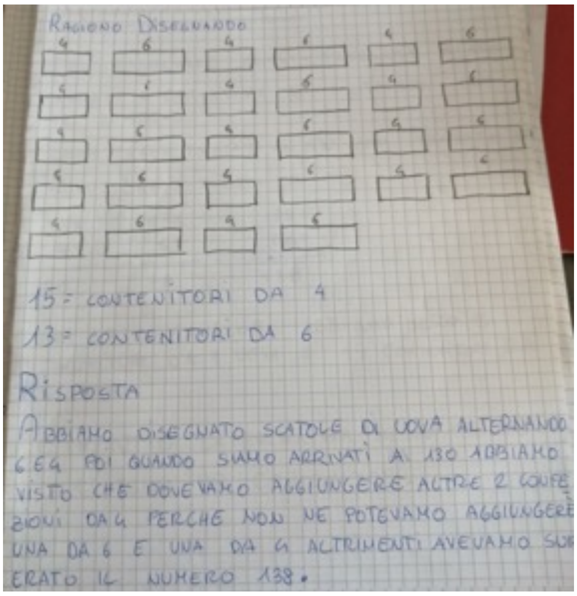


Fig. 11a (cat.5*)*
RAGIONO DISEGNANDO
(v. disegno)

15= contenitori da 4
13= contenitori da 6
RISPOSTA
Abbiamo disegnato scatole di uova alternando 6 e 4. Poi quando siamo arrivati a 130 abbiamo visto che dovevamo aggiungere altre 2 confezioni da 4 perché non ne potevamo aggiungere una da 6 e una da 4 altrimenti avevamo superato il numero 138.

La differenza tra le due rappresentazioni è nell'immediatezza di lettura dell'unità di misura: un contenitore da 4 uova è di 4 quadretti, quello da 6 uova è di 6 quadretti e questo fa emergere subito l'idea della decina. L'elaborato della fig.11a, pur rappresentando la stessa idea, è di una lettura meno immediata, però suggerisce un naturale cambiamento di variabile sul numero delle uova mantenendo fisso quello dei contenitori (2×4 e 2×6). *Quale sarà in questo caso il numero delle uova?* Inoltre questo elaborato mostra il buon approccio alla risoluzione di un problema, opportuno fin dalla scuola Primaria: "*Ragiono disegnando*". La rappresentazione grafica può essere di grande aiuto prima di pensare a qualunque forma di calcolo.

Da altri elaborati si evince che gli allievi non sentono più il bisogno del supporto del disegno:

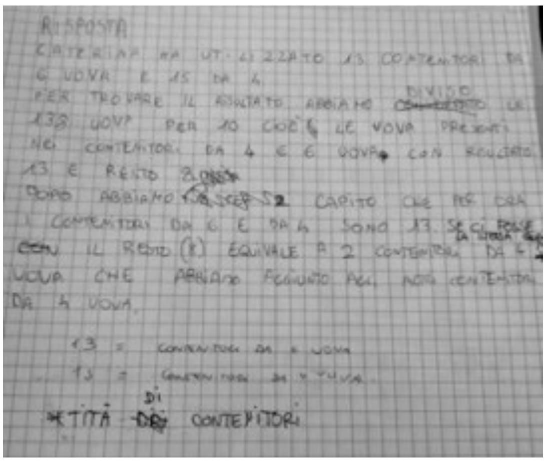


Fig. 12 *(cat.6)*
RISPOSTA
Caterina ha utilizzato 13 contenitori da 6 uova e 15 da 4.
Per trovare il risultato abbiamo diviso le 138 uova per 10 cioè le uova presenti nei contenitori da 4 e 6 uova, con risultato 13 resto di 8.
Dopo abbiamo capito che ora i contenitori da 6 e da 4 sono 13 se ci fosse la stessa quantità di contenitori.
Il resto (8) equivale a 2 contenitori da 4 uova che abbiamo aggiunto ai contenitori da 4 uova.
13= contenitori da 6 uova
15= contenitori da 4 uova

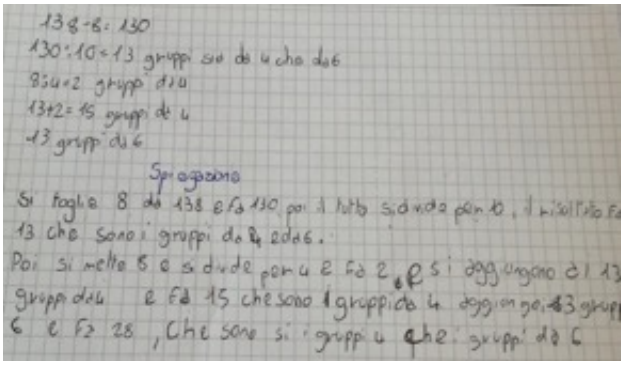


Fig. 13 (cat.6)

138 – 8 = 130

130 : 10 =13 gruppi sia da 4 che da 6

8 :4 = 2 gruppi da 4

13 + 2= 15 gruppi da 4

13 gruppi da 6

Spiegazione

Si toglie 8 da 138 e fa 130 poi il tutto si divide per 13 che sono i gruppi da 4 e da 6. (Hanno diviso per 10!) *Poi si mette 8 e si divide per 4 e fa 2 e si aggiungono ai 13 gruppi da 4 e fa 15 che sono i gruppi da 4 aggiungiamo 13 gruppi da 6 e fa 28, che sono sia i gruppi da 4 che i gruppi da 6*

Altre strategie:

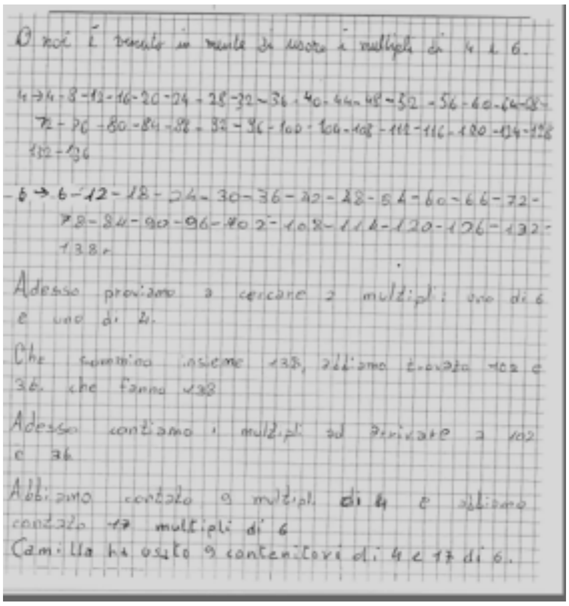


Fig. 14 *elaborato di cat.5*

A noi è venuto in mente di usare i multipli di 4 e di 6.

4→ 4-8-12-16-20-24-28-32-36-40-44-48-52-56-60-64-68-72-76-80-84-88-92-96-100-104-108-112-116-120-124-128-132-136

6→ 6-12-18-24-30-36-42-48-54-60-66-72-78-84-90-96-102-108-114-120-126-132-138

Adesso proviamo a cercare i multipli uno di 6 e uno di 4 che sommiamo insieme 138, abbiamo trovato 102 e 36 che fanno 138

Adesso contiamo i multipli ad arrivare a 102 e 36.

Abbiamo contato 9 multipli di 4 e 17 multipli di 6. Camilla ha usato 9 contenitori da 4 e 17 da 6.

L'elaborato mostra che gli allievi non tengono in considerazione che il numero totale dei contenitori era 28, se lo avessero controllato, avrebbero trovato la soluzione corretta.

Anche nell'elaborato seguente (cat.5) gli allievi dicono di aver sottratto per multipli di 6, controllando di volta in volta se il numero rimasto era multiplo di 4.

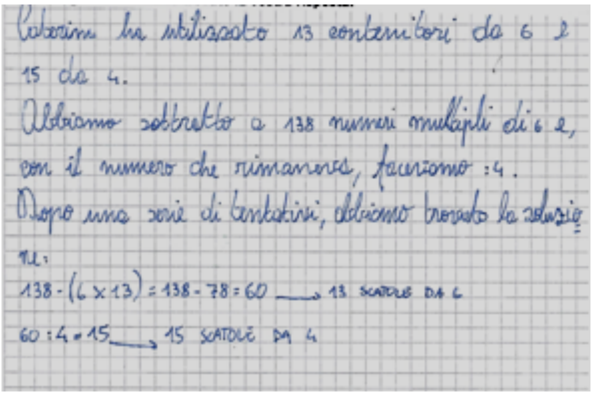


Fig. 15

Caterina ha utilizzato 13 contenitori da 6 e 15 da 4.

Abbiamo sottratto a 138 numeri multipli di 6 e, con il numero che rimaneva, facevamo :4 (diviso 4).

Dopo una serie di tentativi, abbiamo trovato la soluzione :

138-(6×13)=138-78= 60 →13 scatole da 6

60:4=15→ scatole da 4

Un'altra procedura interessante e non prevista è mostrata in questo elaborato:

Fig. 16

RAGIONAMENTO

Abbiamo disegnato i 28 contenitori e abbiamo attribuito a ognuno di essi 4.

Abbiamo continuato fino a trovare un numero multiplo di 6 e il numero delle volte nel quale il 6 è contenuto equivale ai contenitori restanti.

Disegnano le 28 scatole e iniziano a riempirle con 4 uova ciascuna. Così scrivono la serie numerica a ritroso (138, 134, 130, 126….e così via) e si fermano ogni volta che trovano un multiplo di 6. Tenendo sotto controllo il numero dei contenitori da 4 utilizzati, dividono il numero per 6 calcolando il numero di contenitori da 6 che dovrebbero ancora utilizzare. Sommando il numero di contenitori da 4 e da 6, controllano se sono 28, nel caso in cui questo non si verifichi, proseguono con la numerazione per 4 a ritroso.

La spiegazione non è esplicitata in tutti i suoi passaggi perché manca (ma sicuramente c'è stato) il momento di verifica sui multipli di 6 precedenti il 78 e via via trovati, che spieghi perché sono stati scartati.

2. Problema *La sfida matematica*

Luca lancia una sfida ai suoi amici: "Trovate tre numeri naturali la somma dei quali sia minore di 20 e il cui prodotto sia 180."

È necessario fare attenzione, perché ci sono molte possibilità che non sono corrette, per esempio:

- se si scelgono i numeri 4, 4, 6 la somma è 14 che è minore di 20, ma il prodotto è 96 e quindi non va bene;
- se si scelgono i numeri 3, 4, 15, invece, il prodotto è 180, ma la somma è 22 che non è minore di 20 e quindi non va bene.

Quali possono essere le terne di numeri che permettono di vincere la sfida?

Scrivete tutte le possibilità e mostrate come avete fatto a trovarle.

Compito matematico

Individuare terne di numeri naturali che rispettino le condizioni di somma (< 20) e prodotto (180) assegnate.

Riportiamo i dati statistici che documentano i risultati poco soddisfacenti anche per questo problema, anche se in leggero miglioramento con l'aumento di categoria

Cat.	**Occ.0**	**Occ.1**	**Occ.2**	**Occ.3**	**Occ.4**	**Totale**	**p. medio**
5	277(29%)	357(38%)	159(17%)	85(9%)	62(7%)	940	1.3
6	198(16%)	547(43%)	248(20%)	199(16%)	67(5%)	1259	1.5
7	94(8%)	365(32%)	258(22%)	308(27%)	126(11%)	1151	2.0
Totale	569(17%)	1269(38%)	665(20%)	592(18%)	255(8%)	3350	1.6

L'**analisi a priori** ufficiale mette in evidenzia quali sono i vincoli da rispettare prima di iniziare la ricerca. Prosegue indicando le seguenti strategie:

A. procedere ipotizzando tre numeri di somma inferiore a 20 verificandone il prodotto. Con questo metodo si hanno molte possibilità e ci si può rendere conto che difficilmente si avrà la certezza di trovare il massimo numero di soluzioni. È tuttavia un procedimento che facilita l'appropriazione del problema e, a poco a poco, permette di capire che conviene di più partire dal prodotto dei tre numeri;

B. partire ad esempio dal prodotto (180) e, considerandolo come multiplo di 10, fissare 10 come uno dei tre numeri, poi scomporre il 18 in due fattori (3-6 oppure 2-9); le terne possibili sono 3-6-10 che risulta valida ($3+6+10=19<20$) e 2-9-10 non valida ($2+9+10=21>20$). A questo punto si può proseguire a tentativi organizzati, scomponendo ad esempio il 10 in due fattori (2-5), fissare il 5, dividere 180 per 5 e ottenere 36 da scomporre in 6 - 6 che dà la terna (5, 6, 6) valida di somma 17 o anche (5, 4, 9) terna valida di somma 18 oppure (5, 2, 18) non valida perché somma 25 e (12,5,3) non valida perché la somma è pari a 20;

C. (*procedura poco probabile, viste le categorie*). Scomporre il 180 in fattori primi ($2^2 \times 3^2 \times 5$) e ricercare i numeri delle terne ricomponendo i fattori. La ricerca può essere condotta in modo più o meno organizzato.

Gli esempi di procedura A non sono molti e si collocano soprattutto tra gli elaborati di cat. 5.

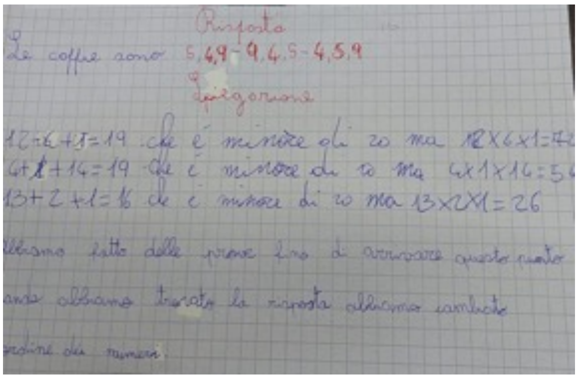


Fig. 17
Risposta
Le coppie sono 5,4,9-9,4,5-4,5,9
Spiegazione
$12+6+1=19$ che è minore di 20 ma $12\times 6\times 1=72$
$4+1+14=19$ che è minore di 20 ma $4\times 1\times 14=56$
$13+2+1=16$ che è minore di 20 ma $13\times 2\times 1=26$
Abbiamo fatto delle prove fino di arrivare questo punto. Quando abbiamo trovato la risposta abbiamo cambiato l'ordine dei numeri.

In questo caso, oltre al fatto che la terna trovata è una sola (le altre sono alcune permutazioni della stessa ma a loro discolpa gli allievi di cat.5 possono non conoscere la differenza tra terna e terna ordinata), sembra esserci una discrepanza tra la ricerca effettuata e la spiegazione fornita (o, più verosimilmente, hanno fatto solo molti tentativi a caso fino a trovare quelle che per loro sono 3 soluzioni. Con molta probabilità hanno iniziato la ricerca dal prodotto $180 = 20\times 9 = 9\times 20$ e successivamente hanno scomposto 20 in $4\times 5 = 5\times 4$. In un'analisi a posteriori con allievi sia di cat.5 ma anche con i più grandi, bisognerebbe far notare che i tre numeri che hanno così ottenuto sono sempre gli stessi (proprietà commutativa del prodotto). Con i più grandi si può ulteriormente far notare che se proprio volevano considerare la terna come *terna ordinata* allora le terne possibili (permutazioni di tre elementi) sono sei e non avrebbero dovuto fermarsi a tre.

Anche l'elaborato (cat. 5), qui di seguito, può essere assimilato alla tipologia A.

Gli allievi interpretano il vincolo del prodotto in modo "curioso" e presumibilmente vedono 180 come prodotto di 18×10, focalizzano l'attenzione solo sul 18 che scompongono nella somma di 3 numeri trovando 11 possibilità (ovviamente non tutte). Non si rendono conto che, in questo modo, le terne trovate danno per somma sempre 18 e il prodotto non è mai 180!

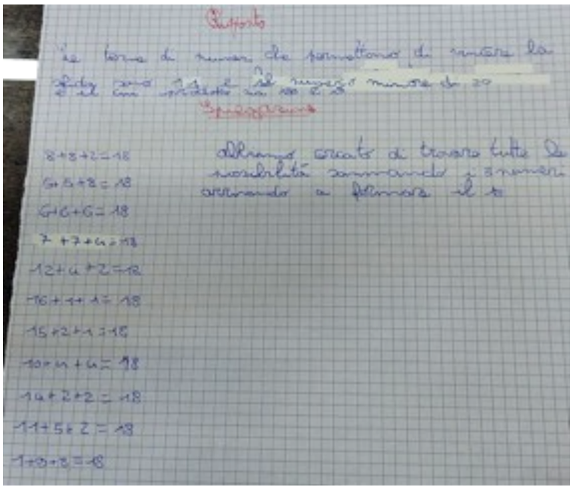


Fig. 18

Risposta

Le terne di numeri che permettono di vincere la sfida sono 11 e il loro numero minore di 20 e il cui prodotto sia 180 è 18.

Svolgimento

Abbiamo cercato di trovare tutte le possibilità sommando i 3 numeri arrivando a formare il 18

Più frequenti, in tutte le categorie, sono gli elaborati assimilabili alla procedura B, condotti in maniera più o meno sistematica e considerando i divisori di 180.

Riportiamo alcuni esempi. Nel primo di questi, gli allievi (cat. 7) dicono (e usano) un algoritmo prefissato con il quale intendono descrivere la procedura di calcolo, senza accorgersi dell'uso improprio delle uguaglianze. Registrano, sotto la voce *Dati*, le condizioni imposte dal problema (senza poi tenerne conto "fortuna loro" infatti, pur avendo scritto che la somma dei tre numeri è 20, nelle risposte non sbagliano e considerano giustamente solo i valori minori di 20).

Trovano tutte e sole le terne giuste, usano alcuni divisori di 180, ma con quale criterio li hanno scelti?

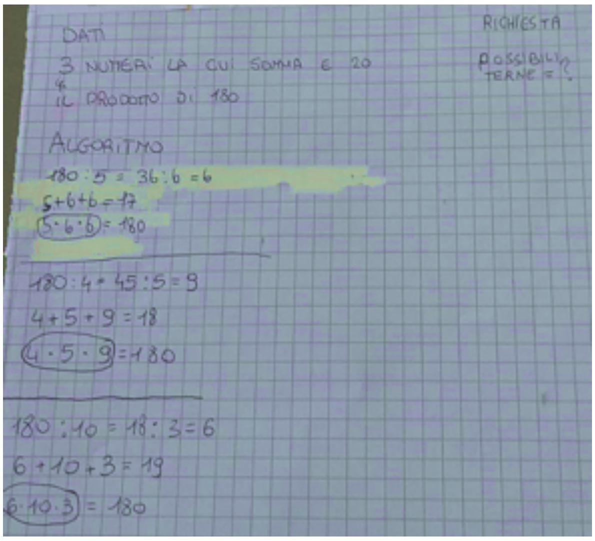


Fig. 19

Dati — *Richiesta*
3 numeri la cui somma è 20 — *Possibili terne=?*
Il prodotto di 180
ALGORITMO
180:5=36:6=6
5+6+6=17
5×6×6=180

180:4=45:5=9
4+5+9=18
4×5×9=180

180:10=18:3=6
6+10+3=19
6×10×3=180

Nel seguente elaborato gli allievi dicono espressamente di aver diviso 180 per i suoi divisori, ma anche in questo caso ci possiamo chiedere con quale criterio siano stati selezionati, visto che sono solo alcuni

Nell'elaborato di fig.21 gli allievi dicono di aver trovato i divisori di 180 minori di 20 e questo è un buon inizio, ma non si capisce bene come poi abbiano proceduto e siano arrivati all'individuazione delle tre terne soluzione del problema. Questo è comunque un elaborato interessante da proporre per la discussione in classe con allievi delle categorie destinatarie del problema.

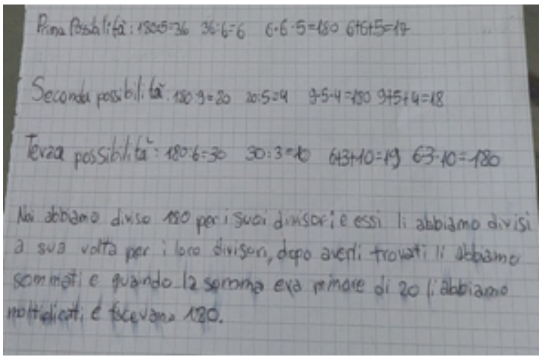


Fig. 20
Prima possibilità:
180:5=36   36:6=6   6×6×50=180   6+6+5=17
Seconda possibilità:
180:9=20   20:5=4   9×5×4=180   9+5+4=18
Terza possibilità:
180:6=30   30:3=10   6+3+10=19   6×3×10=180
Noi abbiamo diviso 180 per i suoi divisori: e essi li abbiamo divisi a sua volta per i loro divisori, dopo averli trovati li abbiamo sommati e quando la somma era minore di 20 li abbiamo moltiplicati e facevano 180.

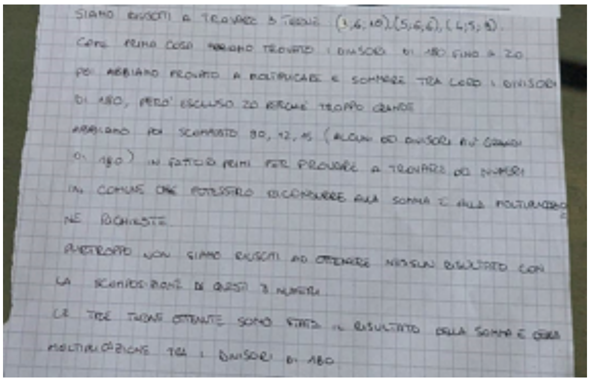


Fig. 21
Siamo riusciti a trovare tre terne (3,6,10), (5,6,6), (4,5,9). Come prima cosa abbiamo trovato i divisori di 180 fino a 20. Poi abbiamo provato a moltiplicare e sommare tra loro i divisori di 180, però escluso 20 perché era troppo grande. Abbiamo poi scomposto 90, 12, 15 (alcuni dei divisori più grandi di 180) in fattori primi per provare a trovare dei numeri in comune che potessero ricondurre alla somma e alla moltiplicazione richieste. Purtroppo non siamo riusciti ad ottenere nessun risultato con la scomposizione di questi tre numeri. Le tre terne ottenute sono state il risultato della somma e della moltiplicazione tra i divisori di 180.

Il seguente elaborato (cat. 6) mostra ancora una volta, con chiarezza, la ricerca effettuata attraverso i divisori del numero 180. Si tiene conto del vincolo somma, ma sono presenti vari errori che suggeriscono spunti per "interventi didattici" mirati.

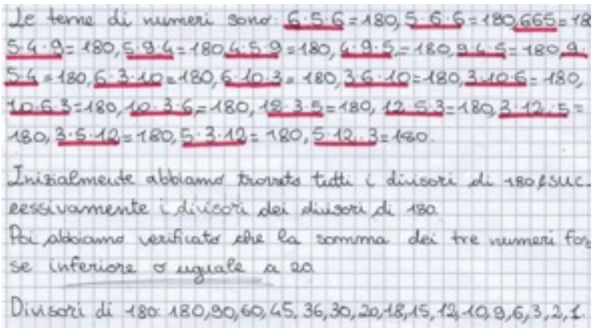


Fig. 22

Inizialmente abbiamo trovato tutti i divisori di 180 e successivamente i divisori dei divisori di 180. Poi abbiamo verificato che la somma dei tre numeri fosse inferiore o uguale a 20.

Divisori di 180: 180, 90, 60, 45, 36, 30, 20, 18, 15, 12, 10, 9, 6,3, 2,1.

Possiamo anche qui osservare che gli allievi, per ogni terna trovata, ricorrono alle permutazioni. Questo errore ricorrente potrebbe fornire l'avvio ad un'attività finalizzata a chiarire i concetti di *terna* e di *terna ordinata*. È opportuno ribadire anche che *terna ordinata* non vuol dire ordinare i numeri presenti in ordine crescente o decrescente ma *considerare differenti terne che differiscono per l'ordine degli elementi* (permutazioni).

In quali situazioni si deve parlare di terna ed in quali di terna ordinata?

Gli allievi, pur dichiarando di aver controllato il vincolo della somma, non hanno compreso che questa avrebbe dovuto essere inferiore a 20, hanno infatti inserito la terna (12, 3, 5). Da qui l'opportunità di lavorare, in classe, per consolidare il concetto di minore (<), spesso confuso con minore o uguale (≤): "*minore vuol dire non maggiore e diverso*". Questo può essere inoltre un momento per chiarire il significato di *uguaglianza* e per ragionare sulle sue proprietà (riflessiva, simmetrica e transitiva) spesso utilizzate in modo sbagliato, basti pensare alle lunghe catene di espressioni legate dal simbolo uguale "=" e che, per transitività, dichiarano *uguali* espressioni o oggetti che uguali non sono assolutamente!

La dimenticanza del 4 e del 5 nell'elenco dei divisori potrebbe offrire, infine, lo spunto per una riflessione sulla ricerca di tutti i divisori di un numero (come verrà proposto nelle attività didattiche di approfondimento).

Da qui potrebbe essere “lanciata” la sfida per una nuova riflessione:

“*Siete sicuri di aver scritto tutti i divisori?”*

Se moltiplico due divisori fra loro ottengo ancora un divisore? (es. 2× 3 = 6 o 3×5 = 15 o 3 ×4 =12 sì , ma 2×4 = 8 o 6× 9 o 10×12 no).

Perché?

Per individuare i divisori di un numero si devono moltiplicare fra loro solo i fattori primi della scomposizione: 2×4 =2×2×2 ma il fattore 2 nella scomposizione è presente solo 2 volte! Mentre 3×4 =3×2×2 va bene perché sono tutti fattori primi della scomposizione di 180).

E ancora: *Abbiamo uno strumento per avere la certezza, dopo aver effettuato la scomposizione in fattori, di riuscire a trovare tutti i possibili divisori?* In altre parole è possibile, a priori, sapere *il numero dei divisori* di un numero qualunque? (cfr. ultimo paragrafo sul calcolo del numero dei divisori di un numero).

In questo caso, si potrebbero indirizzare gli allievi più grandi verso una ricerca ed osservazione per arrivare ad una dimostrazione del numero dei divisori).

La procedura C è stata riscontrata più volte, soprattutto in cat. 7, conclusa in maniera più o meno completa, come si può notare nei due seguenti elaborati.

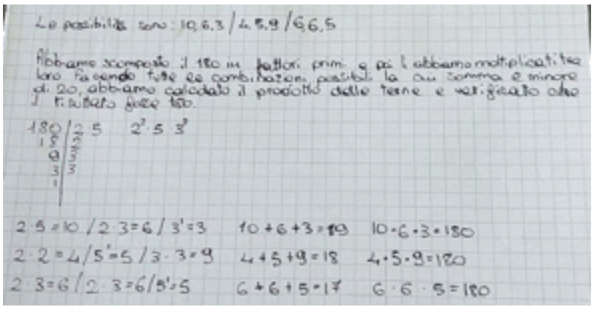


Fig. 23

Le possibilità sono: 10, 6,3 / 4,5,9 / 6,6,5.

Abbiamo scomposto il 180 in fattori primi e poi li abbiamo moltiplicati tra loro facendo tutte le combinazioni possibili la cui somma è minore di 20, abbiamo calcolato il prodotto delle terne e verificato che il risultato fosse 180.

Nell’elaborato qui sopra gli allievi hanno detto di aver trovato tutte le possibili terne perché hanno fatto tutte le combinazioni tra i fattori primi della scomposizione, tenendo conto anche dei loro esponenti. *Qual è stato il loro strumento di controllo?*

Altrettanto fanno gli allievi (cat.7) dell’elaborato qui sotto, ma in questo caso aggiungono qualche spiegazione.

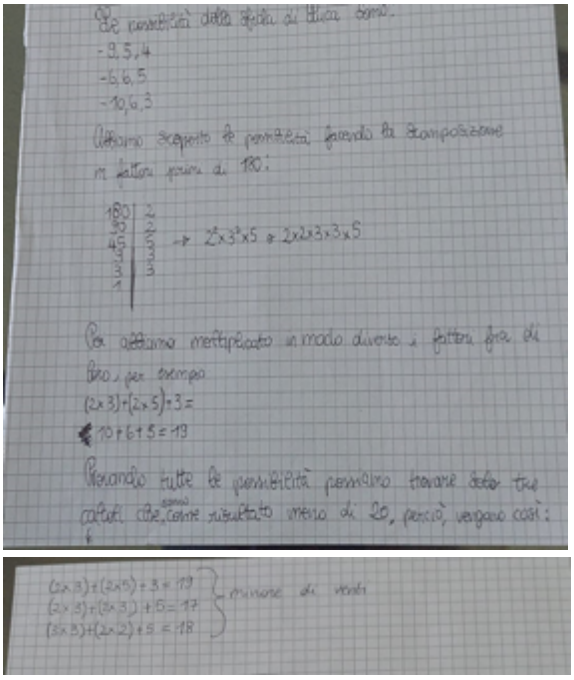


Fig. 24

Le possibilità della sfida di Luca sono:

-9,5,4

-6,6,5

-10,6.3

Abbiamo scoperto le possibilità facendo la scomposizione in fattori primi di 180:

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 5 \quad \rightarrow \; 2^2 \times 3^3 \times 5 = 2\times 2\times 3\times 3\times 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Poi abbiamo moltiplicato in modo diverso i fattori fra di loro, per esempio

(2×3)+(2×5)+3=10+6+5=19

Provando tutte le possibilità possiamo trovare solo tre calcoli che siano come risultato meno di 20, perciò vengono così:

(2×3)+(2×5)+3=19

(2×3)+(2×3)+5=17

(3×3)+(2×2)+5=18

Nell'elaborato seguente la scomposizione ha suggerito immediatamente la terna 4, 5, 9 e poi le altre sono state trovate per tentativi (senza domandarsi quale fosse la relazione tra i fattori della scomposizione e le nuove terne trovate)

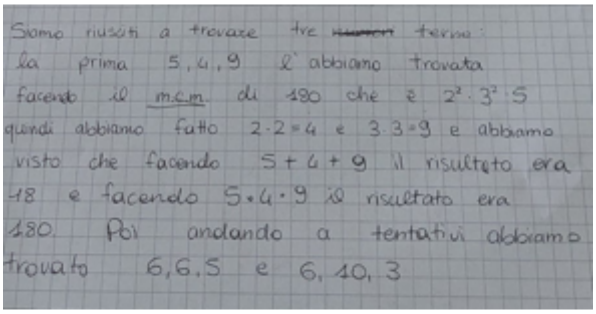

Siamo riusciti a trovare tre ~~numeri~~ terne: la prima 5, 4, 9 l'abbiamo trovata facendo il m.c.m di 180 che è $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ quindi abbiamo fatto $2 \cdot 2 = 4$ e $3 \cdot 3 = 9$ e abbiamo visto che facendo $5 + 4 + 9$ il risultato era 18 e facendo $5 \cdot 4 \cdot 9$ il risultato era 180. Poi andando a tentativi abbiamo trovato 6, 6, 5 e 6, 10, 3

Fig. 25

Siamo riusciti a trovare tre terne, la prima 5,4,9 l'abbiamo trovata facendo il ~~m.c.m~~ di 180 che è 2^2 3^3 5, quindi abbiamo fatto 2×2=4 e 3×3=9 e abbiamo visto che facendo 5+4+9 il risultato era 18 e facendo 5×4×9 il risultato era 180.

Poi andando a tentativi abbiamo trovato 6,6,5 e 6,10,3.

Parlando di scomposizione in fattori e di scomposizione in fattori primi talvolta nel linguaggio quotidiano si crea un po' di confusione fra i termini *fattori, fattori primi e divisori di numero*, pertanto, a nostro avviso, è opportuno fare chiarezza: scomporre un numero in fattori è vederlo come prodotto di due o più numeri, mentre quando si deve scomporre in fattori primi, questi fattori devono essere numeri primi.

I divisori di un numero sono tutti i fattori primi della sua scomposizione unitamente a tutti i numeri ottenibili come prodotto di due o più fattori primi.

Ad esempio

- 180 può essere scomposto in fattori in più modi: ad esempio 45×4 oppure 36 × 5 o 5× 9×4 o 2×10×3×3 o … cioè in tutti quei numeri che moltiplicati tra loro danno per prodotto 180;
- i fattori primi di180 sono: 2, 2, 3, 3 5, ovvero $2^2 \times 3^2 \times 5$;
- i divisori di 180 sono: **1**, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, **180** (sottolineare che il numero 1 ed il numero stesso sono sempre divisori).

Non avendo la certezza sul numero dei divisori di 180, gli allievi come avrebbero dovuto procedere per non dimenticare alcun divisore e trovare così tutte le soluzioni del problema in esame?

Un modo di procedere esaustivo potrebbe essere il seguente, basato sulla scomposizione in fattori e sull'individuazione di tre divisori di 180 la cui somma sia minore di 20:

- ordinare i divisori di 180 in modo crescente: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180;
- considerare solo i divisori minori od uguali di 15 perché altrimenti non si riesce ad ottenere una terna di numeri la cui somma sia minore di 20;
- a partire da 15 come divisore, comprendere che va moltiplicato per il suo fattore complementare a 180 (12) e vederlo come prodotto di due divisori di 180, considerare se le terne ottenute rispettano il vincolo di essere <20. Tutte le possibili terne, **15**, 3, 4 e **15**, 6, 2 e **15,**12,1 vanno scartate perché hanno somma >20
- procedere a ritroso con questo metodo e trovare che:
  - con 12, il fattore complementare è 15 e le terne **12**, 5, 3 e **12**,15,1 vanno scartate perché la somma è ≥20;
  - con 9 , il fattore complementare è 20 e la terna **9, 4, 5** è accettabile ma le terne **9**, 10, 2 e **9**,20,1 non sono accettabili;
  - con 6 , il fattore complementare è 30 e la terna **6, 6, 5** è accettabile ma le terne **6**, 10, 3 e 6, 15, 2 e **6**,30,1 non sono accettabili;
  - con 5 , il fattore complementare è 36 e le terne **5**, 9, 4 e **5**,6,6 sono già state accettate ma la terne **5**,30,1 non è accettabile;
  - con 4, il fattore complementare è 45, la terna **4**, 5, 9 è già stata accettata e **4**,45,1 non è accettabile;
  - con 3, il fattore complementare è 60 e la terna **3, 10, 6** è accettabile ma le terne **3**, 5, 12 e **3**, 2, 30 e **3**,60,1 non sono accettabili;
  - con 2, il fattore complementare è 90 e le terne **2**, 6,15, **2**, 3, 30, **2**, 2, 45 e **2**,90,1 non sono accettabili.

Spesso gli allievi considerano 180 scomposto in 18×10, poi procedono con l'ulteriore scomposizione di 18 o di 10 in due fattori e proseguono per tentativi ma, talvolta, perdono il controllo su alcuni vincoli imposti dal problema.

Il successivo elaborato mostra questo tipo di errore: il vincolo perso è che siano terne di numeri mentre così ottengono quaterne.

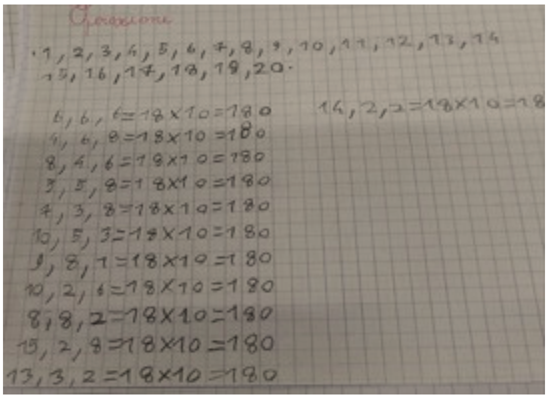


Fig. 26

L'elaborato seguente (cat. 5) mostra una commistione tra la procedura A e B, forse mentalmente gli allievi pensano ad un divisore di 180, poi per tentativi cercano una terna che rispetti il vincolo della somma, ma anche in questo caso non si accorgono che avrebbero ottenuto quaterne e, con i quattro addendi la somma non è più rispettata.

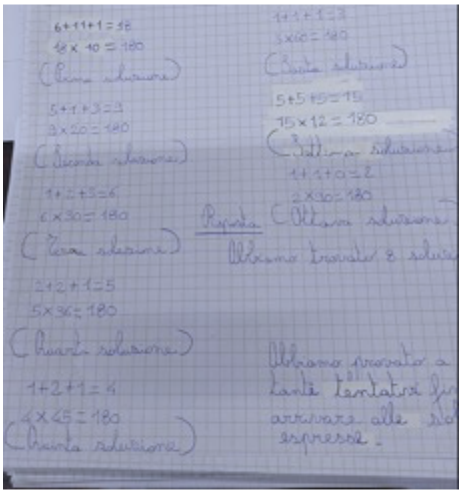


Fig. 27

6+11+1=18
18×10=180
(Prima soluzione)
5+1+3=9
9×20=180
(Seconda soluzione)
1+2+3=6
6×30=180
(Terza soluzione)
2+2+1=5
5×36=180
(Quarta soluzione)
1+2+1=4
4×45=180
(Quinta soluzione)

1+1+1=3
3×60=180
(Sesta soluzione
5+5+5=15
15×12=180
(Settima soluzione)
1+1+0=2
2×90=180
(Ottava soluzione)
<u>Risposta</u>
Abbiamo trovato 8 soluzioni

Abbiamo provato a fare tanti tentativi fino ad arrivare alle soluzioni espresse.

In cat. 7 si sono trovati esempi di ricorso alla scrittura sintetica che utilizza il linguaggio algebrico senza però utilizzare lo strumento, anche perché si sarebbe trattato di un sistema di una disequazione a tre incognite ed una equazione di terzo grado o di più sistemi (uno per ogni n<20) di 2 equazioni a tre incognite: una lineare (ogni volta x+y+z= n) e l'altra di terzo grado).

Nei due elaborati seguenti la traduzione in linguaggio algebrico non è fedele, si perdono o si aggiungono dati. (x+x+x*≤20* oppure *n+n+n≥20*), pur non prestando attenzione all'uso non corretto del simbolo matematico, non rispecchiano il problema perché così si presuppone che i 3 fattori che scompongono 180 siano tutti uguali. Probabilmente per gli allievi si è trattato solo di un modo sintetico di trascrivere i dati, … bisogna però metterli in guardia sugli errori che potrebbero commettere basandosi sulle loro scritture.

La traduzione algebrica di un problema è molto delicata e il linguaggio algebrico non può essere utilizzato come un linguaggio che permette di risparmiare sulla scrittura!

Inoltre l'elaborato di Fig. 28 ci sono terne con i numeri decimali. È una questione di superficialità nella lettura o sarà necessario *tornare sul concetto di numero naturale?*

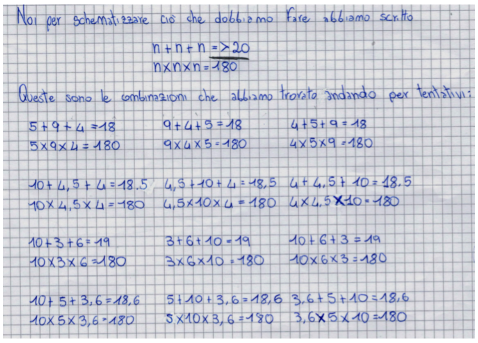


Fig. 28

Noi per schematizzare ciò che dobbiamo fare abbiamo scritto

$$n+n+n=>20$$
$$n\times n\times n=180$$

Queste sono le combinazioni che abbiamo trovato andando per tentativi

$5+9+4=18$	$9+4+5=18$	$4+5+9=18$
$5\times 9\times 4=180$	$9\times 4\times 5=180$	$4\times 5\times 9=180$
$10+4,5+4=18,5$	$4,5+10+4=18,5$	$4+4,5+10=18,5$
$10\times 4,5\times 4=180$	$4,5\times 10\times 4=180$	$4\times 4,5\times 10=180$

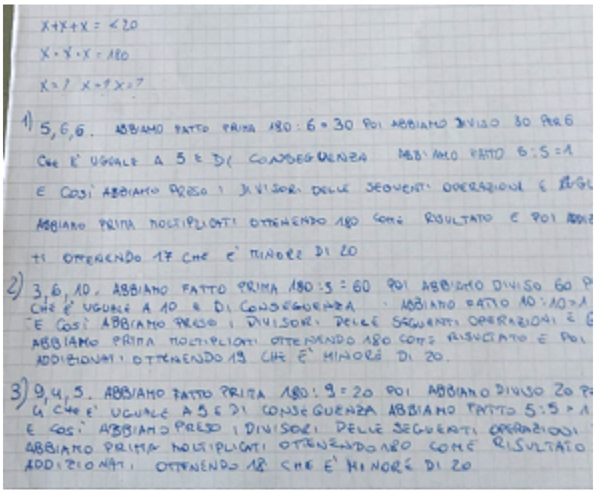


Fig. 29

$x+x+x=<20$

$x+x+x=180$

$x=?\quad x=?\quad x=?$

1) *5,6,6. Abbiamo fatto prima 180:6=30 Poi abbiamo diviso30 per 6 che è uguale a 5e di conseguenza abbiamo fatto 6:5=1 e così abbiamo preso i divisori delle seguenti operazioni e li abbiamo prima moltiplicati ottenendo 180 come risultato e poi sommati ottenendo 17 che è minore di 20*
2) *3,6,10. Abbiamo fatto prima 180:3=60 poi abbiamo diviso 60 per 6 che è uguale a 10 e di conseguenza abbiamo fatto 10:10=1 e così abbiamo preso i divisori delle seguenti operazioni e li abbiamo prima moltiplicati ottenendo 180 come risultato e poi addizionati ottenendo 19 che è minore di 20.*
3) *9,4,5 Abbiamo fatto prima 180:9=20 poi abbiamo diviso 20 per 4 che è uguale a 5 e di conseguenza abbiamo fatto 5:5=1 e così abbiamo preso i divisori delle seguenti operazioni e li abbiamo prima moltiplicati ottenendo 180 come risultato e poi addizionati ottenendo 18 che è minore di 20.*

3. Per andare più lontano…

L'esame degli elaborati dei due problemi offre molti spunti di riflessione, non solo riguardo ai concetti relativi alla divisione, ma anche alla ricerca di tutti i divisori di un numero, del M.C.D. fra due numeri, sulla riduzione ai minimi termini di una frazione, sulle frazioni equivalenti ….

Entrambi i problemi esaminati coinvolgono in maniera forte il concetto di divisione e della sua tecnica operativa che va saputa interpretare passaggio per passaggio.

L'esperienza di tanti anni di utilizzo dei problemi del RMT mette in luce che proprio la tecnica operativa della divisione non è in genere ben padroneggiata e, poiché risulta generalmente difficile, gli allievi molto spesso tendono a superare l'ostacolo avvalendosi della calcolatrice per eseguire questa operazione. In questo modo, purtroppo, non si rendono conto che lo strumento, quando il dividendo non è multiplo del divisore, restituisce un numero decimale come quoziente e non mostra mai il resto. Diventa allora interessante discutere con gli allievi, a classe intera, perché si rendano conto che la risposta della calcolatrice, se pure corretta dal punto di vista del calcolo, potrebbe creare un ulteriore ostacolo per la soluzione del problema e, quindi cercare con loro le modalità per superarlo.

L'identità fondamentale della divisione euclidea *D diviso d* è

$$D = dq + r,$$

con D dividendo, d divisore, q quoziente e r resto, con $r<d$.

Nella scuola Primaria, la divisione è introdotta correttamente in questo modo ma, nel prosieguo della carriera scolastica, l'uso della calcolatrice offusca il significato del resto, portando a veri e propri errori interpretativi. Ad esempio, impostando sulla calcolatrice 138:4 otteniamo 34,5. Ciò non significa che il quoziente q sia 34 e il resto r sia 5 (basta una semplice verifica: 4×34 + 5 non è 138).

Come è legata la parte decimale al resto della divisione condotta con l'algoritmo euclideo?

La divisione 138:4 è uguale a 34 con resto 2 (138=34×4 +2) e il valore 34,5 dato dalla calcolatrice ci dice che il quoziente è 34 e il resto è i 5/10 del divisore 4, cioè appunto 2. È dunque fondamentale non interpretare la parte decimale direttamente come valore del resto. Ciò accade solo nella divisione per 10, in quanto il nostro sistema di scrittura è posizionale in base 10. In questo caso, se x è la parte decimale, gli x/10 di d (10) è uguale a x. Ad esempio, 138 : 10 = 13,8 e 138 = 13×10+8, in quanto 8 corrisponde agli gli 8/10 di 10.

Inversamente, è importante non scrivere la divisione euclidea 138:4, che è uguale a 34 con il resto di 2, nella forma 34,2.

Il modo per ottenere quoziente e resto dalla divisione D:d fatta con la calcolatrice consiste nel porre il quoziente q uguale al numero fornito dalla calcolatrice privato della parte decimale (*parte intera*) e r uguale a D - d×q.

Il problema *Le uova di Caterina,* con il suo contesto, ci pone nell'ambito dei numeri naturali e la sua traduzione algebrica corrisponde a un sistema legato alla ricerca delle soluzioni intere di un'equazione a coefficienti interi (*equazione diofantea*), essendo nota la somma delle due variabili in gioco. Dalla teoria dei sistemi di equazioni di primo grado sappiamo che se la soluzione esiste allora è unica.

In effetti, nessuno degli elaborati mostra tentativi di ricerca di altre soluzioni. Questo andrebbe fatto notare, anche se le ragioni dell'unicità non possono essere spiegate agli allievi delle categorie coinvolte. Sarà infatti solo lo strumento algebrico che confermerà l'unicità della soluzione.

Nel testo del problema la capienza dei contenitori (4 e 6) e il numero delle uova (138) sono stati scelti in modo che il M.C.D. tra 4 e 6 fosse un divisore di 138. Infatti, affinché l'equazione $ax + by = c$ (nel nostro caso $4x + 6y = 138$) abbia soluzioni è necessario e sufficiente che il termine noto c sia un multiplo del M.C.D (a, b). La necessità di questa condizione è facilmente dimostrabile. Infatti, sia d = M.C.D.(a ,b). Abbiamo allora $a = hd$ e $b = kd$, da cui segue $ax + by = d(hx + ky) = c$. Il numero c deve quindi essere multiplo di d.

Nel nostro esempio, il M.C.D. tra 4 e 6 è 2.

L'equazione $4x + 6y = 138$ può essere vista come $2×2x + 2×3y = 2×(2x+3y) = 138$ e 138 è, come deve, un multiplo di 2.

L'algoritmo per determinare le soluzioni intere di un'equazione diofantea non è proponibile, ma ruota intorno al concetto di divisione con resto e all'algoritmo euclideo per la ricerca del M.C.D. Quest'ultimo è proponibile ed opportuno anche a livello di Scuola Secondaria di I grado.

Per consolidare il concetto di divisione euclidea e per la ricerca del M.C.D., è opportuno pensare alla divisione in termini di sottrazione reiterata del divisore dal dividendo. Infatti, il quoziente esprime il numero di volte che è possibile sottrarre il divisore dal dividendo mentre il resto esprime (lo dice il nome) ciò che resta. Ad esempio, la divisione 14:4, il cui quoziente è 3 e il resto è 2, può essere vista nel modo seguente

14 - 4 = 10 (prima sottrazione); 10 - 4 = 6 (seconda sottrazione); 6 - 4 = 2 (terza sottrazione). A questo punto il processo di sottrazione termina in quanto non è possibile sottrarre 4 da 2 nell'ambito dei naturali. Quindi il quoziente è 3 (numero delle sottrazioni effettuate) ed il resto è 2 (ciò che è rimasto).

Naturalmente, nel caso in cui D sia un multiplo di d, avremo resto 0. Se dividiamo 12 con 4 abbiamo:

12 - 4 = 8 (prima sottrazione); 8 - 4 = 4 (seconda sottrazione); 4 - 4 = 0 (terza sottrazione). Il processo di sottrazione termina in quanto non è possibile sottrarre 4 da 0 nell'ambito dei naturali. Quindi li quoziente è 3 ed il resto è 0[2].

La ricerca del M.C.D. di due numeri a e b con il cosiddetto *algoritmo euclideo* avviene tramite una serie di divisioni successive. Tale algoritmo si basa sui seguenti fatti.

Dati due numeri a e b con $a > b$:

1) se a è multiplo di b allora M.C.D.(a, b) = b,

2) se a non è multiplo di b allora M.C.D.(a, b) = M.C.D.(b, r), dove r è il resto della divisione di a per b.

Il punto 1 è ovvio. Il punto 2 deriva dal fatto che i divisori comuni tra a e b coincidono con i divisori comuni tra b e r.

[2] Questo modo di procedere, per sottrazioni successive, ricalca esattamente e dà senso all'algoritmo della divisione: *quante volte il divisore sta nel dividendo*?

Infatti se un numero x è un divisore sia di b che di r, allora $b = nx$ e $r = mx$, ed essendo a = $qb + r$ abbiamo $a = qnx + mx = (qn+m)x$, e dunque x è anche un divisore di a. Viceversa, se un numero x è un divisore sia di a che di b, allora $a = kx$ e $b = nx$, ed essendo $r = a - qb$ abbiamo $r = kx - qnx = (k-qn)x$. Le coppie (a, b) e (b, r) hanno dunque gli stessi divisori comuni, e quindi avranno anche lo stesso massimo divisore comune.

Questa proprietà è reiterabile. Se indichiamo con r_2 il resto della divisione tra b ed r, avremo M.C.D.(b,r) = M.C.D. (r, r_2), e dunque M.C.D. (a, b) = M.C.D. (b, r) = M.C.D. (r, r_2), e così via.

Ad esempio, sia a = 84 e b = 30. Il M.C.D.(84, 30) è 6. Il resto (r) della divisione 84:30 è 24, e il M.C.D.(30, 24) è ancora 6. Il resto (r_2) della divisione 30:24 è 6, e M.C.D.(24,6) è ancora 6. Il passo successivo, consistente nella divisione 24:6, ha come resto (r_3) il numero 0.

Essere giunti al resto 0 non è un caso. Dovendo il resto della divisione essere minore del divisore, i resti di queste divisioni decrescono, e poiché i resti sono numeri naturali, questa successione di resti dovrà giungere a 0. Questo significa che l'ultimo resto non nullo (nel nostro esempio 6) è il divisore della divisione successiva che ha per resto 0. Per il punto (1) è quindi il M.C.D. dell'ultima coppia, e quindi di tutte le coppie precedenti.

Questo processo si evidenzia in questa tabella:

dividendo	divisore	quoz.	resto
84	30	2	24
30	24	1	6
24	6	4	0

In sintesi: per determinare il M.C.D.(a, b) si procede con divisioni successive, dove ogni volta il dividendo e il divisore sono rispettivamente il divisore e il resto della divisione precedente. Il M.C.D. dei due numeri di partenza a e b è l'ultimo resto non nullo. Facciamo un altro esempio, con a = 5297 e b = 5000.

dividendo	divisore	quoz.	resto
5297	5000	1	297
5000	297	16	248
297	248	1	49
248	49	5	3
49	3	16	1
3	1	3	0

L'ultimo resto non nullo è 1. Quindi M.C.D.(5297, 5000) = 1, il che ci dice che i due numeri sono primi tra loro.

Nel processo dell'algoritmo euclideo appena descritto i quozienti delle divisioni non hanno alcun ruolo. È però possibile impiegarli proficuamente per mostrare il significato del concetto di proporzione e della riduzione ai minimi termini di un rapporto.

Se applichiamo l'algoritmo euclideo ai numeri 124 e 36 otteniamo la tabella seguente, che ci mostra che M.C.D.(124, 36) = 4.

124	36	3	16
36	16	2	4
16	4	4	0

Dalla tabella precedente prendiamo solo la colonna dei quozienti e l'ultimo resto (quello nullo).

		3	
		2	
	*	4	0

Se mettiamo un qualunque numero n al posto dell'asterisco e procediamo inversamente dal basso verso l'alto, otteniamo due numeri a e b tali che $a{:}b$ = 124:36, e i due numeri hanno n come M.C.D.. Ad esempio, ponendo n = 3 abbiamo :

93	27	3	12
27	12	2	3
12	3	4	0

dove 12 = 3×4 + 0, 27 = 12×2 + 3 e 93 = 27×3 + 12. Facendo il prodotto di medi ed estremi, si può verificare che 93 : 27 = 124 : 36.

Se al posto dell'asterisco mettiamo 1, otteniamo, sempre procedendo a ritroso, la coppia 31 e 9, e 31/9 è la riduzione in fattori primi tra loro della frazione 124/36.

31	9	3	4
9	4	2	1
4	1	4	0

Un'attività di cambiamento di variabili numeriche suggerita dal contesto, potrebbe essere quella di modificare i dati relativi alla capienza dei contenitori, in modo che siano ancora conformi con ciò che si trova abitualmente in commercio (24, 12 per riproporre la dozzina, 10, 8, 2) e che il numero delle uova sia comunque un multiplo del M.C.D tra i valori dei numeri che indicano la capienza dei contenitori utilizzati

Questa attività di cambiamento delle variabili potrebbe essere fatta prima della teoria sopra esposta (soluzioni delle equazioni diofantee) cercando di discutere e far riflettere la classe sui cambiamenti proposti.

Il problema *Sfida matematica*, oltre ad offrire l'opportunità di chiarire il significato di una terminologia specifica (come già detto nel paragrafo 2), ci dà anche quella di lavorare per far comprendere agli allievi un utilizzo non stereotipato della scomposizione di un numero in fattori primi. In particolare, possiamo prendere spunto da questo problema per dare risposta alla domanda: *Quanti sono i divisori di un numero dato?*

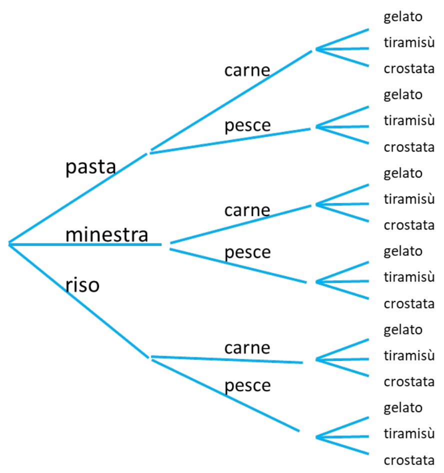
La domanda è pertinente più che altro per le classi di categoria più alta, quando gli allievi devono giustificare la risposta e dimostrare che non ci sono altre soluzioni oltre a quelle da loro trovate. Il nostro obiettivo è quello di spingere gli allievi più grandi a scoprire che, dato un numero naturale n scomposto in fattori primi, è possibile conoscere il numero dei suoi divisori prima ancora di trovarli.

Il metodo è una applicazione immediata del *Principio moltiplicativo* (conosciuto anche come *Principio fondamentale del contare*), che consiste in questo:

se un oggetto x_1 viene scelto in un insieme di n_1 elementi, un oggetto x_2 in un insieme di n_2 elementi, e così via fino al k-esimo elemento x_k che viene scelto in un insieme di n_k elementi, allora le possibili sequenze di scelte (x_1, x_2, …, x_k) sono $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Un esempio gastronomico: se scelgo il primo piatto da un insieme di 3 proposte (pasta, minestra, riso), il secondo da 2 (carne, pesce) e il dolce da 3 (gelato, tiramisù, crostata), allora i possibili menù (che consistono in una sequenza di tre scelte) saranno 3×2×3.

Il Principio moltiplicativo è chiarito dai diagrammi ad albero, che risultano in genere molto convincenti e si possono proporre fin dalla scuola primaria. Relativamente all'esempio fatto abbiamo la figura seguente: ogni ramo, che è una sequenza di tre oggetti, corrisponde a un menù, e i menù possibili sono 18, tanti quante le foglie dell'albero.



Come dicevamo, l'impiego del Principio moltiplicativo ci fornisce la risposta alla domanda concernente il numero dei divisori di un numero n. Scomponiamo n in fattori primi.

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_h^{k_h}$$

dove $p_1, \ldots, p_h$ sono fattori primi e $k_1,\ldots,k_h$ i loro esponenti.

Come sappiamo, i divisori di un numero sono tutti i fattori primi della sua scomposizione unitamente a tutti i numeri ottenibili come prodotto di due o più fattori primi. In altri termini, ogni divisore x di n è il prodotto di un certo numero di fattori primi della sua scomposizione e quindi può essere espresso nella forma

$$x = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \ldots \cdot p_h^{s_h}$$

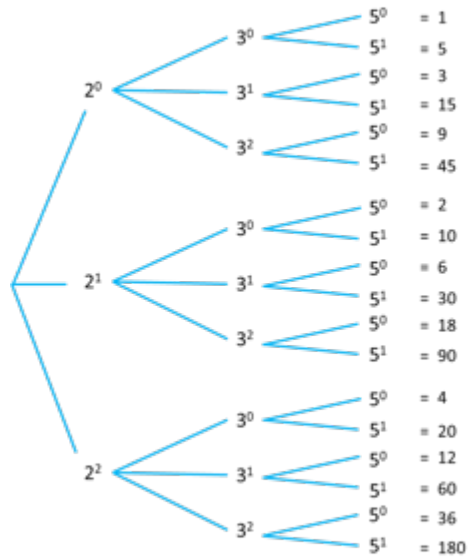
con $0 \leq s_1 \leq k_1$, $0 \leq s_2 \leq k_2, \ldots, 0 \leq s_h \leq k_h$,

Come si vede, s_1 è scelto in un insieme di k_1+1 elementi (cioè i numeri da 0 a k_1, estremi compresi), s_2 da un insieme di k_2+1 elementi,…, s_h da un insieme di k_h+1 elementi. Per il Principio moltiplicativo, il numero delle possibili scelte, e quindi il numero dei possibili divisori, è

$$\mathrm{N} = (k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_h + 1)$$

(osserviamo che se si sceglie ogni volta 0, si ottiene il divisore 1).

Riprendiamo l'esempio tratto dal problema in esame, e consideriamo nuovamente il numero $180 = 2^2 \cdot 3^2\ 5^1$. Nel seguente diagramma ad albero indichiamo le possibili scelte degli esponenti dei tre fattori (scelte che sono in numero di (2+1) per il primo fattore, (2+1) per il secondo e (1+1) per il terzo) e il divisore che si ottiene da ciascuna sequenza di scelte. I divisori, il cui numero complessivo è appunto (2+1)×(2+1)×(1+1)=18, tanti quante le foglie dell'albero.



Le attività di approfondimento proposte non sono legate alle categorie ma possono far parte di un percorso che è opportuno avviare presto con le modalità e i tempi suggeriti dagli allievi stessi, le risposte alle questioni poste arriveranno al tempo dovuto attraverso l'esperienza continuativa, la discussione e condivisione in classe.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

IL DIFFICILE CAMMINO DEI PROBLEMI DI "GEOMETRIA PIANA"

LE CHEMIN DIFFICILE DES PROBLÈMES DE « GÉOMÉTRIE PLANE »

Roberto Battisti, Brunella Brogi, Fabio Brunelli, Federica Curreli, Speranza Dettori, Florence Falguères, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Luciana Rapposelli, Elsa Renna, Patrizia Sabatini, M. Agostina Satta, Cinzia Utzeri, Vincenza Vannucci

Gruppo geometria per i grandi[1]

1. Introduzione/Introduction

I problemi del RMT che vanno sotto l'egida di "problemi di geometria piana" sono per la maggior parte problemi che spaziano dalla geometria piana in senso stretto, ad aspetti aritmetici (comprensivi, fra l'altro, di proporzioni e percentuali) e algebrici. E non potrebbe essere altrimenti, visto che non si tratta di problemi di mera applicazione di nozioni del "capitolo di geometria" appena svolto in classe, bensì di problemi inseriti in un contesto "originale" e ciò si scontra spesso con le difficoltà legate alla ricerca delle conoscenze da mettere in gioco, ricerca che dovrebbe avere un necessario e opportuno spazio nella pratica didattica di classe.

In questo articolo vengono presentate le analisi a posteriori degli elaborati delle sezioni di Cagliari, Franche-Comté, Parma, Riva del Garda, Rozzano, Sassari, Siena, Svizzera Romanda e Toscana Nord, di tre problemi di "geometria piana" della prima e della seconda prova del 30° RMT: "Da singolo a doppio", "La divisione del rettangolo" e "Il fiore al posto giusto".

Va sottolineato che la particolarità del RMT non è solo elencare nozioni e conoscenze, ma soprattutto quella di analizzarle alla luce di ciò che gli allievi ci mostrano.

Per ciascuno dei tre problemi analizzati, presentiamo nella prima parte dell'articolo, le fasi salienti del percorso di preparazione, così come si sono sviluppate talvolta in italiano e talvolta in francese.

Nella seconda parte presentiamo le analisi a posteriori che evidenziano, ancora una volta, le difficoltà a "mettersi davvero nella testa degli allievi", pur tenendo conto di analisi di tanti altri problemi di geometria del nostro RMT. Le analisi a posteriori svolte dai membri del gruppo sono riportate nella loro lingua originale.

Les problèmes du RMT qui relèvent de la « géométrie plane » sont, pour la plupart, des problèmes qui partent de figures géométriques planes au sens strict, qui abordent des aspects arithmétiques (incluant, entre autres, les proportions et les pourcentages) et algébriques. Il ne pourrait en être autrement, étant donné qu'il ne s'agit pas de problèmes de simple application des notions du "chapitre de géométrie" qu'on vient d'étudier en classe, mais de problèmes insérés dans un contexte "original" où l'on se heurte souvent à des difficultés associées à la recherche de connaissances à mettre en jeu. C'est à cette recherche que l'on devrait laisser une place nécessaire et appropriée dans la pratique de l'enseignement en classe.

Cet article présente les analyses a posteriori des copies des sections de Cagliari, Franche-Comté, Parme, Riva del Garda, Rozzano, Sassari, Siena, Suisse romande et Toscane Nord, de trois problèmes de "géométrie plane" de la première et deuxième épreuve du 30e RMT : « Du simple au double », « La division du rectangle » et « La fleur au bon endroit ».

Il faut répéter à ce propos que la particularité du RMT n'est pas seulement de répertorier des notions et des savoirs, mais surtout de les analyser à la lumière de ce que nous montrent les élèves.

Pour chacun des trois problèmes, nous présentons dans une première partie de l'article, les phases saillantes de ce parcours de préparation, telles qu'elles se sont développées, quelquefois en italien et quelquefois en français.

Dans la deuxième, nous présentons les analyses a posteriori qui font apparaître les difficultés, encore une fois, à « se mettre vraiment dans la tête des élèves », tout en tenant compte de l'analyse de nombreux autres problèmes de géométrie de notre RMT. Les analyses a posteriori des différents membres du groupe, sont rapportées dans leurs langues d'origine.

---

[1] Le Groupe Géométrie pour les grands, est constitué aussi par d'autres membres / Il Gruppo di Geometria per i grandi comprende anche i seguenti membri: Bernard Anselmo, Paola Bajorko, Cristina Caredda, Silvia Mazzucco, Lucia Palmas, Bice Perna, Rosanna Sanna.

2. “Da singolo a doppio”

2.1. Un po’ di storia del problema

Nel maggio 2019, François Jaquet propone al gruppo geometria piana un’idea di problema nella forma seguente:
En mai 2019, François Jaquet propose au groupe géométrie plane une idée de problème de la forme suivante :

Le professeur : « Dessinez chacun un premier rectangle, puis dessinez un second rectangle dont l’aire est le double de celle du premier. Expliquez enfin comment vous avez modifié les dimensions du premier pour arriver au second.»
Les élèves :
A. J’ai doublé la longueur et la largeur.
B. J’ai doublé la longueur sans modifier la largeur
C. J’ai augmenté la longueur de sa moitié et j’ai augmenté la largeur de sa moitié.
D. J’ai augmenté la longueur de sa moitié et j’ai augmenté la largeur de son tiers.
E. J’ai augmenté la longueur de 20 % et la largeur de 80 %
F. J’ai augmenté la longueur de 25 % et la largeur de 60 %

Quels sont les élèves dont le second rectangle a une aire double du premier ? pourquoi ?
Pour les autres indiquez le rapport entre l’aire du second et l’aire du premier.

L'insegnante: "Disegnate un primo rettangolo, quindi disegnate un secondo rettangolo la cui area è il doppio di quella del primo rettangolo. Infine, spiegate come avete cambiato le dimensioni dal primo al secondo. "

Studenti:
A. Ho raddoppiato la lunghezza e la larghezza.
B. Ho raddoppiato la lunghezza senza modificare la larghezza
C. Ho aumentato la lunghezza della sua metà e aumentato la larghezza della sua metà.
D. Ho aumentato la lunghezza della sua metà e aumentato la larghezza della sua terza parte
E. Ho aumentato la lunghezza del 20% e la larghezza dell'80%
F. Ho aumentato la lunghezza del 25% e la larghezza del 60%

Chi sono gli studenti il cui secondo rettangolo ha un’area doppia del primo? Perché?
Per gli altri indicate il rapporto tra l'area del secondo e l'area del primo.

Une idée, à développer ou à mieux rédiger, sur la maîtrise de la formule de l’aire du rectangle.
Le nœud de la question : qu’est ce qui arrive à l’aire d’un rectangle lorsque les dimensions sont modifiées ?
Un’idea da sviluppare o da redigere meglio, sulla padronanza e gestione della formula dell’area del rettangolo.
Il nodo della questione: che cosa succede all’area di un rettangolo quando se ne modifichino le dimensioni?

Comme pour tous les problèmes du RMT, à partir d’une idée initiale, le parcours d’élaboration du problème est long et les discussions au sein des groupes de travail sont fondamentales.
Come per tutti i problemi del RMT, da un’idea iniziale il percorso di affinamento è lungo e le discussioni in seno ai gruppi di lavoro sono fondamentali.

En ce qui concerne l’énoncé, la nouvelle version se présente avec la personnalisation des élèves et avec une modification substantielle pour introduire une diminution et devient :
Per quanto riguarda l’enunciato, la nuova versione si presenta con la “personalizzazione” degli studenti e con una modifica sostanziale per introdurre anche una “diminuzione” e diventa:

DA SINGOLO A DOPPIO (Cat. 7-10)

L'insegnante dà agli allievi le seguenti consegne: *Disegnate un primo rettangolo, quindi disegnate un secondo rettangolo la cui area è il doppio di quella del primo rettangolo. Infine, spiegate come avete cambiato le dimensioni dal primo al secondo. "*

Gli allievi rispondono:
Ada: *Ho raddoppiato la lunghezza e la larghezza.*
Bice: *Ho raddoppiato la lunghezza senza modificare la larghezza.*

Carlo: *Ho aumentato la lunghezza della sua metà e aumentato la larghezza della sua metà.*
Diego: *Ho aumentato la lunghezza della sua metà e aumentato la larghezza della sua terza parte.*
Elsa: *Ho aumentato la lunghezza del 20% e la larghezza dell'80%.*
Fabio: *Ho aumentato la lunghezza del 20% e la larghezza del 150%.*

Chi sono gli allievi il cui secondo rettangolo ha un'area doppia del primo?
Spiegate il perché delle vostre risposte.
Per gli altri indicate il rapporto tra l'area del secondo e l'area del primo.

DU SIMPLE AU DOUBLE (Cat. 7 -10)
Le professeur demande aux élèves : *Dessinez chacun un premier rectangle, puis dessinez un second rectangle dont l'aire est le double de celle du premier. Expliquez enfin comment vous avez modifié les dimensions du premier pour arriver au second.»*

Les élèves répondent :
Anne : *J'ai doublé la longueur et la largeur.*
Berthe : *J'ai doublé la longueur sans modifier la largeur.*
Charles : *J'ai augmenté la longueur de sa moitié et j'ai augmenté la largeur de sa moitié.*
Daniel : *J'ai augmenté la longueur de sa moitié et j'ai augmenté la largeur de son tiers.*
Elise : *J'ai augmenté la longueur de 20 % et la largeur de 80 %.*
Fabio : *J'ai diminué la longueur de 20 % et j'ai augmenté la largeur de 150 %.*

Quels sont les élèves dont le second rectangle a une aire double du premier ? Expliquez le pourquoi de vos réponses.
Pour les autres, indiquez le rapport entre l'aire du second et l'aire du premier.

Le discussioni in seno al gruppo, compresi i lavori del convegno di Alghero, si sviluppano ovviamente anche sull'analisi a priori, inizialmente a partire dalla versione francese con commenti di François secondo i criteri del RMT per l'elaborazione dei problemi che sottolineano l'interesse del **contenuto** matematico, la semplicità del contesto e del testo, l'adeguamento al ventaglio delle categorie da 7 a 10, l'interesse delle numerose questioni poste che dovranno condurre a buoni criteri di attribuzione dei punteggi.

Ancora discussioni e aggiustamenti e si arriva alla versione proposta al GIPL per la prima prova del 30° RMT.

Les discussions au sein du groupe, y compris les travaux pendant la rencontre d'Alghero, se sont évidemment aussi portées sur l'analyse a priori, en commençant tout d'abord par la version française avec des commentaires de François en accord avec les critères du RMT pour l'élaboration des problèmes, ces critères soulignent l'intérêt du contenu mathématique, la simplicité du contexte et du texte, l'adaptation à la gamme de catégories de 7 à 10, l'intérêt des nombreuses questions posées qui devront conduire aux bons critères d'attribution des points.

Après des discussions et des ajustements, nous arrivons à la version proposée au GIPL pour première épreuve du 30e RMT.

Analyse a priori
Tâche mathématique
Parmi plusieurs propositions (d'élèves) de modifier la longueur et la largeur d'un rectangle pour que son aire double, juger celles qui sont correctes / ou incorrectes et en donner les raisons.
Analyse de la tâche
- Prendre conscience que chaque élève a choisi un rectangle différent et que son affirmation doit par conséquent être vérifiée pour n'importe quel rectangle*
- Se rendre compte que toutes les modifications proposées par les élèves agissent sur la largeur et sur la longueur du premier rectangle pour que son aire double, avec des variations d'une proposition à l'autre selon la manière de formuler les transformations (doubler, augmenter de …)
- Comprendre enfin qu'il y aura une réponse par élève, qu'il s'agira de vérifier par le calcul de l'aire du nouveau rectangle avec les nouvelles dimensions
- (En langage et opérations du mathématicien, valable « pour tout rectangle » - de dimensions a et b et d'aire ab - les réponses sont :

pour A : non car $2a \times 2b = \mathbf{4}ab \neq 2ab$	pour B oui car $2a \times b = 2ab$
pour C : non car $1{,}5a \times 1{,}5b = \mathbf{2{,}25}ab \neq 2ab$	pour D oui car $3/2a \times 4/3b = 2ab$

pour E : non car 1,2a × 1,8b = **2,16**ab ≠ 2ab pour F oui car 0.8 × 2,5b = 2ab
mais ce type de justification du mathématicien est loin d'être à portée des élèves)

- Partir d'un cas particulier de dimensions du premier rectangle, calculer son aire, déterminer les dimensions du second*, puis calculer son aire et vérifier si elle est bien le double de celle du premier. En cas d'affirmative, vérifier avec quelques autres exemples et conjecturer que « ça marche toujours ». Dans le cas contraire, le cas particulier ou contre-exemple suffit.

La détermination des dimensions du second exige la maîtrise des expressions « doubler », « augmenter de la moitié », « augmenter de 20% » … et la capacité de les transformer en multiplication

- Envisager le cas général et donner des « justifications » de type rhétorique (ou par un dessin pour A, B éventuellement C et D) du genre (pour A) « si on double les deux l'aire va être multipliée par 4 » ou du genre (pour D) « j'ai fait un dessin du premier rectangle divisé en six : 2 parts dans la longueur et 3 parts dans la largeur. En augmentant la longueur de sa moitié j'aurai 3 parts et en augmentant la largeur de son tiers j'aurai quatre parts et mon nouveau rectangle aura donc 12 parts, le double de six)

* La tâche d'appropriation ne consiste pas seulement à lire les différentes propositions des élèves, mais surtout à se rendre compte qu'il n'y a pas de données sur les dimensions des rectangles. La phrase du professeur *Dessinez un premier rectangle* signifie non seulement que ce sont les élèves qui doivent choisir ses dimensions mais aussi que la construction du second devra être valable **pour tout** rectangle choisi.

Attribution des points

4 Les six réponses correctes et complètes (A, non et 4 ; C non et 2,25 ; E non et 2,16 ; B, D, F oui avec explication par deux exemples au moins, littérale ou par dessin)

3 Cinq réponses correctes et complètes
ou six avec réponses dont une incomplète

2 Quatre réponses correctes et complètes
ou quatre ou cinq réponses dont deux incomplète

1 Deux ou trois réponses correctes et complètes
ou plus de quatre incomplètes

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7 à 10

Infine il problema dato nella prima prova

DA SINGOLO A DOPPIO (Cat. 8, 9, 10)

L'insegnante dà agli allievi le seguenti consegne: "*Disegnate un primo rettangolo; quindi disegnate un secondo rettangolo la cui area è il doppio di quella del primo rettangolo. Infine, spiegate come avete cambiato le dimensioni del primo per arrivare al secondo.*"

Gli allievi rispondono:

Ada: "*Ho raddoppiato entrambe le dimensioni.*"

Bice: "*Ho raddoppiato solo una delle due dimensioni senza modificare l'altra*."

Carlo: "*Ho aumentato una dimensione della sua metà e aumentato l'altra della sua metà.*"

Diego: "*Ho aumentato una dimensione della sua metà e aumentato l'altra della sua terza parte.*"

Elsa: "*Ho aumentato una dimensione del 20% e l'altra dell'80%.*"

Fabio: "*Ho diminuito una dimensione del 20% e aumentato l'altra del 150%.*"

Quali sono gli allievi il cui secondo rettangolo ha un'area doppia del primo?

Per gli altri indicate il rapporto tra l'area del secondo e l'area del primo.

Spiegate come avete trovato le risposte e mostrate il dettaglio dei vostri calcoli.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Tra diverse proposte (di allievi) di modifica delle dimensioni di un rettangolo per ottenere un rettangolo di area doppia, stabilire quelle che sono corrette / errate, darne motivazioni e, per quelle errate, trovare il rapporto fra le aree.

Analisi del compito

- Prendere coscienza del fatto che ciascun allievo ha scelto un diverso rettangolo e che la sua affermazione deve quindi essere verificata *per ogni* rettangolo. Il compito di appropriazione non consiste solamente nel leggere le diverse proposte degli allievi, ma soprattutto nel rendersi conto che non sono date le dimensioni dei rettangoli. Ciò che dice l'insegnante "Disegnate un primo rettangolo" significa non solo che sono gli allievi che devono scegliere delle dimensioni, ma anche che la costruzione del secondo dovrà essere valida per *qualunque* rettangolo scelto.
- Rendersi conto che tutte le modifiche proposte dagli allievi agiscono su una o entrambe le dimensioni del primo rettangolo, con variazioni da una proposta all'altra secondo la maniera di formulare le trasformazioni (raddoppiare, aumentare di…) che determinano un secondo rettangolo.
- Capire che, per ciascun allievo, occorre verificare con il calcolo se l'area del secondo rettangolo è il doppio di quella del primo rettangolo.
- Partire da un caso particolare di dimensioni del primo rettangolo, calcolare la sua area, determinare le dimensioni del secondo (utilizzando correttamente le espressioni "raddoppiare", "aumentare della metà", "aumentare del 20%" … e trasformandole in convenienti moltiplicazioni o proporzioni), poi calcolare la sua area e verificare se è proprio il doppio di quella del primo. In caso affermativo, verificare con qualche altro esempio e ipotizzare che "funziona sempre". In caso contrario, il caso particolare o controesempio è sufficiente.

Oppure

- Dare delle "giustificazioni" di tipo retorico (o con un disegno per A, B, eventualmente C e D) del tipo (per A) "se si raddoppiano entrambe le dimensioni l'area sarà moltiplicata per 4" o del tipo (per D) "ho fatto un disegno del primo rettangolo diviso in sei: 2 parti nella lunghezza e 3 parti nella larghezza. Aumentando la lunghezza della sua metà avrei 3 parti e aumentando la larghezza del suo terzo avrei quattro parti e il mio nuovo rettangolo avrà dunque 12 parti, il doppio di sei).

Oppure

nel linguaggio e con operazioni del "matematico", valevoli "per tutti i rettangoli" - di dimensioni a e b e di area ab - le risposte sono:

per A: no perché $2a \times 2b = 4ab \neq 2ab$ — per B sì perché $2a \times b = 2ab$

per C: no perché $1{,}5a \times 1{,}5b = 2{,}25ab \neq 2ab$ — per D sì perché $3/2a \times 4/3b = 2ab$

per E: no perché $1{,}2a \times 1{,}8b = 2{,}16ab \neq 2ab$ — per F sì perché $0{,}8a \times 2{,}5b = 2ab$

(ma questo tipo di giustificazione del matematico è lontano dall'essere alla portata dell'allievo)

Attribuzione dei punteggi

4 Le sei risposte corrette e complete (A no, rapporto 4; C no, rapporto 2,25 o 9/4; E no rapporto 2,16 o 54/25; B, D, F sì) e con spiegazione completa (almeno due esempi per ciascun caso, descritti verbalmente o con disegni)

3 Le sei risposte corrette e complete con spiegazione incompleta (un solo esempio per ciascun caso)
oppure sei risposte di cui una incompleta (senza il rapporto) con spiegazione completa
oppure cinque risposte corrette e complete con spiegazione completa

2 Cinque risposte corrette e complete senza spiegazione
oppure cinque risposte corrette di cui una o due incomplete
oppure quattro risposte corrette e complete con spiegazione

1 Una, due o tre rispose corrette e complete senza spiegazione

0 Incomprensione del problema

DU SIMPLE AU DOUBLE (Cat. 8, 9, 10)

Le professeur demande aux élèves : « *Dessinez chacun un premier rectangle, puis dessinez un second rectangle dont l'aire est le double de celle du premier. Expliquez enfin comment vous avez modifié les dimensions du premier pour arriver au second.* »

Les élèves répondent :

Anne : *J'ai doublé les deux dimensions.*

Berthe : *J'ai doublé une dimension sans modifier l'autre.*

Charles : *J'ai augmenté une dimension de sa moitié et j'ai augmenté l'autre de sa moitié.*

Daniel : *J'ai augmenté une dimension de sa moitié et j'ai augmenté l'autre de son tiers.*

Elise : *J'ai augmenté une dimension de 20 % et l'autre de 80 %.*

Fabio : *J'ai diminué une dimension de 20 % et j'ai augmenté l'autre de 150 %.*

Quels sont les élèves dont le second rectangle a une aire double du premier ?

Pour les autres, indiquez le rapport entre l'aire du second et l'aire du premier.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et donnez le détail de vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Parmi plusieurs propositions de modifier les dimensions d'un rectangle pour obtenir un rectangle d'aire double, juger celles qui sont correctes / ou incorrectes, en donner les raisons et, pour les incorrectes, trouver le rapport entre les aires.

Analyse de la tâche

- Prendre conscience que chaque élève a choisi un rectangle différent et que son affirmation doit par conséquent être vérifiée pour n'importe quel rectangle. La tâche d'appropriation ne consiste pas seulement à lire les différentes propositions des élèves, mais surtout à se rendre compte que les dimensions des rectangles ne sont pas données. C'est-à-dire que lorsque l'enseignant dit « dessinez un premier rectangle », cela signifie que non seulement les élèves doivent choisir les dimensions, mais aussi que la construction du second devra être valide pour *n'importe quel* rectangle choisi.
- Se rendre compte que toutes les modifications proposées par les élèves agissent sur la largeur et sur la longueur du premier rectangle, avec des variations d'une proposition à l'autre selon la manière de formuler les transformations (doubler, augmenter de …), qui déterminent un deuxième rectangle.
- Comprendre que, pour chaque élève, il faut vérifier par le calcul si l'aire du second rectangle est le double de celle du premier rectangle.
- Partir d'un cas particulier de dimensions du premier rectangle, calculer son aire, déterminer les dimensions du second (la détermination des dimensions du second exige la maîtrise des expressions « doubler », « augmenter de la moitié », « augmenter de 20% » … et la capacité de les transformer en multiplication), puis calculer son aire et vérifier si elle est bien le double de celle du premier. En cas d'affirmative, vérifier avec quelques autres exemples et conjecturer que « ça marche toujours ». Dans le cas contraire, le cas particulier ou contre-exemple suffit.

Ou

- Envisager le cas général et donner des « justifications » de type rhétorique (ou par un dessin pour A, B éventuellement C et D) du genre (pour A) « si on double les deux dimensions, l'aire va être multipliée par 4 » ou du genre (pour D) « j'ai fait un dessin du premier rectangle divisé en six : 2 parts dans la longueur et 3 parts dans la largeur. En augmentant la longueur de sa moitié j'aurai 3 parts et en augmentant la largeur de son tiers j'aurai quatre parts et mon nouveau rectangle aura donc 12 parts, le double de six).

Ou

- En langage et opérations du mathématicien, valable « pour tout rectangle » - de dimensions a et b et d'aire ab - les réponses sont :

  pour A : non car $2a \times 2b = 4ab \neq 2ab$ — pour B : oui car $2a \times b = 2ab$

  pour C : non car $1{,}5a \times 1{,}5b = 2{,}25ab \neq 2ab$ — pour D : oui car $3/2a \times 4/3b = 2ab$

  pour E : non car $1{,}2a \times 1{,}8b = 2{,}16ab \neq 2ab$ — pour F : oui car $0.8 \times 2{,}5b = 2ab$

  (mais ce type de justification du mathématicien est loin d'être à portée des élèves)

Attribution des points

4 Les six réponses correctes et complètes (A, non et rapport 4 ; C non et 2,25 ou 9/4 ; E non et 2,16 ou 54/25; B, D, F oui) avec explication complète (par deux exemples au moins, verbalement ou par dessin)

3 Les six réponses correctes et complètes avec explication incomplète (un seul exemple)
ou six réponses dont une incomplète (sans le rapport) et explication complète
ou cinq réponses correctes et complètes avec explication complète

2 Cinq réponses correctes et complètes sans explication
ou cinq réponses correctes dont une ou deux incomplète
ou quatre réponses correctes et complètes avec explication

1 Une, deux ou trois réponses correctes et complètes sans explication

0 Incompréhension du problème

2.2. Come hanno reagito gli allievi? Comment ont réagi les élèves ?

Questo problema, che richiede una gestione di dati che mutano e dove pertanto la geometria diventa in qualche modo “dinamica” invece di rimanere “statica”, ha richiesto ai gruppi di allievi impegnati nella sua risoluzione, di andare oltre una semplice applicazione di formule e calcoli.
Già a partire dai suggerimenti del GIPL per una prima analisi del problema, è apparsa chiara una certa difficoltà a gestire correttamente il caso di Fabio che è quello che, laddove affrontato dagli allievi, ha evidenziato le maggiori difficoltà in merito alla questione delle percentuali.
È peraltro necessario fare un distinguo tra, da un lato la categoria 8 e, dall'altro, le categorie 9 e 10.

Tra gli elaborati analizzati dai membri del gruppo, di diverse sezioni la tabella riporta una media delle prime analisi.

Ce problème, qui nécessite la gestion de données qui évoluent et où, par conséquent, la géométrie devient quelque peu "dynamique" au lieu de rester "statique", a exigé des groupes d'élèves engagés dans sa résolution qu'ils aillent au-delà d'une simple application de formules et de calculs.
Dès les suggestions du GIPL pour une première analyse du problème, il est apparu qu'il y avait une certaine difficulté à traiter correctement le cas de Fabio, qui est celui qui, de toute façon, lorsqu'il est abordé par les élèves, montre les plus grandes difficultés en ce qui concerne notamment la question des pourcentages.
Il est également nécessaire de faire une distinction entre, d'une part, la catégorie 8 et, d'autre part, les catégories 9 et 10.

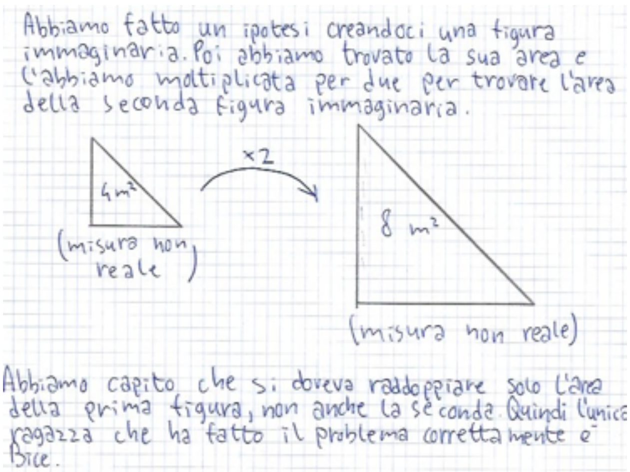
Parmi les copies analysées par les membres du groupe, des différentes sections~~,~~ le tableau présente une moyenne des premières analyses.

Cat. 8:

	per **A** : no perché 2a × 2b = 4ab ≠ 2ab			per **B** : si perché 2a × b = 2ab	
	per **C** : no perché 1,5a × 1,5b = 2,25ab ≠ 2ab			per **D** : si perché 3/2a × 4/3b = 2ab	
	per **E** : no perché 1,2a × 1,8b = 2,16ab ≠ 2ab			per **F** : si perché 0.8 × 2,5b = 2ab	
A	☒ riuscita molto alta	☐ riuscita alta	☐ difficoltà media	☐ riuscita scarsa	☐ riuscita molto scarsa
B	☒ riuscita molto alta	☐ riuscita alta	☐ difficoltà media	☐ riuscita scarsa	☐ riuscita molto scarsa
C	☐ riuscita molto alta	☐ riuscita alta	☒ difficoltà media	☐ riuscita scarsa	☐ riuscita molto scarsa
D	☐ riuscita molto alta	☐ riuscita alta	☒ difficoltà media	☐ riuscita scarsa	☐ riuscita molto scarsa
E	☐ riuscita molto alta	☐ riuscita alta	☒ difficoltà media	☐ riuscita scarsa	☐ riuscita molto scarsa
F	☐ riuscita molto alta	☐ riuscita alta	☐ difficoltà media	☒ riuscita scarsa	☐ riuscita molto scarsa

Nel complesso si evince un'appropriazione del problema da parte della gran parte dei gruppi di allievi, con alcune eccezioni, come ad esempio quella che segue:

Dans l'ensemble, on constate une appropriation du problème par la plupart des groupes d'élèves, à quelques exceptions près, comme celle qui suit :



Le difficoltà e gli errori si situano, in generale, su due livelli: uno legato all'errata gestione della variazione delle dimensioni (quindi alla gestione di dati che mutano, come detto più sopra) e l'altro a livello dei calcoli di rapporti e percentuali.

La strategia più usata è quella prevista nell'analisi a priori e cioè individuare un rettangolo con relative misure e tenerlo come riferimento per controllare le risposte date dai singoli studenti.

Les difficultés et les erreurs se situent en général à deux niveaux : l'un lié à la mauvaise gestion des variations des dimensions (c'est-à-dire la gestion des données qui évoluent, comme mentionné ci-dessus) et l'autre au niveau des calculs de rapports et de pourcentages.

La stratégie la plus utilisée est celle envisagée dans l'analyse *a priori*, à savoir choisir un rectangle avec des mesures relatives et le garder comme référence pour contrôler les réponses données individuellement par les élèves.

Il est à noter que les groupes qui ont produit des réponses ont tous raisonné à partir d'un exemple en donnant des valeurs simples aux dimensions du rectangle.

Vengono perlopiù assegnate delle dimensioni ad un rettangolo (spesso disegnato) e si calcola l'area; poi le dimensioni vengono variate secondo le indicazioni del problema e si trovano le aree corrispondenti.

I rapporti, quando vengono espressi, sono indicati nella quasi totalità dei casi in forma decimale.

Des dimensions sont généralement attribuées à un rectangle (souvent dessiné) et la surface est calculée ; ensuite, les dimensions sont modifiées en fonction du problème et les surfaces correspondantes sont calculées.

Les rapports, lorsqu'ils sont exprimés, sont presque toujours donnés sous forme décimale.

Come indicato nella tabella i casi di Ada e Bice sono risultati quelli più semplici. Per quanto riguarda Diego, la difficoltà è risultata essere legata a una non accettazione di un valore approssimato (interessante un caso in cui si capisce che il gruppo non ha saputo "decidersi"). Per quanto riguarda Fabio, talvolta è stato ignorato anche dai gruppi che hanno risposto in maniera corretta in merito agli altri casi.

Comme le montre le tableau, les cas d'Anne et de Berthe se sont avérés les plus faciles. En ce qui concerne Daniel, la difficulté s'est avérée être liée à la non-acceptation d'une valeur approximative (il est intéressant de noter qu'il y a eu un cas où l'on a compris que le groupe n'arrivait pas à "se décider"). En ce qui concerne Fabio, il a parfois été laissé de côté même par des groupes qui ont répondu correctement dans d'autres cas.

In una parte di casi, le risposte, pur corrette rispetto a chi avesse trovato il rettangolo di area doppia del primo, non sono state completate con i rapporti per gli altri casi. Il caso di Fabio è quello che, laddove affrontato, ha evidenziato le maggiori difficoltà in merito alla questione delle percentuali e talvolta la "diminuzione" è diventata "aumento".

Il ricorso alle proporzioni ha permesso talvolta di gestire comunque correttamente le percentuali.

A tal proposito, pensiamo che questo problema possa essere utilizzato in un'attività in classe per riprendere questioni relative alle percentuali anche in casi di tipo "geometrico" e non solo in ambito puramente aritmetico.

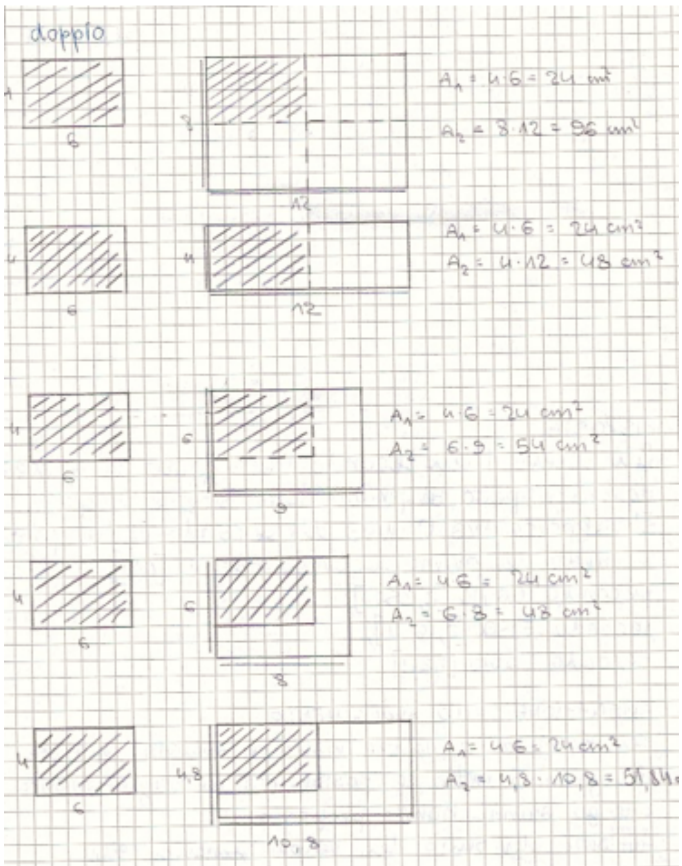
Interessanti alcuni casi di elaborati corretti e completi dove anche i rapporti sono indicati sui disegni dei vari rettangoli.

Dans un certain nombre de cas, les réponses, bien que correctes pour ceux qui ont trouvé le rectangle d'une surface double de celle du premier, n'ont pas été complétées par les rapports pour les autres cas. Le cas de Fabio est celui qui, lorsqu'il a été abordé, a montré le plus de difficultés sur la question des pourcentages et la "diminution" est parfois devenue une "augmentation".

L'utilisation des proportions a parfois permis de traiter correctement les pourcentages.

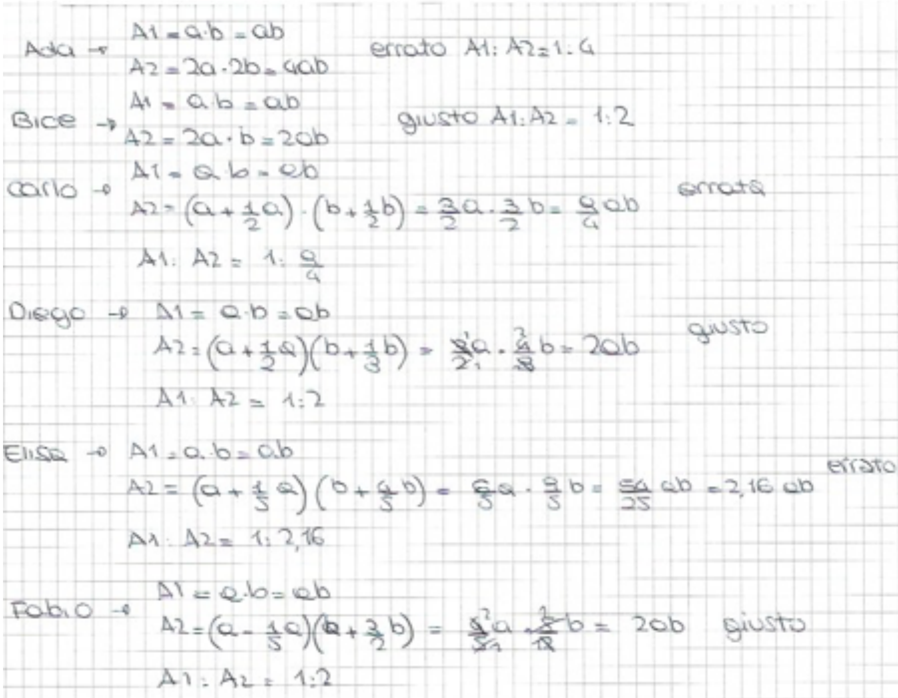
A cet égard, nous pensons que ce problème pourrait être utilisé dans le cadre d'une activité en classe pour aborder les questions relatives aux pourcentages dans des cas "géométriques" et pas seulement dans le domaine purement arithmétique.

Il est intéressant de relever quelques cas de travaux corrects et complets où les rapports sont également indiqués sur les dessins des différents rectangles.



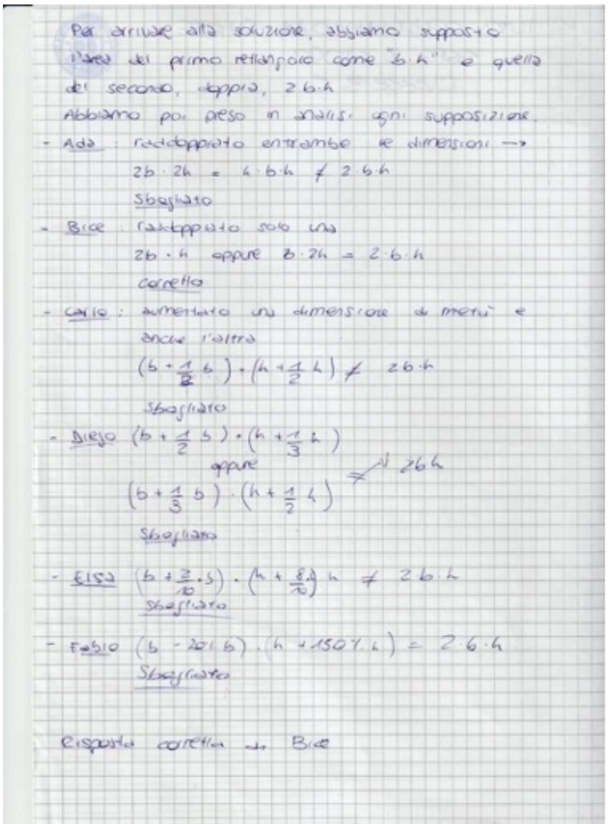
In alcuni casi (pochi peraltro), pur trattandosi della categoria 8, si ricorre all'uso di valori iniziali generici indicati con a e b:

Dans certains cas (peu nombreux d'ailleurs), dont la catégorie 8, les élèves utilisent des valeurs initiales génériques représentées par a et b :


Ada → $A1 = a \cdot b = ab$ errato $A1 : A2 = 1 : 4$
$A2 = 2a \cdot 2b = 4ab$
Bice → $A1 = a \cdot b = ab$ giusto $A1 : A2 = 1 : 2$
$A2 = 2a \cdot b = 2ab$
Carlo → $A1 = a \cdot b = ab$ errato
$A2 = (a + \frac{1}{2}a) \cdot (b + \frac{1}{2}b) = \frac{3}{2}a \cdot \frac{3}{2}b = \frac{9}{4}ab$
$A1 : A2 = 1 : \frac{9}{4}$
Diego → $A1 = a \cdot b = ab$ giusto
$A2 = (a + \frac{1}{2}a)(b + \frac{1}{3}b) = \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{3}b = 2ab$
$A1 : A2 = 1 : 2$
Elisa → $A1 = a \cdot b = ab$ errato
$A2 = (a + \frac{1}{5}a)(b + \frac{4}{5}b) = \frac{6}{5}a \cdot \frac{9}{5}b = \frac{54}{25}ab = 2{,}16\ ab$
$A1 : A2 = 1 : 2{,}16$
Fabio → $A1 = a \cdot b = ab$
$A2 = (a - \frac{1}{5}a)(b + \frac{3}{2}b) = \frac{4}{5}a \cdot \frac{5}{2}b = 2ab$ giusto
$A1 : A2 = 1 : 2$

In alcuni casi, la gestione del "calcolo letterale", peraltro molto interessante nel caso della categoria 8, non è stato utilizzato in modo completamente corretto

Dans certains cas, le "calcul littéral", très intéressant au niveau de la catégorie 8, n'a pas été utilisé d'une manière tout à fait correcte.


Per arrivare alla soluzione, abbiamo supposto l'area del primo rettangolo come "b·h" e quella del secondo, doppia, 2·b·h
Abbiamo poi preso in analisi ogni supposizione.
- Ada: raddoppiato entrambe le dimensioni → $2b \cdot 2h = 4 \cdot b \cdot h \neq 2 \cdot b \cdot h$
Sbagliato
- Bice: raddoppiato solo una $2b \cdot h$ oppure $b \cdot 2h = 2 \cdot b \cdot h$
corretto
- Carlo: aumentato una dimensione di metà e anche l'altra
$(b + \frac{1}{2}b) \cdot (h + \frac{1}{2}h) \neq 2 \cdot b \cdot h$
Sbagliato
- Diego $(b + \frac{1}{2}b) \cdot (h + \frac{1}{3}h)$ oppure $(b + \frac{1}{3}b) \cdot (h + \frac{1}{2}h)$ $\neq 2 \cdot b \cdot h$
Sbagliato
- Elisa $(b + \frac{2}{10} \cdot b) \cdot (h + \frac{8}{10}h) \neq 2 \cdot b \cdot h$
Sbagliato
- Fabio $(b - 20\% b) \cdot (h + 150\% h) = 2 \cdot b \cdot h$
Sbagliato
Risposta corretta → Bice

Categorie 9 e 10.
Per quanto riguarda queste categorie riportiamo l'analisi e i commenti relativi agli elaborati della sezione Siena.

Catégories 9 et 10
En ce qui concerne ces catégories, nous présentons l'analyse et les commentaires sur les copies de la section de Sienne.

In Cat. 9, il 68 % ha avuto punteggi tra 3 e 4; in Cat. 10, quasi la metà dei gruppi ha avuto 4 punti
En cat 9, 68 % ont eu entre 3 et 4 points ; en cat 10, environ la moitié des groupes ont eu 4 points.

A	☒ riuscita molto alta	☐ riuscita alta	☐ difficoltà media	☐ riuscita scarsa	☐ riuscita molto scarsa
B	☒ riuscita molto alta	☒ riuscita alta	☐ difficoltà media	☐ riuscita scarsa	☐ riuscita molto scarsa
C	☐ riuscita molto alta	☒ riuscita alta	☐ difficoltà media	☐ riuscita scarsa	☐ riuscita molto scarsa
D	☐ riuscita molto alta	☒ riuscita alta	☐ difficoltà media	☐ riuscita scarsa	☐ riuscita molto scarsa
E	☐ riuscita molto alta	☐ riuscita alta	☐ difficoltà media	☐ riuscita scarsa	☐ riuscita molto scarsa
F	☐ riuscita molto alta	☐ riuscita alta	☒ difficoltà media	☐ riuscita scarsa	☐ riuscita molto scarsa

Procédures relevées

1 Partir d'un cas particulier de dimensions du premier rectangle, le même pour les six cas en général, parfois avec des variations d'un cas à l'autre. (Les dimensions sont des petits nombres naturels en nombre de carrés du quadrillage par exemple 5 x 10.

Calculer son aire,

Déterminer les dimensions des six seconds (la maîtrise des expressions « doubler », « augmenter de la moitié », « augmenter de 20% » … et la capacité de les transformer en multiplication est acquise, à quelques exceptions près),

Calculer les six aires et vérifier les rapports pour les trois cas où celui-ci est différent de 2. B, D, F.

Procedure rilevate

1 Partire da un caso particolare di dimensioni del primo rettangolo, il medesimo per i sei casi, anche se talvolta con variazioni da un caso all'altro (le dimensioni sono numeri naturali piccoli che possono essere rappresentati con la quadrettatura del foglio, ad esempio 5 x 10).

Abbiamo disegnato un rettangolo con misure casuali (5 x 10) *e ne abbiamo calcolato l'area.*

Successivamente, riprendendo le misure del rettangolo le abbiamo modificate secondo le teorie degli allievi.

La prima, Adda, ha sbagliato in quanto raddoppiando entrambi i lati, l'area risulta quattro volte maggiore.

La seconda ha ragione in quanto …

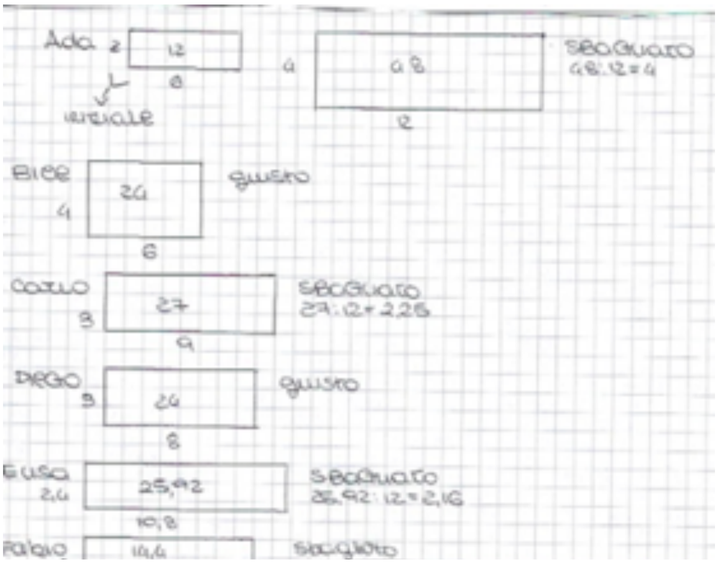
Nous avons dessiné un rectangle avec des mesures aléatoires (5 x 10) et calculé sa surface.

Par la suite, en prenant les mesures du rectangle, nous les avons modifiées selon les théories des élèves.

La première, Adda, a tort en ce sens qu'en doublant les deux côtés, la surface est quatre fois plus grande.

La seconde a raison comme…

Esempio/Exemple



Pour tous les cas de réponse « non » (A, C, E) le seul exemple a été jugé suffisant. **L'analyse a priori demandait plusieurs exemples, à tort, dans les critères d'attribution des points**.

Per tutti i casi di risposta « no » (A, C, E), un solo esempio è stato giudicato come sufficiente: **L'analisi a priori ne richiedeva, a torto, più di uno!!!**

2 Partir du cas général avec un premier rectangle de dimensions (x, y) ou (b, h) le même pour les six cas en général (sans variations).

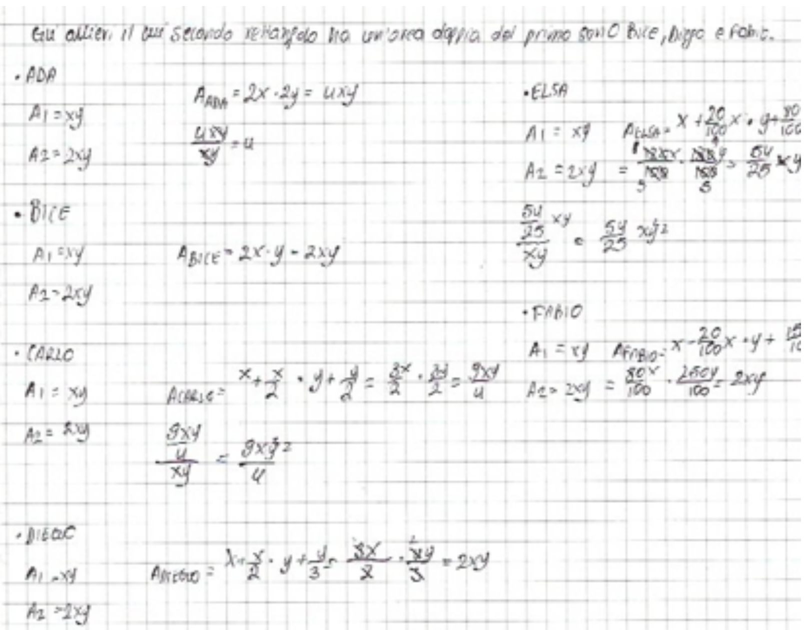
Calculer son aire,

Déterminer les dimensions des six seconds (la maîtrise des expressions « doubler », « augmenter de la moitié », « augmenter de 20% » … et la capacité de les transformer en multiplication est acquise, à quelques exceptions près),

Calculer les six aires et vérifier les rapports pour les trois cas où celui-ci est différent de 2. B, D, F.

pour A : non car $2a \times 2b = 4ab \neq 2ab$	pour B : oui car $2a \times b = 2ab$
pour C : non car $1{,}5a \times 1{,}5b = 2{,}25ab \neq 2ab$	pour D : oui car $3/2a \times 4/3b = 2ab$
pour E : non car $1{,}2a \times 1{,}8b = 2{,}16ab \neq 2ab$	pour F : oui car $0.8 \times 2{,}5b = 2ab$

Cat. 10



C'est cette partie qui a provoqué les quelques erreurs classiques, pour C, E et F en particulier lors de opérations du genre : $(x + x/2)(y + y/3)$… qui a fait apparaître quelques rapports 9/8 au lieu de 9/4 et des approximations de 2,16 ou 196/100.

È questa parte che ha provocato qualche errore classico, per C, E e F in particolare nel caso di operazioni del tipo:

$(x + x/2)(y + y/3)$… che ha portato a qualche rapporto 9/8 al posto di 9/4 e ad approssimazioni 2,16 o 196/100.

Contrairement à une affirmation de l'analyse a priori disant (*mais ce type de justification du mathématicien est loin d'être à la portée des élèves*) cette procédure a été conduite à terme correctement par environ 1/3 des groupes de catégorie 9 et la moitié des groupes de catégorie 10

C'est pour les copies de catégorie 8 que cette remarque est pertinente.

In effetti, l'affermazione dell'analisi a priori: nel linguaggio e con operazioni del "matematico", valevoli "per tutti i rettangoli" - di dimensioni a e b e di area ab - le risposte sono:

per A: no perché $2a \times 2b = 4ab \neq 2ab$ — per B sì perché $2a \times b = 2ab$

per C: no perché $1{,}5a \times 1{,}5b = 2{,}25ab \neq 2ab$ — per D sì perché $3/2a \times 4/3b = 2ab$

per E: no perché $1{,}2a \times 1{,}8b = 2{,}16ab \neq 2ab$ — per F sì perché $0{,}8a \times 2{,}5b = 2ab$

(ma questo tipo di giustificazione del matematico è lontano dall'essere alla portata dell'allievo) come si è visto più sopra, è valida per la categoria 8.

3. "La divisione del rettangolo"/ "Le partage du rectangle"

3.1. Un po' di storia del problema / L'historique du problème

Nel maggio 2019, François propone al gruppo anche alcune idee di divisione di un rettangolo per arrivare a sceglierne una da elaborare:

En mai 2019, François a également proposé au groupe quelques idées de partages d'un rectangle afin d'élaborer de nouveaux problèmes :
Quatre versions d'une même tâche mathématique avec différents degrés d'aide dans les énoncés.

Le partage du rectangle I
Dessinez un rectangle de 12 cm sur 16 cm et partagez-le en quatre triangles équivalents (de même aire) mais non isométriques (chacun a une forme différente de celle des autres) par trois segments ayant une extrémité commune.

Expliquez comment on peut vérifier que les quatre aires sont égales.

Calculez les périmètres de chacun des quatre triangles.

Le partage du rectangle II
Anna a dessiné un beau rectangle très précis dont les dimensions sont 12 cm et 16 cm.
Elle dessine un segment qui partage son rectangle en deux triangles égaux, puis elle dessine encore deux autres segments, qui ont une extrémité commune avec le premier, et qui partagent chacun l'un des deux triangles en deux nouveaux triangles de même aire, non isométriques.

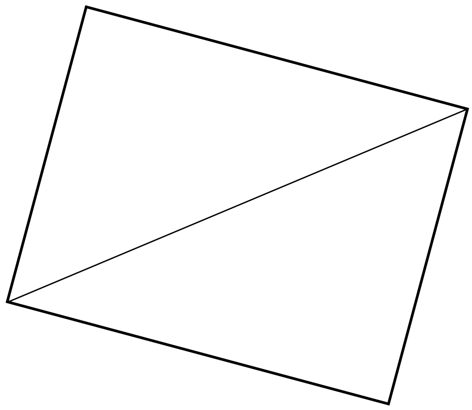
Expliquez comment on peut vérifier que les quatre aires sont égales.

Calculez les périmètres de chacun des quatre triangles.

Le partage du rectangle III

Anna a dessiné un beau rectangle très précis dont les dimensions sont 12 cm et 16 cm qu'elle a partagé en deux rectangles isométriques (égaux) par une diagonale.

Elle dessine encore deux autres segments qui ont une extrémité commune avec une de celle de la diagonale déjà dessinée, et qui partagent chacun l'un des deux triangles en deux nouveaux triangles équivalents (de même aire) mais non isométriques.



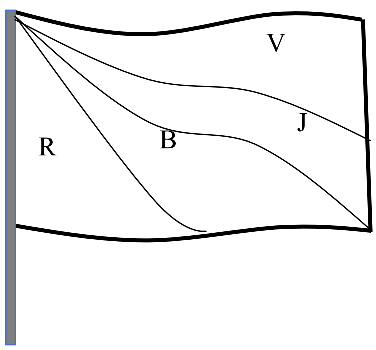
Expliquez comment on peut vérifier que les quatre aires sont égales.

Calculez les périmètres de chacun des quatre triangles.

Le partage du rectangle IV

Le drapeau de la République de Transalpie flotte fièrement sur la tour du château du gouvernement.

Ce drapeau est un rectangle de 3m sur 5 m, composé de quatre triangles de même aire, aux couleurs de la république : rouge (R), blanc (B), jaune (J) et vert (V).



Expliquez comment on peut vérifier que les quatre aires sont égales.

Calculez les périmètres de chacun des quatre triangles.

Tâche mathématique / Compito matematico

Un rectangle, dont les dimensions sont données, étant partagé en quatre triangles équivalents par trois segments issus d'un même sommet, trouver les dimensions de chacun des triangles

Un rettangolo, le cui dimensioni sono date, suddiviso in quattro triangoli equivalenti da tre segmenti uscenti dal medesimo vertice, trovare le dimensioni di ciascuno dei triangoli

Analyse de la tâche/Analisi del compito

Dans les versions I à III, il y a la découverte du partage en quatre parties équivalentes à partir de la donnée du rectangle et des trois segments ayant une extrémité commune. La version II suggère explicitement qu'un premier segment partage le rectangle en deux triangles d'aires égales et la version III fait apparaître ce premier segment. La tâche commune qui reste à la charge des élèves, dans les trois premières versions, est de savoir comment partager les deux triangles (demi-rectangles) en deux parties d'aires équivalentes ou comment ils ont été partagés pour la version IV.

Nelle versioni da I a III, bisogna scoprire come suddividere il rettangolo in quattro parti equivalenti sapendo che bisogna considerare tre segmenti aventi un vertice in comune. La versione II suggerisce esplicitamente che un primo segmento suddivide il rettangolo in due triangoli uguali e la versione III mostra questo primo segmento. Il compito che rimane a carico degli allievi, nelle prime tre versioni, è sapere come suddividere i due triangoli (semi-rettangoli) in due parti equivalenti o come sono stati suddivisi nel caso della versione IV.

C'est simple si on maîtrise la formule de l'aire du triangle ! mais …
Les calculs des périmètres exigent la connaissance de la relation de Pythagore. Mais il s'agit d'une application traditionnelle et bien travaillée en classe.
On peut proposer aux élèves qui ne la connaissent pas de mesurer les côtés.
E' semplice se si padroneggia la formula dell'area del triangolo! ma…
I calcoli dei perimetri esigono la conoscenza del teorema di Pitagora. Ma si tratta di un'applicazione tradizionale e ben esercitata.
Si potrebbe proporre agli allievi che non lo conoscono di misurare i lati.

Più avanti, a febbraio 2020:
Plus tard en février 2020 :
Commenti di François / Commentaires de François
E' evidentemente quest'ultima versione la mia preferita, non solamente per patriottismo!
Le posizioni dei segmenti sono indicate e si lavora sull'immagine di una figura e non su una figura geometrica (è stato necessario modificare un po' le dimensioni per avere un contesto più "credibile").
E praticamente non ci saranno tentativi di misurazioni, né di errate interpretazioni della posizione dei tre segmenti e le relative complicazioni per l'attribuzione dei punteggi.

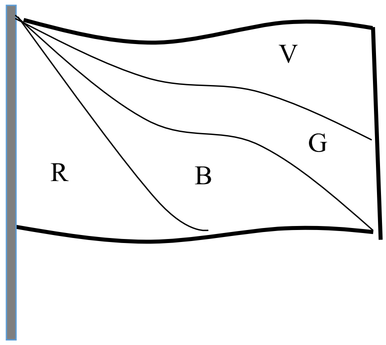
Voici une proposition d'analyse a priori
Analyse a priori
Tâche mathématique
Un rectangle de 5 m sur 3 m est partagé en quatre triangles équivalents par trois segments issus d'un de ses sommets, calculer les dimensions des quatre triangles.
Analyse de la tâche
- Observer la figure, constater qu'on ne pourra pas mesurer les dimensions à la règle et qu'il faudra se débrouiller avec les dimensions du rectangle et la donnée « triangles de même aire ».
- Déduire de cette donnée qu'un des segments de partage doit être une diagonale puisqu'il partage le rectangle en deux parties égales (constituées chacune de deux triangles) et que les extrémités des deux autres segments doivent se situer au milieu des côtés opposés au sommet d'où sont issus les trois segments de partage. (Cette déduction doit être explicitée en se référant à la formule de l'aire du genre : pour que les aire soient égales, les deux triangles qui ont la même hauteur (5 m ou 3 m) doivent avoir des bases égales (2,5 m ou 2,5 m).
- Effectuer les calculs
  R : $3 + 2{,}5 + \sqrt{(9 + 6{,}25)} = 5{,}5 + \sqrt{15{,}25} \approx$ ---
  B : $\sqrt{15{,}25} + 2{,}5 + \sqrt{(25 + 9)} = 2{,}5 + \sqrt{15{,}25} + \sqrt{34} \approx$ …
  …

Attribution des points
4 Les quatre réponses correctes et complètes (R = ou ≈, …) avec justification des dimensions 2,5 et 1,5
3 Trois réponses correctes avec justification
ou les quatre réponses correctes mais sans la justification
2 Deux réponses correctes avec justification
ou trois réponses correctes mais sans la justification
1 une réponse correcte avec essai de justification
ou deux réponses correctes mais sans la justification
0 Incompréhension du problème
Niveaux : 9, 10

Seguono interessanti e costruttivi commenti via e-mail dalla gran parte dei membri del gruppo (gli interventi sono segnalati in verde).
La plupart des membres du groupe ont ensuite formulé des commentaires intéressants et constructifs par mails (les interventions sont marquées en vert).

LA DIVISIONE DEL RETTANGOLO (CAT. **Anche categoria 8**, 9, 10)

La bandiera della Repubblica di Transalpino sventola fieramente sulla torre del castello del Presidente.
~~Questa~~ **La bandiera qui sotto raffigurata è in realtà** un rettangolo di 3 m su 5 m, composto da quattro triangoli aventi la medesima area, con i colori della repubblica: rosso (R), bianco (B), giallo (G) e verde (V).



Quali sono le misure di ogni lato ~~dimensioni~~ di ciascuno triangolo?
Giustificate la vostra procedura e date i dettagli dei vostri calcoli.

ATTENZIONE! Ci si è resi conto che in origine il problema chiedeva il perimetro dei triangoli e bisognava verificare che le quattro aree fossero uguali.
In effetti dall'analisi sembrerebbe si faccia riferimento a questi quesiti, mentre le richieste attuali fanno riferimento solo alle dimensioni.
Dobbiamo prima decidere insieme le richieste del problema per poter fare l'analisi e l'attribuzione dei punteggi.

ATTENTION ! On s'est rendu compte qu'à l'origine le problème demandait le périmètre des triangles et qu'il fallait vérifier que les quatre aires étaient égales.
En effet, l'analyse semble se référer à ces questions, alors que les exigences actuelles ne se réfèrent qu'aux dimensions. Il faut d'abord décider ensemble des exigences du problème pour faire l'analyse et l'attribution des points.

ANALISI A PRIORI (

Compito matematico

Un rettangolo le cui dimensioni sono 5 m e 3 m è suddiviso in quattro triangoli equivalenti tramite tre segmenti uscenti dal medesimo vertice, si chiede di trovare le dimensioni di ciascun triangolo.

Una proposta di analisi del compito

Analisi del compito

- Osservare la figura, constatare che non sarà possibile misurare le dimensioni con il righello e che sarà necessario far conto solo sulle dimensioni del rettangolo e il dato "triangoli aventi la medesima area".
- Rendersi conto invece che disegnando la figura con le dimensioni date è possibile trovare le altre con l'utilizzo del righello; approssimate come con la risoluzione ottenuta con il teorema di Pitagora vedi risoluzione con il teorema di Pitagora

Oppure disegnando la figura in scala "ad esempio 1 cm = 1 m è possibile utilizzare il righello misurando in modo approssimato

- Dedurre da questo dato che uno dei segmenti di suddivisione deve essere una diagonale dal momento che divide il rettangolo in due parti uguali (costituite ciascuna da due triangoli) **e gli altri due segmenti nascono da uno dei vertici della diagonale e si uniscono al punto medio dei lati opposti.** (Questa deduzione deve essere esplicitata facendo riferimento alla formula dell'area del tipo: perché le aree siano uguali, i due triangoli che hanno la medesima altezza (5 m o 3 m) devono avere basi uguali (2,5 m o 2,5 m).
- Fare i calcoli applicando la formula per trovare l'ipotenusa col Teorema di Pitagora

R: Ipotenusa=$\sqrt{(3^2 + 2,5^2)}$=$\sqrt{(9 + 6,25)}$ = $\sqrt{15,25} \approx 3,905\ldots$; P_R=3+2,5+3,905 ≈ 9,405…;
o P_R =3 + 2,5 + $\sqrt{(9 + 6,25)}$ = 5,5 +3,9 ≈9,405…
R : 3 + 2,5 + $\sqrt{(9 + 6,25)}$ = 5,5 + $\sqrt{15,25}$ ≈ ---
B: Ipotenusa=diagonale del rettangolo=$\sqrt{(3^2 + 5^2)}$= $\sqrt{(9 + 25)}$ = $\sqrt{34} \approx 5,83\ldots$; P_B=2,5+3,905+5,83 ≈ 12,235…;
o P_B =3 + 2,5 + $\sqrt{(9 + 25)}$ = 2,5 +3,905+5,83 ≈12,235…;
B : $\sqrt{15,25}$ + 2,5 + $\sqrt{(25 + 9)}$ = 2,5 + $\sqrt{15,25}$ + $\sqrt{34}$ ≈ …
G: Ipotenusa=diagonale del rettangolo=$\sqrt{(3^2 + 5^2)}$= $\sqrt{(9 + 25)}$ = $\sqrt{34} \approx 5,83\ldots$; P_G=1,5+5,22+5,83 ≈ 12,55…;
V: Ipotenusa=$\sqrt{(1,5^2 + 5^2)}$=$\sqrt{(2,25 + 25)}$ = $\sqrt{27,25} \approx 5,22\ldots$; P_V=5+1,5+5,22 ≈ 11,72…;

Attribuzione dei punteggi

4 Le quattro risposte corrette e complete (R = oppure≈, …) con giustificazione delle dimensioni 2,5 e 1,5
3 Tre risposte corrette con giustificazione
oppure le quattro risposte corrette senza giustificazione
2 Due risposte corrette con giustificazione
oppure tre risposte corrette senza giustificazione
1 una risposta corretta con tentativo di giustificazione
oppure due risposte corrette senza alcuna giustificazione deux réponses correctes mais sans la justification
0 Incomprensione del problema

Livello: **8** ,9, 10

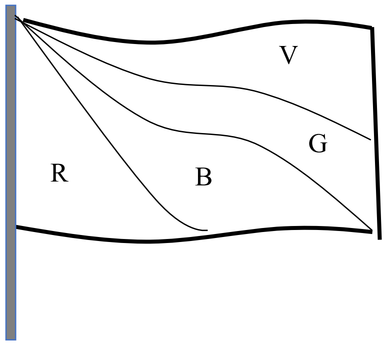
Ai quali fa seguito un messaggio da parte di François:

Je suis avec intérêt les débats du groupe Géométrie plane à propos du problème.
J'avais des doutes pour la catégorie 8 mais il ne s'agissait que de savoir si la relation de Pythagore qui facilite beaucoup la recherche était connue des élèves de cette catégorie. Pour l'Italie nos collègues ont dit que ça ne pose pas de problèmes, pour la France Florence a répondu et la possibilité d'un dessin précis à l'échelle a été ajoutée dans l'analyse de la tâche et l'attribution des points.
Dans mon esprit, la propriété du partage d'un triangle en deux parties équivalentes par une médiane est comprise dans celles de la formule du calcul de l'aire du triangle « la moitié du produit de la base par la hauteur ». Lorsqu'on enseigne cette formule ou lorsqu'on la fait découvrir à partir de celle du rectangle, puis du parallélogramme, il me semble évident qu'on doit définir les termes « base », « hauteur », « mesure de longueur » , « mesure d'aire », etc. qui prennent en compte les caractéristiques géométriques des figures et non seulement les mesures (nombres), comme on le fait en arithmétique, hors contexte, à propos de la relation b x h = 2A sous une de ses trois formes lacunaires : b × h = … ; … × h = 2A et b × … = 2A.
Dans le cas du drapeau qui nous intéresse, deux triangles sont équivalents (même aire, selon l'énoncé) et ont la même hauteur (obstacle parce que beaucoup d'élèves ne conçoivent pas de hauteur extérieure au triangle ou même comme l'un de ses côtés), la déduction ou la découverte consiste à relier ces observations à la relation b × h = 2A ou ? × h = 2A. Bien que non évidente pour quelqu'un à qui on ne l'a jamais « enseigné » elle doit pouvoir faire l'objet d'une recherche bien avant les catégories 9 et 10. (Les résultats et analyses a posteriori des « Triangles sur une planche à clou » montrent qu'il n'y a pas un progrès sensible de la catégorie 8 aux suivantes, ce qui signifie que, lors de l'exploitation didactique du problème, le débat sera intéressant pour toutes ces catégories sur la perception d'une hauteur commune à tous ces triangles ou sur le lieu géométrique des sommets).
Seguo con interesse il dibattito del gruppo geometria piana a proposito del problema.
Avevo dei dubbi per la categoria 8, ma si trattava solo di sapere se il teorema di Pitagora, che facilita la ricerca, fosse noto agli allievi di questa categoria. Per quanto riguarda l'Italia i nostri colleghi hanno detto che non ci sono problemi, per la Francia ha risposto Florence e nell'analisi del compito e nell'attribuzione dei punteggi è stata aggiunta la possibilità di un disegno preciso in scala.
Secondo me, la proprietà della suddivisione di un triangolo in due parti equivalenti tramite una mediana è compresa in quella della formula del calcolo dell'area del triangolo "la metà del prodotto della base per l'altezza". Quando si insegna tale formula o quando la si fa scoprire a partire da quella del rettangolo, poi del parallelogramma, mi sembra evidente che si debbano definire i termini "base", "altezza", "misura di lunghezza", "misura d'area", etc. che prendono in considerazione le caratteristiche geometriche delle figure e non solo le misure (numeri), come lo si fa in aritmetica, fuori da un contesto, a proposito della relazione b × h = 2A secondo una delle tre forme "aperte": b × h = … ; … × h = 2A e b × … = 2A.

Nel caso della bandiera, due triangoli sono equivalenti (medesima area, secondo l'enunciato) e hanno la medesima altezza (ostacolo perché molti allievi non considerano altezze esterne al triangolo o anche come uno dei suoi lati), la deduzione o la scoperta consiste nel collegare queste osservazioni alla relazione $b \times h = 2A$ o ? $\times$ $h = 2A$. Benché non evidente per qualcuno al quale non sia mai stata "insegnata", tale deduzione deve poter diventare l'oggetto di una ricerca ben prima delle categorie 9 e 10. (I risultati e le analisi a posteriori dei "Triangoli su un geopiano" mostrano che non c'è un progresso sensibile dalla categoria 8 alle successive, e ciò significa che, al momento dell'utilizzazione didattica del problema, il dibattito sarà interessante per tutte le categorie in merito alla percezione di un'altezza comune a tutti questi triangoli o in merito al luogo geometrico dei vertici).

Si giunge alla versione condivisa che viene consegnata al GIPL:
Cela conduit à la transmission de la version suivante au GPIL :

LA DIVISIONE DEL RETTANGOLO (CAT. 8, 9, 10)
La bandiera della Repubblica di Transalpino sventola fieramente sulla torre del castello del Presidente.
La bandiera qui sotto raffigurata è in effetti un rettangolo di 3 m su 5 m, composto da quattro triangoli aventi la medesima area, con i colori della repubblica: rosso (R), bianco (B), giallo (G) e verde (V).



Quanto misura il perimetro di ciascun triangolo?

Giustificate la vostra procedura e date i dettagli dei vostri calcoli.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Un rettangolo le cui dimensioni sono 5 m e 3 m è suddiviso in quattro triangoli equivalenti tramite tre segmenti uscenti dal medesimo vertice, si chiede di trovare il perimetro di ciascun triangolo.

Analisi del compito

- Osservare la figura, constatare che non sarà possibile misurare le dimensioni con il righello e che sarà necessario far conto solo sulle dimensioni del rettangolo e il dato "triangoli aventi la medesima area".
- Dedurre da questo dato che uno dei segmenti di suddivisione deve essere una diagonale dal momento che divide il rettangolo in due parti uguali (costituite ciascuna da due triangoli) e che e gli altri due segmenti hanno un estremo che coincide con uno dei vertici della diagonale e l'altro estremo al centro dei lati opposti a tale vertice. Infatti, facendo riferimento alla formula dell'area del tipo: perché le aree siano uguali (area del rettangolo divisa per 4 dà 3,75 m^2), i due triangoli che hanno la medesima altezza (5 m in un caso o 3 m nell'altro) devono avere basi uguali (2,5 m o 1,5 m) e quindi l'estremo di ciascuno dei due segmenti deve trovarsi al centro del lato opposto.

- Per calcolare il terzo lato dei triangoli R, G e V applicare il Teorema di Pitagora dopo aver osservato che la parte bianca e la parte gialla hanno in comune la diagonale del rettangolo.

L'ipotenusa del triangolo rettangolo R è anche lato del triangolo B mentre la parte Gialla ha un lato comune alla parte bianca e l'altro comune a quella verde.

R: $\sqrt{(3^2 + 2,5^2)}=\sqrt{(9 + 6,25)} = \sqrt{15,25} \approx 3,905$; $P_R=3+2,5+3,905 \approx 9,405$;

B: $\sqrt{(3^2 + 5^2)}= \sqrt{(9 + 25)} = \sqrt{34} \approx 5,83$; $P_B=2,5+3,905+5,83 \approx 12,235$;

G: $\sqrt{(3^2 + 5^2)} = \sqrt{(9 + 25)} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$; $P_G=1{,}5+5{,}22+5{,}83 \approx 12{,}55$;

V: $\sqrt{(1{,}5^2 + 5^2)}=\sqrt{(2{,}25 + 25)} = \sqrt{27{,}25} \approx 5{,}22$; $P_V=5+1{,}5+5{,}22 \approx 11{,}72$.

Oppure

- Fare un disegno del rettangolo, ma capire che con le dimensioni date non sarà possibile effettuare delle misure. Scegliere quindi misure in scala che consentano di effettuare le misure (per esempio 20 cm e 12 cm).
- Tracciare i tre segmenti (con giustificazione come più sopra)
- Effettuare le misure e capire che bisogna approssimare alla seconda cifra decimale.
- Calcolare i perimetri dei quattro triangoli e trasformare i risultati rapportandosi alle dimensioni del rettangolo originale

Attribuzione dei punteggi

4 Le quattro risposte corrette e complete (con calcoli o con un disegno preciso in scala) ($R\approx9{,}405$, $B\approx12{,}235$, $G\approx12{,}55$, $V\approx11{,}72$) con giustificazione delle dimensioni 2,5 e 1,5

3 Tre risposte corrette con giustificazione
oppure le quattro risposte corrette senza giustificazione

2 Due risposte corrette con giustificazione
oppure tre risposte corrette senza giustificazione

1 una risposta corretta con tentativo di giustificazione
oppure due risposte corrette senza alcuna giustificazione

0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: GTGP

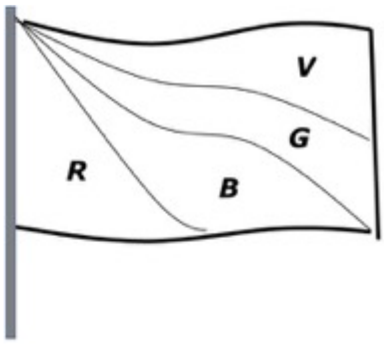
Tale versione è un po' diversa da quella finale, nella quale figurano in particolare i due personaggi Anna e Marco e i loro punti vista… con l'intento di stimolare la discussione degli allievi mentre affrontano il problema durante la prova.

Cette version a été encore modifiée à la suite d'une intervention du GPIL (Voir conférence GPIL) par l'introduction de deux personnages, Anna et Marco dans le but de stimuler le débat entre élèves et de les dissuader d'utiliser les instruments de mesure nouveau.

LA DIVISIONE DEL RETTANGOLO (Cat. 8, 9, 10)

La bandiera della Repubblica di Transalpino sventola fieramente sulla torre del castello del Presidente.

Anna e Marco osservano la bandiera, qui sotto raffigurata, che è un rettangolo di 3 m per 5 m, composto da quattro triangoli aventi la medesima area, con i colori della Repubblica: rosso (R), bianco (B), giallo (G) e verde (V).



Anna dice: "Secondo me i quattro triangoli hanno lo stesso perimetro."

Marco dice: "No, tutti i perimetri sono diversi. Posso calcolarli senza disegni né strumenti di misura e dirti quale è il maggiore."

Indicate quale triangolo ha il perimetro maggiore e calcolatelo.

Giustificate la vostra procedura (secondo il metodo di Marco) e date i dettagli dei vostri calcoli.

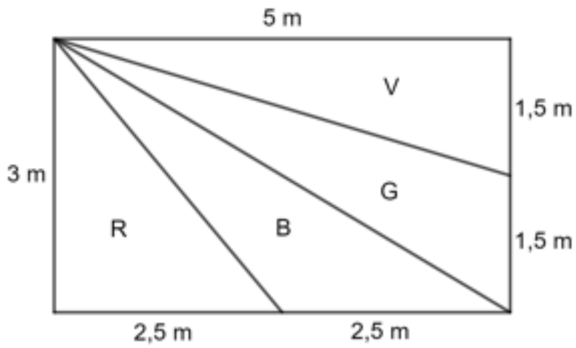
ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Un rettangolo, i cui lati misurano 5 m e 3 m, è diviso in quattro triangoli equivalenti tramite tre segmenti uscenti da un vertice; si chiede di individuare il triangolo di perimetro maggiore e di calcolarlo.

Analisi del compito

- Osservare la figura e rendersi conto che si tratta di un disegno che rappresenta una bandiera al vento; il primo compito è quindi quello di "modellizzare" la situazione immaginando o disegnando un rettangolo avente i lati delle misure date o in scala.
- Comprendere che l'informazione "triangoli aventi la medesima area" è essenziale per posizionare correttamente gli estremi dei segmenti che suddividono il rettangolo: uno di questi segmenti deve essere una diagonale, poiché deve dividere il rettangolo in due parti uguali (costituite ciascuna da due triangoli); gli altri due segmenti devono avere un estremo nel punto medio di due lati del rettangolo (vedi figura). Infatti, in questo modo, la diagonale individua due coppie di triangoli R-B, V-G equivalenti perché hanno basi e altezze congruenti (oppure hanno tutti area 3,75 m^2, cioè l'area del rettangolo diviso 4). Questo punto è il cuore del problema e deve essere opportunamente giustificato.



- Calcolare le misure non ancora note dei lati dei triangoli mediante il teorema di Pitagora e calcolare le misure dei perimetri dei triangoli come somma delle misure dei lati:

  triangolo R: $3 + 2{,}5 + \frac{\sqrt{61}}{2} \approx 9{,}405$ triangolo B: $\frac{\sqrt{61}}{2} + 2{,}5 + \sqrt{34} \approx 12{,}236$

  triangolo G: $\sqrt{34} + 1{,}5 + \frac{\sqrt{109}}{2} \approx 12{,}551$ triangolo V: $\frac{\sqrt{109}}{2} + 1{,}5 + 5 \approx 11{,}720$
- È possibile limitare il calcolo ai perimetri dei triangoli B e G osservando che B ha perimetro maggiore di R e che G ha perimetro maggiore di V (percettivamente o valutando che i due triangoli R-B e G-V hanno due lati di uguale lunghezza e uno diverso)
- Concludere che il triangolo G ha il perimetro maggiore, che misura circa 12,551 *m*

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta e completa (triangolo G, perimetro 12,551 *m* o 12,55 *m* o $\left(\sqrt{34} + 1{,}5 + \frac{\sqrt{109}}{2}\right.$ *m*$\left.\right)$ con calcoli e con giustificazione delle misure 2,5 *m* e 1,5 *m*

3 Risposta corretta e completa, ma non completamente giustificata (per esempio manca la motivazione delle misure 2,5 *m* e 1,5 *m*)
oppure risposta solo parzialmente corretta, a causa di un errore di calcolo, ma ben giustificata

2 Risposta solo parzialmente corretta, a causa di un errore di calcolo, senza giustificazione

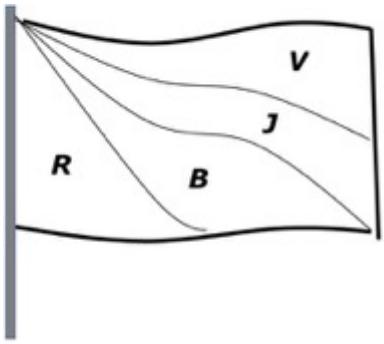
1 Inizio di ragionamento corretto

0 Incomprensione del problema

LE PARTAGE DU RECTANGLE (Cat. 8, 9, 10)

Le drapeau de la République de Transalpie flotte fièrement sur la tour du château du gouvernement.

Anna et Marco observent le drapeau représenté ci-dessous, qui est un rectangle de 3 m sur 5 m, composé de quatre triangles de même aire, aux couleurs de la République : rouge (R), blanc (B), jaune (J) et vert (V).



Anna dit : « D'après moi, les quatre triangles ont le même périmètre ».

Marco dit : « Non, tous les périmètres sont différents. Sans dessins ni instruments de mesure, je peux les calculer et te dire quel est le plus grand ».

Indiquez quel triangle a le plus grand périmètre et calculez-le.

Justifiez votre démarche (selon la méthode de Marco) et donnez le détail de vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

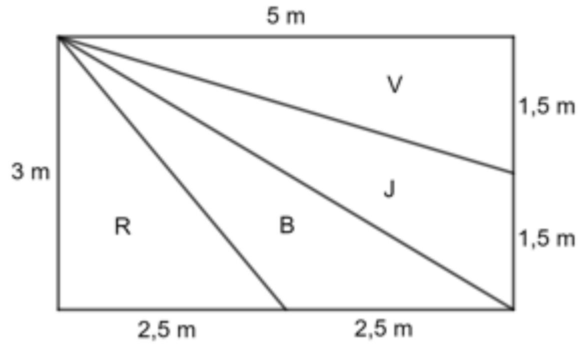
Tâche mathématique

Un rectangle de 5 m sur 3 m est partagé en quatre triangles équivalents par trois segments issus d'un de ses sommets, on demande de trouver le périmètre le plus long et de le calculer.

Analyse de la tâche

- Observer la figure et se rendre compte que le problème traite d'un dessin qui représente une bannière au vent ; la première tâche consiste donc à modéliser la situation en imaginant ou en dessinant un rectangle de mesures données ou à l'échelle.
- Comprendre que l'information « triangles ayant la même aire » est essentielle pour positionner correctement les extrémités des segments qui divisent le rectangle : un de ces segments doit être une diagonale, puisqu'il doit diviser le rectangle en deux parties égales (constituée chacune de deux triangles) ; les deux autres segments doivent avoir une extrémité au milieu des deux côtés du rectangle (voir figure). En effet, ainsi, la diagonale identifie deux paires de triangles semblables R-B, V-G parce qu'ils ont des bases et des hauteurs égales (ou bien toutes les aires sont égales à 3,75 m², c'est-à-dire l'aire du rectangle divisé par 4).

  Ce point est le cœur du problème et doit être précisément justifié.



- Calculer les mesures non encore connues des côtés des triangles grâce au théorème de Pythagore et calculer les mesures des périmètres des triangles comme somme des mesures des côtés :
  triangle R : $3 + 2{,}5 + \frac{\sqrt{61}}{2} \approx 9{,}405$ triangle B : $\frac{\sqrt{61}}{2} + 2{,}5 + \sqrt{34} \approx 12{,}236$
  triangle J : $\sqrt{34} + 1{,}5 + \frac{\sqrt{109}}{2} \approx 12{,}551$ triangle V : $\frac{\sqrt{109}}{2} + 1{,}5 + 5 \approx 11{,}720$
- Il est possible de limiter le calcul aux périmètres des triangles B et J en observant que B a un périmètre plus que R et que J a un périmètre plus grand que V (en remarquant que les deux triangles R-B et J-V ont deux côtés de longueurs égales et un côté différent)
- Conclure que le triangle J a le plus grand périmètre, qui mesure environ 12,551 m.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (triangle J, périmètre 12,551 m ou 12,55 m ou $\left(\sqrt{34} + 1{,}5 + \frac{\sqrt{109}}{2}\right) m$) avec calculs et avec justification des dimensions 2,5 m et 1,5 m
3 Réponse correcte et complète, mais non complètement justifiée (par exemple sans la justification des mesures 2,5 m et 1,5 m)
ou réponse seulement partiellement correcte, à cause d'une erreur de calcul, mais bien justifiée
2 Réponse seulement partiellement correcte, à cause d'une erreur de calcul
1 Début de raisonnement correct
0 Incompréhension du problème

In merito a tali cambiamenti si rimanda all'articolo in questo numero della Gazzetta relativo alla conferenze del GIPL al convegno di Lione.
Concernant ces changements, se référer à l'article du numéro de la Gazette relatif à la conférence du GIPL lors de la rencontre de Lyon.

3.2. Come hanno reagito gli allievi? Comment ont réagi les élèves ?

Questo problema mette in gioco diverse conoscenze sui triangoli, sul teorema di Pitagora che porta con sé numeri irrazionali e sull'approssimazione.
Che cosa è successo in merito a questi aspetti?
Ce problème met en jeu diverses connaissances sur les triangles ; le théorème de Pythagore amène des questions sur l'utilisation des nombres irrationnels et l'approximation.
Qu'en est-il de ces aspects ?

APPROSSIMAZIONI / APPROXIMATIONS

In generale si nota, in qualunque categoria, un approccio all'approssimazione superficiale (ed anche "imprudente").

a) In molti elaborati l'approssimazione è alla prima cifra dopo la virgola, mentre nella prassi didattica è alla seconda; inoltre in questo caso, l'arrotondamento al primo decimale porta a perdere la misura dei cm dei triangoli della bandiera ed è strano che questa riflessione non sia stata fatta, considerato anche che i cm sono un'unità di misura ampliamente usata in vari contesti, anche extra-scolastici.
b) In diversi elaborati l'arrotondamento è addirittura all'unità (es. $(\sqrt{61})/2 = 4$) e non si capisce da dove nasca tale necessità, dato che è possibile usare la calcolatrice.

c) In diversi elaborati non c'è coerenza sul numero di cifre usate nell'arrotondamento e quindi si trovano nello stesso elaborato risultati con una cifra dopo la virgola, con due o… nessuna!
d) Il lato di $(\sqrt{61})/2$ quasi sempre arrotondato a 3,9 anche negli elaborati dove l'arrotondamento è ai centesimi, forse perché $(\sqrt{61})/2 \approx 3{,}905$ è arrotondato erroneamente a 3,90.
e) In alcuni casi, benché le misure della bandiera siano in metri, l'unità di misura viene cambiata (senza equivalenza) in cm.

En général, on constate une approche superficielle (voire "maladroite") de l'approximation, quelle que soit la catégorie.

a) Dans de nombreuses copies, l'approximation se fait au premier chiffre après la virgule, alors que dans la pratique de l'enseignement, elle se fait au deuxième chiffre ; de plus, dans ce cas, l'arrondi à la première décimale après la virgule entraîne la perte de la mesure des cm des triangles du drapeau et il est étrange que cette réflexion n'ait pas été faite, étant donné que le cm est une unité de mesure largement utilisée dans divers contextes, y compris extra-scolaires.
b) Dans plusieurs copies, l'arrondi se fait même à l'unité (par exemple, $(\sqrt{61})/2 = 4$) et il n'est pas clair où un tel besoin se fait sentir, puisqu'il est possible d'utiliser la calculatrice.
c) Dans plusieurs copies, il n'y a pas de cohérence sur le nombre de chiffres utilisés dans l'arrondi et on trouve donc dans la même copie des résultats avec un chiffre après la virgule, avec deux ou... aucun !
d) Le côté de $(\sqrt{61})/2$ est presque toujours arrondi à 3,9, même dans les copies où l'arrondi se fait aux centièmes, peut-être parce que $(\sqrt{61})/2 \approx 3{,}905$ est arrondi par erreur à 3,90.
e) Dans certains cas, bien que les mesures du drapeau soient en mètres, l'unité de mesure est changée (sans équivalence) en cm.

USO DELLE RADICI / UTILISATION DES RACINES CARRÉES

a) Scritture tipo $(\sqrt{61})/2$ usate solo in 2 elaborati di categoria 10 su 40.
b) La radice spesso viene scritta senza "allungare" il simbolo della "V" (come si fa in informatica) e, conseguentemente, spesso sotto l'allungamento non entra tutto il radicando (spesso solo il quadrato del primo cateto).
c) Il simbolo di radice compare e riappare con disinvoltura: es $\sqrt{3}^2+ 5^2 = 34 = 5{,}8$ oppure $3^2+ 5^2 = \sqrt{34}$ anche se l'operazione rimane "in memoria" all'alunno.
d) In alcuni elaborati, invece, si dimentica di fare l'operazione di estrazione di radice quadrata.

a) Des écritures comme $(\sqrt{61})/2$ ne sont utilisées que dans 2 des 40 copies de la catégorie 10.
b) La racine carrée est souvent écrite sans "allonger" le symbole "V" (comme cela se fait en informatique) et, par conséquent, souvent sous l'allongement, le radicande (souvent seulement le carré du premier côté du triangle rectangle) n'entre pas entièrement.
c) Le symbole de la racine apparaît et réapparaît de manière fortuite : par exemple $\sqrt{3}^2+ 5^2 = 34 = 5{,}8$ ou $3^2+ 5^2 = \sqrt{34}$ même si l'opération reste "dans la mémoire de l'élève".
d) Dans certaines copies, l'opération d'extraction de la racine carrée est cependant oubliée.

USO DEL RIGHELLO

Il ricorso alle misure prese sul disegno sembra molto raro, ma è difficile a dirsi con precisione perché con una certa frequenza compaiono misure "strane" senza nessuna giustificazione. Raramente è espressamente dichiarato l'uso del righello per i triangoli B e G, a cui vengono attribuiti lati di 5,2 m e 3,s9 m, poiché sul disegno i segmenti sono di 5,2 e 3,9 cm.
In diversi elaborati gli alunni si premurano di spiegare che il disegno non può essere usato come riferimento, proprio perché la bandiera sta sventolando.

UTILISATION DE LA RÈGLE

L'utilisation des mesures prises sur le dessin semble très rare, mais il est difficile de l'affirmer avec précision car des mesures "étranges" apparaissent assez fréquemment sans aucune justification. L'utilisation de la règle est rarement explicitée pour les triangles B et G, auxquels sont attribués des côtés de 5,2 m et 3,9 m, puisque sur le dessin les segments sont de 5,2 et 3,9 cm.
Dans plusieurs copies, les élèves prennent soin d'expliquer que le dessin ne peut servir de référence, justement parce que le drapeau est agité.

POSIZIONAMENTO DEGLI ESTREMI DEI SEGMENTI SUI PUNTI MEDI DEL RETTANGOLO

In quasi tutti gli elaborati gli estremi sono correttamente posizionati, ma in categoria 8 tale posizionamento avviene senza giustificazione o verifica della correttezza solo in pochi casi. Nelle categorie superiori, invece, il ricorso al calcolo delle aree dei triangoli (3x5/2) e la ricerca della misura della base tramite formula è frequente.

Più raro un riferimento di tipo “algebrico – relazionale” dove si commenta ad esempio, eventualmente a parole, che avendo i triangoli la stessa area e la stessa altezza devono avere una base della stessa misura.

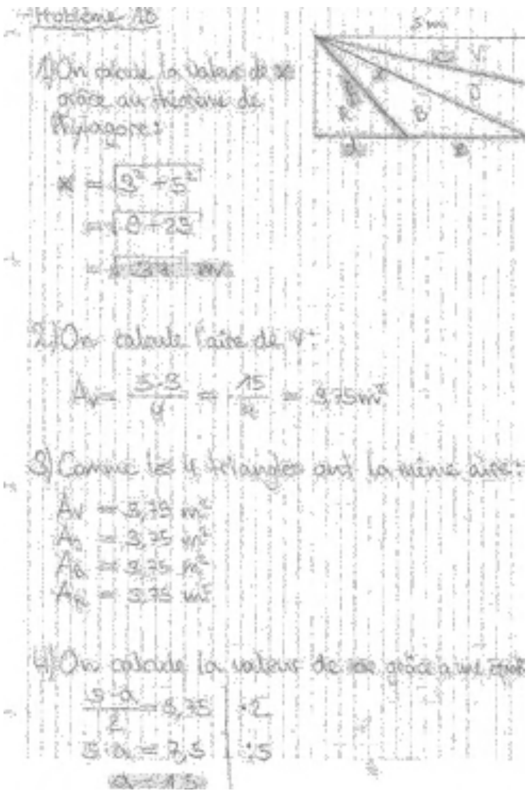
Il rapporto tra la base e l’area non è peraltro così evidente per gli allievi (come sottolineato nel messaggio trasmesso al gruppo da François, riportato più sopra). Ad esempio, in un elaborato della sezione Svizzera romanda gli allievi presentano una ricca risoluzione e una risposta corretta, ma poiché non hanno “visto” tale rapporto, hanno dovuto comunque trovare un modo per arrivarci:

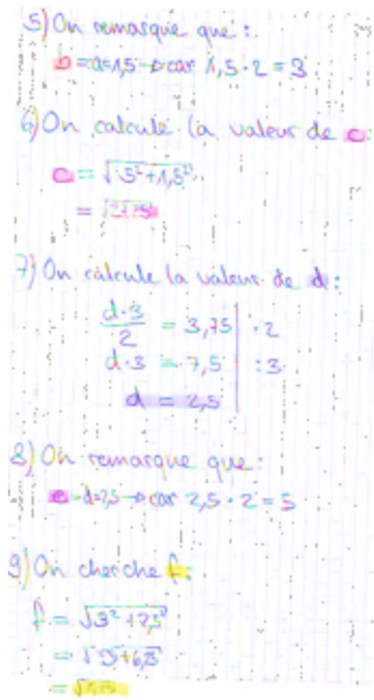
POSITIONNEMENT DES EXTRÉMITÉS DES SEGMENTS SUR LES POINTS MÉDIANS DU RECTANGLE

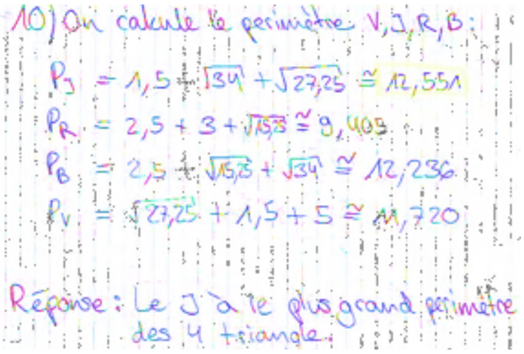
Dans presque toutes les copies, les extrémités sont correctement positionnées, mais dans la catégorie 8, ce positionnement se fait sans justification ou vérification de l'exactitude sauf dans quelques cas. Dans les catégories supérieures, en revanche, l'utilisation du calcul des aires des triangles (3× 5/2) et la recherche de la mesure de la base par une formule sont fréquentes.

Plus rare est la référence de type "algébrique-relationnel" où l'on commente, par exemple, éventuellement avec des mots, que puisque les triangles ont la même aire et la même hauteur, ils doivent avoir une base de la même mesure.

La relation entre la base et l'aire n'est cependant pas si évidente pour les élèves (comme souligné dans le message envoyé au groupe par François, rapporté ci-dessus) et, par exemple, une copie de la Suisse romande dans laquelle les élèves présentent une résolution riche et une réponse correcte, mais comme cette relation n'est pas "vue", ils ont dû y parvenir d'une manière ou d'une autre :






10) On calcule le perimètre V, J, R, B :

$P_J = 1,5 + \sqrt{34} + \sqrt{27,25} \cong 12,551$

$P_R = 2,5 + 3 + \sqrt{15,25} \cong 9,405$

$P_B = 2,5 + \sqrt{15,25} + \sqrt{34} \cong 12,236$

$P_V = \sqrt{27,25} + 1,5 + 5 \cong 11,720$

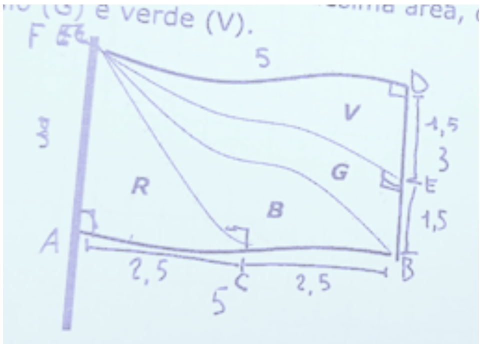
Réponse : Le J à le plus grand perimètre des 4 triangle.

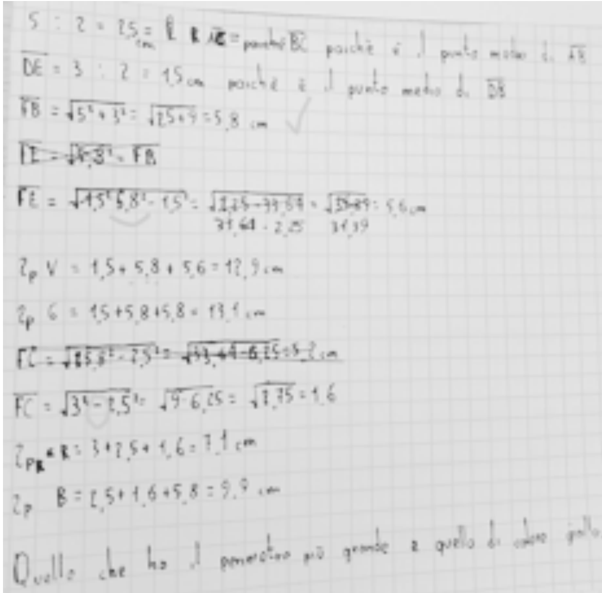
Interessante, al contrario, un esempio, ancora della Svizzera romanda, nel quale, gli allievi partono proprio dal riconoscimento di tale rapporto: *Nous savons qu'un côté du rectangle fait 5 met l'autre 3 m. Comme tous les triangles ont la même aire, et comme les triangles R et B ont la même hauteur, ils ont forcément la même base de 2,5 m, idem pour les triangles V et J qui ont une hauteur de 5 m et une base de 1,5 m.*
Proseguono poi correttamente la loro risoluzione.
Peraltro, in generale, in categoria 8, l'area dei triangoli è talvolta calcolata ma l'informazione così ottenuta non viene usata successivamente per trovare la base.
Non mancano casi in cui le misure dei lati minori dei triangoli sono ipotizzate uguali alla metà delle dimensioni della bandiera, poi vengono calcolate le rispettive aree, per verificare che siano tutte equivalenti
In altri casi il gruppo di allievi sembra ignorare che figure equivalenti possono essere non isoperimetriche: *"Secondo noi i perimetri sono uguali, come detto da Anna, perché per avere la stessa area devono avere la stessa base e altezza."*

En revanche, toujours en Suisse romande, nous avons relevé un exemple intéressant dans lequel les élèves commencent par reconnaître cette relation : *Nous savons qu'un côté du rectangle fait 5 m et l'autre 3 m. Comme tous les triangles ont la même aire, et comme les triangles R et B ont la même hauteur, ils ont forcément la même base de 2,5 m, idem pour les triangles V et J qui ont une hauteur de 5 m et une base de 1,5 m.*
Ils poursuivent ensuite leur résolution correctement.
Cependant, en général, dans la catégorie 8, l'aire des triangles est parfois calculée mais l'information ainsi obtenue n'est pas utilisée par la suite pour trouver la base.
Les cas ne manquent pas où l'on suppose que les mesures des petits côtés des triangles sont égales à la moitié de la taille du drapeau et où l'on calcule ensuite les aires respectives pour vérifier qu'elles sont toutes équivalentes
Dans d'autres cas, le groupe d'élèves semble ignorer que des figures de la même aire peuvent ne pas avoir le même périmètre : "A notre avis, les périmètres sont égaux, comme l'a dit Anna, car pour avoir la même aire, ils doivent avoir la même base et la même hauteur".

APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI PITAGORA
L'analisi degli elaborati ha mostrato quanto sia incerta l'applicazione del Teorema di Pitagora in categoria 8.
Nettamente migliore la situazione nelle categorie superiori.
Nella maggior parte di questi elaborati, il teorema è applicato correttamente solo per i triangoli R e V (a volte addirittura solo per R); nei triangoli B e G invece i segmenti in comune con i triangoli adiacenti vengono trattati come cateti. In questi numerosi elaborati è difficile capire se l'errore nasca dall'aver usato in maniera totalmente acritica il teorema di Pitagora per ogni triangolo incontrato, senza neanche chiedersi se la procedura fosse corretta o meno, o se abbia origine dall'aver ritenuto i triangoli rettangoli, come spiegato nell'elaborato mostrato qui di seguito.

APPLICATION DU THÉORÈME DE PYTHAGORE
L'analyse des copies a montré à quel point l'application du théorème de Pythagore est incertaine en catégorie 8.
La situation est bien meilleure dans les catégories supérieures.
Dans la plupart de ces copies, le théorème n'est correctement appliqué qu'aux triangles R et V (parfois même seulement à R) ; dans les triangles B et G, par contre, les segments communs avec les triangles adjacents sont traités comme des côtés de l'angle droit. Dans ces nombreuses copies, il est difficile de comprendre si l'erreur provient du fait d'avoir utilisé le théorème de Pythagore de manière totalement aveugle pour chaque triangle rencontré, sans même se demander si la procédure était correcte ou non, ou si elle provient du fait d'avoir supposé que les triangles étaient rectangles, comme cela est expliqué dans la copie ci-dessous.



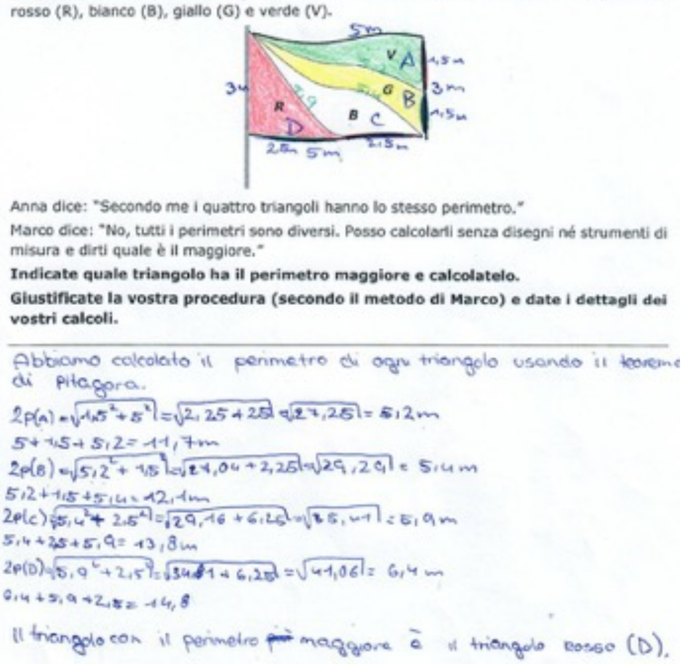


In altri elaborati emergono difficoltà nella classificazione dei triangoli (il triangolo R è considerato isoscele) ed un preoccupante mancato riconoscimento dei cateti e dell'ipotenusa.

In alcuni elaborati, non solo della categoria 8, il teorema di Pitagora viene applicato erroneamente anche ai triangoli G e B non rettangoli.

D'autres copies révèlent des difficultés à classer les triangles (triangle R pris pour un triangle isocèle) et une incapacité inquiétante à reconnaître les côtés de l'angle droit et les hypoténuses.

Dans certaines copies, et pas seulement en catégorie 8, le théorème de Pythagore est également appliqué de manière incorrecte aux triangles non rectangles G et B.



18. LA DIVISIONE DEL RETTANGOLO (Cat. 8, 9, 10)

La bandiera della Repubblica di Transalpino sventola fieramente sulla torre del castello del Presidente.

Anna e Marco osservano la bandiera, qui sotto raffigurata, che è un rettangolo di 3 m per 5 m, composto da quattro triangoli aventi la medesima area, con i colori della Repubblica: rosso (R), bianco (B), giallo (G) e verde (V).

Anna dice: "Secondo me i quattro triangoli hanno lo stesso perimetro."

Marco dice: "No, tutti i perimetri sono diversi. Posso calcolarli senza disegni né strumenti di misura e dirti quale è il maggiore."

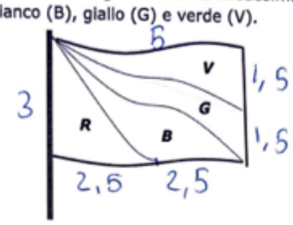
Indicate quale triangolo ha il perimetro maggiore e calcolatelo.

Giustificate la vostra procedura (secondo il metodo di Marco) e date i dettagli dei vostri calcoli.

18. LA DIVISIONE DEL RETTANGOLO (Cat.8, 9, 10)

La bandiera della Repubblica di Transalpino sventola fieramente sulla torre del castello del Presidente.

Anna e Marco osservano la bandiera, qui sotto raffigurata, che è un rettangolo di 3 m per 5 m, composto da quattro triangoli aventi la medesima area, con i colori della Repubblica: rosso (R), bianco (B), giallo (G) e verde (V).



Anna dice: "Secondo me i quattro triangoli hanno lo stesso perimetro."

Marco dice: "No, tutti i perimetri sono diversi. Posso calcolarli senza disegni né strumenti di misurae dirti quale è il maggiore."

Indicate quale triangolo ha il perimetro maggiore e calcolatelo.

Giustificate la vostra procedura (secondo il metodo di Marco) e date i dettagli dei vostri calcoli.

Abbiamo considerato che il lato in comune tra R e B è la metà di 5 (cioè 2,5) abbiamo applicato la stessa considerazione al lato in comune tra V e G (cioè 1,5). Abbiamo considerato la terna pitagorica 3, 4, 5 così da trovarci la diagonale del rettangolo cioè un lato di B e uno di G. Arrivati a questo punto abbiamo applicato il teorema di pitagora ai quattro triangoli trovandoci il lati mancanti e sommandoli per i perimetri:

P(G) = 5,2 + 1,5 + 4 = 10,7
P(V) = 5 + 1,5 + 5,2 = 11,7
P(B) = 5,5 + 2,5 + 4 = 12
P(R) = 2,5 + 3 + 3,75 = 9,25

Abbiamo concluso che il perimetro maggiore è quello di B.

$A = 5 \times 3 = 15\ m^2$

$15 : 4 = 3{,}75\ m$

$2p = 5 + 5 + 3 + 3 = 16\ m$

$AH = \sqrt{2{,}5^2 + 3^2} = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5\ m$

$2p_{ADH} = 2{,}5 + 3 + 7{,}5 = 13\ m$

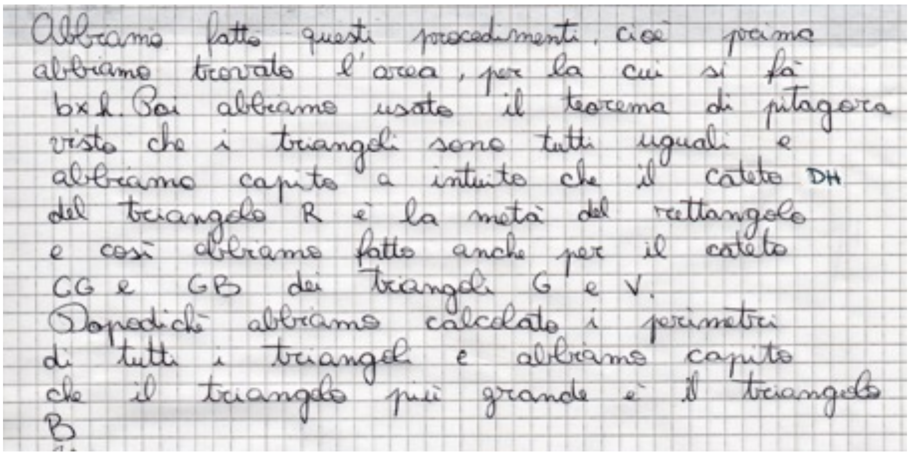
$AC = \sqrt{2{,}5^2 + 7{,}5^2} = \sqrt{62{,}5} = 7{,}9\ m$

$2p_{AHC} = 2{,}5 + 7{,}5 + 7{,}9 = 17{,}9\ m$

$AG = \sqrt{7{,}9^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{64{,}66} = 8{,}04\ m$

$2p_{AGB} = 8{,}04 + 1{,}5 + 5 = 14{,}54\ m$

$2p_{ACG} = 7{,}9 + 1{,}5 + 8{,}04 = 17{,}44\ m$


Abbiamo fatto questi procedimenti, cioè prima abbiamo trovato l'area, per la cui si fa bxh. Poi abbiamo usato il teorema di pitagora visto che i triangoli sono tutti uguali e abbiamo capito a intuito che il cateto DH del triangolo R è la metà del rettangolo e così abbiamo fatto anche per il cateto CG e GB dei triangoli G e V. Dopodichè abbiamo calcolato i perimetri di tutti i triangoli e abbiamo capito che il triangolo più grande è il triangolo B

Anche in questo caso, il risultato ottenuto non è compatibile con le dimensioni reali, ma gli alunni non se ne accorgono.

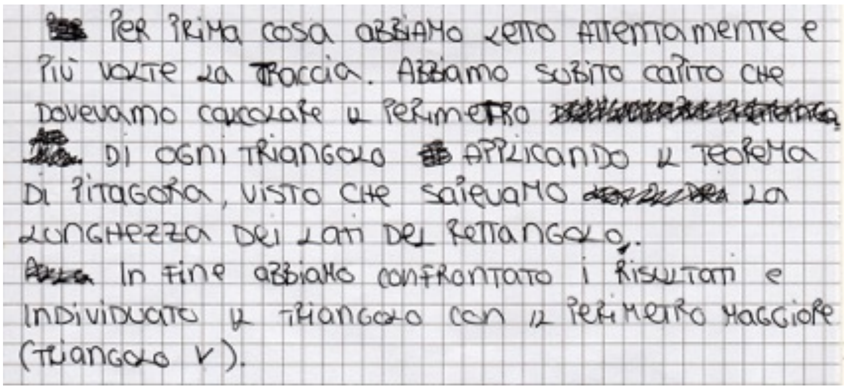
In alcuni elaborati le misure dei lati sono errate e gli allievi non si rendono conto che hanno ottenuto un'ipotenusa più corta dei cateti. Altre volte le misure dei lati dei triangoli non ne avrebbero permesso la costruzione.

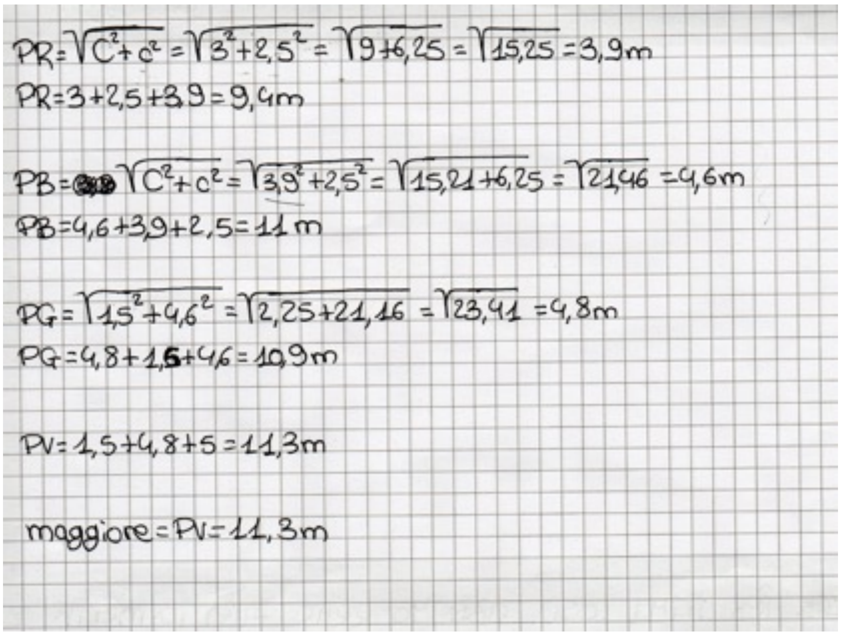
Nell'elaborato che segue, tutti i triangoli vengono erroneamente considerati rettangoli, sui quali applicare il teorema di Pitagora, così la diagonale della bandiera viene determinata come se fosse *la "ipotenusa"* del triangolo B, e non l'ipotenusa del triangolo formato da R e B.

Là encore, le résultat obtenu n'est pas compatible avec les dimensions réelles, mais les élèves ne s'en rendent pas compte.

Dans certaines copies, les mesures des côtés sont erronées et les élèves ne se rendent pas compte qu'ils ont obtenu une hypoténuse plus courte que les côtés de l'angle droit. D'autres fois, les mesures des côtés des triangles n'auraient pas permis de les construire.

Dans la copie suivante, tous les triangles sont considérés à tort comme rectangles, triangles sur lesquels on applique le théorème de Pythagore, de sorte que la diagonale du drapeau est déterminée comme s'il s'agissait de « l'hypoténuse » du triangle B, et non de l'hypoténuse du triangle formé par R et B.


PER PRIMA COSA ABBIAMO LETTO ATTENTAMENTE E PIÙ VOLTE LA TRACCIA. ABBIAMO SUBITO CAPITO CHE DOVEVAMO CALCOLARE IL PERIMETRO DI OGNI TRIANGOLO APPLICANDO IL TEOREMA DI PITAGORA, VISTO CHE SAPEVAMO LA LUNGHEZZA DEI LATI DEL RETTANGOLO.
IN FINE ABBIAMO CONFRONTATO I RISULTATI E INDIVIDUATO IL TRIANGOLO CON IL PERIMETRO MAGGIORE (TRIANGOLO V).



$PR = \sqrt{C^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + 2,5^2} = \sqrt{9 + 6,25} = \sqrt{15,25} = 3,9m$

$PR = 3 + 2,5 + 3,9 = 9,4m$

$PB = \sqrt{C^2 + c^2} = \sqrt{3,9^2 + 2,5^2} = \sqrt{15,21 + 6,25} = \sqrt{21,46} = 4,6m$

$PB = 4,6 + 3,9 + 2,5 = 11\,m$

$PG = \sqrt{1,5^2 + 4,6^2} = \sqrt{2,25 + 21,16} = \sqrt{23,41} = 4,8m$

$PG = 4,8 + 1,5 + 4,6 = 10,9m$

$PV = 1,5 + 4,8 + 5 = 11,3m$

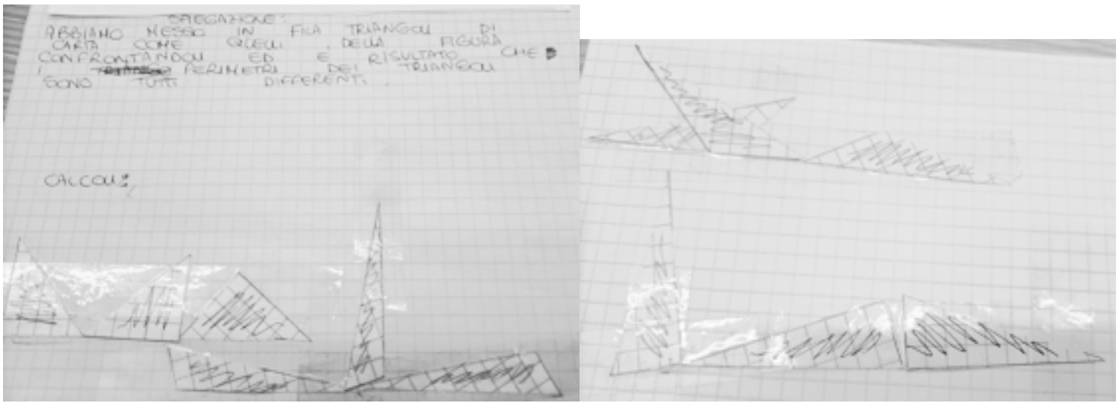
maggiore = PV = 11,3m

Durante l'analisi sono, inoltre, emersi una varietà di modi diversi per applicare male il teorema di Pitagora: una vera e propria rassegna di errori! Ad esempio, in un elaborato, il quadrato dei cateti è moltiplicato, invece che sommato.
In altri viene fatta la somma dei cateti e non dei loro quadrati.
In alcuni invece di sommare i quadrati dei cateti, questi vengono sottratti.
O ancora, i quadrati delle misure dei due cateti non vengono addizionati, ma moltiplicati ($\sqrt{2,5^2 + 3^2} = \sqrt{56,25}$) e quindi l'ipotenusa risulta molto più lunga, al punto che il triangolo non può esistere. Gli alunni non controllano criticamente il risultato ottenuto e lo utilizzano nei passaggi successivi.

Molto particolare un approccio risolutivo, dove gli alunni hanno rettificato il perimetro, facendo "rotolare" i vari triangoli sui propri lati, anche se in maniera imprecisa, per procedere così ad un confronto tra lunghezze di segmenti.

Au cours de l'analyse, il est également apparu que le théorème de Pythagore était mal appliqué de différentes manières : un véritable catalogue d'erreurs ! Par exemple, dans une copie, les carrés des côtés de l'angle droit sont multipliés au lieu d'être additionnés.
Dans d'autres, c'est la somme des côtés de l'angle droit et non leur carré qui est faite.
Dans d'autres encore, au lieu d'additionner les carrés des côtés de l'angle droit, on les soustrait.
Ou encore, on n'additionne pas les carrés des mesures des deux côtés de l'angle droit, mais on les multiplie ($\sqrt{2,5^2 + 3^2} = \sqrt{56,25}$) et donc l'hypoténuse est beaucoup plus longue, à tel point que le triangle ne peut pas exister. Les élèves ne vérifient pas de manière critique le résultat obtenu et ne l'utilisent pas dans les étapes suivantes.

Une démarche de résolution très particulière, où les élèves ont estimé le périmètre en "faisant tourner" les différents triangles sur leurs côtés, mais de manière imprécise, afin de comparer les longueurs des segments.



(*Abbiamo messo in fila i triangoli di carta come quelli della figura confrontandoli ed è risultato che i perimetri dei triangoli sono tutti differenti… .*Seguono i calcoli.)

(Nous avons aligné des triangles en papier comme ceux de l'image en les comparant et il s'est avéré que les périmètres des triangles sont tous différents... Les calculs suivent).

Le risposte di tipo “qualitativo” sono rare e il seguente ne è un esempio:

La risposta è la G. La linea più lunga della bandiera è quella che passa al centro del triangolo da un vertice all'altro. Di conseguenza il triangolo con il perimetro più lungo è o G o B perché una delle due linee è la più lunga. Confrontando le altre due linee più lunghe la G è quella che ha oltre alla linea più lunga la seconda linea più lunga, quindi è il triangolo con il perimetro più lungo. Presumibilmente, il primo termine “triangolo” è un refuso.

In un elaborato si trova un approccio simile, con un tentativo di stima della lunghezza:

Il triangolo con il perimetro maggiore è quello di colore giallo. Secondo la teoria di Marco: essendo che i lati di questo triangolo sono uno l'ipotenusa di un triangolo i cui cateti sono 5 m e 1,5 m è più lungo di 5 m. L'altro cateto è la diagonale, quindi è ugualmente più lunga di 5 m e quindi è il triangolo con i cateti più lunghi.

Notiamo peraltro l'uso improprio del termine “cateto”, come viene fatto anche in molti altri elaborati.

La maggior parte delle classi ha lavorato sul problema rispettando il metodo di Marco, ha ottenuto svariati risultati e ha evidenziato diverse criticità, che sono, in sintesi le seguenti:

- non giustificare le dimensioni dei lati minori dei quattro triangoli, in quanto l'attribuzione delle misure è considerato evidente a partire dalla figura;
- non saper riconoscere le proprietà dei triangoli B e G che, essendo ottusangoli, non godono della relazione pitagorica;
- non gestire correttamente i numeri decimali;
- non sentire la necessità di un controllo critico sulla attendibilità dei risultati ottenuti;

Les réponses "qualitatives" sont rares et l'exemple suivant en est la preuve :

La réponse est G. La ligne la plus longue du drapeau est celle qui passe par le centre du triangle d'un sommet à l'autre. Par conséquent, le triangle ayant le plus long périmètre est soit G, soit B, car l'une des deux lignes est la plus longue. En comparant les deux autres lignes les plus longues, G est celui qui a la deuxième ligne la plus longue en plus de la ligne la plus longue, c'est donc le triangle qui a le périmètre le plus long. On peut supposer que le premier terme "triangle" est une faute de frappe.

On trouve une approche similaire dans un document qui tente d'estimer la longueur :

Le triangle dont le périmètre est le plus long est celui qui est de couleur jaune. Selon la théorie de Marc: Puisque les côtés de ce triangle sont l'un un ??, l'hypoténuse d'un triangle dont les côtés de l'angle droit sont 5 m et 1,5 m, il est plus longue de 5 m. L'autre côté de l'angle droit est la diagonale, donc elle est également plus longue de 5 m et donc il s'agit du triangle dont les côtés de l'angle droit sont les plus longs.

Cependant, nous notons l'utilisation incorrecte du terme « côté de l'angle droit » (aussi quand il ne s'agit pas d'un côté de l'angle droit), comme c'est le cas dans beaucoup d'autres copies.

La plupart des classes ont travaillé sur le problème selon la méthode de Marc, ont obtenu des résultats variés et ont mis en évidence plusieurs points critiques, qui sont, en résumé, les suivants :

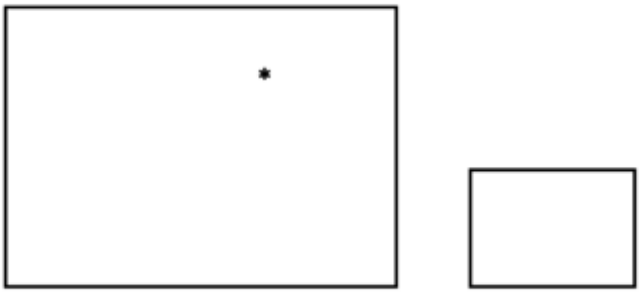
- ne pas pouvoir justifier les dimensions des petits côtés des quatre triangles, l'attribution des mesures étant considérée comme évidente à partir de la figure ;
- ne pas reconnaître les propriétés des triangles B et G qui ont un angle obtus et ne bénéficient pas de la relation de Pythagore ;
- ne pas manipuler correctement les nombres décimaux ;

- ne pas ressentir la nécessité d'un contrôle critique de la fiabilité des résultats obtenus ;

4. “Il fiore al posto giusto” / "La fleur au bon endroit"

4.1. Un po’ di storia del problema / L’historique du problème

Il problema “Il fiore al posto giusto” affonda le sue radici nel problema “Dove si posa la mosca?” della prima prova del 7° RMT e ne è, in una certa misura, una sua variante.
L’antenato recitava:
Le problème "La fleur au bon endroit" trouve son origine dans le problème "Où se pose la mouche ?" de la première épreuve du 7e RMT et en est, dans une certaine mesure, une variante.
Le problème d’origine est le suivant :



Il rettangolo di destra è la fotografia del grande rettangolo di sinistra.
Nel momento in cui la fotografia è stata scattata, una mosca si è posata sul rettangolo grande.
Il fotografo però quando ha stampato la fotografia l'ha cancellata.

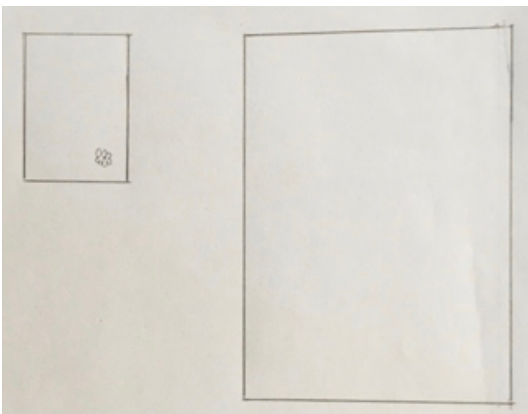
Rimettete la mosca al posto giusto sulla foto.

Spiegate come avete proceduto.

Mentre la prima bozza della variante “fiore” è stata proposta nel mese di agosto del 2022 nel modo seguente:
La première version de la variante "fleur" a été proposée en août 2022 sous la forme suivante :

IL FIORE AL POSTO GIUSTO (Cat. 7?, 8, 9, 10)

Per due finestre della sua camera, Angela ha due tende rettangolari. Sulla più piccola ha già ricamato un fiore e si chiede dove dovrebbe fare il ricamo del fiore sull’altra più grande, per sistemarlo “al posto giusto”, visto che la seconda è un ingrandimento della prima. Le misure della tendina con il fiore sono 50 cm x 35 cm, mentre quelle della tenda più grande sono 1,20 m x 84 cm.



Mettete al posto giusto il fiore sulla tenda più grande, così come vorrebbe Angela.

Spiegate come avete proceduto.

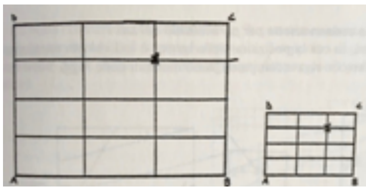
ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Dati due rettangoli omotetici, posizionare sul secondo il medesimo motivo disegnato sul primo.

Analisi del compito

- Capire, alla lettura dell'enunciato, che, poiché le due tende (rettangoli) sono una l'ingrandimento dell'altra, si deve trattare di due rettangoli simili.
- Capire che è allora necessario verificare la similitudine dei due rettangoli sia con 35/50=84/120 (rapporto larghezza/lunghezza), sia con il rapporto di similitudine (o fattore di scala) 120/50 e 84/35, per arrivare a ottenere il valore 2,4 per entrambi i rapporti.
- Una volta constatata la similitudine dei due rettangoli, cercare di capire quale procedura adottare per sistemare al posto giusto il fiore sulla tenda grande, tra le procedure, che sono molteplici, numeriche e/o geometriche:
  - trovare "le coordinate" del fiore (con riferimento al suo punto centrale) sul rettangolo maggiore a partire dalle "coordinate" del rettangolo minore, dopo aver effettuato le misure sul modello e, per evitare una probabile approssimazione del "posto giusto", controllare la posizione nel giusto rapporto, con le misure dei segmenti omologhi dal punto a due vertici dei rettangoli; rispetto ai rettangoli con le misure dell'enunciato e non di quelli della figura, sono, rispetto al vertice in basso a destra 16,8 e 16,8 (in cm), mentre la misura del segmento che unisce il punto centrale del fiore da questo vertice è 24 cm.
- Capire che è possibile utilizzare una procedura geometrica:
  - pensando di tracciare due rette passanti ciascuna per il punto centrale del fiore e un vertice del rettangolo piccolo e conducendo poi le corrispondenti sul rettangolo grande con l'utilizzo per esempio di due squadrette;
  - oppure, dopo essersi resi conto che i due rettangoli della figura sono in particolare omotetici, cercare il centro di omotetia che rappresenta in effetti la procedura che sistema il centro del fiore in maniera certa al posto giusto.
- O ricorrere ad una quadrettatura opportuna e "proporzionale" dei due rettangoli, con il centro del fiore all'intersezione dei lati della quadrettatura come appare in elaborati del problema "Dove di posa la mosca"*



Attribuzione dei punteggi

4 Posizione determinata con precisione del fiore (col suo punto centrale) con il ricorso a una procedura geometrica o alla procedura con le misure ma con "il doppio controllo" (vedasi analisi a priori), il tutto completato da una spiegazione chiara o da un disegno anch'esso molto chiaro

3 Posizione determinata con precisione del fiore (col suo punto centrale) con il ricorso a una procedura geometrica o alla procedura con le misure ma con "il doppio controllo" (vedasi analisi a priori) e spiegazione appena accennata o senza spiegazione

2 Posizione determinata con le misure ma approssimativa, con spiegazione

1 Posizione determinata in maniera approssimativa, non spiegata, che potrebbe far pensare di essere stata trovata "a occhio"

0 Incomprensione del problema o posizione molto lontana da quella corretta

Il riferimento per la stesura della prima bozza dell'analisi a priori della variante è stata l'analisi a posteriori svolta a suo tempo e pubblicata sugli atti Siena 1999 e Neuchâtel 2000, da Doretti et all.

A metà settembre, dopo interessanti scambi via e-mail con i membri del gruppo, si pensa che sia meglio fare come per il problema della mosca e mettere il fiore sulla tenda grande per trovare poi il posto giusto del fiore sulla tenda piccola perché sarà più agevole prendere le misure iniziali sulla tenda grande (se questa sarà la procedura scelta da alcuni gruppi di allievi).
Anche l'analisi a priori e l'attribuzione dei punteggi subiscono dei cambiamenti.

A seguito delle osservazioni scaturite a Lione, sia in merito alle categorie (non verrà proposto alla categoria 7), sia alle questioni relative all'attribuzione dei punteggi dove, in particolare, andava chiarita o cambiata, l'espressione "con buona approssimazione delle misure", le misure in oggetto prese rispetto al disegno definitivo e non a un disegno di una prima bozza, sono state indicate nell'analisi a priori (con un intervallo di ± 1 mm) e riportate nell'attribuzione dei punteggi, con considerazioni sulle fotocopie.
La formulazione finale, trasmessa al GIPL, è infine la seguente:

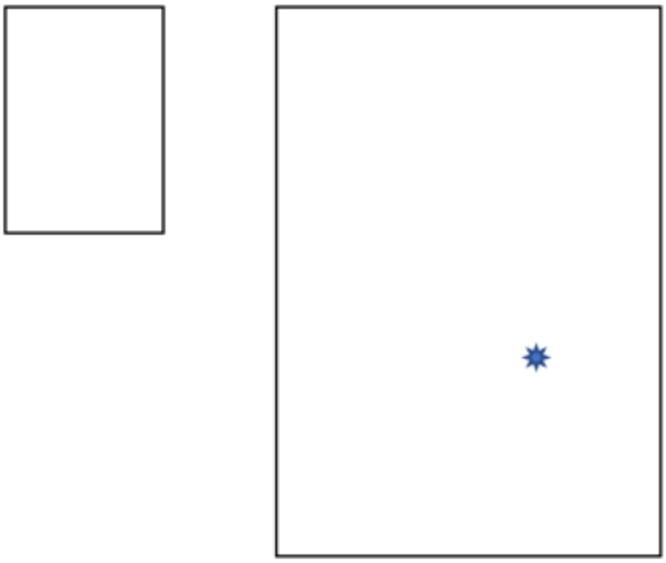
La référence pour la première ébauche de l'analyse *a priori* de la variante était l'analyse a posteriori effectuée à l'époque et publiée dans les actes Sienne 1999 et Neuchâtel 2000, par Doretti et al.
A la mi-septembre, après d'intéressants échanges d'e-mails avec les membres du groupe, il a été jugé préférable de faire comme pour le problème de la mouche et de placer la fleur sur le grand store, puis de trouver la bonne place pour la fleur sur le petit store, car il sera plus facile de prendre les premières mesures (si c'est la procédure choisie par certains groupes d'élèves) sur le grand store.
L'analyse *a priori* et l'attribution des points subissent également des modifications.
Suite aux remarques faites à Lyon, tant sur les catégories (la catégorie 7 ne sera pas proposée) que sur les questions d'attribution des points où, notamment, l'expression "avec une bonne approximation des mesures" devait être précisée ou modifiée, après avoir pris les mesures en question par rapport au dessin final et non à un premier projet de dessin, elles ont été indiquées dans l'analyse *a priori* (avec une fourchette de ± 1 mm) et incluses dans l'attribution des points, avec des considérations sur les photocopies.
La formulation finale, soumise au GPIL, est finalement la suivante :

IL FIORE AL POSTO GIUSTO (Cat. 8, 9, 10)

Per due finestre della sua camera, Angela ha due tende rettangolari rigide, una grande e una piccola.

Sulla tenda più grande ha già fissato il centro di un fiore di stoffa. Sulla tenda più piccola, che è una riduzione della grande, vuole mettere "al posto giusto" il centro di un altro fiore di stoffa.

Le misure della tenda più grande sono 1,20 m x 84 cm, mentre quelle della tenda più piccola sono 50 cm x 35 cm.



Mettete al posto giusto il centro del fiore di stoffa sulla tenda più piccola, così come vorrebbe Angela.

Spiegate come avete proceduto.

ANALISI A PRIORI

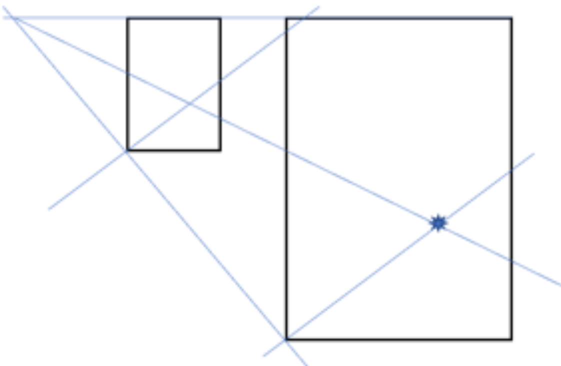
Compito matematico

Dati due rettangoli omotetici, posizionare sul secondo il medesimo motivo disegnato sul primo.

Analisi del compito

- Capire, alla lettura dell'enunciato, che, poiché le due tende (rettangoli) sono una la riduzione dell'altra, si deve trattare di due rettangoli simili.
- Capire che è allora necessario tener conto della similitudine dei due rettangoli sia con 35/50=84/120=0,7 (rapporto larghezza/lunghezza), sia con il rapporto di similitudine (o fattore di scala) 120/50 e 84/35, per arrivare a ottenere il valore 2,4.
- Una volta constatata la similitudine dei due rettangoli, cercare di capire quale procedura adottare per sistemare al posto giusto il centro del fiore sulla tenda piccola, tra le procedure, che sono molteplici, numeriche e/o geometriche:
  - misurare le distanze del centro del fiore sul disegno dell'enunciato da due lati perpendicolari del rettangolo grande tra 1,6-1,9 in orizzontale e tra 2,6 e 2,9 in verticale (da verificare sugli elaborati degli allievi e riadattare eventualmente le misure) e calcolare con il fattore di scala le distanze corrispondenti del centro del fiore del rettangolo piccolo: tra 0,5 e 0,8 in orizzontale e tra 1,1 e 1,2 in verticale – sul disegno dell'enunciato.
  - o ricorrere ad una quadrettatura opportuna e "proporzionale" dei due rettangoli, con il centro del fiore all'intersezione dei lati della quadrettatura come appare in elaborati del problema Dove si posa la mosca? 7° RMT, I prova, n.15 di cui questo problema è una variante

- Capire che è possibile utilizzare una procedura geometrica che implica il parallelismo sia:
  - pensando di tracciare due rette passanti ciascuna per il punto centrale del fiore e un vertice del rettangolo grande e conducendo poi le corrispondenti sul rettangolo piccolo con l'utilizzo, per esempio, di una squadretta e un righello o di un goniometro;
  - oppure, dopo essersi resi conto che i due rettangoli della figura sono in particolare omotetici, cercare il centro di omotetia che rappresenta in effetti la procedura che sistema il centro del fiore in maniera certa al posto giusto.



Nota: ricordare a chi prepara le fotocopie di non fotocopiare l'enunciato del problema su carta quadrettata o di verificare che le fotocopie mantengano le misure indicate nell'analisi a priori; nel caso siano diverse, segnalarlo perché i correttori ne siano a conoscenza.

Attribuzione dei punteggi

4 Posizione del centro del fiore determinata con precisione con il ricorso a una procedura geometrica o a partire dalle misure e dai calcoli con il fattore di scala (tra 0,5 e 0,8 in orizzontale e tra 1,1 e 1,2 in verticale)*, il tutto completato da una spiegazione chiara o da un disegno anch'esso molto chiaro

3 Posizione del centro del fiore determinata con precisione con il ricorso a una procedura geometrica o a partire dalle misure e dai calcoli con il fattore di scala (tra 0,5 e 0,8 in orizzontale e tra 1,1 e 1,2 in verticale) e spiegazione poco chiara o incompleta

2 Posizione del centro del fiore determinata con le misure, e dai calcoli con il fattore di scala (tra 0,7 e 0,8 in orizzontale e tra 1,1 e 1,2 in verticale), ma senza spiegazione

1 Posizione determinata in maniera piuttosto approssimativa (con valori a ± 2 mm da quelli indicati in precedenza), non spiegata, che potrebbe far pensare di essere stata trovata "a occhio"

0 Incomprensione del problema o posizione molto lontana da quella corretta

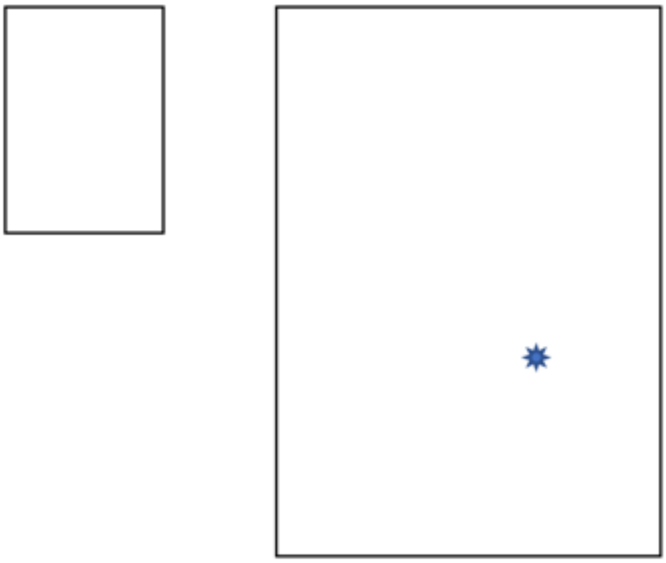
*Attenzione, laddove la soluzione venga trovata con le misure, a seconda delle fotocopie, le misure trovate potrebbero essere leggermente diverse. I correttori dovranno verificare direttamente sugli elaborati.

LA FLEUR AU BON ENDROIT (Cat. 8, 9, 10)

Sur deux fenêtres de sa chambre, Angela a placé deux stores rectangulaires, un grand et un petit.

Sur le plus grand, elle a déjà fixé le centre d'une fleur de tissu. Sur le plus petit, qui est une réduction du grand, elle veut fixer « au bon endroit » le centre d'une autre fleur de tissu.

Les dimensions du plus grand store sont 1,20 m x 84 cm, tandis que celles du plus petit sont 50 cm x 35 cm.



Placez le centre de la fleur de tissu au bon endroit sur le plus petit store, comme Angela le souhaiterait.

Expliquez comment vous avez procédé.

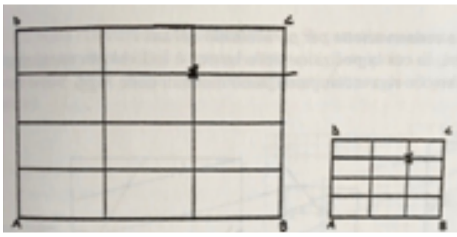
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

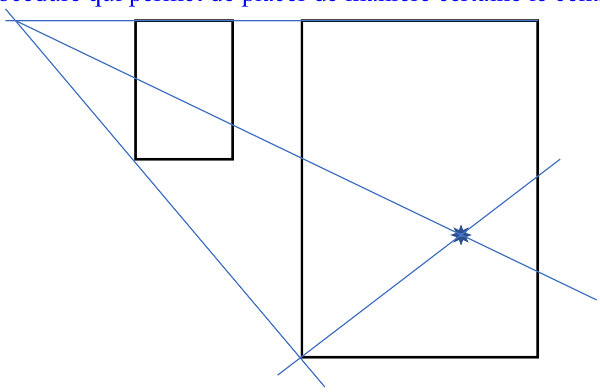
Étant donné deux rectangles homothétiques, trouver sur le second rectangle l'emplacement d'un point dont on connait la position sur le premier rectangle à partir d'une figure.

Analyse de la tâche

- Comprendre, en lisant l'énoncé, que, puisque les deux stores (rectangles) sont l'un la réduction de l'autre, il doit s'agir de deux rectangles semblables.
- Comprendre qu'il faut alors prendre en compte que les deux rectangles sont semblables, à la fois avec 35/50 = 84/120 = 0,7 (rapport largeur/longueur), et avec le rapport d'homothétie (ou facteur d'échelle) 120/50 et 84/35, pour obtenir la valeur 2,4.
- Une fois vérifié que les deux rectangles sont semblables, choisir quelle procédure adopter pour placer le centre de la fleur sur le petit rectangle au bon endroit, parmi les procédures, qui sont multiples, numériques et / ou géométriques :
  - mesurer les distances du centre de la fleur aux deux côtés perpendiculaires du grand rectangle entre 1,7 et 1,9 à l'horizontal et entre 2,7 et 2,9 à la verticale (à vérifier sur les copies des élèves et éventuellement adapter les mesures) (environ 2,22; 3,4 - sur le dessin de l'énoncé) et calculer par le facteur d'échelle les distances correspondantes du centre de la fleur du petit rectangle (entre 0,7 et 0,8 à l'horizontal et entre 1,1 et 1,2 à la verticale – sur le dessin de l'énoncé)
  - ou recourir à un quadrillage approprié et « proportionnel » des deux rectangles, avec le centre de la fleur à l'intersection des côtés du carré tel qu'il apparaît dans les productions d'élèves du problème <u>Où il faut faire mouche ?</u> 7ème RMT, n.15 dont ce problème est une variante



- Comprendre qu'il est possible d'utiliser une procédure géométrique qui implique le parallélisme soit :
  - penser à tracer deux lignes droites joignant chacune le point central de la fleur et un sommet du petit rectangle puis à reproduire les lignes correspondantes sur le petit rectangle avec l'utilisation, par exemple, d'une équerre et d'une règle ; ou d'un rapporteur
  - ou, après avoir réalisé que les deux rectangles de la figure sont homothétiques, recherchez le centre d'homothétie : procédure qui permet de placer de manière certaine le centre de la fleur au bon endroit.



Attribution des points

4 Position du centre de la fleur déterminée avec précision par l'utilisation d'une procédure géométrique ou à partir des mesures et des calculs par le facteur d'échelle (entre 0,7 et 0,8 à l'horizontal et entre 1,1 et 1,2 à la verticale)* le tout complété par une explication claire ou un dessin très clair

3 Position du centre de la fleur déterminée précisément par l'utilisation d'une procédure géométrique ou à partir des mesures et des calculs par le facteur d'échelle (entre 0,7 et 0,8 à l'horizontal et entre 1,1 et 1,2 à la verticale) et une explication peu claire ou incomplète

2 Position du centre de la fleur déterminée avec des mesures ou à partir des mesures et des calculs par le facteur d'échelle (entre 0,7 et 0,8 à l'horizontal et entre 1,1 et 1,2 à la verticale), mais sans explication

1 Position déterminée d'une manière très approximative (avec des valeurs à ± 2 mm de celles indiquées ci-dessus) et inexpliquée, ce qui pourrait suggérer qu'elle a été trouvée « à l'œil »

0 Incompréhension du problème ou emplacement très éloigné du bon

Niveau : 8, 9, 10

Origine : Groupe Géométrie plane (GTGP)

* *Attention, là où la solution est trouvée par les mesures, selon les photocopies, les mesures trouvées peuvent être légèrement différentes. Les correcteurs devront vérifier directement sur les copies.*

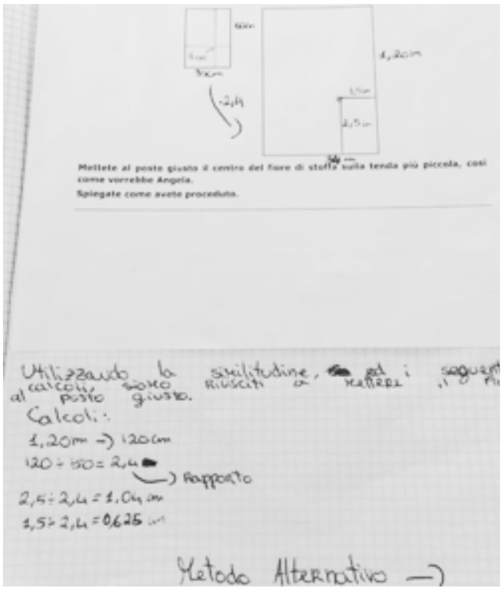
4.2. Come hanno reagito gli allievi? Comment ont réagi les élèves ?

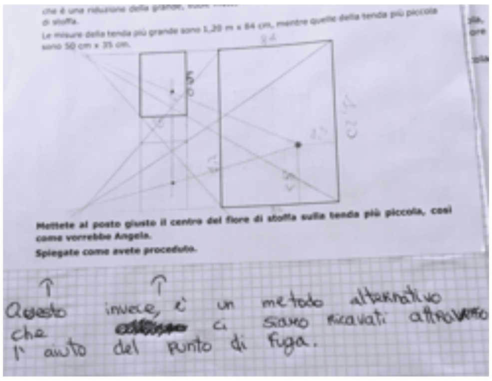
Questo problema, come altri del RMT con figure geometriche, richiedeva un'attenzione particolare alle fotocopie rispettose delle dimensioni proposte e purtroppo l'attribuzione dei punteggi è stata piuttosto laboriosa, come era peraltro previsto per il controllo dei calcoli e delle misure, ma complicato anche dalla presenza di elaborati con fotocopie di misure diverse dall'originale, che, nel caso di procedure con i calcoli, ha richiesto controlli ulteriori delle misure.

Al di là di questo aspetto, a livello della categoria 8, ma anche a livello delle categorie superiori, se da un lato figurano errori frequenti come si vedrà più avanti, o anche non appropriazione del problema, dall'altro alcuni gruppi hanno mostrato di essersi ben appropriati del problema, ma anche di aver messo in atto procedure corrette sia di tipo aritmetico, sia di tipo geometrico o con disegni "geniali" come nel caso di un elaborato con una procedura aritmetica seguita da una geometrica:

Ce problème, comme d'autres dans le RMT avec des figures géométriques, a nécessité une attention particulière au respect des dimensions obtenues après les photocopies, et malheureusement l'attribution des points a été assez laborieuse, comme d'ailleurs pour la vérification des calculs et des mesures, mais aussi compliquée par la présence de papiers avec des photocopies de mesures autres que l'original, ce qui, dans le cas des procédures avec calculs, a nécessité des vérifications supplémentaires des mesures.

Au-delà de cet aspect, au niveau de la catégorie 8, mais aussi au niveau des catégories supérieures, si d'un côté il y a des erreurs fréquentes comme on le verra plus loin, voire une non appropriation du problème, de l'autre, certains groupes ont montré qu'ils s'étaient non seulement bien approprié le problème, mais qu'ils avaient aussi mis en œuvre des procédures correctes tant sur le plan arithmétique que géométrique ou avec des conceptions "ingénieuses" comme dans le cas d'une copie avec une procédure arithmétique suivie d'une procédure géométrique :





Peraltro, da un gran numero di elaborati si evince che gli alunni, dalla lettura dell'enunciato e dall'osservazione delle figure mostrano una grande difficoltà nell'individuare le procedure risolutive del problema.

Inoltre una parte dei gruppi di allievi si è resa conto di avere a che fare con due figure in proporzione e ha anche individuato il rapporto tra le due figure, ma non ha saputo poi applicare correttamente un procedimento risolutivo.

Cependant, un grand nombre de copies montrent que les élèves, à la lecture de l'énoncé et à l'observation des figures, éprouvent de grandes difficultés à identifier les procédures de résolution du problème.

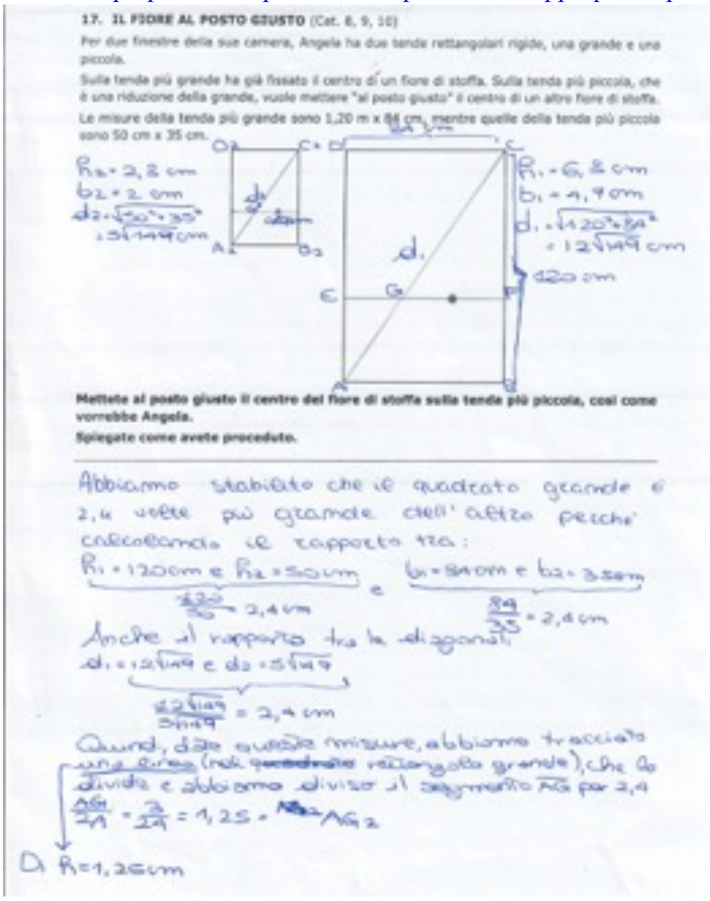
De plus, certains groupes d'élèves ont compris qu'il s'agissait de deux figures proportionnelles et ont même identifié la relation entre les deux figures, mais n'ont pas été en mesure d'appliquer correctement une procédure de résolution.

La proportionnalité a été très largement utilisée.
À partir des mesures exactes ***fournies par l'énoncé***

- *L'utilisation du rapport entre les dimensions de la grande et de la petite fenêtre c'est-à-dire 2,4 (84/35 et 120/50) est la méthode très majoritaire avec une réussite moyenne. Dans les cas de réussites ce rapport est ensuite utilisé sur les longueurs mesurées.*
- *Le calcul du rapport entre la longueur et la largeur des rectangles formés par les fenêtres c'est-à-dire 84/120, cela n'apparaît que dans une seule copie.*

Utilizzano maggiormente le seguenti procedure:
Ils utilisent principalement les procédures suivantes :

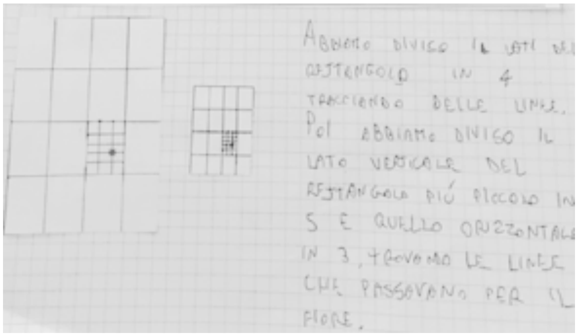
- hanno calcolato il rapporto tra i lati delle due figure dei due rettangoli sia con 35/50=84/120=0,7 (rapporto larghezza/lunghezza), sia con il rapporto di similitudine (o fattore di scala) 120/50 e 84/35, per arrivare a ottenere il valore 2,4 nella maggior parte degli elaborati non sono riusciti ad applicare la procedura risolutiva
- ils ont calculé le rapport des côtés des deux rectangles soit avec 35/50=84/120=0,7 (rapport largeur/longueur), soit avec le rapport de similitude (ou facteur d'échelle) 120/50 et 84/35, pour arriver à une valeur de 2,4, et dans la plupart des copies ils n'ont pas réussi à appliquer la procédure de résolution



- in alcuni casi hanno misurato le distanze del centro del fiore da due lati perpendicolari del rettangolo grande, alcuni lo hanno calcolato dal disegno e altri dalle misure reali della tenda, alcuni misurano prendendo le coordinate dall'alto verso il basso, altri dal basso verso l'alto, da destra verso sinistra e da sinistra verso destra; in effetti L'indicazione delle misure delle tende ha probabilmente indotto molti gruppi di allievi a non utilizzare la figura del testo per il procedimento risolutivo, ma a riferirsi solo alle misure "nella realtà" complicandosi la vita;

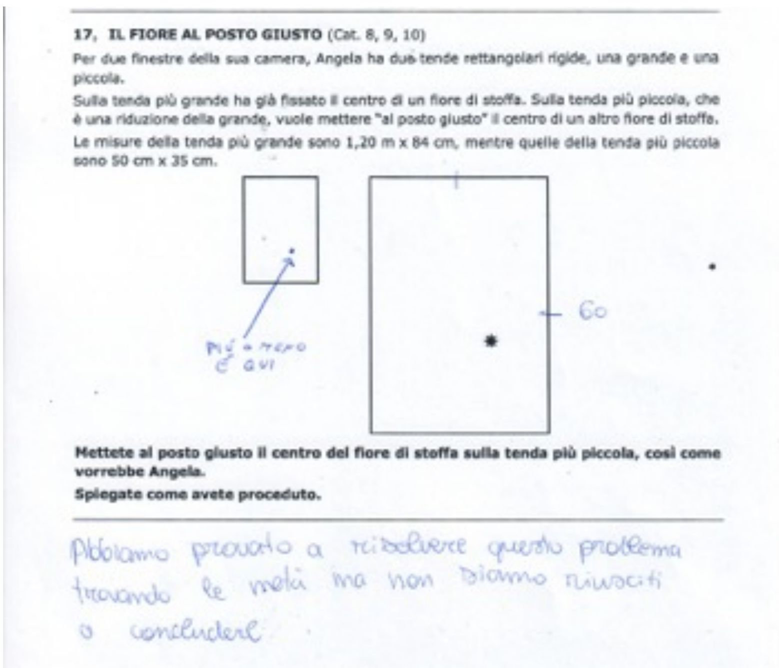
  dans certains cas, ils ont mesuré les distances entre le centre de la fleur et deux côtés perpendiculaires du grand rectangle, certains l'ont calculé à partir du dessin et d'autres à partir des mesures réelles du rideau, certains ont mesuré en prenant les coordonnées de haut en bas, d'autres de bas en haut, de droite à gauche et de gauche à droite ; en fait, l'indication des mesures des rideaux a probablement conduit de nombreux groupes d'élèves à ne pas utiliser la figure du texte pour la procédure de résolution, mais à se référer uniquement aux mesures "dans la réalité", ce qui leur a compliqué la vie ;

- hanno fatto ricorso all'uso di quadrettature, griglie, piano cartesiano e più o meno "proporzionali" dei due rettangoli, anche se non sempre sono arrivati alla risoluzione. In altri casi, benché in numero molto ridotto, mostrano di essere geniali:
  ils ont eu recours à l'utilisation de carrés, de grilles, de plans cartésiens et à une "proportionnalité" plus ou moins grande des deux rettangles, bien qu'ils ne soient pas toujours parvenus à une résolution. Dans d'autres cas, bien qu'en très petit nombre, ils ont fait preuve d'ingéniosité :

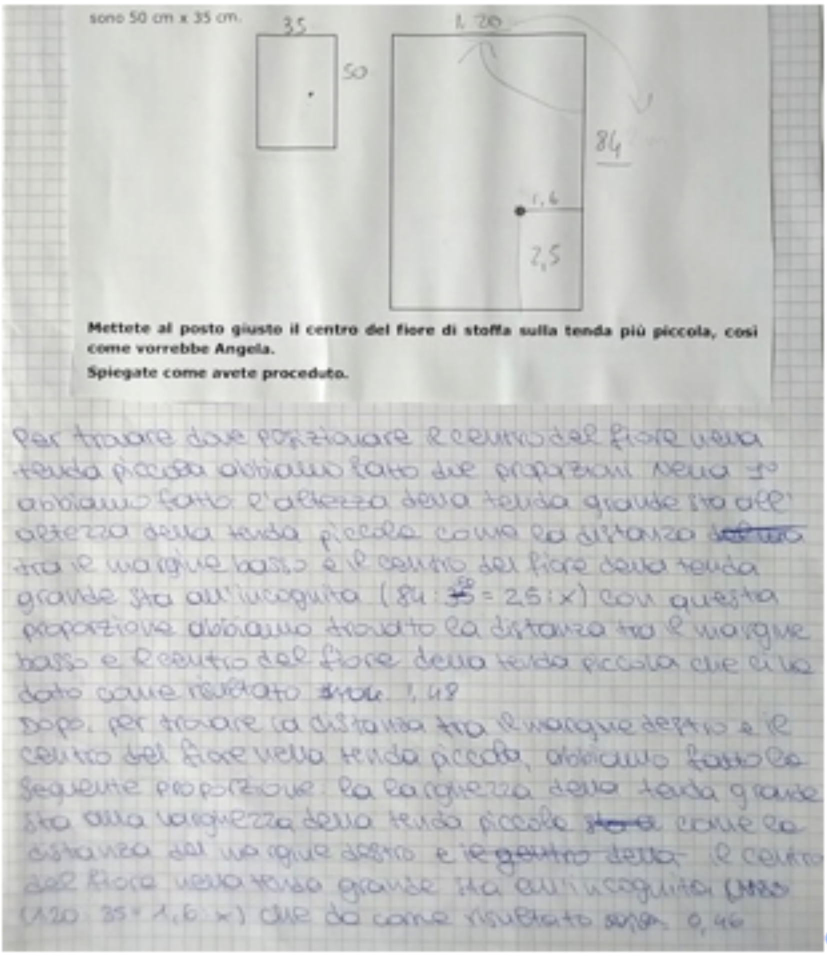


Benché i risultati delle categorie 9 e 10 siano stati migliori di quelli della categoria 8, globalmente questo problema ha evidenziato diversi e importanti livelli di difficoltà da parte degli allievi.
Bien que les résultats des catégories 9 et 10 soient meilleurs que ceux de la catégorie 8, ce problème présente globalement plusieurs niveaux de difficulté importants pour les élèves.
Dall'analisi degli elaborati è emerso che gli **errori più frequenti** sono stati:
L'analyse des documents a montré que les erreurs les plus fréquentes étaient les suivantes :

- errori legati alla misurazione delle dimensioni con il righello;
- errori legati al posizionamento approssimativo non argomentato e in certi casi trovato "ad occhio",
- les erreurs liées à la mesure des dimensions à l'aide d'une règle ;
- les erreurs liées à un positionnement approximatif non argumenté et, dans certains cas, trouvé "à l'œil",

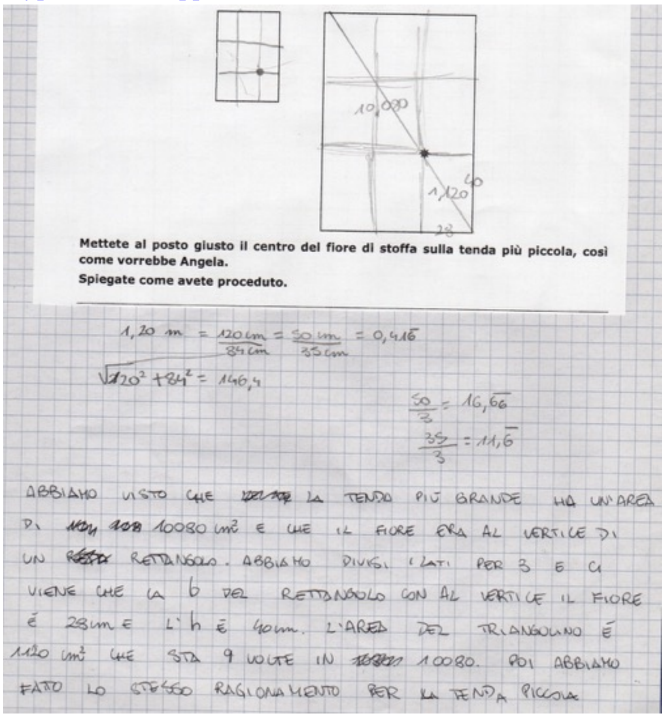


- errori nella misurazione: non sono stabilite le relazioni tra le misure, non considerando la loro proporzionalità o il rapporto tra grandezze; cattivo uso delle unità di misura, a tal proposito è interessante il caso di una classe che dimostra di aver compreso il compito matematico e argomenta il ricorso all'uso delle proporzioni, disegna il fiore sulla tenda piccola, ma non "al posto giusto" a causa della distrazione con la quale ha interpretato le misure delle dimensioni delle tende. Di conseguenza, la misura 1,20 m viene probabilmente interpretata come 1,20 cm e quindi assegnata al lato minore della tenda grande a giudicare dalla annotazione fatta sul disegno, anche se priva dell'unità di misura. Delle quattro misure fornite dal testo del problema, la maggior parte è espressa in centimetri e quindi a tutte viene probabilmente assegnata tale unità di misura. Tuttavia, nel calcolo, gli alunni usano 120, non 1,20 e stupisce non si siano accorti dell'errore commesso nello scrivere le proporzioni.
- erreurs dans le traitement des mesures : les relations entre les mesures ne sont pas établies, leur proportionnalité n'est pas envisagée ou la relation entre les quantités n'est pas prise en compte ; en ce qui concerne les points critiques sur l'utilisation des unités de mesure, le cas d'une classe qui démontre sa compréhension de la tâche mathématique et argumente l'utilisation des proportions est intéressant ; elle dessine la fleur sur le petit store, mais pas "au bon endroit" en raison de la distraction avec laquelle elle a interprété les mesures des dimensions des stores. Par conséquent, la mesure de 1,20 m est probablement interprétée comme 1,20 cm et donc attribuée au plus petit côté du grand store à en juger par l'annotation faite sur le dessin, même s'il manque l'unité de mesure. Sur les quatre mesures données dans le texte du problème, la plupart sont exprimées en centimètres et toutes se voient donc probablement attribuer cette unité de mesure. Cependant, dans le calcul, les élèves utilisent 120 et non 1,20 et il est surprenant qu'ils ne se soient pas rendu compte de l'erreur commise lors de l'écriture des proportions.



- ricorso al calcolo dell'area (o del perimetro) e/o all'applicazione del teorema di Pitagora per trovare la misura delle diagonali per arrivare a non concludere;
- le recours au calcul de l'aire (ou du périmètre) et/ou l'application du théorème de Pythagore pour trouver la mesure des diagonales et ne pas aboutir à une conclusion ;

- utilizzazione di un rapporto intuitivo di 1/3 fra le misure date com'è, ad esempio, ben illustrato in questo elaborato di categoria 8 nel quale si legge: *"Dividendo in 3 parti il lato più lungo della tenda più grande (1,20 m:3 = 0,40) = 1/3. Facciamo la stessa cosa per il lato corto (84 cm:3 = 28 cm) = 1/3. Anche per la tenda corta (50 cm:3 ≅ 16,6 cm, 35 cm:3 ≅ 11,6 cm). Quindi la stella si troverà a 16,6 cm di altezza e 11,6 cm di larghezza"*. In alcuni elaborati, inoltre, se ne vede una sorta di giustificazione grafica, a partire dal presupposto del rapporto 1/3:
- Utilisation d'un rapport intuitif de 1/3 entre les mesures données, comme l'illustre bien, par exemple, cette copie de la catégorie 8 dans laquelle on peut lire : *"Diviser le plus grand côté du plus grand store (1,20 m:3 = 0,40) en 3 parties = 1/3. Nous faisons de même pour le petit côté (84 cm:3 = 28 cm) = 1/3. De même pour le petit store (50 cm:3 ≈ 16,6 cm, 35 cm:3 ≈ 11,6 cm). Ainsi l'étoile aura donc une hauteur de 16,6 cm et une largeur de 11,6 cm*. Dans certains dessins, on trouve également une sorte de justification graphique, basée sur l'hypothèse du rapport 1/3 :



- ricorso alla sottrazione fra misure corrispondenti al posto del ricorso della proporzionalità; a volte, infatti, le nozioni di "rapporto" e "differenza" vengono usati, erroneamente, come sinonimi: *Spiegazione: si è trovato la differenza, facendo la differenza dell'area che è 5,76. Si è calcolato le misure dei lati e della distanza del fiore di stoffa. Si è fatta la proporzione e si è trovato la distanza.* La classe determina correttamente la posizione del fiore sulla tenda grande reale, ma nel determinare "il posto giusto" su quella piccola sbaglia perché usa il rapporto tra le aree come fosse il rapporto di similitudine, anche se lo definisce *"differenza"*, ottenendo quindi un valore diverso da quello corretto.
- le recours à la soustraction entre mesures correspondantes au lieu du recours à la proportionnalité ; parfois, les notions de "rapport" et de "différence" sont utilisées, à tort, comme synonymes : *Explication : on a trouvé la différence en faisant la différence de l'aire qui est de 5,76. On a calculé les mesures des côtés et la distance de la fleur de tissu. On a fait la proportion et on a trouvé la distance*. La classe détermine correctement la position de la fleur sur le vrai grand store, mais en déterminant "la bonne place" sur le petit store, elle commet une erreur car elle utilise le rapport entre les aires comme s'il s'agissait du rapport de similitude, même si elle l'appelle "différence", obtenant ainsi une valeur différente de la valeur correcte.
- confusione fra rapporto di aree e rapporto di lunghezze di segmenti.
- confusion entre le rapport des aires et le rapport des longueurs des segments.

Il confronto con i risultati dell'analisi a posteriori del problema "Dove si posa la mosca" del 2001 di Doretti e altri, che era stato dato anche alle categorie 6 e 7 oltre che 8, sembra indicare che le strategie utilizzate siano le stesse, anche nelle percentuali, ma che le difficoltà incontrate dagli allievi risultino maggiori.

In effetti benché il problema del fiore al posto giusto possa essere visto come una variante del problema della mosca, quest'ultimo era inserito in un contesto più evidente, trattandosi di una fotografia, oggettivamente riconosciuta come una similitudine.

La comparaison avec les résultats de l'analyse a posteriori du problème "Où se pose la mouche" de 2001 de Doretti et al. qui a également été donné aux catégories 6 et 7 ainsi qu'à la catégorie 8, semble indiquer que les stratégies utilisées sont les mêmes, y compris en termes de pourcentages, mais que les difficultés rencontrées par les élèves sont plus importantes.
En effet, si le problème de la fleur au bon endroit peut être considéré comme une variante du problème de la mouche, ce dernier est placé dans un contexte plus évident, celui d'une photographie, objectivement reconnue comme une similitude.

Alla luce di quanto emerso da queste analisi, abbiamo ancora una volta la conferma di quanto sia difficile, seppur stimolante, per coloro che formulano un'analisi a priori, prevedere come gli alunni si approprieranno del problema e lo gestiranno. La realtà "a posteriori", infatti, va ben oltre ogni possibile previsione che possa fare l'adulto. Sicuramente, nell'ottica di un processo di insegnamento–apprendimento significativo, sarà utile proporre il problema in classe e ascoltare, dalla viva voce degli alunni, la giustificazione delle scelte operate, attraverso un dialogo che sia costruttivo per tutti.

A la lumière de ce qui ressort de ces analyses, nous avons une fois de plus la confirmation de la difficulté, voire du défi, pour ceux qui formulent une analyse *a priori*, de prévoir comment les élèves vont s'approprier le problème et le traiter. La réalité "a posteriori" va en effet bien au-delà de ce que l'adulte peut prévoir. Certes, dans la perspective d'un processus d'enseignement-apprentissage significatif, il sera utile de proposer le problème en classe et d'écouter, à partir de la voix des élèves, la justification des choix effectués, à travers un dialogue constructif pour tous.

5. Qualche osservazione conclusiva/Quelques observations conclusives

Perché un grande divario tra i numerosi casi di errori e incomprensione e i non troppi casi di buona interpretazione e buona risoluzione dei tre problemi analizzati, come anche nel caso di altri nostri problemi di geometria?

L'ostacolo, nel caso del "Fiore al posto giusto", ad esempio, è solo la similitudine che si porta dietro la proporzionalità o è, ancora una volta, la non dimestichezza con problemi che vanno oltre un'applicazione pedissequa di tali conoscenze?

Ben diverso è risolvere un problema di mera applicazione, per esempio, dei criteri di similitudine dei triangoli dove il rapporto di similitudine è dato, dal risolvere un problema come il nostro che mette gli allievi in una situazione **di individuazione** del rapporto di similitudine o di una procedura "personalizzata"!

Discorso analogo si può fare nel caso dell'applicazione del teorema di Pitagora anche a triangoli non rettangoli, come si è visto nel problema de "Il rettangolo da dividere" o delle percentuali in ambito geometrico nel caso del problema "Da singolo a doppio".

L'uso in classe di questi problemi, come altri del RMT, forse contribuirebbe a condurre gli allievi a uscire da schemi prefissati!!

Pourquoi l'écart est-il si grand entre les nombreuses résolutions entachées d'erreurs et de malentendus et les rares interprétations correctes suivies de bonnes réponses aux trois problèmes analysés, comme dans nos autres problèmes de géométrie ?
L'obstacle, dans l'exemple de « La fleur au bon endroit » est-il uniquement la similitude qui entraîne la proportionnalité ou est-ce, encore une fois, l'absence de maîtrise de problèmes qui vont au-delà d'une application mécanique de ces connaissances ?
Résoudre un problème de simple application est bien différent, par exemple, d'appliquer des critères de similitude de triangles où le facteur est donné. Un problème comme le nôtre place les élèves dans une situation d'incertitude où ils doivent préalablement **découvrir** ou **identifier** la relation de similitude ou créer une "procédure personnalisée !

Un discours analogue peut être fait dans le cas de l'application du théorème de Pythagore étendu aussi à des triangles non rectangles, comme on le voit dans le problème « Partage du rectangle » ou des pourcentages dans le champ géométrique dans le problème « Du simple au double ».

L'utilisation de ces problèmes en classe, comme d'autres du RMT, aiderait peut-être les élèves à sortir des schémas préétablis !!

APPROFONDIMENTI / ÉTUDES

GITA IN PULLMAN / VOYAGE EN BUS

Rosa Iaderosa, Michel Henry, Angela Rizza
con la collaborazione del Gruppo Funzioni [1]/ avec la collaboration du Groupe Fonctions[1]

Sunto / Résumé

In questo articolo vorremmo approfondire riflessioni di carattere didattico sul problema 29.I.17 Gita in pullman, rivelatosi ricco di potenzialità sin dalla fase di elaborazione e discussione dell'analisi a priori, e successivamente fonte di riflessioni riguardo alla sua analisi a posteriori. Proprio per la varietà di spunti didattici che il problema propone, nell'ambito della costruzione graduale del concetto di funzione, e per quanto riguarda le attività di avvio alla formulazione algebrica, esso può rappresentare un modello per come impostare l'analisi a posteriori, fissando i punti di attenzione emersi dalle discussioni del gruppo di lavoro Funzioni, sia prima che dopo la somministrazione del problema, nella prima prova del 29° RMT.

Dans cette étude, nous souhaitons approfondir la réflexion didactique sur le problème 29.I.17 *Voyage en bus*, qui s'est révélé riche en potentialités depuis la phase d'élaboration et de discussion de l'analyse *a priori*, puis source de réflexions quant à son analyse a posteriori. En raison de la variété des questions didactiques que le problème propose dans le contexte de la construction progressive du concept de fonction, ainsi qu'en ce qui concerne les activités d'initiation à la formulation algébrique, il peut représenter un modèle pour la mise en place de l'analyse *a posteriori,* en fixant les points d'intérêt qui ont émergé des discussions du groupe de travail *Fonctions*, aussi bien avant qu'après l'attribution du problème lors de la première épreuve du 29e RMT.

1. Elaborazione del problema / Élaboration du problème

Presentiamo qui il testo del problema e l'analisi del compito nella loro versione definitiva.
Nous présentons ici l'énoncé du problème et l'analyse de la tâche dans leur version définitive.

GITA IN PULLMAN (Cat. 8, 9, 10)
Per una gita in pullman ci sono 50 iscrizioni. La quota è di 60 euro a persona.
All'ultimo momento, alcune persone rinunciano e non vogliono pagare la quota. Gli organizzatori ottengono che chi rinuncia paghi una penale: tanti euro quante sono le persone che hanno rinunciato.
Qual è l'importo minimo che gli organizzatori della gita possono incassare?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta e mostrate il dettaglio dei vostri calcoli.

VOYAGE EN BUS (Cat. 8, 9, 10)
Pour un voyage en bus, il y a 50 inscriptions. Chaque passager doit payer 60 euros.
Au dernier moment, certaines personnes abandonnent et ne veulent pas payer le voyage. Les organisateurs obtiennent que ceux qui renoncent, paient au moins une pénalité : autant d'euros que le nombre de personnes qui ont renoncé à voyager.
Quel est le montant minimum que les organisateurs du voyage peuvent percevoir ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et donnez le détail de vos calculs.

ANALISI A PRIORI / ANALYSE A PRIORI

Compito matematico / Tâche mathématique
Determinare il valore minimo di un importo uguale a $3000 – 60\,x + x^2$, ove x è un numero intero compreso tra 0 e 50 euro.
Déterminer la valeur minimum d'un montant égal à $3000 – 60\text{ x} + \text{x}^2$, où x est un nombre entier compris entre 0 et 50 euros.

Analisi del compito / Analyse de la tâche

[1] (presenti a Lione) Manuela ANDREATA, Lucia ARGILLA, Gabriella DEIANA, Valeria FERRARI, Mathias FRONT, Jean-Pierre GRANGÉ, Michel HENRY, Annie HENRY, Rosa IADEROSA, Mattia LAURINI, Laurent PATER, Angela RIZZA, Éric SUBTIL

- Comprendere il contratto – una situazione strana ma intrigante – tra gli iscritti e gli organizzatori, e la "penalizzazione", in particolare il significato della frase: «si pagheranno tanti euro di penalità quanti sono quelli che non partecipano».
- Comprendre le contrat - une situation étrange mais intrigante - entre les inscrits et les organisateurs et la « pénalité », en particulier la signification de la phrase « autant d'euros de pénalité que le nombre de personnes qui ont renoncé à voyager ».

- Comprendere anche che il valore minimo in questione dipende dal numero delle persone che rinunciano, e fa intravedere "qualche cosa che varia" nella situazione: ci sono 50 iscritti – di cui alcuni rinunciano o partecipano – che condurrebbe a 50 importi possibili che sembrano a priori tutti diversi.
- Comprendre aussi que le « montant minimum » de la question dépend du nombre de « personnes ayant renoncé » et fait entrevoir « quelque chose qui varie » dans la situation : il y a 50 inscrits - dont certains renoncent ou participent- qui conduiront à 50 montants possibles qui semblent a priori tous différents.

- Infine, bisogna convincersi che sarà necessario calcolare gli importi, confrontarli per vedere se si può individuare una variabilità e se la sua natura ha regolarità, oppure no, con aumenti e diminuzioni, sperando che non sarà necessario calcolarli tutti.
- Finalement, il faut se convaincre qu'il sera nécessaire de calculer les montants, de les comparer pour percevoir si l'on peut détecter une variation et sa nature : régulière ou non, avec augmentations ou diminutions ; en espérant qu'il ne sera pas nécessaire de tous les calculer.

- Riconoscere eventualmente al momento dell'appropriazione della situazione, gli importi corrispondenti agli estremi dell'intervallo (in euro): 3000 per 0 rinunce o per 50 partecipanti: (50×60) e 2500 per 50 rinunce o 0 partecipanti (50×50 o 50^2)
- Envisager éventuellement, au moment de l'appropriation de la situation les montants pour les limites de l'intervalle (en €) : 3000 pour 0 renoncement ou pour 50 participants : (50 x 60) et 2500 pour 50 renoncements ou 0 participant (50 x 50 ou 50^2)

- Determinare e applicare un metodo di calcolo degli importi dovuti, in un primo caso, poi in altri ed eventualmente nel caso generale: questo metodo consiste, per esempio, nel sottrarre ai 3000 euro originari tante volte il prezzo di 60 quante sono le rinunce, poi aggiungere la penalizzazione (numero di rinunce per numero uguale di euro). (Si può anche partire dai partecipanti, moltiplicare il loro numero per 60, calcolare il numero di rinunce, elevarlo al quadrato e sommarlo al precedente)
- Déterminer et appliquer une méthode de calcul des montants dus, dans un premier cas, puis d'autres et éventuellement dans le cas général : cette méthode consiste, par exemple à soustraire aux 3000 euros d'origine autant de fois le prix de 60 qu'il n'y a de renoncements, puis ajouter la pénalité (nombre de renoncements x nombre égal d'euros). (On peut aussi partir des participants, multiplier leur nombre par 60, calculer le nombre de renoncements, l'élever au carré et l'additionner au produit précédent.)

Inizialmente, l'analisi a priori è stata discussa, prima della consultazione sulla prima prova, durante i lavori del gruppo Funzioni al Convegno internazionale di Alghero dell'ottobre 2019. Originariamente più approfondita, distingueva tra le possibili strategie fatte di tentativi su alcuni casi numerici, ma anche di prove strutturate con tabelle, o con la formulazione simbolica in diverse modalità, con un'analisi più accurata degli aspetti prealgebrici, o algebrici di queste possibili strategie.

Initialement, l'analyse a priori a été discutée, avant la consultation sur la première preuve, lors des travaux du groupe Fonctions à la Rencontre internationale d'Alghero en octobre 2019. A l'origine, plus approfondie, elle distinguait des stratégies possibles avec des tentatives sur quelques cas numériques, mais aussi de preuves structurées avec des tableaux, ou avec une formulation symbolique selon différentes modalités, avec une analyse plus précise des aspects pré-algébriques, ou algébriques, de ces stratégies possibles.

Ecco come ad esempio si immaginavano le possibili prove numeriche su alcuni casi, finalizzate a "scoprire" il comportamento controintuitivo del meccanismo di calcolo delle quote da pagare:

C'est ainsi que l'on a imaginé des tests numériques possibles sur certains cas, visant à "découvrir" le comportement contre-intuitif du mécanisme de calcul des contributions :

Procedere esaminando attraverso vari casi numerici la variabilità: del numero dei partecipanti, numero delle rinunce, incasso partecipanti, incasso delle penali, incasso totale, con l'aiuto di una tabella.
Un esempio potrebbe essere:

Procéder en examinant à travers différents cas numériques la variabilité : du nombre de participants, du nombre d'annulations, de l'encaissement des participants, de l'encaissement des pénalités, de l'encaissement total, à l'aide d'un tableau.

Un exemple pourrait être :

Rinunce / Renoncements	Penale / Pénalités	Partecipanti / Participants	Quote / Recettes	Totale Penale + Quote
0	0	50	3000	3000
1	1	49	2940	2941
2	4	48	2880	2884
…				
29	841	21	1260	2101
30	900	20	1200	2100
31	961	19	1140	2101
…				
50	2500	0	0	2500

Si è convenuto poi, cosa confermata dall'analisi degli elaborati dopo la prova, che una tabella così strutturata è più nella mente dell'adulto che non dell'allievo. In effetti le prove numeriche effettuate dagli allievi soprattutto per la categoria 8, sono state molto più limitate nel numero dei casi, e i tentativi meno organizzati.
Per quanto riguarda invece la formulazione algebrica della funzione che consente di minimizzare l'incasso possibile per gli organizzatori, in relazione a numero dei partecipanti, si prevedevano più scelte possibili:

Il a alors été convenu, ce qui a été confirmé par l'analyse des copies après le test, qu'un tel tableau structuré est plus dans l'esprit de l'adulte que dans celui de l'élève. En effet, les tests numériques réalisés par les élèves, notamment pour la catégorie 8, étaient beaucoup plus limités en nombre de cas, et les tentatives moins organisées.

Par contre, en ce qui concerne la formulation algébrique de la fonction de minimisation des recettes possibles pour les organisateurs, en fonction du nombre de participants, plusieurs choix étaient possibles :

Stabilire che cosa si intende assumere come variabile: il numero dei partecipanti oppure il numero dei rinunciatari, e determinarne l'intervallo di variabilità.
Tradurre algebricamente il valore della penale e dell'incasso.

Déterminer la variable à considérer : le nombre de participants ou le nombre d'abandons, et déterminer l'intervalle de variations.

Traduire algébriquement les valeurs de la pénalité et de la collecte.

a) Se x è il numero delle rinunce la funzione da minimizzare sarà: $y = 50 \times 60 - x\,(60 - x)$, *interpretazione:* sottraggo dall'importo complessivo previsto con la partecipazione di tutti le perdite dovute alle rinunce,
oppure, $y = 50 \times 60 - 60\,x + x^2$, *interpretazione* sottraggo dall'importo complessivo previsto con la partecipazione di tutti le quote dei non partecipanti e aggiungo l'importo delle loro penali,
oppure, $y = 60\,(50 - x) + x^2$, *interpretazione* sommo all'incasso dei partecipanti effettivi la quota corrispondente all'incasso delle penali.
b) Se x è il numero dei partecipanti effettivi, la funzione da minimizzare sarà: $y = 60\,x + (50 - x)\,(50 - x)$, cioè aggiungo alle quote dei partecipanti effettivi le quote delle penali.

a) Si x est le nombre d'abandons, la fonction à minimiser sera : $y = 50 \times 60 - x\,(60 - x)$; *interprétation* : soustraire du montant total attendu toutes les pertes dues aux abandons,

ou, $y = 50 \times 60 - 60\,x + x^2$, interprétation : soustraire du montant total attendu les pénalités des non-participants et ajouter le montant de leurs pénalités, ou, y = 60 (50 - x) + x^2, interprétation : ajouter aux règlements des participants effectifs le montant correspondant aux pénalités.

b) Si x est le nombre de participants effectifs, la fonction à minimiser sera : y = 60 x + (50 - x) (50 - x), c'est-à-dire ajouter aux règlements des participants effectifs le montant des pénalités.

In un'attività didattica in classe potrebbe essere interessante confrontare le due funzioni che si ottengono con una diversa scelta della variabile e le tre diverse scritture della stessa funzione nel caso a): nel registro algebrico si passa da una all'altra applicando la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, ma l'interpretazione verbale si presenta completamente diversa. *L'equivalenza algebrica non si ritrova quindi a livello semantico* nella interpretazione della formula: si tratta di una situazione ricorrente ma sulla quale spesso non ci si sofferma sistematicamente a riflettere con gli allievi (si pensi alle tante occasioni che offrirebbero a riguardo le varie trasformazioni algebriche di una formula fisica…).

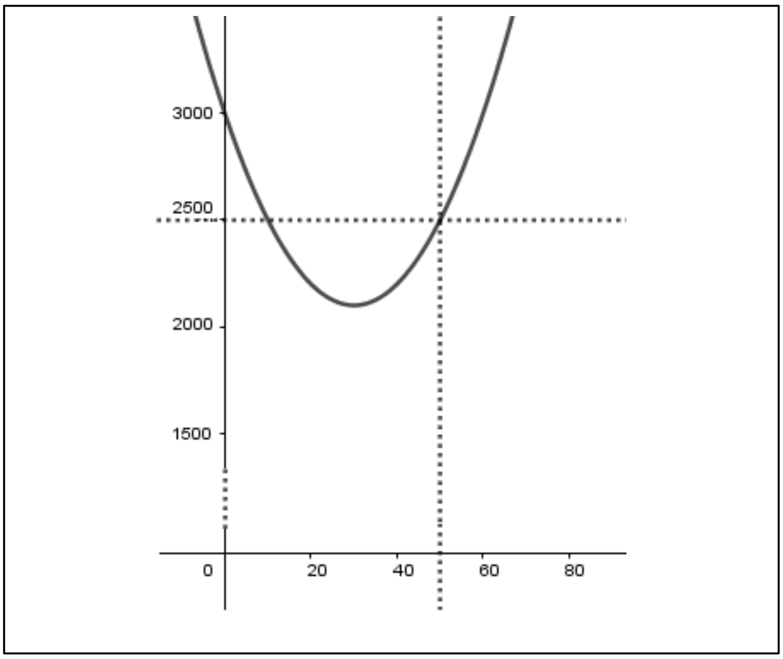
Dans une activité didactique en classe, il peut être intéressant de comparer les deux fonctions obtenues avec un choix différent de variable et les trois écritures différentes de la même fonction dans le cas a) : dans le registre algébrique, on passe de l'une à l'autre en appliquant la distributivité du produit par rapport à la somme, mais l'interprétation verbale est complètement différente. L'équivalence algébrique ne se retrouve donc pas au niveau sémantique dans l'interprétation de la formule : c'est une situation récurrente, mais sur laquelle on ne réfléchit pas souvent systématiquement avec les élèves (pensons aux nombreuses opportunités qu'offriraient à cet égard les différentes transformations algébriques d'une formule physique...).

In una prima versione dell'analisi del compito era presente anche la possibilità del ricorso alla rappresentazione grafica; questo aspetto, non inserito nell'analisi a priori definitiva perché corrispondente ad un livello di competenza elevato per le categorie proposte, si presta tuttavia ad una successiva discussione in classe.

Une première version de l'analyse de la tâche incluait également la possibilité d'utiliser une représentation graphique ; cet aspect n'a pas été inclus dans l'analyse *a priori* finale parce qu'il correspond à un niveau de compétence élevé pour les catégories proposées. Il se prête néanmoins à une discussion ultérieure en classe.

Riconoscere che in tutti i casi il grafico della funzione è una parabola $y = x^2 - 60x + 3000$, determinare graficamente o algebricamente il valore minimo della funzione che corrisponde a 30 rinunce e ad un importo di 2100 euro.

Comme dans tous les cas le graphique de la fonction est une parabole $y = x^2 - 60x + 3000$, déterminer graphiquement ou algébriquement la valeur minimale de la fonction qui correspond à 30 abandons et à une recette de 2100 euros.



Il problema quindi si presenta interessante e ricco di spunti didattici già sin dalla sua analisi a priori soprattutto per la varietà di strategie risolutive che offre. L'interesse è stato confermato dopo la sua somministrazione, come vedremo da quanto segue.

Le problème se présente donc comme intéressant et riche en idées didactiques dès son analyse *a priori*, notamment pour la variété des stratégies de résolution qu'il propose. L'intérêt s'est confirmé après l'épreuve, comme nous le verrons dans ce qui suit.

2. Risultati / Résultats

In questa tabella sono riportati i risultati generali:

Ce tableau présente les résultats généraux :

Cat.	0	1	2	3	4	Totale	M
8	213 (38%)	160 (28%)	36 (6%)	59 (10%)	99 (17%)	567	1.4
9	35 (24%)	36 (24%)	14 (10%)	21 (14%)	41 (28%)	147	2.0
10	33 (23%)	28 (20%)	16 (11%)	25 (17%)	41 (29%)	143	2.1
Totale	281 (33%)	224 (26%)	66 (8%)	105 (12%)	181 (21%)	857	1.6

Si notano punteggi simili per le cat. 9 e 10, mentre un vero e proprio "salto" separa i punteggi della cat. 8 dalle due categorie successive.
In effetti gli allievi di categoria 8 hanno mostrato maggiori difficoltà nell'appropriazione della situazione problema. Ci sono state difficoltà nella reale comprensione di come viene calcolato l'incasso, e certamente ciò è attribuibile non soltanto ad un algoritmo un po' insolito, che va contro l'intuizione, ma anche ad aspetti linguistici della sua descrizione. Riguardo alle strategie risolutive, poi, abbiamo potuto osservare quasi sempre su questa categoria procedure applicate ripetutamente su casi numerici, più o meno numerosi, senza il tentativo di arrivare ad una formula di carattere generale attraverso il linguaggio simbolico. A volte gli allievi colgono che c'è dietro una possibile generalizzazione, ma non arrivano alla sua formalizzazione.

Des scores analogues peuvent être observés pour les cat. 9 et 10, tandis qu'un véritable "saut" sépare les scores obtenus par la cat. 8 de ceux des deux catégories suivantes.

En fait, les élèves de la catégorie 8 ont montré plus de difficultés pour s'approprier la situation du problème. Il y a eu des difficultés dans la compréhension réelle de la manière dont les recettes sont calculées, et cela est certainement attribuable non seulement à un algorithme quelque peu inhabituel, qui va à l'encontre de l'intuition, mais aussi aux aspects linguistiques de sa description. En ce qui concerne les stratégies de résolution, nous avons donc presque toujours pu observer sur cette catégorie des procédures appliquées de façon répétée sur des cas numériques plus ou moins nombreux, sans chercher à aboutir à une formule générale par le biais du langage symbolique. Parfois, les élèves comprennent qu'il existe une généralisation possible, mais ne parviennent pas à sa formalisation.

I numerosi tentativi o considerazioni fondate sulla intuizione più che sui dati forniti, e le ipotesi fondate su una razionalità legata al "buon senso" più che all'esplorazione di un algoritmo, per la categoria 8 ci confermano come per gli allievi di questa età non sia ancora prevalente un metodo di indagine che si basi sulle competenze matematiche acquisite, e che faccia leva più su quella che può essere l'esperienza comune (se partecipasse una sola persona si avrebbe il minimo incasso), oppure sui comuni modi di dire (partecipano almeno due persone, perché si parla di "alcune rinunce, quindi non può essere una sola"…). Anche per gli allievi di categorie 9 e 10 non è stata proprio semplice l'appropriazione del meccanismo di calcolo del minimo incasso, tuttavia abbiamo notato una differenza nel cercare di applicare le conoscenze matematiche, con o senza successo.

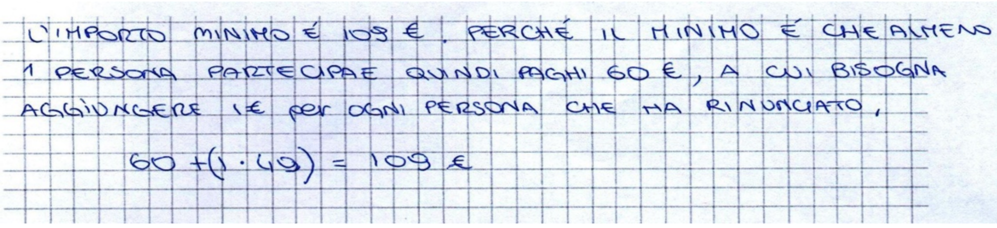
Les nombreuses tentatives ou considérations basées sur l'intuition plutôt que sur les données fournies, les hypothèses basées sur une rationalité liée au "bon sens" plutôt que sur l'exploration d'un algorithme pour la catégorie 8, confirment que pour les élèves de cet âge une méthode de recherche basée sur des compétences mathématiques acquises n'est pas encore prévalente, et qu'elle s'appuie davantage sur ce qui peut être une expérience commune (si une seule personne participait, les recettes seraient minimes), ou sur des dictons communs (au moins deux personnes participent, car on parle de quelques renoncements, il ne peut donc pas s'agir d'un seul). Même pour les élèves des catégories 9 et 10, l'appropriation du mécanisme de calcul de la recette minimale n'a pas été vraiment évidente, mais nous avons constaté une différence dans les tentatives d'application des connaissances mathématiques, avec ou sans succès.

3. Difficoltà di appropriazione / Difficultés d'appropriation

Ci soffermiamo principalmente su elaborati di cat.8 per mettere in evidenza le difficoltà di appropriazione della situazione, spesso collegate ad aspetti linguistici.
Un primo ostacolo riguarda la comprensione del meccanismo con cui si calcolano le quote e gli incassi; in questo elaborato si considera che ogni rinunciatario debba pagare 1 euro; non è stata, dunque, compresa la richiesta *tanti euro quante sono le persone che hanno rinunciato*:

Nous nous concentrons principalement sur les copies de cat.8 afin de mettre en évidence les difficultés d'appropriation de la situation, souvent liées à des aspects linguistiques.

Un premier obstacle concerne la compréhension du mécanisme de calcul des pénalités et des recettes. Dans cette copie, l'élève considère que chaque personne qui abandonne doit payer 1 euro ; la demande *autant d'euros qu'il y a d'abandons n'est donc pas comprise* :



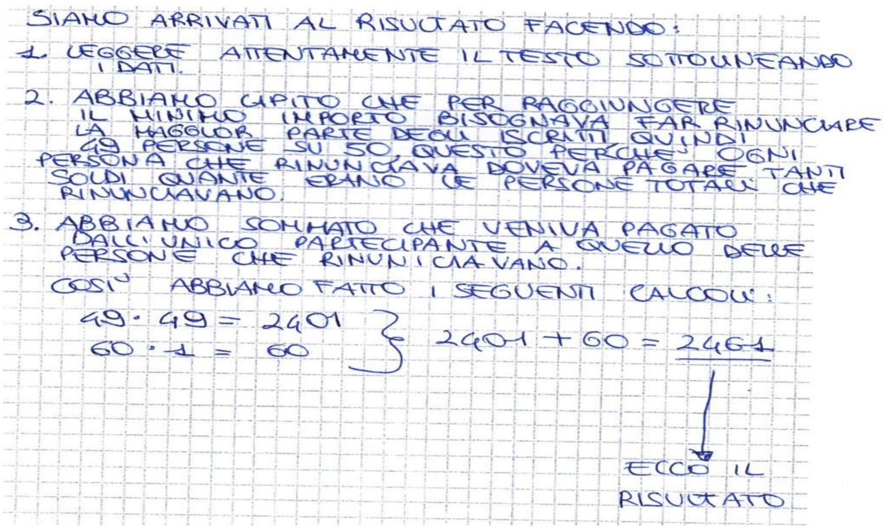
L'IMPORTO MINIMO È 109 €. PERCHÉ IL MINIMO È CHE ALMENO 1 PERSONA PARTECIPA E QUINDI PAGHI 60 €, A CUI BISOGNA AGGIUNGERE 1€ per OGNI PERSONA CHE HA RINUNCIATO,

$60 + (1 \cdot 49) = 109$ €

Le montant minimum est de 109 euros. Parce qu'au moins 1 personne participe donc elle paie 60 euros, et il faut ajouter 1 euro pour chaque personne qui a renoncé,
$60 + (1 \cdot 49) = 109$ €

Si noti la scelta di un partecipante e 49 rinunciatari, legata all'associazione tra *importo minimo dell'incasso* e *numero minimo di partecipanti*: tale scelta risulta molto frequente anche tra coloro che hanno compreso il meccanismo di calcolo della penale e tra studenti di tutte le categorie. Evidentemente ragionamenti intuitivi, o troppo legati al modello lineare, contrastano la visione reale dell'andamento della funzione.

On notera le choix d'un participant et de 49 abandons, lié à l'association entre le montant minimum de collecte et le nombre minimum de participants : ce choix est très fréquent même chez ceux qui ont compris le mécanisme de calcul de la pénalité et chez les élèves de toutes les catégories. À l'évidence, les raisonnements intuitifs, ou trop liés au modèle linéaire, contrastent avec la vision réelle de la forme de la fonction.



SIAMO ARRIVATI AL RISULTATO FACENDO:
1. LEGGERE ATTENTAMENTE IL TESTO SOTTOLINEANDO I DATI.
2. ABBIAMO CAPITO CHE PER RAGGIUNGERE IL MINIMO IMPORTO BISOGNAVA FAR RINUNCIARE LA MAGGIOR PARTE DEGLI ISCRITTI QUINDI 49 PERSONE SU 50, QUESTO PERCHÉ OGNI PERSONA CHE RINUNCIAVA DOVEVA PAGARE TANTI SOLDI QUANTE ERANO LE PERSONE TOTALI CHE RINUNCIAVANO.
3. ABBIAMO SOMMATO CHE VENIVA PAGATO DALL'UNICO PARTECIPANTE A QUELLO DELLE PERSONE CHE RINUNCIAVANO.

COSÌ ABBIAMO FATTO I SEGUENTI CALCOLI:

$$\left.\begin{matrix} 49 \cdot 49 = 2401 \\ 60 \cdot 1 = 60 \end{matrix}\right\} 2401 + 60 = 2461$$

ECCO IL RISULTATO

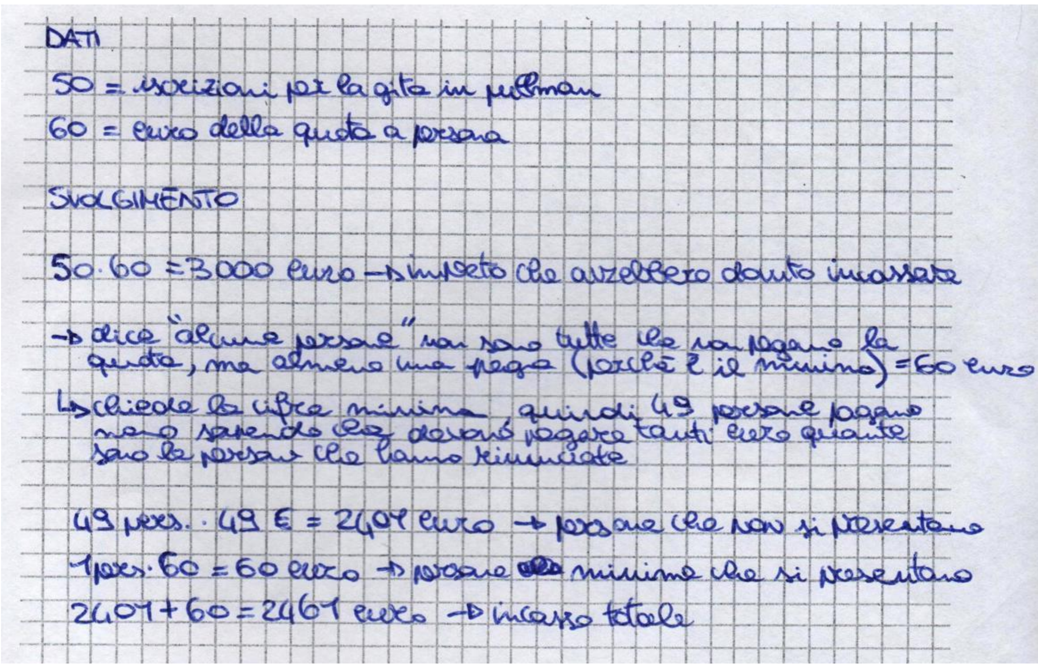
Nous sommes arrivés au résultat en faisant : *1. Une lecture attentive du problème en soulignant les données* *2. Nous avons compris que pour atteindre le montant minimum, il fallait que la plupart des personnes inscrites renoncent, donc 49 personnes sur 50. En effet, chaque personne qui renonçait devait payer autant d'euros que le nombre total de personnes qui renonçaient.* *3. Nous avons ajouté le montant payé par le seul participant au montant payé par les personnes qui ont renoncé.* *Ainsi, nous avons fait les calculs suivants :* *49 · 49 = 2401* *60 · 1 = 60 2401 + 60 = 2461* *⟶ c'est le résultat*

Vi sono altri interessanti esempi di prestazioni in cui il linguaggio influenza e ostacola la corretta appropriazione della situazione: ad esempio nell'elaborato seguente si pensa anche che debbano rinunciare 2 persone, perché "***alcune rinunce***" non possono essere una sola…
Oppure: "***alcune persone***" vuol dire che ***almeno una*** paga.

Il existe d'autres exemples intéressants de prestations où la langue influence et entrave l'appropriation correcte de la situation : par exemple, dans la copie suivante, on pense également que deux personnes doivent renoncer, car "**certains renoncent**" ne peut pas être une seule personne…

Ou : « **certaines personnes** » signifie **qu'au moins une** personne paie.

50 – 2 = 48 *48 · 60 = 2880 €* *2880 + (2 · 2) = 2884 €* *Abbiamo ipotizzato che il numero minimo di persone che hanno rinunciato sia 2 perché il testo usa l'espressione "alcune".* *Successivamente abbiamo trovato il numero delle iscrizioni meno il minimo dei rinuncianti.* *Dopodiché abbiamo moltiplicato i partecipanti per il costo della quota.* *Poi abbiamo trovato il costo della penale per 2 e lo abbiamo aggiunto al prezzo totale.* *Nous avons supposé que le nombre minimum de personnes qui ont abandonné est de 2 car l'énoncé utilise l'expression "certains".* *Nous avons ensuite trouvé le nombre d'inscriptions moins le nombre minimum d'abandons.* *Nous avons ensuite multiplié le nombre de participants par le coût des frais.* *Ensuite, nous avons trouvé le coût des frais d'annulation pour 2 et l'avons ajouté au prix total.*


DATI

50 = iscrizioni per la gita in pullman
60 = euro della quota a persona

SVOLGIMENTO

50 · 60 = 3000 euro → importo che avrebbero dovuto incassare

→ dice "alcune persone" non sono tutte che non pagano la quota, ma almeno una paga (perché è il minimo) = 60 euro
↳ chiede la cifra minima quindi 49 persone pagano meno sapendo che dovranno pagare tanti euro quante sono le persone che hanno rinunciato

49 pers. · 49 € = 2401 euro → persone che non si presentano
1 pers. · 60 = 60 euro → persone minime che si presentano
2401 + 60 = 2461 euro → incasso totale

Données
50 = frais d'inscription pour le voyage en bus
60 = euros de la redevance par personne
SUIVI
50 · 60 = 3000 euros montant à collecter
Il est dit que "certaines personnes" ne paient pas toutes la redevance, mais qu'au moins l'une d'entre elles paie (parce que le minimum) = 60 euros.
On demande le montant minimum, alors 49 personnes paient sans savoir qu'elles doivent payer autant d'euros que le nombre de personnes qui ont abandonné.
49 personnes 49 = 2401 euros –> personnes qui ne viennent pas
1 personne 60 = 60 euros au moins une personne qui vient
2401 + 60 = 2461 euros –> • recettes totales

In alternativa, ci si lascia guidare dall'intuizione anche ipotizzando che l'importo richiesto corrisponda ad un valore medio di partecipanti: 25
Par contre, nous nous sommes aussi laissés guidés par l'intuition en supposant que le montant demandé correspond à une valeur moyenne des participants : 25

1 abbandono = 1 €
25 abbandoni = 25 €
25·25 = 625 € (soldi delle persone che abbandonano)
25·60 = 1500 € (soldi delle persone che restano)
1500 + 625 = 2125 € (importo minimo)

1 abandon (renoncement) = 1 €
25 abandons = 25 €
25 • 25 = 625 € (règlement des personnes qui abandonnent)
25 •.60 = 1500 € (règlement des personnes qui restent)
1500 + 625 = 2125 € (montant minimum)

Nell'elaborato seguente emerge, invece, il modello della proporzionalità diretta, assolutamente non pertinente:
Dans la copie suivante, cependant, le modèle de la proportionnalité directe apparaît, ce qui n'est pas du tout pertinent :

persone	euro
50	60
x	3000

50×60 = 3000 € totale

50 : x = 60 : 3000

$x = \frac{50 \cdot 300\cancel{0}}{6\cancel{0}} = 2500$ € euro minimo

Anche se appartenente alla cat.9, segnaliamo questo elaborato in cui il minimo viene individuato per l'incidentale coincidenza tra il numero di rinunciatari (30) e la metà della quota di partecipazione (30 € = 60 € / 2):
Bien qu'appartenant à la catégorie 9, nous signalons cette copie dans laquelle le minimum est obtenu par la coïncidence fortuite entre le nombre d'abandons (30) et la moitié des frais de participation (30 € = 60 € / 2) :

€ 2100 → IMPORTO MINIMO, PERCHÈ:
€ 30 È LA METÀ DI € 60 e 30 È IL NUMERO DI PERSONE CHE RINUNCIANO, CHE SONO MAGGIORI DI 20, LE PERSONE CHE PARTECIPANO; QUINDI LE PERSONE CHE NON PARTECIPANO PAGANO LA METÀ DI € 60 (QUOTA PER LA PARTECIPAZIONE). IN CONCLUSIONE LE PERSONE CHE PAGANO LA METÀ SONO MAGGIORI, PER QUESTO GLI ORGANIZZATORI INCASSANO L'IMPORTO MINIMO.

€ 2100 → montant minimum, parce que :
€ 30 est la moitié de € 60 et 30 est le nombre de personnes qui ont renoncé, qui sont plus que 20, les personnes qui ont participé ; donc les personnes qui n'ont pas participé ont payé la moitié de € 60 (montant de la participation). En conclusion les personnes qui ont payé la moitié sont en majorité, pour cela les organisateurs perçoivent le montant minimum

Infine, abbiamo trovato anche elaborati in cui appare l'incomprensione del problema; ad esempio qui è evidente la confusione tra *numero delle rinunce* e *numero dei partecipanti.*
Enfin, nous avons également trouvé des copies dans lesquelles apparaît une mauvaise compréhension du problème. Par exemple, ici, la confusione entre le nombre d'abandons et le nombre de participants est évidente.

50 = ISCRIZIONI   1 persona = € 60

• SE RINUNCIA SOLO 1 PERSONA PAGHERÀ SOLTANTO 1 euro;
SE RINUNCIANO 2 PERSONE PAGHERANNO 2 euro, E COSÌ VIA.

- AIUTANDOCI CON IL TESTO ABBIAMO CAPITO CHE L'IMPORTO MINIMO, CIOÈ IL MINIMO CHE SI POSSONO GUADAGNARE GLI ORGANIZZATORI, È DI 1 euro

50 = inscriptions   1 personne = €60

- Si une seule personne renonce, elle règlera seulement 1 euro
Si 2 personnes renoncent elles paieront 2 euros, et ainsi de suite

- avec l'aide de l'énoncé nous avons compris que la recette minimum, c'est-à-dire le minimum que les organisateurs peuvent obtenir est de 1 euro

4. Alla ricerca di una strategia risolutiva / À la recherche d'une stratégie de résolution

Nella maggior parte degli elaborati, di tutte e tre le categorie, si affronta il problema per tentativi calcolando l'incasso corrispondente a diversi numeri di rinunciatari; tuttavia si osservano alcune differenze, anche in relazione alle categorie. Abbiamo così sintetizzato, da quelle più elementari a quelle più esperte, le procedure utilizzate:
Dans la plupart des copies, des trois catégories, le problème est abordé par tâtonnement en calculant les recettes correspondant à différents nombres d'abandons ; toutefois, certaines différences sont observées, également en fonction des catégories. Nous avons donc résumé, de la plus élémentaire à la plus experte, les procédures utilisées :

1) Procedure aritmetiche parziali, basate su tentativi incompleti / Procédures arithmétiques partielles basées sur des tentatives incomplètes
2) Procedure aritmetiche complete, basate su tentativi esaustivi, talvolta commentati a parole / Procédures arithmétiques complètes basées sur des tentatives exhaustives, parfois commentées par des explications.
3) Procedure algebriche non formali: / Procédures algébriques non formalisées :

- Ricerca di regolarità e prime scritture di formule /Recherche de régularités et premières écritures de formules
- Tentativi di rappresentazioni grafiche / Essais de représentations graphiques

4) Procedure algebriche simboliche: / Procédures algébriques symboliques :
   - Riconoscimento corretto di una variabile indipendente ed espressione dell'incasso in funzione della variabile scelta
   - Reconnaissance correcte d'une variable indépendante et expression des recettes en fonction de la variable choisie
   - In pochi casi, di cat.10, individuazione del minimo in corrispondenza del vertice della parabola / Dans quelques cas, de cat.10, identification du minimum correspondant au sommet de la parabole.

Nell'esempio che segue (cat. 8) si può osservare come venga ben esplicitato il ragionamento, ma non si arriva a fornire una risposta poiché si considerano solo pochi casi notevoli nel numero dei partecipanti e il procedimento contiene inoltre un errore nel calcolo della penale.
Dans l'exemple suivant (cat. 8), on constate que le raisonnement est bien expliqué, mais qu'il n'y a pas de réponse car seuls quelques cas notables dans le nombre de participants sont pris en compte et la procédure contient également une erreur dans le calcul de la pénalité.

Se rinunciano 10 persone
60 · 40=2400 € (soldi totali ricavati dalle persone che non hanno rinunciato alla gita)
2400 + 10 = 2410 € (soldi totali che incassano gli organizzatori)
10 € = soldi ricavati dalle persone che hanno rinunciato alla gita
----
se rinunciano 30 persone
50 - 30 = 20 (persone che non hanno rinunciato alla gita)
60 · 20 = 1200 € (soldi totali ricavati dalle persone che non hanno rinunciato alla gita)
1200 + 30 = 1230 € (soldi totali che incassano gli organizzatori
30 € = soldi ricavati dalle persone che hanno rinunciato alla gita
----
se rinunciano 50 persone
50 - 50=0 (persone che non hanno rinunciato alla gita)
60 · 0 = 0 € (soldi totali ricavati dalle persone che non hanno rinunciato alla gita)
0 + 50 =50 € (soldi totali che incassano gli organizzatori
50 € = soldi ricavati dalle persone che hanno rinunciato alla gita
Si 10 personnes abandonnent
50 - 10 = 40 (personnes qui n'ont pas renoncé au voyage)
60 · 40 = 2400 € (total de l'argent collecté auprès des personnes qui n'ont pas renoncé au voyage)
2400 + 10 = 2410 € (somme totale reçue par les organisateurs)
10 € = somme versée par les personnes qui ont renoncé au voyage

---

Si 30 personnes abandonnent
50 - 30 = 20 (personnes qui n'ont pas renoncé au voyage)
60 · 20 = 1200 € (total de l'argent récolté auprès des personnes qui n'ont pas renoncé au voyage)
1200 + 30 = 1230 € (montant total reçu par les organisateurs)
30 € somme versée par les personnes qui ont renoncé au voyage

---

Si 50 personnes abandonnent
50 - 50 = 0
60 · 0 = 0 (argent total récolté auprès des personnes qui n'ont pas renoncé au voyage)
0 + 50 = 50 (somme totale reçue par les organisateurs)
50 € = somme versée par les personnes qui ont renoncé au voyage

In questo caso, invece, (cat. 9) il calcolo con pochi tentativi non impedisce di raggiungere la conclusione corretta.
Dans ce cas, par contre, (cat. 9) le calcul avec seulement quelques essais n'empêche pas d'arriver à la bonne conclusion.

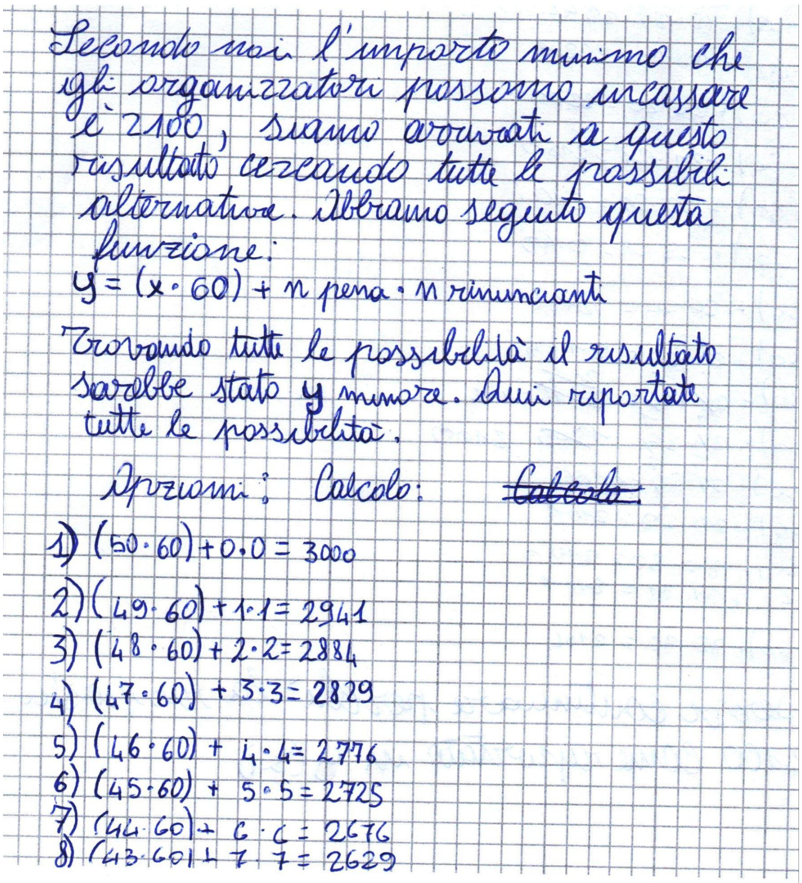
Le persone totali sono 50.
Allora proviamo a dividere questo numero in quinti per vedere la variazione ogni 10 persone.
Partiamo da 1/5 di persone su 50 totali e troviamo come quota totale 2200 €.
Passiamo poi a 2/5 e troviamo come quota totale 2100 €.
Facciamo la stessa cosa con 3/5 e troviamo 2200 € come quota totale.
Le quote di 1/5 e di 3/5 di persone sono uguali e il valore a metà tra questi due, ovvero la quota di 2/5 di persone, è di 2100 €.
Questo significa che le quote diminuiscono da 1/5 a 2/5 e aumentano da 2/5 a 3/5 in modo uguale.
Perciò il valore minimo che gli organizzatori della gita possono incassare è di 2100 € ed è la metà tra la prima e la terza quota.
Le nombre total de personnes est de 50.
Alors, nous essayons de diviser ce nombre en cinq parties pour voir les variations pour chaque ensemble de 10 personnes.
Nous commençons par 1/5 des personnes sur 50 au total et trouvons 2200 € comme participation totale.
Nous passons ensuite à 2/5 et trouvons 2100 € comme participation totale.
Nous faisons de même avec 3/5 et nous trouvons 2200 € comme participation totale.
Les participations de 1/5 et de 3/5 des personnes sont égales et la valeur moyenne entre les deux, c'est-à-dire la participation des 2/5, est de 2100 €.
Cela signifie que les participations diminuent de 1/5 à 2/5 et augmentent de 2/5 à 3/5 de manière égale.
Par conséquent, la valeur minimale que les organisateurs du voyage peuvent percevoir est de 2100 € et est la moyenne entre le premier et le troisième montant.

In molti casi, poi, si esplicitano solo alcuni tentativi, per esempio il *precedente e il successivo* rispetto al valore corretto per giustificare la propria risposta.

Dans de nombreux cas, seules quelques tentatives sont explicites, par exemple la précédente et la suivante par rapport à la valeur correcte pour justifier la réponse.

Quanto alla generalizzazione e alla scrittura di una formula, appare interessante questo elaborato (cat. 9), in cui la relazione tra le variabili viene esplicitata verbalmente e la procedura applicata molte volte in casi particolari, ma si arriva progressivamente ad una formalizzazione solo verbale e non simbolica:

En ce qui concerne la généralisation et l'écriture d'une formule, cette copie (cat.9) semble intéressant, dans laquelle la relation entre les variables est explicitée verbalement et la procédure appliquée plusieurs fois dans des cas particuliers, mais on arrive progressivement à une formalisation qui n'est que verbale et non symbolique :


Secondo noi l'importo minimo che gli organizzatori possono incassare è 2100, siamo arrivati a questo risultato cercando tutte le possibili alternative. Abbiamo seguito questa funzione:

y = (x · 60) + n pena · n rinuncianti

Trovando tutte le possibilità il risultato sarebbe stato y minore. Qui riportate tutte le possibilità.

Opzioni: Calcolo: ~~Calcolo~~

1) (50 · 60) + 0 · 0 = 3000
2) (49 · 60) + 1 · 1 = 2941
3) (48 · 60) + 2 · 2 = 2884
4) (47 · 60) + 3 · 3 = 2829
5) (46 · 60) + 4 · 4 = 2776
6) (45 · 60) + 5 · 5 = 2725
7) (44 · 60) + 6 · 6 = 2676
8) (43 · 60) + 7 · 7 = 2629

À notre avis, le montant minimum que les organisateurs peuvent collecter est de 2100. Nous sommes arrivés à ce résultat en cherchant toutes les alternatives possibles. Nous avons suivi cette fonction : y= (x · 60) + nombre de pénalités nombre de renonciations*
En trouvant toutes les possibilités, le résultat y aurait été inférieur. Voici les possibilités…

La formula trovata è quella di un'algebra sincopata, nella quale coesistono simboli misti a parole.

La formule obtenue est celle d'une algèbre syncopée, dans laquelle les symboles coexistent mélangés aux mots.

Per quanto riguarda invece le categorie 9 e 10, si trovano alcuni elaborati in cui appare, oltre alla scrittura formale della funzione, anche la determinazione del minimo attraverso il riconoscimento della parabola e del suo vertice come il minimo della funzione.

En revanche, en ce qui concerne les catégories 9 et 10, il existe un certain nombre de documents dans lesquels, outre l'écriture formelle de la fonction, la détermination du minimum apparaît à travers la reconnaissance de la parabole et de son sommet comme le minimum de la fonction.

Questo passaggio ci appare rilevante, e mostra anch'esso le sue caratteristiche di gradualità.
Da una formalizzazione più o meno argomentata della funzione nel registro algebrico si passa poi al vero utilizzo della funzione come modello per ricavare dal suo punto di minimo (l'ordinata di questo punto) il valore dell'importo minimo richiesto dal problema.

Cette étape nous semble pertinente et présente également des caractères de progressivité.

D'une formalisation plus ou moins raisonnée de la fonction dans le registre algébrique, on passe à l'utilisation effective de la fonction comme modèle pour tirer de son point de minimum (l'ordonnée de ce point) la valeur du montant minimum demandé par le problème.

Ragionamento

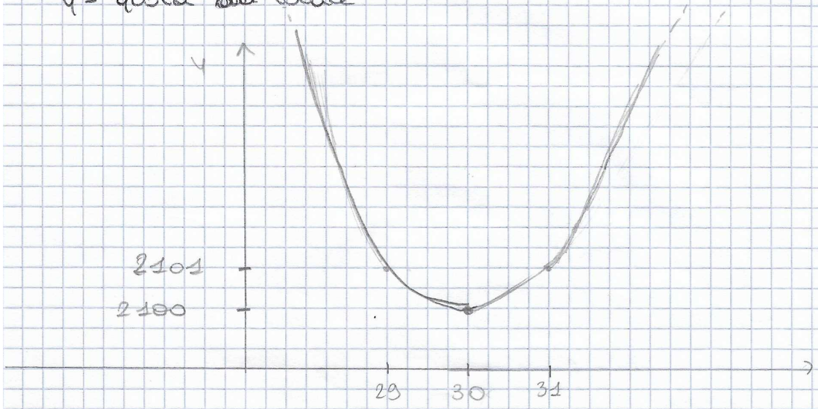
$y = x^2 + [(50 - x) \cdot 60]$

x = numero di persone che rinunciano

50 - x = persone che non hanno rinunciato

y = quota totale

x = nombre de personnes qui ont abandonné
50 – x = personnes qui n'ont pas abandonné



A tentativi, per disegnare il grafico della parabola, abbiamo scoperto che il vertice della parabola, corrispondente all'importo minimo incassabile dagli organizzatori, è 2100 €.
Da questo abbiamo compreso che il numero delle persone che disdicono sono 30. *

Conclusione

L'importo minimo che gli organizzatori della gita possono incassare è 2100 €.

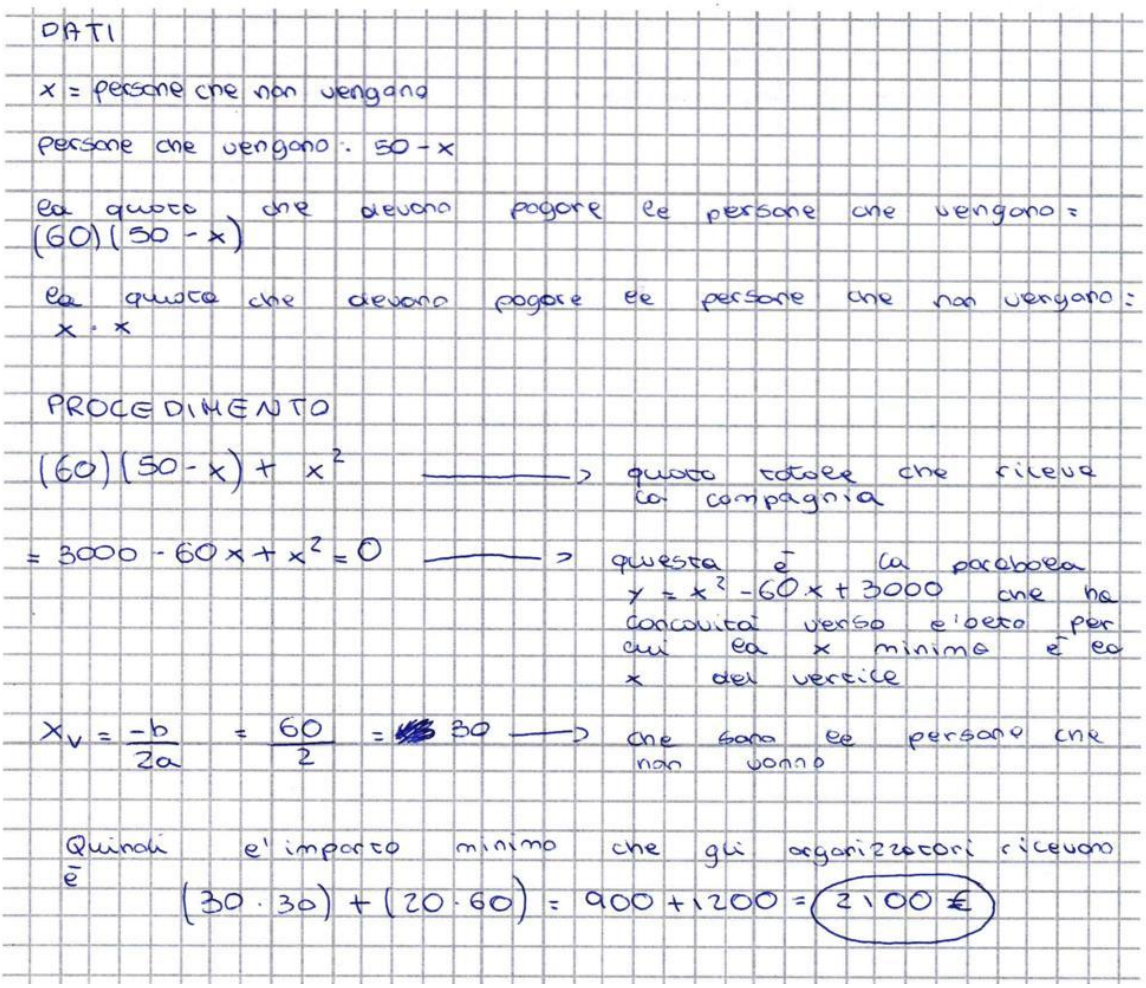
* Per verificarlo abbiamo utilizzato la formula per calcolare il vertice della parabola che è

$$-\frac{b}{2a}$$

En procédant par des essais pour dessiner le graphique de la parabole, nous avons trouvé que le sommet de la parabole correspondant au montant minimum que les organisateurs peuvent encaisser est 2100 €.
Nous en avons déduit que le nombre de personnes se désolidarisant du groupe est de 30.*
Conclusions
Le montant minimum que les organisateurs du voyage peuvent encaisser est 2100 €
** Pour le vérifier nous avons utilisé la formule pour calculer le sommet de la parabole qui est –b/2a*

Nel seguente elaborato (come il precedente di cat. 10) sono ancora meglio esplicitati la costruzione della formula e il significato dell'ascissa e dell'ordinata della parabola.

Dans la copie suivante (comme dans la copie précédente de la cat. 10), la construction de la formule et la signification de l'abscisse et de l'ordonnée de la parabole sont expliquées plus en détail.



DATI

x = persone che non vengano

persone che vengono: $50 - x$

la quota che devono pagare le persone che vengono = $(60)(50 - x)$

la quota che devono pagare le persone che non vengono: $x \cdot x$

PROCEDIMENTO

$(60)(50 - x) + x^2$ → quota totale che riceve la compagnia

$= 3000 - 60x + x^2 = 0$ → questa è la parabola $y = x^2 - 60x + 3000$ che ha concavità verso l'alto per cui la x minima è la x del vertice

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{60}{2} = 30$ → che sono le persone che non vanno

Quindi è l'importo minimo che gli organizzatori ricevono è

$(30 \cdot 30) + (20 \cdot 60) = 900 + 1200 = 2100$ €

5. Verso la generalizzazione / Vers la généralisation

In un ampio numero di elaborati, equamente distribuiti tra cat. 9 e 10 e anche rispetto al tipo di variabile indipendente prescelta (n. di rinunce oppure n. di presenze), abbiamo trovato l'utilizzo di una tabella ben strutturata, oppure calcoli corretti che conducono alla determinazione del valore minimo, attraverso procedure più o meno formalizzate.

In alcune prove cominciano a comparire delle scritture simboliche: nell'esempio seguente (cat. 9) si noti la formula non espressa con un'unica variabile e un tentativo di rappresentazione grafica che, seppure non rappresenti correttamente l'andamento della funzione di secondo grado, rende l'idea dell'iniziale decrescita e della successiva crescita.

Dans un grand nombre de copies, également réparties entre les cat. 9 et 10 et en fonction du type de variable indépendante choisie (nb d'abandons ou nb de présences), nous avons trouvé l'utilisation d'un tableau bien structuré, ou des calculs corrects conduisant à la détermination de la valeur minimale, par des procédures plus ou moins formalisées.

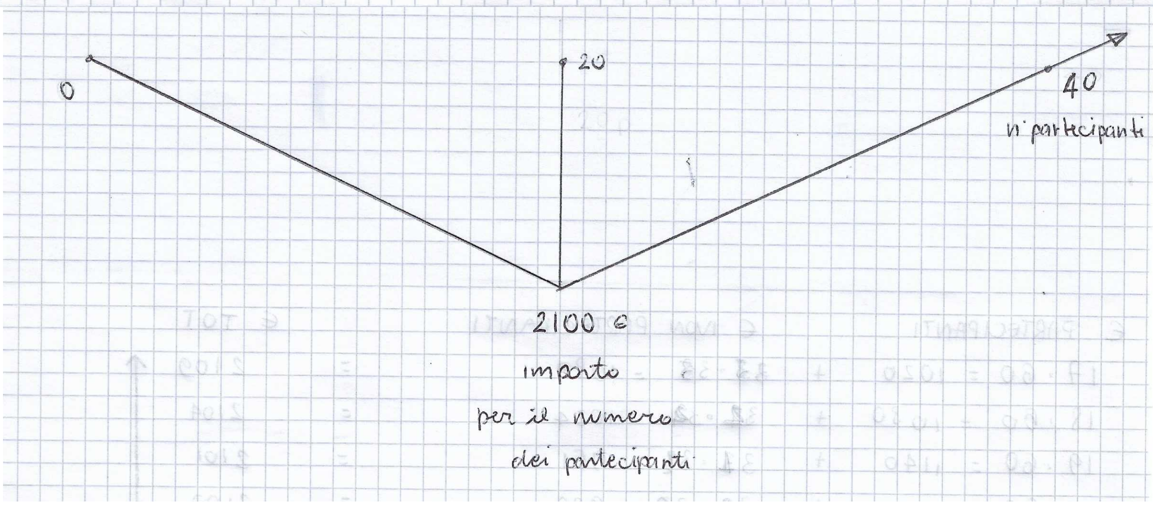
Dans certaines épreuves, des écritures symboliques commencent à apparaître : dans l'exemple suivant (cat. 9), on notera la formule non exprimée avec une seule variable et une tentative de représentation graphique qui, bien qu'elle ne représente pas correctement les variations de la fonction du second degré, donne l'idée de la diminution initiale et de la croissance suivante.

Ragionando nel testo abbiamo estratto la formula $[(n_p \cdot 60) + (n_n)^2]$ dove n_p è il numero dei partecipanti, 60 è la quota da pagare ed n_n è il numero delle persone che rinunciano.

Sostituendo alle variabili valori ipotetici abbiamo osservato che l'importo minimo si ottiene quando i partecipanti sono 20 e coloro che rinunciano sono, di conseguenza, 30 per un totale di 2100 €.

Formula:

$$[(20 \cdot 60) + (30)^2] = 2100\ €$$



En raisonnant à partir de l'énoncé, nous avons obtenu la formule suivante $[(n_p . 60) + (n_n)^2]$ *où* n_p *est le nombre des participants, 60 est le montant de la place et* n_n *est le nombre de personnes qui ont renoncé.*
En y substituant les valeurs hypothétiques des variables, nous avons observé que le montant minimum est obtenu quand il y a 20 participants et que par conséquent ceux qui ont renoncé sont 30 pour un total de 2100 €
Formule :
$[(20 \cdot 60) + (30)^2] = 2100$ €

Infine, osserviamo che la maggior parte degli elaborati che presentano la formalizzazione algebrica della funzione, per le categorie 9 e 10 si limitano a presentarne l'aspetto procedurale per il calcolo diretto degli importi, come l'esempio seguente (cat. 10).

Enfin, nous constatons que la plupart des copies présentant la formalisation algébrique de la fonction, pour les catégories 9 et 10, se contentent de présenter l'aspect procédural pour le calcul direct des montants, comme le montre l'exemple suivant (cat. 10).

DATI
50 iscr. iniziale — ricavo minimo = ?
60 € a pers.
alcune pers. rinunciano = x
penale: tanti € a testa quante sono x $\Rightarrow x^2$
RISOLVO
$50 \cdot 60 = 3000$ — $\boxed{(50-x)\cdot 60 + x^2}$
$x=1 \Rightarrow (50-1)\cdot 60+1 = 2941$
$x=2 \Rightarrow (50-2)\cdot 60+4 = 2884$
$x=3 \Rightarrow (50-3)\cdot 60+9 = 2829$
...
$x=29 \Rightarrow (50-29)\cdot 60+841 = 2101$
$x=30 \Rightarrow (50-30)\cdot 60+900 = \underline{2100}$
$x=31 \Rightarrow (50-31)\cdot 60+961 = 2101$
ricavo min = €2100

Données
50 inscrits au départ — *minimum à encaisser ?*
60 € par personne
Certaines personnes ont renoncé = x
Pénalité : autant d'€ chacun que x ⇒ x^2
Résolution — $\boxed{(50-x)} \cdot \boxed{60+x^2}$
Cela donne min = €2100

Rilevante è invece qualche caso in cui la funzione diventa un vero e proprio modello per la determinazione del valore minimo. Riportiamo un esempio (cat. 10) che, confrontato con il precedente, mostra questa diversità di livelli nella visione algebrica.

En revanche, il existe des cas où la fonction devient un véritable modèle pour la détermination de la valeur minimale. Voici un exemple (cat. 10) qui, comparé à l'exemple précédent, montre cette différence de niveaux dans la vision algébrique.

Il minimo importo incassato dagl. organizzatori della gita ammonta a 2100 €

Esprimiamo il calcolo dell'incasso in funzione di X:

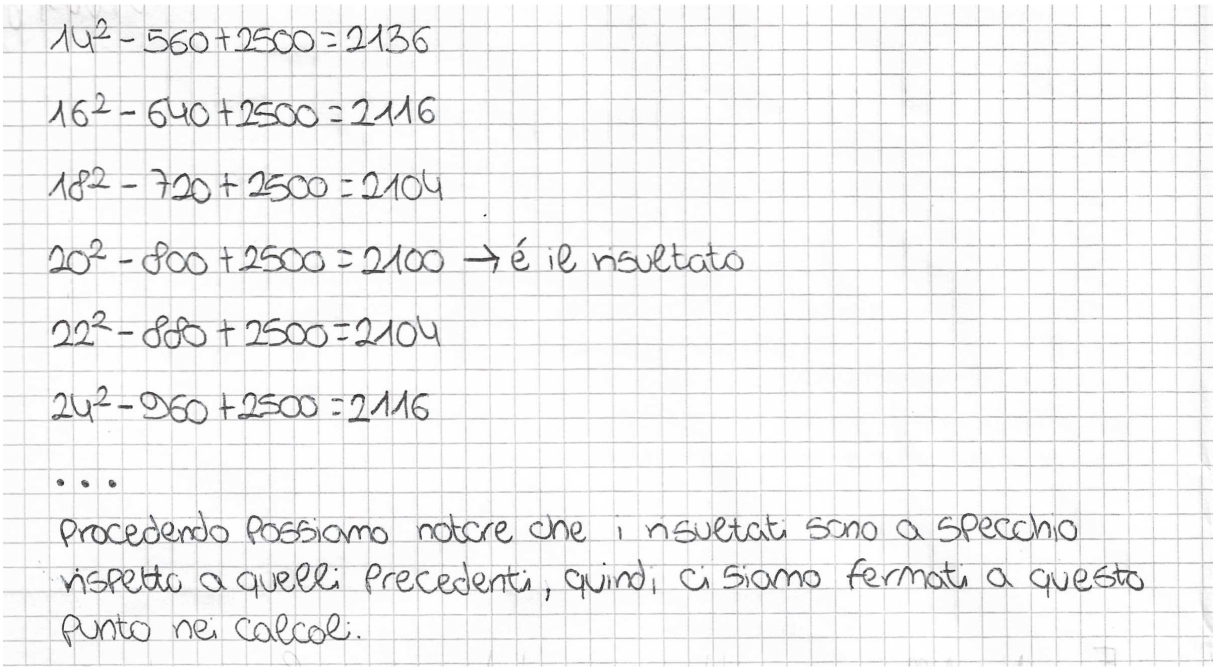
$y = 60x + (50-x)^2$

dato y l'incasso totale e x i partecipanti alla gita, 60x equivale alla quota data dai partecipanti alla gita, sommato a $(50-x)^2$ ossia la penale da pagare da chi non partecipa; ovvero 50 iscritti meno x partecipanti, moltiplicato per sé stesso.

Esprimiamo dunque la funzione sotto forma di grafico (allegato) ponendo l'intervallo di x ogni 10 partecipanti: ne risulta una parabola, il cui punto minore sull'asse delle ordinate y dell'importo totale, si nota che l'apice inferiore corrisponde alle coordinate (20; 2100) quindi 20 partecipanti e importo totale di 2100 €: il risultato minore.

Le montant minimum obtenu par les organisateurs du voyage est de 2100 euros.
Exprimons le calcul des recettes en fonction de x
$y = 60x + (50 - x)^2$
Étant donné y la recette totale et x le nombre des participants au voyage, 60 x est égal au montant donné par les participants à la sortie, ajouté à (50 - x)2, c'est-à-dire la pénalité due par ceux qui ne participent pas : 50 participants moins x participants, multiplié par lui-même.
Nous exprimons donc la fonction sous la forme d'un graphique (ci-joint) en partageant l'intervalle des x tous les 10 participants : le résultat est une parabole, dont les valeurs sur l'axe des ordonnées y donnent les recettes totales. On constate que le sommet correspond aux coordonnées (20 ; 2100), donc 20 participants et un montant total de 2100 : le montant minimum.

Interessante è anche il caso in cui, senza rappresentarla, si utilizzi qualche proprietà della funzione, in modo intuitivo, per determinare il minimo richiesto. Nel caso seguente (cat. 10), di cui mostriamo solo la conclusione, viene evocata la simmetria della parabola per verificare di averne trovato il minimo.
Le cas où, on utilise intuitivement une propriété de la fonction sans la représenter est aussi intéressant, pour déterminer le minimum demandé. Dans le cas suivant (cat. 10), dont nous ne montrons que la conclusion, la symétrie de la parabole est signalée pour vérifier que son minimum a été trouvé.



$14^2 - 560 + 2500 = 2136$

$16^2 - 640 + 2500 = 2116$

$18^2 - 720 + 2500 = 2104$

$20^2 - 800 + 2500 = 2100$ → é il risultato

$22^2 - 880 + 2500 = 2104$

$24^2 - 960 + 2500 = 2116$

...

Procedendo possiamo notare che i risultati sono a specchio rispetto a quelli precedenti, quindi ci siamo fermati a questo punto nei calcoli.

Au fur et à mesure que nous avançons, nous constatons que les résultats sont identiques aux précédents, et nous nous sommes donc arrêtés à ce point des calculs.

6. Utilizzo didattico del problema / Exploitation didactique du problème

In classe si può incoraggiare l'esplicitazione dei tentativi sia su carta che con un foglio di calcolo, programmando una tabella e visualizzando in un grafico i dati. L'uso di tabelle e grafici dovrebbe favorire una riflessione sulla non linearità della relazione in oggetto.
Il problema ha buone potenzialità per quanto riguarda il monitorare il livello di competenza sulla formalizzazione e sulla generalizzazione a cui sono giunti gli allievi che lo risolvono.
Gli elaborati esaminati mostrano con chiarezza il passaggio graduale dalla scrittura su alcuni casi numerici della procedura, alla generalizzazione in parte verbale, in parte simbolica, che spesso si accompagna alle relazioni numeriche, fino a giungere alla scrittura di una relazione simbolica che illustra la procedura generale.
En classe, l'explicitation des essais peut être encouragée sur papier ou à l'aide d'un tableur, en programmant une tablette et en affichant les données dans un graphique. L'utilisation de tableaux et de graphiques doit pousser à la réflexion sur la non-linéarité de la relation en question.
Ce problème présente un bon potentiel en termes de contrôle du niveau de compétence en matière de formalisation et de généralisation atteint par les élèves qui le résolvent.
Les copies examinées montrent clairement la procédure du passage progressif de l'écriture de quelques exemples numériques, à la généralisation partiellement verbale, partiellement symbolique, qui accompagne souvent les relations numériques, jusqu'à l'écriture d'une relation symbolique illustrant la procédure générale.

Inoltre, il passaggio ulteriore che si può osservare in alcuni casi, è l'identificazione di questa relazione simbolica con una funzione che fa da modello vero e proprio all'analisi della situazione. Questo aspetto, come dimostrano alcuni elaborati, è già possibile ottenerlo in alcuni casi nella categoria 10, tuttavia potrà costituire un obiettivo didattico da perseguire attraverso la discussione di questo e di altri esempi, anche nelle classi successive.
Inoltre, la funzione in questo caso presenta un modello che va contro l'intuizione di un andamento lineare, e questo può mettere in discussione le prime esperienze con le funzioni che gli allievi hanno fatto, ampliando il panorama

delle possibilità da prendere in esame.
En outre, l'étape supplémentaire que l'on peut observer dans certains cas est l'identification de cette relation symbolique avec une fonction qui sert de modèle réel pour l'analyse de la situation. Cela peut déjà être réalisé dans quelques cas en catégorie 10, comme le montrent certains documents, mais cela peut être un objectif pédagogique à poursuivre par la discussion autour de cet exemple et d'autres, même dans les classes de niveaux supérieurs.
De plus, dans ce cas, la fonction présente un modèle qui va à l'encontre de l'intuition d'une tendance linéaire, ce qui peut remettre en question les premières expériences des élèves avec les fonctions, élargissant ainsi le panorama des possibilités à examiner.

Si potrebbe proporre qualche variante del problema cambiando il numero di partecipanti o il valore della quota di partecipazione (si è notato che in alcuni elaborati la soluzione "30 rinunce" è stato ottenuta in modo fortuito dividendo per 2 la quota di partecipazione di 60 euro).
Con i dati attuali (50 partecipanti al massimo, quota di 60 euro), con 50 partecipanti si incassa la somma di 3000 euro e con 0 partecipanti di 2500 euro: questo può indurre ad ipotizzare una funzione lineare decrescente. Agendo sulla variabile didattica della quota di partecipazione si può fare in modo che la situazione sia ribaltata e far nascere il sospetto che la relazione non sia lineare.
On pourrait proposer des variantes du problème en changeant le nombre des participants ou la valeur des frais de participation (il a été noté que dans certains documents la solution "30 abandons" a été obtenue fortuitement en divisant par 2 les frais de participation de 60 euros). Avec les données actuelles (50 participants au maximum, frais de 60 euros), avec 50 participants on perçoit la somme de 3 000 euros et avec 0 participant 2 500 euros : cela peut conduire à l'hypothèse d'une fonction linéaire décroissante. En agissant sur la variable didactique « frais de participation », la situation peut être inversée et faire naître le soupçon que la relation n'est pas linéaire.

Inoltre il fatto che il minimo n_m della funzione sia un numero intero induce alcune procedure e non permette lo sviluppo di alcune giustificazioni. La scelta di una funzione che ha un minimo non intero obbligherebbe gli allievi ad un'analisi più fine della situazione. Un ulteriore sviluppo del problema si potrebbe realizzare con il passaggio da variabili discrete a variabili continue (vedi problema "Mattonelle d'oro" 24.II.19).
De plus, le fait que le minimum n_m de la fonction soit entier induit certaines procédures et ne permet pas le développement de certaines justifications. Le choix d'une fonction ayant un minimum non entier obligerait les élèves à effectuer une analyse plus fine de la situation.
Un développement supplémentaire du problème pourrait être réalisé en passant des variables discrètes à des variables continues (voir le problème "Carrelages en or" 24.II.19).

6. Conclusioni / Conclusions

Ci pare che proporre problemi come questo possa fornire, dal punto di vista didattico, una interessante panoramica di come evolve progressivamente la capacità di formalizzazione. Si può riconoscere poi il progressivo passaggio da un riconoscimento delle variabili attraverso vari esempi numerici ad una relazione di tipo funzionale, che può anche essere astratta al punto tale da diventare modello dell'andamento di queste variabilità.

È possibile così, da un'attenta analisi delle prestazioni degli allievi, monitorare l'evoluzione del loro livello di competenza su questi aspetti di algebrizzazione e modellizzazione, aspetti che si conquistano a lungo termine e vanno esaminati sistematicamente in un lungo periodo, rispetto ai vari livelli di scolarità.

Il nous semble que proposer de tels problèmes peut donner, d'un point de vue didactique, un aperçu intéressant de l'évolution progressive de la capacité de formalisation. On peut alors reconnaître le passage progressif de la reconnaissance de variables à l'aide de divers exemples numériques à une relation de type fonctionnel, qui peut aussi être abstraite au point de devenir un modèle de l'évolution de ces variabilités.

Il est donc possible, à partir d'une analyse attentive des performances des élèves, de suivre l'évolution de leur niveau de compétence sur ces aspects d'algébrisation et de modélisation, aspects qui s'acquièrent sur une longue période et qui doivent être systématiquement examinés en fonction des différents niveaux de scolarité.