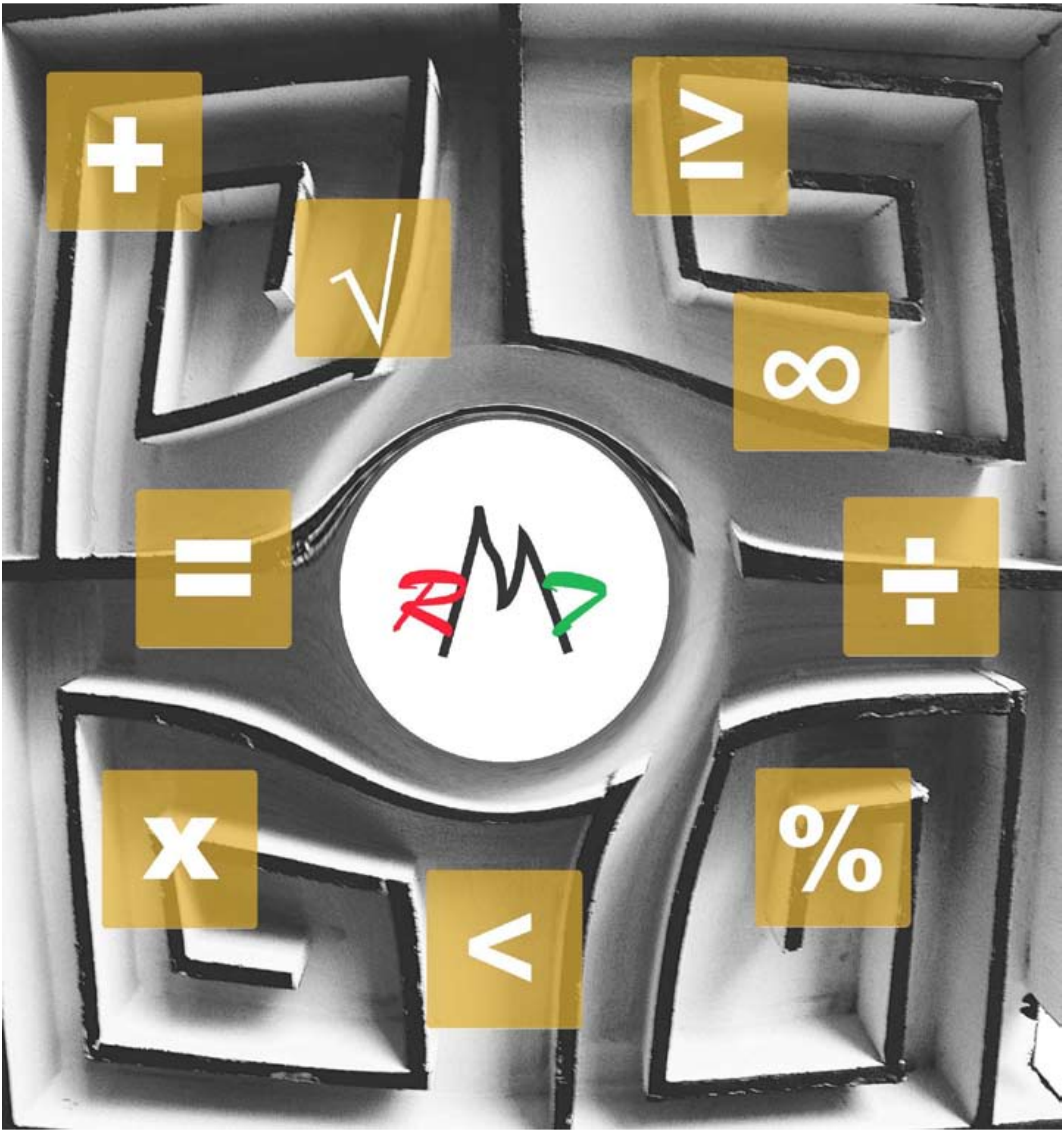
La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 12 octobre / ottobre 2022



Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.eu

ISSN 2234-9596

TABLE DES MATIÈRES / INDICE

ÉDITORIAL : DE L'EXTRAORDINAIRE A L'ORDINAIRE

François Jaquet

Dans un éditorial précédent, nous évoquions les deux vies d'un problème du RMT ; la première, qui dure 50 minutes lors de la passation d'une épreuve, la seconde qui se déroule dans le cadre de la classe de mathématiques.

La première est un événement que nous qualifions « d'extraordinaire » sous différents aspects.

Il y a tout d'abord l'objet de l'activité : la résolution de problèmes, qui se distingue des activités habituelles d'enseignement où les notions sont introduites progressivement et suivies d'exercices, d'applications, d'entraînements ainsi que de phases de calcul et de mémorisation. Les problèmes du RMT font découvrir des situations nouvelles, inédites, surprenantes parfois, qu'il faudra s'approprier.

Il y a ensuite la participation à une confrontation entre classes, les défis qu'elle suscite, le plaisir d'y consacrer deux moments particuliers sur une année, en espérant d'accéder au troisième moment privilégié de la finale.

Il y a les modalités de travail qui nécessitent une gestion collective : les problèmes sont trop nombreux pour être résolus en 50 minutes par un seul élève, ce qui entraîne une répartition en plusieurs groupes, des échanges, des discussions. Une des retombées de cette coopération se situe au niveau affectif : envie de faire au mieux, plaisir, découverte de l'apport des réflexions de l'autre.

Il y a encore un aspect qui nous paraît important à relever : l'activité se déroule en absence de l'enseignant.

Cette condition est exceptionnelle pour le groupe-classe. Il ne s'agit pas seulement de la dévolution de la tâche de résolution du problème mais aussi de toutes les décisions sur l'organisation du travail durant les 50 minutes de l'épreuve, sur les choix du matériel à utiliser, sur la formation des groupes, sur la gestion des comportements de chacun dans le respect des autres. C'est ce que nous considérons comme l'autonomie du groupe-classe, sans le regard de son enseignant, ni contrôle, ni jugement.

Lorsqu'on quitte l'événement extraordinaire de l'épreuve pour passer au problème du RMT en classe, que peut-on conserver de cette situation exceptionnelle sans tomber dans les routines du quotidien ?

Tout dépend alors de l'enseignant/e qui a une représentation du RMT construite par la lecture des conditions de participation de sa classe décrites sur différents sites de l'ARMT, par des commentaires de collègues qui s'y sont déjà inscrits, par des visites à la Banque de Problèmes ou encore par une ou plusieurs expérimentations avec sa classe.

L'image qu'il a du RMT est en principe forgée par l'idée de résolution de problèmes comprise comme une activité originale qui plaît aux élèves.

Lorsque l'enseignant/e reprend un ou plusieurs problèmes d'une épreuve qu'il juge particulièrement intéressants pour en faire profiter l'ensemble de sa classe, on peut envisager le passage de « l'événement extraordinaire » à une activité qui peut devenir « ordinaire », qui n'a cependant rien à voir avec la routine d'enseignement dans l'acception de transmettre ou inculquer un savoir.

Il faut encore, pour préparer le terrain, ou du moins le rendre favorable, que l'enseignant soit ouvert à une conception constructiviste de l'apprentissage, conception adoptée par le RMT dans tous ses travaux et ses textes : le problème n'a en soi aucun pouvoir magique, la recherche de sa solution doit être entièrement dévolue à l'élève et ne peut produire des fruits que si elle est suivie d'un débat entre élèves puis d'une phase d'institutionnalisation avec participation active de l'enseignant.

Voyons maintenant ce qui se passe au cas où l'enseignant décide d'exploiter un problème du RMT avec sa classe.

Il doit tout d'abord le choisir en fonction du niveau de ses élèves, du parcours d'apprentissage qu'il s'est fixé, des données recueillies sur le problème qu'il trouvera dans la Banque de Problèmes du RMT. Ces dernières vont lui permettre de prévoir les types de procédures et les obstacles qui pourront apparaître lors de la résolution, les conflits cognitifs à mettre en évidence lors des premières confrontations des réponses et explications.

Contrairement à la situation exceptionnelle d'une épreuve du RMT, tous les élèves auront traité le même problème, et la mise en commun apportera des informations beaucoup plus riches et vivantes que les descriptions de procédures rédigées sur les copies rendues. L'autonomie du groupe-classe peut être conservée, à un degré peut-être moins élevé, pour la formation des groupes, les déplacements, l'usage de matériel mais la dévolution de la tâche de résolution aux élèves n'est pas affectée par le changement de « milieu ».

Certains aspects affectifs développés lors de l'épreuve peuvent être substitués par des encouragements et stimulations de l'enseignant : aux défis de la confrontation entre classes, se substitue le plaisir pour un groupe d'être arrivé à une solution ou une procédure qui intéressera les autres groupes.

L'entrée dans une situation nouvelle et inédite est une découverte pour l'élève lors de l'épreuve, elle l'est aussi en classe pour tout problème.

Le changement le plus significatif se situe dans la durée. Les 50 minutes de l'épreuve ne suffisent évidemment pas pour exploiter un problème avec des intentions didactiques. La mise en commun et les confrontations nécessaires prennent du temps, la phase d'institutionnalisation peut encore être suivie de vérifications, de mises par écrit des progrès vécus dans la constructions des connaissances en jeu, d'approfondissements, de développements, de nouvelles recherches suggérées lors de la mise en commun …

On peut ainsi travailler pendant plusieurs séances ou plus d'une semaine sur le thème d'un seul problème résolu en classe.

Cette extension de la durée ne se fait pas aux dépens du « programme » mais s'y intègre. Le RMT ne doit en aucun cas être considéré comme une activité supplémentaire, et à ceux qui invoquent un programme déjà trop chargé, on peut répondre par la boutade « il s'agit de perdre du temps pour en gagner ».

On doit alors envisager que les problèmes du RMT soient les jalons d'un parcours didactique qui peut durer plusieurs mois, jusqu'à une année entière.

Pourquoi ne choisirait-on pas, pour un parcours trimestriel, trois ou quatre problèmes comme points de référence, autour desquels on renforcerait les connaissances par les activités nécessaires de consolidation, de calcul, de recherche, voire même de résolution d'autres problèmes pour évaluer la maîtrise de savoirs élémentaires ?

La résolution de problèmes pourrait ainsi devenir une activité ordinaire d'un enseignement des mathématiques réfléchi.

EDITORIALE: DALLO STRAORDINARIO ALL'ORDINARIO

François Jaquet

In un editoriale precedente sono state evocate le due vite di un problema del RMT; la prima, che dura 50 minuti nel caso di ciascuna prova della gara, la seconda che si esplica in un'attività matematica di classe.

La prima è un avvenimento che, per diversi aspetti, consideriamo "straordinario".

Prima di tutto quello che riguarda l'attività: la risoluzione di problemi che si differenzia dalle attività abituali dell'insegnamento dove le nozioni sono introdotte progressivamente e seguite da esercizi, da applicazioni, da esercitazioni oltre che da fasi di calcolo e memorizzazione. I problemi del RMT portano a scoprire situazioni nuove, inedite, talvolta sorprendenti, delle quali bisogna appropriarsi.

C'è poi la partecipazione a un confronto fra classi, le sfide che essa suscita, il piacere di consacrarvi momenti particolari nel corso dell'anno con la speranza di accedere al terzo momento privilegiato che è quello della finale.

Vi sono modalità di lavoro che necessitano di una gestione collettiva: i problemi sono troppo numerosi per essere risolti in 50 minuti da un solo allievo, cosa che porta a una suddivisione in diversi gruppi, a scambi, a discussioni. Una delle conseguenze di tale collaborazione si situa a livello "affettivo": desiderio di fare il meglio possibile, piacere, scoperta del contributo delle riflessioni dell'altro.

C'è ancora un aspetto che sembra importante sottolineare: l'attività si svolge in assenza dell'insegnante.

Questa condizione è eccezionale per il gruppo classe. Non si tratta solo di devoluzione del compito di risoluzione del problema, ma anche di tutte le decisioni sull'organizzazione del lavoro durante i 50 minuti della prova, sulle scelte del materiale da utilizzare, sulla formazione dei gruppi, sulla gestione dei comportamenti di ciascuno nel rispetto degli altri. Tutto ciò lo possiamo intendere come l'autonomia del gruppo classe, senza essere osservati, né controllati, né giudicati dall'insegnante.

La seconda è una attività che possiamo considerare "ordinaria" perché svolta durante le ore curricolari.

Quando si lascia l'avvenimento straordinario della prova per passare ai problemi del RMT in classe, che cosa possiamo conservare di questa situazione eccezionale senza cadere nella routine quotidiana?

Tutto dipende allora dall'insegnante che ha una rappresentazione del RMT costruita dalla lettura delle condizioni di partecipazione della sua classe descritte sui diversi siti dell'ARMT, dai commenti di colleghi che hanno già partecipato, dalle visite alla Banca di Problemi o ancora da una o diverse sperimentazioni con la propria classe.

L'immagine che ha del RMT è in generale forgiata sull'idea di problemi intesi come una attività originale che piace agli allievi.

Quando l'insegnante riprende uno o più problemi di una prova che giudica particolarmente interessanti a beneficio dell'intera classe, si può pensare al passaggio dell'avvenimento "straordinario" a un'attività che può diventare "ordinaria" ma che non ha nulla a che fare con la routine d'insegnamento nell'accezione del trasmettere o inculcare un sapere.

Al fine di preparare il terreno, o almeno renderlo "favorevole", bisogna che l'insegnante sia aperta/o a una concezione costruttivista dell'apprendimento, concezione adottata dal RMT in tutti i suoi lavori e i suoi testi: il problema non ha in sé alcun potere magico, la ricerca della sua soluzione deve essere interamente devoluta all'allievo e può produrre frutti solo se è seguita da un dibattito tra allievi e poi da una fase di istituzionalizzazione con la partecipazione attiva dell'insegnante.

Vediamo ora ciò che accade nel caso in cui l'insegnante decida di utilizzare un problema del RMT nella sua classe.

Deve dapprima sceglierlo in funzione del livello dei suoi allievi, del percorso di apprendimento che ha predisposto~~,~~ e dei dati raccolti sul problema che troverà nella Banca di Problemi del RMT. Questi ultimi permetteranno di prevedere i tipi di procedure e gli ostacoli che potranno apparire all'atto della risoluzione, i conflitti cognitivi da mettere in evidenza al momento dei primi confronti relativi alle risposte e spiegazioni.

Contrariamente alla situazione eccezionale di una prova del RMT, tutti gli allievi avranno lavorato sullo stesso problema e la messa in comune apporterà informazioni molto più ricche e "vive" delle descrizioni di procedure redatte negli elaborati, perché provengono dalla viva voce degli allievi. L'autonomia del gruppo-classe può essere conservata, forse a un livello meno elevato, per la formazione dei gruppi, gli spostamenti da un gruppo all'altro, l'uso di materiale, ma la devoluzione del compito di risoluzione agli allievi rimane pur nel cambio di "ambiente".

Alcuni aspetti affettivi sviluppati durante la prova possono essere sostituiti da incoraggiamenti e stimoli da parte dell'insegnante: alle sfide del confronto fra classi, si sostituisce il piacere per un gruppo di riuscire a giungere a una soluzione o a una procedura che interesserà gli altri gruppi.

L'entrata in una situazione nuova e inedita è una scoperta per l'allievo all'atto della prova, ma lo è anche in classe per ogni problema.

Il cambiamento più significativo è quello della durata. I 50 minuti della prova non sono evidentemente sufficienti per lavorare con un problema con intenzioni didattiche. La messa in comune e i confronti necessari richiedono del tempo, la fase di istituzionalizzazione può essere seguita da verifiche, da redazione dei progressi vissuti nella costruzione delle conoscenze in gioco, da approfondimenti, da sviluppi, da nuove ricerche suggerite dalla messa in comune…

Si può anche lavorare durante diverse lezioni o per più di una settimana sul tema di un solo problema risolto in classe.

Questa estensione della durata non avviene a discapito del "programma", ma vi si integra. Il RMT non deve essere considerato in alcun caso come un'attività supplementare e a coloro che invocano un programma già molto pesante si può rispondere con la battuta "si tratta di perdere del tempo per guadagnarne".

Dobbiamo allora sperare che i problemi del RMT siano le pietre miliari di un percorso didattico che può durare diversi mesi fino a un intero anno.

Perché non scegliere per un trimestre, tre o quattro problemi come punti di riferimento attorno ai quali si rinforzerebbero le conoscenze attraverso le attività necessarie di consolidamento, di calcolo, di ricerca, addirittura di risoluzione di altri problemi per valutare il possesso di saperi di base?

La risoluzione di problemi potrebbe diventare così un'attività ordinaria di un insegnamento della matematica "ragionato".

PRESENTAZIONE DEL NUMERO

Questo numero 12 de *La Gazzetta di Transalpino* è interamente dedicato ad articoli di approfondimento relativi ad analisi a posteriori di nostri problemi, elaborati da quattro dei sei gruppi di lavoro tematici dell'ARMT.
Tali analisi riguardano globalmente tutte le categorie.

Études / Approfondimenti

- Il **Gruppo Algebra** presenta un articolo relativo all'analisi a posteriori del problema **I Draghi** ed evidenzia come tale analisi metta bene in evidenza le peculiarità del problema, ovvero la possibilità di risolverlo, e in più modi, rimanendo in ambito aritmetico, ma anche la sua natura algebrica che può aprire la strada alle prime forme di scritture spontanee che prefigurano l'idea di equazione. Si tratta, in effetti, di un buon problema della famiglia delle "*Dall'Aritmetica all'Algebra*", nella classificazione della Banca di Problemi.

- L'articolo del **Gruppo Funzioni** presenta un'analisi degli elaborati del problema **Jogging al Parco** proposto dal gruppo stesso e mostrano la varietà delle strategie osservate, il ruolo delle rappresentazioni grafiche e alcuni errori ricorrenti. Il problema mette in luce, in maniera molto puntuale e dettagliata, come gli allievi possano passare da una visione di natura aritmetica o pre-algebrica, unita a delle rappresentazioni spontanee, alla visione più colta in cui gli strumenti matematici a disposizione sono potenziati e in cui l'idea di funzione come relazione fra grandezze variabili si trasforma in un efficace strumento di risoluzione di problemi.

- L'articolo **Da sette poligoni a… sette poligoni** del **Gruppo Geometria piana** riguarda in particolare le analisi a posteriori di due problemi aventi come titoli rispettivi **I sette poligoni** e **Il Tangram del falegname (I e II)**, ma anche il percorso che ha portato il gruppo a elaborare tali problemi. L'analisi a posteriori ha permesso di evidenziare molteplici aspetti fra i quali la difficoltà di "mettersi davvero nella testa degli allievi" e il tratto comune dei due problemi sul quale sarebbe importante lavorare, rappresentato dalla tendenza a ricorrere acriticamente a misure con il righello, portatrici di difficoltà nel calcolo di numeri con la virgola (e loro approssimazioni), a scapito di un conteggio di quadretti su una quadrettatura, o di un ricorso a deduzioni o all'applicazione, al di là del discreto, di conoscenze geometriche.

- L'articolo del **Gruppo Numerazione** si basa su alcune riflessioni scaturite dall'analisi a posteriori del problema **Torri di cubetti** nelle sue versioni I e II. Si tratta di un problema che ha preso avvio nel *gruppo Numerazione* nelle giornate di studio in occasione dell'incontro di Alghero 2019 ed è incentrato sulla scoperta di regolarità numeriche che facilitano eventuali conteggi. il contesto di supporto del problema è la costruzione di torri di cubetti che si sviluppano in un certo modo e che comportano la scoperta di una ben precisa relazione fra numero di piani della torre, numeri di cubetti sul piano stesso e numero totale di cubetti utilizzati per la costruzione di tutta la torre.

PRÉSENTATION DU NUMÉRO

Ce numéro 12 de *La Gazette de Transalpie* est consacré, en particulier, à des études relatives à l'analyse a posteriori de nos problèmes, élaborées par quatre des six groupes de travail thématiques de l'ARMT.
Ces analyses couvrent globalement toutes les catégories.

Études / Approfondimenti

- Le **Groupe Algèbre** présente un article sur l'analyse a posteriori du problème ***Les Dragons*** met bien en évidence une des particularités du problème, c'est-à-dire la possibilité de le résoudre - de plusieurs manières - en se plaçant dans le domaine de l'arithmétique, mais aussi la possibilité de l'abordes en profitant de sa nature algébrique qui peut ouvrir la voie aux premières formes d'écriture spontanée qui préfigurent l'idée d'équation. C'est, en fait, un « bon problème » de la famille *De l'arithmétique à l'algèbre ,* selon la classification de la Banque de problèmes. L'article est en italien avec le résumé et des copies d'élèves en français.

- L'article du **Groupe Fonctions** présente une analyse de copies du problème ***Jogging au parc*** proposé par le groupe lui-même et montre la variété des stratégies observées, le rôle des représentations graphiques et quelques erreurs récurrentes. Le problème met en évidence, de manière très ponctuelle et détaillée, comment les élèves peuvent passer d'une vision arithmétique ou pré-algébrique, à des représentations spontanées, puis à une vision plus instruite dans laquelle les outils mathématiques disponibles sont renforcés et dans laquelle l'idée de fonction comme une relation entre des quantités variables est transformée en un outil efficace de résolution de problèmes. L'article est bilingue.

- Le titre **Des sept polygones à … sept polygones** de l'article du **Groupe Géométrie plane** se réfère aux analyses de deux problèmes aux titres respectifs ***Les sept polygones*** *et* ***Le Tangram du menuisier*** (***I*** et ***II)*** qui, bien qu'ils traitent tous deux de sept polygones, ne font pas exactement appel au même contenu mathématique. Cependant, l'analyse a posteriori de ces deux problèmes permet de souligner un trait commun sur lequel travailler en classe ou avec d'autres problèmes de RMT : la tendance à recourir sans discernement aux mesures à la règle et aux écritures avec virgules, porteuses de difficultés pour exprimer les nombres (et leurs approximations), au détriment d'un comptage de carrés sur un quadrillage, d'un recours à des déductions ou encore à l'application de connaissances géométriques, au-delà du discret. L'article est partiellement bilingue.

- L'article du **Groupe Numération** se fonde sur quelques réflexions issues de l'analyse a posteriori du problème ***Tours de cubes*** dans ses versions ***I*** e ***II***. C'est une problématique qui été abordée par le *Groupe Numération* lors des travaux de la rencontre d'Alghero 2019 et est centrée sur la découverte de régularités numériques qui facilitent tout comptage. le contexte du problème est la construction de tours de cubes qui se développent d'une certaine façon et qui impliquent la découverte d'une relation précise entre le nombre d'étages de la tour, le nombre de cubes par étage et le nombre total de cubes utilisés pour la construction de toute la tour. L'article est en italien avec le résumé et des copies d'élèves en français.

ÉTUDES / APPROFONDIMENTI

I DRAGHI

Maria Felicia Andriani, Alessandro Carciola, Alessandra Desogus, Lucia Doretti, Antonella Giacomin, Silvia Loi, Daniela Medici, Maria Gabriella Rinaldi, Lucia Salomone

per il Gruppo Algebra[1]

LES DRAGONS (résumé)

Les observations suivantes découlent de l'analyse a posteriori de 926 copies des sections de Belluno (52 copies), Cagliari (69 copies), Pouilles (197 copies) et Sienne (608 a copies), réparties ainsi par catégories : 217 copies de cat 5, 363 copies de cat.6, 346 copies de cat.7. Le petit nombre de copies blanches, seulement 11, et les explications détaillées des calculs effectués nous font supposer évidemment que les élèves se sont impliqués avec plaisir dans la résolution du problème et l'argumentation qui en découle.

Les procédures décrites dans l'analyse a priori du problème sont de deux types : 1. procédure par essais à partir de la recherche des nombres de têtes du dragon vert et jaune dont la somme est connue ; 2. procédure par déduction, éventuellement à l'aide d'un schéma, qui consiste soit à soustraire 4 à 28 pour obtenir deux nombres égaux dont la somme est 24 (soit 12 et 12), puis à additionner 4 à l'un d'eux, pour trouver 16 (têtes du dragon jaune) et 12 (têtes du dragon vert) et, enfin, tirer de 12 - 5 = 7 le nombre de têtes du dragon rouge ; soit à déduire de la deuxième condition que le total 28 comprend le double du nombre de têtes du dragon vert plus les 4 supplémentaires du dragon jaune, puis chercher, par essais ou par raisonnement arithmétique ou à l'aide d'une représentation graphique, le nombre tel que son double augmenté de 4 donne 28 et comprendre que c'est le nombre de têtes du dragon vert, puis procéder au calcul des têtes des autres dragons.

La procédure par essais a été largement utilisée dans toutes les catégories, avec une plus grande fréquence dans la catégorie 5, même si les tentatives effectuées ne sont pas toujours reportées. Cependant, on trouve de nombreuses copies dans lesquelles les tentatives sont présentées dans des tableaux bien organisés. L'examen des copies a également permis de déceler une variété de tentatives de procédures, a priori inattendues, dont chacune résulte d'une manière différente de « lire » la situation problématique (voir *figures 1, 2* et *3*)

La procédure par déductions basée sur les opérations « enlever 4 à 28 puis diviser par 2 » est appliquée avec une fréquence croissante, de la catégorie 5 à la catégorie 7, si bien que dans cette dernière catégorie on la trouve dans plus de la moitié des cas.

Dans les copies examinées, les procédures suivantes non prévues dans l'analyse a priori ont également été relevées :

Voir que si R, V, G indiquent les numéros des têtes des trois dragons, on a aussi V + G = 28 = R + 5 + R + 5 + 4 et que donc R = (28-14) : 2 = 7, puis trouver V et G - Cette procédure apparaît dans certaines copies de la section de Sienne des trois catégories (3 copies en cat.5, 12 copies en cat.6 et 3 copies en cat.7) toujours accompagnées, à une exception près, par une représentation graphique appropriée qui la justifie.

Diviser la somme 28 par 2 et ajouter ou soustraire 2 au résultat obtenu pour trouver le nombre de têtes des dragon jaune et vert - Cette procédure est présente dans de nombreuses copies des trois catégories, avec un pourcentage plus élevé en catégorie 5.

Poser et résoudre une équation - Compte tenu des catégories auxquelles s'adresse le problème, dans l'analyse a priori la référence à une procédure algébrique n'apparaît que dans la description de la tâche mathématique et non parmi les procédures prévues dans l'analyse de la tâche. En fait, l'analyse a posteriori a montré qu'une procédure de type algébrique ne se retrouve que dans deux copies de catégorie 6 et dans quatre de catégorie 7, parmi lesquelles il est évident que les équations « outil » sont connues des élèves (mentionné explicitement). La *figure 13* montre une de ces copies dans laquelle l'inconnue est nommée explicitement, les relations correctement traduites sous forme symbolique, l'équation bien posée et résolue à l'aide des principes d'équivalence.

Les erreurs qui ressortent de l'analyse des copies sont essentiellement de deux types : incompréhension du problème (opérations effectuées « au hasard » et, souvent, absence de contrôle des résultats obtenus qui conduisent à accepter des résultats clairement absurdes comme l'usage de nombres décimaux pour quantifier les têtes des dragons) ; oubli ou mauvaise interprétation d'une ou plusieurs conditions.

L'analyse a posteriori met donc en évidence les particularités du problème, c'est-à-dire la possibilité de le résoudre, de plusieurs manières, en restant dans le domaine de l'arithmétique, mais aussi sa nature algébrique qui peut ouvrir la voie aux premières formes d'écritures spontanées qui préfigurent l'idée d'équation. C'est donc, à notre avis, un bon problème de la famille « De l'Arithmétique à l'Algèbre ». Compte tenu également de l'intérêt suscité chez les

[1] Il Gruppo Algebra comprende anche i seguenti membri: Antonella Assirelli, Laura Bortolan, Antonella Castellini, Rosanna Di Liddo, Lucia Frati, Paola Hippoliti, Elena Marangoni, Chiara Marchionni, Paola Salvadego, Apollonia Santoniccolo, Valeria Zagaria.

élèves, des taux de réussite élevés constatés, de la diversité des procédures de résolution mises en œuvre et de la portée numérique impliquée, celle des nombres naturels. Nous pensons que le problème peut également être utilisé en catégorie 4. Cependant, nous avons également noté que, là où il y a eu des difficultés, celles-ci sont principalement dues à une mauvaise interprétation, et donc à une mauvaise gestion, d'une ou plusieurs des informations exprimées en termes relationnels, présentes dans le texte.

Nous pensons donc qu'une première indication pour le travail en classe, en particulier dans les catégories inférieures, pourrait être de consacrer de l'espace à la phase d'appropriation de la tâche, en favorisant la discussion et la comparaison entre élèves sur la lecture et la compréhension du texte. On peut alors s'attarder sur les relations présentes dans le texte, en invitant les élèves à les exprimer de différentes manières aussi bien en langage naturel qu'en utilisant d'autres registres représentatifs, par exemple. graphiques ou symboliques, et passer de l'un à l'autre, en discutant et en comparant leur justesse. A cet égard, les écrits examinés montrent une intéressante variété d'écrits qui témoignent, dans plusieurs cas, de la difficulté des élèves à traduire des données relationnelles, passant du langage naturel au langage symbolique et formel.

La situation décrite dans le problème peut alors s'exprimer au moyen d'écritures génériques qui résument les relations en jeu et préparent le terrain au concept d'équation. Une telle représentation peut émaner directement des élèves ou, ultérieurement, dans la phase de mise en commun et de discussion, avec les relances appropriées de l'enseignant.

A notre avis, le problème pourrait être utilisé en cat.8 (ou, si nécessaire, aussi en cat.9) comme première vérification ou dans un contexte d'initiation au calcul algébrique pour une utilisation judicieuse des lettres et des symboles.

Sunto

Le osservazioni che seguono derivano dall'analisi a posteriori di 926 elaborati delle Sezioni di Belluno (52 elaborati), Cagliari (69 elaborati), Puglia (197 elaborati) e Siena (608 elaborati), così divisi per categoria: 217 elaborati di cat.5, 363 elaborati di cat.6, 346 elaborati di cat.7. Il numero esiguo degli elaborati in bianco, solo 11, e le spiegazioni dettagliate dei calcoli effettuati fanno senz'altro supporre che gli allievi si siano lasciati piacevolmente coinvolgere dalla risoluzione del problema e dalla conseguente argomentazione.

Le procedure descritte nella scheda di Analisi a priori del problema sono di due tipi: 1. procedura per tentativi a partire dalla ricerca dei numeri di teste del drago verde e del drago giallo di cui è nota la somma; 2. procedura per deduzione, eventualmente con l'aiuto di uno schema, che consiste nel sottrarre 4 da 28 per ottenere due numeri uguali la cui somma è 24 (cioè 12 e 12), poi addizionare 4 ad uno di essi, trovare 16 (teste del drago giallo) e 12 (teste del drago verde) e, infine, da 12-5 =7 ricavare le teste del drago rosso; <u>oppure</u>, dedurre dalla seconda condizione che il totale 28 comprende due volte il numero di teste del drago verde più le ulteriori 4 del drago giallo, e quindi cercare, per tentativi o con ragionamento aritmetico o con l'aiuto di una rappresentazione grafica, quel numero tale che il suo doppio aumentato di 4 dia 28 e capire che questo è il numero di teste del drago verde, poi procedere con il calcolo delle teste degli altri draghi.

<u>La procedura per tentativi</u> è stata largamente utilizzata in tutte le categorie, con maggiore frequenza in cat.5, anche se non sempre sono riportati i tentativi fatti. Non mancano però elaborati in cui i tentativi vengono mostrati in tabelle ben organizzate. L'esame degli elaborati ha permesso anche di rilevare una varietà di procedure per tentativi, inaspettate a priori, ciascuna delle quali conseguenza di un diverso modo di "leggere" la situazione problematica (cfr. Figg.1, 2 e 3).

<u>La procedura per deduzione</u> basata su "*togliere 4 a 28 e poi dividere per 2*" si trova applicata con frequenza sempre maggiore passando dalla cat.5 alla cat.7, tanto che in quest'ultima categoria è presente in più della metà dei casi.

Negli elaborati esaminati sono state riscontrate anche le seguenti <u>procedure non previste nell'Analisi a priori</u>:

Comprendere che se R, V, G indicano i numeri delle teste dei tre draghi, si ha anche V+G = 28 = R+5+R+5+4 e che quindi R = (28-14):2=7 e poi trovare V e G. Questa procedura compare in alcuni elaborati della sezione di Siena di tutte e tre le categorie (3 elaborati in cat.5, 12 elaborati in cat.6 e 3 elaborati in cat.7) sempre accompagnata, ad eccezione che in un elaborato, da un'opportuna rappresentazione grafica che la giustifica.

Dividere la somma 28 per 2 e aggiungere e togliere 2 al risultato ottenuto per trovare il numero di teste del drago giallo e di quello verde - Questa procedura è presente in molti elaborati di tutte e tre le categorie, con una percentuale maggiore in cat.5.

Impostare e risolvere un'equazione - Tenuto conto delle categorie alle quali il problema è rivolto, nell'Analisi a priori il riferimento ad una procedura algebrica compare solo nella descrizione del *Compito matematico* e non fra le procedure previste nell'*Analisi del compito*. In effetti, l'analisi a posteriori ha mostrato che una procedura di tipo algebrico si trova solo in due elaborati di cat.6 e in quattro elaborati di cat.7, in due dei quali è evidente che lo "strumento" equazioni è noto agli allievi (in uno degli elaborati si scrive esplicitamente che è stato utilizzato). La Fig. 13 mostra uno di questi elaborati in cui compaiono la nominalizzazione dell'incognita, le relazioni tradotte correttamente in forma simbolica, l'equazione ben impostata e risolta utilizzando i principi di equivalenza.

Gli errori che emergono dall'analisi degli elaborati sono essenzialmente di due tipi: incomprensione del problema (operazioni eseguite "a caso" e, spesso, mancanza di controllo dei risultati ottenuti che fanno accettare risultati palesemente assurdi come numeri decimali per quantificare le teste possedute dai draghi); dimenticanza o interpretazione errata di una o più condizioni.

L'analisi a posteriori mette quindi in evidenza le peculiarità del problema, ovvero la possibilità di risolverlo, e in più modi, rimanendo in ambito aritmetico, ma anche la sua natura algebrica che può aprire la strada alle prime forme di scritture spontanee che prefigurano l'idea di equazione. Si tratta quindi, a nostro parere, di un buon problema della famiglia "*Dall'Aritmetica all'Algebra*". Tenuto inoltre conto dell'interesse suscitato negli allievi, delle buone percentuali di riuscita riscontrate, della diversità di procedure risolutive messe in atto e dell'ambito numerico coinvolto, quello dei numeri naturali, riteniamo che il problema possa essere utilizzato anche in cat.4. Abbiamo però anche rilevato che, laddove ci sono state difficoltà, queste sono dovute principalmente ad una non corretta interpretazione, e quindi gestione, di una o più delle informazioni espresse in termini relazionali, presenti nel testo.

Riteniamo pertanto che una prima indicazione per il lavoro in classe, in particolare nelle categorie più basse, possa essere quella di dedicare spazio alla fase di *appropriazione del compito*, sollecitando la discussione ed il confronto tra gli allievi sulla lettura e comprensione del testo. Ci si potrà poi soffermare sulle relazioni presenti nel testo, invitando gli allievi ad esprimerle in modi diversi sia nel linguaggio naturale, sia utilizzando altri registri rappresentativi, per es. di tipo grafico o simbolico, e passare dall'uno all'altro, discutendo e confrontandosi sulla loro correttezza. A questo proposito, gli elaborati esaminati riportano un'interessante varietà di scritture che testimoniano, in più casi, la difficoltà degli allievi nel tradurre i dati relazionali passando dal linguaggio naturale a quello simbolico e formale.

La situazione descritta nel problema può prestarsi poi ad essere rappresentata ricorrendo a scritture generali che sintetizzano le relazioni in gioco e che preparano il terreno all'idea di equazione. Una tale rappresentazione può nascere direttamente dagli allievi o, successivamente, nella fase di confronto e discussione, con gli opportuni rilanci dell'insegnante.

A nostro avviso, il problema potrebbe essere utilizzato in cat.8 (o, se necessario, anche in cat.9) come verifica iniziale o in un contesto di avvio al calcolo algebrico per un utilizzo sensato di lettere e simboli.

1. Il testo del problema e la sua Analisi a priori

I DRAGHI (Cat. 5, 6,7) (25.II.9)

Su un'isola vivono tre draghi: uno rosso, uno giallo e uno verde. Ogni drago ha più teste.

Il drago rosso ha cinque teste meno del drago verde.

Il drago giallo ha quattro teste in più di quello verde e questi due insieme hanno 28 teste.

Quante sono le teste di ciascun drago?

Spiegate come avete fatto a trovare la vostra riposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Risolvere un sistema "elementare" di tre equazioni lineari in tre incognite con numeri naturali in un contesto immaginario di teste di draghi.

Analisi del compito

- Capire che i numeri delle teste di ogni drago non sono noti ma che, dalla prima condizione, si conosce la differenza, 5, tra i numeri delle teste del drago rosso e di quello verde e quindi questi numeri possono essere: 1 e 6, 2 e 7, 3 e 8, 7 e 12, …; dalla seconda condizione non solo è nota la differenza, 4, tra il numero delle teste del drago giallo e di quello verde, ma anche la loro somma, 28.
- Cominciare a cercare il numero di teste dei draghi verde e giallo.
- Procedere per tentativi, partendo per esempio da 6 teste per il drago verde, e quindi 10 per il drago giallo, verificare che il totale (6 + 10) = 16 è diverso da 28 e proseguire con i tentativi, eventualmente organizzandoli (per esempio con una tabella), fino a trovare 12 teste per il drago verde e 16 per il giallo (12 + 16) = 28. Rendersi conto che i tentativi successivi "s'allontanano" da 28 e dunque che la soluzione è unica.

Oppure,

- procedere per deduzione, aiutandosi eventualmente con uno schema, sottraendo 4 da 28 per ottenere due numeri uguali la cui somma è 24, cioè 12 e 12, poi addizionare 4 ad uno di essi e trovare 16 e 12.

- Utilizzare poi la prima condizione che dice che il drago rosso ha 5 teste in meno del drago verde. Sapendo che il numero di teste del drago verde è 12, calcolare il numero di teste del drago rosso: 12 – 5 = 7.
- Concludere che il drago rosso ha 7 teste, il drago verde ha 12 teste e il drago giallo ne ha 16.

Oppure,

- dedurre dalla seconda condizione che il totale 28 comprende due volte il numero di teste del drago verde più le quattro che il drago giallo ha in più. Cercare quindi, per tentativi o con ragionamento aritmetico, o con l'aiuto di una rappresentazione grafica, il numero tale che il suo doppio aumentato di 4 dia 28 e capire che questo è il numero di teste del drago verde. Trovare quindi il numero di teste del drago rosso sfruttando la prima condizione: 12 – 5 = 7.

2. Risultati

Punti attribuiti a 3411 classi di 20 sezioni

punti	Occ 0 pti.	Occ 1 pti.	Occ 2 pti.	Occ 3 pti.	Occ 4 pti.	n. classi	m
Cat. 5	101 (11%)	78 (8%)	125 (13%)	242 (26%)	382 (41%)	928	2,8
Cat. 6	209 (15%)	133 (10%)	158 (11%)	302 (22%)	580 (42%)	1382	2,7
Cat. 7	99 (9%)	57 (5%)	72 (7%)	225 (20%)	648 (59%)	1101	3,1
tot	**409** (12%)	**268** (8%)	**355** (10%)	**769** (23%)	**1610** (47%)	**3411**	**2,9**

secondo i seguenti criteri di attribuzione dei punteggi:

4 Risposta corretta (7 per il drago rosso e 12 per il drago verde e 16 per il drago giallo) con una descrizione chiara della procedura (indicazione dei tentativi e della loro organizzazione, presentazione completa dei calcoli) che mostri che la soluzione trovata è unica

3 Risposta corretta con spiegazioni incomplete o poco chiare (solamente qualche tentativo) o solamente una verifica

2 Risposta incompleta (16 per il giallo e 12 per il verde, dimenticato il rosso) con spiegazione chiara

oppure risposta corretta per il numero delle teste del drago verde (12) e del drago giallo (16), ma errato il numero delle teste del drago rosso (17 = 12 + 5)

oppure risposta corretta senza spiegazione né verifica

oppure risposta che dimostra comprensione delle informazioni con spiegazioni adeguate per trovare la soluzione, ma errori di calcolo o imprecisioni nella risoluzione aritmetica

1 Inizio di ricerca corretta, per esempio qualche tentativo che mostri che le due informazioni sono state comprese, ma senza successo

0 Incomprensione del problema

La tabella dei risultati mostra la buona riuscita del problema in tutti i livelli, specialmente in cat.7 dove la media dei punteggi è stata del 3,1. In quest'ultima categoria, i buoni risultati erano prevedibili perché il problema, in questa forma, era stato assegnato inizialmente alle categorie 5 e 6 e, solo in fase di sistemazione definitiva della prova, era stato esteso a cat.7.
Le osservazioni che seguono si basano sull'analisi a posteriori di 926 elaborati delle Sezioni di Belluno (52 elaborati), Cagliari (69 elaborati), Puglia (197 elaborati) e Siena (608 elaborati), così divisi per categoria: 217 elaborati di cat.5, 363 elaborati di cat 6, 346 elaborati di cat.7.
Il testo in generale non ha creato difficoltà a livello di comprensione e quasi tutti hanno provato a risolvere il problema arrivando a dare una risposta (giusta o errata). Solo 11 elaborati sono stati consegnati in bianco!
Il numero esiguo degli elaborati in bianco e le spiegazioni spesso lunghe dei calcoli effettuati fanno senz'altro supporre che gli allievi, più di altre volte, si siano lasciati piacevolmente coinvolgere dalla risoluzione del problema e dalla conseguente argomentazione.

3. Procedure ed errori emersi dall'analisi a posteriori

Negli elaborati esaminati si ritrovano tutte le procedure indicate nell'Analisi a priori e anche altre lì non previste.

3.1 Procedure previste nell'Analisi a priori

3.1.1 Procedura per tentativi

Questo tipo di procedura è la prima ad essere descritta nell'Analisi a priori ed è stata largamente utilizzata in tutte le categorie, anche se con maggiore frequenza in cat. 5. Non sempre però sono stati riportati i tentativi fatti e spesso ci si limita a dire *"abbiamo proceduto per tentativi"*. In alcuni casi, invece, i tentativi vengono mostrati in tabelle ben organizzate o descritti a parole. L'esame degli elaborati ha permesso di rilevare anche una varietà di procedure per tentativi, inaspettate a priori, ciascuna delle quali conseguenza di un diverso modo di "leggere" la situazione problematica e che qui illustreremo riportando alcuni esempi.
In circa la metà degli elaborati in cui il problema viene affrontato per tentativi ci si concentra sulla seconda condizione, ***si cercano <u>due numeri</u> la cui somma sia 28 e si verifica che la differenza sia 4 (o due numeri che abbiano differenza 4 e si verifica che la somma sia 28)*** come nell'esempio in Fig.1.

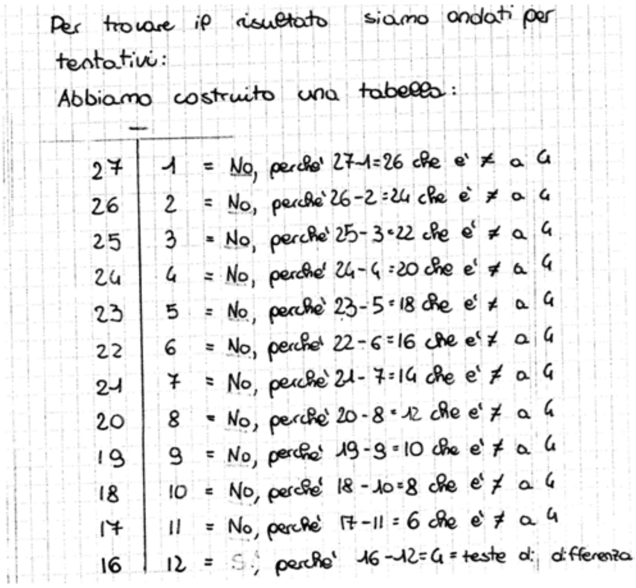


Fig. 1 (cat. 6)

"Per trovare il risultato siamo andati per tentativi.
Abbiamo costruito una tabella:"

[Segue la tabella che poi spiegano così:]
"in questa tabella la riga rossa [quella verticale] *rappresenta il simbolo "–" (meno).*

Quindi abbiamo scritto così:

27-1=26: però 26 non è il numero di differenza chiesto nel testo del problema, quindi siamo andati avanti con questo sistema finché non abbiamo trovato il giusto rapporto, cioè 16-12=4 e 12+16=28=al numero di teste dei due draghi."

Nell'elaborato in Fig. 2 si parte invece dalla considerazione che il drago giallo ha 4 teste in più di quello verde:

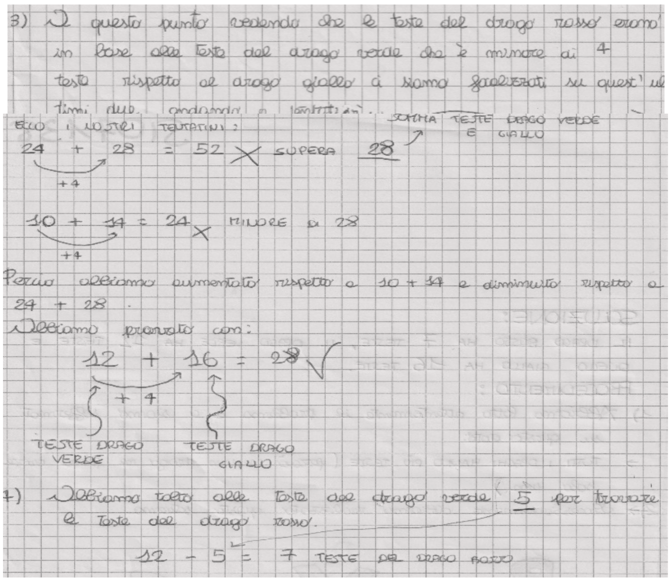


Fig. 2 (cat.7)
"*A questo punto vedendo che le teste del drago rosso erano in base alle teste del drago verde che è minore di 4 teste rispetto al drago giallo, ci siamo focalizzati su quest'ultimi due andando a tentativi"*

Quindi proseguono mostrando i tentativi fatti: prima provano con 24, aggiungono 4 ottenendo 28 ma 24+28=52 che non va bene perché "*supera 28"*; provano quindi con 10, 10+4=14 ma 10+14=24 , *"minore di 28"* e scrivono *"perciò abbiamo aumentato rispetto a 10 e 14 e diminuito rispetto a 24 e 28"* Provano quindi con 12 e 16 e verificano che la somma è 28.

In alcuni elaborati si procede anche come previsto nell'analisi a priori: ***iniziare ipotizzando il numero di teste di uno dei draghi,*** e quindi, sfruttando le relazioni date, trovare il numero di teste degli altri due e di volta in volta controllare se la somma delle teste del drago giallo e di quello verde è 28.
Nell'elaborato di Fig. 3 si parte dal drago rosso: si ipotizza che abbia una testa e, aggiungendo 5, si trova 6 teste per il drago verde e, aggiungendo ancora a questo risultato 4, si ottiene 10 teste per il drago giallo. La somma però di questi ultimi due numeri non è 28, ma 16. Si prosegue quindi provando con 3, 4, 5 poi si salta a 9 ma la somma in questo caso è 32, troppo alta; si torna quindi indietro e si prova con 8, che non va ancora bene, fino a trovare che con 7 si ha il risultato giusto: 12 e 16 la cui somma è 28.

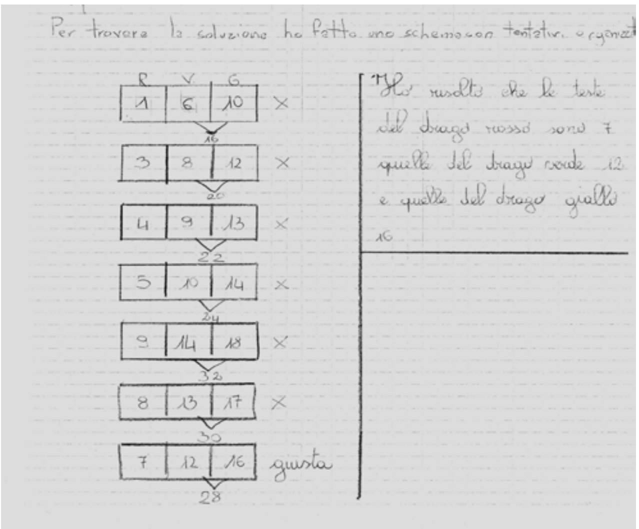


Fig. 3 (cat.5)

In un altro elaborato, sempre di cat.5, si procede in modo analogo al precedente, anche se non si riportano tutti i tentativi, ma si trova scritto: *"Dato che sapevamo per certo che il drago verde aveva 6 teste e il drago giallo ne aveva 10, abbiamo aggiunto teste al drago rosso facendo diventare da 16 teste a 28 trovando così la soluzione*". Gli allievi, cioè, hanno compreso che, poiché ciascun drago ha almeno una testa, quello verde, avendo 5 teste in più di quello rosso, ne ha almeno 6 e quello giallo, avendone 4 in più di quello verde, ne ha almeno 10. È da questa osservazione che poi iniziano con i loro tentativi.

Si trovano anche elaborati in cui si parte dal numero di teste del drago verde o di quello giallo. Così, per esempio, in un elaborato si trova scritto: *"Quindi abbiamo fatto uno schema* [che non riportano] *e siamo partiti dal giallo. All'inizio con il 9 facendo 9-4=5 e poi 9+5=14 e doveva fare però 28, quindi abbiamo provato con il 15 meno 4=11   11+15=26 quindi non tornava di 2, poi abbiamo provato il 17, meno 4=13, 17+13=30 non tornava poi alla fine abbiamo provato con il 16 meno 4=12   16+12=28 e tornava"* Anche in questo caso, quindi, si procede con i tentativi non in modo sistematico, ma in modo mirato, con aggiustamenti successivi.

In alcuni elaborati, essenzialmente in categoria 5, si ***divide 28 per 2 e, a tentativi, aumentando e diminuendo di uguali quantità si arriva a trovare 12 e 16***. In particolare, in un elaborato questa procedura è ben spiegata così: *"Prima di tutto abbiamo diviso il 28 per due ovvero 14 e 14. Leggendo il problema il drago giallo aveva 4 teste in più di quello verde e anche se si aggiungeva 4 teste al drago giallo il risultato non sarebbe stato 28, così siamo andati per tentativi. Abbiamo tolto una testa al drago verde e aggiunto una testa al drago giallo. Ma il drago verde aveva 2 teste in meno di quello giallo e non 4. Così abbiamo sottratto da 13   1 e ci tornava 12. Abbiamo aggiunto a 15 1 e il risultato era 16. A quel punto abbiamo notato che la differenza tra 12 e 16 era 4. Così abbiamo sommato 12 e 16 trovando 28."*

In un solo elaborato di cat.5 ***si cerca un numero che addizionato a sé stesso più 4 dia somma 28*** (Fig. 4), terza procedura prevista nell'analisi a priori.

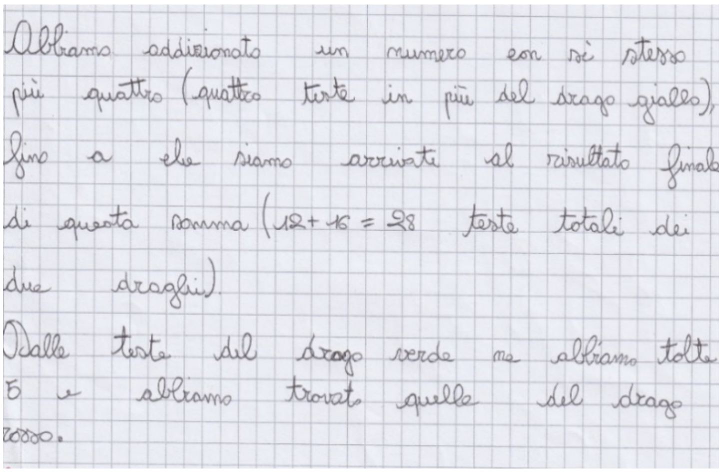

Abbiamo addizionato un numero con sì stesso più quattro (quattro teste in più del drago giallo), fino a che siamo arrivati al risultato finale di questa somma (12+16 = 28 teste totali dei due draghi)
Dalle teste del drago verde ne abbiamo tolte 5 e abbiamo trovato quelle del drago rosso.

Fig. 4 (cat.5)

"Abbiamo addizionato un numero con sé stesso più quattro (quattro teste in più del drago giallo), fino a che siamo arrivati al risultato finale di questa somma (12+16=28 teste totali dei due draghi). Dalle teste del drago verde ne abbiamo tolte 5 e abbiamo trovato quelle del drago rosso."

3.1.2 Togliere 4 da 28 e dividere per 2

È la seconda procedura indicata nell'Analisi a priori ed il numero degli elaborati in cui essa compare cresce passando dalla cat.5 alla cat. 6 e poi alla cat.7, in cui si ritrova in più della metà degli elaborati. Più precisamente facendo riferimento agli elaborati della Sezione di Siena, è presente nel 27% degli elaborati in cat. 5, nel 37% degli elaborati di cat. 6 e nel 54% degli elaborati di cat. 7.

Spesso gli allievi si limitano a riportare e descrivere le operazioni fatte, ma si trovano anche buone spiegazioni del procedimento seguito come, ad esempio, la seguente: "*Togliendo al 28, che è la somma delle teste del drago giallo e quello verde, il 4 che è il numero delle teste in più che ha il drago giallo rispetto al drago verde si ottiene 24 che sarebbe la somma delle teste del drago giallo e quello verde se il drago giallo non avesse 4 teste in più. Se dividiamo il 24 per 2 si ottiene 12 che è l numero di teste del drago verde che poi se aggiungo 4 ottengo 16 che è il numero delle teste del drago giallo. …*" [cat.5]

Nell'elaborato di Fig.5 (cat.6), gli allievi traducono correttamente le relazioni indicando con R, V e G il numero di teste di ciascuno dei tre draghi, ma poi non le gestiscono in questa forma. Introducono infatti un nuovo simbolo, *"o"* per rappresentare l'incognita V ed esprimono R e G in funzione di *o* (da notare la scelta del simbolo, che ricorda una testa). A partire da questa rappresentazione, deducono che 24 = 28-4 corrisponde a due "*o*", e arrivano correttamente alla soluzione. Di fatto gli allievi impostano e poi risolvono, inconsapevolmente, il sistema lineare in tre equazioni e tre incognite, che matematizza il problema e ne trovano la soluzione in modo ingenuo.

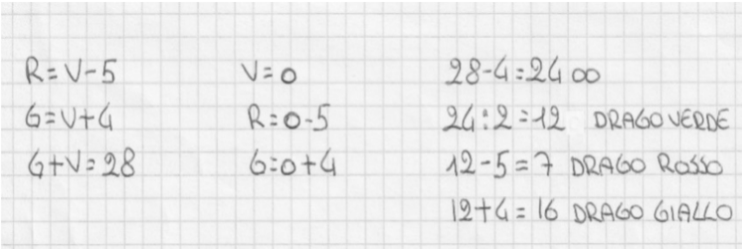


Fig. 5 (cat. 6)

In una trentina di elaborati si fa ricorso ad una rappresentazione grafica con segmenti ma spesso essa non appare utile alla risoluzione del problema in quanto o sembra fatta a posteriori (Fig.6) o è errata, anche se il problema è stato poi risolto correttamente (cfr. Fig. 7). Si ha così conferma, ancora una volta, che questo tipo di rappresentazione può risultare per gli allievi difficile da comprendere e da gestire[2].

Nell'elaborato di Fig.6 la rappresentazione grafica serve a rappresentare la risposta e non a determinarla. Infatti il disegno compare sotto la dicitura "Risposta" ed è costituito esattamente da 12 segmenti per il drago vede, da 16 per il drago giallo e da 7 per quello rosso. La spiegazione di come è stata trovata la soluzione si legge sotto la scritta *"SPIEGAZIONE RISPOSTA"* ed è: "*Noi abbiamo la somma del drago giallo e quello verde. Per trovare il numero delle teste del drago verde bisogna sottrarre 4 dalla somma e dividere per due. Addizionando i vari dati forniti dal problema abbiamo trovato il numero delle teste degli altri due draghi*"

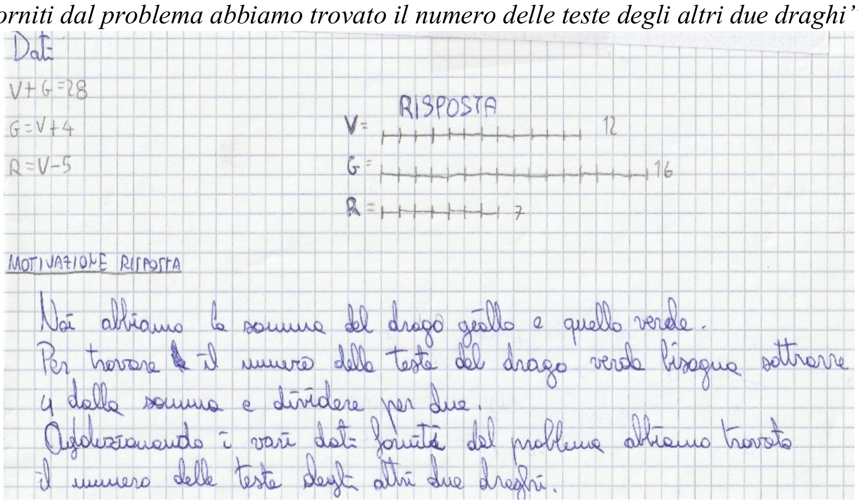


Fig. 6 (cat.7)

Nell'elaborato che segue, invece, la rappresentazione con i segmenti è proprio errata: un segmento uguale al lato del quadratino della quadrettatura del foglio per il drago rosso, 5 lati di quadratino per il drago verde (che ha cinque teste in più rispetto a quello rosso) e 9 per quello giallo (che ha 4 teste in più rispetto al drago verde).

---

[2] Cfr. in proposito l'articolo M. Felicia Andriani, Lucia Doretti, Lucia Salomone "*Riflessioni sullo sviluppo del pensiero algebrico negli allievi a partire dall'analisi a posteriori di un problema*", La Gazzetta di Transalpino n. 9, pp. 87-107.

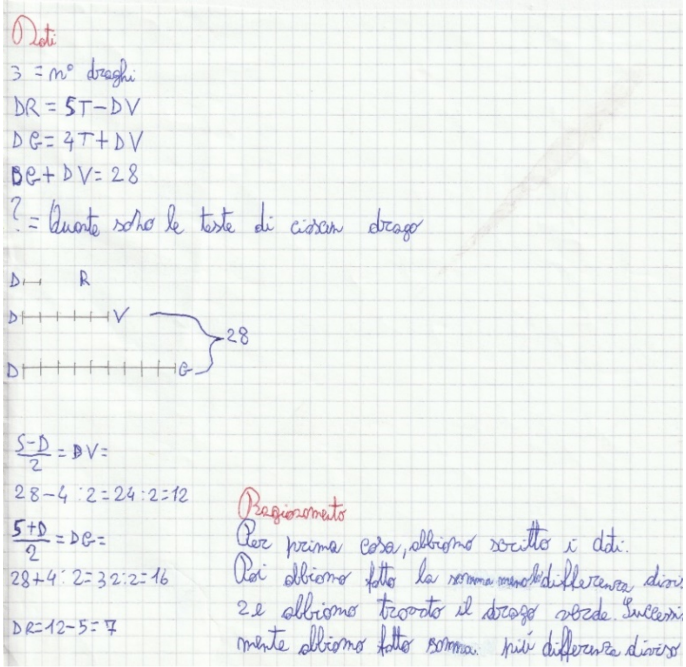


Fig. 7 (cat.7)

"Dati:
3=n° draghi
DR=5T-DV
DG=4T+DV
DG+DV=28
? = Quante sono le teste di ciascun drago segue grafico con segmenti e poi:]
(S-D)/2 = DV
[calcoli numerici]

Ragionamento
Per prima cosa abbiamo scritto i dati. Poi abbiamo fatto la somma meno la differenza diviso 2 e abbiamo trovato il drago verde. Successivamente abbiamo fatto somma più differenza diviso due e abbiamo trovato il drago giallo."

(S+D)/2=DG
[calcoli numerici]

Ciò che colpisce in questo elaborato è il modo di procedere abbastanza rigido che sembra dettato da un "contratto didattico" preciso e che traspare in parte anche dalla spiegazione fornita dagli allievi: prima si devono scrivere i dati, poi si deve fare il grafico con i segmenti, poi si calcola applicando delle formule note, ma non si sa fino a che punto comprese. Del resto l'uso delle formule *(S-D)/2* e *(S+D)/2* per determinare due numeri di cui si conosca la somma (S) e la differenza (D) compare anche nell'elaborato di Fig.6, e in altri ancora, e fa pensare ad un modo di procedere per applicazione "meccanica" di regole. Significativo a riguardo è anche un altro elaborato di cat.7 in cui si legge: "*Risolviamo il problema con i segmenti partendo dal 2° dato. Quindi capiamo che G+V=28 teste, G-V=4 teste. Per capire le teste del drago verde facciamo ((G+V) - (G-V)/2 = (28-4)/2=24:2=12. Per capire le teste di quello giallo facciamo V+(G-V) =12+4=16 teste. E per calcolare quelle di quello rosso facciamo V-(V-R) =12-5= 7 teste. Quindi il drago rosso ha 7 teste, il drago verde 12 teste e il giallo 16 teste"*. Qui è da notare che si parla di *"segmenti"* ma non si disegnano e si usa frequentemente il verbo "fare" ad indicare una prassi che deve essere seguita in contesti di quel tipo.

Laddove la rappresentazione grafica non è semplicemente la risposta ad un contratto didattico, ma è stata fatta propria, essa diventa utile supporto del ragionamento. Un esempio lo si trova nell'elaborato di Fig.8 dove questo strumento viene utilizzato efficacemente in modo originale: gli allievi disegnano "*un segmento di 28 pezzetti"*, ne colorano i primi 4 di giallo, dividono la parte rimanente (24 "pezzetti") per due e ne colorano 12 di giallo e i rimanenti 12 di verde.

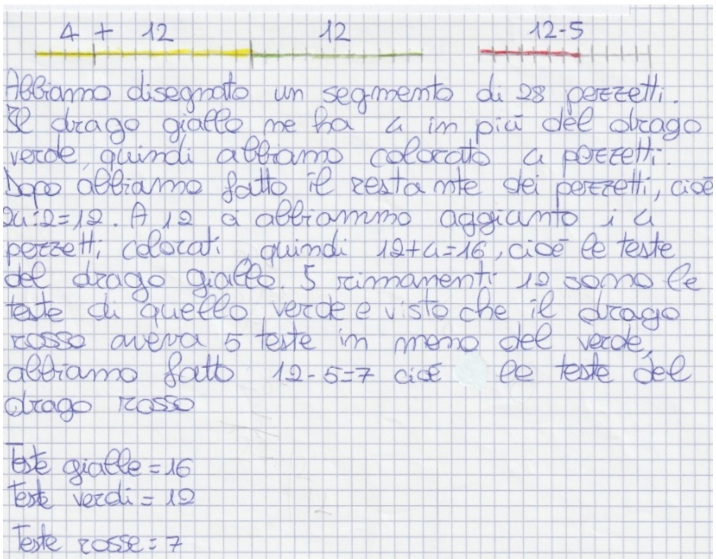


Fig.8 (cat.7)

"*Abbiamo disegnato un segmento di 28 pezzetti. Il drago giallo ne ha 4 in più del drago verde quindi abbiamo colorato* [nell'elaborato sono colorati di giallo] *4 pezzetti. Dopo abbiamo fatto il restante dei pezzetti, cioè 24:2=12. A 12 ci abbiamo aggiunto i 4 pezzetti colorati quindi 12+4=16, cioè le teste del drago giallo* [nell'elaborato si vedono 4+12 pezzetti colorati di giallo]. *I rimanenti 12 sono le teste di quello verde* [nell'elaborato sono colorati di verde] *e visto che il drago rosso aveva 5 teste in meno del verde, abbiamo fatto 12-5=7 cioè le teste del drago rosso"*

3.2 Procedure non previste

3.2.1 Comprendere che se R, V, G indicano i numeri delle teste dei tre draghi, V+G=28=R+5+R+5+4 e che quindi R = (28-14):2=7 e poi trovare V e G.

Questa procedura non era stata prevista nell'Analisi a priori. Si trova in elaborati della sezione di Siena di tutte e tre le categorie con un picco di frequenza in cat.6 (3 elaborati in cat.5, 12 elaborati in cat.6 e 3 elaborati in cat.7) e compare sempre indotta da una rappresentazione grafica con segmenti o, in un caso, da un altro tipo di rappresentazione. Solo in un elaborato di cat.7 (cfr. Fig.12), gli allievi danno la risposta corretta, ma nella spiegazione non riportano né fanno riferimento ad alcun tipo di rappresentazione grafica.

Riportiamo qui di seguito alcuni esempi significativi. In un elaborato di cat.5, sotto la scritta *"Spiegazione"* si trovano disegnati i segmenti che rappresentano correttamente i dati del problema (Fig. 9) e che sono colorati, il primo di rosso, il secondo di verde e il terzo di giallo.

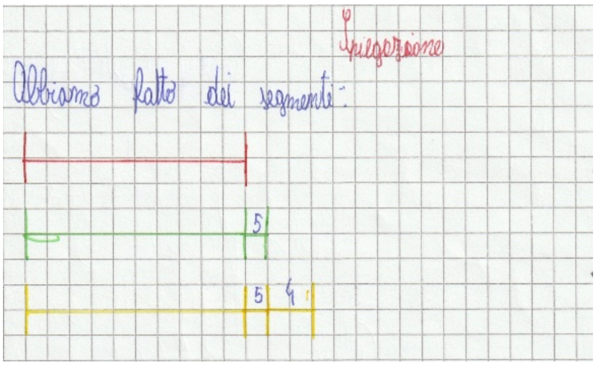


Fig.9 (cat.5)

Poi si legge: *"Poi abbiamo sottratto a 28 14 che sono le teste che hanno in più i 2 draghi giallo e verde.*
28-14=14 che sono il doppio delle teste del drago rosso. Successivamente abbiamo fatto 14:2=7 che sono le teste del drago rosso. Dopo abbiamo fatto 7+5=12 che sono le teste del drago verde. Infine abbiamo fatto 12+4=16 che sono le teste del drago giallo".

Nell'elaborato di Fig.10 si fa ricorso ad un altro tipo di rappresentazione grafica che traduce efficacemente la situazione problematica e permette di trovare in modo naturale la soluzione. Dopo aver trascritto con le lettere le relazioni fornite nel testo, si individua nel numero di teste del drago rosso, quella che gli allievi chiamano "unità di calcolo" e che rappresentano con un cerchietto colorato. A partire da questa scelta traducono poi graficamente il numero di teste degli altri due draghi. Seguono quindi i calcoli e la spiegazione.

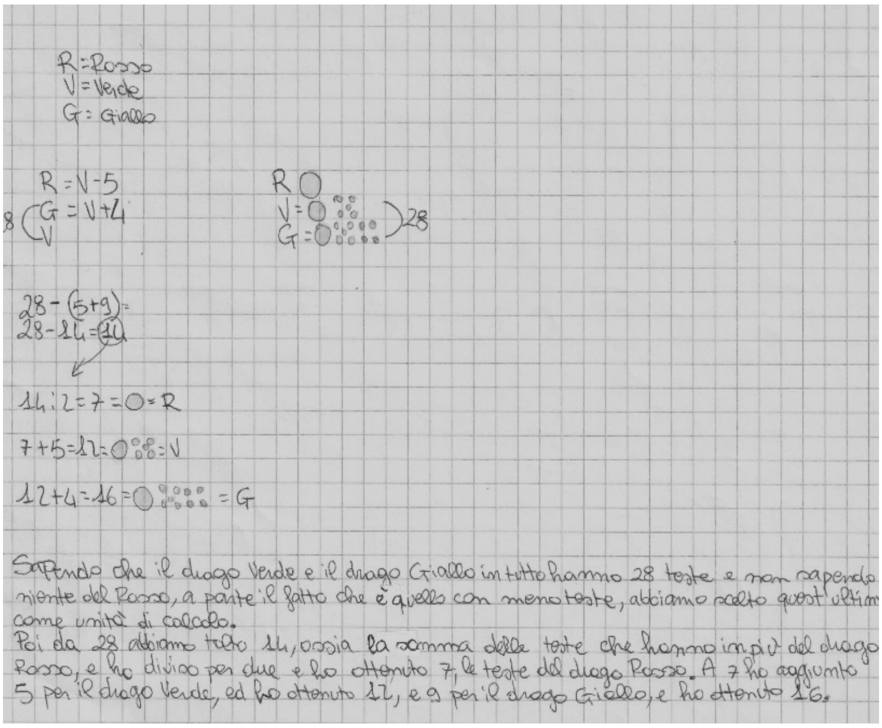


Fig.10 (cat.6)

"Sapendo che il drago Verde e il drago Giallo in tutto hanno 28 teste e non sapendo niente del Rosso, a parte il fatto che è quello con meno teste, abbiamo scelto quest'ultimo come unità di calcolo.

Poi da 28 abbiamo tolto 14, ossia, la somma delle teste che hanno in più del drago Rosso, e ho diviso per due e ho ottenuto 7, le teste del drago Rosso. A 7 ho aggiunto 5 per il drago Verde, ed ho ottenuto 12 e 9 per il drago Giallo, e ho ottenuto 16."

Particolarmente interessante è l'elaborato di cat.6 riportato in Fig.11. Gli allievi rappresentano le condizioni assegnate con "segmenti", poi le traducono in equazioni in cui indicano le incognite con parole (rosso, giallo, verde) e procedono per sostituzione in un'equazione a due incognite. La spontaneità con cui viene risolta l'equazione ottenuta, diventata così ad una sola incognita, mette in luce che, molto probabilmente, gli allievi non conoscono i principi di equivalenza, né hanno familiarità con il concetto di equazione. Essi mostrano di avere un buon controllo della situazione nel passaggio dal registro di rappresentazione verbale a quello grafico e a quello simbolico, oltreché nella gestione dei calcoli, interpretando e dando significato, di volta in volta, alle scritture ottenute nei vari passaggi.

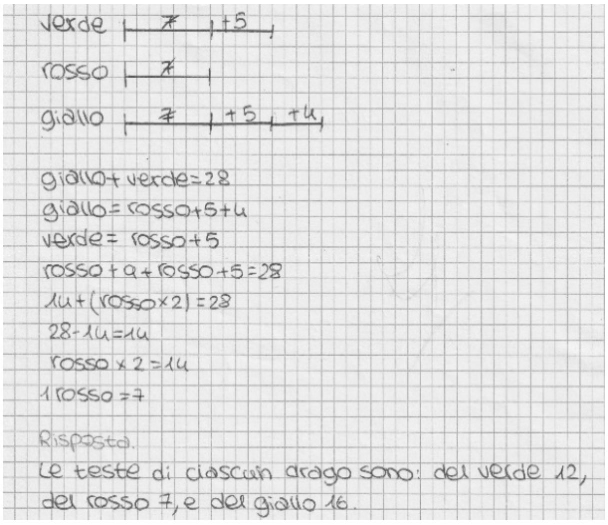


Fig.11 (cat.6)

Dopo la rappresentazione grafica con i segmenti esprimono le relazioni così:
"*giallo + verde=28*
giallo=rosso+5+4
verde=rosso+5"
[poi fanno una sostituzione e scrivono]
"*rosso+9+rosso+5=28*
14+(rosso × 2) = 28
28-14=14
rosso×2= 14
1 rosso= 7"

In un elaborato di cat. 7 (Fig.12) arrivano alla risposta corretta ragionando in modo originale: partono da una situazione iniziale in cui il drago verde ha cinque teste (perché ne ha cinque in più del drago rosso) e il drago giallo ha 9 teste (4 in più di quello verde). La somma però è 14 e non 28. La differenza, 14, deve allora essere distribuita in parti uguali tra i due draghi: 7+5=12 per il drago verde e 7+9=16 per quello verde.

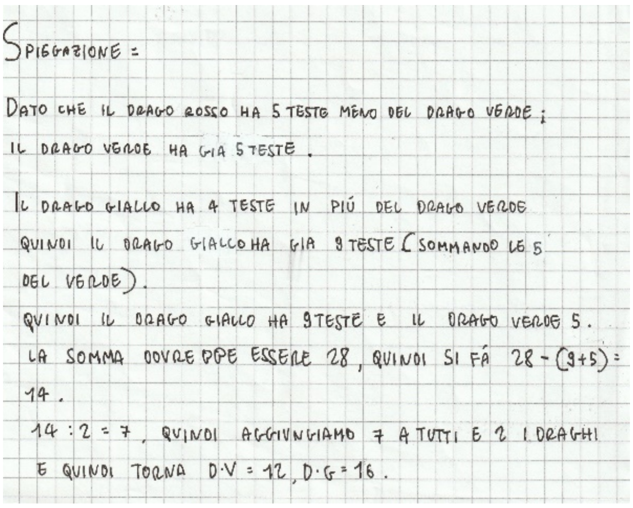


Fig. 12 (cat. 7)

"Dato che il drago rosso ha 5 teste in meno di quello verde, il drago verde ha già 5 teste.

Il drago giallo ha 4 teste in più del drago verde. Quindi il drago giallo ha già 9 teste (sommando le 5 del verde).

Quindi il drago giallo ha 9 teste e il drago verde 5. La somma dovrebbe essere 28, quindi si fa 28-(9+5)=14.

14:2=7. Quindi aggiungiamo 7 a tutti e 2 i draghi e quindi torna DV=12, DG=16."

3.2.2 Dividere la somma 28 per 2 e aggiungere e togliere 2 al risultato ottenuto per trovare il numero di teste del drago giallo e di quello verde.

Anche questa procedura non era stata prevista nell'Analisi a priori ma la si ritrova in tantissimi elaborati di tutte e tre le categorie, con una percentuale maggiore in cat.5. A titolo di esempio, riportiamo qui di seguito, la descrizione, particolarmente chiara, di questo procedimento presente in un elaborato di cat.5: *"Siamo partiti da 28 (le teste del drago giallo e del drago verde insieme) e lo abbiamo diviso per due. Sapendo che il drago giallo aveva quattro teste in più di quello verde, abbiamo aggiunto due teste al drago giallo e abbiamo sottratto due teste al drago verde, aggiungendole al drago giallo. Così le teste del drago giallo sono 16 e le teste del drago verde sono 12. Poi abbiamo fatto 12 meno 5 uguale 7 (ovvero le teste del drago rosso)."*

3.2.3 Impostare e risolvere un'equazione

Nonostante che il *Compito matematico* dell'Analisi a priori facesse espressamente riferimento ad una procedura di tipo algebrico, questa poi non è stata inserita nell'*Analisi del compito* e in effetti essa si ritrova solo in due elaborati di cat. 6 (di cui uno è quello in Fig.11) e in 4 elaborati di cat.7. In due di questi elaborati appare chiaro che lo "strumento" equazioni è noto agli allievi (in uno si scrive esplicitamente che è stato utilizzato): è presente una chiara nominalizzazione dell'incognita (pur presentando l'usuale identificazione tra drago e numero delle sue teste), le relazioni sono tradotte correttamente in forma simbolica, l'equazione viene impostata e risolta utilizzando i principi di equivalenza. In Fig.13 riportiamo uno di essi.

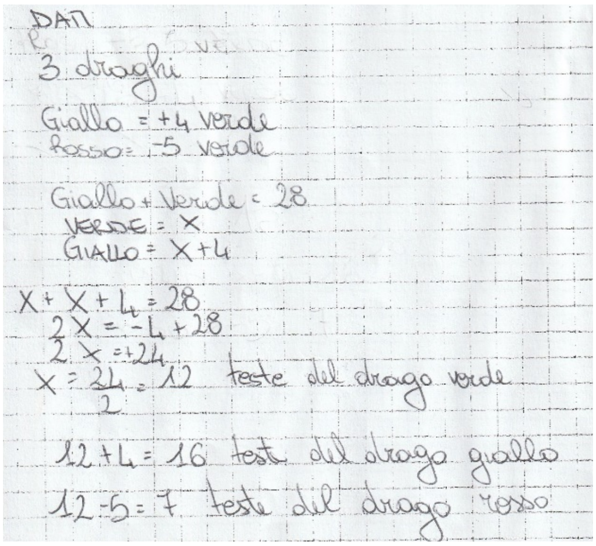


Fig.13 (cat.7)

"DATI
3 draghi
Giallo = +4 Verde
Rosso = -5 Verde
Giallo+Verde = 28
Verde = x
Giallo = x+4

x+x+4 = 28
2x = -4+28
2x = +24
$x = \frac{24}{2}$ *= 12 teste del drago verde*
12+4 =16 teste del drago giallo
12-5 = 7 teste del drago rosso"

Nell'elaborato seguente invece (Fig.14), gli allievi mostrano di essere ad un primo livello del percorso di sviluppo del "discorso" algebrico. C'è incertezza nella nominalizzazione dell'incognita e si usa, inizialmente, la stessa lettera x per indicare sia il numero di teste del drago giallo che quello delle teste del drago verde perché sono entrambe quantità incognite. Non c'è quindi la consapevolezza, a livello di scrittura, che due numeri diversi devono essere indicati con lettere diverse. Poi però a una di queste x si sostituisce (x-4) e si arriva a scrivere l'equazione corretta (x-4) + x = 28 che viene risolta probabilmente a tentativi.

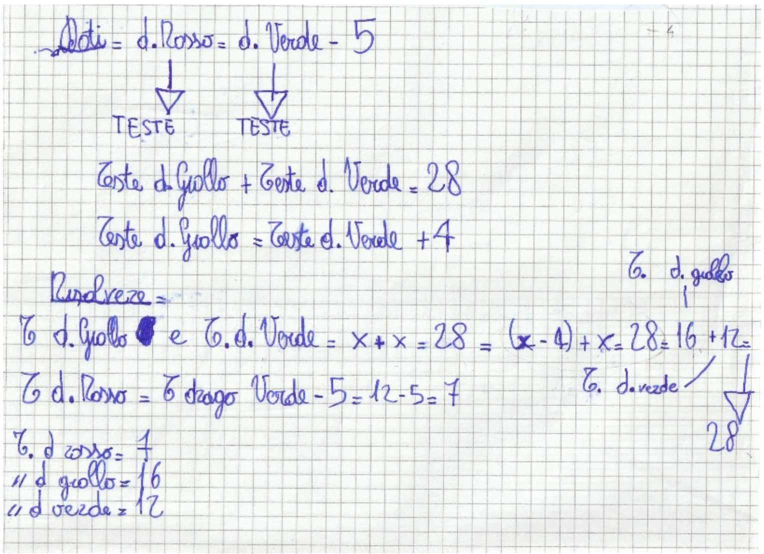


Fig. 14 (cat.7)

L'elaborato in Fig. 15 infine, mostra una maggiore libertà nell'uso delle lettere e si arriva ad impostare e risolvere correttamente un'equazione in V. Si osserva che gli allievi iniziano scrivendo i dati, abitudine questa che si riscontra in tantissimi altri elaborati e che risponde spesso ad un "contratto didattico" che si mantiene nel tempo a partire dalla scuola primaria. Colpisce però il modo in cui, in questo caso, i dati vengono scritti: *"3= draghi; 5= teste* [disegno di una testa]*in meno del drago verde; 4=teste in più del drago verde; 28= teste D.G. +D.V.".* Cioè i dati sono solo i numeri, non si considerano le relazioni tra le quantità incognite che essi esprimono e quindi, in questa forma, risultano assolutamente inutili per la risoluzione. Segue un disegno con tre draghi, anch'esso inutile per la risoluzione del problema, e solo a questo punto si scrivono correttamente le relazioni, utilizzando opportunamente le lettere, e si risolve il problema: prima si risponde al "contratto didattico", poi si procede liberamente alla risoluzione del problema!

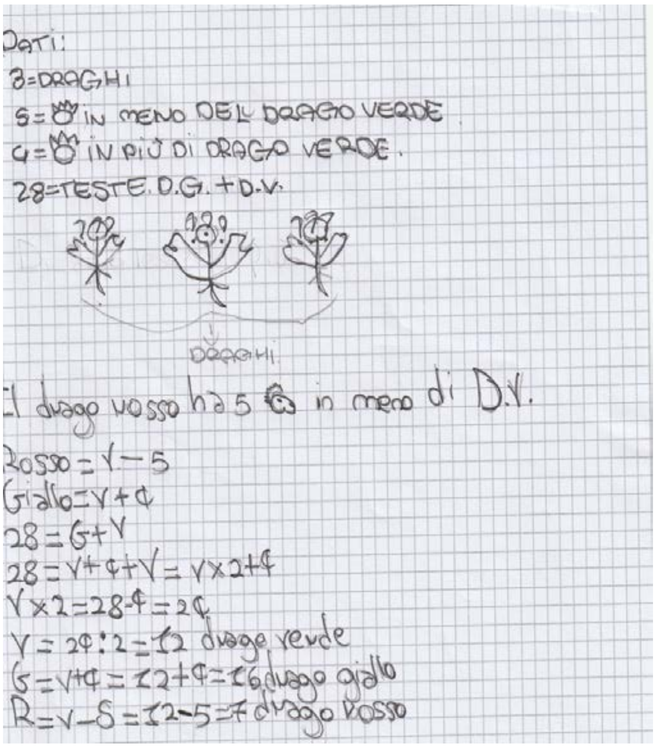


Fig.15 (cat.7)

3.3 Analisi degli errori

Gli errori che emergono dall'analisi degli elaborati sono essenzialmente di due tipi: totale incomprensione (operazioni eseguite "a caso" o perdita dell'ambito numerico dei numeri naturali che emerge dal contesto), dimenticanza o interpretazione errata di una o più condizioni. Non sembra invece ci siano errori che rivelano particolari ostacoli.

In tutte e tre le categorie, gli elaborati che mostrano incomprensione del problema sono pochi e in essi si opera sui dati numerici che compaiono nel testo in modo più o meno casuale. Così, per esempio, in un elaborato si divide 28 per 3, si ignora il resto e si prende il quoziente 9 come numero di teste del drago verde, trovando di conseguenza i numeri di teste degli altri due draghi. In un altro elaborato di cat. 5 si arriva al risultato corretto procedendo però in modo errato. Si legge: *"Le teste del drago rosso sono 7, quelle del drago verde sono 12 e quelle del drago giallo sono 16"* che è la risposta corretta, ma la spiegazione data è la seguente: *"<u>Abbiamo diviso il 28 per 4</u> ed è venuto 7, erano le teste del drago rosso, poi abbiamo fatto 7+5 che 12 che sono le teste del drago verde, poi abbiamo aggiunto 4 a 12 e ci è venuto il risultato delle teste del drago giallo, infine abbiamo fatto 12+16 ed è venuto 28 che sono le teste di tutti e due i draghi messi insieme come diceva il testo, così abbiamo finito."*
Nell'elaborato di cat.6 riportato in Fig.16 si parte correttamente, sottraendo 4 da 28, ma poi ci si perde e si opera come se 28 fosse la somma dei numeri di teste di tutti e tre i draghi.

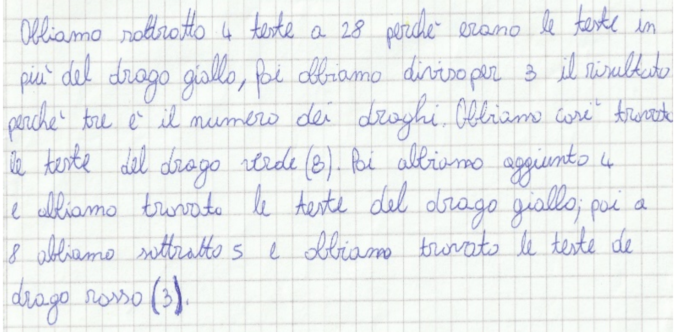


Fig. 16 (cat. 6)

"Abbiamo sottratto 4 teste a 28 perché erano le teste in più del drago giallo, poi abbiamo diviso per 3 il risultato perché tre è il numero dei draghi. Abbiamo così trovato le teste del drago verde (8). Poi abbiamo aggiunto 4 e abbiamo trovato le teste del drago giallo, poi abbiamo sottratto 5 e abbiamo trovato le teste del drago rosso (3)"

In alcuni elaborati, le relazioni dell'enunciato vengono interpretate e trascritte in modo errato e ciò comporta naturalmente una risposta non corretta. Un esempio, relativo ad un elaborato di cat.7, è riportato in Fig.17. Gli allievi mostrano difficoltà nel passare dal linguaggio verbale a quello simbolico traducendo in modo errato le relazioni che legano i numeri di teste dei draghi rosso e giallo con quello delle teste del drago verde: D.R.–5 = D.V. per "*il drago rosso ha 5 teste in meno del drago verde*" e, in modo analogo, D.G.+4 = D.V. per "*il drago giallo ha 4 teste in più del drago verde*". Poi utilizzano correttamente le uguaglianze così simbolizzate fino ad esplicitare le risposte, purtroppo errate.

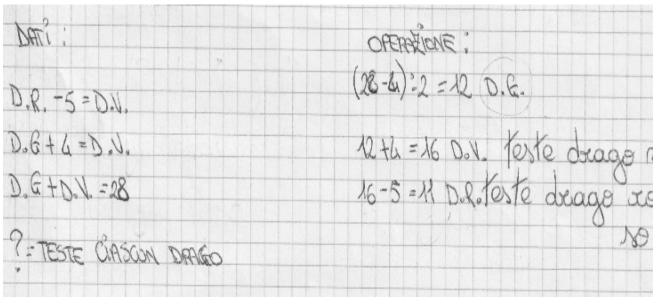


Fig. 17 (cat.7)

"DATI
D.R.-5=D.V.
D.G.+4=D.V.
D.G.+D.V.=28
? = teste ciascun drago

OPERAZIONE:
(28-4): 2=12 D.G.
12+4=16 D.V. teste drago verde
16-5=11 D.R. teste drago rosso"

Un esempio di elaborato in cui si perde il controllo dell'ambito numerico in cui si deve lavorare, è riportato in Fig.18. Gli allievi sbagliano a scrivere una condizione: Dr + Dg = 28 teste (si direbbe proprio un errore di distrazione!) e procedono poi per tentativi organizzati partendo da 9 per il numero di teste del drago verde (DV), determinando il corrispondente numero di teste del drago rosso (Dr) e quello delle teste del drago giallo (Dg) e andando a verificare se la somma Dr + Dg sia uguale a 28. Proseguono così in modo sistematico finché, a partire dai valori 14 e 15 per il numero di teste del drago verde, arrivano a trovare Dr + Dg, uguale rispettivamente a 27 e 29. A questo punto, concentrati sul dover ottenere la somma 28, passano ai numeri decimali, dimenticandosi completamente del contesto, e accettano 14,5 come numero delle teste del drago verde, poiché sono numericamente verificate tutte le condizioni: *14,5-5 = 9,5 14,5+4 = 18,5 e 9,5+19,5 = 28*".

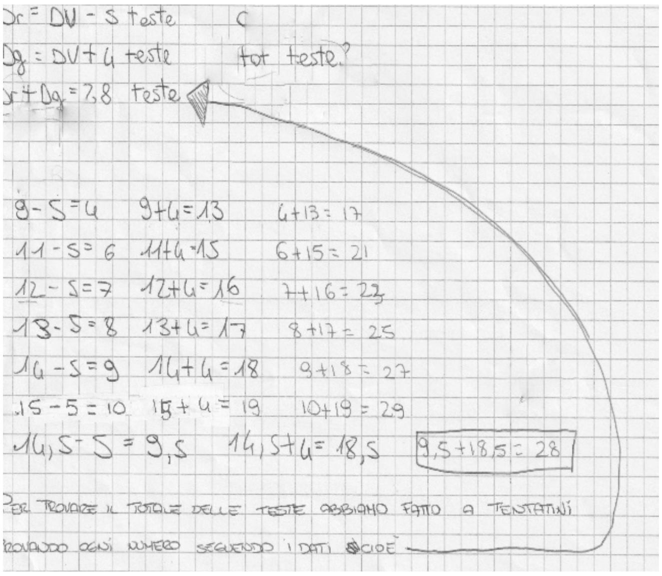


Fig. 18 (cat.7)

"*Dr=DV-5 teste*
Dg=DV+4teste
Dr+Dg=28 teste

[seguono i tentativi fatti]"

Altre risposte sbagliate nascono da una errata rappresentazione grafica o da una sua errata interpretazione. Nell'elaborato in Fig.19 accadono entrambe le cose. Inoltre, si risconta anche qui una totale mancanza di controllo che porta ad accettare un risultato palesemente assurdo.

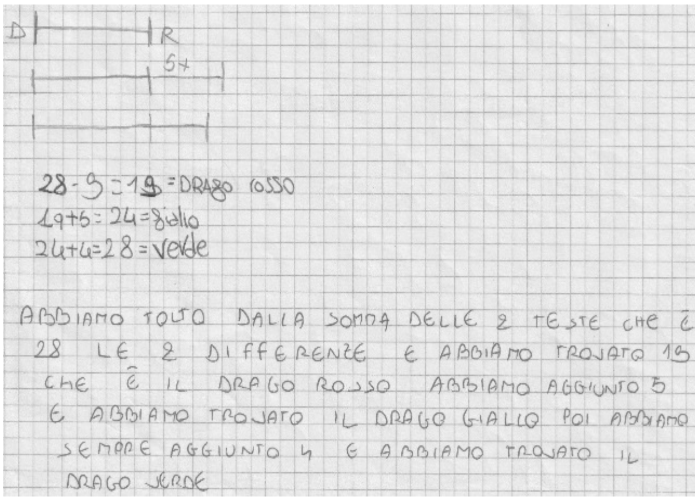


Fig.19 (cat.6)

"28-9=19=Drago rosso
19+5=24=giallo
24+4=28=verde

Abbiamo tolto dalla somma delle 2 teste che è 28 le 2 differenze e abbiamo trovato 19 che è il drago rosso. Abbiamo aggiunto 5 e abbiamo trovato il drago giallo. Poi abbiamo sempre aggiunto 4 e abbiamo trovato il drago verde."

<u>A partire da 28:2=14 si trovano varie procedure errate</u>:
a. si interpreta **14** come il numero di teste del drago giallo e si trova 14 – 4 = **10** numero di teste del drago verde e 10 – 5 = **5** per le teste del drago rosso;
b. si interpreta **14** come numero delle teste del drago verde a cui si aggiunge 4 e si trova **18** per il drago giallo e si toglie 5 per trovare **9**, numero di teste del drago rosso;
c. si capisce che 14 non è né il numero delle teste del drago giallo né quello delle teste del drago verde, ma si aggiunge e toglie 4 (invece di 2) per trovare il numero, rispettivamente, delle teste del drago giallo, **18**, e di quello verde, **10**, da cui poi si ottiene **5** numero di teste del drago rosso.
L'elaborato in Fig.20 è un esempio del caso **c.**: gli allievi verificano che la somma 18+10 =28 ma non si accorgono che la differenza è 8 e non 4!

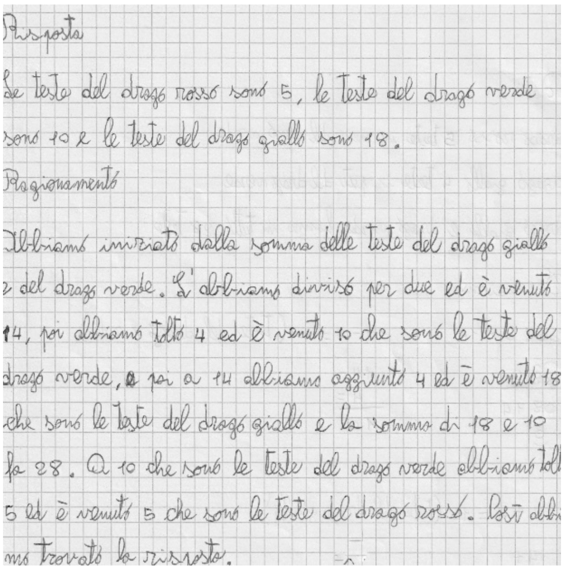


Fig.20 (cat.5)

"Risposta
Le teste del drago rosso sono 5, le teste del drago verde sono 10 e le teste del drago giallo sono 18.

Ragionamento

Abbiamo iniziato dalla somma delle teste del drago giallo e del drago verde. L'abbiamo divisa per due ed è venuto 14, poi abbiamo tolto 4 ed è venuto 10 che sono le teste del drago verde, poi a 14 abbiamo aggiunto 4 ed è venuto 18 che sono le teste del drago giallo e la somma di 18 e 10 fa 28. A 10 che sono le teste del drago verde abbiamo tolto 5 ed è venuto 5 che sono le teste del drago rosso. Così abbiamo trovato la risposta."

4. Indicazioni didattiche

L'analisi a posteriori degli elaborati mette ben in evidenza le peculiarità del problema, ovvero la sua natura algebrica, ma anche la possibilità di risolverlo, e in più modi, rimanendo in ambito aritmetico. Le quantità incognite da determinare sono infatti tre, opportunamente relazionate, ma due sono quelle "principali" (numero di teste del drago giallo e numero di teste del drago verde di cui si conosce sia la differenza che la somma), lavorando sulle quali, si può trovare rimanendo in ambito aritmetico, ad esempio per tentativi, il valore di ciascuna per poi risalire al valore della terza , ma è aperta altresì la strada alle prime forme di scritture spontanee che prefigurano l'idea di equazione.
Si tratta quindi, a nostro parere, di un buon problema della famiglia "*Dall'Aritmetica all'Algebra*".
Questo tipo di problemi, che possiamo definire *"prealgebrici",* vengono solitamente assegnati nella gara anche a categorie di scuola primaria. Il problema "I draghi", è stato infatti proposto a Cat. 5. Tenuto però conto dell'interesse suscitato negli allievi, delle buone percentuali di riuscita riscontrate, della diversità di procedure risolutive messe in atto e dell'ambito numerico coinvolto, cioè quello dei numeri naturali, riteniamo che il problema possa essere utilizzato anche in cat. 4. Abbiamo però anche rilevato che, laddove ci sono state difficoltà,

queste sono dovute principalmente ad una non corretta interpretazione, e quindi gestione, di una o più delle informazioni espresse in termini relazionali, presenti nel testo.
Una prima indicazione per il lavoro in classe, in particolare nelle categorie più basse, potrà quindi essere quella di dedicare spazio alla fase di *appropriazione del compito*, sollecitando la discussione ed il confronto tra gli allievi sulla lettura e comprensione del testo. In particolare, una volta individuate le relazioni fra le grandezze in gioco, si potrà scoprire quale drago ha meno teste e quale ne ha di più, e quindi ordinare i draghi in base al numero delle teste che possiedono, prima ancora di sapere quante ne ha ciascuno. Questa informazione potrà costituire un utile strumento di controllo per i valori numerici che poi, con le procedure utilizzate per la risoluzione, saranno attribuiti ai tre draghi. Dall'analisi a posteriore è emerso, invece, che ci sono elaborati in cui l'attenzione degli allievi è tutta concentrata sulle operazioni da fare per dare una risposta al problema, e si trascura poi di controllare che ciò che si è trovato soddisfi davvero le condizioni richieste!
Ci si potrà poi soffermare, se necessario, sulle relazioni presenti nel testo, invitando gli allievi ad esprimerle in modi diversi sia nel linguaggio naturale, sia utilizzando altri registri rappresentativi, per es. di tipo grafico o simbolico, e passare dall'uno all'altro, discutendo e confrontandosi sulla loro correttezza. A questo proposito, gli elaborati esaminati riportano un'interessante varietà di scritture che testimoniano, in più casi, la difficoltà incontrata dagli allievi nel tradurre i dati relazionali passando dal linguaggio naturale a quello simbolico e formale. Anche quando il problema è stato risolto correttamente, questo passaggio risulta spesso incerto o addirittura errato. Si trovano infatti scritture del tipo "*Drago rosso= –5 teste drago verde; Drago giallo= +4 teste drago verde; Incognite: teste di ciascun drago=?*". Spesso si introducono delle lettere (R,V,G), ma si producono scritture ambigue o errate del tipo: R = –5V G = 4+V V= –4G in cui le lettere e i simboli =, + e – hanno un significato stenografico; oppure: R–5V G+4V G+V=28, dove nelle prime due scritture è sparito anche l'uguale e si è perso così il significato relazionale.
Inoltre sarà utile proporre in classe questo problema, per esempio facendo lavorare a coppie o singolarmente gli allievi, i quali, lasciati liberi di esprimersi, è probabile utilizzino procedure diverse. In tal caso, sarà didatticamente interessante far illustrare le varie procedure, confrontarle e discuterle insieme. [3]
Come l'analisi a posteriori ha mostrato, la situazione descritta nel problema può prestarsi ad essere rappresentata ricorrendo a scritture generali che sintetizzano le relazioni in gioco e che preparano il terreno all'idea di equazione. Una tale rappresentazione può nascere direttamente dagli allievi o, successivamente, nella fase di confronto e discussione, con gli opportuni rilanci dell'insegnante.
A nostro avviso, il problema potrebbe essere utilizzato in cat. 8 (o, se necessario, anche in cat. 9) come verifica iniziale o in un contesto di avvio al calcolo algebrico per un utilizzo sensato di lettere e simboli.

[3] A questo proposito citiamo brevemente l'esperienza di Alessandro Carciola, che, in tempo di pandemia, ha proposto il problema in modo individuale ad allievi di categoria 6 e 7, allo scopo di fare un confronto con il problema Pokemon (26, II, cat 3,4,5), di cui abbiamo già riferito (cfr. Gazzetta n° 11). Benché destinato a categorie più alte, la risoluzione di Draghi è risultata, per gli stessi allievi, più facile. Sarebbe interessante riproporre i due problemi in condizioni scolastiche "normali" per approfondire il confronto.

APPROFONDIMENTI / ÉTUDES

JOGGING AL PARCO: STRATEGIE ELEMENTARI O ESPERTE?

JOGGING DANS LE PARC : STRATEGIES ÉLÉMENTAIRES OU EXPERTES ?

Rosa Iaderosa, Michel Henry, Angela Rizza
con la collaborazione del Gruppo Funzioni [1]/ avec la collaboration du Groupe Fonctions

Sunto/ Résumé

In questo articolo presentiamo [2]un'analisi degli elaborati del problema Jogging al parco (29.I.19), proposto dal Gruppo Funzioni, mostrando la varietà delle strategie osservate, il ruolo delle rappresentazioni grafiche e alcuni errori ricorrenti. Il problema mette in luce, in maniera molto puntuale e dettagliata, come gli allievi possano passare da una visione di natura aritmetica o pre-algebrica, unita a delle rappresentazioni spontanee, alla visione più colta in cui gli strumenti matematici a disposizione sono potenziati e in cui l'idea di funzione come relazione fra grandezze variabili si trasforma in un efficace strumento di risoluzione di problemi.

Dans cet article, nous présentons une analyse du problème Jogging dans le parc (29.I.19), proposé par le groupe Fonctions, montrant la variété des stratégies observées, le rôle des représentations graphiques et certaines erreurs récurrentes. Le problème met en évidence, de manière très précise et détaillée, comment les élèves peuvent passer d'une vision arithmétique ou pré-algébrique, associée à des représentations spontanées, à une vision plus instruite dans laquelle les outils mathématiques à leur disposition sont améliorés et dans laquelle l'idée de fonction comme relation entre des quantités variables est transformée en un outil efficace de résolution de problèmes.

1. Introduzione / Introduction

Il problema 29.I.19 *Jogging al parco* è stato elaborato dal Gruppo Funzioni durante il convegno di Alghero dell'ottobre 2019. L'idea è quella di proporre una situazione dinamica che gli allievi possano affrontare con diversi strumenti, incluso quello del confronto fra due funzioni.

Il problema è stato poi rivisto dal Gruppo di Pilotaggio, incaricato di elaborare la prima prova del 29° RMT, e dalle sezioni, nella fase di consultazione, raggiungendo la formulazione definitiva qui riportata.

Le problème 29.I.19 *Jogging dans le parc* a été élaboré par le groupe Fonctions lors de la rencontre d'Alghero en octobre 2019. L'idée est de proposer une situation dynamique que les élèves peuvent affronter avec différents outils, dont celui de la comparaison entre deux fonctions. Le problème a ensuite été examiné par le groupe de pilotage, chargé d'élaborer la première épreuve du 29e RMT, et par les sections, en phase de consultation, aboutissant à la formulation finale rapportée ici.

JOGGING AL PARCO/ JOGGING AU PARC (Cat. 9, 10)

Anna e Emilio fanno jogging lungo un sentiero che forma un anello di 9450 m di lunghezza. Anna impiega generalmente 45 minuti per fare il giro completo ed Emilio lo fa in 30 minuti. Oggi lo percorrono in versi opposti. Alle 10 precise, Anna incrocia Emilio e lo saluta, e ognuno prosegue la sua corsa sul sentiero nello stesso verso di prima, alla stessa velocità.

A che ora Anna ed Emilio si incontreranno di nuovo?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta e mostrate i calcoli che avete fatto.

[1] Presenti ad Alghero 2019: Luciana Berto, Laura Branchetti, Emanuela Colombi, Nunzia Dibenedetto, Valeria Ferrari, Mathias Front, Silvani Gregori, Annie Henry, Mattia Laurini, Chiara Leone, Andrea Maffia, Luc-Olivier Pochon, Salvatore Sini, Lucia Trentadue.

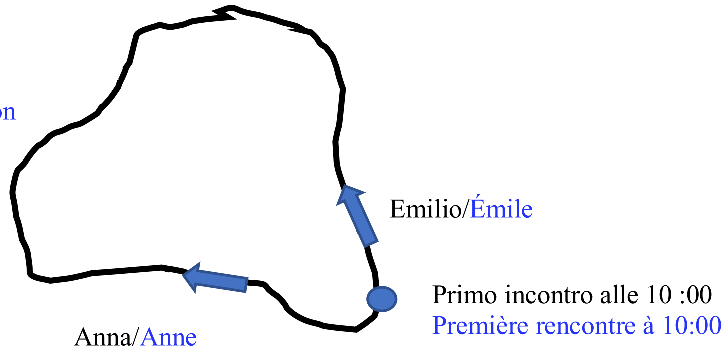
Anne et Émile font du jogging le long d'un sentier qui forme une boucle de 9450 m de longueur. Anne prend généralement 45 minutes pour faire le tour complet et Émile l'effectue en 30 minutes. Aujourd'hui ils se déplacent en sens opposés. À 10 heures précises, Anne croise Émile et le salue, et chacun poursuit sa course sur le sentier dans le même sens qu'auparavant et toujours à la même vitesse.

À quelle heure Anne et Émile vont-ils se rencontrer de nouveau ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et montrez les calculs que vous avez faits.

Ecco un'interpretazione grafica della situazione

Voici une interprétation graphique de la situation

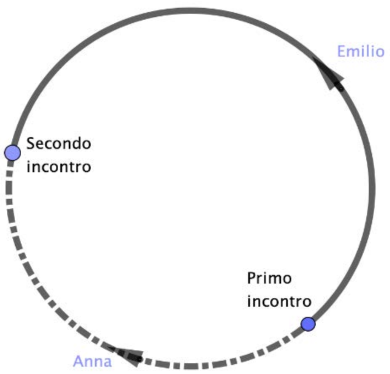


Rispetto alla formulazione iniziale, è stato introdotto il dato della lunghezza del percorso ed è stato precisato che la velocità di ciascun personaggio si mantiene costante.
Il problema appare notevolmente complesso; i moti a cui esso fa riferimento presentano, infatti, le seguenti caratteristiche:

- sono simultanei e con diversa velocità
- non avvengono su una traiettoria rettilinea
- si svolgono in versi contrari (dal punto di vista vettoriale le velocità sono diverse sia come modulo che come verso)

Par rapport à la formulation initiale, la donnée de la longueur du parcours a été introduite et il a été précisé que la vitesse de chaque personnage reste constante.
Le problème apparaît particulièrement complexe ; les parcours qu'il présente ont, en effet, les caractéristiques suivantes :

- ils sont simultanés et à des vitesses différentes,
- ils ne se déroulent pas en ligne droite,
- ils se font dans des sens opposés.



Inoltre, il secondo incontro avrà luogo prima che uno dei due abbia compiuto un giro completo.

De plus, la seconde rencontre aura lieu avant que l'un ou l'autre ait fait un tour complet.

Più in generale, il nostro gruppo di lavoro ha più volte riscontrato che le relazioni fra spazio, tempo e velocità risultano generalmente difficili da formalizzare in leggi funzionali e il ricorso ad una rappresentazione grafica non è immediato, anzi talvolta introduce ostacoli supplementari.

Plus généralement, notre groupe de travail a constaté à plusieurs reprises que les relations entre espace, temps et vitesse sont souvent difficiles à expliciter par des formules avec des fonctions et que l'utilisation d'une représentation graphique n'est pas immédiate, voire introduit parfois des obstacles supplémentaires.

Riportiamo di seguito i punteggi delle sezioni di Parma (75 classi), Milano (48), dalle quali proviene la maggior parte degli elaborati qui proposti, e i punteggi generali relativi a 282 classi. In generale il problema ha avuto una discreta riuscita, con un elevato numero di punteggi 3 e 4 in particolare nella cat.10, anche se sono presenti alte percentuali di punteggi 0 e 1, che denotano l'incomprensione della situazione o solo un inizio di ragionamento corretto. Le differenze nei risultati possono essere attribuite al fatto che gli iscritti al RMT di alcune sezioni, per esempio nel caso di Parma, sono in maggioranza provenienti dal Liceo Scientifico; queste classi possono contare su una preparazione più approfondita e sulla possibilità di utilizzare anche gli strumenti della fisica.

On trouvera ci-dessous les scores des sections de Parme (75 classes) et de Milan (48 classes), d'où proviennent la plupart des documents proposés ici, ainsi que les scores généraux obtenus par 282 classes. En général, le problème a été assez bien réussi, avec un nombre élevé de scores 3 et 4 en particulier dans la catégorie 10, bien qu'il y ait des pourcentages élevés de scores 0 et 1, dénotant soit une incompréhension de la situation, soit seulement un début de raisonnement correct. Les différences entre les résultats peuvent être attribuées au fait que les élèves du RMT dans certaines sections, par exemple dans le cas de Parme, sont en majorité issus du Lycée Scientifique ; ces classes peuvent compter sur une préparation plus approfondie et sur la possibilité d'utiliser également les outils de la physique.

Punteggi sezione di Parma: / Scores obtenus par la section de Parme :

punti	0	1	2	3	4	M
Cat. 9	10 (26%)	11 (29%)	1 (3%)	4 (11%)	12 (32%)	1.9
Cat. 10	8 (22%)	4 (11%)	0 (0%)	2 (5%)	23 (62%)	2.8
totale	18 (24%)	15 (20%)	1 (1%)	6 (8%)	35 (47%)	2.3

Punteggi sezione di Milano: / Scores obtenus par la section de Milan :

punti	0	1	2	3	4	M
Cat. 9	4 (20%)	12 (60%)	1 (5%)	0 (0%)	3 (15%)	1.3
Cat. 10	3 (11%)	17 (61%)	0 (0%)	0 (0%)	8 (29%)	1.8
totale	7 (15%)	29 (60%)	1 (2%)	0 (0%)	11 (23%)	1.6

Punteggi generali: / Scores obtenus globalement :

punti	0	1	2	3	4	M
Cat. 9	45 (31%)	51 (36%)	8 (6%)	7 (5%)	32 (22%)	1.5
Cat. 10	35 (25%)	29 (21%)	8 (6%)	11 (8%)	56 (40%)	2.2
totale	80 (28%)	80 (28%)	16 (6%)	18 (6%)	88 (31%)	1.8

Tra le possibili motivazioni di successo, possiamo individuare le seguenti:

si tratta di una situazione realistica e riconducibile ad un'esperienza concreta

si può affrontare con molteplici approcci (tentativi, strategie passo-passo, proporzionalità, velocità…)

si offre la possibilità di rappresentare la situazione con schemi o disegni, al fine di supportare la comprensione e la risoluzione.

Parmi les raisons possibles de bonne réussite, nous pouvons identifier les suivantes :

- il s'agit d'une situation réaliste et correspondant à une expérience concrète,
- le problème peut être abordé par de multiples approches (essais, stratégies pas à pas, proportionnalité, vitesse...),
- il offre la possibilité de représenter la situation par des schémas ou des dessins.

2. Strategie elementari / Stratégies élémentaires

La maggior parte delle soluzioni corrette, soprattutto in cat.9, si basa su una strategia "passo a passo" in cui le posizioni dei due personaggi vengono registrate di minuto in minuto, fino al momento dell'incontro. La variabile temporale, per sua natura continua, viene dunque pensata come discreta e la situazione interpretata come una serie di “fotogrammi” successivi.

La plupart des solutions correctes, en particulier dans la catégorie 9, reposent sur une stratégie "pas à pas" dans laquelle les positions des deux personnages sont enregistrées de minute en minute, jusqu'au moment de la rencontre. La variable temporelle, par nature continue, est donc pensée comme discrète et la situation interprétée comme une succession de « photos » successives.

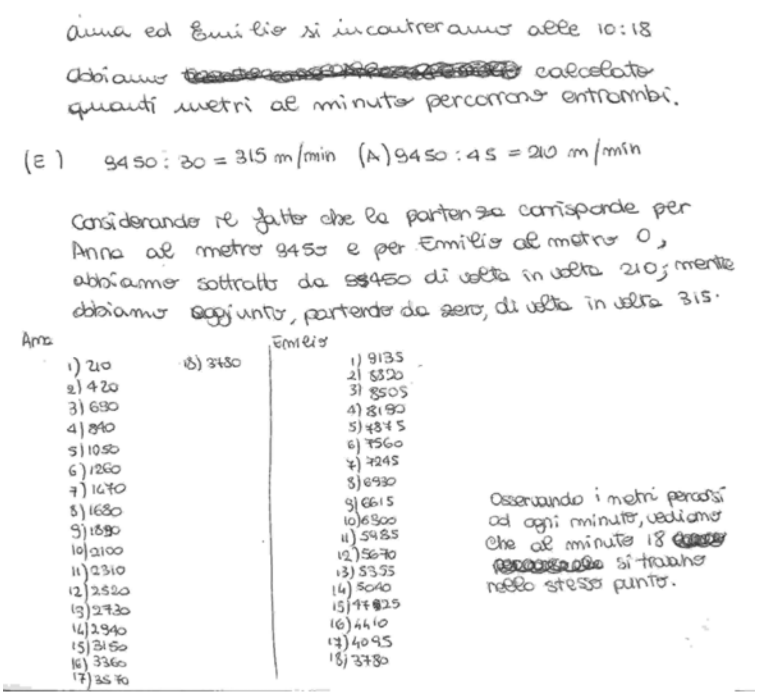
Cat. 9 :

Anne et Émile se rencontreront à 10 :18

Nous avons calculé combien de mètres par minute ils font ensemble.

(E) 9450 : 30 = 315 m/min

(A) 9450 : 45 = 210 m/min


Anna ed Emilio si incontreranno alle 10:18

abbiamo calcolato quanti metri al minuto percorrono entrambi.

(E) 9450 : 30 = 315 m/min (A) 9450 : 45 = 210 m/min

Considerando il fatto che la partenza corrisponde per Anna al metro 9450 e per Emilio al metro 0, abbiamo sottratto da 9450 di volta in volta 210; mentre abbiamo aggiunto, partendo da zero, di volta in volta 315.

Anna
1) 210
2) 420
3) 630
4) 840
5) 1050
6) 1260
7) 1470
8) 1680
9) 1890
10) 2100
11) 2310
12) 2520
13) 2730
14) 2940
15) 3150
16) 3360
17) 3570
18) 3780

Emilio
1) 9135
2) 8820
3) 8505
4) 8190
5) 7875
6) 7560
7) 7245
8) 6930
9) 6615
10) 6300
11) 5985
12) 5670
13) 5355
14) 5040
15) 4725
16) 4410
17) 4095
18) 3780

Osservando i metri percorsi ad ogni minuto, vediamo che al minuto 18 si trovano nello stesso punto.

Nous avons considéré le fait que le départ correspond pour Anne à 9450 mètres et pour Émile à 0 mètre, nous avons soustrait de 9450 pas à pas 210, nous avons ajouté, à partir de zéro, pas à pas 315.

Nous avons noté les distances parcourues à chaque minute, nous voyons qu’à la minute 18 ils se trouvent au même endroit.

Una variante interessante (Cat. 9) è quella di considerare il progressivo avvicinamento: ogni minuto i due ragazzi si avvicinano di 525 m, pari alla somma di 210 m e 315 m. In questo modo non è più necessario seguire gli spostamenti di minuto in minuto, è sufficiente contare quanti “avvicinamenti di 525 m” sono contenuti nei 9 450 m che separano inizialmente i due ragazzi.

Une variante intéressante (Cat. 9) est de considérer une approche progressive : toutes les minutes les deux coureurs se rapprochent de 525 m : la somme de 210 m et 315 m. De cette façon il n'est plus nécessaire de suivre les mouvements de minute en minute, il suffit de compter combien « d'approches de 525 m » sont contenues dans les 9450 m qui séparent initialement les deux amis.

Ogni minuto Emilio percorre 315 m, cioè il risultato di 9450 m : 30 min (tempo che impiega per fare un giro completo).
Invece Anna, nello stesso tempo, percorre 210 m, ovvero 9450 m : 45 min. Perciò ogni minuto i due ragazzi si avvicinano di 525 m, la somma di 315 + 210 m.
Quindi per incontrarsi, partendo dallo stesso punto, impiegano 18 minuti, per la divisione 9450 : 525 m.
Se partono dallo stesso punto alle 10 si ritrovano alle 10 : 18
Per verificare la veridicità della soluzione abbiamo calcolato lo spazio percorso dai due ragazzi in 18 minuti eseguendo i seguenti calcoli:
315 m · 18 min = 5670 m (spazio percorso da Emilio)
210 m · 18 min = 3780 m (spazio percorso da Anna)
Sommando i due risultati abbiamo ottenuto la lunghezza del percorso iniziale: 5670 + 3780 = 9450 m.

Chaque minute Émile parcourt 315 m, c'est-à-dire le résultat de 9450 m : 30 min (temps qu'il lui faut pour faire un tour complet).

Par contre Anne, dans le même temps, parcourt 210 m, c'est-à-dire 9450 m : 45 min.

Ainsi, à chaque minute les deux enfants font 525 m, la somme de 315 + 210 m.

Donc pour se rencontrer en partant du même point, il leur faut 18 min, d'après la division 9450 : 525 m.

En partant du même point à 10.00 ils se retrouvent à 10.18.

Pour vérifier la validité de la solution nous avons calculé la distance parcourue par les deux enfants en 18 minutes en faisant les calculs suivants :

*315 * 18 min = 5670 m (distance parcourue par Émile)*

*210 * 18 min = 378 m (distance parcourue par Anne)*

En additionnant les deux résultats nous avons obtenu la longueur du parcours initial : 5670 + 3780 = 9450 m.

Appaiono interessanti, anche se forse un po' più "ingenue" le argomentazioni essenzialmente verbali fornite per descrivere la strategia risolutiva. Certamente, per documentare i propri processi di pensiero, questi allievi (Cat. 9) hanno compiuto un notevole sforzo in termini di precisione nel linguaggio.

Les arguments essentiellement verbaux donnés pour décrire la stratégie de résolution semblent intéressants, bien que peut-être un peu "naïfs". Il est certain que pour documenter leurs processus de pensée, ces élèves (Cat. 9) ont fait un effort considérable en termes de précision du langage.

Anna ed Emilio si stanno muovendo in direzioni opposte, quindi, prendendo come punto di riferimento Anna Emilio si allontana da lei ad una velocità pari alla somma delle loro velocità 9450 : 45 + 9450 : 30 = 525. Quando in questo sistema di riferimento Emilio completa il giro, ossia la prima volta che si incontrano, a questa velocità, impiegano 9450 : 525 = 18 minuti, quindi si incontrano 18 minuti dopo le 10, di conseguenza alle 10:18

Anne et Émile se déplacent dans des directions opposées. Donc, en prenant Anne comme point de référence, Émile s'éloigne d'elle à une vitesse égale à la somme de leurs vitesses : 9450 : 45 + 9450 : 30 = 525. Lorsque dans ce système de référence

Émile termine le tour, ce sera la première fois qu'ils se rencontrent. Avec cette vitesse, il leur faut 9450 : 525 = 18 minutes, donc ils se rencontrent 18 minutes après 10 heures, donc à 10 :18

Le strategie qui proposte, che abbiamo definito “elementari” perché richiedono strumenti aritmetici semplici, si sono in realtà rivelate molto efficaci: la possibilità di seguire la situazione nel suo sviluppo temporale permette di averne il pieno controllo, di sviluppare calcoli coerenti, di minimizzare gli errori.

Les stratégies proposées ici, que nous avons appelées "élémentaires" parce qu'elles nécessitent des outils arithmétiques simples, se sont en fait révélées très efficaces : la capacité à suivre l'évolution de la situation dans le temps permet d'avoir un contrôle total, de développer des calculs cohérents et de minimiser les erreurs.

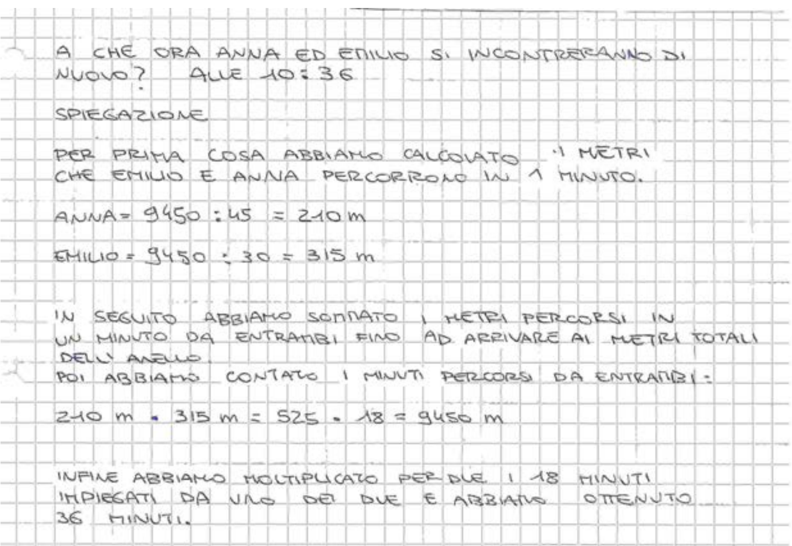
3. Errori / Erreurs

Gli errori rilevati nascono per lo più dalla mancata considerazione di tutti i vincoli del problema.

Ad esempio il seguente elaborato (Cat. 9) presenta un ragionamento analogo al precedente ma il risultato finale viene moltiplicato per 2; probabilmente questo è dovuto ad una errata considerazione della simultaneità dei due moti.

La plupart des erreurs rencontrées proviennent de la non prise en compte de toutes les contraintes du problème.

Par exemple, la copie suivante (Cat. 9) présente un raisonnement similaire au précédent, mais le résultat final est multiplié par 2 ; probablement dû à une considération erronée de la simultanéité des deux mouvements.


A CHE ORA ANNA ED EMILIO SI INCONTRERANNO DI NUOVO? ALLE 10:36

SPIEGAZIONE

PER PRIMA COSA ABBIAMO CALCOLATO I METRI CHE EMILIO E ANNA PERCORRONO IN 1 MINUTO.

ANNA = 9450 : 45 = 210 m

EMILIO = 9450 : 30 = 315 m

IN SEGUITO ABBIAMO SOMMATO I METRI PERCORSI IN UN MINUTO DA ENTRAMBI FINO AD ARRIVARE AI METRI TOTALI DELL'ANELLO.
POI ABBIAMO CONTATO I MINUTI PERCORSI DA ENTRAMBI:

210 m • 315 m = 525 • 18 = 9450 m

INFINE ABBIAMO MOLTIPLICATO PER DUE I 18 MINUTI IMPIEGATI DA UNO DEI DUE E ABBIAMO OTTENUTO 36 MINUTI.

À quelle heure Anne et Émile se rencontreront à nouveau ? À 10:36

Explications

D'abord nous avons calculé la distance que Émile et Anne parcourent en 1 minute.

Anne = 9450 : 45 = 210 m

Émile = 9450 : 30 = 315 m

Ensuite nous avons fait la somme des distances parcourues en une minute par les deux jusqu'à la longueur totale du circuit.

Puis nous avons compté les minutes parcourues ensemble :

*210 m+315 m = 525*18 =9450 m*

Enfin nous avons multiplié par deux les 18 minutes mises par les deux et nous avons obtenu 36 minutes.

In questa risoluzione (Cat. 9) è corretta l'idea di sommare gli spazi percorsi da Anna ed Emilio ma non si considera che questi spazi sono percorsi nello stesso tempo: vengono trovati (probabilmente per tentativi) due tempi diversi, 14 e 24 secondi, che vengono poi sommati per ottenere la soluzione.

Dans cette résolution (Cat. 9), l'idée d'additionner les espaces parcourus par Anne et Émile est correcte, mais il n'est pas considéré que ces espaces sont parcourus dans le même temps : deux temps différents sont trouvés (probablement par tâtonnement), 14 et 24 secondes, qui sont ensuite additionnés pour obtenir la solution.

Abbiamo diviso il perimetro per i minuti che sia Emilio che Anna impiegano a percorrere infine abbiamo trovato moltiplicando il risultato due numeri che sommati diano la lunghezza del perimetro.

• Dati
2p = 9450 m
A = Anna = 45 min.
E = Emilio = 30 min

1 min A = 9450 : 45 = 210 m
1 min E = 9450 : 30 = 315 m
210 · 14 = 4410 m
315 · 24 = 5040 m

4410 + 5040 = 9450 m
14 + 24 = 40

10,00 + 0,40 = 10,40 → ORARIO IN CUI SI RINCONTRANO

Nous avons divisé le périmètre par les minutes qu'Émile et Anne ont mis pour faire le parcours. Enfin, nous avons trouvé en multipliant le résultat par deux nombres qui, une fois additionnés, donnent la longueur du périmètre.

10.40 → heure de leur rencontre

Un errore frequente è stato quello di calcolare il mcm fra i tempi di percorrenza di 30 e 45 minuti; in effetti dopo 90 minuti i due personaggi ritornano alla stessa posizione iniziale, dopo aver percorso rispettivamente 3 giri e 2 giri, e dunque si incontrano, ma non si tratta del primo incontro richiesto.

Une erreur fréquente a été de calculer le ppcm entre les temps de parcours 30 et 45 ; en effet, après 90 minutes les deux personnages reviennent à la même position de départ, après avoir parcouru respectivement 3 tours et 2 tours, et se rencontrent donc, mais ce n'est pas la première rencontre.

Elaborato di Cat. 10/ copie de Cat. 10 :

1. FACCIO IL MINIMO COMUNE MULTIPLO TRA 45 E 30 PER TROVARE IL PRIMO ORARIO IN CUI SI INCONTRANO PER LA PRIMA VOLTA DOPO LE 10:00.
2. SE ANNA CI METTE 45 MINUTI PER UN GIRO E 90 MINUTI PER DUE GIRI, ED EMILIO 30 PER UN GIRO, 60 PER 2 GIRI E 90 PER TRE, QUANDO EMILIO E' AL TERZO GIRO E ANNA AL SECONDO, SI INCONTRERANNO.
3. 90 MINUTI CORRISPONDONO AD 1 ORA E 30 MINUTI: SE SI INCONTRANO ALLE 10.00 (10.00 + 1.30 = 11.30), SI INCONTRERANNO ALLE 11.30.

1. Je calcule le plus petit commun multiple entre 45 et 30 pour trouver le moment où ils se rencontrent pour la première fois après 10h00.

2. Comme Anne met 45 minutes pour un tour et 90 minutes pour deux tours, et Émile 30 pour un tour, 60 pour 2 tours et 90 pour trois, quand Émile arrivera au troisième tour et Anne au second, ils se rencontreront.

3. 90 minutes correspondent à 1 heure et 30 minutes : comme ils se rencontrent à 10.00 (10.00 + 1.30 = 11.30), ils se rencontreront à 11.30.

Nel seguente elaborato (Cat. 10) non viene, invece, rispettata la condizione del primo incontro alle 10.00 e i due personaggi vengono fatti partire da punti diametralmente opposti.

Cependant, dans la copie suivante (Cat. 10), la condition de la première rencontre à 10 heures n'est pas respectée et les deux amis sont amenés à partir de points diamétralement opposés.

Dopo 45 min., cioè il tempo impiegato da Anna per fare un giro che è 1,5 giri di Emilio partito dal lato opposto, perciò i 2 si incontrano alle 10:45.

Après 45 minutes, le temps qu'il a fallu à Anne pour faire un tour, soit 1,5 tour d'Émile parti dans l'autre sens, les deux se rencontrent à 10:45

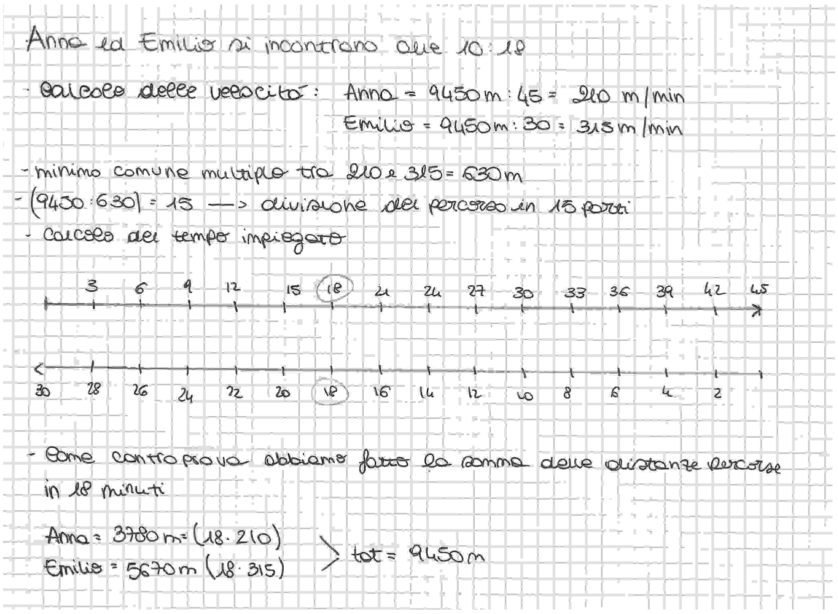
4. Rappresentazioni / Représentations

Il problema offre molteplici possibilità di utilizzare rappresentazioni: ai fini dell'appropriazione della situazione e della risoluzione, particolarmente interessante risulta un'analisi delle varie tipologie utilizzate dagli allievi. Alcune sono più spontanee, e si uniscono a quelle più strutturate studiate a scuola. È poi rilevante che i tentativi di utilizzo delle rappresentazioni, ai fini della elaborazione di una strategia risolutiva, non sempre, o solo parzialmente, portano al successo.

Le problème offre de multiples possibilités d'utilisation des représentations : pour l'appropriation et la résolution de la situation, une analyse des différents types utilisés par les élèves est particulièrement intéressante. Certaines sont plus spontanées, et rejoignent celles, plus structurées, qui sont étudiées à l'école. Il est également pertinent de noter que les tentatives d'utilisation de représentations dans le but de développer une stratégie de résolution ne mènent pas toujours, ou seulement partiellement, au succès.

Le rappresentazioni grafiche che abbiamo osservato non sono i classici diagrammi spazio-tempo ma opportuni modi di semplificare una situazione complessa. Nell'esempio che segue (Cat. 9), il percorso è stato "rettificato" e diviso in 15 parti, così come i tempi di percorrenza; la rappresentazione delle due semirette in versi opposti permette di osservare una sovrapposizione all'istante 18 minuti.

Les représentations graphiques que nous avons observées ne sont pas des schémas spatio-temporels classiques mais des manières appropriées pour simplifier une situation complexe. Dans l'exemple ci-dessous (Cat. 9), l'itinéraire a été représenté sur un axe et divisé en 15 parties, ainsi que les temps de parcours ; la représentation des deux demi-droites en sens opposés permet d'observer une rencontre à l'instant 18 minutes.



Anne et Émile se rencontreront à 10:18

Calcul de la vitesse :

Anne : 9450 m : 45 = 210 m/min

Émile : 9450 m :30 = 315 m/min

- Plus petit commun multiple entre 210 et 315 = 630 m

- (9450 : 630) = 15 → division du parcours en 15 parties

- Calcul des temps utilisés

Comme vérification, nous avons fait la somme des distances parcourues en 18 minutes

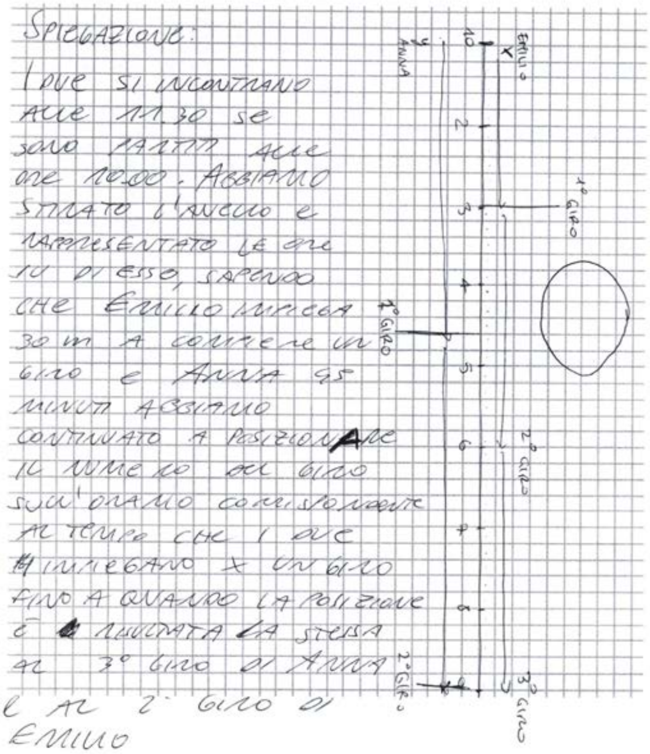
Anne : 3780 m (18.210)

>tot = 9450 m

Émile : 5670 m (18.315)

Anche in questo caso si tenta di sostituire la rappresentazione del percorso circolare con una rettilinea in funzione del tempo. Gli allievi scrivono: "abbiamo stirato l'anello e rappresentato le ore su di esso…". Evidentemente il trascorrere lineare del tempo appare più semplice da studiare rispetto alla traiettoria circolare, ma qui l'appropriazione della situazione è parziale e si incorre nell'errore, già esaminato, di considerazione del mcm fra 30 e 45.

Dans ce cas également, on tente de remplacer la représentation de la trajectoire circulaire par une trajectoire rectiligne en fonction du temps. Les élèves écrivent : « nous avons étiré la boucle et représenté les heures sur celui-ci... ». Évidemment, l'écoulement linéaire du temps semble plus facile à étudier que la trajectoire circulaire, mais ici l'appropriation de la situation est partielle et on rencontre l'erreur, déjà rencontrée, de considérer le ppcm entre 30 et 45 est commise.



Explications :

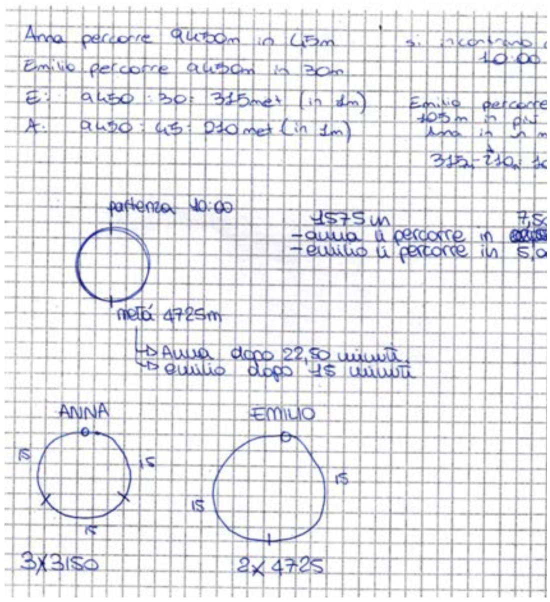
Les deux se rencontreront à 11.30 ils sont partis à 10.00 heures.

Nous avons étiré la boucle et représenté les temps sur celle-ci, sachant qu'il faut à Emilio 30 min pour faire un tour et à Anna 45 minutes

Nous avons continué à placer le nombre des tours avec les temps correspondants au temps qu'il leur faut à tous les deux pour effectuer un tour jusqu'à ce que leur position soit la même au 3ème tour d'Anne et au 2ème tour d'Émile.

La rappresentazione del percorso circolare appare necessaria per molti allievi: tuttavia, essa confonde e non sempre conduce ad una visione corretta della situazione, come nel seguente elaborato.

La représentation circulaire du parcours semble nécessaire pour de nombreux élèves : cependant, elle est source de confusion et ne conduit pas toujours à une vision correcte de la situation, comme dans la copie suivante.



Anne parcourt 9450 m en 45 m.

Ils se rencontrent à 10.00

Émile parcourt 9450 m en 30 m

E : 9450 : 30 = 315 net (en m/min)

A : 9450 : 45 = 210 net (en m/min)

Émile fait 105 m de plus qu'Anne en une minute

315 m – 210 m = 105 m

Départ 10 : 00

1575 m

- Anne les parcourt en 7,50 min.

- Émile les parcourt en 5,00 min.

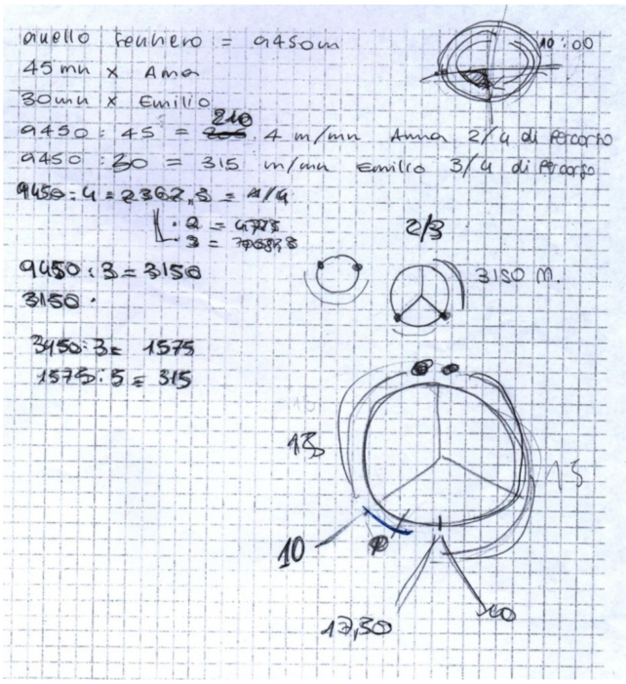
Milieu 4725 m

→Anne après 22,50 minutes

→ Émile après 15 minutes

Nell'esempio seguente appare molto chiaro il tentativo di utilizzo concreto della rappresentazione dei percorsi, ai fini della determinazione del punto di incontro. Gli allievi tuttavia non riescono a fare una sintesi tra ciò che rappresentano e ciò che precisamente devono calcolare.

Dans l'exemple suivant, la tentative d'utiliser concrètement la représentation du parcours pour déterminer le point de rencontre est très claire. Les élèves, cependant, ne parviennent pas à faire la synthèse entre ce qu'ils représentent et ce qu'ils doivent précisément calculer.



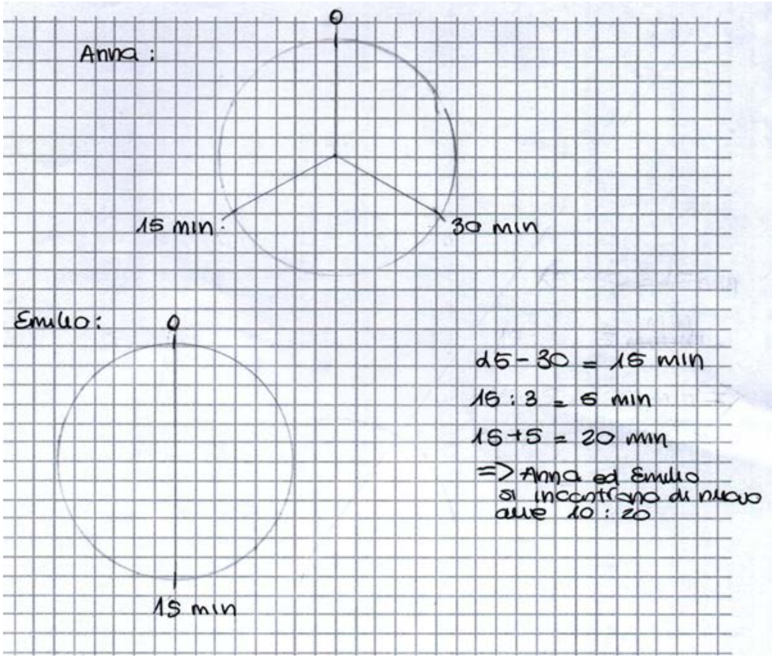
Ce trajet = 9450 m
45 mn x Anna
30 mn x Emilio

9450 : 45 = 210 m/mn
Anna 2/4 du parcours

9450 : 30 = 315 m/mn
Emilio ¾ du parcours

Nel seguente elaborato si nota una parziale sintesi tra rappresentazione e calcoli da effettuare. Infatti il disegno consente di determinare correttamente la posizione dei due personaggi dopo 15 minuti e di capire che l'incontro deve avvenire poco dopo, ma i successivi calcoli 45-30 e 15:3 non trovano corrispondenza in quanto rappresentato e conducono ad un risultato errato, benché plausibile.

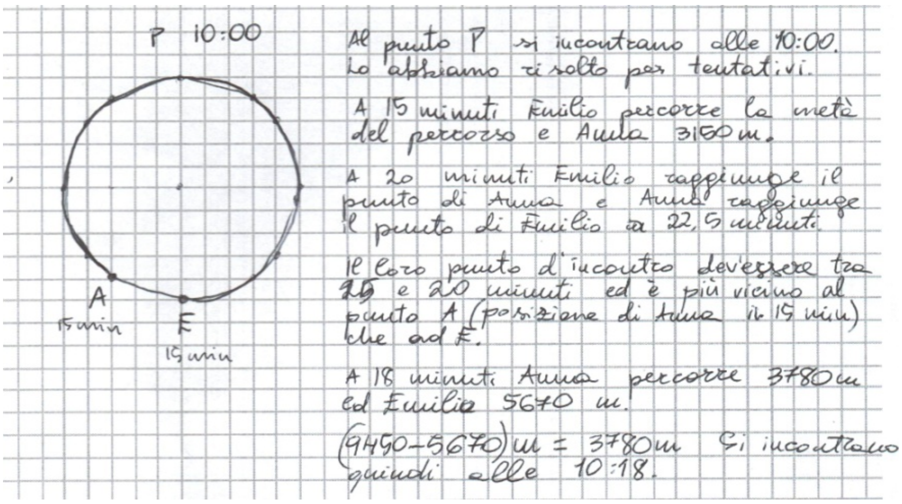
Dans la copie suivante, on peut voir une synthèse partielle entre la représentation et les calculs à effectuer. En fait, le dessin permet de déterminer correctement la position des deux personnages après 15 minutes et de comprendre que la rencontre doit avoir lieu peu après, mais les calculs ultérieurs 45–30 et 15:3 ne correspondent pas à ce qui est représenté et conduisent à un résultat incorrect, bien que plausible.



Anne et Émile se rencontreront de nouveau à 10 : 20.

La rappresentazione seguente risulta, invece, più efficace per condurre progressive approssimazioni sui minuti fino ad arrivare al valore richiesto.

La représentation suivante, en revanche, est plus efficace pour effectuer des approximations progressives infimes jusqu'à ce que la valeur requise soit atteinte.

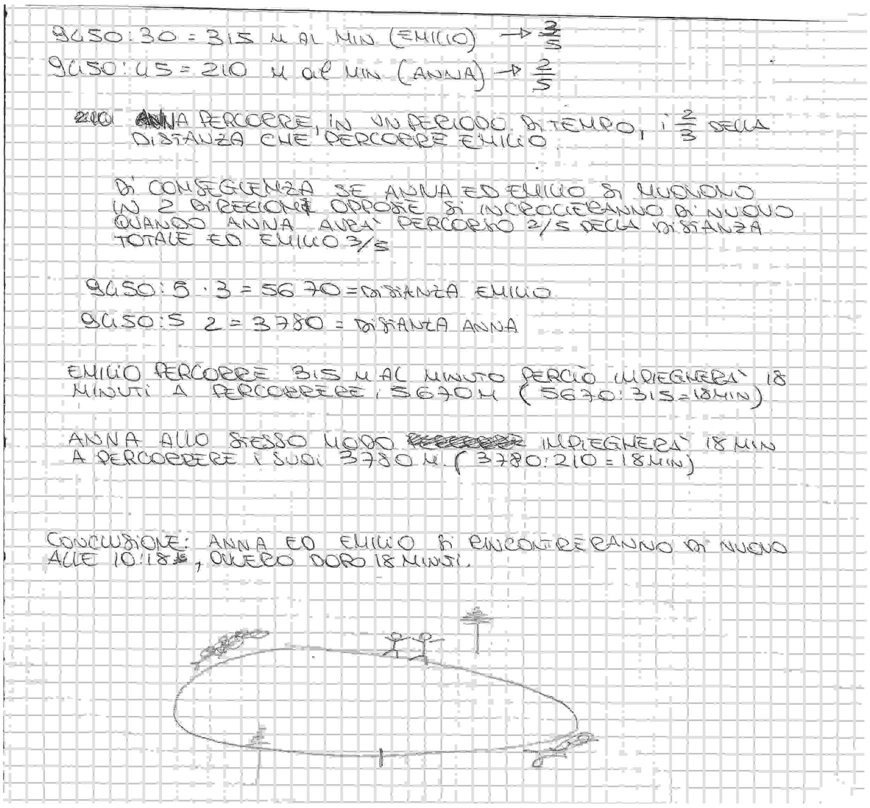


Au point P ils se rencontrent à 10.00. Nous avons trouvé le résultat par essais.
En 15 minutes Émile parcourt la moitié du parcours et Anne 3150 m.
En 20 minutes Émile atteint le point d'Anne et Anne atteint le point d'Émile en 22,5 minutes
Leur point de rencontre doit se situer entre 25 et 20 minutes et est plus proche du point A (position d'Anne après15 min) que de E
En 18 minutes Anne parcourt 3780 m et Émile 5670 m.
(9450 – 5670) m = 3780 m. Ils se rencontrent donc à 10 : 18.

5. Uso di rapporti / Utilisation de rapports

Una procedura non prevista dall'analisi *a priori* è quella di operare sui rapporti tra le velocità (e quindi le distanze percorse in tempi uguali) dei due personaggi. Come si nota anche dal disegno, in questo elaborato (Cat. 10) è ben chiaro che l'incontro avviene in un punto che suddivide la circonferenza in due parti di diversa lunghezza.

Une procédure non prévue par l'analyse *a priori* consiste à opérer sur les relations entre les vitesses (et donc sur les distances parcourues en temps égaux) des deux personnages. Comme on peut également le voir sur le dessin, dans cette copie (Cat.10), il est clair que la rencontre a lieu à un point qui divise le parcours en deux parties de longueurs différentes.


9450 : 30 = 315 M AL MIN (EMILIO) → 3/5
9450 : 45 = 210 M al MIN (ANNA) → 2/5
ANNA PERCORRE, IN UN PERIODO DI TEMPO, I 2/3 DELLA DISTANZA CHE PERCORRE EMILIO.
DI CONSEGUENZA SE ANNA ED EMILIO SI MUOVONO IN 2 DIREZIONI OPPOSTE SI INCROCERANNO DI NUOVO QUANDO ANNA AVRA' PERCORSO 2/5 DELLA DISTANZA TOTALE ED EMILIO 3/5
9450 : 5 · 3 = 5670 = DISTANZA EMILIO
9450 : 5 2 = 3780 = DISTANZA ANNA
EMILIO PERCORRE 315 M AL MINUTO PERCIÒ IMPIEGHERA' 18 MINUTI A PERCORRERE I 5670 M (5670 : 315 = 18 MIN)
ANNA ALLO STESSO MODO IMPIEGHERA' 18 MIN A PERCORRERE I SUOI 3780 M. (3780 : 210 = 18 MIN)
CONCLUSIONE: ANNA ED EMILIO SI RINCONTRERANNO DI NUOVO ALLE 10:18, OVVERO DOPO 18 MINUTI.

Anne parcourt en un temps les 2/3 de la distance que parcourt Émile.

Par conséquent, comme Anne et Émile se déplacent dans 2 directions opposées, ils se croiseront à nouveau quand Anne aura parcouru 2/5 de la distance totale et Émile 3/5.

Émile parcourt 315 m par minute alors il lui a fallu 18 minutes pour parcourir 5670 m

(5670 : 315 = 18 min)

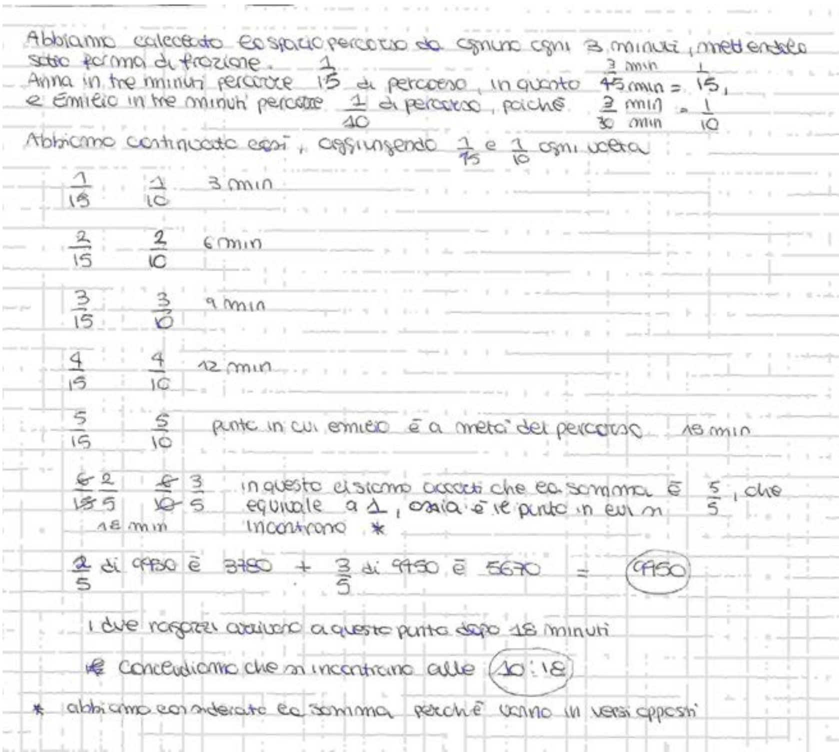
Anne de même a mis 18 min pour parcourir ses 3780 m

(3780 : 210 = 18 min)

Conclusion : Anne et Émile se rencontreront à nouveau à 10.18, c'est-à-dire après 18 minutes.

Il seguente elaborato (Cat. 10), ancora basato su rapporti di lunghezze, non fa ricorso, se non in una verifica nella parte finale, del dato della lunghezza del percorso. Tale dato (non presente nella versione originale del problema) è effettivamente superfluo, ma per poterne fare a meno occorre ragionare sui rapporti o fare uso del calcolo letterale, strategie non alla portata di tutti gli studenti di cat. 9 e 10. Il fatto di averlo aggiunto, sulla base dell'esperienza con problemi simili di precedenti rally, ha rappresentato un aiuto per chi ha scelto strategie più elementari e sicuramente migliorato la riuscita del problema.

La copie suivante (Cat. 10), encore basée sur des rapports de longueurs, n'utilise pas la longueur du parcours, sauf pour une vérification dans la partie finale. Cette donnée (non présente dans la version originale du problème) est effectivement superflue, mais pour pouvoir s'en passer, il faut utiliser des rapports ou faire usage d'un calcul littéral, stratégies qui ne sont pas à la portée de tous les élèves des cat.9 et 10. Le fait de l'avoir ajouté, sur la base de l'expérience avec des problèmes similaires de rallyes précédents, a été une aide pour ceux qui ont choisi des stratégies plus élémentaires et a certainement amélioré la réussite du problème.


Abbiamo calcolato lo spazio percorso da ognuno ogni 3 minuti, mettendolo sotto forma di frazione.
Anna in tre minuti percorre $\frac{1}{15}$ di percorso, in quanto $\frac{3\ min}{45\ min} = \frac{1}{15}$,
e Emilio in tre minuti percorre $\frac{1}{10}$ di percorso, poiché $\frac{3\ min}{30\ min} = \frac{1}{10}$
Abbiamo continuato così, aggiungendo $\frac{1}{15}$ e $\frac{1}{10}$ ogni volta

$\frac{1}{15}$ $\frac{1}{10}$ 3 min

$\frac{2}{15}$ $\frac{2}{10}$ 6 min

$\frac{3}{15}$ $\frac{3}{10}$ 9 min

$\frac{4}{15}$ $\frac{4}{10}$ 12 min

$\frac{5}{15}$ $\frac{5}{10}$ punto in cui emilio è a metà del percorso 18 min

$\cancel{\frac{6}{15}}\ \frac{2}{5}$ $\cancel{\frac{6}{10}}\ \frac{3}{5}$ in questo ci siamo accorti che la somma è $\frac{5}{5}$, che equivale a 1, ossia è il punto in cui si incontrano *
18 min

$\frac{2}{5}$ di 9450 è 3780 + $\frac{3}{5}$ di 9450 è 5670 = 9450

I due ragazzi arrivano a questo punto dopo 18 minuti

Concludiamo che si incontrano alle 10:18

* abbiamo considerato la somma perché vanno in versi opposti

Nous avons considéré la somme car ils vont dans des sens opposés

Nous avons calculé la distance parcourue par chacun toutes les 3 minutes, en la mettant sous la forme de fractions.

Anne en trois minutes parcourt 1/15 du parcours, en comptant 3 min/45 min = 1/15

et Émile en trois minutes parcourt 1/10 du parcours, car 3min/30min = 1/10.

Nous avons continué ainsi, en ajoutant 1/15 et 1/10 à chaque fois.

Point où Émile est à mi-parcours 18 min

*Ici nous voyons que la somme est 5/5, ce qui est égal à 1, c'est à dire que c'est le point où ils se rencontrent **

Les deux amis arrivent à ce point après 18 minutes.

Nous concluons qu'ils se rencontrent à 10.18

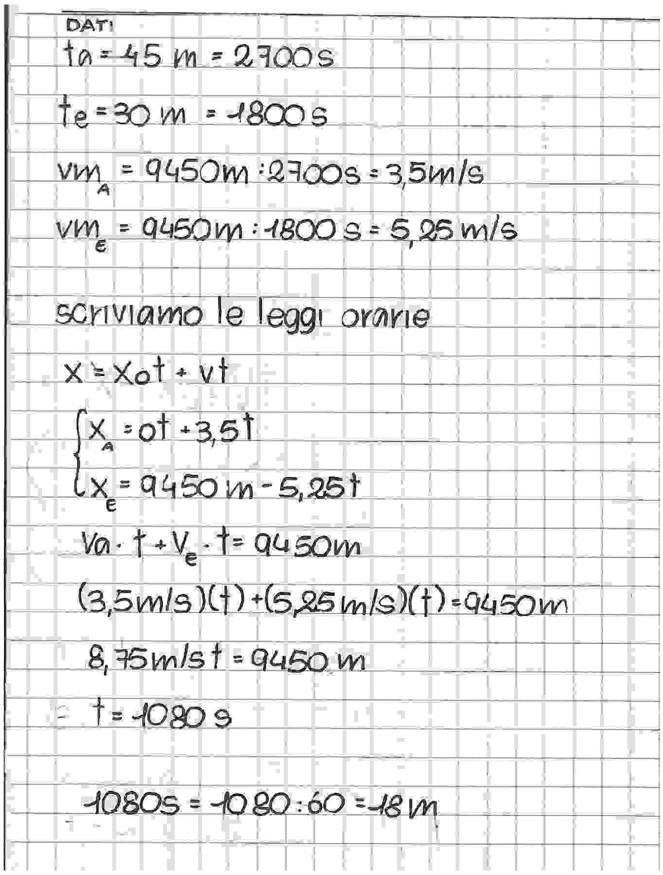
6. Uso delle leggi orarie / Utilisation de l'équation du mouvement

In cat.10, nelle classi che hanno avviato in fisica lo studio della cinematica, appare in modo abbastanza consistente la strategia basata sull'uso delle leggi orarie di due moti rettilinei uniformi. Si noti la padronanza del metodo da parte di questi studenti, in particolare nell'uso delle unità di misura, nella scelta di segni discordi per le velocità e dell'attribuzione della posizione iniziate 9450 m al personaggio che "torna indietro".

Questa strategia utilizza lo strumento funzione in modo algebrico, trovando l'istante di tempo dell'incontro mediante la risoluzione di un sistema.

En cat.10, dans les classes qui ont commencé à étudier la cinématique en physique, la stratégie basée sur l'utilisation des lois horaires de deux mouvements rectilignes uniformes apparaît de manière assez cohérente. On remarque la maîtrise de la méthode de la part de ces élèves, notamment dans l'utilisation des unités de mesure, le choix de notations différentes pour les vitesses et l'attribution de la position initiale 9450 m au personnage qui "tourne dans l'autre sens".

Cette stratégie utilise l'outil fonctionnel de manière algébrique, en trouvant l'instant de la rencontre par la résolution d'un système.



DATI

$ta = 45\ m = 2700\ s$

$te = 30\ m = 1800\ s$

$vm_A = 9450\,m : 2700\,s = 3{,}5\,m/s$

$vm_E = 9450\,m : 1800\,s = 5{,}25\,m/s$

scriviamo le leggi orarie

$x = x_0 t + vt$

$$\begin{cases} x_A = 0t + 3{,}5t \\ x_E = 9450\,m - 5{,}25t \end{cases}$$

$Va \cdot t + V_e \cdot t = 9450\,m$

$(3{,}5\,m/s)(t) + (5{,}25\,m/s)(t) = 9450\,m$

$8{,}75\,m/s\,t = 9450\,m$

$t = 1080\,s$

$1080\,s = 1080 : 60 = 18\,m$

Données

t_a = 45 m = 2700 s

t_e = 30 m = 1800 s

vm_A = 9450 m : 2700 s = 3,5 m/s

vm_E = 9450 m : 1800 s = 5,25 m/s

Nous écrivons la loi horaire

$x = x_0\, t + v\, t$

$x_A = 0\, t + 3{,}5\, t$

$x_E = 9450\ m – 5{,}25\, t$

$v_A\, t + v_E\, t = 9450\ m$

(3,5 m/s)(t) + (5,25 m/s)(t) = 9450 m

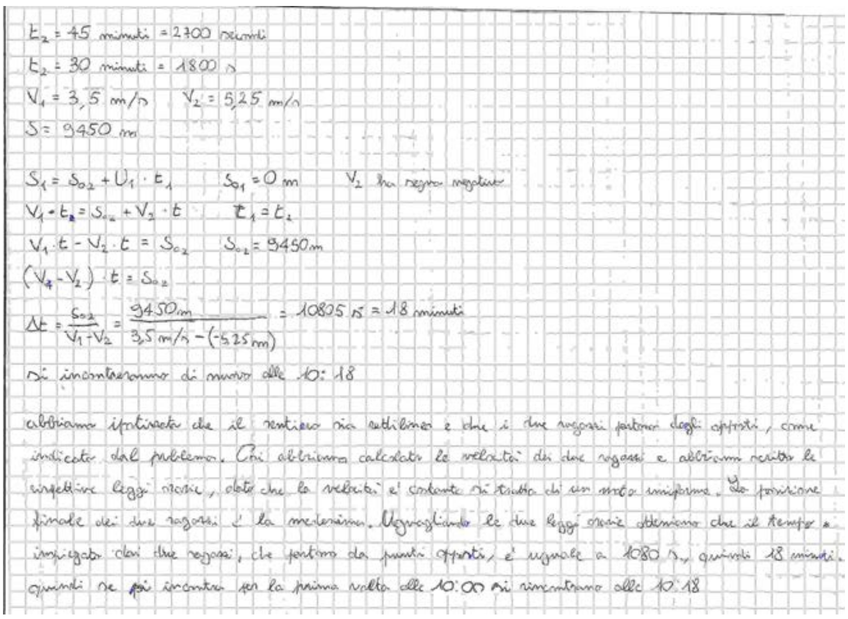
8,75 m/s t = 9450 m

t = 1080 s

1080 s = 1080 : 60 = 18 m

Questi studenti (Cat. 10) hanno sentito l'esigenza di spiegare dettagliatamente i loro calcoli come se non riconoscessero del tutto lecito l'uso degli strumenti della fisica nella risoluzione di problemi di matematica.

Dans la copie suivante (Cat. 10), les élèves ont ressenti le besoin d'expliquer leurs calculs en détail, comme s'ils ne reconnaissaient pas l'utilisation des outils de la physique dans la résolution des problèmes en mathématiques.



$t_1 = 45$ minuti $= 2700$ secondi

$t_2 = 30$ minuti $= 1800$ s

$V_1 = 3{,}5\ m/s \quad V_2 = 5{,}25\ m/s$

$S = 9450\ m$

$S_1 = S_{o2} + U_1 \cdot t_1 \qquad S_{o1} = 0\ m \qquad$ V_2 ha segno negativo

$V_1 \cdot t_1 = S_{o2} + V_2 \cdot t \qquad t_1 = t_2$

$V_1 \cdot t - V_2 \cdot t = S_{o2} \qquad S_{o2} = 9450\,m$

$(V_1 - V_2)\, t = S_{o2}$

$\Delta t = \frac{S_{o2}}{V_1 - V_2} = \frac{9450\,m}{3{,}5\,m/s - (-5{,}25\,m)} = 1080\,s = 18$ minuti

si incontreranno di nuovo alle 10:18

abbiamo ipotizzato che il sentiero sia rettilineo e che i due ragazzi partono dagli opposti, come indicato dal problema. Poi abbiamo calcolato le velocità dei due ragazzi e abbiamo scritto le rispettive leggi orarie, dato che la velocità e' costante si tratta di un moto uniforme. La posizione finale dei due ragazzi è la medesima. Uguagliando le due leggi orarie otteniamo che il tempo impiegato dai due ragazzi, che partono da punti opposti, e' uguale a 1080 s, quindi 18 minuti. quindi se si incontrano per la prima volta alle 10:00 si rincontrano alle 10:18

Nous avons supposé que le sentier est rectiligne et que les deux amis sont partis dans des directions opposées, comme l'indique le problème. Puis, nous avons calculé les vitesses des deux amis et nous avons écrit les lois horaires respectives de manière uniforme, étant donné que la vitesse est constante. La position finale des deux amis est la même. En comparant les deux lois horaires, nous obtenons que le temps qu'il faut pour les deux amis qui sont partis de points opposés, est égal à 1080 s, donc 18 minutes, donc se rencontrant pour la première fois à 10.00, ils se retrouveront à 10.18.

7. Conclusioni / Conclusions

In conclusione possiamo affermare che l'analisi degli elaborati ci ha positivamente stupito per la varietà delle risoluzioni, non tutte prevedibili nella fase di analisi a priori.

Notiamo che le soluzioni più "esperte", in particolare quelle che fanno uso esplicitamente delle espressioni della posizione in funzione del tempo, sono forse le meno interessanti e creative.

Abbiamo apprezzato l'uso intelligente dei rapporti, soprattutto nel caso in cui portino a riconoscere come superfluo il dato della lunghezza della pista. Anche gli elaborati che mostrano le difficoltà incontrate dagli allievi hanno il loro interesse, in quanto testimoniano il graduale e non facile passaggio da visioni più intuitive ad analisi più formalizzate che presuppongono una maggiore competenza sul concetto di funzione.

Dalle prestazioni degli allievi si evidenzia come un approccio "funzionale" più formalizzato, che non è certo naturale ed intuitivo, richieda tempi lunghi per divenire una vera competenza da mettere in atto: quando è possibile, a questo livello scolare, molti allievi lo sostituiscono con approcci aritmetici o grafici più immediati ed egualmente efficaci.

Rispetto ad altri problemi simili analizzati dal gruppo, ci sembra inoltre che questo problema favorisca maggiormente una riflessione sulle variabilità correlate, ovvero sulla considerazione simultanea di tutte le coppie oggetto-immagine delle due funzioni, piuttosto che focalizzare l'attenzione sulla determinazione attraverso una equazione di uno specifico valore della variabile tempo. Strategie algebriche come quella dell'elaborato seguente (Cat. 10), peraltro più rapide ai fini della determinazione della risposta al problema, sono state osservate in rari casi.

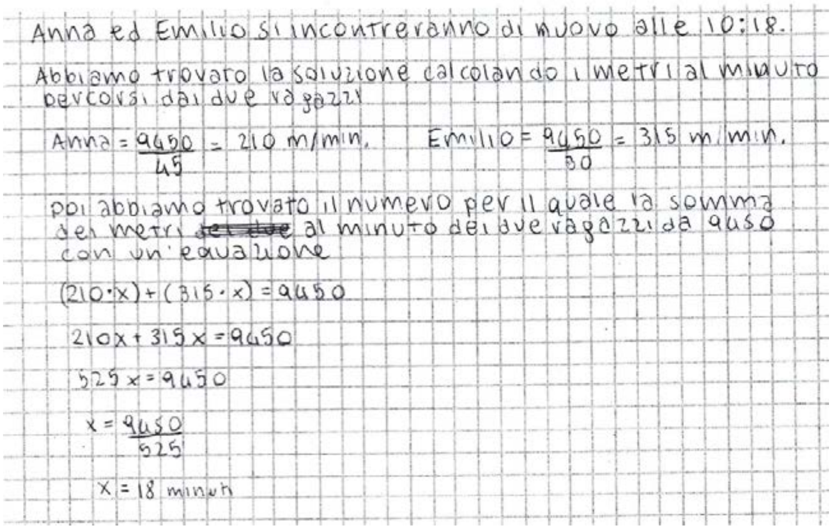
En conclusion, nous pouvons dire que l'analyse des copies nous a positivement surpris par la variété des résolutions, toutes n'avaient pas pu être prévues au moment de *l'analyse a priori.*

Nous constatons que les solutions les plus "expertes", notamment celles qui utilisent explicitement les expressions des positions en fonction du temps, sont peut-être les moins intéressantes et créatives.

Nous avons apprécié l'utilisation intelligente des rapports, notamment lorsqu'ils conduisent à reconnaître le caractère superflu de la donnée de la longueur du parcours. Les copies montrant les difficultés rencontrées par les élèves ont également leur intérêt, car elles témoignent du passage progressif et pas facile d'une vision intuitive à des analyses plus formelles qui présupposent une plus grande compétence sur le concept de fonction.

Les performances des élèves montrent qu'une approche "fonctionnelle" plus formalisée, qui n'est certainement pas naturelle et intuitive, prend beaucoup de temps pour devenir une véritable compétence à mettre en œuvre : chaque fois que cela est possible, à ce niveau scolaire, de nombreux élèves la remplacent par des approches arithmétiques ou graphiques plus immédiates et tout aussi efficaces.

Par rapport à d'autres problèmes similaires analysés par le groupe, il nous semble également que ce problème est plus propice à la réflexion sur les variabilités conjointes, c'est-à-dire à la prise en compte simultanée de tous les couples objet-image des deux fonctions, plutôt que de focaliser l'attention sur la détermination par une équation d'une valeur spécifique de la variable temps. Des stratégies algébriques telles que celle présentée dans la copie suivante (Cat. 10) qui permettent d'obtenir plus rapidement la réponse au problème, ont été observées dans de rares cas.


Anna ed Emilio si incontreranno di nuovo alle 10:18.

Abbiamo trovato la soluzione calcolando i metri al minuto percorsi dai due ragazzi

Anna = $\frac{9450}{45}$ = 210 m/min. Emilio = $\frac{9450}{30}$ = 315 m/min.

poi abbiamo trovato il numero per il quale la somma dei metri ~~dei due~~ al minuto dei due ragazzi da 9450 con un'equazione

$(210 \cdot x) + (315 \cdot x) = 9450$

$210x + 315x = 9450$

$525x = 9450$

$x = \frac{9450}{525}$

$x = 18$ minuti

Anne et Émile se rencontreront de nouveau à 10 :18.

Nous avons trouvé la solution en calculant les mètres par minute parcourus par les deux amis.

Anna = 9450 / 45 = 210 m/min.
Emilio = 9450 / 30 = 315 m/min.

Puis nous avons trouvé la somme des mètres par minute pour les deux amis à l'aide d'une équation.

Pensiamo quindi che il problema possa trovare spazio ed essere rappresentativo nel *percorso di costruzione* del concetto di funzione. Ci sembra che esso possa attivare strategie e rappresentazioni spontanee, superando il puro utilizzo di formule indotto da un insegnamento più tradizionale.

È opportuno che gli insegnanti siano consapevoli della necessità di un percorso mirato, in tutti i livelli scolari, alla costruzione del concetto di funzione, e della necessità di riprendere nell'analisi e nelle discussioni di classe l'individuazione delle grandezze variabili in un contesto, tra loro dipendenti, e delle diverse modalità di esprimere e rappresentare tale dipendenza.

Tutto ciò rafforza la nostra convinzione che le attività didattiche miranti alla costruzione di tale concetto debbano essere intraprese con attenzione e consapevolezza sin dalle prime esperienze matematiche degli allievi, e che vadano studiate e discusse tutte quelle esperienze, modalità e strategie che gli insegnanti possono mettere in atto al fine di condurre gli allievi *dall'idea di funzion*e, che già i più piccoli intuiscono attraverso il confronto e il riconoscimento di variabili e costanti, alla complessità del *concetto matematico* da acquisire più a lungo termine.

Nous pensons donc que ce problème peut trouver sa place et être représentatif dans la construction du concept de fonction. Il nous semble qu'il peut activer des stratégies et des représentations spontanées, allant au-delà de la pure utilisation de formules, induite par un enseignement plus traditionnel.

Les enseignants doivent être conscients de la nécessité d'un parcours visant, à tous les niveaux scolaires, la construction du concept de fonction, et de la nécessité de reprendre dans les analyses et les discussions en classe l'identification de quantités variables dans un contexte, dépendantes les unes des autres, et des différentes manières d'exprimer et de représenter cette dépendance.

Tout cela renforce notre conviction que les activités didactiques visant la construction d'un tel concept doivent être étudiées et discutées avec attention dès les premières expériences mathématiques des élèves, ainsi que toutes les expériences, méthodes et stratégies que les enseignants peuvent mettre en œuvre pour introduire chez les élèves l'idée de fonction, dont les plus jeunes en ont déjà une intuition, par la comparaison et la reconnaissance de variables et de constantes, allant jusqu'à la complexité du concept mathématique à acquérir à plus longue échéance.

ÉTUDES / APPROFONDIMENTI

DA SETTE POLIGONI A… SETTE POLIGONI

DE SEPT POLYNONES À … SEPT POLYGONES

Analisi a posteriori del problema "I sette poligoni" e delle due versioni del problema "Il Tangram del falegname" / Analyse a posteriori du problème « Les sept polygones » et de deux versions du problème « Le Tangram du menuisier »

Paola Bajorko, Brunella Brogi, Fabio Brunelli, Federica Curreli, Speranza Dettori, Florence Falguères, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Elisabetta Mari, Elsa Renna, Patrizia Sabatini, M. Agostina Satta, Cinzia Utzeri, Vincenza Vannucci[1]

Gruppo geometria per i grandi

1. Introduzione

Il titolo di questo articolo fa riferimento alle analisi a posteriori di due problemi del 29° RMT, uno proposto nella prima prova e l'altro, in due versioni, proposto nella seconda prova.

I due problemi hanno come titoli "I sette poligoni" e "Il Tangram del falegname (I e II)" e, pur avendo entrambi a che fare con sette poligoni, non richiedono esattamente i medesimi contenuti matematici.

Per l'uno si tratta di "confrontare le aree di sette figure disegnate su una griglia a maglie quadrate i cui vertici sono sui nodi della griglia" e per l'altro "a partire dal disegno di un Tangram e dei suoi sette pezzi, trovare la misura del lato del Tangram conoscendo la misura del lato del quadrato piccolo (6 cm); oppure per la versione II "… sapendo che il lato del quadrato piccolo misura *u*."

L'idea di un problema basato sul Tangram risale al luglio 2018, mentre la proposta del problema dei sette poligoni è del maggio del 2019.

Le ampie discussioni in seno al gruppo, svolte sia per email, sia in incontri virtuali, ~~e~~ sia nell'ambito dei lavori di gruppo ai convegni di Pont Saint Martin (2018) e di Alghero (2019), conducono dalle idee iniziali alle versioni sottoposte dal gruppo stesso all'attenzione del GIPL e infine alle versioni definitive.

Presentiamo qui di seguito le fasi salienti di questo percorso di preparazione per entrambi i problemi, così come si sono sviluppate talvolta in italiano e talvolta in francese (e ne abbiamo conservato i colori a suo tempo utilizzati), prima di presentare le analisi a posteriori che evidenzieranno comunque le difficoltà di "mettersi davvero nella testa degli allievi", pur tenendo conto di analisi di tanti altri problemi di geometria del nostro RMT. Le analisi a posteriori svolte dai membri del gruppo sono riportate nella loro lingua originale.

Le titre de cet article fait référence à l'analyse a posteriori de deux problèmes du 29^{e} RMT, l'un proposé dans la première épreuve et l'autre, en deux versions, proposé dans la seconde épreuve.

Les deux problèmes ont pour titres « Les sept polygones » et « Le Tangram du menuisier (I et II) » et, bien que chaque fois on est en présence de sept polygones, leurs contenus mathématiques ne sont pas exactement les mêmes.
Pour l'un il s'agit de « comparer les aires de sept figures dessinées sur une grille à mailles carrées dont les sommets sont sur les nœuds de la grille » et pour l'autre « à partir du dessin d'un Tangram et de ses sept pièces, trouver la mesure du côté du Tangram connaissant la mesure du côté du petit carré (6 cm) ; ou pour la version II "... sachant que le côté du petit carré mesure *u*."
L'idée d'un problème basé sur le Tangram remonte à juillet 2018, tandis que la proposition du problème des sept polygones remonte à mai 2019.
Les discussions approfondies au sein du groupe, menées tant par e-mail que dans des réunions virtuelles, et dans le cadre des travaux de groupe lors des rencontres de Pont Saint Martin (2018) et d'Alghero (2019), conduisent des premières idées aux versions proposées au GPIL par le groupe et enfin aux versions finales.
Dans la première partie de l'article, nous présentons les phases saillantes de ce parcours de préparation aux deux problèmes telles qu'elles se sont développées quelquefois en italien et quelquefois en français. (En conservant les couleurs des différentes interventions.)

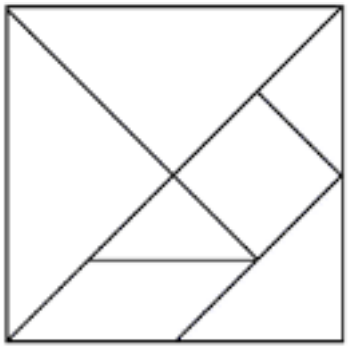
[1] Le Groupe Géométrie pour les grands, est constitué aussi par d'autres membres / Il Gruppo di Geometria per i grandi comprende anche i seguenti membri: Bernard Anselmo, Cristina Caredda, Florence Falguères, Silvia Mazzucco, Francesca Michienzi, Lucia Palmas, Luciana Rapposelli, Rosanna Sanna.

Dans la deuxième, nous présentons les analyses a posteriori qui font apparaître les difficultés à « se mettre vraiment dans la tête des élèves », tout en tenant compte de l'analyse de nombreux autres problèmes de géométrie de notre RMT. Les analyses a posteriori des différents membres du groupe, sont rapportés dans leurs langues d'origine.

2. Il Tangram del falegname, dall'idea iniziale alla sua evoluzione / Le Tangram du menuisier, de l'idée initiale à son évolution

2.1 L'idea (luglio 2018)

Da un Tangram, per esempio in questa configurazione:



chiedere di trovare le varie aree dicendo che ci sono un quadrato grande e un quadrato piccolo il cui lato è 6 cm e che oltre ai quadrati e ai triangoli c'è anche un parallelogramma.

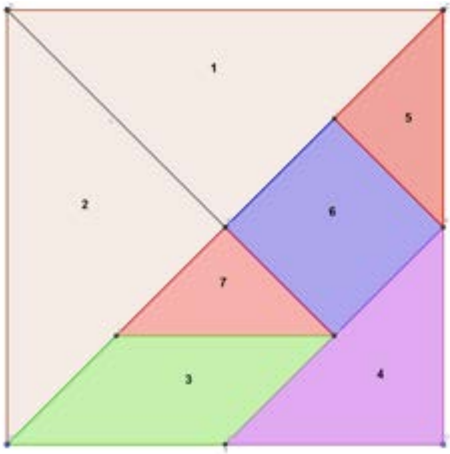
Considerazioni per il compito per l'allievo:

I due quadrati danno gli angoli di 45° e dunque i triangoli sono isosceli rettangoli.

…

2.2 Una prima proposta di contesto e analisi (agosto 2018)

Un falegname costruisce Tangram in legno a partire da quadrati di varie misure per rivenderli.
Il kit completo ha un prezzo, ma a volte i clienti chiedono soltanto alcuni pezzi singoli perché li perdono. Quindi lui deve dare un prezzo anche ai singoli pezzi e questo dipenderà non solo dalla porzione di Tangram interessata, ma anche dalla complessità con la quale i singoli pezzi sono stati ottenuti.



Infatti, mentre è abbastanza semplice ottenere i triangoli 1 e 2, il parallelogramma 3 deve essere ottenuto con più tagli e particolare precisione.
Nel rimettere a posto i suoi kit il falegname ne trova uno del quale però si è scordato di scrivere il lato di partenza.
Si ricorda però che il quadrato piccolo (il numero 6) ha il lato di 6 cm.
Può ricavare le aree di tutti i pezzi singoli e quindi stabilire i loro prezzi.

Trovate anche voi le aree di tutti i pezzi singoli di quest'ultimo kit del falegname.
Spiegate nei dettagli la vostra procedura.

Compito matematico
Trovare l'area delle porzioni del quadrato grande del Tangram a partire dal lato del quadrato piccolo interno.

Analisi del compito
-rendersi conto che a partire dal lato del quadrato piccolo interno (numero 6) si può ricavare l'area del quadrato complessivo.
Questo può essere fatto con varie considerazioni geometriche oppure sapendo che per costruire il Tangram dopo aver tracciato la diagonale AC e la mezza diagonale DE del quadrato grande che permettono di ottenere i triangoli 1 e 2, bisogna unire i punti medi dei lati AB e BC per ottenere il lato FG e quindi unire F con il punto medio di EC, trovare H punto medio di FG ed unirlo ad E e ad L, punto medio di AE.
-considerare quindi che il lato del quadrato, es BC è il doppio della diagonale del quadrato 6, quindi misurerà $12\sqrt{2}$ cm e quindi l'area del quadrato ABCD sarà di 288 cm^2.
-considerare che le aree delle figure possono essere ottenute come frazione del quadrato quindi
1 e 2 che sono $\frac{1}{4}$ quindi 72 cm^2
6 sarà 36 cm^2
5 e 7 saranno entrambi la metà di 36 cm^2 quindi 18 cm^2
4 è $\frac{1}{8}$ del quadrato grande, quindi 36 cm^2
3 lo si può ottenere per differenza togliendo dal quadrato grande tutte le aree note, ottenendo ancora 36 cm^2.

Oppure lavorare sui lati delle figure partendo dal lato noto HF di 6 cm che permette di ottenere per esempio FI $6\sqrt{2}$ cm e quindi gli altri lati.

2.3 Qualche cambiamento (settembre 2018)

Semplificazione dell'enunciato e soppressione del riferimento ai prezzi perché poi non figurano nelle consegne. Foto di un Tangram in legno.

Un falegname costruisce Tangram in legno a partire da quadrati di varie misure per rivenderli.

A volte i clienti tornano dal falegname per chiedere soltanto alcuni pezzi singoli perché li perdono.
Un cliente un giorno gli porta il quadrato piccolo interno di un Tangram che aveva comprato e gli chiede di ricostruire gli altri pezzi di cui vorrebbe anche conoscere le aree.
Il quadrato piccolo ha il lato di 6 cm e il falegname, prima di costruire gli altri pezzi, ne trova le aree rispettive.

Trovate anche voi le aree di tutti i pezzi singoli e trovate il lato del Tangram.
Spiegate nei dettagli la vostra procedura.

ANALISI A PRIORI
Compito matematico
Trovare l'area di sei pezzi di un tangram a partire dal lato del pezzo che ha la forma di quadrato piccolo interno e trovare la misura del lato dell'intero tangram.
Analisi del compito

-Rendersi conto che a partire dal lato del quadrato piccolo interno (numero 6) si può ricavare l'area del quadrato complessivo.
Questo può essere fatto con varie considerazioni geometriche oppure sapendo che per costruire il tangram dopo aver tracciato la diagonale AC e la mezza diagonale DE del quadrato grande (con vertici A, B, C, D) che permettono di ottenere i triangoli 1 e 2, bisogna unire i punti medi dei lati AB e BC per ottenere il lato FG e quindi unire F con il punto medio di EC, trovare H punto medio di FG ed unirlo ad E e ad L, punto medio di AE.
-Considerare quindi che il lato del quadrato, es BC è il doppio della diagonale del quadrato 6, quindi misurerà $12\sqrt{2}$ cm e quindi l'area del quadrato ABCD sarà di 288 cm^2.
-considerare che le aree delle figure possono essere ottenute come frazione del quadrato quindi
1 e 2 che sono $\frac{1}{4}$ quindi 72 cm^2
6 sarà 36 cm^2
5 e 7 saranno entrambi la metà di 36 cm^2 quindi 18 cm^2
4 è $\frac{1}{8}$ del quadrato grande, quindi 36 cm^2
3 lo si può ottenere per differenza togliendo dal quadrato grande tutte le aree note, ottenendo ancora 36 cm^2.
DISEGNO CON LE LETTERE OPPORTUNE
Oppure lavorare sui lati delle figure partendo dal lato noto HF di 6 cm che permette di ottenere per esempio FI $6\sqrt{2}$ cm e quindi gli altri lati.
Ricerca del lato del quadrato grande

2.4 Discussione a Pont Saint Martin (ottobre 2018)

Si interviene sull'enunciato che, per alcuni dei presenti, appare piuttosto lungo. Per esempio viene accolta la proposta di sostituire *"da quadrati"* con *"tavolette quadrate"*, si discute sulla necessità di lasciare l'aggettivo *"quadrato"* perché si evita agli alunni di ricorrere alla misurazione della figura per verificare la congruenza dei lati. Sulla foto non sembra del tutto visibile lo spazio presente tra il bordo superiore del parallelogramma e l'ipotenusa del piccolo triangolo isoscele adiacente. Per evitare che le due figure vengano interpretate come un unico tassello, si suggerisce di scrivere *"gli altri 6 pezzi"* invece di *"gli altri pezzi"*, così da mettere in evidenza che il numero totale dei pezzi è 7.
La discussione si porta poi sul concetto di *"Compito matematico"* e su quanto indicato nell'analisi a priori. "Compito matematico è tutto quello che di matematico c'è dentro quel problema, indipendentemente dalle procedure utilizzate dagli alunni", o, in sintesi *"Il compito matematico è tutto quello che rimane da fare quando non c'è più il contesto"* (François).
Per quanto riguarda l'analisi del compito, si puntualizzano gli aspetti seguenti:

- osservare e analizzare i 7 pezzi in merito alla loro forma, alle loro superfici, ai loro lati e al rapporto tra le superfici e i lati (appropriazione del problema).
- Ricorso a qualche piccola deduzione: visto che il quadrato piccolo ha il lato di 6 cm e area di 36 cm^2, i due triangoli piccoli hanno due lati di 6 cm e area di 18 cm^2; l'ipotenusa del triangolo piccolo ha la stessa lunghezza della diagonale del quadrato piccolo.
- Vedere che nel Tangram ci sono 16 triangoli piccoli.

I successivi interventi si sviluppano intorno ad altre possibili procedure degli allievi i quali, a partire dalle informazioni fornite dal testo, potrebbero ridisegnare la figura con le dimensioni reali, quindi fornire la risposta attraverso la misurazione del lato del Tangram disegnato, senza operare nessun calcolo. Oppure potrebbero trovare la riposta attraverso l'uso della proporzionalità. Viene anche sottolineato che, se non si ritiene adeguato il ricorso alla misurazione, occorre scriverlo nell'enunciato.
La discussione porta alla decisione di predisporre due versioni del problema, una per le categorie 6 e 7, con la misura del quadrato piccolo di 6 cm e l'altra per le categorie 8, 9 e 10 con una misura generica *u* del lato del quadrato piccolo. La proposta di lavorare con un'unità generale *u*, evita di dire che non vanno prese le misure, anche perché non è pensabile che un falegname non prenda misure!

2.5 Dopo il convegno (2 novembre 2018)

Le due versioni del problema a partire dalla discussione a Pont Saint Martin, con proposte in forma talvolta bilingue che rispecchiano la discussione avvenuta:

IL TANGRAM DEL FALEGNAME (Cat. 6, 7)

Un falegname costruisce Tangram in legno a partire da quadrati di varie misure per rivenderli.
Un giorno un cliente gli porta il quadrato piccolo interno di un Tangram e gli chiede di ricostruire gli altri sei pezzi.
Il quadrato piccolo ha il lato di 6 cm.

Quanto misura il lato del Tangram che il falegname deve costruire?
Spiegate nei dettagli la vostra procedura.

ANALISI A PRIORI
Compito matematico

A partire dalla foto di un Tangram e dei suoi sette pezzi, trovare la misura del lato del Tangram conoscendo la misura del lato (6 cm) del quadrato piccolo.

Analisi del compito

- Osservare e analizzare globalmente la figura: vedere che c'è un quadrato grande (al quale si fa riferimento nell'enunciato) e che è ricoperto esattamente da sette pezzi: cinque triangolo (due grandi, uno medio e due piccoli, un quadrato piccolo) e un altro pezzo (al quale bisognerà dare un nome e vederne le proprietà).
- Cercare qualche relazione tra le misure dei lati, degli angoli e delle aree di queste figure: angoli retti, con osservazioni più precise e deduzioni elementari, sia visive sia per manipolazione di pezzi dopo ritagli: per esempio:
  - I due triangoli grandi costituiscono la metà del quadrato grande, lungo una delle sue diagonali, uno di essi è rettangolo in quanto è adiacente al quadrato piccoli, l'altro è rettangolo per simmetria, sono pertanto uguali e rettangoli.
  - Il lato comune di questi due triangoli si trova sulla seconda diagonale del quadrato grande e anche se non è tracciata completamente deve arrivare al vertice in basso a destra.
  - Se si immagina di ritagliare il quadrato piccolo lungo la sua diagonale verticale, si osserva che si ottengono due triangoli, fra i quali quello a sinistra si può sovrapporre al triangolo piccolo a destra nel Tangram con una traslazione di 6 cm lungo una delle due diagonali del quadrato grande, cosa che conferma la stima visiva immediata secondo cui i triangoli piccoli sono la metà del quadrato piccolo, che i loro cateti misurano anch'essi 6 cm e di conseguenza che i cateti dei triangoli grandi misurano 12 cm.
  - I lati del quadrilatero ancora "indeterminato" sono paralleli due a due: si tratta dunque di un parallelogramma di cui due lati misurano 6 cm e gli altri due sono congruenti alla diagonale e ai lati maggiori (l'ipotenusa) dei triangoli piccoli del quadrato piccoli.

Per calcolare la lunghezza del lato del quadrato grande tramite alcune delle constatazioni precedenti:

- determinare l'area del quadrato grande come quella di 16 triangoli piccoli o di 8 quadrati ($16 \times 18 = 8 \times 36 = 288$ in cm^2 e calcolare la sua radice quadrata con la calcolatrice
- determinare la diagonale del quadrato piccolo con il teorema di Pitagora ($\sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$) oppure immaginando o costruendo un nuovo quadrato sulla diagonale del quadrato piccolo composto da quattro triangoli piccoli e di area (in cm^2)$72 = 4 \times 18$

- disegnare il Tangram completo a partire da un quadrato di lato 6 cm, poi delle due diagonali del quadrato grande di 24 cm e misurare la lunghezza del lato del quadrato grande (determinato dalle estremità delle sue diagonali) per trovare una misura tra 16,8 e 17,0 cm.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

A partire dalla foto di un Tangram e dei suoi sette pezzi, trovare la misura del lato del Tangram conoscendo la misura del lato (6 cm) del quadrato piccolo.

Analyse de la tâche

- Observer et analyser globalement la figure: voir qu'il y a un grand carré (indiqué par l'énoncé) et qu'il est recouvert exactement par sept pièces : cinq triangles, (deux grands, un moyen et deux petits, un petit carré (indiqué par l'énoncé) et l'autre pièce (dont on en connaît pas encore le nom ni les propriétés)
- Chercher quelques relations entre les mesures des côtés, des angles et des aires de ces figures: angles droits, par des observations plus précises et déductions élémentaires, soit visuelles soit par manipulations des pièces après découpages: Par exemple:
  - les deux grands triangles constituent la moitié du grand carré, le long d'une de ses diagonales, l'un d'eux est rectangle car il est adjacent au petit carré, l'autre est rectangle ausi par symétrie, ils sont donc égaux et rectangles.
  - Le côté commun de ces deux grands triangles est la deuxième diagonale du grand carré qui, même si elle n'est pas dessinée entièrement, doit aboutir au sommet en bas à droite.
  - Si on imagine le découpage du petit carré par sa diagonale verticale, on remarque qu'on obtient deux triangles, dont celui de gauche peut se superposer au petit triangle à droite du tangram par une translation de 6 cm le long d'une diagonale du grand carré, ce qui confirme l'estimation visuelle immédiate que les petits triangles sont des moitiés du petit carré, que leurs côtés de l'angle droit mesurent aussi 6 cm et par conséquent les côtés de l'angle droit des grands triangles mesurent 12 cm.
  - Les côtés du quadrilatère encore indéterminé sont parallèles deux à deux: il s'agit donc d'un parallélogramme dont deux côtés mesurent 6 cm et les deux autres sont isométriques à la diagonale du petit carré et aux grands côtés des petits triangles.

Pour calculer la longueur du côté du grand carré à l'aide de certaines des constatations précédentes:

- déterminer l'aire du grand carré comme celle de 16 petits triangles ou de 8 petits carrés ($16 \times 18 = 8 \times 36 = 288$ en cm^2 et calculer sa racine carrée à la calculatrice.
- déterminer la diagonale du petit carré soit par Pythagore ($\sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$) soit en imaginant ou contruisant un nouveau carré sur la diagonale du petit carré, composé de quatre petits triangles et d'aire $72 = 4 \times 18$
- dessiner le tangram complet à partir d'un carré de 6 cm de côté puis des deux diagonales du grand carré de 24 cm et mesurer la longueur de grand carré (déterminé par les extrémités de ses diagonales) pour trouver une mesure entre 16,8 et 17,0 cm.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (la misura del lato del Tangram è $\sqrt{288}$, oppure de 16,8 à 17,0 in caso di determinazione tramite disegno (en cas de détermination par dessin) oppure 16,9 oppure 16,92, etc con la calcolatrice) oppure $12\sqrt{2}$ per coloro che ricordino la formula $l\sqrt{2}$ con esplicitazione delle deduzioni necessarie sulle uguaglianze percepite tra lunghezze e/o aree delle parti o con disegno molto preciso in grandezza effettiva (pour ceux qui auraient retenu la formule $c\sqrt{2}$ avec explicitation des déductions nécessaires sur les égalités perçues entre longueurs et/ou aires des parties ou par un dessin très précis en vraie grandeur.) A ce propos, il faut remarquer que le “6 cm” de la donnée permet de dessiner le grand carré en vraie grandeur sur une feuille A4. et que si on proposait par exemple 10 cm il faudrait une construction à une échelle réduite)

3 Risposta corretta (la misura del lato del Tangram è $\sqrt{288}$, oppure tra 16,5 e 16,7 o tra 17,1 e 17,3 in caso di determinazione tramite disegno (en cas de détermination par dessin) oppure 16,9 oppure 16,92, etc con la calcolatrice) con spiegazioni solo di qualche deduzione sulle uguaglianze percepite tra lunghezze e/o aree delle parti o con disegno leggermente impreciso in grandezza effettiva (avec explicitation de seulement quelques déductions sur les égalités perçues entre longueurs et/ou aires des parties ou par un dessin légèrement imprécis en vraie grandeur)

2 Risposta corretta (la misura del lato del Tangram è $\sqrt{288}$, oppure minore (inférieure à) di 16,5 o maggiore (ou supérieure à) a 17,3 nel caso di determinazione con il disegno (en cas de détermination par dessin) oppure 16,9 oppure 16,92, etc con la calcolatrice) senza alcun'altra spiegazione (sans aucune autre explication)

1 Risposta con ricerca corretta che si ferma all'area del Tangram senza dettagli

oppure risposta corretta (con approssimazione) ottenuta con misure e dettagli (dai quali si capisca che è stato fatto il rapporto tra la misura del disegno e il lato di 6 cm del quadrato piccolo) oppure inizio corretto di ricerca con alcune considerazioni sui pezzi del Tangram

0 Incomprensione del problema

IL TANGRAM DEL FRATELLO DEL FALEGNAME (Cat. 8, 9, 10)

Un falegname costruisce Tangram in legno a partire da quadrati di varie misure.
Un giorno sfida il fratello matematico e gli chiede di dirgli quanto misura il lato del Tangram se il lato del quadrato piccolo misura *u*.

Trovate anche voi quanto misura il lato del Tangram se il lato del quadrato piccolo misura *u*.
Spiegate nei dettagli la vostra procedura.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

A partire dalla foto di un Tangram e dei suoi sette pezzi, trovare la misura del lato del Tangram sapendo che il lato del quadrato piccolo misura *u*.

Analisi del compito

- Osservare e analizzare i sette pezzi in merito alla loro forma, alle loro superfici, ai loro lati e ai rapporti fra le superfici e ai lati (ci sono superfici uguali? lati uguali? superfici l'una doppia dell'altra? lati uno doppio dell'altro?...)

- Ricorso a qualche "piccola" deduzione: osservando, ad esempio che gli angoli in cui la diagonale del quadrato grande li divide in due, misurano 45° e che quindi il triangolo piccolo in alto a sinistra è un triangolo rettangolo isoscele, così come è isoscele l'altro triangolo piccolo. Visto che il quadrato piccolo ha il lato di *u* e quindi area u^2, i due triangoli piccoli hanno due lati lunghi *u* e un'area di ½ u^2, l'ipotenusa di un triangolo piccolo è uguale alla diagonale del quadrato piccolo ($u\sqrt{2}$), il parallelogramma ha due lati uguali all'ipotenusa del triangolo piccolo e due lati uguali al lato del quadrato, il triangolo medio ha l'ipotenusa di 2 *u* (2 volte il lato del quadrato) ed è diviso in 2 triangoli rettangoli isosceli dalla diagonali e hanno pertanto due lati di lunghezza *u* e si ritrova un triangolo piccolo.

- Dedurre la misura del lato del Tangram: $2\sqrt{2}\,u$.

Oppure capire che è possibile trovare il lato del Tangram a partire dalla sua area per trovare la quale è necessario trovare le misure delle aree dei suoi pezzi (si veda più sopra): quadrato piccolo u^2, triangoli piccoli ½ u^2 ciascuno, il triangolo medio è anch'esso rettangolo isoscele ed è diviso in due triangoli uguali dalla diagonale del quadrato grande che sono some i due piccoli precedenti, quindi ciascuno di area ½ u^2; se si divide in due il parallelogramma, per le considerazioni precedenti, dà luogo ancora a due triangoli piccoli come i precedenti. La sua area è dunque u^2. L'area della metà del quadrato è pertanto: $u^2 + u^2 + u^2 + ½\,u^2 + ½\,u^2 = 4\,u^2$.

L'area totale misura dunque 8 u^2.

Oppure tener conto delle "deduzioni" precedenti e capire che il quadrato grande è composto da 16 triangoli piccoli che danno un'area totale di ½ u^2 x 16 = 8 u^2

La misura del lato è allora $2\sqrt{2}\,u$.

Attribuzione dei punteggi (ancora in forma "minimale")

4 Risposta corretta (la misura del lato del Tangram è $2\sqrt{2}\,u$) con spiegazione dettagliata della procedura

3 Risposta corretta (la misura del lato del Tangram è $2\sqrt{2}\,u$) con spiegazione non del tutto dettagliata della procedura
oppure ricerca corretta che si ferma all'area del Tangram con spiegazione dettagliata della procedura

2 Risposta corretta (la misura del lato del Tangram è $2\sqrt{2}\,u$, senza i dettagli della procedura

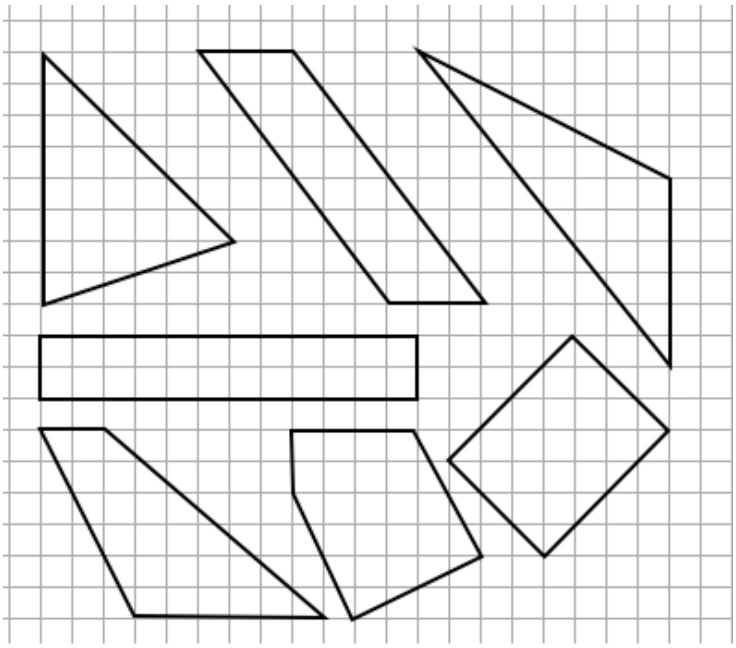
1 Risposta con ricerca corretta che si ferma all'area del Tangram senza dettagli
- oppure inizio corretto di ricerca con alcune considerazioni sui pezzi del Tangram
0 Incomprensione del problema oppure risposta con misure sulla figura del Tangram

2.6 Ci siamo quasi (dicembre 2018-gennaio 2019)

La discussione prosegue e si giunge alle versioni (I e II) della seconda prova del 29° RMT dove alla foto del Tangram in legno (in quanto "oggetto" reale), il GPIL sostituisce un disegno con l'intento di rendere la figura più chiara (purtroppo, in ogni modo, diversi elaborati mostrano che sono state distribuite fotocopie con la figura molto scura!).

3. I sette poligoni, dalla proposta iniziale alla sua evoluzione

3.1 La proposta di problema (27 maggio 2019)
Les 7 polygones (Cat 6, 7, 8)



Comparez les aires de ces sept polygones

Il ne s'agit que d'une idée pour vérifier /confirmer les observations faites lors de l'analyse a posteriori de 26.I.12 Comparaisons de figures sur la prise en compte, ou non, du quadrillage pour déterminer l'aire des figures. Dans ce cas, la méthode par « mesures » en cm ne va pas permettre de décider si les aires sont vraiment égales (24 carreaux) en raison des approximations des mesures.
L'idée est que les élèves constatent que l'aire du rectangle est 24 (en carreaux) puis qu'ils appliquent les formules (triangles, parallélogramme, trapèze) ou le comptage des carrés (rectangle) ou la décomposition du pentagone en un carré et un triangle rectangle.

L'évaluation pourrait se faire polygone par polygone pour permettre l'exploitation didactique de la situation (manière de calculer l'aire de figures dans des positions peu conventionnelles)

Si tratta solo di un'idea per verificare/confermare le osservazioni fatte a proposito dell'analisi a posteriori del 26.I.12 Confronto di figure sul prendere in considerazione, o no, della quadrettatura per determinare l'area delle figure. In questo caso il metodo «con le misure» in cm non permette di decidere se le aree sono veramente uguali (24 quadratini) in ragione delle approssimazioni delle misure.
L'idea è quella che gli allievi constatino che l'area del rettangolo è 24 (in quadratini) poi che applichino le formule (triangoli, parallelogramma, trapezio) o operino con il conteggio dei quadratini (rettangolo) o la decomposizione del pentagono in un quadrato e un triangolo rettangolo.
La ricerca potrebbe essere fatta poligono per poligono per permettere l'utilizzazione didattica della situazione (maniera di calcolare l'area delle figure in posizione non convenzionale).

3.2 Sintesi degli interventi, prima del convegno di Alghero (ottobre 2019)

(Da qui in poi non si riporta più la figura, salvo nella versione finale)

Comparez les aires de ces sept polygones / Confrontate le aree dei sette poligoni

Parmi ces sept polygones lequel a plus grande aire ?
Montrez comment vous avez fait pour le savoir.

I sette poligoni hanno la stessa area?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Il faudra réfléchir à la formulation de la question proposée par Bernard *Parmi ces sept polygones lequel a plus grande aire ?* vu qu'aucun n'a une aire plus grande que les autres. Pourquoi semer le doute ?
On pourrait demander : *Calculer l'aire de chacun de ces polygones* mais cela appellerait des « calculs » par opérations et nécessiterait de préciser une unité.

Bisognerà riflettere sulla formulazione della domanda proposta da Bernard *Tra questi sette poligoni quale ha area maggiore?* visto che non ce ne è alcuno che abbia un'area più grande delle altre. Perché instillare il dubbio?
La formulation actuelle est neutre, elle laisse le choix de l'unité à la charge de l'élève.
La formulazione attuale è neutra e lascia la scelta dell'unità a carico degli allievi.

La formulation *Les sept polygones ont-ils la même aire ?* n'est pas neutre et elle est « délicate » car entraine la réponse « oui » ou « non » qui donne toujours des problèmes dans l'attribution des points.
La formulazione *I sette poligoni hanno la stessa area?* Non è neutra ed è "delicata" perché implica la risposta "sì" o "no" che dà sempre molti problemi nell'attribuzione dei punteggi.

Si potrebbe chiedere: *Calcolare l'area di ciascuno di questi poligoni*, ma ciò porterebbe a richiedere dei "calcoli" con operazioni e bisognerebbe precisare una unità.

Il faut évidemment ajouter :
Montrez comment vous avez fait pour le savoir.
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Per ciò che riguarda Il **Compito matematico,** viene proposto: *Confrontare le aree di 7 figure disegnate su una griglia a maglie quadrate* ed è perfettamente in linea con il compito matematico che avevamo proposto per il problema Confronto di figure la cui scheda è sulla banca (e potete cliccare sul titolo per accedervi direttamente da qui) e dove il sunto (che corrisponde al compito matematico) è *Confrontare le aree di tre poligoni (di 5 o 6 lati), aventi i vertici sulle intersezioni di una griglia quadrettata.*

En ce qui concerne la **Tâche mathématique,** on propose *Comparer les aires de 7 figures dessinées sur un quadrillage à mailles carrées* et elle concorde parfaitement avec la tâche mathématique que nous avons proposée pour le problème Comparaison de figures dont la fiche est sur la banque (et vous pouvez cliquer sur le titre pour y accéder directement depuis ici) et où se trouve le résumé (qui correspond à la tâche mathématique) est *Comparer les aires de trois polygones (de 5 à 6 côtés) dont tous les sommets sont sur des nœuds d'un quadrillage.*

Questi due problemi, *Confronto di figure* e *I 7 poligoni* sono, in un certo senso lo stesso problema, dove la variabile è data dalle figure.
Se andiamo a vedere la scheda della banca, in **Compito per la risoluzione e saperi mobilitati** troviamo un'analisi del compito non più a priori, bensì a posteriori (come in quasi tutte le schede):

- Capire, dalla lettura dell'enunciato e dall'osservazione delle figure, che per confrontarle bisogna calcolare le aree secondo un'unità comune.
- Constatare che le tre figure non sono né dei rettangoli, né dei triangoli per i quali si possano applicare formule note, che la presenza della quadrettatura permette di scegliere il quadretto come unità comune e che bisognerà scomporre le figure in quadretti interi o parti di quadretti o in figure di base: rettangoli, triangoli o semi rettangoli la cui area si determina facilmente
- Le procedure di determinazione dell'area sono molteplici e differenti da una figura all'altra, in particolare:
  - conteggio una a una delle unità intere, poi ricostituzione di unità per spostamento di parti non intere
  - scomposizione della figura in rettangoli e triangoli che possono ricostituire un rettangolo per spostamento
  - percezione del triangolo rettangolo come semi rettangolo

- i triangoli non rettangoli senza angoli ottusi sono scomposti in due triangoli rettangoli
- calcolo dell'area del rettangolo circoscritto alla figura totale seguito dalla sottrazione delle aree dei rettangoli e/o dei triangoli complementari
- applicazione della formula per l'area del triangolo

Questa parte dell'analisi potrebbe essere ripresa anche per il problema dei 7 poligoni e si potrebbe poi completare con la seconda parte dell'analisi di Bernard:

- o La strategia per conteggio è facilitata quando i lati passano tutti per i nodi della quadrettatura. È il caso per esempio per l'area delle figure D e G (24 u) che può essere determinata per conteggio di quadretti o di semi quadretti. Nelle altre configurazioni la procedura necessita di approssimazioni che possono portare a risultati non corretti.
- o L'applicazione delle formule, quando sono note, è efficace per le figure "usuali" delle quali si possono determinare le misure. È il caso per le figure A B C D E per le quali l'area è ancora 24 u.
- o L'analisi della scomposizione della figura in figure semplici è necessaria quando le formule non sono note o le figure non sono quelle "usuali". Le figure possono essere viste, ciascuna, come inscritte in un rettangolo con i lati orizzontali e verticali. Le loro aree possono allora essere calcolate togliendo all'area di tale rettangolo, l'area dei triangoli rettangoli che contornano ciascuna figura. L'area in quadretti della figura F è, ad esempio, data dal calcolo: $6\times6 - 3\times(2\times4 / 2) = 24$; è anche possibile tracciare dei segmenti verticali o orizzontali seguendo le righe della quadrettatura per ottenere una scomposizione i sotto-figure la cui area sia facile da calcolare. Con segmenti orizzontali si può ad esempio scomporre la figura F in un trapezio, un parallelogramma e un triangolo rettangolo e calcolare la sua area in quadretti effettuando $(4+5) \times2/2 + 2\times5 + 2\times5 /2 = 24$.

Ces deux problèmes *Comparaison de figures* et *Les 7 polygones* sont, dans un certain sens, le même problème où la variable est donnée par les figures.
Si nous allons voir la fiche de la banque, en **Tâche de résolution et savoirs mobilisés**, nous trouvons
Une analyse de la tâche qui n'est plus a priori, mais a posteriori (comme en général dans les fiches) :

- Comprendre, à la lecture de la question et à l'observation des figures que pour comparer les aires, il s'agit de déterminer la mesure de chacune des trois aires, avec une unité commune.
- Constater que les trois figures ne sont ni des rectangles, ni des triangles pour lesquels on dispose de formules ; que la présence du quadrillage permet d'utiliser le carreau comme unité commune ; qu'il faudra soit compter les carreaux après avoir regroupé les parties non entières pour former des carreaux entiers, soit décomposer les figures en rectangles, triangles ou demi-rectangles dont on pourra facilement calculer la mesure de l'aire. Les procédures de détermination de l'aire sont multiples, et différentes d'une figure à l'autre :
- comptage une à une des unités entières, puis reconstitution d'unités par déplacements des parties non entières,
- décomposition de la figure en rectangles et triangles rectangles qui sont des demi-rectangles
- décomposition de la figure triangles non rectangles non obtus qui peuvent ensuite être décomposés en deux triangles rectangles,
- construire un rectangle circonscrit à la figure totale et soustraire de son aire celles des rectangles et/ou triangles complémentaires,
- faire appel aux formules de l'aire lorsque les décompositions précédentes donnent des triangles dont une "base" et la "hauteur" correspondante suivent le quadrillage et ont des mesures entières de leurs longueurs/ou des rectangles dont les côtés suivent les lignes du quadrillage.

Cette partie de l'analyse pourrait être reprise aussi pour les 7 polygones et après on pourrait compléter par la deuxième partie de l'analyse de Bernard :

- o La stratégie par comptage est facilitée lorsque les côtés passent tous par des nœuds du quadrillage. C'est le cas par exemple pour l'aire des figures D et G (24 u) qui peut être déterminée par comptage de carreaux entiers ou de demi-carreaux. Dans les autres configurations la démarche nécessite des approximations qui peuvent conduire à des résultats erronés
- o L'application des formules lorsqu'elles sont connues est efficace pour les figures usuelles dont on peut facilement déterminer les mesures. C'est le cas pour les figures A, B, C, D et E dont l'aire est aussi 24 u.
- o L'analyse et la décomposition de la figure en figures simples est nécessaire lorsque les formules ne sont pas connues ou que les figures sont non usuelles. Les figures peuvent par exemple chacune être vues comme étant inscrites dans un rectangle aux côtés horizontaux et verticaux. Leurs aires peuvent être alors calculées en enlevant à l'aire de ce rectangle, l'aire des triangles rectangles qui entourent

chaque figure. L'aire en carreaux de le figure F est, par exemple, alors donnée par le calcul : 6×6 – 3×(2×4 / 2) = 24
Il est aussi possible de tracer des traits verticaux ou horizontaux en suivant les lignes du quadrillage pour obtenir une décomposition en sous-figures dont l'aire est facile à calculer. Par des traits horizontaux on peut, par exemple, décomposer la figure F en un trapèze, un parallélogramme et un triangle rectangle et calculer son aire en carreaux en effectuant (4+5) ×2/2 + 2×5 + 2×5 /2 = 24

L'ingrandimento delle figure che era stato proposto, non sembrerebbe essere stato preso in considerazione dagli allievi nel problema *Confronto di figure* (si veda scheda). Ne possiamo ovviamente discutere.
L'agrandissement des figures qui avait été proposé, ne semble pas avoir été pris en compte par les élèves dans le problème *Comparaison de figures* (voir fiche). On peut évidemment en discuter.

Per quanto riguarda l'attribuzione dei punteggi si potrebbe partire da una buona proposta e poi "arricchirla".
Pour l'attribution des points on pourrait partir d'une des propositions et « l'enrichir ».

3.3 Proposta di sistemazione scaturita dal lavoro di gruppo al convegno di Alghero (novembre 2019)

Les sept polygones (Cat 6, 7, 8)
I sette poligoni

Dite se le aree di questi sette poligoni sono le stesse o se sono diverse.
Mostrate come siete arrivati alle vostre risposte.

3.3 Proposta di sistemazione scaturita dal lavoro di gruppo al convegno di Alghero (novembre 2019)

Les sept polygones (Cat 6, 7, 8)
I sette poligoni

Dite se le aree di questi sette poligoni sono le stesse o se sono diverse.
Mostrate come siete arrivati alle vostre risposte.

Dites si les aires de ces sept polygones sont les mêmes ou sont différentes
Montrez comment vous êtes arrivez à vos réponses.

Analyse a priori

Tâche mathématique

Comparer les aires de 7 figures dessinées sur un quadrillage à mailles carrées dont tous les sommets sont sur des nœuds d'un quadrillage.

Compito matematico

Confrontare le aree di sette figure disegnate su una griglia a maglie quadrate i cui vertici sono sui nodi della griglia

Analisi del compito

- Capire, dalla lettura dell'enunciato e dall'osservazione delle figure, che per confrontarle bisogna calcolare le aree secondo un'unità comune.
- Constatare che a non tutte le sette figure si possono applicare formule note, che la presenza della quadrettatura permette di scegliere il quadretto come unità comune e che bisognerà scomporre le figure in quadretti interi o parti di quadretti o in figure di base la cui area si determina facilmente.
- Le procedure di determinazione dell'area sono molteplici e differenti da una figura all'altra, in particolare:

• conteggio una a una delle unità intere, poi ricostituzione di unità per spostamento di parti non intere.
• scomposizione della figura in rettangoli, triangoli e parallelogrammi che possono ricostituire un rettangolo per spostamento
• percezione del triangolo rettangolo come semi rettangolo
• i triangoli non rettangoli senza angoli ottusi sono scomposti in due triangoli rettangoli
• calcolo dell'area del rettangolo circoscritto alla figura totale seguito dalla sottrazione delle aree dei rettangoli e/o dei triangoli complementari

- applicazione della formula per l'area del triangolo.
- La strategia per conteggio è facilitata quando i lati passano tutti per i nodi della quadrettatura. È il caso per esempio per l'area delle figure D e G* (24 u) che può essere determinata per conteggio di quadretti o di semi quadretti. Nelle altre configurazioni la procedura necessita di approssimazioni che possono portare a risultati non corretti.
- L'applicazione delle formule, quando sono note, è efficace per le figure "usuali" delle quali si possono determinare le misure. È il caso per le figure A B C D E per le quali l'area è ancora 24 u.
- L'analisi della scomposizione della figura in figure semplici è necessaria quando le formule non sono note o le figure non sono quelle "usuali". Le figure possono essere viste, ciascuna, come inscritte in un rettangolo con i lati orizzontali e verticali. Le loro aree possono allora essere calcolate togliendo all'area di tale rettangolo, l'area dei triangoli rettangoli che contornano ciascuna figura. L'area in quadretti della figura F è, ad esempio, data dal calcolo: $6\times6 - 3\times(2\times4 / 2) = 24$; è anche possibile tracciare dei segmenti verticali o orizzontali seguendo le righe della quadrettatura per ottenere una scomposizione i sotto-figure la cui area sia facile da calcolare. Con segmenti orizzontali si può ad esempio scomporre la figura F in un trapezio, un parallelogramma e un triangolo rettangolo e calcolare la sua area in quadretti effettuando $(4+5)\times2/2 + 2\times5 + 2\times5 /2 = 24$.

  * A, B, C, D, E, F, G indicano i poligoni partendo dall'alto a sinistra e procedendo per righe fino in basso a destra (come avevamo visto ad Alghero).

Analyse de la tâche

- Comprendre, à la lecture de la question et à l'observation des figures que pour comparer les aires, il s'agit de déterminer la mesure de chacune des trois aires, avec une unité commune.
- Constater que les trois figures ne sont ni des rectangles, ni des triangles pour lesquels on dispose de formules ; que la présence du quadrillage permet d'utiliser le carreau comme unité commune ; qu'il faudra soit compter les carreaux après avoir regroupé les parties non entières pour former des carreaux entiers, soit décomposer les figures en rectangles, triangles ou demi-rectangles dont on pourra facilement calculer la mesure de l'aire. Les procédures de détermination de l'aire sont multiples, et différentes d'une figure à l'autre :
- comptage une à une des unités entières, puis reconstitution d'unités par déplacements des parties non entières,
- décomposition de la figure en rectangles et triangles rectangles qui sont des demi-rectangles
- décomposition de la figure triangles non rectangles non obtus qui peuvent ensuite être décomposés en deux triangles rectangles,
- construire un rectangle circonscrit à la figure totale et soustraire de son aire celles des rectangles et/ou triangles complémentaires,
- faire appel aux formules de l'aire lorsque les décompositions précédentes donnent des triangles dont une "base" et la "hauteur" correspondante suivent le quadrillage et ont des mesures entières de leurs longueurs/ou des rectangles dont les côtés suivent les lignes du quadrillage.-
- La stratégie par comptage est facilitée lorsque les côtés passent tous par des nœuds du quadrillage. C'est le cas par exemple pour l'aire des figures D et G (24 u) qui peut être déterminée par comptage de carreaux entiers ou de demi-carreaux. Dans les autres configurations la démarche nécessite des approximations qui peuvent conduire à des résultats erronés
- L'application des formules lorsqu'elles sont connues est efficace pour les figures usuelles dont on peut facilement déterminer les mesures. C'est le cas pour les figures A B C D E dont l'aire est aussi 24 u.
- L'analyse et la décomposition de la figure en figures simples est nécessaire lorsque les formules ne sont pas connues ou que les figures sont non usuelles. Les figures peuvent par exemple chacune être vues comme étant inscrites dans un rectangle aux côtés horizontaux et verticaux. Leurs aires peuvent être alors calculées en enlevant à l'aire de ce rectangle, l'aire des triangles rectangles qui entourent chaque figure. L'aire en carreaux de le figure F est, par exemple, alors donnée par le calcul : $6\times6 - 3\times(2\times4 / 2) = 24$
  Il est aussi possible de tracer des traits verticaux ou horizontaux en suivant les lignes du quadrillage pour obtenir une décomposition en sous-figures dont l'aire est facile à calculer. Par des traits horizontaux on peut, par exemple, décomposer la figure F en un trapèze, un parallélogramme et un triangle rectangle et calculer son aire en carreaux en effectuant $(4+5)\times2/2 + 2\times5 + 2\times5 /2 = 24$

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta e completa (tutti i poligoni hanno la medesima area) con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) e i calcoli effettuati senza approssimazione

3 Risposta corretta e completa (tutti i poligoni hanno la medesima area) con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) e i calcoli effettuati senza approssimazione per 6 dei sette poligoni presentati

oppure risposta non corretta per uno solo dei sette poligoni con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) et i calcoli effettuati senza approssimazione

2 Risposta corretta e non completa con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) e i calcoli effettuati senza approssimazione per almeno 4 dei sette poligoni presentati

oppure risposta corretta con il valore dell'area corretto senza ulteriori spiegazioni

1 Inizio di ricerca coerente (per esempio determinazione dell'area di due o tre poligoni)

0 Incomprensione del problema o solo l'area di uno dei poligoni

Attribution des points

4 Réponse correcte e complète (tous les polygones ont la même aire) avec des explications claires présentant la démarche suivie (qui peut être graphique) et les calculs effectués sans approximation

3 Réponse correcte e complète (tous les polygones ont la même aire) avec des explications claires présentant la démarche suivie (qui peut être graphique) et les calculs effectués sans approximation pour 6 des sept polygones présentés

ou réponse erronée pour un seul des sept polygones avec des explications claires présentant la démarche suivie (qui peut être graphique) et les calculs effectués sans approximation

2 Réponse correcte e incomplète avec des explications claires présentant la démarche suivie (qui peut être graphique) et les calculs justes effectués sans approximation, pour au moins 4 des sept polygones présentés

ou réponse correcte avec la valeur de l'aire correcte sans autres explications

1 Début de recherche cohérente (par exemple détermination de l'aire de deux ou trois polygones)

0 Incompréhension du problème ou seulement l'aire d'un des polygones

3.4 Ancora discussione prima della nostra versione finale (gennaio-febbraio 2020)

Come formulare la domanda?

Al posto di **Dite se le aree di questi sette poligoni sono le stesse o se sono diverse.**

Mostrate come siete arrivati alle vostre risposte.

Mettere:

Dovete stabilire se le aree di questi sette poligoni sono le stesse o se sono diverse e mostrare come siete arrivati alla vostra risposta.

Risolvete il problema senza utilizzare il righello o altri dispositivi (o app) per misurare.

Au lieu de **Dites si les aires de ces sept polygones sont les mêmes ou sont différentes.**

Montrez comment vous êtes arrivez à vos réponses.

Mettre:

Vous devez établir si les aires de ces sept polygones sont les mêmes ou sont différentes et montrer comment vous êtes arrivez à vos réponses.

Résolvez ce problème sans utiliser de règle graduée ni d'autre dispositif (ou app) de mesure d'aire.

O ancora:

Proposition : Sans utiliser de règle graduée, trouver si les aires de ces sept polygones sont égales ou différentes

Montrez comment vous êtes arrivés à votre réponse.

Résolvez ce problème sans règle graduée ni matériel électronique.

Stabilite se le aree di questi sette poligoni sono le stesse o se sono diverse.

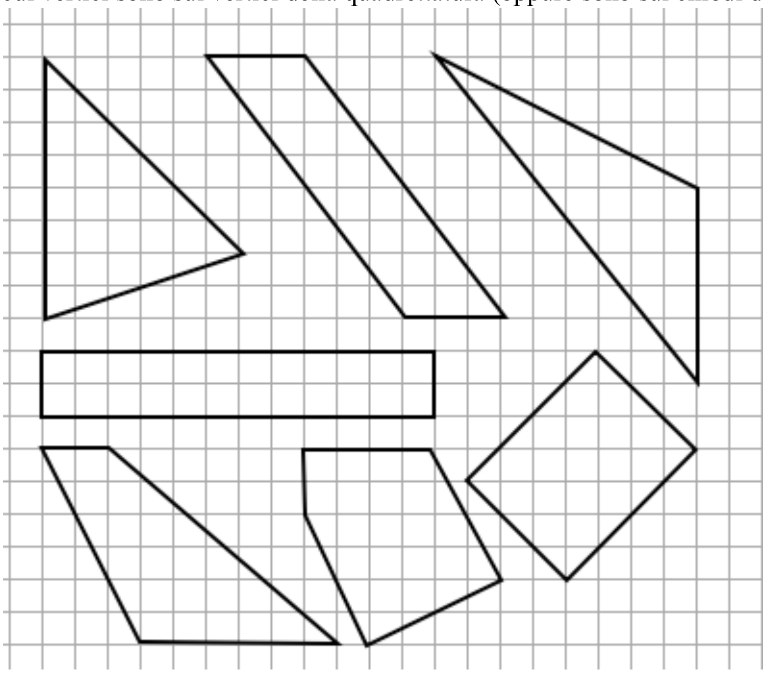
Mostrate come siete arrivati alla vostra risposta risolvendo il problema senza utilizzare il righello o altri dispositivi per misurare.

Mettere "confrontate le aree delle figure, stabilite se sono uguali o diverse. Spiegate come siete arrivati alle vostre risposte, mostrando anche i calcoli.

Risolvete il problema senza utilizzare il righello o altri dispositivi (o app) per misurare."

3.5 Si prepara la nostra versione finale (febbraio 2020)

I SETTE POLIGONI (Cat 6, 7, 8)
Ecco sette poligoni i cui vertici sono sui vertici della quadrettatura (oppure sono sui chiodi del geopiano):



Senza utilizzare il righello o altri dispositivi di misura, trovate se le aree di questi sette poligoni sono le stesse o se sono diverse

Mostrate come siete arrivati alla vostra risposta

Analisi a priori

Compito matematico

Confrontare le aree di sette figure disegnate su una griglia a maglie quadrate i cui vertici sono sui nodi della griglia

Analisi del compito

- Capire, dalla lettura dell'enunciato e dall'osservazione delle figure, che per confrontarle bisogna calcolare le aree secondo un'unità comune.
- Comprendre, à la lecture de la question et à l'observation des figures que pour comparer les aires, il s'agit de déterminer la mesure de chacune des trois aires, avec une unité commune.
- Constatare che a non tutte le sette figure si possono applicare formule note, che la presenza della quadrettatura permette di scegliere il quadretto come unità comune e che bisognerà scomporre le figure in quadretti interi o parti di quadretti o in figure di base la cui area si determina facilmente.
- Constater que les trois figures ne sont ni des rectangles, ni des triangles pour lesquels on dispose de formules ; que la présence du quadrillage permet d'utiliser le carreau comme unité commune ; qu'il faudra soit compter les carreaux après avoir regroupé les parties non entières pour former des carreaux entiers, soit décomposer les figures en rectangles, triangles ou demi-rectangles dont on pourra facilement calculer la mesure de l'aire.
- Le procedure di determinazione dell'area sono molteplici e differenti da una figura all'altra, in particolare:
- Les procédures de détermination de l'aire sont multiples, et différentes d'une figure à l'autre :

- conteggio una a una delle unità intere, poi ricostituzione di unità per spostamento di parti non intere.
- comptage une à une des unités entières, puis reconstitution d'unités par déplacements des parties non entières,
- scomposizione della figura in rettangoli, triangoli e parallelogrammi che possono ricostituire un rettangolo per spostamento
- décomposition de la figure en rectangles et triangles rectangles qui sont des demi-rectangles
- percezione del triangolo rettangolo come semi rettangolo
- i triangoli non rettangoli senza angoli ottusi sono scomposti in due triangoli rettangoli

- décomposition de la figure triangles non rectangles non obtus qui peuvent ensuite être décomposés en deux triangles rectangles,
- calcolo dell'area del rettangolo circoscritto alla figura totale seguito dalla sottrazione delle aree dei rettangoli e/o dei triangoli complementari
- construire un rectangle circonscrit à la figure totale et soustraire de son aire celles des rectangles et/ou triangles complémentaires,
- applicazione della formula per l'area del triangolo.
- faire appel aux formules de l'aire lorsque les décompositions précédentes donnent des triangles dont une "base" et la "hauteur" correspondante suivent le quadrillage et ont des mesures entières de leurs longueurs/ou des rectangles dont les côtés suivent les lignes du quadrillage.-

- La strategia per conteggio è facilitata quando i lati passano tutti per i nodi della quadrettatura. È il caso per esempio per l'area delle figure D e G* (24 u) che può essere determinata per conteggio di quadretti o di semi quadretti. Nelle altre configurazioni la procedura necessita di approssimazioni che possono portare a risultati non corretti.
- La stratégie par comptage est facilitée lorsque les côtés passent tous par des nœuds du quadrillage. C'est le cas par exemple pour l'aire des figures D et G (24 u) qui peut être déterminée par comptage de carreaux entiers ou de demi-carreaux. Dans les autres configurations la démarche nécessite des approximations qui peuvent conduire à des résultats erronés
- L'applicazione delle formule, quando sono note, è efficace per le figure "usuali" delle quali si possono determinare le misure. È il caso per le figure A B C D E per le quali l'area è ancora 24 u.
- L'application des formules lorsqu'elles sont connues est efficace pour les figures usuelles dont on peut facilement déterminer les mesures. C'est le cas pour les figures A B C D E* dont l'aire est aussi 24 u.
- L'analisi della scomposizione della figura in figure semplici è necessaria quando le formule non sono note o le figure non sono quelle "usuali". Le figure possono essere viste, ciascuna, come inscritte in un rettangolo con i lati orizzontali e verticali. Le loro aree possono allora essere calcolate togliendo all'area di tale rettangolo, l'area dei triangoli rettangoli che contornano ciascuna figura. L'area in quadretti della figura F è, ad esempio, data dal calcolo: $6×6 – 3×(2×4 / 2) = 24$;
- L'analyse et la décomposition de la figure en figures simples est nécessaire lorsque les formules ne sont pas connues ou que les figures sont non usuelles. Les figures peuvent par exemple chacune être vues comme étant inscrites dans un rectangle aux côtés horizontaux et verticaux. Leurs aires peuvent être alors calculées en enlevant à l'aire de ce rectangle, l'aire des triangles rectangles qui entourent chaque figure. L'aire en carreaux de le figure F est, par exemple, alors donnée par le calcul : $6×6 – 3×(2×4 / 2) = 24$
- E' anche possibile tracciare dei segmenti verticali o orizzontali seguendo le righe della quadrettatura per ottenere una scomposizione i sotto-figure la cui area sia facile da calcolare. Con segmenti orizzontali si può ad esempio scomporre la figura F in un trapezio, un parallelogramma e un triangolo rettangolo e calcolare la sua area in quadretti effettuando $(4+5) ×2/2 + 2×5 + 2×5 /2 = 24$.
- Il est aussi possible de tracer des traits verticaux ou horizontaux en suivant les lignes du quadrillage pour obtenir une décomposition en sous-figures dont l'aire est facile à calculer. Par des traits horizontaux on peut, par exemple, décomposer la figure F en un trapèze, un parallélogramme et un triangle rectangle et calculer son aire en carreaux en effectuant $(4+5) ×2/2 + 2×5 + 2×5 /2 = 24$

* A, B, C, D, E, F, G indicano i poligoni partendo dall'alto a sinistra e procedendo per righe fino in basso a destra

* A, B, C, D, E, F, G indiquent les polygones en partant du haut à gauche et en procédant en rangées en bas à droite

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta e completa (tutti i poligoni hanno la medesima area) con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) e i calcoli effettuati

3 Risposta corretta e completa (tutti i poligoni hanno la medesima area) con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) e i calcoli effettuati senza approssimazione per 6 dei sette poligoni presentati

oppure risposta non corretta per uno solo dei sette poligoni con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) et i calcoli effettuati senza approssimazione

2 Risposta corretta e non completa con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) e i calcoli effettuati senza approssimazione per almeno 4 dei sette poligoni presentati

oppure risposta corretta con il valore dell'area corretto senza ulteriori spiegazioni

1 Inizio di ricerca coerente (per esempio determinazione dell'area di due o tre poligoni o anche di uno solo, ma diverso dal rettangolo)

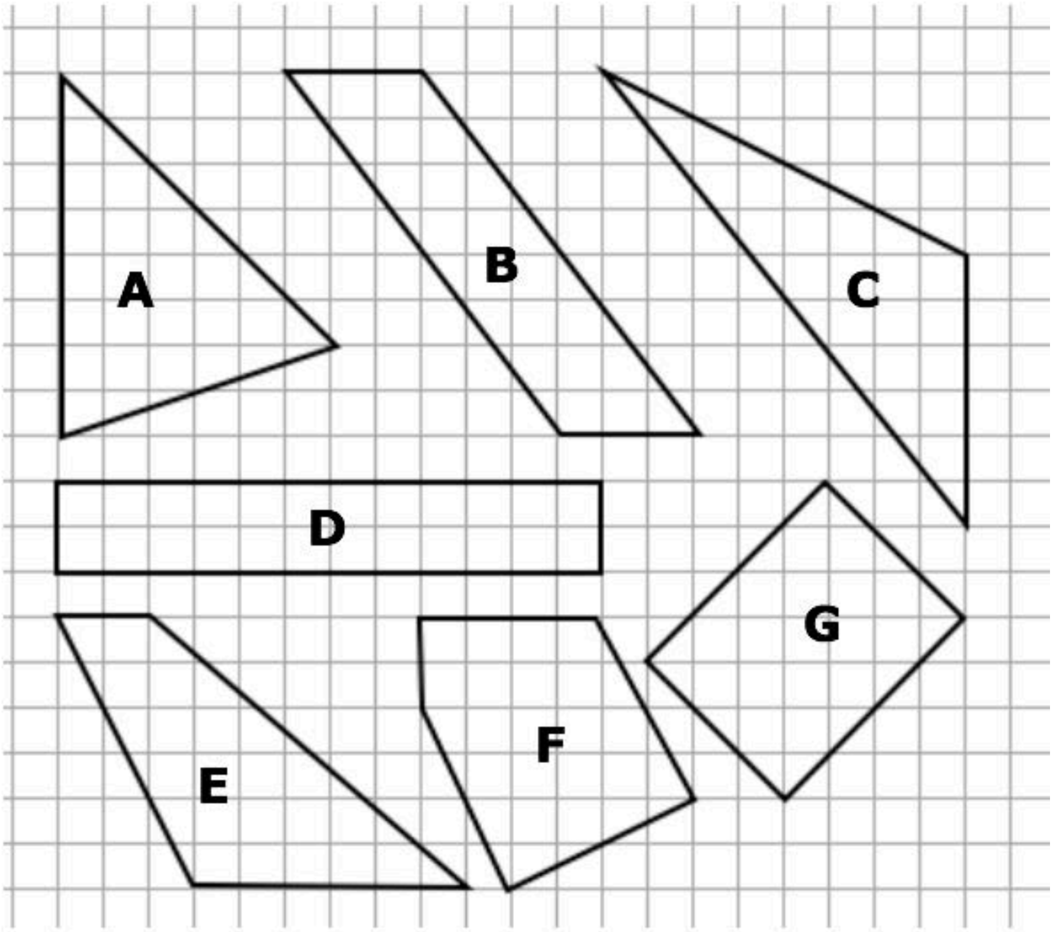
0 Incomprensione del problema o solo l'area del rettangolo

Livello: 6, 7, 8

3.6 La versione definitiva, passata attraverso il GIPL e il "gruppo problemi", è quella presente nella prima prova del 29° RMT.

13. I SETTE POLIGONI (Cat 7, 8)

Nella figura qui sotto sono disegnati sette poligoni i cui vertici sono sui vertici della quadrettatura.



Individuate i poligoni che hanno la stessa area.

Mostrate come siete arrivati alla vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Confrontare le aree di sette figure disegnate su una griglia a maglie quadrate i cui vertici sono sui nodi della griglia

Analisi del compito

- Capire, dalla lettura dell'enunciato e dall'osservazione delle figure, che per confrontarle bisogna calcolare le aree secondo un'unità comune.
- Constatare che non a tutte le sette figure si possono applicare formule note, che la presenza della quadrettatura permette di scegliere il quadretto come unità comune e che bisognerà scomporre le figure in quadretti interi o parti di quadretti o in figure di base la cui area si determina facilmente.
- Le procedure di determinazione dell'area sono molteplici e differenti da una figura all'altra, in particolare:
  - conteggio una a una delle unità intere, poi ricostituzione di unità per spostamento di parti non intere;
  - scomposizione della figura in rettangoli, triangoli e parallelogrammi che possono ricostituire un rettangolo per spostamento;

- percezione del triangolo rettangolo come semi-rettangolo;
- i triangoli non rettangoli senza angoli ottusi sono scomposti in due triangoli rettangoli;
- calcolo dell'area del rettangolo circoscritto alla figura totale seguito dalla sottrazione delle aree dei rettangoli e/o dei triangoli complementari;
- applicazione della formula per l'area del triangolo;
- fare ricorso alle formule per l'area quando le scomposizioni precedenti evidenziano dei triangoli di cui una base e l'altezza corrispondente seguono la quadrettatura e hanno misure intere o dei rettangoli i cui lati seguono le linee della quadrettatura.

- La strategia per conteggio è facilitata quando i lati passano tutti per i nodi della quadrettatura. È il caso per esempio per l'area delle figure D e G (24 u) che può essere determinata per conteggio di quadretti o di semi quadretti. Nelle altre configurazioni la procedura necessita di approssimazioni che possono portare a risultati non corretti.
- L'applicazione delle formule, quando sono note, è efficace per le figure "usuali" delle quali si possono determinare le misure. È il caso per le figure A B C D E per le quali l'area è ancora 24 u.
- L'analisi della scomposizione della figura in figure semplici è necessaria quando le formule non sono note o le figure non sono quelle "usuali". Le figure possono essere viste, ciascuna, come inscritte in un rettangolo con i lati seguendo le righe della quadratura. Le loro aree possono allora essere calcolate togliendo all'area di tale rettangolo, l'area dei triangoli rettangoli che contornano ciascuna figura. L'area in quadretti della figura F è, ad esempio, data dal calcolo: $6 \times 6 - 3 \times (2 \times 4 / 2) = 24$; è anche possibile tracciare dei segmenti seguendo le linee della quadrettatura per ottenere una scomposizione in sotto-figure la cui area sia facile da calcolare. Con segmenti "orizzontali" si può ad esempio scomporre la figura F in un trapezio, un parallelogramma e un triangolo rettangolo e calcolare la sua area in quadretti effettuando $(4 + 5) \times 2/2 + 2 \times 5 + 2 \times 5/2 = 24$.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta e completa (tutti i poligoni hanno la medesima area) con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) e i calcoli effettuati con risposta esplicitata

3 Risposta corretta (tutti i poligoni hanno la medesima area) con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) e i calcoli effettuati senza approssimazione per 6 dei sette poligoni presentati
oppure risposta non corretta per aver sbagliato la determinazione dell'area di uno solo dei sette poligoni con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) e i calcoli effettuati senza approssimazione
oppure risposta corretta e completa (tutti i poligoni hanno la medesima area) con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) e i calcoli effettuati senza risposta esplicitata

2 Risposta per almeno 4 dei sette poligoni presentata con il valore dell'area corretta con spiegazioni chiare della procedura seguita (che può essere grafica) e i calcoli effettuati senza approssimazione
oppure risposta corretta con il valore dell'area corretto senza ulteriori spiegazioni

1 Inizio di ricerca coerente (per esempio determinazione dell'area di due o tre poligoni o anche di uno solo, ma diverso dal rettangolo)

0 Incomprensione del problema o solo l'area del rettangolo

Livello: 7, 8

Origine: GTGP (Gruppo Geometria Piana)

3.7 Osservazioni / Remarques

Nella consegna della versione data nella prima prova del 29° RMT, come si può osservare, non figura più la richiesta di "non utilizzare il righello o altri dispositivi di misura" e questo avrà, come si vedrà nell'analisi a posteriori, delle conseguenze non trascurabili nelle procedure di risoluzione degli allievi.
In effetti, l'intento precipuo di tale richiesta era quello di fare in modo che gli allievi spostassero l'attenzione dalle misure con il righello, che fra l'altro complica loro il compito per la presenza di numeri decimali, a misure basate sulle quadrettatura.
Dans les consignes de la version donnée dans la première épreuve du 29e RMT, comme on peut le voir, il n'y a plus la demande de "ne pas utiliser la règle ou d'autres instruments de mesure" et cela aura, comme on le verra dans l'analyse qui suivra, des conséquences non négligeables dans les procédures de résolution des élèves.
En fait, l'intention principale de cette consigne était de faire en sorte que les élèves déplacent leur attention des mesures à la règle, ce qui, entre autres, leur complique la tâche en raison de la présence de nombres décimaux, vers des mesures à partir du quadrillage.

4. Le analisi a posteriori / Les analyses a posteriori

Presentiamo in questa seconda parte dell'articolo le analisi a posteriori dei due problemi in gioco che, come si vedrà, pur costruiti con "intenti" fra loro diversi rispetto ai contenuti matematici, evidenziano entrambi una certa propensione a ricorrere a misure con il righello che sposta l'attenzione su scomodi calcoli con numeri decimali.

Dans cette deuxième partie de l'article, nous présentons les analyses a posteriori des deux problèmes en jeu qui, comme nous le verrons, bien que construits avec des "intentions" différentes quant au contenu mathématique, montrent tous deux une certaine propension à recourir à des mesures avec la règle, ce qui implique des calculs fastidieux avec des nombres décimaux.

4.1 Il Tangram del falegname (I) e (II) / Le Tangram di menusier (I9 et (II)

4.1.1 *I risultati / Le résultats*

Prima di presentare le analisi a posteriori condotte da membri del gruppo sugli elaborati della propria sezione di appartenenza, riportiamo qui di seguito i primi dati raccolti dopo la prova che si presentano sotto forma di tabella dei punteggi attribuiti secondo i criteri di attribuzione che erano stati determinati a priori.

Avant de présenter les analyses a posteriori menées par les membres du groupe sur les productions des élèves de leur propre section, nous rapportons ci-dessous les premières données recueillies après l'épreuve, qui sont présentées sous la forme d'un tableau de points attribués selon les critères d'attribution qui avaient été fournis.

Le due tabelle generali

Tangram del falegname (I)

Punteggi attribuiti su 1657 classi di 20 sezioni

10.Il tangram del falegname (I) / Le Tangram du menuisier (I)

Cat.	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	M
6	414 (46%)	266 (30%)	96 (11%)	35 (4%)	81 (9%)	892	1.0
7	228 (30%)	123 (16%)	94 (12%)	103 (13%)	217 (28%)	765	1.9
Total	642 (39%)	389 (23%)	190 (11%)	138 (8%)	298 (18%)	1657	1.4

Tangram del falegname (II)

Punteggi attribuiti su 753 classi di 20 sezioni

17.Il Tangram del falegname (II) / Le Tangram du menuisier (II)

Cat.	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	M
8	193 (40%)	95 (20%)	71 (15%)	49 (10%)	78 (16%)	486	1.4
9	31 (24%)	19 (15%)	22 (17%)	30 (23%)	29 (22%)	131	2.1
10	21 (15%)	11 (8%)	26 (19%)	39 (29%)	39 (29%)	136	2.5
Total	245 (33%)	125 (17%)	119 (16%)	118 (16%)	146 (19%)	753	1.7

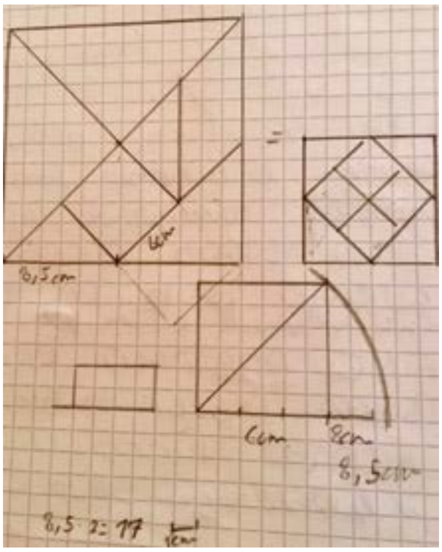
4.1.2 Dai risultati con i punteggi alle analisi a posteriori con gli elaborati

Tangram del falegname (I)

La media generale, evidenziata nella tabella dei risultati, porta a pensare che questo problema abbia creato un solco in merito alla sua riuscita tra la categoria 6 e la categoria 7.

Benché questo appaia anche nell'analisi a posteriori, reputiamo che il problema riveli interessanti potenzialità già a livello della categoria 6 dove è particolarmente interessante constatare che alcuni gruppi di allievi riescono ad aggirare, se così possiamo dire, in maniera "naturale" la non conoscenza del teorema di Pitagora e dell'estrazione di radice quadrata. Una procedura che si basa sulla suddivisione del Tangram in otto quadrati come il quadrato piccolo: *1 quadratino ha area 6 . 6 = 36. Il Tangram è composto da 8 quadratini, quindi l'area del Tangram è 36 . 8 = 288. Sapendo che l'area del quadrato è lato per lato, allora lato per lato = 288. Il numero che moltiplicato per se stesso dà 288 è circa 16,9 che quindi è la misura del lato.*

O ancora con la considerazione relativa alla proiezione, con l'uso del compasso (qui chiamato balaustrone), della diagonale del quadrato piccolo sul lato del quadrato piccolo per trovare, senza ovviamente ancora conoscere il teorema di Pitagora, la "lunghezza della diagonale, in questo caso per loro, 8,5 cm. Fatta l'osservazione che il lato del Tangram equivale al doppio della diagonale del quadrato piccolo, gli allievi hanno trovato la misura di 17 cm.



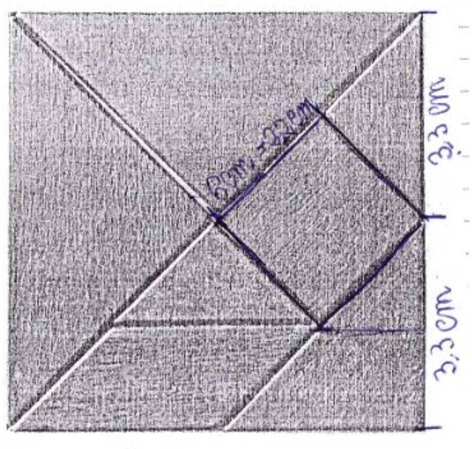
Non pochi elaborati presentano soluzione 18 cm, perché gli allievi applicano al nuovo Tangram lo stesso rapporto che c’è tra il lato del quadrato grande e quello del quadrato piccolo della foto.
Il concetto di rapporto è in embrione.
Il linguaggio, spesso poco chiaro, è dovuto anche al fatto che nella foto il lato del quadrato grande è lungo ***6*** cm (per approssimazione) mentre nel nuovo Tangram è il lato del quadrato piccolo lungo 6 cm.

Questa coincidenza di misure a nostro parere potrebbe aver favorito fraintendimenti. Forse si potrebbe riproporre lo stesso testo con dati diversi.
Il ragionamento è per esempio del tipo *Abbiamo trovato la conclusione attraverso un’operazione dividendo sei per due, di cui il risultato è tre, e di conseguenza, abbiamo moltiplicato sei per tre , di cui il risultato è 18 e anche il lato del quadrato piccolo (2) per tre, risultando 6. Conclusione: il lato del tangram misura 18 cm.*

Si tratta evidentemente di procedure che utilizzano il fattore di scala (procedura non evocata nell’analisi a priori, pur suggerita in sede di discussione del gruppo geometria per i grandi via email), con misure prese con il righello e poi l’utilizzazione del rapporto a partire dal lato del quadrato piccolo e in tal caso, come nel caso riportato, la risposta diventa 18 cm oppure altri valori perché dipende dalle misure del Tangram che nelle fotocopie ~~che~~ “variano”.
Procedure piuttosto frequenti, soprattutto in tale categoria, che si sviluppano poi in percorsi diversificati.

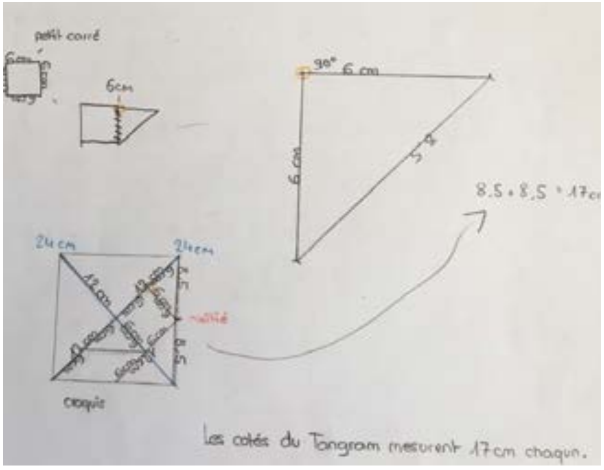
Se si fa 6 cm (del cliente) diviso 2,4 (il piccolo quadrato) viene 2,5.
Per 6.5 che è l’altezza del Tangram che viene 16,25.

Il lato del Tangram misura 18 cm. Il nostro ragionamento è stato quello di aver misurato il lato del quadrato piccolo che era 2,2 e quindi è uguale a 6 cm nella realtà. Poi abbiamo misurato il lato destro del quadrato grande e tornava 6,6 cm, quindi abbiamo fatto 2,2·3=6,6 quindi ci stata 3 volte. 2,2 cm = 6 cm quindi 6·3=18 cm

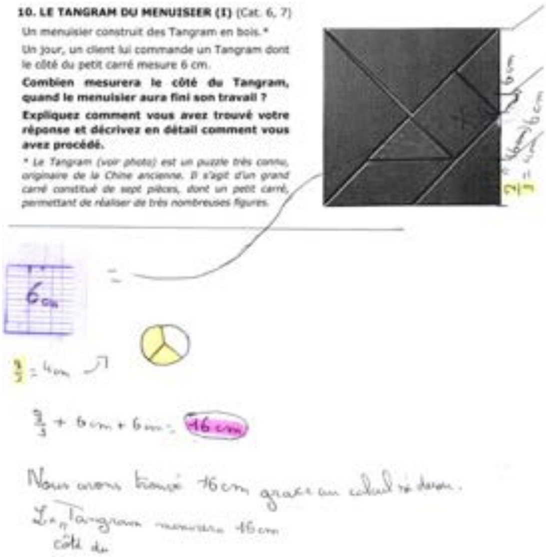


Per risolvere il problema abbiamo misurato il lato del Tangram, che misura 6 cm e abbiamo fatto la stessa cosa con il lato del quadrato piccolo, che era uguale al lato più piccolo del piccolo triangolo isoscele e al lato più piccolo del piccolo parallelogrammo, che misura 2 cm, visto che 3·2=6 abbiamo fatto il lato del quadrato che misura 6 cm per 3 che fa 18. Quindi il lato del Tangram è 18 cm.

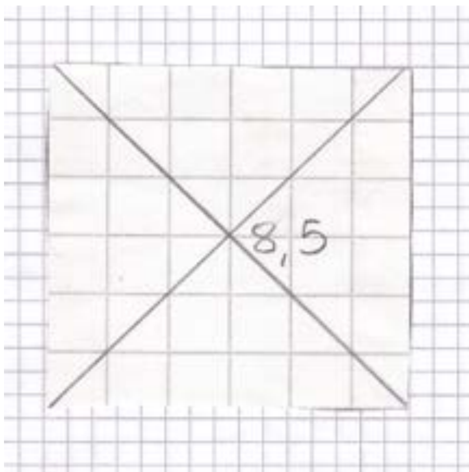
Fra tali procedure con fattore di scala, ne appaiono anche alcune che confrontano le diagonali con il lato del quadrato grande.



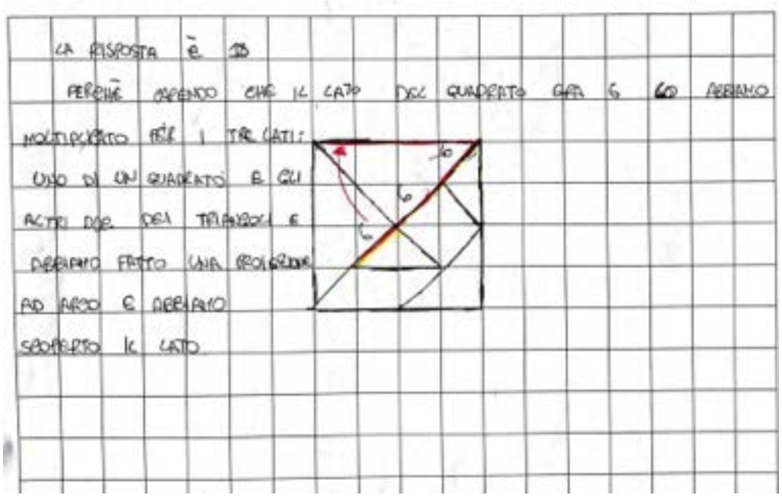
Certains groupes ont reporté le côté du petit carré sur le côté du Tangram pour tenter de trouver le rapport entre ces deux mesures. Les résultats obtenus sont alors très imprécis (Alcuni gruppi hanno riportato il lato del quadrato piccolo del Tangram per tentare di trovare il rapporto tra queste due misure. I risultati ottenuti sono allora molto imprecisi)



O anche, ancora con riferimento alle diagonali *Abbiamo disegnato un modello e misurato la sua diagonale (la diagonale di un quadrato di 6 cm è 8,5). Abbiamo poi guardato quante volte la diagonale del quadrato più piccolo ci stesse nel lato B [lato del Tangram] e, ci sta 2 volte, cioè il doppio. Il lato è quindi 17"*. La figura qui accanto è stata disegnata in un foglio a quadretti con i lati di un centimetro. La figura è stata poi ritagliata e incollata sul foglio del protocollo, a quadretti più piccoli.

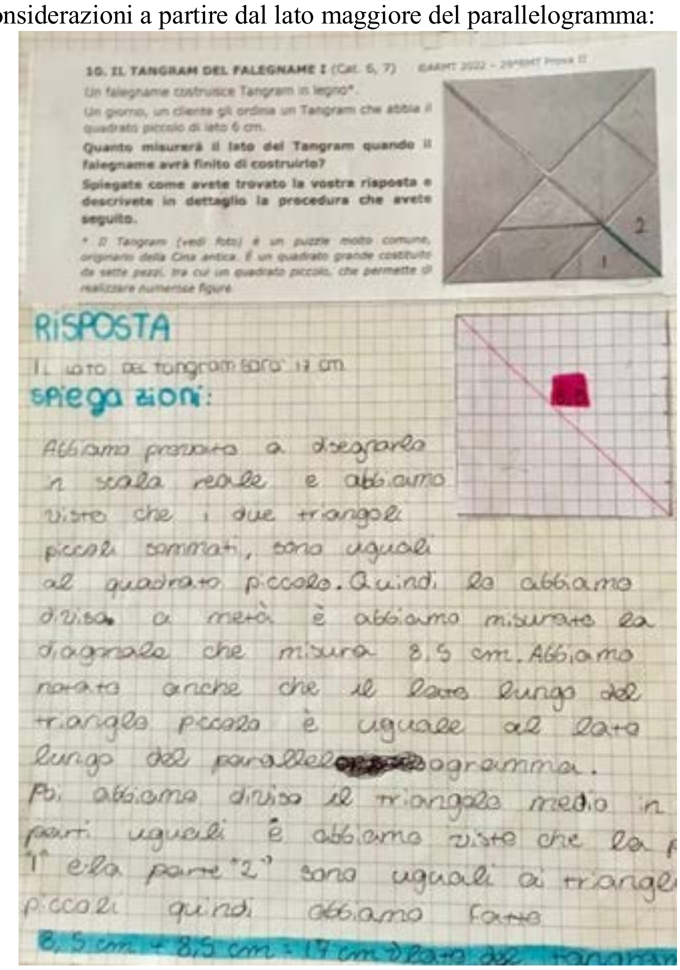


In un altro caso si afferma che la misura del lato (18 cm) viene ottenuta con "una proiezione ad arco" (indicandolo con una freccia) del segmento corrispondente ai ¾ della diagonale sul lato del Tangram.



Tra le procedure "accettabili" vi sono quelle che ricorrono al disegno in grandezza reale del quadrato di lato 6 cm alcune delle quali sono le seguenti:

- con considerazioni corrette sui triangoli in alto e in basso rispetto al quadrato interno, che vengono riportati a partire dal quadrato già disegnato e che conducono alla misura del lato del quadrato grande: 16,7 cm. *Nous avons fait un carré de 6 cm et nous avons constaté que le triangle (petit) en haut du carré faisait aussi 6 cm. Et que le triangle (moyen) en bas du carré faisait le double donc 12 cm. Et nous avons donc fait ces 3 figures. Et nous avons mesuré le côté et cela fait 16,7 cm.*
- o, come nell'esempio che segue, con considerazioni sulla diagonale del quadrato piccolo e misura della sua diagonale e considerazioni a partire dal lato maggiore del parallelogramma:



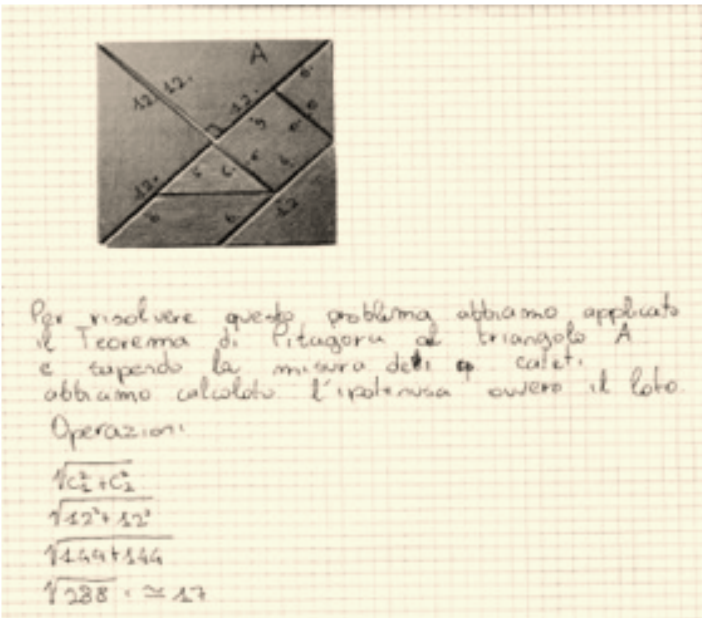
(Abbiamo provato a disegnarlo in scala reale e abbiamo visto che i due triangoli piccoli sommati, sono uguali al quadrato piccolo. Quindi lo abbiamo diviso a metà e abbiamo misurato la diagonale che misura 8,5 cm. Abbiamo trovato anche che il lato lungo del triangolo piccolo è uguale al lato lungo del parallelogramma. Poi abbiamo diviso il triangolo medio in parti uguali e abbiamo visto che la parte "1" e la parte "2" sono uguali ai triangoli piccoli, quindi abbiamo fatto 8,5 cm + 8,5 cm = 17 cm lato del tangram)

In un caso, prima di arrivare a disegnare il Tangram in scala reale, per riprodurre la foto, gli allievi hanno ritagliato i sette pezzi che compongono il Tangram assegnato e poi hanno confrontato il lato del quadrato piccolo con le altre figure, comprendendo che la diagonale misura 24 cm e arrivare infine alla soluzione corretta.
Non sono comunque tutti "rose e fiori" e le considerazioni sugli errori e i casi di insuccesso possono riassumersi nel modo seguente:

- L'errore piuttosto frequente, nel caso comunque di una ricerca con alcune considerazioni corrette, è quello di considerare il triangolo grande come equilatero, pertanto, dopo aver considerato che la misura di un suo lato è doppia della misura del lato del quadrato piccolo, si desume che il lato del Tangram misura 12 cm.
  Viene intuita una qualche loro regolarità, ma non viene apprezzato l'angolo retto, forse perché non collocato in "posizione standard". Allo stesso modo, la lunghezza della diagonale del quadrato è frequentemente considerata uguale a quella del lato. Questo porta a fornire una misura sbagliata, anche quando la relazione tra le parti che compongono il Tangram sia stata correttamente individuata.
  Ciò accade, per esempio, in un elaborato nel quale la procedura risolutiva si basa sul confronto tra la lunghezza della diagonale del quadrato piccolo e quella del lato del Tangram che ne è il doppio: *"Abbiamo considerato che in un quadrato ci sono due triangoli il cui lato è uguale a quello del quadrato piccolo. Abbiamo poi osservato che nel lato destro del Tangram ci sono due lati di due triangoli che formano quello del Tangram. Dato che un lato del triangolo è uguale a quello del quadrato più grande abbiamo calcolato (6·2=12) e abbiamo trovato il lato".*
- I casi di insuccesso, più che di effettiva incomprensione dell'enunciato, sembra che dipendano da diverse misconcezioni come ad esempio la confusione tra area e perimetro o l'uso dell'additività laddove è necessario il procedimento moltiplicativo.
  Abbiamo misurato il lato del quadrato piccolo ed è 2 cm, poi abbiamo misurato il lato del Tangram ed è 6,50 cm. Per far diventare il lato del quadrato piccolo di 6 cm abbiamo aggiunto 4 cm ai 2 cm del lato. Poi abbiamo anche distribuito i 4 cm nei lati del Tangram e quindi ogni lato aumenta di un cm e diventa di 7,5 cm.
  O ancora dove molti gruppi hanno misurato le varie parti componenti la figura, *"con il righello"*, come viene precisato. In alcuni casi gli alunni lavorano sulla differenza esistente tra le dimensioni del quadrato raffigurato e quelle che dovrà avere il modello realizzato dal falegname, cercando di "adattare" tale differenza al resto della figura: *Allora abbiamo disegnato il quadrato piccolo di lato 6 cm, però abbiamo capito che non serviva a nulla così abbiamo misurato nella figura rappresentata e abbiamo scoperto che il lato del quadrato piccolo in figura è 2,3 cm, però c'è un altro pezzo accanto che sommato a quell'altro lato fa il lato del triangolo grande, che però non aveva i lati tutti uguali. Così abbiamo scoperto che in tutto è 4,6 cm e che se 2,3 è uguale a 6 così lo abbiamo moltiplicato per 2 e viene 12, poi il lato grande è 4,6 più 2,3 quindi 6+6+6 = 24.*
  Oppure: *Il risultato che ci è tornato è 28,7 cm. Abbiamo misurato i lati del quadrato piccolo nella figura ed era 2,1 cm e abbiamo eseguito una sottrazione per calcolare quanto mancava a 6,0 cm e tornava 3,9 cm. In seguito si è misurato il quadrato tutto insieme alle altre figure e ci è tornato 6,2 cm, poi abbiamo calcolato il perimetro che era 24,8 cm ma non era il vero risultato e si è aggiunto 3,9 cm che torna 28,7 cm che è il vero risultato".*
  Una delle difficoltà riscontrate riguarda, nella quadrettatura del foglio, la confusione tra la diagonale del quadretto con il suo lato.

Categoria 7

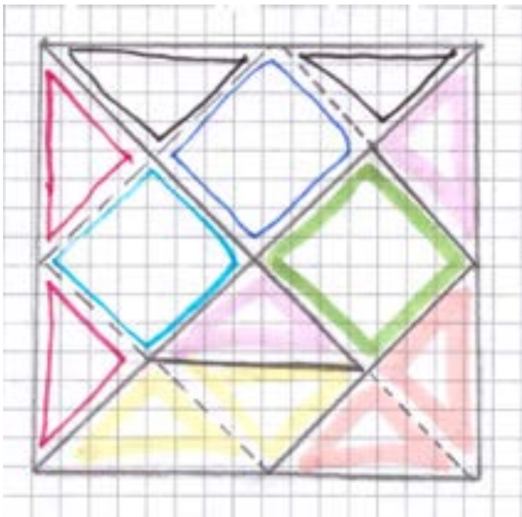
Le potenzialità di questo problema si arricchiscono notevolmente nel passaggio dalla categoria 6 alla categoria 7, nella varietà di successi con vari gradi di correttezza, e di insuccessi.
In effetti, in questa categoria gli approcci al problema sono in parte diversi; sono diminuiti i gruppi di alunni che utilizzano il rapporto tra le misure di lunghezza e permane in alcuni la necessità di cercare il valore del perimetro del Tangram. Diventa frequente il ricorso al calcolo dell'area e infine prevale il numero di classi, che utilizzano il Teorema di Pitagora, generalmente con buoni risultati.



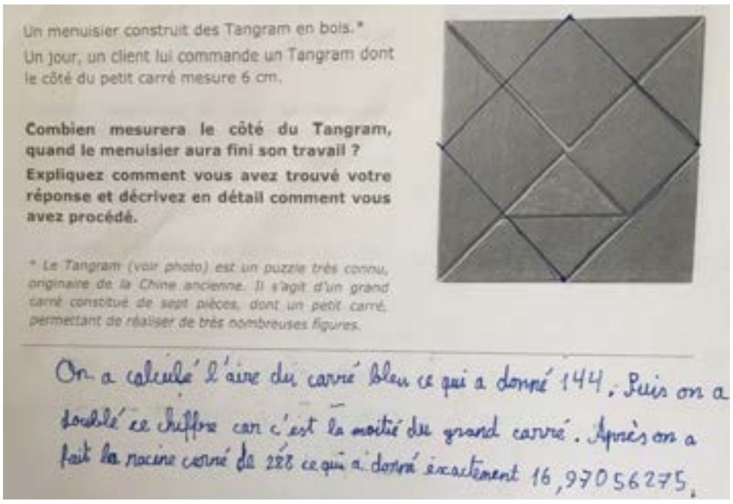
Persiste peraltro anche una certa difficoltà a riconoscere le relazioni tra le misure dei lati del triangolo rettangolo isoscele, che in alcuni casi viene ancora scambiato per equilatero.

Figurano anche altre procedure, come ad esempio, una procedura che ricorda una parte della procedura a priori "… con il triangolo piccolo come unità di misura si trova 16 e 16 x 18 = 288": *aire triangle b.h/2 = 6 . 6 /2 = 18 cm²; 16 triangles en tout donc 18 . 16 = 288 cm².* O anche *Allora, per prima cosa abbiamo provato a suddividere il puzzle in altri quadrati corrispondenti a quello più piccolo ed effettivamente all'interno del quadrato più grande si trovano 8 quadrati piccoli (4 quad piccoli + 8 trian*). Una volta trovata l'area di un quadrato piccolo ci è bastato moltiplicarla per 8(n° q piccoli), in modo tale da trovare l'area complessiva del quadrato grande. Una volta trovata quest'ultima, abbiamo fatto la radice quadrata dell'area totale, così abbiamo trovato il lato. *goli che messi insieme formano un q piccolo).*

Ma anche, ad esempio, nel caso di un gruppo che usa il quadrato piccolo per tassellare l'intera figura e rispondere correttamente: *"[...] ogni quadrato ha un'area di 36 cm², quindi abbiamo fatto 8 quadratini·36 cm²=288 cm², l'area dell'intero Tangram. Infine per trovare il lato abbiamo fatto la radice di 288 cm² (area):*
$\sqrt{288} = 16{,}97\ cm$*".*



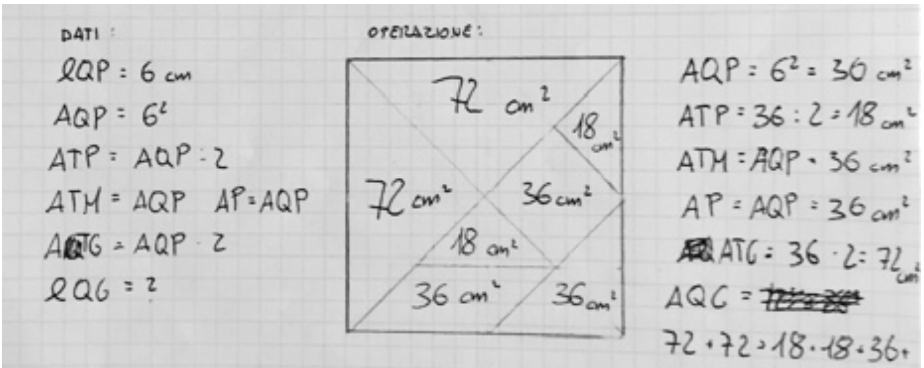
Non è banale una procedura che non figura specificamente nell'analisi a priori, con ricerca dell'area del quadrato avente i vertici nei punti medi dei lati del quadrato grande:



Per quanto riguarda la procedura che implica le aree è in effetti quella proposta nell'analisi a priori che recita "Considerare le aree dei pezzi a partire dalle deduzioni precedenti: in cm^2 quella del quadrato è 36, quella di un triangolo piccolo 18, quella del triangolo medio e del parallelogramma 36, quella di ciascuno dei triangoli grandi 72, e infine quella del Tangram 288 (con il triangolo piccolo come unità di misura si trova 16 e 16 x 18 = 288). Si può anche considerare" che il triangolo medio è la metà di un quadrato, il quarto del Tangram in basso a destra, la cui area è 72 (in cm^2)."

E si trovano espressioni come "si può dedurre…" 1. *Si on sait que tous les côtés du petit carré valent 6, en peut déduire que le côté du petit triangle vaut 6 et que l'autre aussi puisque c'est la moitié d'un petit carré. Le côté du grand triangle vaut le côté du carré et du petit triangle (donc : 6+6=12). Le parallélogramme est 2 petits triangles comme le moyen triangle. 2. Calculer l'aire de chaque forme : A du grand triangle : 12.12/2 = 72, A du petit triangle = 6.6=36, A du petit triangle 6.6=18, A du parallélogramme (6.6/2) + (6.6/2) =36, idem pour l'aire du moyen triangle. 3. Calculer l'aire du grand carré : A = 72+72+18+36+18+36+36=288. 4. Calculer d'un côté du grand carré : √288 = 16,97056275. Conclusion : Un côté du grand carré vaut 16,97056275.*

Interessanti anche gli elaborati che seguono, l'uno con l'indicazione sul disegno delle aree dei sette pezzi del Tangram e con un uso piuttosto esplicativo della simbologia utilizzata, per indicare il lato del quadrato piccolo: lQP, la sua area: AQP, le aree dei vari triangoli: piccolo, medio e grande e così via, fino all'area del parallelogramma: AP, com'è indicato:



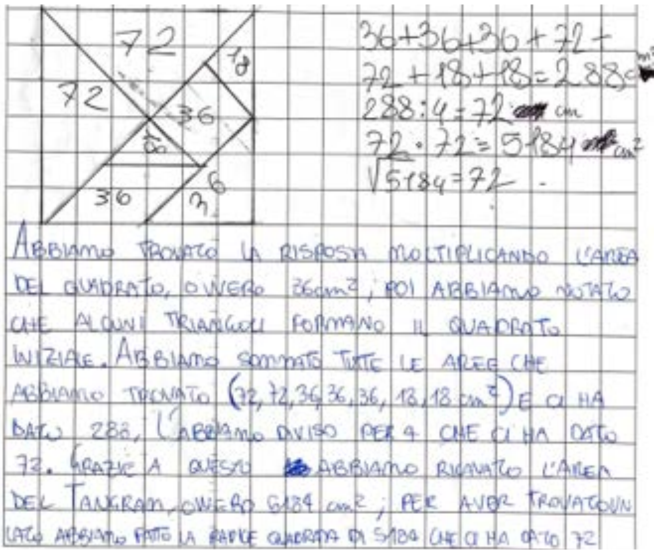
l'altro che recita che l'area del quadrato grande è otto volte l'area del quadrato piccolo, con successive "deduzioni": *Sapendo che il lato del quadrato piccolo è 6 cm, possiamo calcolare la sua area, ovvero 36* cm^2 . *Ci siamo anche accorti che i cateti dei triangoli rettangoli più piccoli equivalgono a 6 cm ciascuno. Anche il parallelogramma sottostante a uno dei due triangoli rettangoli è equivalente al quadrato piccolo, poiché scomposto equivale a due dei triangoli rettangoli piccoli, proprio come il quadrato. Anche il triangolo rettangolo che si trova nell'angolo in basso a destra ha la stessa area del quadrato. Riusciamo quindi a scoprire che metà del Tangram equivale a quattro volte l'area del quadrato piccolo. Di conseguenza l'area del quadrato grande equivale a otto volte l'area del quadrato piccolo. Abbiamo quindi moltiplicato 36 per 8 e abbiamo ottenuto l'area del quadrato grande, ovvero 288* cm^2. *Per trovare il lato del Tangram abbiamo fatto la radice quadrata dell'area, ottenendo così il lato, ovvero 16,97056274.*

Errori e imprecisioni

In merito a errori o imprecisioni anche nella categoria 7 si ritrova l'errore (meno frequente che in categoria 6) di considerare il triangolo grande come equilatero, pertanto, dopo aver considerato che la misura di un suo lato è doppia della misura del lato del quadrato piccolo, si desume che il lato del Tangram misura 12 cm; comunque questo errore è all'interno di una ricerca con alcune considerazioni corrette.

Ma anche, ad esempio gli allievi lavorano sull'area dei triangoli la cui ipotenusa forma il lato del Tangram, ma hanno poi difficoltà a individuare la misura dell'altezza a essa relativa *[…] abbiamo calcolato l'area del triangolo in basso a sinistra fatto da noi. Abbiamo trovato l'area facendo (6·6:2)18 cm^2. Poi siamo andati a tentativi trovando l'altra base (8 cm). Poi per trovare l'altezza abbiamo fatto 18:8·2=4,5cm =l'altezza. Abbiamo fatto la riprova facendo 8·4,5:2=18 cm^2 e ci tornava. Poi abbiamo diviso gli altri triangoli più grandi allo stesso modo e i triangoli avevano lo stesso lato di quello diviso prima, quindi il lato più lungo misurava 8 cm […] quindi il lato della figura è 16 cm.*

O ancora, gli allievi calcolano correttamente le aree dei 7 pezzi del Tangram e sommandole ottengono l'area del Tangram, ma poi l'area diventa perimetro…..Che peccato!



Le imprecisioni riguardano, in particolare, il passare attraverso le misure della figura dell'enunciato, fino al caso decisamente errato, dell'elaborato dove vengono prese le misure di tutti i segmenti della figura data per arrivare a trovare le aree delle figure, sommarle e trovare poi la misura del lato del Tangram, perdendo di vista il fatto che il lato del quadrato piccolo dovesse misurare 6 cm, col quale "confrontare" le altre misure.

Riflessioni / Réflexions

Questo problema ha permesso di evidenziare, da un lato, errori frequenti e insufficiente padronanza di conoscenze di base di geometria piana, insufficienze sulle cause delle quali sarebbe fondamentale riflettere, ma dall'altro la messa in opera, da parte di alcuni gruppi di allievi, di procedure non solo interessanti, ma anche foriere di un bel dibattito in una auspicabile attività di classe.

Ce problème a permis de mettre en évidence, d'une part, des erreurs fréquentes et une maîtrise insuffisante des connaissances de base en géométrie plane, une réflexion sur les causes de ces lacunes doit être impérativement engagée mais, d'autre part, elle a également permis de montrer la mise en œuvre, par certains groupes d'élèves, de procédures non seulement intéressantes, mais aussi annonciatrices d'un riche débat lors d'une activité de classe souhaitable.

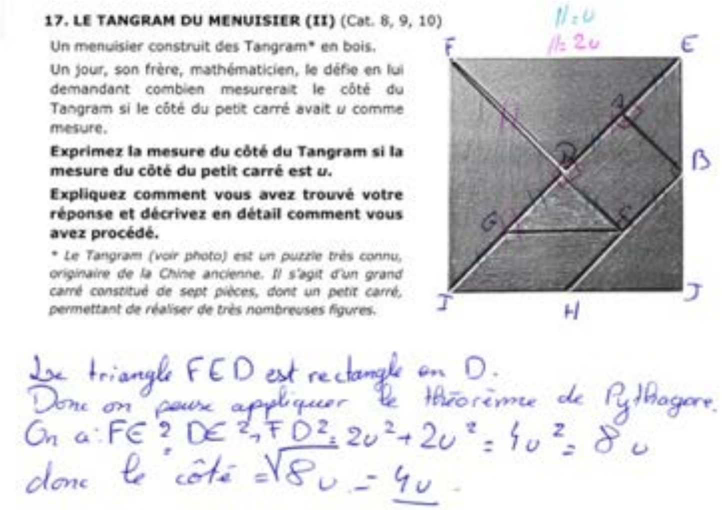
Tangram del falegname (II)

Questa versione del problema del Tangram del falegname ha visto impegnate 486 classi di categoria 8, ma solo 267 delle categorie 9 e 10 che non tutte le sezioni contemplano, in particolare quelle di lingua francese.

Per quel che riguarda la categoria 8, l'analisi a posteriori è stata condotta da membri del gruppo sugli elaborati delle sezioni di Cagliari, Franche-Comté, Parma, Rozzano, Sassari, Siena, Svizzera romanda, Toscana Nord. Mentre per quel che riguarda le categorie 9 e 10, gli elaborati esaminati (peraltro non numerosi) sono quelli delle sezioni di Cagliari, Parma, Sassari e Siena.

L'aspetto intrigante in questa versione è, ovviamente, la misura generica *u* del lato del quadrato piccolo.

Nella categoria 8 il teorema di Pitagora è "il protagonista" anche laddove, come in Franche Comté: Au moment de la passation de la deuxième épreuve, tous les élèves n'ont peut-être pas encore travaillé le théorème de Pythagore ou cette notion est en cours d'apprentissage (Al momento della seconda prova forse non tutti gli allievi avevano affrontato in classe il teorema di Pitagora o questa nozione era ancora in una fase iniziale di apprendimento). La moitié des copies présente l'utilisation plus ou moins maladroite du théorème de Pythagore et des écritures algébriques (la metà degli elaborati presenta l'uso più o meno maldestro del teorema di Pitagora e delle scritture algebriche)



17. LE TANGRAM DU MENUISIER (II) (Cat. 8, 9, 10)

Un menuisier construit des Tangram* en bois.

Un jour, son frère, mathématicien, le défie en lui demandant combien mesurerait le côté du Tangram si le côté du petit carré avait *u* comme mesure.

Exprimez la mesure du côté du Tangram si la mesure du côté du petit carré est *u*.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et décrivez en détail comment vous avez procédé.

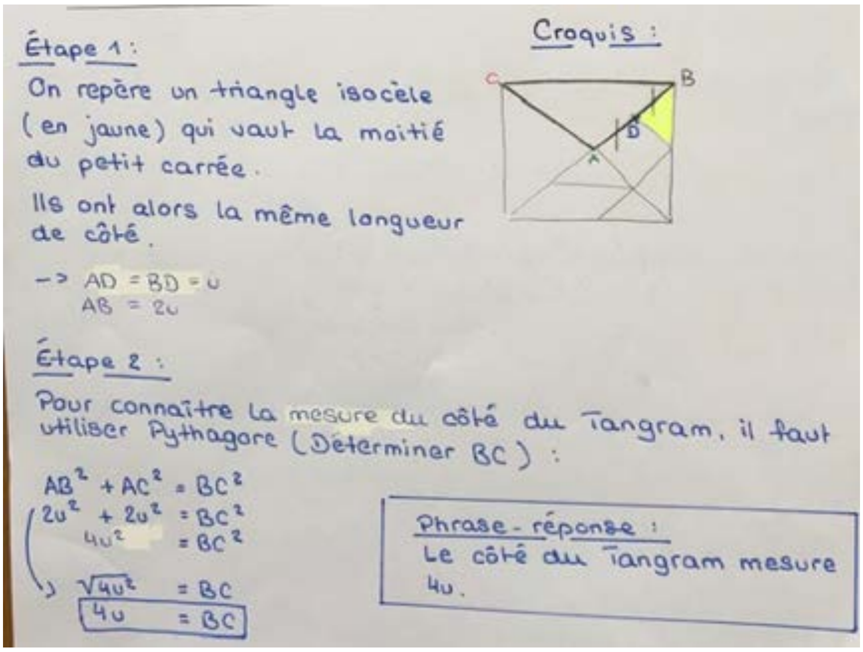
** Le Tangram (voir photo) est un puzzle très connu, originaire de la Chine ancienne. Il s'agit d'un grand carré constitué de sept pièces, dont un petit carré, permettant de réaliser de très nombreuses figures.*

Le triangle FED est rectangle en D.
Donc on peut appliquer le théorème de Pythagore.
On a: FE² = DE² + FD² = 2u²+2u² = 4u² = 8u
donc le côté = √8u = 4u.

Peraltro, non tutti i gruppi delle varie sezioni menzionate riescono ad arrivare alla soluzione corretta a causa, perlopiù di un'errata gestione dei dati non numerici. Se da un lato, infatti, si nota, nel complesso, una discreta padronanza del teorema di Pitagora (In Italia l'argomento viene affrontato già in categoria 7), dall'altro fa difetto la padronanza delle nozioni iniziali di calcolo letterale.

Si opera spesso sia sul triangolo rettangolo isoscele grande i cui cateti misurano 2*u*, sia su quello piccolo, i cui cateti misurano *u*.

Un errore "inatteso", lo si trova nella ricerca dell'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele grande con il teorema di Pitagora, il quadrato di 2u di ciascun cateto viene indicato con 2u^2, cioè si eleva al quadrato u, ma non il coefficiente 2!



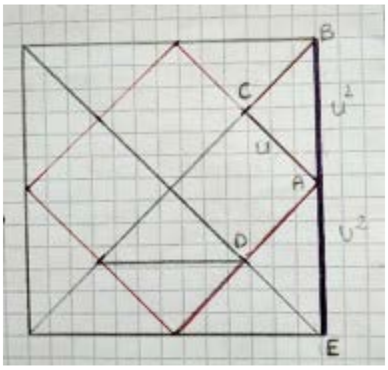
Étape 1 :
On repère un triangle isocèle (en jaune) qui vaut la moitié du petit carrée.
Ils ont alors la même longueur de côté.
→ AD = BD = u
AB = 2u

Croquis :

Étape 2 :
Pour connaître la mesure du côté du Tangram, il faut utiliser Pythagore (Déterminer BC) :
AB² + AC² = BC²
2u² + 2u² = BC²
4u² = BC²
√4u² = BC
4u = BC

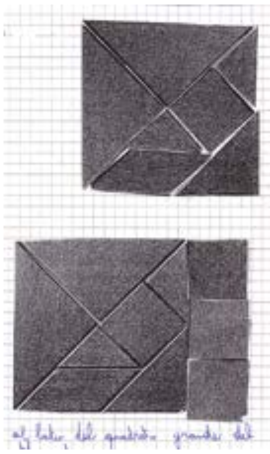
Phrase - réponse :
Le côté du Tangram mesure 4u.

Oppure, l'inciampo "algebrico" è del seguente tipo: *Abbiamo fatto il teorema di Pitagora del triangolo ABC per trovare l'ipotenusa AB. AB=*$\sqrt{u^2+u^2}$*=*$\sqrt{u^4}$ *=u*^{2} *Il lato AB misura u*^{2}*. Considerando che AB è uguale a AE anche AE misura u*^{2}*. Per trovare la lunghezza del lato del Tangram abbiamo fatto BE = u*^{2} *+ u*^{2} *= u*^{4}*. Per concludere secondo noi il lato del Tangram misura u*^{4}*".*

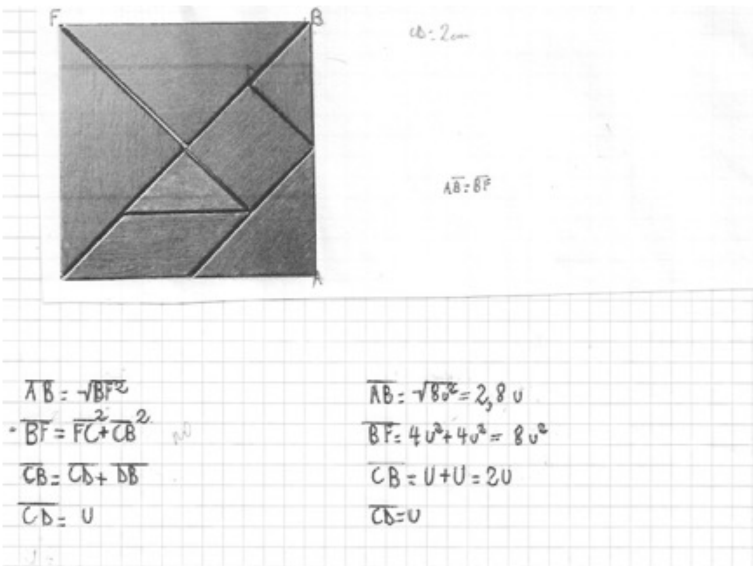


In altri casi si trova scritto: $l=\sqrt{2u^2+2u^2}=\sqrt{4u^2}=4u$, oppure $2u^2+2u^2=4u^2$ e $\sqrt{4u^2}=2u$).

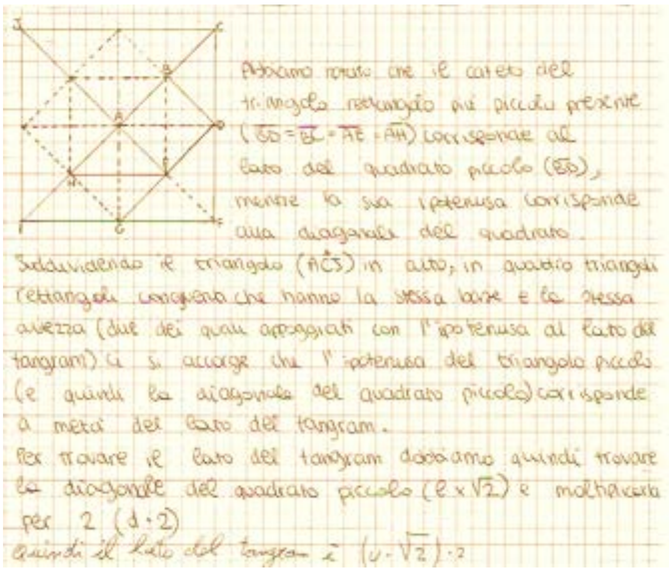
O ancora, un'inesattezza frequente è quella legata all'approssimare il risultato a $3u$, laddove, in particolare, la radice di 8 viene approssimata a 3, ma anche laddove i gruppi cercano la soluzione attraverso il confronto tra le misure dei lati dei due quadrati, ottenendo così per la lunghezza del lato del Tangram il valore $3u$, come, ad esempio, nell'elaborato dove gli allievi spiegano che *Abbiamo ritagliato il Tangram. Abbiamo accostato i quadratini al lato del quadrato grande del Tangram e visto che misurava esattamente 3u.*



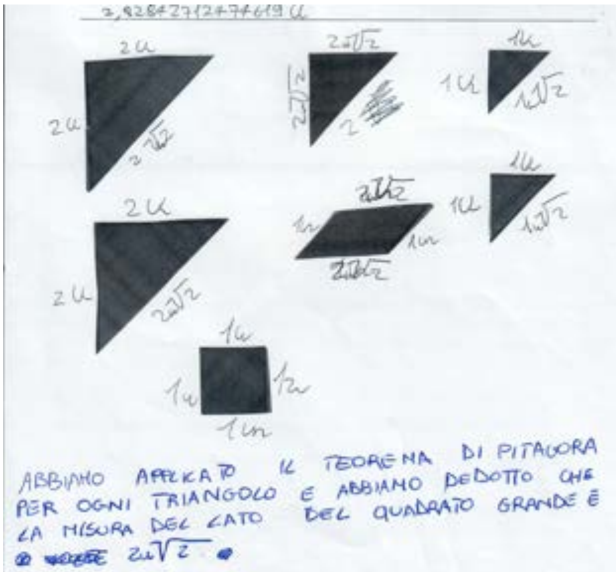
In alcuni elaborati (e non sono molti) all'applicazione del teorema di Pitagora è seguita una corretta gestione del calcolo letterale in gioco



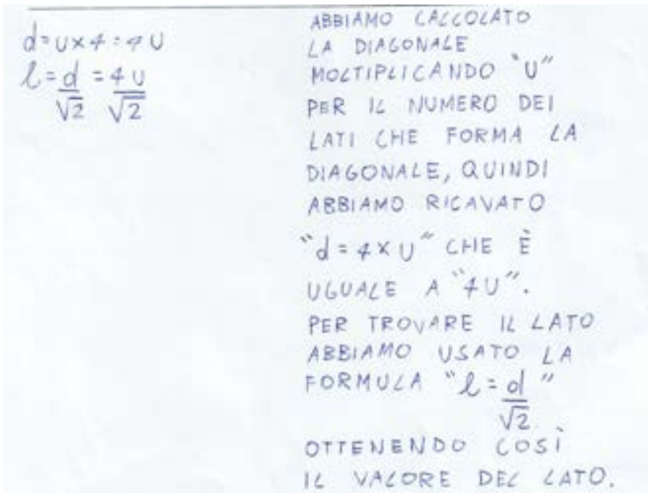
o anche con una spiegazione dettagliata che fa riferimento ad alcune deduzioni



Per arrivare anche al caso di un elaborato nel quale gli allievi scompongono il Tangram nei sette poligoni, applicano il teorema di Pitagora e deducono le misure per arrivare a calcolare la misura del lato

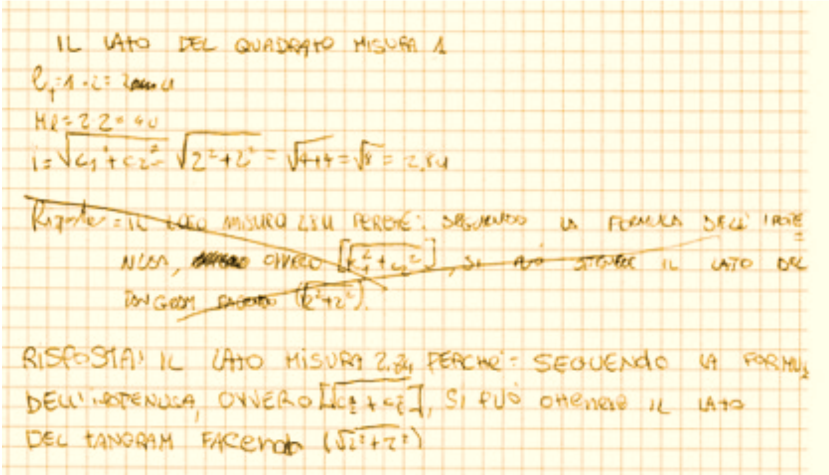


Tra gli elaborati, un numero molto esiguo fa riferimento esplicito alla relazione fra lato e diagonale di un quadrato

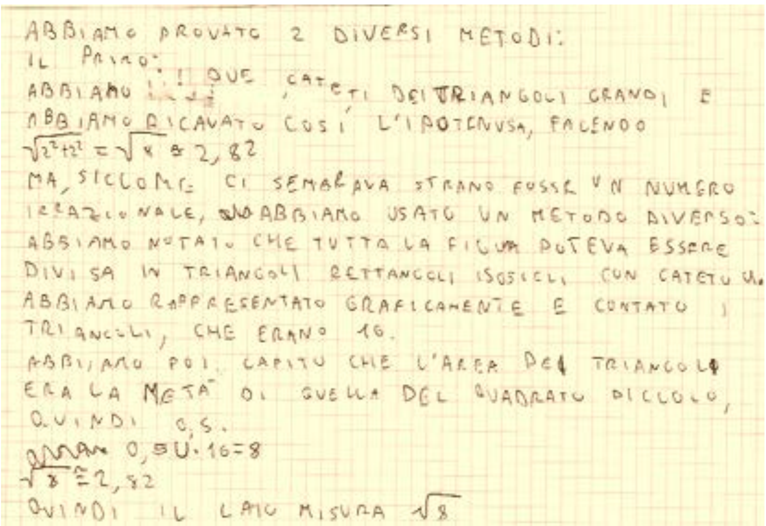


La difficoltà a gestire il valore generico *u* del lato del quadrato piccolo, viene in qualche modo aggirata nell'assegnare ad *u* un valore numerico arbitrario.

Nel caso dell'elaborato che segue, il valore assegnato al lato del quadrato è 1. Nei primi passaggi compare e poi scompare la *u,* ma è chiaro che gli alunni hanno compreso il problema perché il quadrato di partenza è quello piccolo in quanto viene messo in evidenza che $\boldsymbol{l_t} = 1.2 = 2$


IL LATO DEL QUADRATO MISURA 1
$l_1 = 1 \cdot 2 = 2u$
$H_l = 2 \cdot 2 = 4u$
$i = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2{,}84$
~~Risposta: il lato misura 2,8 u perché: seguendo la formula dell'ipotenusa, ovvero $[\sqrt{c_1^2+c_2^2}]$, si può ottenere il lato del tangram facendo $(\sqrt{2^2+2^2})$.~~
RISPOSTA: IL LATO MISURA 2,84 PERCHÉ: SEGUENDO LA FORMULA DELL'IPOTENUSA, OVVERO $[\sqrt{c_1^2+c_2^2}]$, SI PUÒ OTTENERE IL LATO DEL TANGRAM FACENDO $(\sqrt{2^2+2^2})$

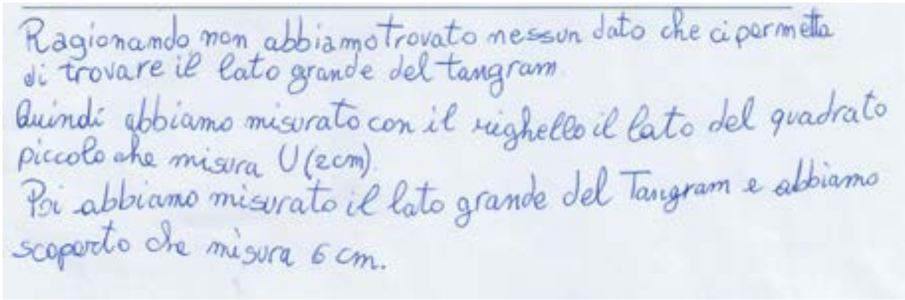
Interessante anche il caso dell'elaborato che mostra il dubbio degli allievi sul risultato, quando dicono *Siccome ci sembrava strano fosse un numero irrazionale, abbiamo usato un metodo diverso*:


ABBIAMO PROVATO 2 DIVERSI METODI:
IL PRIMO:
ABBIAMO ... I DUE CATETI DEI TRIANGOLI GRANDI E
ABBIAMO RICAVATO COSÌ L'IPOTENUSA, FACENDO
$\sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} \cong 2{,}82$
MA, SICCOME CI SEMBRAVA STRANO FOSSE UN NUMERO
IRRAZIONALE, ABBIAMO USATO UN METODO DIVERSO:
ABBIAMO NOTATO CHE TUTTA LA FIGURA POTEVA ESSERE
DIVISA IN TRIANGOLI RETTANGOLI ISOSCELI, CON CATETO U.
ABBIAMO RAPPRESENTATO GRAFICAMENTE E CONTATO I
TRIANGOLI, CHE ERANO 16.
ABBIAMO POI CAPITO CHE L'AREA DEL TRIANGOLO
ERA LA METÀ DI QUELLA DEL QUADRATO PICCOLO,
QUINDI 0,5.
$0{,}5U \cdot 16 = 8$
$\sqrt{8} \cong 2{,}82$
QUINDI IL LATO MISURA $\sqrt{8}$

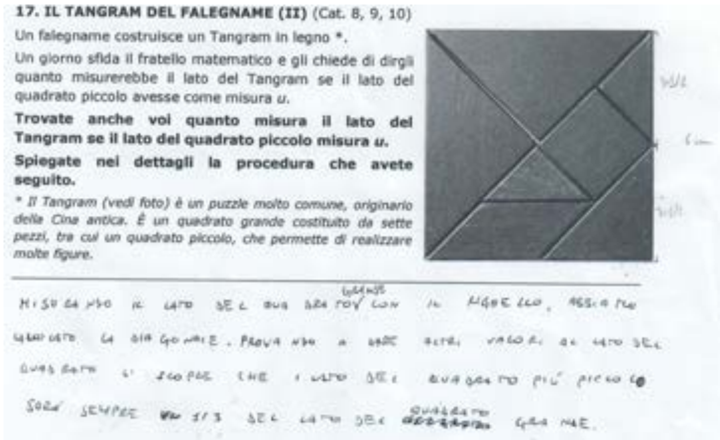
Nell'analisi a priori era stata immaginata anche una procedura basata sulle aree: "Capire che è possibile trovare il lato del Tangram a partire dalla sua area per trovare la quale è necessario trovare le misure delle aree dei suoi pezzi (si veda più sopra): quadrato piccolo u^2, triangoli piccoli 1/2 u^2 ciascuno, il triangolo medio è anch'esso rettangolo isoscele ed è diviso in due triangoli uguali dalla diagonale del quadrato grande che sono some i due piccoli precedenti, quindi ciascuno di area 1/2 u^2; se si divide in due il parallelogramma, per le considerazioni precedenti, dà luogo ancora a due triangoli piccoli come i precedenti. La sua area è dunque u^2. L'area della metà del quadrato è pertanto: $u^2 + u^2 + u^2 + 1/2\, u^2 + 1/2\, u^2 = 4\, u^2$. L'area totale misura dunque $8u^2$.

L'analisi a posteriori ha permesso di constatare che in effetti, in alcuni casi si è cercato di trovare il lato del Tangram a partire dall'area della figura. Una classe, che calcola l'area dividendo a metà il prodotto delle diagonali, raggiunge lo scopo ottenendo la misura $\sqrt{8}\, u$, altre classi, che tassellano la figura con 8 quadrati o 16 triangoli rettangoli isosceli, non arrivano però al risultato. In un caso l'area è 16 u^2 in un altro il lato misura 8 u mentre una classe arriva a un risultato numerico tralasciando il valore letterale: *"u= 2 quindi l'area del quadrato piccolo è 4* u^2 *[…] ci sono 16 triangoli di uguale misura, ovvero 2* u^2*. Essendo ogni quadrato di area 4, l'area totale del quadrato è 16. Sapendo che l'area è 16 si trova il lato del Tangram, che è 4".*

Tra le varie procedure non manca il ricorso al righello, che per alcuni gruppi diventa una sorta di "ancora di salvezza"



Ragionando non abbiamo trovato nessun dato che ci permetta di trovare il lato grande del tangram
Quindi abbiamo misurato con il righello il lato del quadrato piccolo che misura U (2cm).
Poi abbiamo misurato il lato grande del Tangram e abbiamo scoperto che misura 6 cm.



17. IL TANGRAM DEL FALEGNAME (II) (Cat. 8, 9, 10)

Un falegname costruisce un Tangram in legno *.

Un giorno sfida il fratello matematico e gli chiede di dirgli quanto misurerebbe il lato del Tangram se il lato del quadrato piccolo avesse come misura *u*.

Trovate anche voi quanto misura il lato del Tangram se il lato del quadrato piccolo misura *u*.

Spiegate nei dettagli la procedura che avete seguito.

** Il Tangram (vedi foto) è un puzzle molto comune, originario della Cina antica. È un quadrato grande costituito da sette pezzi, tra cui un quadrato piccolo, che permette di realizzare molte figure.*

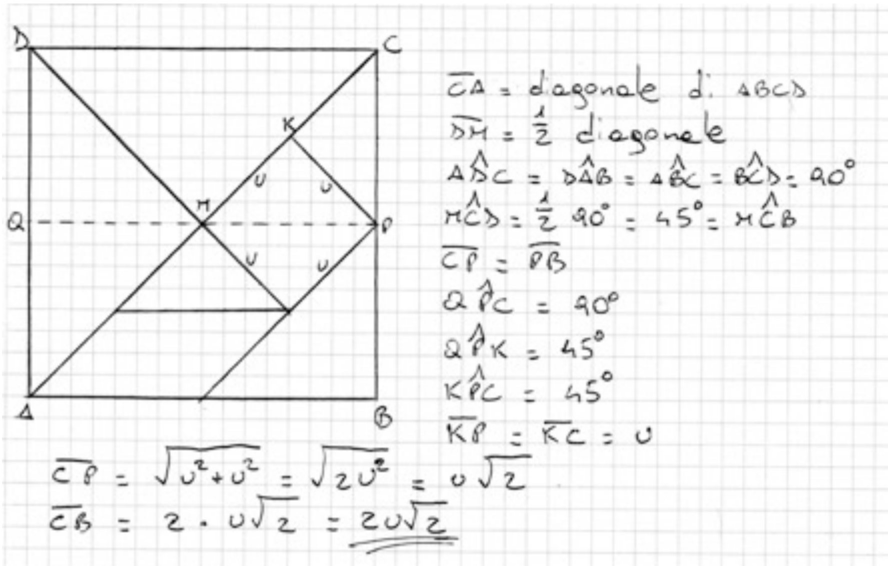
MISURANDO IL LATO DEL QUADRATO GRANDE CON IL RIGHELLO, ABBIAMO MISURATO LA DIAGONALE. PROVANDO A DARE ALTRI VALORI AL LATO DEL QUADRATO SI SCOPRE CHE I LATI DEL QUADRATO PIÙ PICCOLO SONO SEMPRE 1/3 DEL LATO DEL QUADRATO GRANDE.

e qui, come dichiarato esplicitamente dal gruppo, per poter tentare di risolvere il problema gli alunni misurano, ma commettono l'errore di considerare il lato del quadrato piccolo pari a 1/3 del grande, oppure il lato e la diagonale del quadrato in rapporto 3:4.

Che cosa è successo nel caso delle categorie 9 e 10?

Uno degli aspetti da non sottovalutare del nostro Rally è quello dei problemi che sono sempre, a parte qualche caso particolare, proposti a diverse categorie. Questo aspetto, come si è già visto, per esempio nel paragrafo relativo al Tangram del falegname (I), permette di cogliere somiglianze e differenze sia di interpretazione matematica, sia di errori e difficoltà.

Nel caso del Tangram del falegname (II), benché non siano molti gli elaborati analizzati, La maggior parte degli elaborati di categoria 9, presenta l'applicazione del teorema di Pitagora o al triangolo minore o a quello maggiore.



Non sempre, inoltre, l'uso della lettera *u* è corretto.

Nella categoria 10, sembra che i gruppi preferiscano al Teorema di Pitagora l'uso della formula l = d : √2 applicata alla diagonale di misura 4u. Nelle procedure è gestito meglio il valore indeterminato *u.*

17. IL TANGRAM DEL FALEGNAME (II)

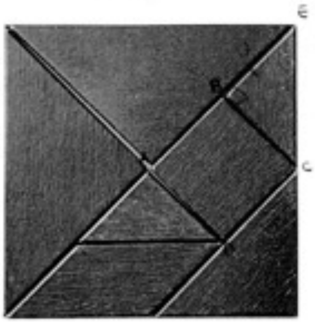
Un falegname costruisce un Tangram in legno *.

Un giorno sfida il fratello matematico e gli chiede di dirgli quanto misurerebbe il lato del Tangram se il lato del quadrato piccolo avesse come misura *u*.

Trovate anche voi quanto misura il lato del Tangram se il lato del quadrato piccolo misura *u*.

Spiegate nei dettagli la procedura che avete seguito.

* *Il Tangram (vedi foto) è un puzzle molto comune, originario della Cina antica. È un quadrato grande costituito da sette pezzi, tra cui un quadrato piccolo, che permette di realizzare molte figure.*



[illegible] DAL MOMENTO CHE IL TRIANGOLO $\overset{\triangle}{BEC}$ [illegible] ALLA DESTRA DEL QUADRATO PICCOLO ABCD, CON LATO $\overline{AB}=u$, È ISOSCELE, PERCHÉ PRESENTA UN ANGOLO RETTO E DUE ANGOLI DA 45°, SI PUÒ AFFERMARE CHE [illegible] $\overline{BE}=\overline{BC}=u$. DA QUI SI OTTIENE CHE LA METÀ DELLA DIAGONALE DEL TANGRAM È 2u, PERCIÒ LA DIAGONALE MISURA 4u. SICCOME LA DIAGONALE DI UN QUADRATO MISURA $\ell\sqrt{2}$, ALLORA $\ell = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

QUINDI IL LATO DEL TANGRAM È UGUALE A:

$$\ell = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{4u}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}u}{2} = 2\sqrt{2}u.$$

In categoria 10 figurano elaborati che fanno riferimento a questioni angolari

Il lato del tangram misura 2,82842712 u

Assegniamo delle lettere alle figure e consideriamo il triangolo BEF.

Esso è isoscele per l'inverso del teorema del triangolo isoscele, poiché gli angoli alla base sono congruenti in quanto differenze di angoli congruenti ($F\hat{E}B = \pi - 90° - 45°$

angolo piatto ← angolo interno quadrato

e $F\hat{B}E = \pi - 90° - 45°$)

Essendo isoscele ha i lati obliqui congruenti ($\overline{FE} \cong \overline{FB}$), ma dato che $\overline{FE} \cong \overline{FC}$ allora $\overline{FB} \cong \overline{FC}$.

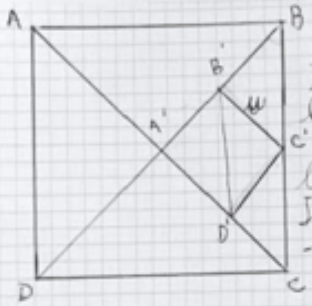
$\overline{CF} + \overline{FB} = 2 \cdot u = 2u$

Anche il triangolo ABC è isoscele per l'inverso del teorema del triangolo isoscele, in quanto gli angoli sono metà di angoli congruenti ($C\hat{A}B = \frac{1}{2}90°$ e $C\hat{B}A = \frac{1}{2}90°$) e quindi congruenti. Anche $\overline{AC} = 2u$.

Applichiamo il teorema di Pitagora per calcolare la misura di $\overline{AB}$:

$$\ell = \sqrt{(2u)^2 + (2u)^2} = \sqrt{4u^2 + 4u^2} = \sqrt{8u^2} = 2,82842712\ u$$

Se da un lato pochissimi elaborati presentano cenni di "dimostrazioni", quando questa c'è sembra particolarmente dettagliata



Dimostrazione
Prendiamo in considerazione la figura.
Il quadrato ABCD ha come diagonali BD e AC, quindi gli angoli $C\hat{B}D$ e $A\hat{B}D$ sono di 45°, poiché le diagonali sono bisettrici degli angoli.
Il triangolo BB'C ha:
- $C\hat{B}B' \cong 45°$
- $C\hat{B'}B \cong 90°$, perché angolo esterno del quadrato A'B'C'D' (180-90°=90°).

Per questo motivo $B\hat{C'}B \cong 45°$, perché la somma degli angoli interni è 180° ($B\hat{B'}C' + B'\hat{B}C' + B'\hat{C'}B = 90 + 45° + B'\hat{C'}B = 180°$).
Quindi il triangolo BC'B' è isoscele, allora $B'C' \cong B'B$.
$B'C' \cong u$, quindi $B'B \cong u$ per proprietà transitiva.
Adesso tracciamo la diagonale B'D'.

Si dimostra che $A'B'D' \cong B'CB$, perché hanno:
- $B'\hat{A}D' \cong B\hat{B}C' \cong 90°$
- $A'\hat{B'}D' \cong A\hat{B}D\ A\hat{D'}B' \cong 45$, visto che B'D' è ~~bisettrice del~~ diagonale del quadrato e quindi bisettrice di $A'\hat{B'}C'$ e $A'D'C'$. =>

perciò $A'\hat{B'}D' \cong A'D'B' \cong B'\hat{B}C' \cong BC'B$.
- ~~lo stesso~~ $A'B' \cong A'D' \cong B'B \cong B'C'$. per proprietà transitiva

In particolare $B'D' \cong BC'$, lati corrispondenti in triangoli congruenti.
Sappiamo che $B'D' \cong \sqrt{2}u$ perché diagonale di un quadrato di lato $u \Rightarrow BC' \cong \sqrt{2}u$
Facciamo lo stesso procedimento per dimostrare che $CC' \cong \sqrt{2}u$.

Quindi $BC \cong BC' + C'C \Rightarrow BC \cong \sqrt{2}u + \sqrt{2}u \Rightarrow \cong 2\sqrt{2}u$

Va peraltro sottolineato che anche in queste categorie “dei grandi” figurano elaborati nei quali gli allievi assegnano a *u* un valore particolare e non passano alla generalizzazione.

O ancora, sussistono difficoltà ed errori nel calcolo algebrico e nell’estrazione dalle radici quadrate, con talvolta un uso improprio di termini geometrici e simboli, ma anche nella gestione di valori approssimati.

Abbiamo preso in considerazione il triangolo in alto, notando che i suoi lati equivalgono al doppio del lato del quadrato piccolo.
Abbiamo quindi moltiplicato il valore del lato del quadrato per due per trovare il lato del triangolo che, essendo rettangolo, ha un ipotenusa.

$C = u \cdot 2 = 2u$

Abbiamo utilizzato il teorema di pitagora per il lato.

$\sqrt{C^2 + C^2} = \sqrt{2u^2 + 2u^2}$

Infine abbiamo semplificato l'espressione

$\sqrt{4u^2} = 4u$

U = Lato piccolo

$l(2) = U$

$i(2) = \sqrt{U^2 + U^2} = \sqrt{U + U} = \sqrt{U} = U$

$i(2) = U$

l tangram $= i(2) \cdot 2 = U$

***Dall’analisi a posteriori all’uso delle due versioni del Tangram del falegname in classe /* De l'analyse a posteriori à l'utilisation des deux versions du Tangram du menuisier en classe**

L’analisi a posteriori, se da un lato ha evidenziato difficoltà ed errori, dall’altro può contribuire a suggerire interessanti aspetti didattici. Entrambe le versioni mostrano una grande ricchezza per quanto riguarda diverse “conoscenze” di geometria piana congiuntamente all’uso del calcolo letterale in contesti geometrici e alla gestione dell’approssimazione e dell’importanza delle cifre significative.

In classe, una discussione collettiva potrà permettere agli allievi di capire meglio le strategie risolutive operate e gli eventuali loro limiti o errori.
Per quanto riguarda la versione (I) pensiamo sarebbe opportuno cambiare il dato relativo alla lunghezza del lato del quadrato piccolo. Infatti, in alcune fotocopie (purtroppo le immagini ottenute nelle fotocopie delle varie scuole hanno misure differenti tra loro) il lato del Tangram raffigurato è circa 6 cm, che è anche la misura che il quadrato piccolo avrà nella realtà del nostro problema. Questa coincidenza di misure a nostro parere potrebbe aver favorito fraintendimenti.
L'analyse a posteriori, si d'une part elle met en évidence des difficultés et des erreurs, d'autre part elle peut aider à suggérer des aspects didactiques intéressants. Les deux versions montrent une grande richesse concernant les différentes "connaissances" de la géométrie plane ainsi que l'utilisation du calcul littéral dans des contextes géométriques et la gestion de l'approximation et de l'importance des chiffres significatifs.
En classe, une discussion collective permettra aux élèves de mieux comprendre les stratégies de résolution mises en œuvre et leurs éventuelles limites ou erreurs.
En ce qui concerne la version (I), nous pensons qu'il serait opportun de modifier les données relatives à la longueur du côté du petit carré. En fait, dans certaines photocopies (malheureusement les images obtenues dans les photocopies des différentes écoles ont des tailles différentes) le côté du Tangram représenté est d'environ 6 cm, ce qui est aussi la mesure que le petit carré aura dans la réalité de notre problème. Cette coïncidence de mesures a, à notre avis, pu favoriser des malentendus.

4.2 I I sette poligoni

4.2.1 I risultati

Prima di presentare le analisi a posteriori condotte da membri del gruppo sugli elaborati della propria sezione di appartenenza, riportiamo qui di seguito i primi dati raccolti dopo la prova che si presentano sotto forma di tabella dei punteggi attribuiti secondo i criteri di attribuzione che erano stati determinati a priori.

La tabella generale

Punteggi attribuiti su 1681 classi di 20 sezioni

13.I sette poligoni /¬†Les sept polygones							Epreuve 1-2022
Cat.	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	M
7	225 (23%)	334 (35%)	251 (26%)	89 (9%)	64 (7%)	963	1.4
8	79 (11%)	208 (29%)	216 (30%)	115 (16%)	100 (14%)	718	1.9
Total	304 (18%)	542 (32%)	467 (28%)	204 (12%)	164 (10%)	1681	1.6

4.2.2 Dai risultati con i punteggi alle analisi a posteriori con gli elaborati

I sette poligoni

Questo problema è nato dall'idea che gli allievi debbano trovare le aree di ciascuno dei sette poligoni proposti per rispondere alla domanda. Tramite l'analisi a posteriori degli elaborati si è cercato di capire, da un lato, quali siano state le procedure di risoluzione: l'utilizzo dei quadretti della quadrettatura come unità d'area con il conteggio oppure l'ausilio di misure di lunghezza sul disegno e calcolo delle aree con il ricorso alle formule delle aree del rettangolo, del parallelogramma, del trapezio, del triangolo, ecc. e dall'altro quali difficoltà abbiano incontrato gli allievi e, quindi, quali sono stati gli errori più frequenti nei quali sono incorsi.

Va peraltro osservato che nella consegna della versione data nella prima prova del 29° RMT, non figura più la richiesta di "non utilizzare il righello o altri dispositivi di misura" che il gruppo geometria aveva proposto e questo ha avuto, come si vedrà nell'analisi a posteriori che presentiamo, delle conseguenze non trascurabili sulle procedure di risoluzione degli allievi.

In effetti, l'intento precipuo di tale richiesta era quello di fare in modo che gli allievi spostassero l'attenzione dalle misure con il righello, che fra l'altro complica loro il compito per la presenza di numeri decimali, a misure basate sulla quadrettatura.

L'analisi a posteriori è stata condotta seguendo nel complesso la falsariga di un questionario proposto dal GIPL relativo a diversi problemi della prima prova del 29° RMT, fra i quali "I sette poligoni".

1. **Parmi les « 0 » ou « 1 »point, avez-vous pu relever des indices permettant de déterminer des obstacles à l'appropriation du problème ? Tra i punti "0" o "1" avete rilevato indicatori per determinare ostacoli all'appropriazione del problema?**

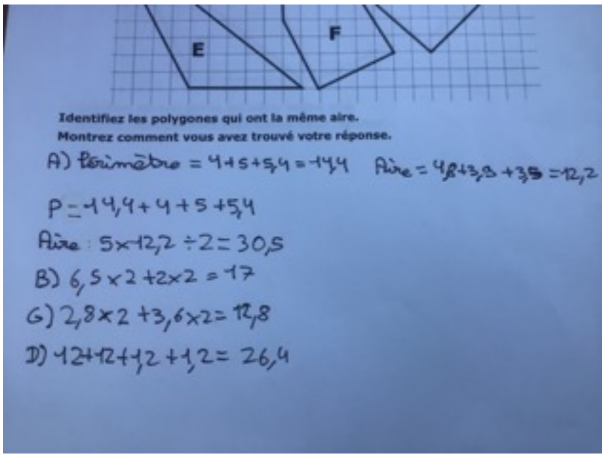
1.A Des groupes n'ont pas compris la demande d'identifier les polygones qui ont la même aire et, par conséquent n'ont pas cherché à connaître l'aire de chacun d'eux ? / Dei gruppi non hanno capito la richiesta di identificare i poligoni aventi la medesima area e, di conseguenza, non hanno cercato di sapere quale fosse l'area di ciascuno di essi?

- Non figurano casi di questo tipo. Quasi tutti gli elaborati, corretti o incompleti o con errori, presentano almeno un inizio di spiegazione e mostrano l'appropriazione dell'enunciato, ma in alcuni casi viene determinata soltanto l'area del rettangolo D.

1.B Des groupes n'ont jamais utilisé le quadrillage / Dei gruppi non hanno mai utilizzato la quadrettatura?

- Tra gli elaborati con punteggio "0", gli errori sono perlopiù dovuti al ricorso a misure con il righello e a evidenti difficoltà nel calcolo di aree come ad esempio laddove gli allievi dichiarano *on a multiplier les côtés des polygones* o trovano l'area del parallelogramma moltiplicando base per lato obliquo in figura. In qualche caso c'è ancora una confusione tra perimetro e area.

  Cat. 7



In altri elaborati di categoria 7 emerge la mancata consapevolezza delle relazioni esistenti tra il contorno di una figura e la sua area, così si legge: *Calcolando il perimetro delle varie figure abbiamo calcolato l'area delle figure. Abbiamo capito che le figure C e D sono uguali*, o ancora in altro elaborato troviamo scritto *B e D hanno la stessa area perché coincidono i lati.*

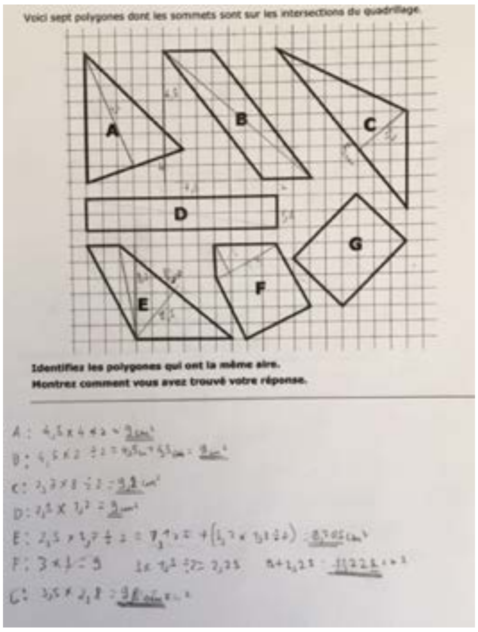
In pochi elaborati con punteggio "1" c'è un riferimento ai quadretti della quadrettatura.

2. **Parmi les erreurs de détermination de l'aire d'un ou plusieurs des sept polygones / tra gli errori di determinazione dell'area di uno o più dei sette poligoni**

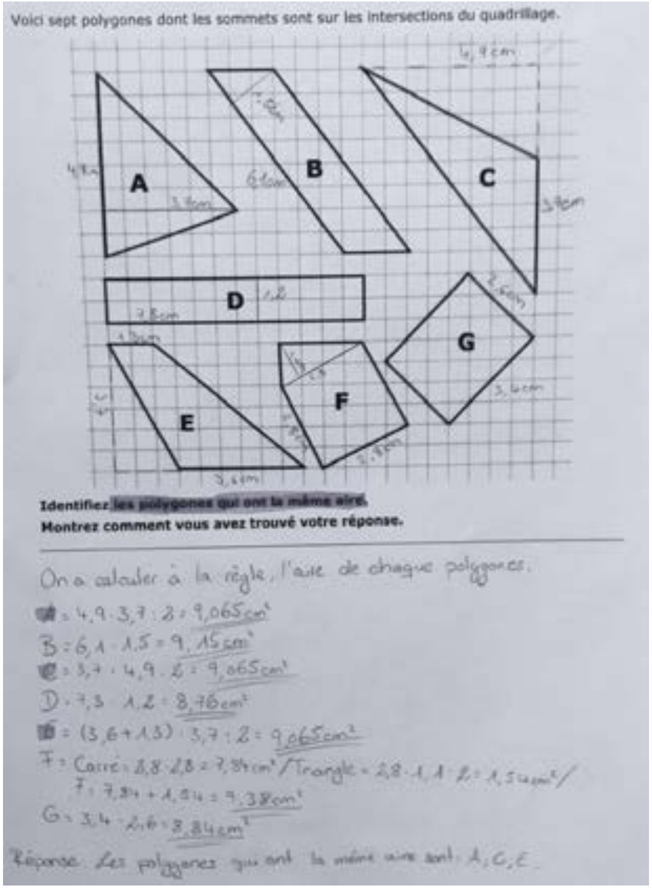
2.A Réponses approximatives dues à la mesure de dimensions à la règle graduée / Risposta approssimativa dovuta a misure di dimensioni con il righello

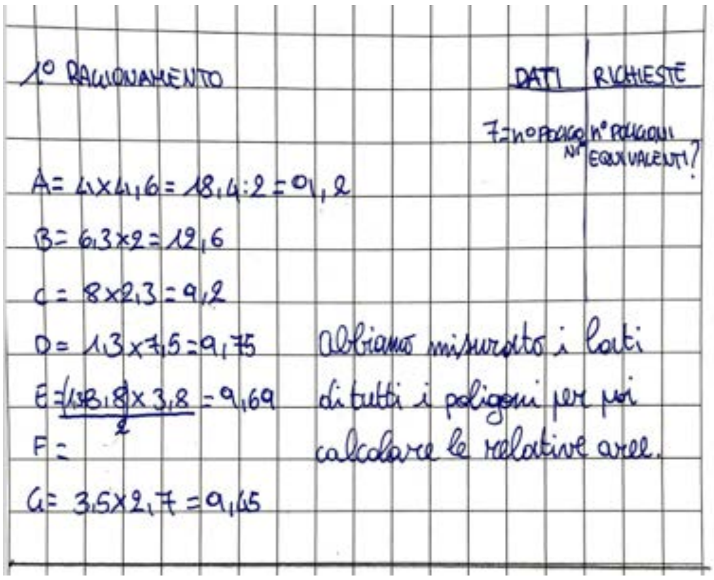
Sia nella categoria 7 che nella 8, con punteggio 1, si ricorre spesso, a partire da suddivisioni delle figure in diverse forme, a misure con il righello che non portano al risultato corretto. In particolare la figura F è suddivisa opportunamente in un quadrato sormontato da un triangolo come ad esempio nei seguenti elaborati:

Cat. 7

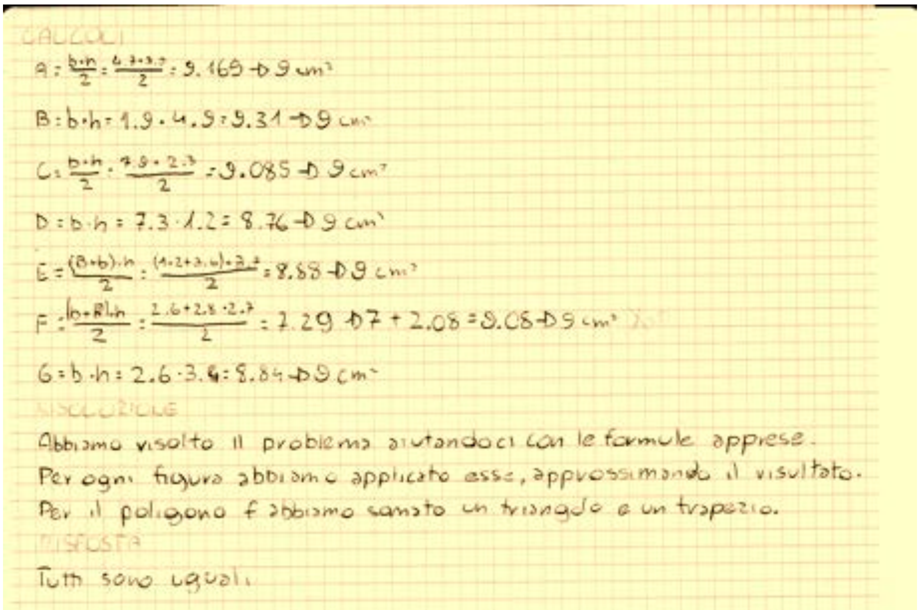


Cat. 8





Rarissimi tra gli elaborati che presentano la soluzione con l'uso delle formule e le misurazioni non precise con il righello, quelli che danno risposta corretta usando in modo corretto l'approssimazione nel risultato, come nell'esempio di categoria 7

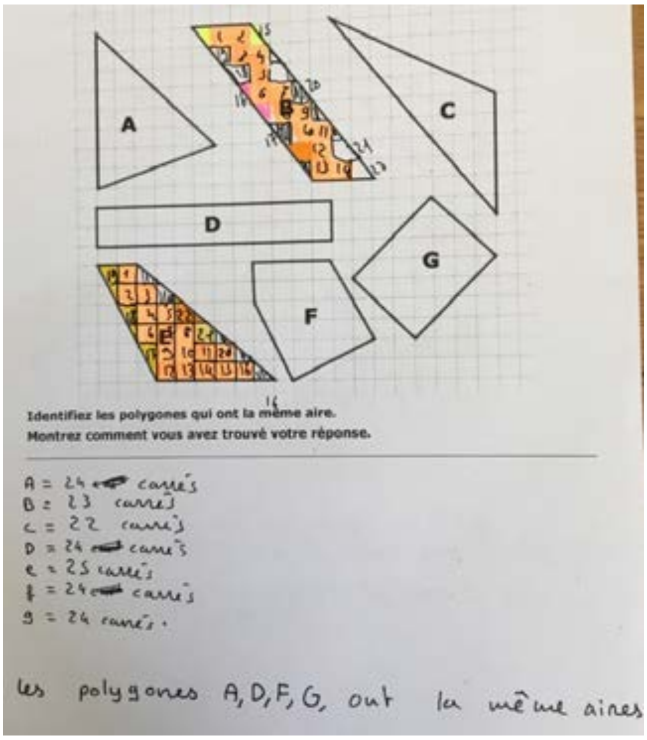


2.B Erreurs de calcul en utilisant les formules / Errori di calcolo nell'uso di formule

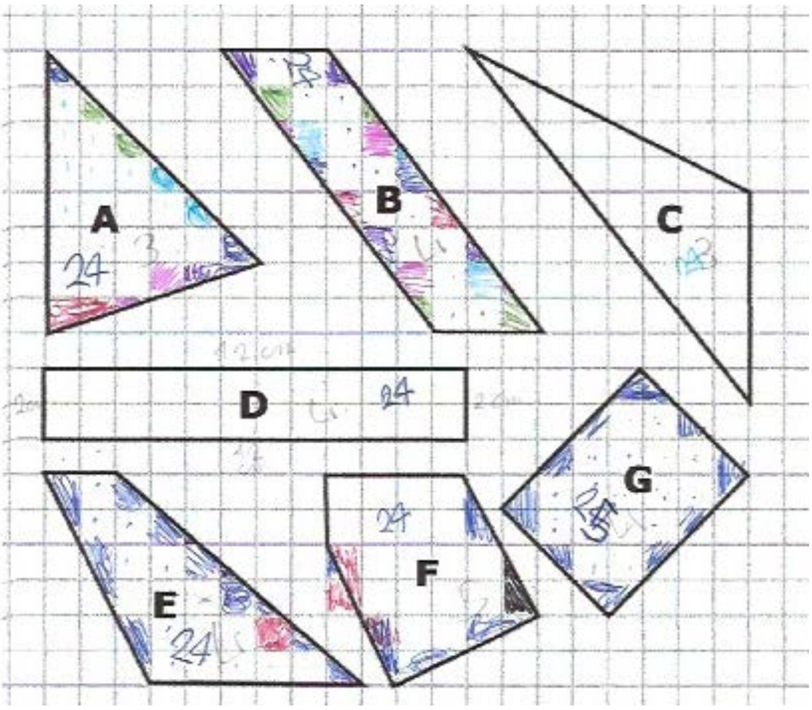
- Ricorso all'uso delle formule, non sempre utilizzate in modo corretto. Gli alunni non considerano l'altezza della figura e moltiplicano i lati tra loro. La misurazione dei lati è effettuata con l'ausilio del righello.
  Errori di conteggio nell'uso della formula di Pick.: *En classe on a fait le rallye mathématique des années précédentes et on a pensé à l'exercice de clous et on a utilisé la formule di pick.* Ma hanno contato male.

2.C Erreurs de reconstitution de carreaux entiers avec des parties de carreaux / Errori nella ricostruzione di quadretti interi con parti di quadretti.

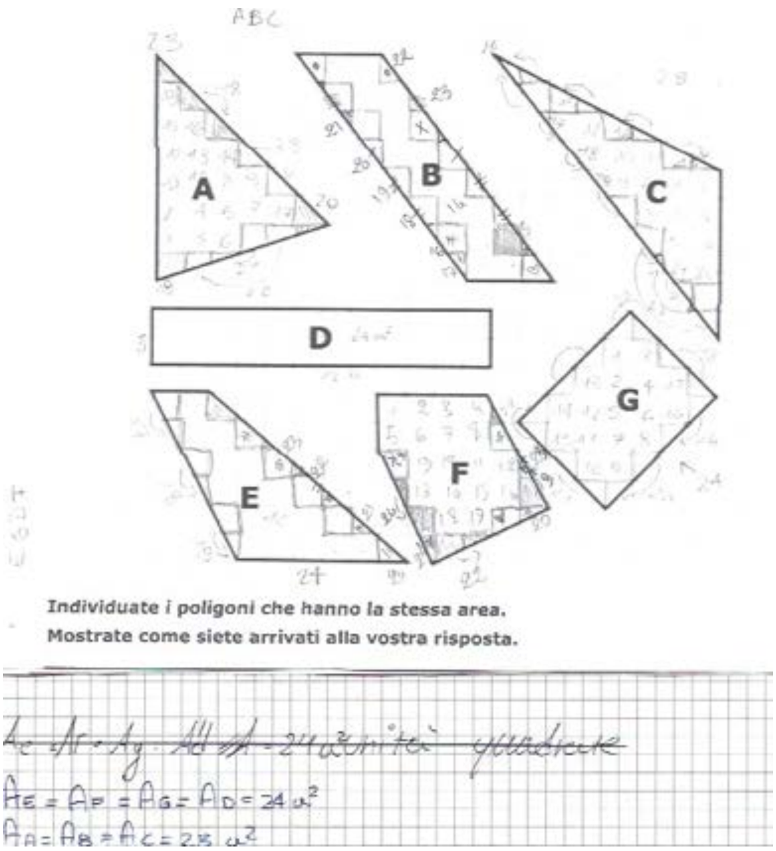
Cat. 7



Cat. 7

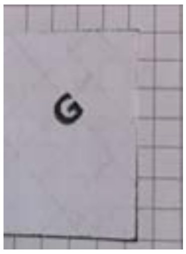


Cat. 8

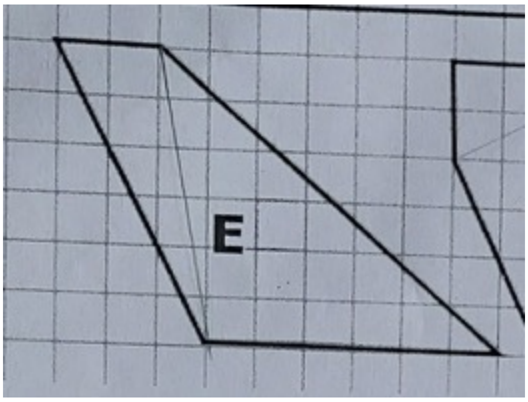


2.D Degré de difficulté selon les polygones (du mieux réussi, D, au plus difficile, ?) / Grado di difficoltà secondo i poligoni (dal meglio riuscito, D, al più difficile?)

L'ultimo posto Se lo contendono le figure E ed F in particolare in cat. 7, ma anche G in entrambe le categorie; l'errore evidenzia chiaramente la difficoltà a gestire le figure con i lati che tagliano in diagonale i quadretti come mette bene in evidenza, ad esempio, l'elaborato nel quale la figura G viene "raddrizzata" ma poi non si tiene conto del fatto che i lati non ricoprono esattamente i quadretti, da cui il risultato "12".



In alcuni casi gli allievi hanno scomposto in parti il poligono E, non riconoscendolo come trapezio e, in particolare, un gruppo di categoria 7 non ha compreso che il lato a destra del poligono non passa esattamente per i vertici dei quadretti e ha quindi sbagliato il conteggio.



Ma anche: en catégorie 7, en relevant sur chaque copie les références des figures dont les aires trouvées sont justes, on obtient ce classement selon le degré de difficulté : D, G, A, F, B, E et C

3. **Parmi les aires correctes, quel type de réponse à la question « Montrez comment vous avez trouvé votre réponse" / Tra le aree corrette, quale tipo di risposta alla domanda "Mostrate come siete arrivati alla risposta"**

3.A Pas d'explications / Nessuna spiegazione

- Sono pochi gli elaborati che danno la risposta senza alcuna spiegazione, ma talvolta le spiegazioni sono poco chiare ~~e~~ o, per esempio, scrivono "abbiamo contato i quadretti". In genere la procedura è chiarita graficamente sui poligoni dell'elaborato e quasi sempre riguarda il conteggio del lato del quadretto, utilizzato come unità di misura di lunghezza. Oppure c'è la descrizione del procedimento seguito, anche se si tratta di un procedimento grafico, senza la sua rappresentazione: Cat. 7 *Per la figura F abbiamo diviso il pentagono in un quadrato e in un triangolo rettangolo, quindi abbiamo calcolato l'area al triangolo rettangolo e al quadrato.*

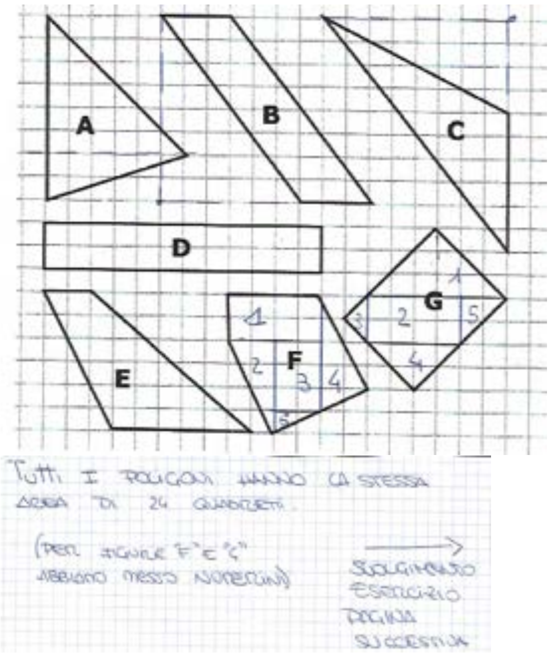
  O ancora *cat. 7 Abbiamo contato i quadretti per alcune figure, per altre abbiamo applicato le regole dell'area es. 6x8 = 48:2 = 24 quadretti*.

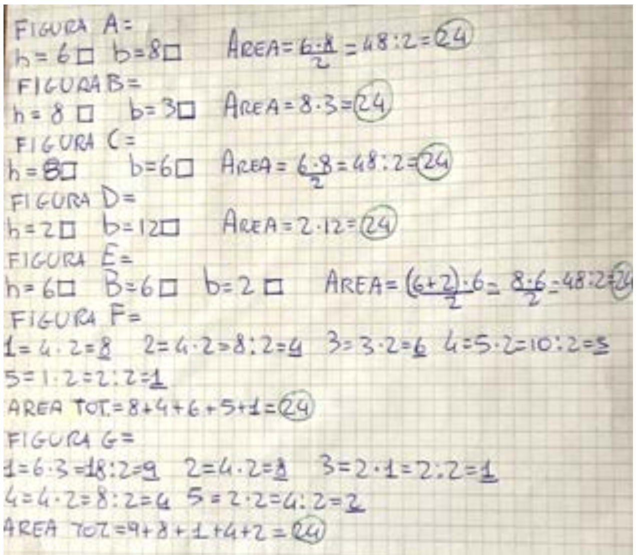
  In vari casi il valore dell'area corrisponde al numero dei quadretti, ma vengono indicati i cm^2 come unità di misura. Questo accade anche in categoria 8 e anche in elaborati con punteggi alti.

3.B Les calculs obtenus en appliquant une formule / I calcoli provenienti dall'applicazione di formule

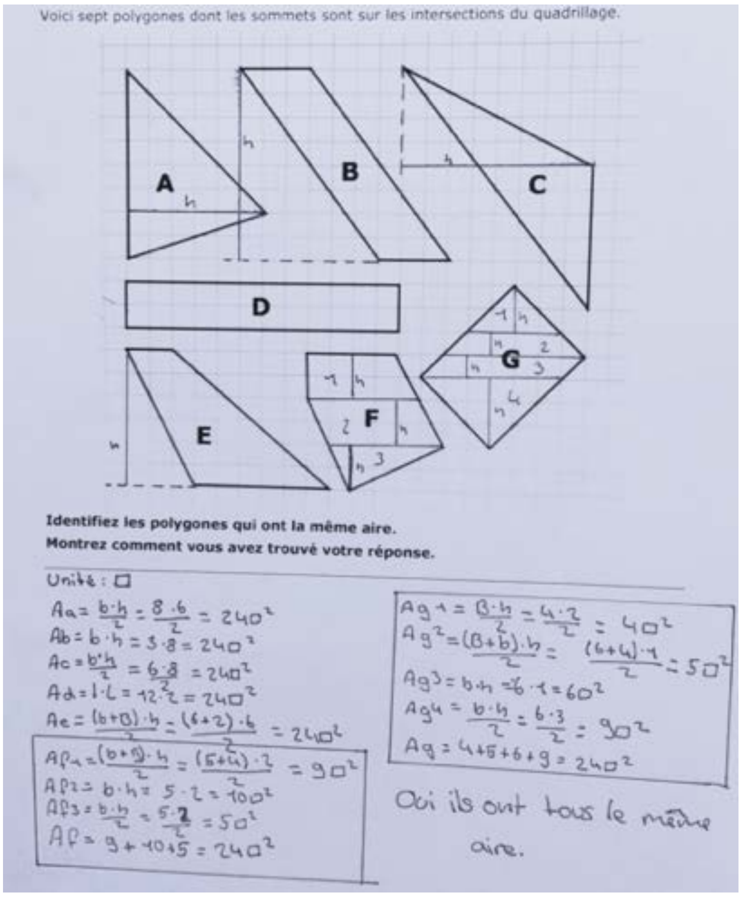
Interessanti, ad esempio, un elaborato di categoria 7 e uno di categoria 8, dove la misure sono quelle aventi come unità il lato di un quadretto e vengono poi applicate correttamente le formule dopo aver suddiviso alcune figure in diverse parti, in sintonia con l'analisi a priori "L'analisi della scomposizione della figura in figure semplici è necessaria quando le formule non sono note o le figure non sono quelle "usuali". Le figure possono essere viste, ciascuna, come inscritte in un rettangolo con i lati seguendo le righe della quadratura. Le loro aree possono allora essere calcolate togliendo all'area di tale rettangolo, l'area dei triangoli rettangoli che contornano ciascuna figura. L'area in quadretti della figura F è, ad esempio, data dal calcolo: $6 \times 6 - 3 \times (2 \times 4 / 2) = 24$; è anche possibile tracciare dei segmenti seguendo le linee della quadrettatura per ottenere una scomposizione in sotto-figure la cui area sia facile da calcolare. Con segmenti "orizzontali" si può ad esempio scomporre la figura F in un trapezio, un parallelogramma e un triangolo rettangolo e calcolare la sua area in quadretti effettuando $(4 + 5) \times 2/2 + 2 \times 5 + 2 \times 5/2 = 24$."

Cat. 7



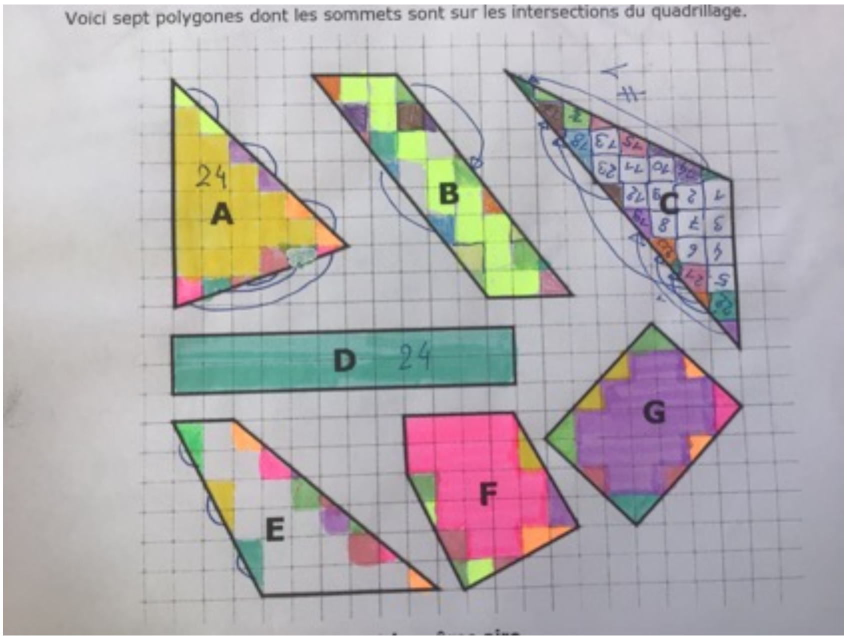


Cat. 8



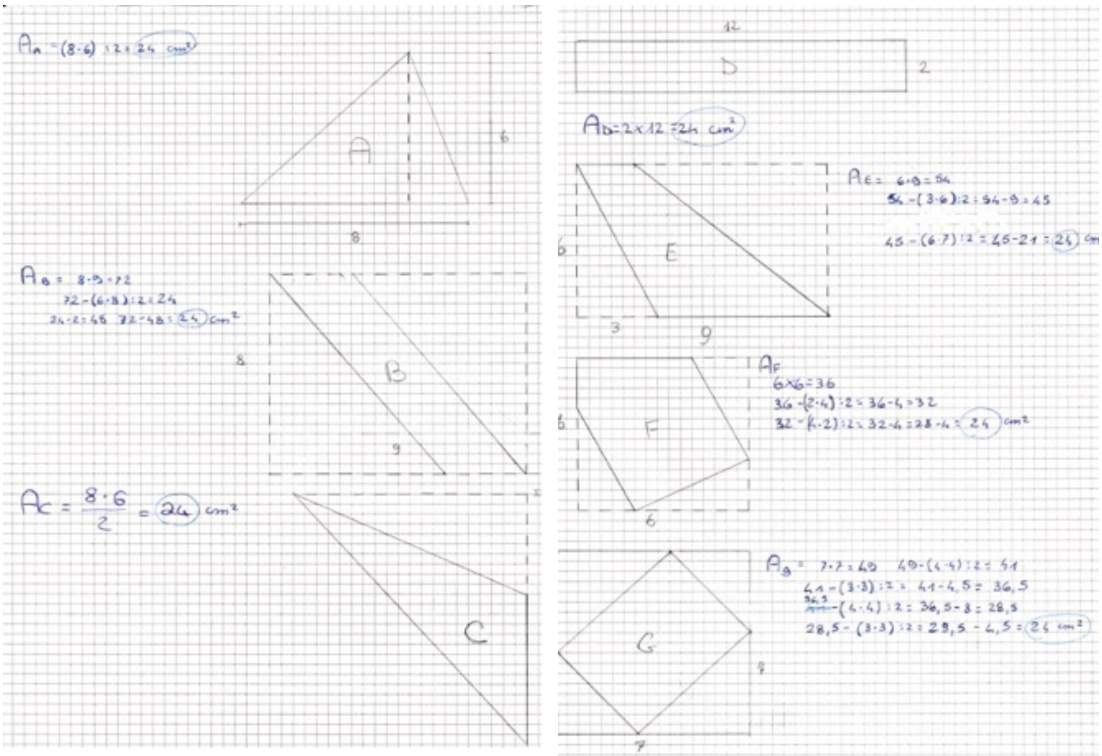
3.C Le détail des recompositions de parties de carreaux / I dettagli della ricomposizione di parti di quadretti

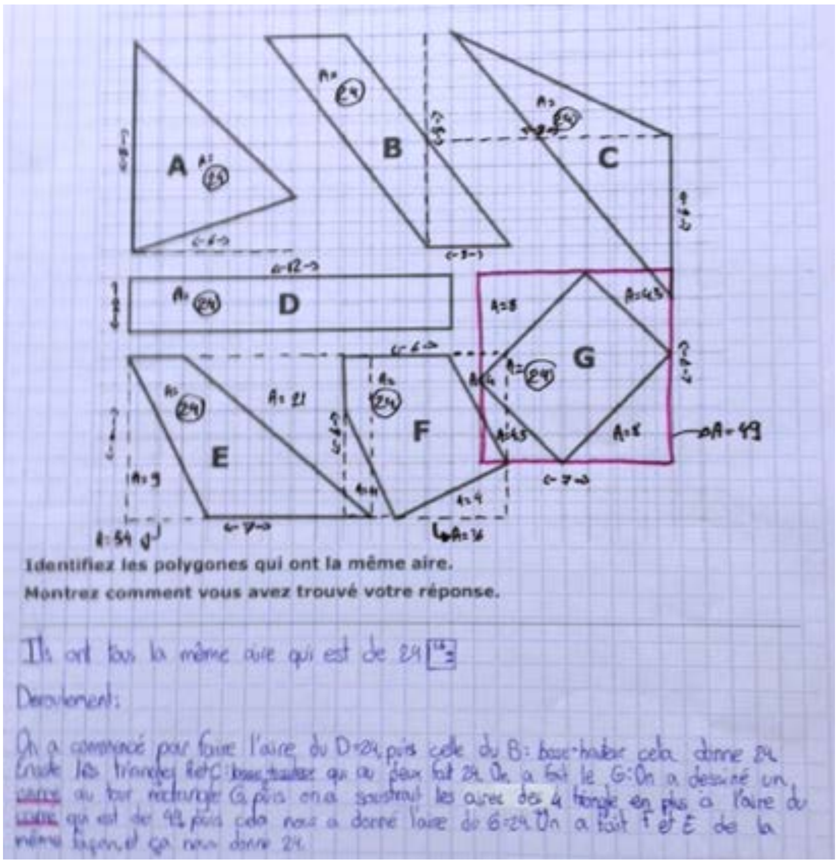
- Esempio di cat. 8 *On a d'abord compté les carrés entiers qui se trouvent dans les formes. Puis on a compté les carrés qui ne sont pas entier pour les rendre entiers.* Ils apparaissent très souvent sur les figures pour lesquelles les recompositions sont simples mais plus rarement sur les autres :

- 

3.D Il dettaglio della ricerca di base e altezza, anche con ricorso alla scomposizione di figure o alla loro inscrizione in figure "classiche" e poi misure delle lunghezze sui lati dei quadretti per esempio su una fotocopia su carta a quadretti che "disturba" la quadrettatura dell'enunciato.

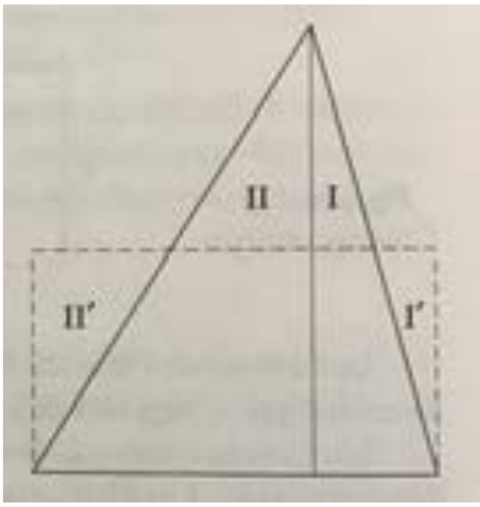
- Del tipo indicato nell'analisi a priori: "calcolo dell'area del rettangolo circoscritto alla figura totale seguito dalla sottrazione delle aree dei rettangoli e/o dei triangoli complementari"





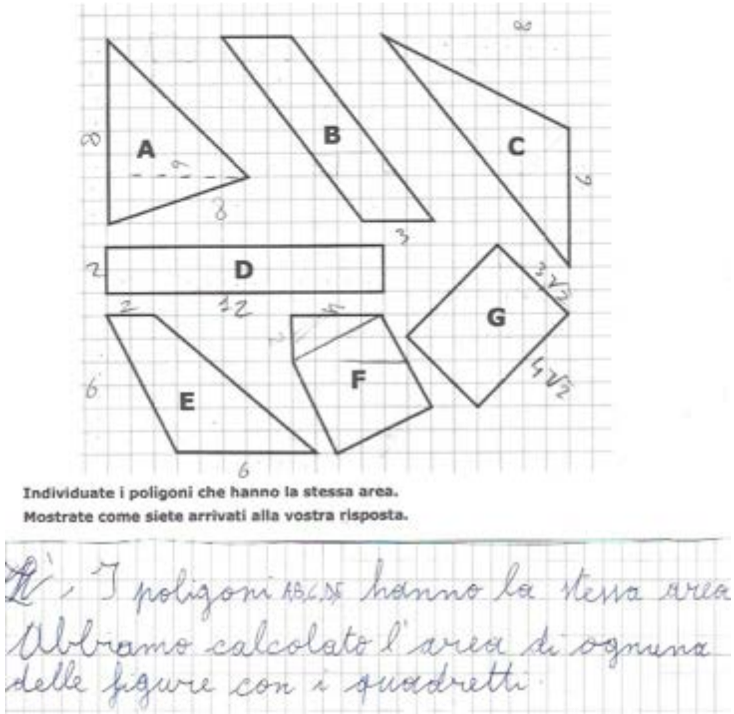
Con tale procedura ottimale di questo gruppo di allievi ci si ritrova nell'antico testo cinese *Chiu Chang Suan Shu* (I nove capitoli sull'arte matematica) che sembra sia stato composto tra il 300 a.C. e il 200 d.C. nel quale vengono descritte le soluzioni per 246 problemi specifici.

Nel capitolo sulle aree figura il paragrafo 1 dal titolo Les figures rectilinéaires, l'aire (mi) le principe "ce qui entre et ce qui sort se composent" ("ciò che entra e ciò che esce si compensano) si trova ad esempio questo tipo di figura



In entrambe le categorie, la misura corretta dell'area della figura G è stata trovata dopo averla scomposta in figure dove fosse agevole contare i quadretti:

O addirittura in un caso di categoria 8, nel considerare la lunghezza dei lati come diagonali di quadrati e trovandone le misure in lati di quadretti come $3\sqrt{2}$ e $4\sqrt{2}$, soluzione alla quale forse non è stata data la necessaria attenzione in sede di correzione.



4.2.3 Osservazioni generali / Remarques :

In entrambe le categorie i risultati migliori sono quelli dove sono stati contati i quadretti o comunque è stato fatto riferimento ai lati dei quadretti e tali procedure sono molto più utilizzate in categoria 8. In categoria 7 molto spesso gli allievi si sono imbarcati in misurazioni con il righello, per applicare poi delle formule.

Altre difficoltà evidenziate sono certamente quelle legate alla limitata abilità nella scomposizione delle figure, soprattutto in quelle con i lati non in posizione orizzontale-verticale. Le figure F e G sono quelle che hanno creato maggiori difficoltà. Ma anche una limitata gestione delle altezze soprattutto nelle figure non convenzionali e ancora la difficoltà ad individuare in un quadrato la relazione lato ≠ diagonale.

Dans les deux catégories, les meilleurs résultats sont ceux où les carrés ont été comptés ou, par conséquent, les élèves se réfèrent aux côtés des carrés. Ces procédures sont beaucoup plus utilisées en catégorie 8. En catégorie 7, très souvent les élèves se sont lancés dans des mesures avec la règle, pour ensuite appliquer des formules.

D'autres difficultés mises en évidence sont certainement celles liées à la décomposition de figures, en particulier celles dont les côtés ne sont pas en position horizontale-verticale. Les figures F et G sont celles qui ont créé les plus grandes difficultés. Mais un autre obstacle est aussi le repérage des « hauteurs » dans les figures aux positions non conventionnelles et la difficulté à réaliser que dans un carré le côté n'a pas la même mesure que la diagonale !

4.2.4 Per un uso del problema in classe / Pour une utilisation du problème en classe

La scelta opportuna dell'unità di misura appare in tutta la sua evidenza in questo problema e tale tematica rafforza ancora di più l'interesse della sua discussione in un'attività in classe.

Attività in classe che, con questo problema, può abbracciare altri aspetti fondamentale della geometria piana per una comprensione della possibilità di scomporre figure complesse in altre la cui area è calcolabile con formule note e lavorare su figure per somma o sottrazione attraverso la scomposizione della figura per una gestione opportuna dell'equiscomponibilità. Il problema è adatto peraltro anche a stimolare una riflessione sulle altezze delle figure proposte.

Le choix approprié de l'unité de mesure apparaît de toute évidence dans ces problème et cet enjeu renforce encore l'intérêt de sa discussion dans une activité de classe.

L'exploitation en classe de ces problèmes, peut comprendre d'autres aspects fondamentaux de la géométrie plane En particulier la possibilité de décomposer des figures complexes en d'autres dont l'aire peut être calculée avec des formules connues et travailler ainsi sur des figures par addition ou soustraction. La décomposition de figures, par une gestion appropriée de sa recomposition en une autre figure de même aire est aussi une procédure fondamentale. Ces problèmes peuvent aboutir aussi à une réflexion sur les « hauteurs » des figures proposées.

s

5. Che cosa "ci dicono", per finire, i problemi analizzati in questo articolo / Enfin, ce que les problèmes analysés dans cet article "nous disent"

Il Tangram del falegname, nelle due versioni, e I sette poligoni, possono rappresentare una sorta di sintesi di una gran parte dei nostri problemi di geometria piana con o senza una quadrettatura.

Nelle analisi a priori i *compiti matematici* rispettivi sono stati stabiliti nei seguenti termini: "A partire dalla foto di un Tangram e dei suoi sette pezzi, trovare la misura del lato del Tangram conoscendo la misura del lato (6 cm /*u*) del quadrato piccolo" e "Confrontare le aree di sette figure disegnate su una griglia a maglie quadrate i cui vertici sono sui nodi della griglia".
Ovviamente, all'interno dei compiti matematici, necessariamente molto sintetici, si dipanano via via sostanziosi aspetti di base della geometria piana come messo in evidenza nelle descrizioni precedenti.

Sette figure geometriche in ognuno dei problemi in gioco, ma questo è solo casuale anche se hanno dato lo spunto al titolo dell'articolo, mentre le analisi a posteriori hanno evidenziato **un tratto comune sul quale lavorare, rappresentato dalla tendenza a ricorrere acriticamente a misure con il righello, portatrici di difficoltà nel calcolo di numeri con la virgola (e loro approssimazioni), a scapito di un conteggio di quadretti su una quadrettatura, o di un ricorso a deduzioni o all'applicazione, al di là del discreto, di conoscenze geometriche.**

Le *Tangram du menuisier*, dans ses deux versions, et les *Sept polygones*, peuvent représenter une sorte de synthèse d'une grande partie de nos problèmes de géométrie plane avec ou sans quadrillage.
Dans les analyses a priori, les tâches mathématiques respectives ont été établies dans les termes suivants : « A partir de la photo d'un Tangram et de ses sept pièces, trouver la mesure du côté du Tangram connaissant la mesure du côté (6 cm/u) du petit carré » et « Comparer les aires de sept figures dessinées sur une grille à mailles carrées dont les sommets sont sur les nœuds de la grille ».
Évidemment, au sein des tâches mathématiques, forcément très synthétiques, se déploient peu à peu d'importants aspects de base de la géométrie plane comme le soulignent les descriptions précédentes. Sept figures géométriques sont en jeu dans chacun des problèmes, mais ce n'est qu'une coïncidence même si elles ont donné l'idée du titre de l'article. Les analyses a posteriori ont mis en évidence **un aspect commun sur lequel il faut travailler : la tendance à recourir sans discernement aux mesures avec la règle, porteuses de difficulté à calculer avec des nombres décimaux (et leurs approximations), au détriment d'un comptage de carreaux sur une grille, ou d'un recours aux déductions, ou encore à l'application, au-delà du discret, des connaissances géométriques.**

ÉTUDES / APPROFONDIMENTI

TORRI DI CUBETTI I E II…

rilevazioni e riflessioni a partire dall'Analisi a posteriori degli elaborati

a cura di Carla Crociani e Rita Spatoloni

con il contributo di **L. Abate, S. Guerri, C. Mazzoni, M.T. Nughedu, G. Percario, B. Perna, A. Quacquarelli e D. Sforzi, afferenti al gruppo numerazione.**

Résumé

L'article s'appuie sur quelques réflexions issues de l'analyse a posteriori du problème *Tours de cubes* dans ses versions I et II, proposé lors de l'épreuve I du 29e RMT.
Il s'agit d'un problème centré sur la découverte des régularités numériques et qui est né d'une idée développée par le Groupe Numération lors des journées d'étude à l'occasion de la rencontre Alghero 2019.
Le contexte est la construction de tours de cubes qui se développent d'une certaine manière et qui impliquent la découverte d'une relation très précise entre le nombre d'étages de la tour, le nombre de cubes sur chaque étage et le nombre total de cubes utilisés pour composer l'ensemble de la tour. Les variables numériques, les exemples et la formulation de la demande ont été rédigés de manière à vérifier dans quelle mesure les élèves, s'ils se hâtent ou ne sont pas très attentifs, sont amenés à donner des réponses erronées.
L'analyse des copies des élèves, dont certaines sont rapportées dans l'article pour les parties les plus explicites, montre que la première difficulté rencontrée pour traiter le problème a été celle du dessin de la tour, non en raison de l'incapacité de reproduire l'image tridimensionnelle sur le plain (vue de face), comme on aurait peut-être pu le supposer, mais parce que, voulant compter le nombre de cubes directement sur le dessin, ils se sont heurtés au problème des « demis-carrés » : chaque cube repose sur les deux de dessous. Cela a conduit à des dessins inexacts ou confus et, par conséquent, à des comptages erronés, mais a aussi encouragé la recherche d'une stratégie plus efficace et à prendre conscience que, en utilisant des carrés de quatre carreaux du quadrillage pour représenter un cube, l'obstacle des *demi-carrés* était surmontable.
La difficulté liée au dessin des *demi-carrés* a aussi entraîné d'autres erreurs de construction de la tour : chaque étage augmentant de deux carrés, c'est beaucoup plus facile à dessiner (1, 3, 5, 7,…).
Du point de vue de la modélisation en mathématiques, certaines stratégies jugées intéressante utilisent la conception d'une tour non pyramidale, comme celle indiquée dans le texte, mais " en forme de triangle rectangle": cette tour conserve les mêmes caractéristiques numériques que celles du texte sans altérer le problème du point de vue mathématique.
Le fait de changer la forme de la tour offre l'occasion aux élèves de réfléchir précisément à la modélisation en mathématiques : du point de vue de la stabilité d'une construction réelle (murs de briques ou avec des jeux de construction) les tours indiquées dans le problème sont considérablement différentes mais du point de vue numérique - celui que nous voulons étudier avec ce problème - elles ont les mêmes alors que le dessin correspondant à la « tour triangle » est certainement plus simple !
Malheureusement, la grandeur des variables numériques impliquées (petits nombres) a favorisé des dessins aléatoires sans trop se poser de problèmes sur la construction. Ce faisant, quelques objectifs du problème ont été perdus : reconnaître les régularités, découvrir la relation entre les cubes sur un étage et le nombre d'étages ... travailler avec des nombres et ne pas compter sur le dessin (il manque le passage du concret au symbole mathématique). De plus, avec le dessin il n'y a pas de contraintes de construction: on peut commencer indifféremment par le bas ou par le haut et cela ne ne permet souvent pas d'établir si la relation étages - cubes de la base a été comprise.
Certains enseignants, à qui on avait proposé de faire une analyse a priori du problème *Tours de cubes II,* ont émis l'hypothèse que les élèves pourraient utiliser des formules pour calculer la somme des n premiers nombres pairs ($n(n+1)$) et la somme des n premiers nombres impairs (n^2) qui, sûrement, ont déjà été introduites dans les classes. Ceci, combiné au constat que cette stratégie a rarement été trouvée, nous a amenés à réfléchir qu'il pourrait être intéressant, au niveau pédagogique, de solliciter l'introduction de la méthode graphique pour obtenir ces formules.
Dans la dernière partie de l'article, il est fait référence à certains problèmes proposés dans les éditions précédentes du RMT liés à la découverte de la régularité dans les relations entre les données (numériques et graphiques) fournies par le texte. À notre avis, il serait intéressant de les proposer à nouveau et de les analyser en les comparant sur la base des compétences mathématiques sous-jacentes. Ce sont des problèmes adaptés à une recherche mathématique qui tend au développement des capacités d'observation, stimule la curiosité et l'implication des élèves et laisse à l'enseignant la tâche de les aider à la construction d'une pensée logiquement articulée et dans la transition du concret à la réflexion de plus en plus abstraite et générale.

1. Introduzione

Questo articolo si basa su alcune riflessioni scaturite dall'analisi a posteriori del problema *Torri di cubetti* nelle sue versioni I e II proposto nella I prova del 29° RMT.

Si tratta di un problema che ha preso avvio nel *gruppo Numerazione* nelle giornate di studio in occasione dell'incontro di Alghero 2019. E' un problema incentrato sulla scoperta di regolarità numeriche che facilitano eventuali conteggi. Come gruppo non siamo nuovi a questo tipo di problematica, questa volta il contesto di supporto è la costruzione di torri di cubetti che si sviluppano in un certo modo e che comportano la scoperta di una ben precisa relazione fra numero di piani della torre, numeri di cubetti sul piano stesso e numero totale di cubetti utilizzati per la costruzione di tutta la torre. La scelta delle variabili numeriche, degli esempi e della formulazione della richiesta sono state redatte in modo da comprendere e verificare quanto gli allievi siano indotti verso risposte errate se poco attenti e frettolosi. Nel corso degli anni abbiamo spesso analizzato e proposto problemi che incentivavano la scoperta di regolarità numeriche come strategia a supporto di eventuali conteggi altrimenti troppo lunghi e noiosi. Purtroppo molti di questi problemi sono finiti in prove Finali che non possono fornire, per il numero ridotto di classi che li hanno affrontati, dati sufficienti per un'analisi a posteriori adeguatamente supportata e oggettiva. Vista, però, la carenza riscontrata in questo ambito, sarebbe interessante riprenderli e riproporli, magari con opportune modifiche, anche ad alunni di categorie alte, per sollecitare l'attenzione alla lettura e interpretazione corretta dei dati, alla scoperta di regolarità, alle relazioni fra variabili, nella convinzione che tutto ciò sia fondamentale per affrontare la matematica nel corso della carriera scolastica e, successivamente, nella quotidianità della vita sociale.

Per quanto riguarda la versione I del problema, i docenti afferenti al nostro gruppo hanno rilevato che:

- il testo risulta molto chiaro sia nella descrizione del contesto, sia nell'avvicendarsi temporale delle azioni che nella richiesta;
- ci si può soffermare sulla cura nel disegno, per stimolare gli allievi a comprendere come un problema apparentemente semplice possa diventare insidioso solo per il fatto di non avere osservato attentamente il disegno (per esempio su ogni piano c'è soltanto un cubetto in meno rispetto al piano sottostante, l'osservazione superficiale e immediata potrebbe condurre a toglierne due);
- il problema proposto in classe potrebbe fornire l'occasione di parlare dei numeri triangolari, far scoprire la regola di Gauss per il calcolo della somma dei primi n numeri naturali e non solo;
- entrambi i problemi possono essere utili anche in ambito *relazioni e funzioni,* ed in questo senso potrebbero essere proposti anche ad allievi più grandi, magari cambiando le variabili numeriche in modo che essi si rendano conto della necessità di esplicitare la relazioni fra di esse.

Questo problema nella versione II è stato utilizzato nel corso di formazione organizzato dalla sezione di Siena nell'ambito dell'ARMT Italia.

I corsisti, ai quali è stato richiesto di fare una prima analisi seguendo una traccia assegnata propedeutica per la correzione, hanno elaborato individualmente l' *analisi a priori* e tutti hanno rilevato che:

- il testo è chiaro e comprensibile, vicino alla realtà dei bambini (che fin da piccoli realizzano torri, con cubetti di legno o altro materiale o con costruzioni tipo lego) e propone, quindi, una situazione nota;
- gli elementi grafici sono ben comprensibili, molto significativi e facilitano l'appropriazione: il termine "*alternarsi*" tra i piani di cubetti bianchi e quelli di cubetti neri potrebbe creare equivoci, evitati accuratamente dal disegno, che chiarisce cosa si intende;
- il termine differenza in italiano è anche sinonimo di diverso;
- la domanda potrebbe trarre in inganno perché chiede la "*differenza tra il numero di cubetti bianchi e quello di cubetti neri*" spingendo a credere che i bianchi siano in numero maggiore perché per gli allievi la differenza corrisponde spesso al risultato di una sottrazione tra un numero maggiore e uno minore.

L'ultima osservazione potrebbe fornire uno spunto per far riflettere sia sul significato di differenza che su quello di sottrazione: si sarebbe potuto scrivere indifferentemente "*differenza tra il numero di cubetti neri e quello di cubetti bianchi*" (la differenza numerica tra a e b corrisponde a $|a-b|$).

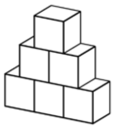
2. Problema Torri di cubetti (I) (Cat. 3,4)

Tre amici giocano a costruire “torri” con i cubetti.

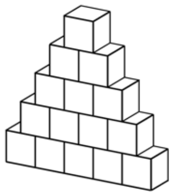
Ogni bambino ha a disposizione un diverso numero di cubetti.

Riccardo ha utilizzato tutti i suoi cubetti per costruire una torre di tre piani.

Clara, con tutti i suoi cubetti, è riuscita a costruire una torre di cinque piani.



Torre di Riccardo



Torre di Clara

Lia che ha molti cubetti pensa di riuscire a costruire una torre di dieci piani seguendo lo stesso modello di Riccardo e di Clara. Quando ha quasi finito la sua torre, si accorge che le mancano due cubetti.

Quanti cubetti possiede Lia?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

Il compito matematico del problema è quello di scoprire la regolarità dei termini di una successione di numeri naturali, calcolare la somma dei primi 10 numeri naturali e trovare il numero corrispondente alla somma calcolata diminuita di 2.

Riportiamo i dati statistici che documentano una buona riuscita del problema

Cat.	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	M
3	155 (28%)	47 (9%)	98 (18%)	48 (9%)	202 (37%)	550	2.2
4	221 (26%)	66 (8%)	108 (13%)	87 (10%)	368 (43%)	850	2.4
Total	376 (27%)	113 (8%)	206 (15%)	135 (10%)	570 (41%)	1400	2.3

L’**analisi a priori** ufficiale del problema esordisce con:

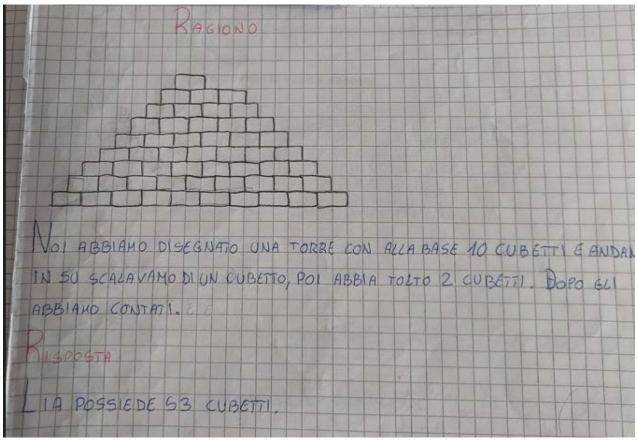
- Appropriarsi della situazione:
  - “vedere” le due figure e percepire le regole di costruzione delle “torri” (costruzione dei piani con cubi adiacenti, diminuzione di 1 nel numero dei cubetti di ogni piano successivo, simmetria della costruzione, un singolo cubo nell’ultimo piano perché non si possono posizionare altri cubi sopra senza rompere la regolarità)
  - comprendere che per trovare il numero totale dei cubetti di una torre, si devono addizionare i numeri dei cubetti di ciascun piano
- comprendere che Lia non ha cubetti sufficienti per costruire una torre di dieci piani, le mancano due cubetti.

La prima difficoltà incontrata non è stata tanto nel capire la situazione ma nell’illustrarla con un disegno e non per la difficoltà di riportare l’immagine tridimensionale della torre sul piano (a vista frontale), come forse avremmo potuto supporre, bensì perché, volendo contare direttamente sul disegno il numero di cubetti, si sono dovuti “ingegnare particolarmente” nel disegnarla: ogni cubetto poggia sui due sottostanti e nel disegno avrebbero dovuto utilizzare «mezzi quadretti».

In tanti superano questo ostacolo disegnando, per la vista frontale del cubetto, un quadrato di 4 quadretti oppure un rettangolo di 2 quadretti affiancati, in modo da evitare numeri dispari di quadretti, che non avrebbero avuto corrispondenza esatta con la quadrettatura (Figg. 1 e 2)

Fig.1

Fig.2



Sempre per superare la difficoltà di disegnare i *mezzi quadretti,* ma volendo utilizzare un quadretto per cubetto (la cosa più naturale), sono ricorsi ad una forma diversa di torre[1] che, però, mantiene le stesse caratteristiche numeriche di quelle del testo: il problema, dal punto di vista matematico, resta uguale a se stesso.

Questa strategia di cambiare forma alla torre, fornisce una opportunità su cui far riflettere gli allievi proprio riguardo la modellizzazione in matematica: dal punto di vista della stabilità di una costruzione reale (muri in mattoni o con giochi di costruzioni) le torri indicate nel problema in oggetto sono notevolmente diverse ma dal punto di vista numerico, sul quale si vuole indagare con questo problema, sono uguali ed il disegno corrispondente alla "torre diversa" è senz'altro più semplice!

La ricerca di un modello, più gestibile ma che allo stesso tempo non tralasci nessun vincolo del problema in esame, è essenziale e costituisce una tappa importante nella crescita logico-matematica degli allievi.

Nel seguente elaborato di cat.3 (Fig.3), con un po' di fantasia, si riesce forse ad intuire come abbiano proceduto anche da un punto di vista temporale: a partire dall'alto disegnano la scala ponendo un primo cubetto e poi procedono verso il basso aggiungendo sempre un cubetto fino ad arrivare a 10 piani. Infine anneriscono tutti i cubetti eccetto due e fanno la somma dei cubetti anneriti.

Se per il disegno sono partiti dall'alto verso il basso, per il conteggio hanno utilizzato il procedimento inverso, come si vede nell'addizione in colonna.

Fig.3

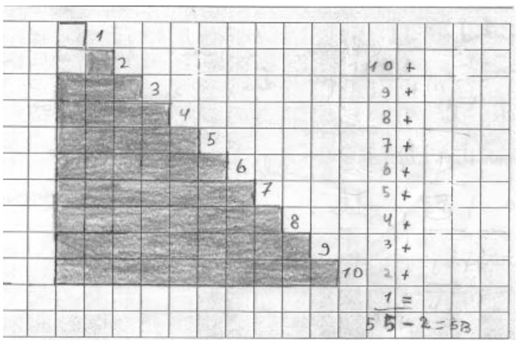
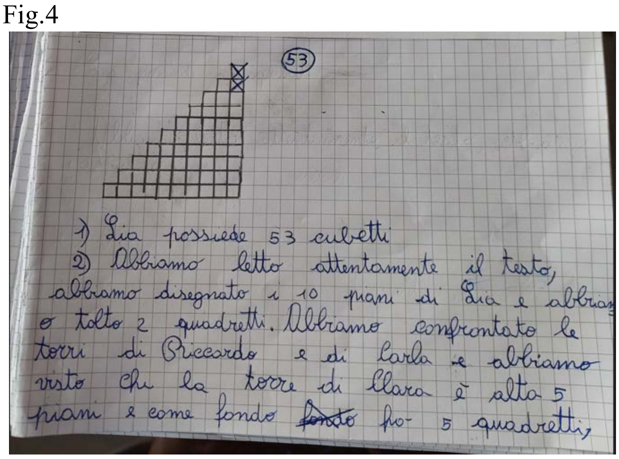


Fig.4



Gli elaborati delle Figg.3-4 presentano entrambi la costruzione "diversa" della torre ma in quello di Fig.4 nella spiegazione viene esplicitato l'aver osservato, proprio sull'esempio del testo, che il numero di piani corrisponde al numero di cubetti che si trovano nella prima riga in basso.

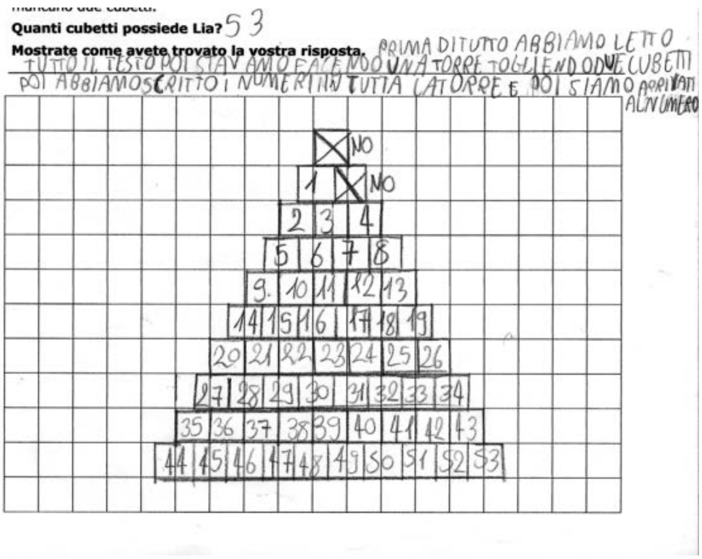
Tutti i modi che gli allievi hanno adottato per arginare l'ostacolo del disegno di *mezzi quadretti* mostrano che comunque, in queste categorie, essi sono ancora molto ancorati al concreto e non riescono a riconoscere e

1 Cfr. *Torre di stuzzicadenti* § 3.

rielaborare le regolarità numeriche senza il supporto del disegno (il passaggio fra disegno e numero o simbolo matematico non è ancora stato pienamente acquisito).

Il seguente elaborato (Fig.5), in cui gli allievi hanno utilizzato la costruzione della torre come illustrata nel testo, mostra una strategia diversa da quelle fin qui presentate ma ancorata più che mai legata alla raffigurazione concreta: disegnano la torre completa, procedono assegnando ad ogni cubetto un numero progressivo, escludendo i due cubetti che mancano a Lia, in altre parole realizzano una corrispondenza biunivoca tra i cubetti disegnati ed i numeri naturali che così li rappresentano. Nella spiegazione che riportano, per quanto approssimativa grammaticalmente, si capisce il processo temporale con i passaggi che conducono alla risposta. Da notare, a favore di questa tesi, anche il fatto che cominciano a contare dall'unico cubetto del secondo piano (a partire dall'alto) perché Lia "*Quando ha quasi finito la sua torre, si accorge che le mancano due cubetti".*

Fig.5



Prima di tutto abbiamo letto tutto il testo poi stavamo facendo una torre togliendone cubetti poi abbiamo scritto i numeri in tutta la torre e poi siamo arrivati al numero

Le variabili numeriche in gioco permettevano il cimentarsi, "a intuito", nel disegno di questa costruzione senza troppo dispendio di energie, così facendo viene però meno lo scopo del problema: riconoscimento di regolarità, scoperta di relazione fra cubetti su un piano e numero di piani … lavorare con i numeri e non contare sul disegno (manca il passaggio dal concreto al simbolo matematico). Se invece di 10 piani la torre ne avesse avuti 100!?

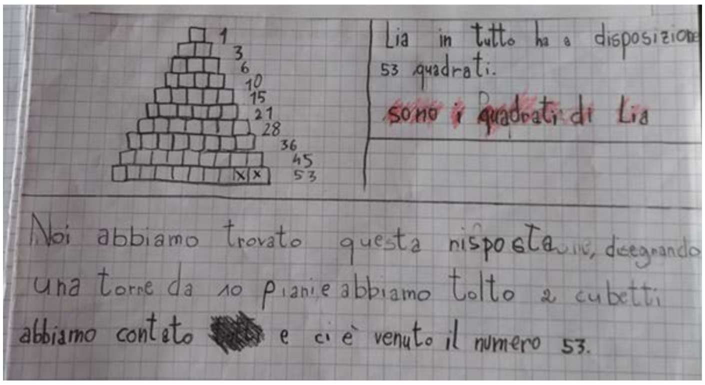
Il problema in oggetto, elaborato come si è detto all'interno del gruppo Numerazione, ha tra gli obiettivi didattici quello di vedere fino a che punto e a che livello gli allievi siano in grado di scoprire da una parte la regolarità della successione numerica legata al numero di piani e dall'altra le relazioni che intercorrono fra ~~il~~ numero di piani e numero di cubetti sul piano: è questa scoperta che avrebbe permesso di procedere alla costruzione effettiva della torre partendo dalla base della torre.

Con il disegno non si hanno vincoli di costruzione: si può procedere partendo indifferentemente dal basso o dall'alto. Purtroppo questo spesso non ci permette di stabilire se è stata capita la relazione piani - cubetti alla base.

La presentazione dell'elaborato di Fig.5 può fornire all'insegnante il pretesto per intraprendere una discussione di approfondimento con la classe, con la l'obiettivo di facilitare il distacco graduale dal disegno, ed avviare i primi passi verso la generalizzazione. Il disegno, con la sua dovuta precisione, è impegnativo anche da un punto di vista di consumo di tempo prezioso, gli allievi devono rendersi mano a mano conto di ciò che è essenziale ed utile da scrivere ed eliminare il superfluo, questo permetterà loro di poter affrontare problemi analoghi con variabili numeriche molto più grandi.

Nella successiva Fig. 6 gli allievi disegnano e contano in itinere, a partire dall'alto (i cubetti mancanti qui sono in basso), senza sapere né chiedersi a priori quanti cubetti ha alla base la torre di 10 piani.

Fig.6



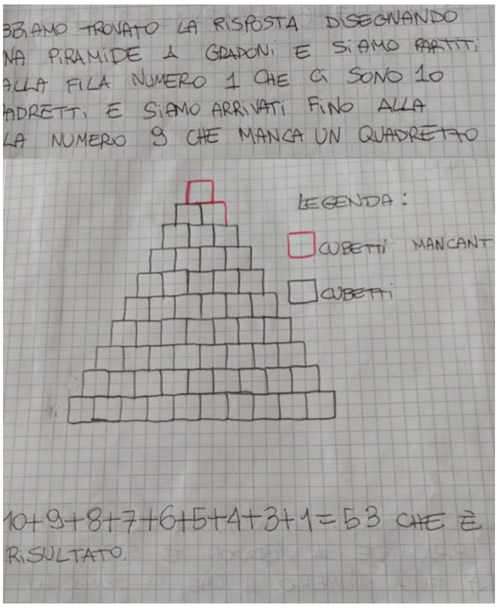
Lia in tutto ha a disposizione 53 quadrati.

Noi abbiamo trovato questa risposta disegnando una torre da 10 piani e abbiamo tolto 2 cubetti

Abbiamo contato e ci è venuto il numero 53

L'elaborato qui sotto (Fig.7) è uno dei rari esempi in cui viene esplicitato che si può procedere a disegnare dall'alto ma avendo capito che alla base ci sono 10 cubetti…

Fig.7

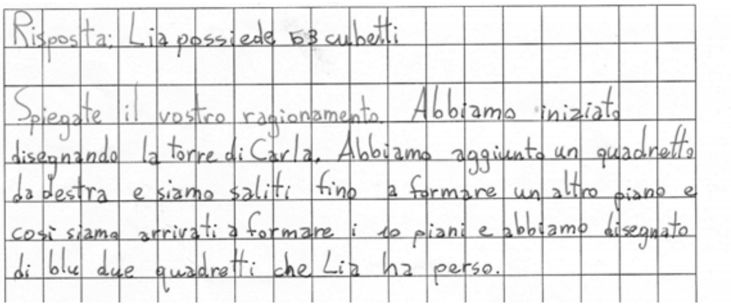


Abbiamo trovato la risposta disegnando una piramide a gradoni e siamo partiti dalla fila numero 1 che ci sono 10 quadretti e siamo arrivati fino alla fila numero 9 che manca un quadretto.

10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 53 che è il risultato.

Nella didattica quotidiana si procede, di solito, dal concreto alla rappresentazione grafica di ciò che si è fatto. Dovendo affrontare questo problema, quali opportunità si hanno per indurre concretamente gli allievi a scoprire la relazione "numeri di piani – numeri di cubetti alla base"? Si potrebbero, ad esempio, fornire tanti cubetti e chiedere di costruire una torre di 10 piani. Interessanti saranno le osservazioni riguardo al modo di operare degli allievi (la strategia più "furba" è quella di provare ad aggiungere un cubetto alla base e, di conseguenza, via via ai piani superiori fino ad ottenere la torre di 10 piani con le caratteristiche richieste). L'elaborato qui di seguito (Fig.8) mostra proprio questa strategia operativa:

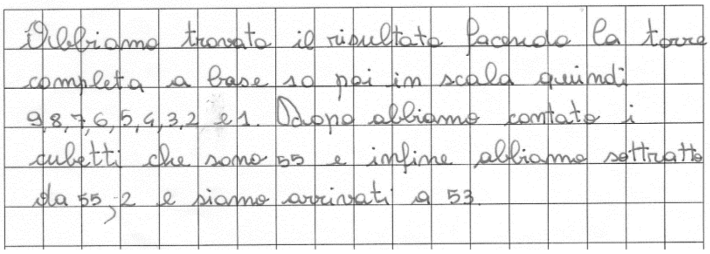
Fig.8



Risposta: Lia possiede 53 cubetti
Spiegate il vostro ragionamento.
Abbiamo iniziato disegnando la torre di Carla. Abbiamo aggiunto un quadretto da destra e siamo saliti fino a formare un altro piano e così siamo arrivati a formare i 10 piani e abbiamo disegnato di blu due quadretti che Lia ha perso.

La Fig.8a, qui di seguito, mostra un elaborato in cui gli allievi sembra abbiano capito la relazione piani/numero di cubetti sul piano

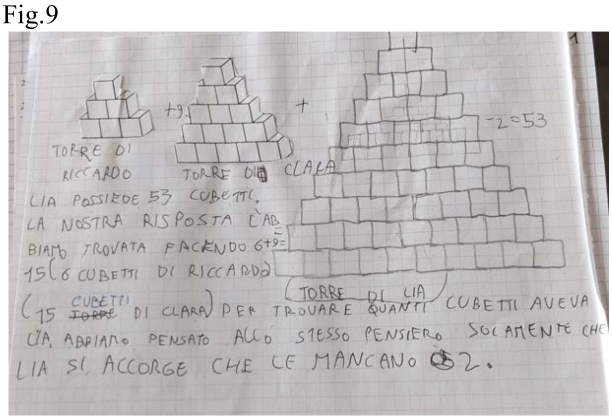
Fig.8a



Abbiamo trovato il risultato facendo la torre completa a base 10 poi in scala quindi
9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 e 1. Dopo abbiamo contato i cubetti che sono 55 e infine abbiamo sottratto da 55, 2 e siamo arrivati a 53

Il successivo elaborato (Fig.9) è invece un esempio interessante dal punto di vista della strategia usata dagli allievi:

Fig.9



Lia possiede 53 cubetti.
La nostra risposta l'abbiamo trovata facendo 6 + 9 = 15 cubetti (6 cubetti di Riccardo) (15 cubetti di Clara) per trovare quanti cubetti aveva Lia abbiamo pensato allo stesso pensiero solamente che Lia si accorge che le mancano 2.

Partire dall'alto permette di vedere la torre di Riccardo (3 piani) dentro quella di Clara (5 piani) e, con la stessa procedura (scrivono: *abbiamo pensato lo stesso pensiero*), la torre di Clara sarà dentro a quella di Lia e arrivano fino ad ottenere una torre di 10 piani, poi tolgono i due cubetti che mancano.

Si tratta di una costruzione "operativa" basata sulla rappresentazione iconica. Manca il passaggio ad operare direttamente con i numeri.

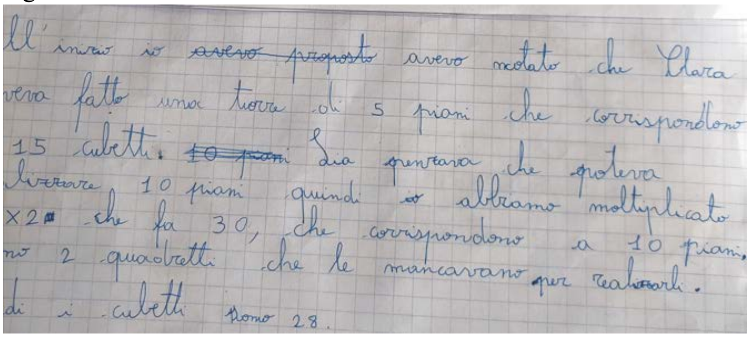
Ancora una volta se invece di 10 piani la torre ne avesse avuti 100? La gestione di questa strategia sarebbe stata senz'altro più complicata.

La difficoltà legata al disegno dei *mezzi quadretti* spesso ha portato ad errori di costruzione della torre: ogni piano aumenta di due quadretti è molto più facile da disegnare (1, 3, 5, 7, …). La torre di 10 piani costruita con questa regola avrebbe alla base 19 cubetti e quindi chi ha risposto correttamente rispetto a questa situazione ha trovato 98 (100 - 2) cubetti.

La scelta dei dati numerici dell'esempio, riportato nel testo durante l'elaborazione della sua stesura, è stata volutamente provocatoria per saggiare se allievi poco attenti sarebbero caduti nella tentazione *di moltiplicare per*

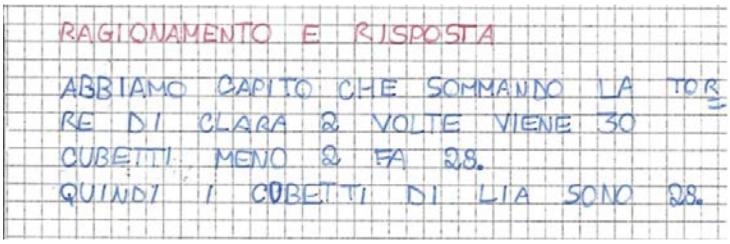
2 i 15 cubetti della torre di 5 piani per ottenere il numero di cubetti della torre di 10 piani … in questo modo non c'era bisogno di cimentarsi nella costruzione della torre!
A tale proposito in tutte le sedi degli afferenti al nostro gruppo ci sono diversi esempi (Figg. 10-10b) con soluzioni e spiegazioni di questo tipo:
15 x 2 – 2 = 28 oppure 15 + 15 = 30 – 2 = 28

Fig. 10



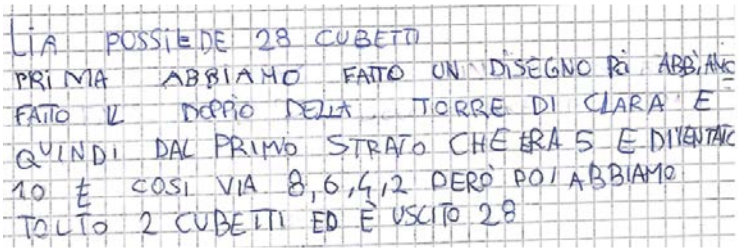
All'inizio ~~io avevo proposto~~ avevo notato che Clara aveva fatto una torre di 5 piani che corrispondono a 15 cubetti. Lia pensava che poteva realizzare 10 piani quindi abbiamo moltiplicato x2 che fa 30, che corrispondono a 10 piani meno 2 quadretti che le mancavano per realizzarli. Quindi i cubetti sono 28

Fig.10a


RAGIONAMENTO E RISPOSTA
ABBIAMO CAPITO CHE SOMMANDO LA TOR-
RE DI CLARA 2 VOLTE VIENE 30
CUBETTI MENO 2 FA 28.
QUINDI I CUBETTI DI LIA SONO 28.

RAGIONAMENTO E RISPOSTA
Abbiamo capito che sommando la Torre di Clara 2 volte viene 30 cubetti meno 2 fa 28.
Quindi i cubetti di Lia sono 28

Fig.10b

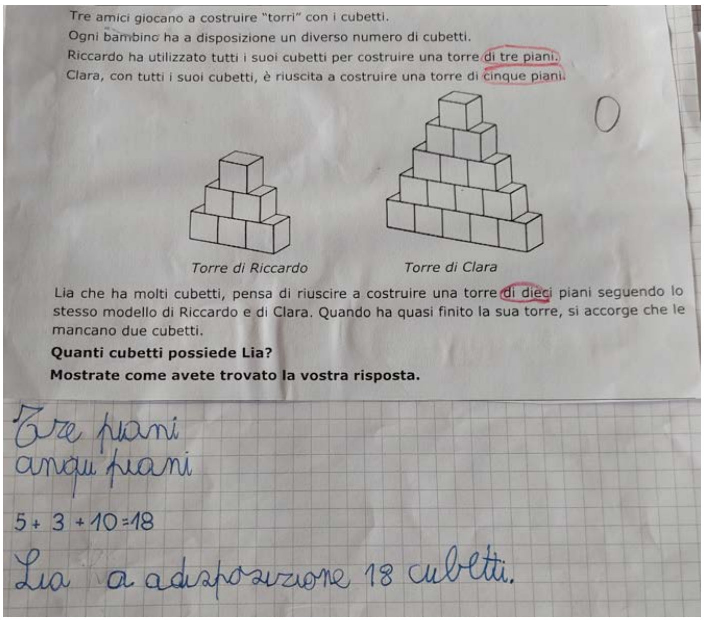


Lia possiede 28 cubetti
Prima abbiamo fatto il doppio della torre di Clara e quindi dal primo strato che era 5 è diventato 10 e così via 8, 6, 4, 2 però poi abbiamo tolto 2 cubetti ed è uscito 28

In particolare, nell'elaborato di Fig.10b, gli allievi ottengono lo stesso risultato (28) ma commettono un errore diverso, hanno intuito il numero di cubetti che sono alla base (10, doppio di 5) ma poi hanno immaginato ogni piano con 2 cubetti in meno rispetto al sottostante.

Fra gli errori rilevati non mancano quelli legati all'abitudine di ricercare nel testo i dati numerici *chiave*. Riportiamo l'elaborato qui di sotto come esempio significativo.

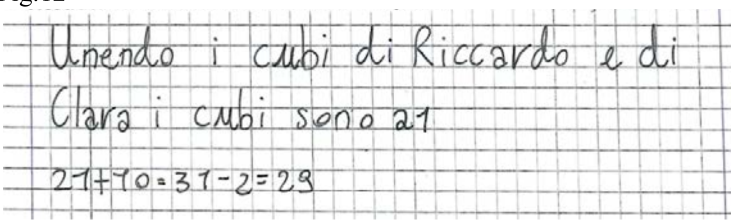
Fig.11



Tre piani
Cinque piani
5 + 3 + 10 = 18
Lia a disposizione 18 cubetti

Ci sono poi errori che mostrano che gli allievi non hanno compreso la situazione problematica ma hanno solo "giocato" con le immagini ed i numeri ad esse legate.
Ad esempio, Figg.12, 13, 14:

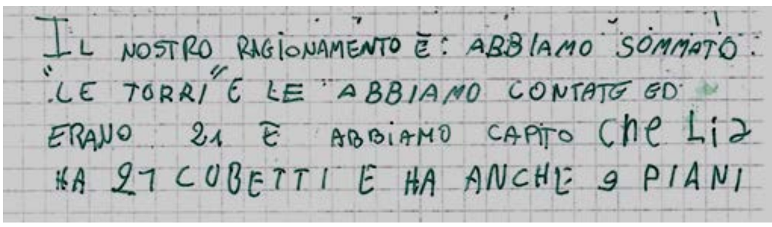
Fig.12



Unendo i cubi di Riccardo e di Clara i cubi sono 21
21 + 10 = 31 - 2 = 29

"Giocano" con i numeri: 21 cubi presenti nel disegno, 10 piani richiesti, si somma tutto e poi si toglie 2.

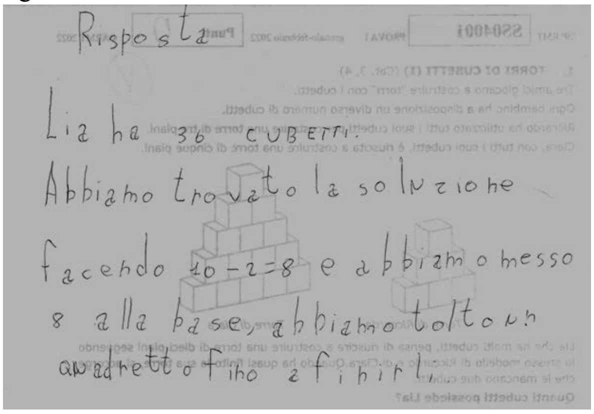
Fig. 13



Il nostro ragionamento: abbiamo sommato le torri e le abbiamo contate ed erano 21 e abbiamo capito che Lia ha 21 cubetti e ha anche 9 piani

Gli allievi hanno forse pensato che i cubetti a disposizione fossero quelli presenti negli esempi, … ma con 21 cubetti si hanno 6 e non 9 piani e mancherebbero ben più di 2 cubetti! Notare ancora una volta il linguaggio utilizzato oltre agli "sfondoni" detti!

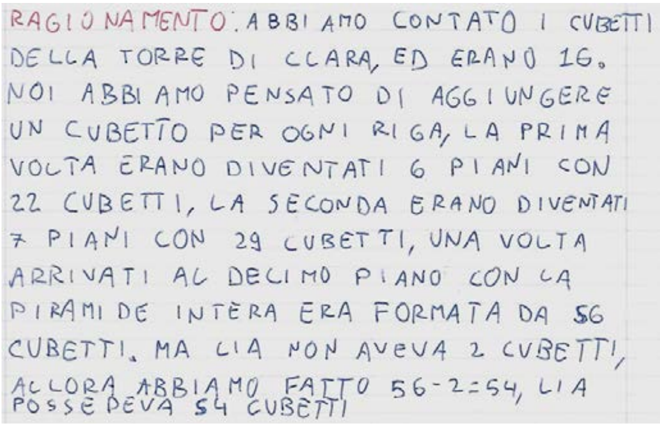
Fig.14


Risposta
Lia ha 36 cubetti.
Abbiamo trovato la soluzione
facendo 10-2=8 e abbiamo messo
8 alla base, abbiamo tolto un
quadretto fino a finirli

Risposta
Lia ha 36 cubetti. Abbiamo trovato la soluzione facendo 10 - 2 = 8 e abbiamo messo 8 alla base, abbiamo tolto un quadretto fino a finirli

Il numero dei cubetti della torre rappresentata nel disegno (36) è corretto, ma c'è confusione tra piani e cubetti nell'interpretazione del testo: al posto di due cubetti hanno sottratto due piani: quelli con 10 e 9 cubetti.
L'elaborato della successiva Fig.15 mostra lo stesso procedimento corretto illustrato in Fig.8 (strategia "furba"), nonostante un errore di calcolo iniziale la spiegazione fornita risulta chiara e da essa traspaiono una buona comprensione del problema e una strategia operativa che li può condurre ad individuare la relazione numero di piani/numero di cubetti da aggiungere per costruire la giusta successione numerica.

Fig.15


RAGIONAMENTO: ABBIAMO CONTATO I CUBETTI
DELLA TORRE DI CLARA, ED ERANO 16.
NOI ABBIAMO PENSATO DI AGGIUNGERE
UN CUBETTO PER OGNI RIGA, LA PRIMA
VOLTA ERANO DIVENTATI 6 PIANI CON
22 CUBETTI, LA SECONDA ERANO DIVENTATI
7 PIANI CON 29 CUBETTI, UNA VOLTA
ARRIVATI AL DECIMO PIANO CON LA
PIRAMIDE INTERA ERA FORMATA DA 56
CUBETTI. MA LIA NON AVEVA 2 CUBETTI,
ALLORA ABBIAMO FATTO 56-2=54, LIA
POSSEDEVA 54 CUBETTI

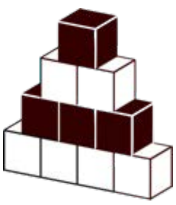
RAGIONAMENTO: abbiamo contato i cubetti della torre di Clara, ed erano 16. Noi abbiamo pensato di aggiungere un cubetto per ogni riga, la prima volta erano diventati 6 piani con 22 cubetti, la seconda volta erano diventati 7 piani con 29 cubetti, una volta arrivati al decimo piano con la piramide intera era formata da 56 cubetti, allora abbiamo fatto 56 - 2 = 54, Lia possedeva 54 cubetti

2.1. Problema Torri di cubetti (II) (Cat. 5, 6)

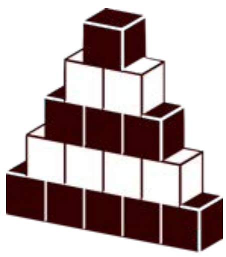
Tre amici costruiscono "torri" con cubetti bianchi e cubetti neri.

Ciascuno di loro ha a disposizione un numero diverso di cubetti.

Ecco due delle torri costruite dai tre amici.



Torre di Riccardo



Torre di Clara

Lia osserva le due torri e nota che si alternano un piano nero e un piano bianco, e che la cima è formata da un solo cubetto nero.

Decide allora di costruire una torre di venticinque piani con le stesse caratteristiche: un piano nero e un piano bianco alternati e con la cima formata da un solo cubetto nero.

Qual è la differenza tra il numero di cubetti bianchi e quello di cubetti neri che Lia utilizzerà per costruire la sua torre?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

I risultati:

Cat.	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	M
5	297 (35%)	126 (15%)	140 (17%)	70 (8%)	207 (25%)	840	1.7
6	355 (26%)	141 (10%)	204 (15%)	134 (10%)	516 (38%)	1350	2.2
Totali	652 (30%)	267 (12%)	344 (16%)	204 (9%)	723 (33%)	2190	2.0

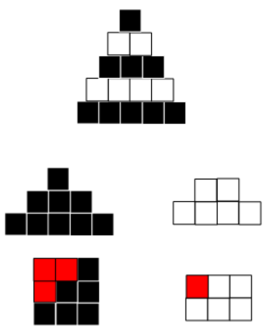
Come abbiamo accennato nell'introduzione, questo problema è stato utilizzato nel corso di formazione organizzato a Siena per ARMT Italia (a.s. 2021-2022) ed è stato, per questo, oggetto di analisi a priori da parte dei corsisti. Le loro analisi a priori hanno evidenziato sostanzialmente le strategie previste nell'Analisi a priori ufficiale aggiungendo che forse, nella categoria 6, i ragazzi avrebbero potuto avvalersi delle formule per calcolare la somma dei primi n numeri pari (**n(n + 1)**) e la somma dei primi n numeri dispari (**n^2**). Da queste, sapendo che i numeri pari da 2 a 24 sono 12, applicando la formula **n(n + 1)** avrebbero ottenuto 12(12 + 1) = 12 x 13 = 156 numeri pari (cubetti bianchi); sapendo che i numeri dispari da 1 a 25 sono 13, applicando la formula **n^2** avrebbero ottenuto 13^2 =169 numeri dispari (cubetti neri).

Nessuno ha utilizzato queste formule … forse anche perché i numeri proposti dal testo sono molto dominabili.

Prendendo spunto dal problema e da questa osservazione, potrebbe essere interessante, in ambito didattico, proporre di utilizzare il metodo grafico per ricavare queste formule.

Ad esempio far scomporre agli allievi la torre bicolore di base 5 del testo nelle due torri monocolori: la Nera di base 5 e la Bianca di base 4, sollecitarli ad osservare e legare tra di loro tutte le variabili (base/altezza della torre, base/altezza del rettangolo, colore cubetti alla base/colore cubetti apicale, piramide nera/piramide bianca che non sono entrambe con cubetto apicale,...); proporre in seguito di costruire una torre bicolore più alta con base di colore assegnato e, attraverso la discussione, invogliarli ad operare come nell'esempio di Fig. 16, ricomponendo la torre piramidale nera e quella bianca nella forma rettangolare (rettangolo/quadrato), molto più agevole per contare il numero di elementi che le compongono.

Fig. 16



Il numero N di cubetti neri relativo ad una torre con un numero dispari *n* di cubetti alla base è

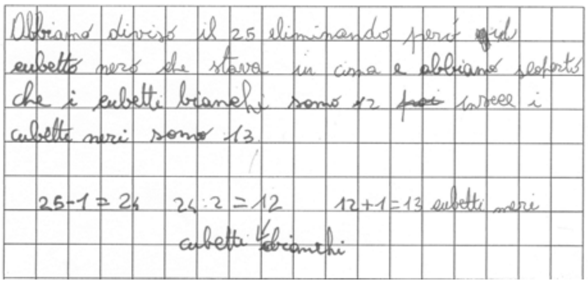
$$\boldsymbol{N = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$$

Il numero B di cubetti bianchi relativo ad una torre con un numero pari *n* di cubetti alla base è

$$\boldsymbol{B = \left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2}}$$

Interessante l'elaborato seguente in cui, ad una prima lettura, sembra che gli allievi si limitino a **"giocare con i numeri"** ma, forse, si tratta di un errore dovuto semplicemente all'aver omesso l'espressione "piani di" (cubetti bianchi, cubetti neri) e non è quindi casuale il fatto che 13 è proprio la differenza cercata.

Fig.17



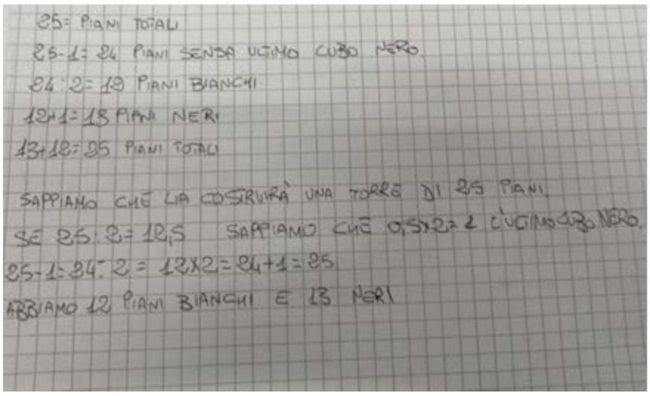
Abbiamo diviso il 25 eliminando però il cubetto nero che stava in cima e abbiamo scoperto che i cubetti bianchi sono 12 invece i cubetti neri sono 13

25-1 = 24 24:2 = 12 12+1 = 13

cubetti bianchi *cubetti neri*

Infatti, in una torre di 25 piani, eliminando il cubetto nero apicale, ne rimangono 24 di cui la metà sono bianchi e l'altra neri: piani non cubetti come si legge sull'elaborato! E ancora, essendo la differenza fra un piano e l'altro di un cubetto, fra neri e bianchi ci sarebbero 12 cubetti di differenza più un altro (12 + 1 = 13).
Se l'errore è quello di una scrittura troppo frettolosa e che trascura l'essenziale, allora questo sarebbe un esempio in cui viene utilizzata la strategia prevista dall'analisi a priori (*calcolare che dei 25 piani totali, 13 saranno formati da cubetti neri. Siccome ogni piano nero ha un cubetto in più del soprastante piano bianco, dedurre che ci sono 13 cubetti neri in più rispetto a quelli bianchi).*
Nell'elaborato di Fig.18 probabilmente ragionano nello stesso modo, ma è poco chiaro come conducono la spiegazione.

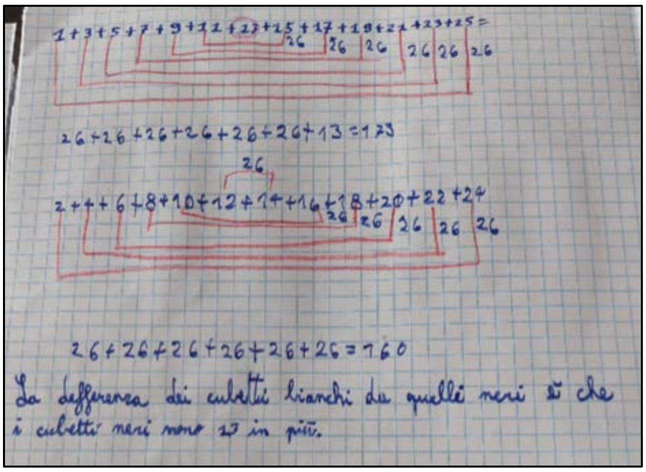
Fig.18



25= piani totali
25-1=24 piani senza l'ultimo cubo nero
24:2 = 12 piani bianchi
12+1=13 piani neri
13+12=25 piani totali
Sappiamo che Lia costruirà una torre di 25 piani
Se 25:2 =12,5 sappiamo che 0,5x2=1 l'ultimo nero
25-1=24:2=12x2=24+1=25
Abbiamo 12 piani bianchi e 13 neri

La successiva Fig.19 mostra un elaborato di cat.5 interessante perché gli allievi utilizzano il "metodo di Gauss". In genere questo metodo viene presentato per calcolare la somma dei primi *n* numeri naturali, ma gli allievi l'hanno trovato utile per la somma dei primi *n* pari e *n* dispari. Hanno sbagliato il calcolo ma nel disegno indicano correttamente la differenza (il numero 13 è cerchiato in rosso): forse non si sono resi conto che non sarebbe stato neppure necessario trovare la somma!

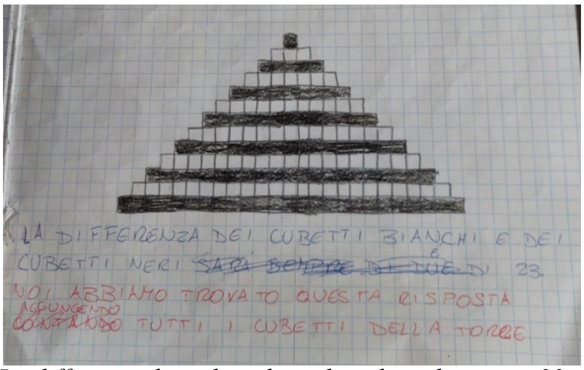
Fig. 19



La differenza dei cubetti bianchi da quelli neri è che i cubetti neri sono 13 in più

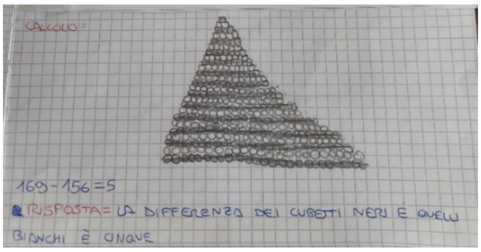
Analogamente a *Torri di cubetti I s*i riscontrano ancora difficoltà nel disegno della torre con le caratteristiche richieste. In Fig. 20 la torre aumenta di due cubetti ad ogni piano mentre la Fig. 21 è molto confusa.

Fig.20



La differenza dei cubetti bianchi e dei cubetti neri 23.
Noi abbiamo trovato questa risposta aggiungendo tutti i cubetti della torre

Fig. 21

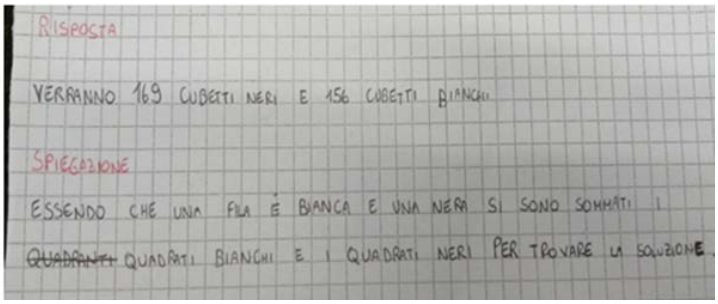


169 - 156 = 5
RISPOSTA = la differenza dei cubetti neri e quelli bianchi è cinque

Come già detto nell'introduzione, nell'analisi a priori più di un corsista ha osservato che, pur essendo il testo chiaro e ben strutturato, la domanda poteva trarre in inganno perché chiedeva la "*differenza tra il numero di cubetti bianchi e quello di cubetti neri*".

In qualche caso l'analisi a posteriori ha confermato questo ostacolo. Ad esempio, nell'elaborato di Fig.22 la parola differenza è stata intesa nella sua accezione "cosa hanno di diverso", gli allievi ritengono pertanto sufficiente rispondere quanti sono i cubetti neri e quelli bianchi

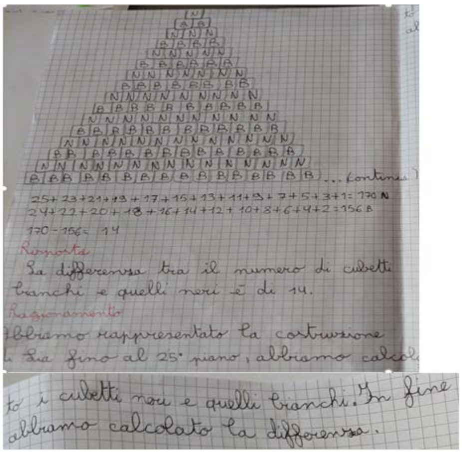
Fig. 22



Risposta
Verranno 169 cubetti neri e 156 cubetti bianchi.
Spiegazione
Essendo che una fila è bianca e una nera si sono sommati i ~~quadretti~~ quadrati bianchi e i quadrati neri per trovare la soluzione

L'elaborato di Fig. 23 mostra allievi ancorati al disegno ma solo fino ad un certo punto; il «continua» fa capire che essi passano poi al registro numerico. Anche qui preferiscono disegnare 1 cubetto utilizzando 4 quadretti.

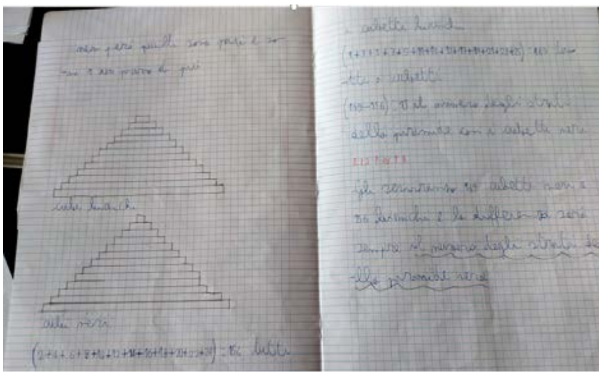
Fig. 23



Risposta
La differenza tra il numero di cubetti bianchi e quelli neri è di 14.
Ragionamento
Abbiamo rappresentato la costruzione di Lia fino al 25° piano, abbiamo calcolato i cubetti neri e quelli bianchi. In fine abbiamo calcolato la differenza

Il successivo esempio (Fig. 24) è l'unico trovato nel quale si osserva la costruzione della piramide dei pari e dei dispari, superando così l'ostacolo del disegno. Anche in questo caso utilizzano un quadretto per un cubetto, che permette loro di rientrare nel foglio e di non avere i mezzi quadretti: questa era l'idea degli estensori del problema per spingere gli allievi a lavorare anche in modo geometrico.

Fig.24

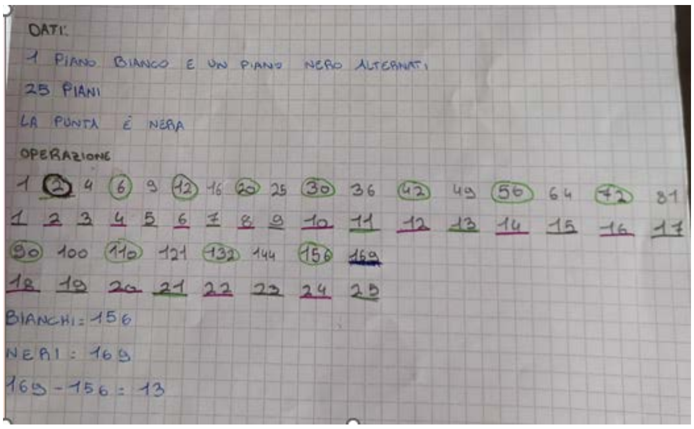


neri però quelli sono pari e sono 1 un piano di più
Figura *Figura*
cubi bianchi *cubi neri*
(2+4+6+8+10+12+14+16+18+20+22+24)=156
tutti i cubetti bianchi
1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25=169
tutti i cubetti
(169-156) =13 il numero degli strati della piramide con i cubetti neri
RISPOSTA
Gli serviranno 169 cubetti neri e 156 bianchi e la differenza sarà sempre il numero degli strati della piramide nera.

Si può osservare che il disegno li ha guidati ma che poi hanno lavorato sui numeri (non si sono accorti o non hanno tenuto conto dei due errori presenti nel loro disegno) solo che nella spiegazione e nella risposta hanno confuso strati con numero di cubetti
- *(169 - 156) =13 il numero degli strati della piramide con i cubetti neri*
- *la differenza sarà sempre il numero degli strati della piramide nera*

I successivi esempi (cat. 6) mostrano come la crescita scolastica degli allievi favorisca il distacco dalla rappresentazione tramite disegno a quella simbolica ed al ragionamento astratto. Il disegno, parte integrante del testo, serve per capire la situazione problematica, poi basta impostare un ragionamento logicamente corretto e trarre le giuste conclusioni.
I due elaborati successivi mostrano questo passaggio: dal disegnare i cubetti all'operare con i numeri.

Fig.25

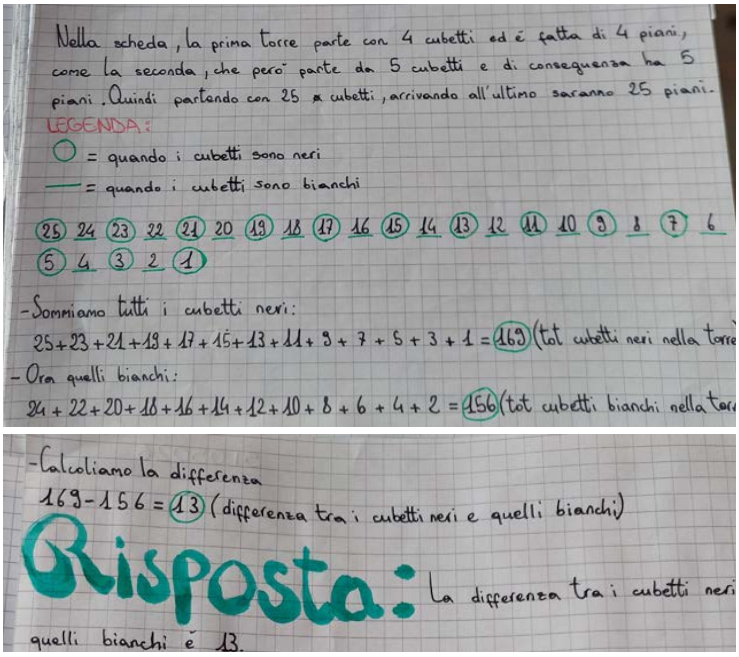


DATI
1 piano bianco ed un piano nero alternati
25 piani
La punta è nera
OPERAZIONE

BIANCHI: 156
NERI: 169
169-156 =13

Nel seguente elaborato (Fig.26) si nota come gli allievi sentano il bisogno, nella risposta, di precisare differenza fra neri e bianchi e non "*fra bianchi e neri*" come richiesto nel testo (sottolineano il fatto che i neri sono di più)

Fig.26


Nella scheda, la prima torre parte con 4 cubetti ed è fatta di 4 piani, come la seconda, che però parte da 5 cubetti e di conseguenza ha 5 piani. Quindi partendo con 25 cubetti, arrivando all'ultimo saranno 25 piani.
LEGENDA:
○ = quando i cubetti sono neri
— = quando i cubetti sono bianchi
25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6
5 4 3 2 1
-Sommiamo tutti i cubetti neri:
25+23+21+19+17+15+13+11+9+7+5+3+1=169 (tot cubetti neri nella torre
-Ora quelli bianchi:
24+22+20+18+16+14+12+10+8+6+4+2=156 (tot cubetti bianchi nella torr
-Calcoliamo la differenza
169-156=13 (differenza tra i cubetti neri e quelli bianchi)
Risposta: La differenza tra i cubetti neri
quelli bianchi è 13.

Nella scheda, la prima torre parte con 4 cubetti ed è fatta di 4 piani, come la seconda che però parte da 5 cubetti e di conseguenza ha 5 piani- Quindi partendo da 25 cubetti, arrivando all'ultimo saranno 25 piani¶

LEGENDA¶

○ = *quando i cubetti sono neri*¶

— = *quando i cubetti sono bianchi*¶

- *Sommiamo tutti i cubetti neri*¶

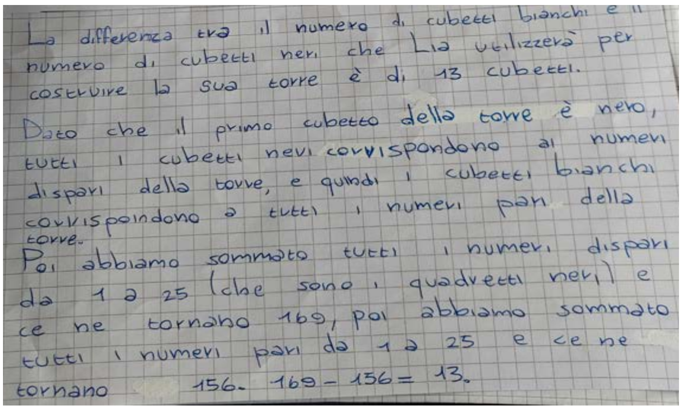
- *Ora quelli bianchi*¶

- *Calcoliamo la differenza*¶

RISPOSTA: la differenza fra i cubetti neri e quelli bianchi è 13¶

L'elaborato successivo mostra la conquista di un gradino in più nella scala del ragionamento teorico: non c'è bisogno di scrivere tutti i numeri dispari e i numeri pari fino a 25 (lista lunga e noiosa) basta dire cosa si fa con essi!

Fig.27


La differenza tra il numero di cubetti bianchi e il numero di cubetti neri che Lia utilizzerà per costruire la sua torre è di 13 cubetti.
Dato che il primo cubetto della torre è nero, tutti i cubetti neri corrispondono ai numeri dispari della torre, e quindi i cubetti bianchi corrispondono a tutti i numeri pari della torre.
Poi abbiamo sommato tutti i numeri dispari da 1 a 25 (che sono i quadretti neri) e ce ne tornano 169, poi abbiamo sommato tutti i numeri pari da 1 a 25 e ce ne tornano 156. 169 - 156 = 13.

La differenza tra il numero dei cubetti bianchi e il numero dei cubetti neri che Lia utilizzerà per costruire la sua torre è di 13 cubetti.
Dato che il primo cubetto della torre è nero, tutti i cubetti neri corrispondono ai numeri dispari della torre, e quindi i cubetti bianchi corrispondono a tutti i numeri pari della torre.
Poi abbiamo sommato tutti i numeri dispari da 1 a 25 (che sono neri) e ce ne tornano 169, poi abbiamo sommato tutti i numeri pari da 1 a 25 e ce ne tornano 156.
169-156 = 13.

Gli ultimi tre esempi (Figg.25-27) mostrano che per poter procedere in forma più astratta, senza il bisogno di operare su un disegno, è necessario avere comunque capito che il numero dei piani della torre è uguale al numero dei cubetti alla base della torre stessa.

3. Per andare più lontano

Come accennato nell'introduzione, nel corso degli anni sono stati proposti, nelle varie edizioni del RMT, molti problemi relativi alla scoperta di regolarità nelle relazioni fra i dati (sia numerici che grafici) forniti dal testo del problema stesso. Sarebbe interessante riproporli ed analizzarli confrontandoli rispetto alle uguaglianze e diversità relative alle competenze matematiche sottostanti.

I seguenti problemi, elencati in ordine cronologico, hanno in comune il procedimento di costruzione della torre: ogni piano diminuisce di un cubetto (lattina, triangolo, carte, stuzzicadenti) rispetto al sottostante.

Ci è sembrato interessante vedere, problema per problema, in cosa differiscono e, di conseguenza, qual è il compito didattico che ne emerge, in modo che essi possano essere inseriti in un percorso di lavoro sia di verifica che di approfondimento

Collezione di lattine (08.I.05 cat. 3, 4 e 08.I.09 cat. 5, 6) contesto analogo a *Torri di cubetti I*, basta sostituire le lattine ai cubetti e le piramidi alle torri.

Nella versione destinata alle categorie più basse, la richiesta è quella di costruire due piramidi con un determinato numero di oggetti (27). Si tratta quindi di ricercare due numeri aventi somma 27 nella sequenza delle somme dei primi n numeri minori o uguali a 27 (1, 3, 6, 10, 15, 21)

Il compito matematico è quindi ben diverso e rende il problema più complicato da gestire.

Nella versione destinata alle categorie più alte le richieste sono due:

a) individuare la strategia che permette di stabilire con sicurezza quanti elementi dovranno formare il piano-base della torre;
b) suddividere il numero di lattine a disposizione per costruire esattamente due torri.
Anche in questo caso il compito matematico risulta così ben diverso: si conosce il numero totale di oggetti a disposizione e si vuole costruire la torre completa più alta possibile, pur sapendo che avanzeranno alcune lattine (se riuscissero a stabilire le relazioni numero lattine alla base/numero di piani e numero del piano/ numero di lattine su quel piano, saremmo nella stessa situazione di *Torri di cubetti I* in cui però si scambiano i dati noti (piani) con numero di lattine (cubetti) totali. Tuttavia, *Torri di cubetti I* è più semplice perché, come abbiamo visto, può essere risolto solo contando, anche senza aver scoperto queste relazioni che invece vengono esplicitamente richieste nel problema *Collezione di lattine*.
Questo problema aggiunge un'altra richiesta quella di voler costruire due torri complete: si tratta quindi di vedere scomposto il numero totale di oggetti (lattine) nella somma di due numeri a e b che sia 64 (con a che corrisponde al numero totale di oggetti della prima torre e b che corrisponde al numero totale di oggetti della seconda). Analogamente alla precedente versione, i due numeri vanno ricercati nella sequenza delle somme dei primi n numeri minori o uguali a 64 (1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55).

Un triangolo che ingrandisce (13.II.07 cat. 4, 5, 6) Si tratta di un problema molto simile a *Torre di cubetti I:* triangoli neri al posto dei cubetti (i quadrati nella rappresentazione piana).
La richiesta qui è "duale" rispetto a *Torre di cubetti*: si conosce il numero di triangoli e si deve trovare il numero dei piani.

Torri bicolori (16.I.05 cat. 3, 4, 5)[2] Si richiede la somma dei quadrati dei numeri dei cubetti che formano i vari piani della torre. Si alternano i quadrati dei numeri pari a quelli dei numeri dispari. La visualizzazione della sezione verticale della torre corrisponde a quella del problema *Torri di cubetti II* ma questo problema chiede di porre l'attenzione all'aspetto tridimensionale della torre, in particolare al fatto che, per ogni piano. ci sono cubetti che non si vedono e che devono essere considerati. Per ciascun piano il numero di cubetti sul piano aumenta con i quadrati dei numeri naturali (1, 4, 9, 16, 25 …) e si alternano piani grigi (quadrati di numeri dispari) a piani bianchi (quadrati di numeri pari).

I problemi successivi richiedono di costruire torri o piramidi ma con una differente regola costruttiva: si aggiungono (o tolgono) due elementi per ogni nuovo piano (la sequenza dei numeri di cubetti per piano sarà quindi 1, 3, 5, 7, 9, 11, …)

Doppia scala (10.I.07 cat. 4, 5, 6) Come il problema *Torri di cubetti I*, richiede di trovare, a partire dal numero di piani, quanti cubetti sono necessari per la costruzione, solo che in questo caso ogni piano della costruzione aumenta/diminuisce di due cubetti. In alcuni elaborati è presente il metodo geometrico illustrato in Fig. 17.

Le piramidi di Filippo (13.II.19 cat.9) Come nel problema *Torri di cubetti II*, si richiede di calcolare la differenza tra il numero di cubetti bianchi e grigi in una piramide la cui sezione frontale mostra che ogni piano, a partire da un cubetto in alto, prosegue aumentando di due cubetti per ciascuno dei piani sottostanti, quindi piano aumenta con i quadrati (come succede in *Torri bicolori*) dei numeri dispari.

Castelli di carta (13.II.15 cat. 7, 8, 9) Il metodo costruttivo e la richiesta del problema sono gli stessi di *Torri di cubetti I*, infatti se osserviamo la sezione frontale possiamo riconoscere dei triangoli isosceli che in ciascun piano corrispondono al numero del piano stesso. Nella costruzione si procede aumentando di un solo triangolo (a partire dall'alto) ma bisogna tenere conto che i triangoli sono composti da due carte e che tra un piano e l'altro ogni triangolo poggia su una carta di base, ad esclusione dei triangoli del piano terra. La formula che lega il numero di piani del castello al numero di carte necessarie è sostanzialmente la seguente:

$$2n\frac{n+1}{2}+n\frac{n-1}{2}$$

[2] Nella Banca problemi è presente la scheda in ambito 3D (geometria dello spazio).

Gli esagoni di Renato (15.F.16 cat. 7, 8, 9, 10) presenta analogie nel compito matematico con il successivo problema Scale: osservazione di figure e gestione della successione numerica ad esse associabile. Si può inserire in un percorso didattico per comprendere ed esprimere correttamente relazioni "funzionali" (il numero dei rombi che tassellano l'esagono di lato n può essere espresso in più modi, ad esempio $3 \times n^2$).

Scale (24.II.12 cat. 7, 8 ,9) Il problema, attraverso lo studio di una successione di figure, richiede di gestire la regolarità in una successione numerica e, poiché è destinato a categorie più alte, può essere interessante a livello didattico sia per consolidare negli allievi la capacità di osservazione, sia per avviare verso la formalizzazione della strategia risolutiva con un'equazione (esempio:

$(n + 2) \times 3 = 210$, se scoprono che sommando 2 al numero della figura e moltiplicando per 3 si ottiene il numero dei quadratini neri,

oppure

$n - 1 + n + n + 1 = 210$ se scoprono che il numero dei quadretti neri sui «lati della scala» sono tre numeri consecutivi, oppure

$n - 1$, n e $n + 1$, con n il numero di quadretti neri sull'altezza che corrisponde al numero della figura +2).

Scale di stuzzicadenti (27.I.10 cat. 5, 6, 7)
La scala degli stuzzicadenti ha la stessa rappresentazione di *Torre di cubetti I* e quindi valgono le stesse regolarità che abbiamo rilevato in precedenza: la scala aumenta di un "quadratino" per ogni piano.
Anche in questo caso, come in *Castelli di carte,* è necessario tenere presente che ogni elemento costitutivo della scala è a sua volta formato da quattro sottoelementi (stuzzicadenti) ed anche che ogni sottoelemento può rappresentare il segmento-lato comune a due "quadretti" della scala (esattamente i sottoelementi interni). La relazione che lega il numero di piani n al numero totale di stuzzicadenti è data da $n(n + 3)$).
Il problema chiede il numero massimo di piani completi che la scala potrà avere con un numero prefissato di stuzzicadenti: è un problema inverso rispetto a quello delle *Torri di cubetti* (si scambiano fra loro i dati noti e quelli ignoti). Inoltre il numero di stuzzicadenti a disposizione non permette di ottenere un numero di piani esattamente corrispondente al numero dato, questo pone l'allievo di fronte ad una ulteriore difficoltà: la valutazione del risultato ottenuto.

***I cubi di Zoe* I** (23.F.06 cat. 4, 5, 6, 7), ***I cubi di Zoe* II** (23.F.14 ; cat. 8, 9, 10)
Si tratta di un problema trasversale che nelle sue 2 versioni coinvolge tutte le categorie esclusa la cat.3.
La regola costruttiva è la stessa di *Torri di cubetti* ma le torri sono diverse: non terminano con un cubetto apicale ma si considerano finite quando ne viene completato tutto un piano. Qui quello che interessa non è la relazione fra piani e numero di cubetti alla base bensì il fatto che il numero di cubetti di differenza fra un piano e l'altro è sempre uno. Di conseguenza il compito matematico è completamente diverso:
determinare un numero naturale inferiore a 25 (a 50) avente due (quattro) diverse decomposizioni trapezoidali (decomposizioni in somme di interi consecutivi).

Torri di cubetti (20.F.10 cat. 5, 6, 7) questo problema e quelli che stiamo esaminando in comune hanno solo il "titolo". Qui infatti si tratta di confrontare parallelepipedi rettangoli costruiti avendo a disposizione 18 cubetti; in particolare, determinare il numero delle facce visibili in ciascuna costruzione. Trovare due costruzioni che abbiano lo stesso numero di facce visibili, ma una differenza di altezza pari a 8 piani.

Il compito matematico in ambito aritmetico è quello di scomporre un numero naturale in tre fattori.

Della stessa famiglia, che richiede di rilevare e lavorare (talvolta su un disegno) con le regolarità numeriche sono anche, ad esempio, i seguenti problemi:
Scavi archeologi (15.F.11 cat. 5, 6, 7);
Le pietre miliari della via Aurelia) (19.F.08 cat.5, 6):
La piramide (09.I.16 cat. 7, 8);
Griglie (25.I.06 cat. 4, 5, 6);

4. Conclusione

In classe i due problemi potrebbero essere utilizzati anche per far conoscere agli allievi strategie diverse rispetto a quella di disegnare la torre, contare fila per fila i cubetti, sommare i cubetti neri e quelli bianchi per poi infine farne le differenze. La procedura basata sul disegno, che è stata poi quella maggiormente utilizzata, è lunga e insidiosa, come visto dai risultati. Le altre strategie, messe in evidenza nell'analisi a priori sono sicuramente più interessanti e meritano di essere affrontate e discusse con i propri allievi.

Si tratta di problemi adatti per una matematica laboratoriale, che tende allo sviluppo della capacità di osservazione e favorisce la scoperta di regolarità. L'uso di materiale concreto, con il quale si possono condurre le attività proposte, stimola la curiosità e il coinvolgimento degli allievi, lascia all'insegnante il compito di aiutarli nell'elaborazione di un pensiero logicamente articolato e nel passaggio dal concreto alla riflessione via via più astratta e generale.

A livello didattico, per condurre la discussione, può essere opportuno esaminare con la classe elaborati come quelli proposti nell'articolo; questi, infatti, possono costituire un supporto essenziale per intraprendere una riflessione collettiva dal momento che, proprio in quanto prodotti da allievi sconosciuti, si presentano oggettivi e non implicano alcun coinvolgimento emotivo: lavorando nella scuola gli insegnanti sanno bene quanto lo spirito di gruppo spesso influisca, in positivo o in negativo, determinando valutazioni e giudizi non propriamente oggettivi e ragionati.

Un'altra modalità utile, per il lavoro con i propri allievi, potrebbe essere quella di far risolvere lo stesso problema a gruppi diversi per confrontare le strategie adottate all'interno della classe: consentirebbe agli alunni di spiegare in presenza e in una situazione contingente e di riflettere per comprendere anche come alcuni concetti aritmetici sono collegati a concetti geometrici. In questo modo si contribuisce ad incrinare l'idea che le diverse parti della matematica siano separate tra loro e si favorisce il pensiero unitario, non si può lavorare, come spesso si sente dire dagli allievi, solo in aritmetica oppure solo in geometria o in algebra (talvolta addirittura su quaderni di lavoro separati).