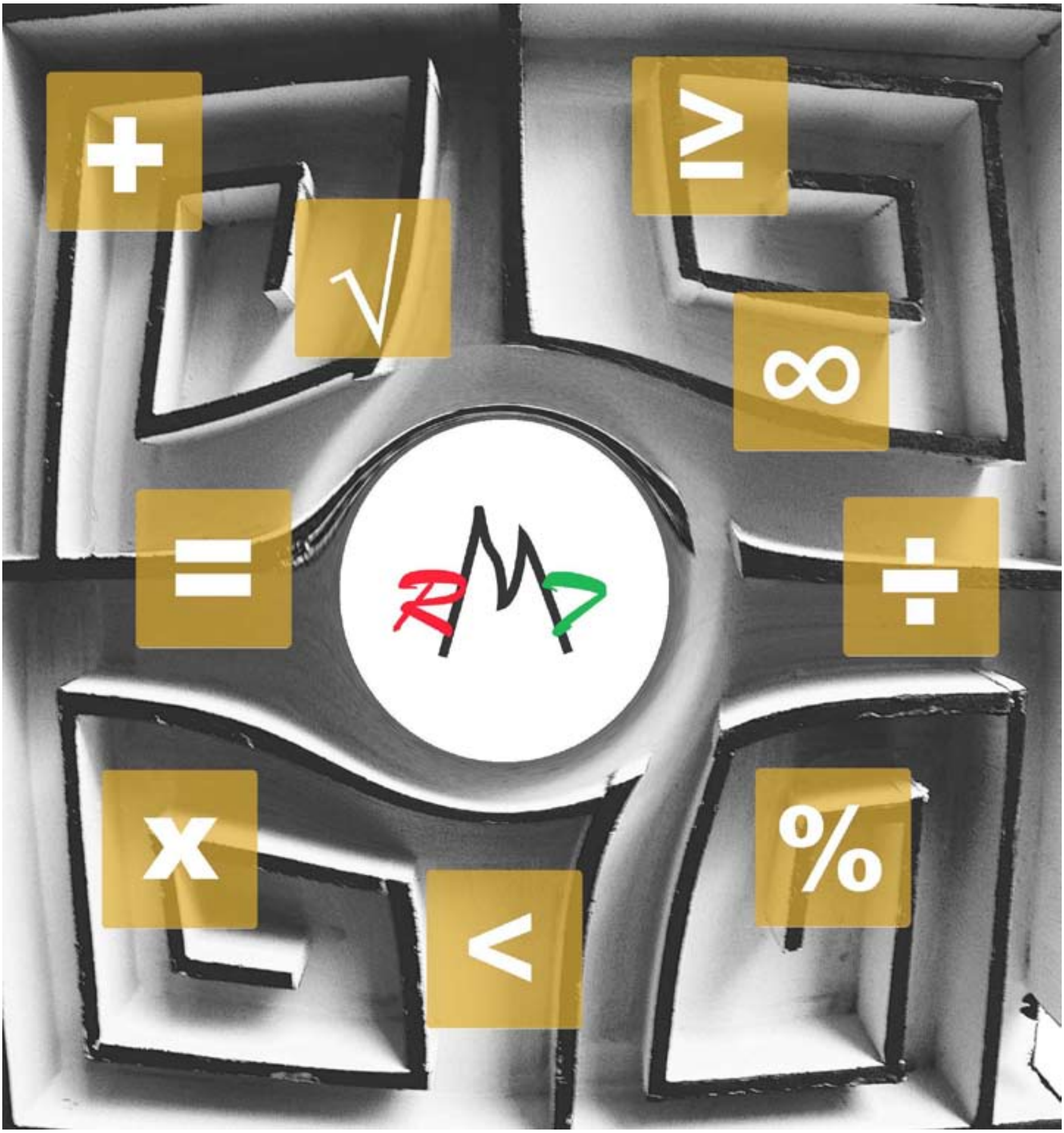
La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 11 octobre / ottobre 2021



Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.eu

ISSN 2234-9596

TABLE DES MATIÈRES / INDICE

Numéro 11, octobre 2021/ Numero 11, ottobre 2021

Études / Approfondimenti

ÉDITORIAL : LES DEUX VIES D'UN PROBLÈME DU RMT

François Jaquet

Nos problèmes ne vivent que 50 minutes pour les élèves qui les résolvent lors de l'une de nos épreuves. Que se passe-t-il au cours de cette courte vie du « problème-rallye » ?

On peut espérer que les élèves y ont « fait» un peu de mathématique, qu'ils ont appris à « chercher », qu'ils ont relevé un défi, conservé une impression positive de travail coopératif en pleine autonomie … On en reste cependant aux suppositions.

Les résultats de l'attribution des points donnent quelques informations supplémentaires sous forme d'indices globaux de « réussite » ou plutôt d'adéquation de la tâche proposée aux capacités des élèves.

De son côté, l'enseignant peut en savoir un peu plus s'il examine les copies rendues par ses élèves, en sachant cependant qu'elles sont l'œuvre de quelques élèves de sa classe vu le partage des problèmes selon les groupes.

Les traces de cette première vie du problème se retrouvent dans la Banque de problèmes du RMT. On peut évidemment repartir à zéro : reprendre l'énoncé et le proposer à d'autres élèves, mais sans aller au-delà des espérances de sa première vie.

A moins que … l'on cède à la curiosité d'examiner les copies rendues par les élèves après l'épreuve ! Il y en a des centaines, voire des milliers, précieusement conservées dans les archives de chaque section.

Ceux qui s'y consacrent ne tardent pas à en découvrir la richesse : la manière dont les élèves ont abordé la résolution, les obstacles rencontrés, l'originalité des cheminements, l'état de construction de de leurs connaissances, … Le contraste entre la vision du problème par ceux qui l'avaient élaboré et par ceux qui ont essayé de le résoudre est évident. Il y a là un changement total de paradigme.

Et c'est alors qu'on peut imaginer une seconde vie du problème, pour la classe, selon une des finalités du RMT qui figure explicitement dans ses statuts, *améliorer l'apprentissage :* se mettre à la place des élèves pour progresser avec eux dans la construction patiente de leurs connaissances, à leur rythme, selon leurs besoins.

Une centaine de nos problèmes du RMT, sur près de 1500, ont été analysés a posteriori. C'est peu, mais l'idée fait son chemin et les résultats sont encourageant. Ils ouvrent des perspectives pour cette seconde vie, celle de l'exploitation didactique du « problème en classe ».

L'analyse a posteriori offre à l'enseignant des données pour aller au-delà des belles intentions générales du problème « pour chercher » ou pour « faire des mathématiques » dont il pourra tirer profit :

- la tâche effective de résolution du problème : pour écarter ceux qui sont hors de portée de ses élèves ou dont les contenus mathématiques sont mal définis et conserver ceux qui paraissent correspondre aux besoins de sa classe ;

- les éventuelles difficultés d'appropriation de la situation : la résolution en présence de l'enseignant permet à celui-ci d'organiser une première « mise en commun » pour éviter certains blocages sans rompre le contrat de dévolution de la tâche de recherche aux élèves (par exemple des contextes difficiles à imaginer pour certains groupes) ;

- les obstacles et erreurs mis en évidence : pour connaître leur existence et y être attentif lorsqu'ils apparaîtront en phase de débat collectif, après la phase de résolution (par exemple le « conflit aire-périmètre » bien connu) ;

- les différents niveaux de construction des concepts mobilisés : là aussi il faut les reconnaître pour savoir à quel niveau développer l'institutionnalisation des savoirs (par exemple, étendre une approche du concept de fonction définie sur des nombres naturels à des nombres décimaux).

Cette liste peut s'étendre encore, et laisse entrevoir que la seconde vie du « problème pour la classe », à la lumière de l'analyse a posteriori, s'intègre dans un parcours didactique bien défini, et pourra même se conjuguer harmonieusement avec celle d'autres problèmes.

EDITORIALE: LE DUE VITE DI UN PROBLEMA DEL RMT

François Jaquet

I nostri problemi vivono solo 50 minuti per gli allievi che li risolvono durante una delle nostre prove.

Cosa succede durante questa breve vita del "problema-rally"?

Si spera che gli allievi abbiano "fatto" un po' di matematica, che abbiano imparato a "cercare", che abbiano raccolto una sfida, che abbiano mantenuto un'impressione positiva di lavoro in gruppo in piena autonomia…

Tuttavia sono solo supposizioni.

I risultati dell'attribuzione dei punteggi offrono alcune informazioni supplementari sotto forma di indici globali di "riuscita" o piuttosto dell'adeguamento alle capacità degli allievi del compito proposto.

Da parte sua, l'insegnante può saperne di più se esamina gli elaborati restituiti dai suoi allievi; vista, però, la distribuzione dei problemi secondo i gruppi, deve considerare che la risoluzione sia opera solo di alcuni allievi.

Le tracce di questa prima vita del problema si trovano nella Banca dei problemi del RMT. Evidentemente si può ripartire da zero: riprendere l'enunciato e riproporlo ad altri allievi, ma senza andare al di là dell'esperienza della sua prima vita.

A meno che… non si ceda alla curiosità di esaminare gli elaborati resi dagli alunni dopo le prove! Ce ne sono a centinaia, a volte a migliaia, conservati preziosamente negli archivi di ciascuna sezione.

Quelli che vi si sono dedicati non tardano a scoprirne la ricchezza: il modo in cui gli allievi hanno affrontato la risoluzione, gli ostacoli incontrati, l'originalità dei percorsi, lo stato di costruzione delle loro conoscenze,… Il contrasto tra la visione del problema di chi lo ha elaborato e di chi ha cercato di risolverlo è evidente. Qui c'è un cambiamento totale di paradigma.

È a quel punto che si può immaginare una seconda vita del problema, per la classe, secondo una delle finalità del RMT che compare esplicitamente nei suoi statuti; *migliorare l'apprendimento*: mettersi al posto degli allievi per progredire con loro nella paziente costruzione delle loro conoscenze, a loro ritmo, secondo i loro bisogni.

Un centinaio dei problemi del RMT, su circa 1500, è stato analizzato a posteriori. È poco, ma l'idea segue il suo cammino e i risultati sono incoraggianti. Aprono delle prospettive per questa seconda vita, quella della valorizzazione didattica del "problema in classe".

L'analisi a posteriori offre all'insegnante dei dati per andare oltre le buone intenzioni generali del problema "per cercare" o "per fare matematica" da cui può trarne profitto:

- il compito effettivo di risoluzione del problema: per escludere quelli che sono fuori dalla portata dei suoi allievi o i cui contenuti matematici sono mal definiti e per mantenere quelli che sembrano corrispondere alle esigenze della classe;

- le eventuali difficoltà nell'appropriarsi della situazione: la risoluzione in presenza dell'insegnante consente a quest'ultimo di organizzare una prima "condivisione" per evitare certi blocchi senza rompere il contratto di affidamento del compito di ricerca agli allievi (per esempio: contesti difficili da immaginare per alcuni gruppi);

- gli ostacoli e gli errori evidenziati: per conoscerne l'esistenza ed essere attenti quando si manifestano nella fase di dibattito collettivo, dopo la fase di risoluzione (per esempio: il ben noto «conflitto area-perimetro»);

- i diversi livelli di costruzione dei concetti mobilitati: anche qui bisogna riconoscerli per sapere a che livello sviluppare l'istituzionalizzazione dei saperi (per esempio: estendere ai numeri decimali un approccio del concetto di funzione definita sui numeri naturali);

Questo elenco può essere ampliato ulteriormente e lascia intravedere che la seconda vita del "problema per la classe", alla luce dell'analisi a posteriori, si inserisce in un percorso didattico ben definito e potrebbe anche combinarsi armoniosamente con quella di altri problemi.

PRESENTAZIONE DEL NUMERO

Questo numero 11 de *La Gazzetta di Transalpino*, aperto da un articolo elaborato da Lucia Grugnetti sulla evoluzione dei legami fra RMT, ricerca e formazione, è dedicato, in particolare, ad articoli di approfondimento relativi ad analisi a posteriori di nostri problemi, elaborati da cinque dei sei gruppi di lavoro tematici dell'ARMT.

Tali analisi riguardano globalmente tutte le categorie.

- Nell'articolo ***Evoluzione dei legami fra RMT, ricerca e formazione nel corso dei ventitré incontri internazionali dell'ARMT***, **Lucia Grugnetti**, dopo aver ricordato che gli atti degli incontri internazionali dell'ARMT e, successivamente, i numeri della Gazzetta di Transalpino, costituiscono la testimonianza dei legami tra RMT e ricerca didattica, che si sono evoluti nel tempo in diverse direzioni, fra le quali la formazione degli insegnanti, riprende e analizza articoli su tale argomento, pubblicati su La Gazzetta di Transalpino.

- **Rubrica APPROFONDIMENTI**:

  - Il **Gruppo geometria piana "per i grandi"**, con l'apporto del **Gruppo "virtuale" Zeroallazero**, presenta l'analisi a posteriori del problema "Pannello decorativo" per le categorie 8, 9, 10, proposto nella prima e unica prova del 28° RMT. Questa presentazione è organizzata in diverse parti, secondo sei rapporti di membri dei due Gruppi. L'articolo è in versione bilingue.
  - Il **Gruppo numerazione** presenta l'analisi a posteriori del problema "Cesto di frutta", nelle sue due versioni I (categorie 3, 4) e II (categorie 5, 6, 7), proposto nella prima e unica prova del 28° RMT.

    I due problemi selezionati sono stati inseriti nello stesso lavoro perché, proprio a partire dagli elaborati esaminati, è stata individuata una certa continuità nel compito richiesto agli alunni: la versione II, nell'introdurre una proprietà legata alla somma ed al prodotto, costituisce una evoluzione significativa nell'acquisizione delle operazioni e delle loro caratteristiche. L'articolo è in italiano con alcune inserzioni sintetiche in francese.
  - Il **Gruppo Algebra** presenta l'analisi a posteriori del problema "I tulipani di Anna" per le categorie 8, 9, 10, proposto nella prima prova del 27° RMT. La pluralità di concetti matematici di vari ambiti che possono essere utilizzati nella risoluzione di questo problema, ha il duplice vantaggio di offrire agli allievi la possibilità di applicare procedure matematiche diverse nella risoluzione del problema e di fornire agli insegnanti-un utile strumento di diagnosi riguardo al livello di acquisizione, da parte degli allievi stessi, di quei concetti che le procedure da loro usate hanno fatto intervenire. L'articolo è in italiano con alcune inserzioni sintetiche in francese.
  - Il **Gruppo Funzioni** mostra il percorso che va dall'analisi a posteriori di un problema ("Intersezione"- categorie 7, 8, 9, 10) alla formulazione di un nuovo enunciato ("Passeggiata di robot saltatori" – categorie 7, 8, 9, 10). Il cambiamento di contesto permette di testare diverse competenze, geometriche e algebriche, a diversi livelli scolari. L'articolo è in versione bilingue.
  - Il **Gruppo Geometria piana** presenta l'analisi a posteriori del problema "Puzzle di Triangoli" nelle sue due versioni I (categorie 5, 6) e II (categorie 7, 8), proposto nella prima e unica prova del 28° RMT. Lo studio pubblicato qui è organizzato in ordine cronologico secondo le fasi di costruzione, analisi e proposte didattiche del problema, e vede l'apporto congiunto del Gruppo geometria piana "per i grandi" e del Gruppo geometria piana "per i piccoli". L'articolo è in versione bilingue.
  - Il **Gruppo Algebra** presenta altresì l'analisi a posteriori del problema "Pokemon" per le categorie 3, 4, 5, proposto nella seconda prova del 26° RMT. L'articolo è in italiano con alcune inserzioni sintetiche in francese.
  - Il **Gruppo Geometria dello spazio** presenta l'analisi a posteriori del problema "Le scatole di Caterina" (per le categorie 4, 5, 6, proposto nella finale del 26° RMT), che si inserisce bene in un percorso in cui geometria tridimensionale e bidimensionale si alternano sia per stimolare negli allievi capacità visuo-spaziali così importanti nell'apprendimento della geometria, sia per fornire una pluralità di modelli che, seppure incompleti, permettano di avvicinarsi progressivamente al corretto concetto matematico. L'articolo è in versione bilingue.

PRÉSENTATION DU NUMÉRO

Ce numéro 11 de *La Gazette de Transalpie*, ouvert par un article écrit par Lucia Grugnetti sur l'évolution des liens entre RMT, recherche et formation, est consacré, en particulier, à des études relatives à l'analyse a posteriori de nos problèmes, élaborées par cinq des six groupes de travail thématiques de l'ARMT.
Ces analyses couvrent globalement toutes les catégories.

- Dans l'article ***L'évolution des liens entre RMT, recherche et formation au fil des vingt-trois rencontres internationales de l'ARMT*, Lucia Grugnetti**, après avoir rappelé que les actes des rencontres internationales de l'ARMT et, par la suite, les numéros de la Gazette di Transalpie, constituent le témoignage des liens entre RMT et recherche didactique, qui ont évolué au fil du temps dans des directions différentes, y compris la formation des enseignants, elle résume et analyse des articles sur ce sujet, publiés dans La Gazette di Transalpie.

- **Rubrique Études**
  - Le **Groupe de Géométrie plane « pour les grands »**, avec la contribution du **Groupe « virtuel » Zeroallazero**, présente l'analyse a posteriori du problème « Panneau décoratif » pour les catégories 8, 9, 10, proposé dans la première et unique épreuve du 28e RMT . Cette présentation est organisée en plusieurs parties, selon six rapports de membres des deux Groupes. L'article est en version bilingue.
  - Le **Groupe Numération** présente l'analyse a posteriori du problème « Beaucoup de fruits » dans ses deux versions, I (catégories 3, 4) et II (catégories 5, 6, 7), proposées dans la première et unique épreuve du 28e RMT. Les deux problèmes retenus ont été inclus dans le même article car, à partir des copies analysées, une certaine continuité a été identifiée dans la tâche demandée aux élèves : la version II, introduisant une propriété liée à la somme et au produit, constitue une évolution significative dans l'acquisition des opérations et leurs caractéristiques. L'article est en italien avec quelques insertions synthétiques en français.
  - Le **Groupe Algèbre** présente l'analyse a posteriori du problème des « Tulipes d'Anne » pour les catégories 8, 9, 10, proposé dans la première épreuve du 27e RMT. La pluralité de concepts mathématiques, issus de différents domaines, qui peuvent être utilisés pour la résolution de ce problème présente le double avantage d'offrir aux élèves la possibilité d'appliquer des procédures mathématiques différentes et de fournir aux enseignants un outil utile de diagnostic du niveau d'acquisition de ces concepts par les élèves, comme des procédures qu'ils ont choisies. L'article est en italien avec quelques insertions synthétiques en français.
  - Le **Groupe Fonctions** montre le chemin qui va de l'analyse a posteriori d'un problème (« Intersection » - catégories 7, 8, 9, 10) à la formulation d'un nouvel énoncé (« Parcours de robots sauteurs » - catégories 7, 8, 9, 10). Le changement de contexte permet de tester différentes compétences, géométriques et algébriques, à différents niveaux scolaires. L'article est en version bilingue.
  - Le **Groupe de Géométrie plane** présente l'analyse a posteriori du problème « Assemblage de triangles » dans ses deux versions, I (catégories 5, 6) et II (catégories 7, 8), proposés dans la première et unique épreuve du 28e RMT. L'étude publiée ici est organisée dans l'ordre chronologique des phases de construction, d'analyses et de propositions didactiques du problème et voit l'apport conjoint du Groupe géométrie plane « pour les grands » et du Groupe géométrie plane « pour les petits ». L'article est en version bilingue.
  - Le **Groupe Algèbre** présente également l'analyse a posteriori du problème « Pokémon » pour les catégories 3, 4, 5, proposé dans la deuxième épreuve du 26e RMT. L'article est en italien avec quelques insertions synthétiques en français.
  - Le **Groupe Géométrie de l'Espace** présente l'analyse a posteriori du problème « Les boîtes de Catherine » (pour les catégories 4, 5, 6, proposé pour la finale du 26e RMT). Ce problème s'inscrit dans un cheminement ou l'alternance des géométries tridimensionnelle et bidimensionnelle stimulent d'une part les compétences de visualisation dans l'espace des élèves si importantes dans l'apprentissage de la géométrie et fournissent d'autre part une pluralité de modèles qui, bien qu'incomplets, permettent d'approcher progressivement le concept mathématique correct. L'article est en version bilingue.

EVOLUZIONE DEI LEGAMI FRA RMT, RICERCA E FORMAZIONE NEL CORSO DEI VENTITRÉ INCONTRI INTERNAZIONALI DELL'ARMT

Lucia Grugnetti

1. Introduzione

Gli atti degli incontri internazionali dell'ARMT e, successivamente, i numeri della Gazzetta di Transalpino costituiscono la testimonianza dei legami tra RMT e ricerca didattica, che si sono evoluti nel tempo in diverse direzioni. Come ben noto, sin dai suoi primi passi, il Rally matematico, inizialmente romando, e poi divenuto transalpino, non era stato concepito per rivestire solo le caratteristiche di una gara.
Degli atti relativi ai primi dieci incontri internazionali, l'autrice di questo scritto aveva già presentato una sintesi pubblicata sugli atti del decimo incontro internazionale svoltosi a Parma, nel 2006, poi, ripresa e ampliata fino agli incontri svoltisi rispettivamente a Bard e Brigue è stata pubblicata sul numero **0** della Gazzetta di Transalpino, con il titolo: *Evoluzione dei legami fra RMT e ricerca nel corso degli incontri internazionali del RMT.*
La sintesi si è sviluppata, nel suo complesso sulla seguente falsariga: "I primi passi con e verso la ricerca", "l'intreccio della ricerca si evolve", "Si va verso l'apprendimento passando anche per la formazione", "Sulla valutazione", "Argomentazione e giustificazione", "La ricerca entra nel RMT dalla porta principale", "Lo stato dell'arte sulla problematica RMT-ricerca", "Quali i legami fra ricerca, Intercultura e RMT?".
Per quanto riguarda i successivi incontri, conferenze e presentazioni diverse sono state pubblicate sulla Gazzetta di Transalpino, dal numero **0** al numero **10**[1].

2. Rally matematico transalpino. Uno sguardo costruttivo sugli errori

Dal tredicesimo convegno di Nivelles al quattordicesimo di Besançon[2], che vede la nascita della Gazzetta di Transalpino

L'ARMT ha il piacere di annunciare la nascita di «Gazzetta», nel giorno della 14a Assemblea generale della nostra associazione, a Besançon, il 29 ottobre 2010.
I genitori e il bebè godono di ottima salute e la piccola misura 65 pagine e pesa 9,8 MB.

È il **numero 0** che inaugura il cammino della Gazzetta di Transalpino, che deve farsi carico anche di conferenze e presentazioni ai nostri convegni, le quali, in precedenza, erano pubblicate sugli appositi atti.
Entrambi i convegni appena citati si occupano della problematica degli "errori" in un interessante intreccio tra RMT e ricerca in didattica della matematica.
Gli errori degli allievi e la loro gestione didattica: a che punto siamo oggi? È la domanda che si pone MICHÈLE ARTIGUE, nella sua conferenza di apertura del 14° incontro internazionale. La ricercatrice sottolinea la normalità dell'errore in matematica e il suo ***carattere*** sovente produttivo, ricorda i differenti approcci ai quali si ispirano i nostri attuali lavori del RMT. Allarga poi la sua riflessione ad altri approcci cognitivi o antropologici.
L'errore, che sia individuale o collettivo, è un fenomeno ordinario in matematica, contrariamente alla visione di questa disciplina, esempio di rigore e di esattezza, come è intesa nella cultura comune. E, come mostra bene la storia della matematica, esso può essere sorprendentemente produttivo. Una pratica matematica assoggettata ai canoni di rigore della disciplina, anche quando si tratta di una pratica esperta, non mette al riparo dall'errore.
Di *Errori, ostacoli, schemi e concetti* scrive MICHEL HENRY, nel venire incontro, in particolare, agli interessi di tipo scientifico dell'ARMT, impegnata fra l'altro nella problematica dello statuto dell'errore e la sua analisi didattica, nei vari tipi di ostacoli: epistemologici, didattici, psicologici, ontogenetici, e ancora nei concetti, schemi e campi concettuali. Dal "diritto all'errore" concesso agli allievi, si passa gradualmente alla ricerca di situazioni

---

[1] Sul sito www.armt.eu figurano tutti i numeri, fin qui pubblicati, de La Gazzetta di Transalpino.

[2] Sul sito www.armtint.eu. Alla voce Documentazione e poi Documenti dei convegni, figurano i relativi libretti a partire a quello relativo al convegno di Besançon.

in cui gli errori sarebbero rivelatori di una conoscenza in via di costituzione, necessari all'apprendimento. In altri termini, gli errori degli allievi “ci interessano” in quanto essi sono vantaggiosi per loro.

Il **numero 1** della Gazzetta riprende il testimone dal **numero 0** e presenta due articoli che riportano le comunicazioni riguardanti i risultati dei lavori di due dei sei gruppi tematici dell’ARMT, sulla costruzione di concetti e su errori, difficoltà ed ostacoli che gli allievi incontrano a proposito di tali concetti.

Bernard Anselmo, Clara Bisso e Lucia Grugnetti, in *Il rettangolo…non così evidente*, a nome del gruppo geometria piana, dopo aver presentato alcuni risultati relativi a problematiche connesse al concetto di area, di cui il gruppo si è occupato da tempo, introduce i lettori alla problematica delle difficoltà incontrate dagli allievi impegnati nel RMT, nella costruzione del concetto di rettangolo e, in particolare, della necessità dell’angolo retto.

L’ampia ricerca sul concetto di area, sviluppata negli anni dal gruppo geometria piana, porta a pensare che la questione della consapevolezza che sia necessaria un’unità di misura comune e il conflitto perimetro/area costituiscano ostacoli di tipo ontogenetico, ma anche di tipo didattico.

Di tipo ontogenetico perché è possibile osservare come i risultati, globalmente, migliorino al variare della categoria (quindi dell’età degli allievi).

Di tipo didattico, perché in certi casi, anche all’aumentare dell’età, l’ostacolo permane e probabilmente non c’è stata la necessaria attenzione didattica ad ostacoli di questo tipo.

Rilevare ostacoli talvolta sottovalutati a livello scolare, può costituire un importante contributo del RMT alla didattica.

Da parte loro, Annie Henry, Michel Henry e Angela Rizza propongono una riflessione su *funzioni per risolvere problemi?* Il gruppo funzioni, sulla base di analisi di anni precedenti, ha svolto alcune sperimentazioni nel corso delle quali ha osservato gruppi di allievi alle prese con determinati problemi ed, inoltre, ha esaminato gli elaborati relativi a problemi del 18° RMT. Il gruppo ha constatato che perlopiù gli allievi, per risolvere i problemi, non utilizzano in maniera esplicita lo strumento funzione almeno fino alla categoria 9. Si è pertanto chiesto, se, invertendo il senso della domanda, titolo dell’articolo, i problemi del RMT potessero avere un impatto (sugli insegnanti, sugli allievi?) sull’apprendimento della nozione di funzione. Gli errori che si osservano negli elaborati riguardano solo marginalmente lo strumento funzione nel contesto dei problemi del RMT, semplicemente perché gli allievi non lo utilizzano! Gli errori più frequenti rilevati in questi problemi, in cui gli autori speravano di vedere l’applicazione di funzioni, sono invece essenzialmente dovuti a:

- una cattiva interpretazione dell’enunciato: lettura troppo rapida o superficiale, che trascura alcuni dati in frasi lunghe dove invece ogni parola è importante?
- notevoli difficoltà nelle conversioni di unità di misura.
- soprattutto, la mancata padronanza del calcolo algebrico.

L’indagine conduce all’ostacolo (nel senso tipicamente di Gaston Bachelard, quando una vecchia conoscenza si oppone all’assimilazione di una nuova conoscenza all’interno di una rete concettuale solidamente installata nelle rappresentazioni mentali e la didattica mira a sviluppare strategie d’insegnamento adeguate) che qui riguarda l’utilizzo di altri strumenti piuttosto che una rappresentazione funzionale, nonostante qualche premessa di una relazione oggetto-immagine.

Anche nei **numeri 2** e **3** della Gazzetta si trovano degli articoli che si occupano specificatamente di ostacoli ed errori.

Nel **numero 2**:

- *Approccio alla nozione di probabilità negli allievi dai 10 ai 15 anni* di Michel Henry e François Jaquet. L’articolo riporta l’analisi a posteriori di un problema del RMT, *I barattoli di caramelle* e di due sue varianti, dove gli allievi devono fare una scelta di natura probabilistica. Nei tre casi è stato possibile constatare che bisogna aspettare i 14, 15 anni per veder apparire il concetto adeguato di rapporto (di probabilità), mentre prima di quell’età le procedure scelte si rifanno in linea di massima agli scarti tra le grandezze in gioco. Un quarto problema, ~~di~~ ricetta di cucina, nell’ambito della proporzionalità, evidenzia il medesimo conflitto, alla stessa età, tra le procedure additive (scarti) e quelle moltiplicative (rapporti).
- *Difficoltà nel confronto di lunghezze* di Carla Crociani, Lucia Doretti e Lucia Grugnetti. Le autrici si occupano qui in particolare di un ostacolo legato alla conservazione di lunghezze e angoli in una griglia quadrettata. Le difficoltà all’origine di risposte errate o di procedure inadeguate relative ad un problema del RMT non vengono facilmente alla luce: un primo problema rivela un errore frequente che si ritrova poi in un secondo problema; un’ipotesi sulle origini dell’errore permette di elaborare un terzo problema … e così, via via, la difficoltà viene identificata e analizzata con sempre maggior precisione, talvolta in un lungo periodo di tempo.

Nel **numero 3**:
- *La visualizzazione spaziale dimenticata*, di ROBERTO BATTISTI-che, a nome del gruppo Geometria dello spazio, presenta un'analisi approfondita di elaborati degli allievi relativi ad un nutrito gruppo di problemi incentrati sulla geometria 3D, al fine di formulare alcune ipotesi sugli ostacoli e le difficoltà più significativi.
- *Il numero si incontra molto presto... ma è una conquista difficile*, CARLA CROCIANI e RITA SPATOLONI, a nome del Gruppo numerazione, presentano l'attività di ricerca e sperimentazione, tramite problemi del RMT, su problematiche legate alle difficoltà che gli allievi incontrano nell'ampio ambito della numerazione.
- *Equazioni come strumento e come oggetto: analisi di difficoltà ed errori*, di MARIA FELICIA ANDRIANI, LUCIA DORETTI, DANIELA MEDICI, M. GABRIELLA RINALDI e LUCIA SALOMONE, a nome del gruppo Equazioni, è l'articolo che affronta alcuni aspetti della difficile problematica dell'insegnamento-apprendimento dell'algebra. In particolare, la ricerca condotta dal gruppo evidenzia come sia difficile per gli allievi ricorrere alla messa in equazione anche laddove tale via sia la più "economica" per la risoluzione di un problema.

3. Quali problemi per quali saperi? Le concezioni didattiche del RMT

I convegni internazionali dal quindicesimo al diciassettesimo sono stati quelli svoltisi rispettivamente a Barletta, Villars-les-Dombes e in Lussemburgo.

Nei **numeri 3**, **4** e **5** della Gazzetta sono stati pubblicati articoli di attività dei gruppi di lavoro e presentazioni relative a detti convegni. In particolare nel **numero 3** è stato pubblicato l'articolo *Uso dei problemi del RMT in classe*, nel quale GRAZIELLA TELATIN presenta l'attività sperimentale di un gruppo di ricerca-azione che, pur non partecipando con proprie classi al RMT, utilizza in maniera interessante alcuni problemi del RMT stesso. Viene in particolare riportata l'analisi di due esempi scelti tra i più significativi, con l'intento di evidenziare attraverso le considerazioni degli insegnanti e le risposte degli alunni, le opportunità didattiche che tali proposte offrono.
Nel **numero 4** troviamo, in merito alle problematiche in oggetto, due articoli.
Il primo, *I problemi del RMT: ampliamento progressivo delle loro finalità* a cura di LUCIA GRUGNETTI e FRANÇOIS JAQUET (presentato nel Libretto per il congressista dell'incontro in Lussemburgo nel 2013) ha come scopo quello di cercare di rispondere alla questione relativa all'utilità dei problemi del RMT, dalla sua origine fino ai tempi attuali a partire da alcuni capisaldi quali: "I problemi per… il piacere di risolverli, e qualcosa di più!", "Problemi per capire… meglio come gli allievi li risolvono", "Problemi per… il RMT e le pratiche di classe", "Problemi per… individuare le procedure e gli ostacoli, Problemi per … saperne di più sulla costruzione dei saperi", "La Banca di problemi del RMT", "Problemi per … un'utilizzazione didattica".
Nel secondo, dal titolo *Analisi a priori, analisi a posteriori, oltre il percorso circolare*, l'autrice LUCIA GRUGNETTI sviluppa alcuni aspetti dell'omonima relazione presentata al 17° incontro internazionale dell'ARMT svoltosi in Lussemburgo nell'ottobre 2013. La riflessione sull'analisi a priori e a posteriori dei problemi del RMT conduce ad un percorso circolare che talvolta diventa un percorso a spirale che da un problema porta a nuovi problemi omologhi, ma calibrati meglio ai saperi degli allievi delle varie età.
La prima parte è dedicata ad alcune riflessioni scaturite dal confronto fra l'analisi a priori e l'analisi a posteriori del problema *RMT 2005*, sulla nozione di unità d'area. Riflessioni che hanno portato il *Gruppo di geometria* piana dell'ARMT alla messa a punto di una serie di nuovi enunciati che hanno permesso di confermare le prime osservazioni a posteriori e di calibrare meglio le nuove analisi a priori.
La seconda parte sviluppa una riflessione sulla differenza tra "spiegazione" e "giustificazione" quando viene richiesto "Spiegate la vostra risposta" o "Giustificate la vostra risposta", come appare nella maggior parte dei nostri enunciati.
Nel **numero 5** della Gazzetta figura l'articolo *Un esempio significativo di percorso circolare: "Bignè al cioccolato"*, nel quale MARIA FELICIA ANDRIANI, LUCIA DORETTI e MARIA GABRIELLA RINALDI presentano il loro contributo (in occasione del 17° incontro internazionale dell'ARMT a Luxembourg Ville), alla Tavola rotonda organizzata per illustrare alcuni aspetti legati al tema dell'incontro: "Analisi a priori, analisi a posteriori. Un percorso circolare". In particolare le autrici affrontano la problematica del *ricorso o meno a procedure risolutive di tipo algebrico o pre-algebrico nella risoluzione del problema Bigné al cioccolato.* In effetti, un problema per quanto possa essere ritenuto a priori un "buon problema" può, come in questo caso, presentare una serie di difficoltà che ne ostacolano l'appropriazione alla maggior parte degli allievi: ancora una volta, ciò che per l'adulto che propone il problema può sembrare chiaro non è detto lo sia per gli allievi a cui ci si rivolge!

4. I problemi del RMT e la formazione degli insegnanti

Nel **numero 4** della Gazzetta, CATHERINE HOUDEMENT presenta, in forma di articolo, la conferenza di apertura, dal titolo *RMT, punto d'incontro tra insegnanti e risoluzione di problemi*, del **diciottesimo convegno internazionale dell'ARMT del 2014 svoltosi a Siena**.
Nella parte introduttiva l'autrice si sofferma sulle risorse che offre il RMT, sulla sua ricchezza, distinguendo una dimensione privata del RMT e una dimensione pubblica. Nella seconda parte si interessa ai processi in gioco nella risoluzione di problemi e propone un lavoro organizzativo per l'insegnamento dei problemi di aritmetica; utilizza questa organizzazione per misurare il contributo del RMT alla risoluzione di problemi. Nell'ultima parte propone strumenti didattici che riguardano sia la costruzione ~~e~~ sia l'analisi dei problemi del RMT e mostra la loro importanza per la formazione degli insegnanti.
Il RMT propone problemi complessi o atipici a priori. Esso permette di individuare delle insufficienze in problemi di base. L'insegnante può così lavorare nuovamente con problemi di base che non sono acquisiti. Il dispositivo collettivo RMT partecipa alla costruzione di un atteggiamento positivo degli allievi di fronte ai problemi. Il RMT permette dunque di mettere gli allievi di fronte a due dimensioni della risoluzione di problemi: costruzione/utilizzazione di conoscenze e inventive strategiche.
Sicuramente, sottolinea l'autrice, i benefici del rally saranno decuplicati se l'insegnante si impegna nella sua pratica ordinaria a far vivere quei problemi ai suoi allievi con la preoccupazione di farli "riuscire" da soli.

Nel **numero 5** della Gazzetta, troviamo un articolo di MICHEL HENRY e BERNARD ANSELMO, dal titolo *I problemi del Rally Matematico Transalpino, una risorsa per la formazione degli insegnanti*, nel quale gli autori descrivono le fasi principali di un loro atelier tenuto ad un incontro della COPIRELEM nel mese di giugno 2015. In particolare sull'uso di problemi del RMT per la formazione degli insegnanti.
L'atelier ha permesso di presentare un dispositivo di formazione degli insegnanti costruito sulla base di un problema del RMT e di mostrarne le potenzialità.
Anche altri dispositivi utilizzano problemi del RMT: nella formazione iniziale, tali dispositivi consistono ad esempio nel discutere le concezioni degli studenti nel loro rapporto con la matematica attraverso i problemi del rally. Nel caso della formazione continua i problemi del rally possono portare gli insegnanti a riflettere sull'apprendimento tramite la risoluzione di problemi o il lavoro degli allievi in collaborazione.
Da tempo i formatori sanno che possono trovare preziosi suggerimenti nei rally matematici. Oggi dispongono di un valido mezzo per accedervi: la banca di problemi del RMT.

5. Imparare insieme nel risolvere problemi, è per tutti

Il diciannovesimo e il ventesimo convegno internazionale si sono svolti rispettivamente a Sedilo e a Le Locle[3] e hanno preso in considerazione la risoluzione di problemi come modalità per un apprendimento di tipo collaborativo, aperto a tutti.
Nel **numero 7** della Gazzetta, troviamo i due articoli relativi alle conferenze plenarie tenute al convegno di Le Locle.
Nell'articolo *La risoluzione di problemi, un motore per sviluppare la creatività*, MICHEL CRITON ci ricorda che l'attività di risoluzione di problemi o di enigmi logico-matematici esiste dalla più lontana antichità, indipendentemente da qualunque sistema scolastico. Questo tipo di attività era generalmente riservato a una minoranza colta. Questi problemi, però, oggi fanno parte di una "cultura logico-matematica comune". L'autore si propone, in particolare, di mostrare che tale tipo di "enigmi", che siano classici o no, possono essere reinvestiti a scuola per dinamizzare la motivazione degli allievi, stimolare la loro creatività e la loro inventiva.

Da parte sua, FRANÇOIS JAQUET, nell''articolo dal titolo *Condizioni per la risoluzione di problemi*, sottolinea come l'esame degli elaborati degli allievi ci fornisca indici preziosi sulle cause della buona riuscita o dell'insuccesso nell'attività di risoluzione di problemi e sulle sue potenzialità per l'elaborazione di una relazione sana tra l'individuo e la matematica. Tale analisi, che non si limita alle risposte date e alle spiegazioni che le

---

[3] Il convegno di Le Locle ha vissuto anche la seconda finale internazionale per le classi finaliste, di categoria 4, delle proprie sezioni e la Gazzetta numero 6, che è un numero speciale, è dedicato a vari aspetti di tale finale.

accompagnano, apre la strada a riflessioni sulle condizioni necessarie perché l'attività di risoluzione di problemi possa essere proseguita al di là della gara, in un lavoro in classe, a tutti i livelli e al di là della stessa scolarità.
Come è noto, il rigetto e la paura della matematica, che prova una parte cospicua di adulti e di allievi, si sviluppano a scuola. E' dunque a scuola che bisogna agire per mettere rimedio a questa immagine negativa della matematica.
La nostra esperienza del RMT ci mostra che ai nostri allievi, e anche ai loro genitori, piace risolvere problemi di matematica, in condizioni particolarmente favorevoli.
Le analisi a posteriori delle produzioni degli allievi ci mostrano anche che la risoluzione di problemi permette una valutazione differenziata quando riusciamo a capire ciò che l'allievo racconta su come trova o non trova la soluzione.

6. La lingua nei problemi del RMT

Di questioni linguistiche nei problemi del RMT, si è occupato, in particolare, **il ventunesimo convegno internazionale che si è svolto a Charleroi** e il **numero 8** della Gazzetta pubblica gli articoli relativi alle due conferenze generali e un altro articolo sulla medesima tematica.
Nell'articolo *Scrivo, dunque sono anche in matematica nel contesto dei problemi del RMT,* LUCIA GRUGNETTI E FRANÇOIS JAQUET mettono l'accento sull'intreccio tra i problemi del RMT e la lingua naturale ricordando che tale intreccio si sviluppa nelle diverse fasi dell'attività di redazione degli enunciati, prima, e poi, di risoluzione fino all'ottemperanza della richiesta, fondamentale, di spiegare il processo risolutivo. Analizzano, in particolare, da un lato, la "correlazione" fra gli enunciati dei problemi con "conteggio a ritroso" e le spiegazioni degli allievi, in merito ad aspetti linguistici, non disgiunti, per forza di cose, da aspetti logici e, dall'altro, un problema di tipo algebrico che ha prodotto una grande ricchezza di spunti linguistici nelle spiegazioni degli allievi.
Gli autori, nelle conclusioni, precisano che, nell'interessarsi alla maniera con la quale ci rivolgiamo agli allievi e alla maniera nella quale questi ultimi esprimono il loro pensiero, scopriamo e riscopriamo la diversità dei linguaggi degli uni e degli altri. L'elaborazione e l'analisi a posteriori dei problemi del RMT costituiscono uno strumento privilegiato per la messa in evidenza della diversità di tali linguaggi; gli esempi dei quattro problemi analizzati nell'articolo lo testimoniano così come lo testimoniano anche tutte le osservazioni e riflessioni condotte sugli altri problemi nel dispositivo della concezione delle analisi del RMT.

VINCENT DEGAUQUIER, nel suo articolo dal titolo *La logica come strumento di analisi per la risoluzione di problemi*, si pone come obiettivo di puntualizzare due constatazioni. La primo è che la maggior parte delle frasi in lingua naturale, se non tutte, sono ambigue rispetto alla loro struttura logica. La seconda è che questa ambiguità può influenzare la risoluzione dei problemi matematici. A tal fine, esamina la lingua naturale alla luce del linguaggio della logica contemporanea. Propone inoltre un'analisi logica di frasi in lingua naturale alcune delle quali sono tratte da un problema del Rally Matematico Transalpino.
In generale, l'ambiguità logica delle lingue naturali sembra costituire una scommessa didattica piuttosto che una carenza a cui si dovrebbe porre rimedio. In una tale prospettiva, emerge allora che l'identificazione di strutture logiche adeguate alla risoluzione di un problema è un obiettivo dell'apprendimento e che qualsiasi risoluzione di un problema implica un margine irriducibile di interpretazione soggetto a discussione.

CARLA CROCIANI e RITA SPATOLONI in *Linguaggio e comunicazione: ri-partiamo dall'analisi a posteriori*, presentano il ricco lavoro svolto con il gruppo "Numerazione" a partire dall'analisi a posteriori di due problemi del 25° RMT, alla luce degli aspetti linguistici. La scelta è stata determinata da motivazioni diverse: l'appartenenza all'ambito dell'aritmetica e della numerazione e i risultati, in generale, poco soddisfacenti. Le autrici sottolineano come l'analisi a posteriori realizzata sui due problemi scelti abbia fornito numerosi spunti di riflessione e discussione.

Nella risoluzione dei problemi del RMT l'allievo svolge un duplice compito, quello di capire ciò che è presentato nel testo del problema (ed eventualmente di spiegarlo ai propri compagni che non l'hanno ben chiaro) e poi quello di trovare una strategia risolutiva da spiegare, da condividere, talvolta da modificare o da difendere. In tutti questi momenti che lo vedono protagonista, il linguaggio, come strumento di comunicazione, è essenziale. È proprio la richiesta di spiegare il procedimento seguito nella risoluzione di un problema che spinge gli allievi a migliorare la propria comunicatività.

Da questa considerazione e dall'analisi a posteriori degli elaborati è scaturita la nostra riflessione sulla comunicazione: verbale (orale o scritta), grafica (iconica o simbolica) ma anche gestuale (mimica, drammatica) …. Gli allievi devono familiarizzare con tutte queste modalità per scoprire le potenzialità che ciascuna di esse può avere in relazione al contesto, all'oggetto dell'argomento da comunicare e al "ricevente la propria comunicazione", in modo da comprendere ed essere compresi.

7. La Banca di problemi dell'ARMT, "impresa cooperativa"

In Val D'Aosta, a Pont-Saint-Martin, si è svolto il ventiduesimo convegno internazionale, incentrato, in particolare sulla Banca di problemi.

Il **numero 9** della Gazzetta, ne riporta gli interventi dei due conferenzieri, François Jaquet e Luc Olivier Pochon, nonché un articolo di Florence Falguères e Christine Le Moal sulla medesima tematica.

L'articolo, *Problemi di matematica su Internet: l'offerta, la modalità e l'utilizzazione* di LUC OLIVIER POCHON, ha lo scopo precipuo di far progredire la riflessione sulla Banca di problemi del RMT al fine di permettere un suo proficuo utilizzo. Tali riflessioni sono precedute da un'analisi di diversi siti Internet che riportano problemi di matematica.

La banca di problemi dell'ARMT fa parte di un insieme importante di risorse di problemi di tutti i tipi e di tutte le provenienze disponibili su Internet. La nostra banca di problemi possiede la particolarità di proporre le analisi di compiti. Questa caratteristica ha portato a sviluppare una classificazione dei problemi per "compiti", termine che si riferisce a compiti propriamente detti, ad azioni e operazioni che possono intervenire nell'attività di risoluzione. La banca è basata principalmente sulle attività didattiche trasmesse dai gruppi di lavoro e di riflessione dell'ARMT.

FRANÇOIS JAQUET, nel suo articolo dal titolo *Elaborazione di un percorso di apprendimento a partire da problemi della banca*, propone una visita guidata della Banca di problemi rivolta a un insegnante che prova a organizzare un percorso di apprendimento per i propri allievi a proposito del rettangolo, della sua area e di tutte le nozioni che ne discendono. Vi si trova qualche considerazione introduttiva sulla risoluzione di problemi, una modalità di entrata nella banca, tramite gli "ambiti" e le "famiglie di compiti", l'esame di qualcuna delle sue schede e le loro diverse rubriche.

La nostra banca è un'opera collettiva, viva e in evoluzione. È il riflesso di coloro che contribuiscono alla sua elaborazione e la utilizzano: gli animatori delle nostre sezioni, tutti coloro i quali leggono gli elaborati degli allievi e partecipano all'attribuzione dei punteggi, gli autori e revisori dei problemi, i gruppi permanenti di lavoro, tutti coloro che si lanciano nelle analisi a posteriori, tutti coloro che utilizzano i nostri problemi in classe e propongono nuovi commenti o risultati.

FLORENCE FALGUÈRES e CHRISTINE LE MOAL in *Mettere a frutto le risorse didattiche dell'ARMT in classe e nella formazione* presentano una proposta sulla riorganizzazione dei nostri spazi Internet di lavoro a partire dall'idea di un nuovo spazio, accessibile agli insegnanti e ai formatori.

Un insegnante, per costruire situazioni di apprendimento, deve disporre di "problemi ben scelti" che permetteranno agli allievi di costruire un concetto. Deve conoscere teorie che diano un senso alle sue scelte e che l'accompagneranno in tutte le fasi del dispositivo di apprendimento. Deve inoltre poter creare un ambiente propizio a tale apprendimento, cosa che necessita una buona conoscenza del problema scelto e una buona conoscenza dei propri allievi, condizioni che solo una pratica regolare può permettergli di acquisire.

In questo **numero 9** della Gazzetta, FRANÇOIS JAQUET riaccende in maniera decisa l'attenzione sui rapporti tra RMT e ricerca, che peraltro permeano il lungo cammino del RMT, **nel suo editoriale** che mi sembra opportuno riportare qui, nella sua interezza:

A partire dalla sua creazione, il RMT ha orientato il suo campo d'azione verso gli allievi, gli insegnanti e anche, in maniera più generale, verso "l'insegnamento della matematica e la ricerca in didattica". Il nostro statuto e i nostri testi ufficiali ne fanno fede. Il tema del nostro primo incontro internazionale, dell'ottobre 1997, non poteva essere più esplicito: "Gli apporti del RMT alla didattica della matematica".

E allora, mentre siamo immersi fino al collo negli imprescindibili compiti di gestione e di conduzione della nostra associazione, di elaborazione e analisi di problemi, di raggruppamenti di tutti i dati raccolti, non è male tirare un po' il fiato e porsi delle domande esistenziali sulle imprese dinamiche, sul mantenere la rotta, sulle nostre finalità, sulla nostra evoluzione, …

Guy Brousseau, nel suo discorso pronunciato in merito al titolo di dottore honoris causa ricevuto all'Università di Montréal, nel 1997, definiva la didattica della matematica come la scienza delle condizioni specifiche della diffusione delle conoscenze matematiche e poi poneva tre domande a tale proposito: chi può studiarla? A chi è indirizzata tale scienza? Chi l'accetta?

La sua risposta alla prima domanda è che i lavori di psicologi, linguisti, pedagogisti, sociologi, ecc, non permettono agli insegnanti di farne buon uso e che è ai matematici che spetta la parte della didattica della matematica non presa in considerazione nelle altre discipline.
Alla seconda domanda egli risponde che "questa scienza" si indirizza ai "matematici", compresi i "matematici di scuola dei vari livelli scolastici o dell'università".
A proposito della terza domanda parla di distinzioni "tra uno psicologo che si interessa alla didattica e un didattico psicologo, tra un matematico didattico e un didattico che si interessa alla matematica" e osserva che "per ognuno di essi è difficile presentare all'altro l'oggetto del proprio lavoro e che, per il momento, questa terra dà difficilmente la cittadinanza ai nuovi arrivati". Conclude tuttavia citando le facoltà per la formazione, come sensibili ai bisogni dell'insegnamento. "Si tratta forse della buona strada e credo che saranno ricompensate per la loro perseveranza".
In questo discorso, che data da più di vent'anni e pronunciato in un contesto "accademico", non c'è molto posto per persone come noi che pensiamo di operare in un campo della didattica della matematica in quanto insegnanti.
Senza voler essere pretenziosi, possiamo affermare che l'approccio del RMT è scientifico: elaborare analisi a priori, osservare e conservare i risultati dei problemi, analizzare la maniera in cui gli allievi li hanno risolti, raggruppare procedure, ostacoli ed errori, designarli, comunicarli con le nostre pubblicazioni e con la nostra banca di problemi, discutere, tenerne conto per sperimentazioni ulteriori. Tutte queste caratteristiche ci situano in una disciplina scientifica: la didattica della matematica.
La nostra risposta alla prima domanda ci sembra evidente: questa scienza è anche la nostra, animatori del RMT, la studiamo e vi partecipiamo attivamente da più di 25 anni e vi apportiamo i nostri risultati.
Per la seconda domanda la risposta è già contenuta nei nostri testi: ci indirizziamo a coloro che hanno bisogno dei dati che continuiamo a raccogliere e che mettiamo a disposizione: la nostra collettività del RMT, gli insegnanti che partecipano in modo attivo, ma anche coloro che leggono con interesse le nostre analisi dei problemi, sia per quanto riguarda la descrizione di procedure, errori e ostacoli, sia per quanto riguarda le proposte di utilizzazioni didattiche che possiamo redigere dopo numerose sperimentazioni ripetute.
Le risposte alla terza domanda sull'accettazione delle nostre riflessioni sono date dalle testimonianze di interesse che cominciano a confluire: quelle dei formatori o degli insegnanti che osano innovare facendo risolvere i nostri problemi dai loro allievi.
Il nostro campo d'azione non è quello della riflessione teorica, è quello dell'osservazione minuziosa di ciò che passa nella testa dell'allievo quando risolve un problema. Osiamo rivendicarlo come ambito importante della didattica della matematica e affermiamo con convinzione che continueremo la nostra azione precisando che la nostra porta è aperta a tutti coloro che vi si interessino.

8. RMT e il punto di vista dell'allievo

Il ventitreesimo incontro internazionale che si è tenuto ad Alghero, ha messo più che mai l'allievo al centro delle preoccupazioni dell'ARMT e il **numero 10** della Gazzetta ne dà un'importante testimonianza, tenendo conto anche del legame forte tra RMT e ricerca, come ben ricordato nel paragrafo precedente.
Le conferenze generali, alle quali corrispondono due articoli di questo numero, sono state tenute da due ben noti ricercatori in didattica della matematica, nelle persone di Raymond Duval e Ferdinando Arzarello.
L'articolo *Il primo passo nell'apprendimento della geometria: "vedere" le "figure"* di RAYMOND DUVAL, ha lo scopo precipuo di chiarire le ragioni secondo le quali i giovani allievi non vedono le "figure" in modalità matematica in quanto per loro sono piuttosto la percezione e le misure fatte concretamente che determinano ciò che le "figure" rappresentano.
Il termine FIGURA è ben noto a tutti gli insegnanti di Matematica. Esso non indica il disegno tracciato su un supporto di carta o che appare sullo schermo, bensì le proprietà geometriche che ci interessano e che il disegno rappresenta, cioè il disegno codificato. Tale opposizione è sviluppata con i programmi di costruzione di figure, e in particolare con Cabri géomètre (Laborde et Capponi, 1993) e intende sottolineare la maniera matematica di vedere e di utilizzare le figure "geometriche", cioè le figure costruite con degli strumenti, le primitive dello strumento utilizzato nel produrre la traccia di una proprietà geometrica. *Vedere, significa guardare una figura costruita con strumenti, con le lenti delle ipotesi date.*
Il verbo VEDERE designa la modalità percettiva che, cognitivamente, è la più ricca e la più completa. Per ciò che riguarda le rappresentazioni visive bidimensionali (schizzi, bozze, schemi, mappe, grafici, immagini, foto, etc.) *vedere significa riconoscere al primo colpo d'occhio l'oggetto che una rappresentazione bidimensionale mostra.*
Questo riconoscimento immediato discende dal fatto secondo cui il contorno della forma riconosciuta assomiglia

o riproduce quello dell'oggetto materiale che un disegno, un'immagine o una foto, mostrano. E il termine impiegato per designare la forma tracciata è il nome dell'oggetto disegnato più o meno schematicamente. In altre parole, non c'è bisogno di mettere degli occhiali concettuali per riconoscere ciò che uno schizzo, uno schema, una mappa, o un'immagine, mostrano. Questa maniera di vedere è fondamentalmente iconica. È la maniera spontanea, universale di guardare e di utilizzare le rappresentazioni bidimensionali in tutti gli ambiti della conoscenza.
La maniera matematica di vedere le figure costruite strumentalmente, anche le più elementari, è agli antipodi della maniera spontanea e iconica di vedere le rappresentazioni bidimensionali. Per superare lo scarto considerevole che le separa, non è sufficiente mettere degli occhiali concettuali, in quanto qui, tali occhiali richiedono l'acquisizione delle proprietà geometriche di base oltre alla coordinazione tra i termini geometrici e ciò che la figura consente di vedere. Gli allievi della primaria e della secondaria di primo grado, come potrebbero sospettare, l'esistenza di questo scarto e fare autonomamente i cambiamenti di sguardo necessario per capire la geometria e poter risolvere problemi?

Ferdinando Arzarello, nel suo articolo dal titolo *Con gli studenti e gli insegnanti tra numeri, formule e problemi*, a partire dalla constatazione che la transizione dall'aritmetica all'algebra è irta di difficoltà, evidenzia lacune e salti sia di natura epistemologica sia di natura didattica, conseguenze del cambio di prospettiva e dei nuovi strumenti di rappresentazione propri della disciplina e chiarisce come la scuola secondaria di primo grado sia decisiva per gestire questa transizione in modo opportuno.
Sono descritti i processi che portano al pensiero algebrico e alle corrispondenti produzioni degli allievi come maturazione di un meta-discorso sull'aritmetica. Vengono evidenziate così le forme di continuità (cognitiva e didattica) cui bisogna mirare in classe per stimolare e supportare il passaggio dall'Aritmetica all'Algebra. L'articolo illustra quindi gli strumenti teorici e operativi per l'analisi discorsiva delle produzioni scritte (ma anche orali) degli studenti, esemplificando con riferimento ai lavori dei partecipanti al *Rally Matematico Transalpino*. L'obiettivo è di fornire alle équipe RMT un nuovo strumento di analisi, sia teorica sia operativa.

In questo **numero 10** della Gazzetta, figurano anche altri due articoli sulla tematica del convegno, connessi, in qualche modo, rispettivamente alle due conferenze.
Clara Bisso e François Jaquet nell'articolo dal titolo *A proposito di perimetro* presentano e analizzano un problema del RMT che porta i giovani allievi a confrontarsi con il concetto di perimetro di quadrati e rettangoli e di tale problema vengono tracciate la storia e l'origine, derivanti dalle pratiche permanenti del RMT sull'elaborazione e l'analisi dei problemi. Quindi lo si descrive attraverso il suo enunciato, la sua analisi a priori e i risultati ottenuti da circa 2 500 classi che l'hanno risolto o hanno tentato di risolverlo durante la seconda prova del 27° RMT, nel 2019.
Viene illustrata un'analisi a posteriori fondata su un esame accurato di diverse centinaia di elaborati e su una prima lettura di altri mille. Emergono diverse procedure risolutive, alcune delle quali conducono alla cosiddetta risposta "corretta" e altre a risposte diverse, caratteristiche di una costruzione ancora incompiuta del concetto di perimetro. Queste osservazioni ~~i~~invitano a cercare di comprendere meglio gli ostacoli incontrati dagli allievi, riguardo al loro modo di "vedere" le figure e di operare sulle grandezze percepite, e ci consentono un'analisi più dettagliata del loro compito di risoluzione.

L'articolo *Riflessioni sullo sviluppo del pensiero algebrico negli allievi a partire dall'analisi a posteriori di un problema,* di Maria Felicia Andriani, Lucia Doretti e Lucia Salomone, prende spunto dal Laboratorio di Algebra, organizzato dalle autrici in occasione del Primo corso di formazione dell'ARMT Siena e analizza nei dettagli un gran numero di elaborati relativi a un problema del RMT, che rappresenta un esempio su cui far lavorare gli allievi nella prospettiva di un passaggio dall'aritmetica all'algebra.
Dall'esame delle diverse procedure, dal modo di rappresentarle e di spiegare i ragionamenti, le autrici hanno avanzato, in alcuni casi, ipotesi sul livello raggiunto dagli allievi riguardo all'elaborazione del discorso algebrico. A tale scopo fanno riferimento a quanto riportato nell'articolo di Ferdinando Arzarello appena citato, dove l'autore, riprendendo la posizione di A. Sfard, definisce l*'algebra elementare* come "una sottocategoria del discorso matematico che gli individui sviluppano riflettendo su relazioni e processi aritmetici" (più semplicemente, si può considerare "un meta-discorso sull'aritmetica").
Gli articoli di questo **numero 10** della Gazzetta costituiscono una ricca sintesi degli intrecci innegabili tra RMT e ricerca didattica, con applicazioni anche alla pratica didattica, che passa attraverso la formazione.

Si potrebbe per ora concludere con il titolo del futuro ventiquattresimo convegno internazionale:

Elaborare un problema del Rally Matematico Transalpino: un compito complesso.

L'ÉVOLUTION DES LIENS ENTRE RMT, RECHERCHE ET FORMATION AU FIL DES VINGT-TROIS RENCONTRES INTERNATIONALES DE L'ARMT

Lucia Grugnetti

1. Introduction

Les actes des rencontres internationales de l'ARMT et, par la suite, les numéros de la Gazette de Transalpie, témoignent des liens entre RMT et recherche pédagogique, qui ont évolué au fil du temps dans des directions différentes. Comme on le sait, depuis ses premiers pas, le Rallye mathématique, d'abord romand, puis devenant transalpin, n'a pas été conçu pour couvrir uniquement les caractéristiques d'un concours.
Parmi les actes relatifs aux dix premières rencontres internationales, l'auteure de cet article avait déjà présenté un résumé publié dans les actes de la dixième rencontre internationale tenue à Parme, en 2006, puis repris et élargi, publié dans le **numéro 0** de la Gazette de Transalpie, jusqu'aux rencontres tenues respectivement à Bard et Brigue avec le titre : *Évolution des liens entre RMT et recherche lors des rencontres internationales du RMT.*
La synthèse était développée, dans son ensemble, selon les axes suivants : « Les premiers pas avec et vers la recherche », « l'entrelacement du RMT avec la recherche évolue », « On va vers l'apprentissage passant aussi par la formation », « Sur l'évaluation », « Argumentation et justification », « La recherche entre dans le RMT par la porte principale », « L'état de l'art sur la problématique RMT-recherche », « Quels sont les liens entre recherche, interculture et RMT ? ».
En ce qui concerne les rencontres suivantes, conférences et présentations ont été publiées dans la Gazette de Transalpie, du **numéro 0** au **numéro 10**[1]

2. Rallye Mathématique Transalpin. Un regard constructif sur les erreurs

De la treizième rencontre à Nivelles à la quatorzième à Besançon[2], qui voit la naissance de la Gazette de Transalpie

L'ARMT a le plaisir d'annoncer la naissance de « Gazette », le jour de la 14e Assemblée générale de l'association, à Besançon, le 29 octobre 2010.
Les parents et l'enfant se portent bien, la petite fait 65 pages et 9,8 Mo.

C'est le **numéro 0** qui inaugure le parcours de la Gazette de Transalpie, qui doit également s'occuper des conférences et présentations lors de nos rencontres, qui, auparavant, étaient publiées dans les actes appropriés.
Les deux rencontres qui viennent d'être mentionnées traitent du problème des « erreurs » dans un entrelacement intéressant entre le RMT et la recherche en didactique des mathématiques.
Les erreurs des élèves et leur gestion didactique : où en sommes-nous aujourd'hui ? est la question que se pose MICHÈLE ARTIGUE, dans sa conférence d'ouverture de la 14e rencontre internationale, reprise ici. Elle remarque qu'il est normal de faire des erreurs en mathématique et souligne leur caractère souvent productif, rappelle les différentes approches dont s'inspirent nos travaux actuels du RMT ; puis elle élargit sa réflexion à d'autres approches cognitive ou anthropologique.
L'erreur, qu'elle soit individuelle ou collective, est un phénomène banal en mathématiques, contrairement à la vision de cette discipline, exemple de rigueur et d'exactitude, portée par la culture commune. Et, comme le montre bien l'histoire des mathématiques, elle peut être aussi étonnamment productive. Une pratique mathématique assujettie aux canons de rigueur de la discipline, même lorsqu'il s'agit d'une pratique experte, ne met pas à l'abri de l'erreur.

---

[1] Sur le site www.armt.eu on trouve tous les numéros de La Gazette de Transalpin publiés jusqu'à présent.

[2] Sur le site www.armtint.eu sous Documentation puis Documents des rencontres, se trouvent les livrets correspondants, en commençant par celui relatif à la rencontre de Besançon.

Erreurs, obstacles, schèmes et concept de MICHEL HENRY. Le contenu de cet article est particulièrement opportun puisque l'ARMT s'occupe actuellement, en plus du statut de l'erreur et de son analyse didactique, des différents types d'obstacles : épistémologiques, didactiques, psychologiques, ontogéniques et aussi de schèmes, concepts et champs conceptuels. Du "droit à l'erreur" concédé aux élèves, on passe progressivement à la recherche de situations où les erreurs seraient révélatrices d'un savoir en voie de constitution, nécessaires à l'apprentissage. En d'autres termes, les erreurs des élèves "nous intéressent", autant qu'elles leur sont profitables. Le contrat didactique est alors profondément modifié.

Le **numéro 1** de la Gazette prend le relais du **numéro 0** et présente deux articles qui rendent compte des communications concernant les résultats des travaux de deux des six groupes thématiques de l'ARMT, sur la construction des concepts et sur les erreurs, les difficultés et les obstacles que les élèves rencontrent à propos de ces concepts.

BERNARD ANSELMO, CLARA BISSO et LUCIA GRUGNETTI, dans *Le rectangle… pas aussi évident*, au nom du groupe géométrie plane, introduisent le lecteur à la problématique des difficultés rencontrées par les élèves sur la construction du concept de rectangle et, en particulier à la nécessité de prendre en compte l'angle droit.

La recherche approfondie sur le concept d'aire, confortée par les résultats relatifs à ce problème amène à penser que la question de la conscience de la nécessité d'une unité de mesure commune et le conflit périmètre/aire constituent des obstacles de type ontogénique, mais aussi de type didactique. De type ontogénique, parce qu'on peut remarquer, pas seulement au sujet de ce problème, mais aussi des autres analysés les années précédentes, comment, globalement, les résultats s'améliorent de catégorie en catégorie (donc avec l'âge des élèves). De type didactique, parce que dans certains cas, même quand l'âge augmente, l'erreur perdure et probablement, la nécessaire attention didactique à porter aux obstacles de ce type a été négligée.

Remarquer des obstacles parfois sous-estimés dans le cadre scolaire, peut constituer une contribution du RMT à la pratique de classe. Et c'est vraiment dans cet esprit, que nous nous orientons vers les questions relatives au rectangle.

De leur côté, ANNIE HENRY, MICHEL HENRY et ANGELA RIZZA proposent une réflexion sur *Des fonctions pour résoudre des problèmes ?* Le groupe fonctions sur la base d'analyses des années précédentes a mené des expérimentations de quelques problèmes en observant des groupes d'élèves et en examinant les copies de sujets proposés lors du 18^{e} RMT. Il a constaté que les élèves n'utilisent presque pas l'outil fonction jusqu'à la catégorie 9, de manière explicite, pour résoudre des problèmes. Il s'est alors demandé si, en renversant le sens de l'interrogation, les problèmes du RMT peuvent avoir un impact (sur les enseignants, sur les élèves ?) dans l'apprentissage de la notion de fonction.

Les erreurs que l'on peut observer dans les copies ne concernent que peu l'outil fonction lui-même dans le cadre limité des problèmes de rallye, puisque les élèves ne l'utilisent pratiquement pas !

Les erreurs les plus fréquentes relevées dans ces problèmes où nous espérions voir utiliser des fonctions sont essentiellement dues à :

- une mauvaise interprétation de l'énoncé : lecture trop rapide ou superficielle qui oublie des données dans des phrases longues où chaque mot compte.
- des difficultés de conversion d'unités.
- et surtout la non maîtrise des calculs algébriques.

Notre questionnement porte sur l'obstacle (typiquement au sens de Gaston Bachelard, quand une connaissance ancienne vient s'opposer à l'assimilation d'une connaissance nouvelle au sein d'un réseau conceptuel solidement installé dans les représentations mentales, la didactique ayant pour objet de développer des stratégies d'enseignement adaptées) que constitue l'utilisation d'autres outils plutôt qu'une représentation fonctionnelle, ne serait-ce qu'avec des prémices d'une relation objet-image.

Des articles traitant spécifiquement des obstacles et des erreurs tels que les suivants se trouvent également dans les **numéros 2** et **3** de la Gazette.

Dans le **numéro 2 :**

- *Approche de la notion de probabilité chez des enfants de 10 à 15 ans* de MICHEL HENRY et FRANÇOIS JAQUET. L'article développe l'analyse a posteriori d'un problème du RMT, *Les pots de bonbons* et de deux de ses variantes, où les élèves doivent faire un choix de nature probabiliste. Dans les trois cas, on a pu constater qu'il faut attendre l'âge de 14 à 15 ans pour voir apparaître le concept adéquat, reposant sur un rapport (de probabilité) alors que précédemment, les procédures de choix reposent majoritairement sur les écarts entre les grandeurs en jeu. Un quatrième problème, de recette culinaire, dans le cadre de la proportionnalité, fait apparaître le même conflit, au même âge, entre les procédures additives (écarts) ou multiplicatives (rapports).

- *Difficultés dans la comparaison des longueurs* de CARLA CROCIANI, LUCIA DORETTI et LUCIA GRUGNETTI. Les auteures s'occupent ici notamment d'un obstacle lié à la conservation des longueurs et des angles, dans un réseau quadrillé. Les difficultés à l'origine de réponses erronées ou de procédures inadéquates n'apparaissent cependant pas facilement : un premier problème révèle une erreur fréquente, qu'on retrouve dans un deuxième problème. Une hypothèse sur les origines de l'erreur permet d'élaborer un troisième problème … et ainsi, de proche en proche, la difficulté est identifiée et analysée de plus en plus précisément, sur plusieurs années parfois.

Dans le numéro 3 :

- L'article *La visualisation spatiale oubliée*, de ROBERTO BATTISTI, au nom du groupe Géométrie dans l'espace, présente une analyse approfondie de copies d'élèves sur une dizaine de problèmes du thème de la géométrie à trois dimensions, dans le but de formuler quelques hypothèses sur les obstacles et les difficultés les plus significatives qu'y rencontrent les élèves.
- Dans l'article *La rencontre avec le nombre intervient vite … mais sa conquête est difficile*, CARLA CROCIANI et RITA SPATOLONI, au nom du groupe Numération, présentent leurs activités de recherche et d'expérimentation, au travers des problèmes du RMT, sur la problématique des difficultés rencontrées par les élèves dans le vaste domaine de la numération.
- L'article *L'équation en tant qu'outil et objet : analyse des difficultés et des erreurs*, de MARIA FELICIA ANDRIANI, LUCIA DORETTI, DANIELA MEDICI, M. GABRIELLA RINALDI et LUCIA SALOMONE, au nom du groupe Équation, traite certains aspects de la délicate problématique de l'enseignement-apprentissage de l'algèbre. En particulier, les recherches conduites par le groupe montrent clairement combien il est difficile pour les élèves de recourir à la mise en équation, même dans les cas où elle serait plus « économique » pour la résolution du problème.

3. Quels problèmes pour quels savoirs ? Les conceptions didactiques du RMT

Les rencontres internationales de la quinzième à la dix-septième sont celles de Barletta, Villars-les-Dombes et Luxemburg.

Dans les **numéros 3**, **4** et **5** de la Gazette ont étés publiés des articles concernant les activités des groupes de travail et des présentations de ces trois rencontres. En particulier, dans le **numéro 3**, on trouve l'article *Utilisation en classe des problèmes du RMT* de GRAZIELLA TELATIN qui est le compte rendu d'un groupe de travail qui s'est réuni lors de la 15e rencontre de l'ARMT à Barletta en octobre 2011 et a analysé de manière critique certains problèmes du Rallye, en les résolvant dans un premier temps, puis en discutant ensuite de l'usage possible qu'on peut en faire en classe. Ces problèmes ont aussi suscité des échanges entre les enseignants participants à propos des conséquences qu'ils entraînent sur la vie de la classe ; par exemple sur la formation et le fonctionnement des groupes de travail en classe, l'importance de renforcer l'estime de soi chez les élèves et les modalités pour y réussir, la nécessité de se confronter entre collègues de sa propre discipline et des autres.
Dans le **numéro 4**, on trouve deux articles sur les questions qui concernent ce paragraphe.
Le premier, *Les problèmes du RMT : l'élargissement progressif de leurs finalités* par LUCIA GRUGNETTI et FRANÇOIS JAQUET (présenté dans le Livret pour les participants à la rencontre de Luxembourg, 2013) propose une réponse à la question : à quoi pouvaient bien servir nos problèmes, aux différentes époques de notre histoire du RMT, à partir de quelques pierres angulaires : « Des problèmes pour … le plaisir de les résoudre, et un peu plus ! », « Des problèmes pour … mieux comprendre comment les élèves les résolvent », « Des problèmes pour … le RMT et les pratiques de classe », « Des problèmes pour … repérer les procédures et les obstacles », « Des problèmes pour … en savoir plus sur la construction de savoirs », « La Banque des problèmes du RMT », « Des problèmes pour … une exploitation didactique ».
Dans le deuxième, *Analyse a priori, analyse a posteriori, au-delà de la démarche circulaire*, LUCIA GRUGNETTI, développe certains aspects de sa présentation lors de la 17e rencontre internationale de L'ARMT en octobre 2013 à Luxembourg. Les réflexions a priori et a posteriori sur les problèmes du RMT amènent à une démarche circulaire qui, à partir d'un problème, conduisent à de nouveaux problèmes « homologues », mais mieux adaptés aux savoirs des élèves de différents âges.
La première partie est dédiée à quelques réflexions jaillies de la comparaison entre l'analyse à priori et l'analyse a posteriori du problème *RMT 2005*, sur la notion d'unité d'aire. Réflexions qui ont porté le groupe Géométrie plane de l'ARMT à la mise au point d'une série de nouveaux énoncés qui ont permis de confirmer les premières observations à posteriori et de mieux calibrer les nouvelles analyses à priori.

La seconde partie développe une réflexion sur la différence entre « explication » et « justification » lorsqu'il est demandé « Expliquez votre réponse » ou « Justifiez votre réponse », comme apparaît dans la plupart de nos énoncés.
Dans le **numéro 5** de la Gazette, MARIA FELICIA ANDRIANI, LUCIA DORETTI et MARIA GABRIELLA RINALDI présentent, dans l'article *Un exemple significatif de parcours circulaire : « Éclairs au chocolat »***,** leur contribution donnée à l'occasion de la 17e rencontre internationale de l'ARMT à Luxembourg, lors de la Table ronde organisée pour illustrer quelques aspects liés au thème de la rencontre : « Analyse a priori, analyse a posteriori. Un parcours circulaire ». On y affronte en particulier la problématique du recours ou du non recours aux procédures de type algébrique ou pré-algébrique dans la résolution du problème *Éclairs au chocolat.*
En effet, un problème retenu a priori comme un « bon problème » peut, comme dans ce cas, présenter une série de difficultés qui en empêchent l'appropriation pour la majorité des élèves : encore une fois, ce qui semble clair pour l'adulte qui propose le problème ne l'est pas forcément pour les élèves auxquels on s'adresse !

4. Les problèmes du RMT et la formation des enseignants

Dans le **numéro 4** de la Gazette**,** CATHERINE HOUDEMENT présente, sous forme d'article, la conférence d'ouverture, *Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes*, de la rencontre internationale de Sienne, en 2014. Dans une partie introductive, l'auteure revient sur les ressources qu'offre le RMT, sa richesse, en distinguant une dimension privée du RMT et une dimension publique. Dans la seconde partie elle s'intéresse aux processus en jeu dans la résolution de problèmes, propose une organisation pour l'enseignant des problèmes arithmétiques, utilise cette organisation pour mesurer la contribution du RMT à la résolution de problèmes. Dans la dernière partie, elle pointe des outils didactiques qui traversent la construction et l'analyse des problèmes du RMT et je montre leur importance pour la formation des enseignants.
Le RMT propose des problèmes a priori complexes ou atypiques. Il permet de déceler des déficits en problèmes basiques. L'enseignant peut ainsi retravailler les problèmes basiques qui ne sont pas installés. Le dispositif collectif RMT participe à la construction d'une attitude positive des élèves face aux problèmes. Le RMT permet donc de confronter les élèves à deux dimensions de la résolution de problème : construction /utilisation de connaissances ET inventivité stratégique.
Bien sûr les bienfaits du rallye seront décuplés si l'enseignant s'engage dans sa pratique ordinaire à faire fréquenter les problèmes à ses élèves avec le souci de les faire réussir par eux-mêmes.
Dans le **numéro 5** de la Gazette, on trouve un article de MICHEL HENRY et BERNARD ANSELMO, ayant pour titre *Les problèmes du Rallye mathématique transalpin, une ressource pour la formation des enseignants*, où les auteurs décrivent leur atelier tenu lors du colloque de la Copirelem en juin 2015, en montrant comment exploiter un problème du RMT pour la formation des enseignants.
L'atelier a permis de présenter un dispositif de formation des enseignants construit autour d'un problème du RMT et d'en montrer les potentialités.
D'autres dispositifs utilisent aussi des problèmes du RMT : en formation initiale, ils consistent par exemple à interroger les conceptions des mathématiques des étudiants stagiaires en leur faisant vivre des épreuves de rallye. En formation continue ils peuvent amener les enseignants à réfléchir sur l'apprentissage par résolution de problèmes ou sur le travail des élèves par groupes.
Depuis longtemps le formateur sait qu'il peut trouver de précieuses ressources dans les rallyes mathématiques. Il dispose aujourd'hui d'un outil performant pour y accéder : la Banque de problèmes du RMT.

5. Appendre ensemble en résolution de problèmes, c'est pour tout le monde

Les dix-neuvième et vingtième rencontres internationales se sont tenues respectivement à Sedilo et au Locle[3] et ils ont pris en considération la résolution de problèmes comme modalité pour un apprentissage collaboratif, ouvert à tout le monde.

---

[3] La rencontre du Locle a également connu la deuxième finale internationale des classes finalistes, catégorie 4, de leurs sections et la Gazette numéro 6, qui est un numéro spécial, est consacrée à différents aspects de cette finale.

Dans le **numéro 7** de la Gazette, on trouve les deux articles concernant les conférences plénières prononcées lors de la rencontre du Locle.
Dans l'article *La résolution de problèmes, un moteur pour développer la créativité*, MICHEL CRITON nous rappelle que l'activité de résolution de problèmes ou d'énigmes logico-mathématiques existe depuis la plus haute antiquité, indépendamment de tout système scolaire. Elle était généralement réservée à une minorité lettrée. Mais ces problèmes font aujourd'hui partie d'une « culture logico-mathématique commune ». Il nous propose de montrer que ce type d'« énigmes », qu'elles soient classiques ou non, peuvent être réinvesties à l'école pour dynamiser la motivation des enfants, stimuler leur créativité et leur inventivité.

De son côté, FRANÇOIS JAQUET, dans son article *Conditions pour la résolution de problèmes*, souligne que l'examen de copies rendues par les élèves nous donne des indices précieux sur les causes de la réussite, ou de l'échec, dans l'activité de résolution de problèmes et sur ses potentialités pour l'élaboration d'une relation saine entre l'individu et les mathématiques. L'observation des copies ne se limite pas aux réponses données et aux explications qui les accompagnent ; elle ouvre le champ à des réflexions sur les conditions nécessaires pour que l'activité de résolution de problèmes puisse se poursuivre au-delà de l'épreuve du RMT, dans le travail en classe, à tous les niveaux et au-delà même de la scolarité.
Comme on le sait bien, le rejet et la peur des maths, que ressent une partie importante des adultes et des élèves, se développent à l'école. C'est donc à l'école qu'il faut agir pour remédier à cette image négative des maths.
Notre expérience du RMT nous montre que nos élèves, et aussi leurs parents, aiment résoudre des problèmes de mathématiques, dans des conditions particulièrement favorables.
Les analyses a posteriori des productions d'élèves nous montrent aussi que la résolution de problèmes permet une évaluation différenciée lorsqu'on comprend ce que l'élève nous raconte comment il arrive, ou n'arrive pas, à la solution.

6. La langue dans les problèmes du RMT

De questions linguistiques dans les problèmes du RMT, s'est occupée, en particulier, **la vingt et unième rencontre internationale qui a eu lieu à Charleroi** et le **numéro 8** de la Gazette publie les articles relatifs aux deux conférences générales et un autre article sur le même thème.
Dans l'article *J'écris, donc je suis, aussi en mathématiques, dans le contexte des problèmes du RMT*, LUCIA GRUGNETTI et FRANÇOIS JAQUET mettent l'accent sur l'intrication entre les problèmes du RMT et la langue naturelle en se rappelant que cette intrication se développe dès les différentes phases de la rédaction des énoncés, puis lors de la résolution jusqu'à l'obtention de la demande, fondamentale, d'expliquer le processus qui a permis d'arriver à la solution. À partir des explications des élèves, ils analysent en particulier, d'une part la « corrélation » entre les énoncés de problèmes à raisonnement « à rebours », selon les aspects linguistiques indissociables des aspects logiques et, d'autre part, un problème de type algébrique qui a produit une grande richesse d'expressions linguistiques dans les explications des élèves.
Les auteurs, dans les conclusions, expliquent qu'en s'intéressant à la manière dont nous nous adressons aux élèves et à la manière dont ceux-ci nous expriment leur pensée, nous découvrons ou redécouvrons la diversité des langages des uns et des autres. L'élaboration et l'analyse a postériori des problèmes du RMT constituent un milieu privilégié pour la mise en évidence de la diversité de ces langages ; les exemples des quatre problèmes examinés précédemment l'attestent ; comme l'attestent aussi toutes les observations et réflexions conduites sur les autres problèmes dans le dispositif de conception et d'analyses du RMT.
VINCENT DEGAUQUIER, dans son article *La logique comme outil d'analyse pour la résolution de problèmes*, se donne pour objectif d'établir deux constats. Le premier est que la plupart des phrases en langue naturelle, sinon toutes, sont ambiguës eu égard à leur structure logique. Le second est que cette ambiguïté peut avoir une incidence sur la résolution de problèmes mathématiques. Pour ce faire, l'auteur examine la langue naturelle à la lumière du langage de la logique contemporaine. Il propose aussi une analyse logique de phrases en langue naturelle, dont certaines sont issues d'un problème du Rallye mathématique transalpin.
En général, l'ambiguïté logique des langues naturelles nous semble constituer un défi didactique plutôt qu'une déficience à laquelle il conviendrait de remédier. Dans une telle perspective, il apparaît alors que l'identification de structures logiques adéquates à la résolution d'un problème est un objet d'apprentissage et que toute résolution de problème comporte une marge interprétative irréductible.

CARLA CROCIANI et RITA SPATOLONI dans *Langage et communication : repartons de l'analyse a posteriori*,

présentent un riche travail du groupe Numération à partir de l'analyse a posteriori de deux problèmes du 25e RMT, selon leurs aspects linguistiques. Leur choix a été déterminé par l'appartenance des sujets au domaine de l'arithmétique et de la numération mais aussi par les résultats jugés en général peu satisfaisants. Les auteures soulignent que l'analyse a posteriori des deux problèmes a fourni une abondance de suggestions de réflexions et de discussions.
Par la résolution des problèmes du RMT, l'élève a la double tâche de comprendre le texte de l'énoncé (et éventuellement de l'expliquer à ses camarades pour qui il n'est pas clair) puis de rechercher une stratégie résolutive à expliquer, partager et parfois modifier ou défendre. Au cours de toutes ces étapes où il est protagoniste en tant qu'instrument de communication, le langage est essentiel. C'est justement la demande d'expliquer la procédure de résolution du problème qui incite les élèves à améliorer leur façon de communiquer.

Ces considérations et l'analyse des copies nous ont conduits à réfléchir sur la communication : verbale (orale ou écrite), graphique (iconique ou symbolique) mais aussi gestuelle (mimique, scénarisation) … Les élèves doivent se familiariser avec toutes ces modalités pour découvrir les potentialités que chacune d'entre elles peut avoir en relation avec le contexte, le thème à communiquer au « récepteur de ses arguments », afin de comprendre et d'être compris.

7. La Banque de problèmes de l'ARMT, « entreprise coopérative »

En Vallée d'Aoste, à Pont-Saint-Martin, a eu lieu la vingt-deuxième rencontre internationale, axée en particulier sur la Banque de problèmes.

Le **numéro 9** de la Gazette, publie les présentations des deux conférenciers, FRANÇOIS JAQUET et LUC OLIVIER POCHON, ainsi qu'un article de FLORENCE FALGUERES et CHRISTINE LE MOAL sur le même thème.
L'article*, Problèmes mathématiques sur Internet : l'offre, la manière et l'usage* de LUC OLIVIER POCHON, a pour but principal de faire avancer la réflexion sur la Banque de problèmes de l'ARMT. Ces réflexions sont précédées par un tour rapide des problèmes mathématiques que l'on trouve sur Internet, ce qui permettra de mieux situer la Banque de problèmes de l'ARMT dans l'offre à disposition en ligne pour l'enseignement des mathématiques.
La Banque de problèmes de l'ARMT fait partie d'un ensemble important de ressources de problèmes de tous les types et de toutes les provenances disponibles sur Internet. Elle possède la particularité de proposer des analyses de tâches.
Cette caractéristique a conduit à développer une classification des problèmes par « tâches », terme qui recouvre à la fois des tâches proprement dites et des actions et opérations qui peuvent intervenir dans l'activité de résolution. La Banque est principalement basée sur des travaux en didactique relayés par les groupes de travail et de réflexion de l'ARMT.

FRANÇOIS JAQUET, dans son article *Élaboration d'un parcours d'apprentissage à partir des problèmes de la Banque*, présente une visite guidée de la Banque de problèmes à l'intention d'un enseignant qui cherche à organiser un parcours d'apprentissage pour ses élèves, à propos du rectangle, de son aire et de toutes les notions qui l'accompagnent. On y trouvera quelques considérations préalables sur la résolution de problèmes, une manière d'entrer dans la Banque, par ses « domaines » et « familles de tâches », l'examen de quelques-unes de ses fiches et de leurs rubriques.
Notre banque est une œuvre collective, vivante et en évolution. Elle est le reflet de ceux qui contribuent à son élaboration et qui l'utilisent : les animateurs de nos sections, tous ceux qui lisent les copies d'élèves et participent à l'attribution des points, les auteurs et lecteurs des problèmes, les groupes permanents de travail, tous ceux qui se lancent dans les analyses a posteriori, tous ceux qui utilisent nos problèmes en classe et proposent de nouveaux commentaires ou résultats.
FLORENCE FALGUERES et CHRISTINE LE MOAL dans l'article *Exploiter les ressources didactiques de l'ARMT en classe et pour la formation* présentent une proposition sur la réorganisation des espaces Internet de l'ARMT à partir de l'idée d'un nouvel espace, accessible aux enseignants et aux formateurs.
Un enseignant, pour construire des situations d'apprentissage, doit disposer de « problèmes bien choisis » qui permettront aux élèves de construire un concept. Il doit connaître des théories qui donneront du sens à ses choix et l'accompagneront à toutes les étapes du dispositif d'apprentissage. Et il doit être en mesure de créer l'environnement propice à cet apprentissage, ce qui nécessite une bonne maîtrise du problème choisi et une bonne connaissance de ses élèves, conditions que seule une pratique régulière peut lui permettre d'acquérir.

Dans ce **numéro 9** de la Gazette, FRANÇOIS JAQUET, dans son **éditorial,** qu'il me semble opportun de rapporter ici dans son intégralité, ravive, de manière décisive, l'attention sur la relation entre RMT et recherche, qui imprègne également le long voyage du RMT :

Dès sa création, le RMT, a orienté son champ d'action vers les élèves, les maîtres et aussi, plus généralement, vers « l'enseignement des mathématiques et la recherche en didactique ». Nos statuts et textes officiels en font foi. Le thème de notre première rencontre internationale, d'octobre 1997, ne pouvait pas être plus explicite : « Les apports du RMT à la didactique des mathématiques ».

Alors que nous sommes plongés jusqu'au cou dans nos tâches de gestion et de conduite de notre association, d'élaboration et d'analyses de problèmes, de regroupements de toutes les données recueillies, il est bon de souffler un peu et de prendre du recul en se posant les questions existentielles de toute entreprise dynamique, sur le maintien du cap, sur nos finalités, sur notre évolution …

Dans son allocution prononcée lors de la remise de son titre de docteur honoris causa de l'Université de Montréal, en 1997, GUY BROUSSEAU définissait la didactique des mathématiques comme la science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques puis il posait trois questions à son propos : qui peut l'étudier ? à qui s'adresse cette science ? qui l'accueille ?

Sa réponse à la première question est que les travaux des psychologues, linguistes, pédagogues, sociologues etc. ne permettent pas aux enseignants d'en faire bon usage et que c'est aux mathématiciens qu'incombe la part de la didactique des mathématiques non abordée par les autres disciplines.

A la deuxième question il répond que « cette science s'adresse aux mathématiciens », tout en ouvrant la voie aux « mathématiciens d'école, de collège ou d'université ».

A la troisième question, il parle des distinctions « entre un psychologue qui s'intéresse à la didactique et un didacticien psychologue d'origine, entre un mathématicien didacticien et un didacticien qui s'intéresse aux mathématiques » et constate que « chacun a beaucoup de mal à présenter à ses pairs l'objet de son travail et que, pour l'instant cette terre donne rarement une citoyenneté aux nouveaux arrivants ». Il conclut toutefois en citant les « facultés d'éducation » (formation), plus sensibles aux besoins de l'enseignement « C'est probablement la bonne voie et je crois qu'elles seront récompensées de leur persévérance ».

Dans ces propos, datant de plus de vingt ans et prononcés dans un contexte « académique », il n'y a pas beaucoup de place pour des gens comme nous, qui considérons que nous opérons dans le champ de la didactique des mathématiques tout en étant enseignants, de métier ou d'origine.

Sans vouloir être prétentieux, nous pouvons affirmer que la démarche du RMT est scientifique : élaborer des problèmes analysés a priori, observer et conserver les résultats, analyser la manière dont les élèves les ont résolus, regrouper les procédures, obstacles et erreurs, les désigner, les communiquer par nos publications et par notre Banque de problèmes, les discuter, en tenir compte pour des expérimentations ultérieures. Toutes ces caractéristiques nous situent dans une discipline scientifique : la didactique des mathématiques.

Notre réponse à la première question nous paraît évidente : cette science est aussi la nôtre, animateurs du RMT, nous l'étudions et nous y participons activement depuis plus de 25 ans en y apportant nos résultats.

Pour la deuxième question, la réponse est déjà contenue dans nos textes : nous nous adressons à ceux qui ont besoins des données que nous continuons à recueillir et que nous mettons à disposition : notre collectivité du RMT, les enseignants participants actifs, mais aussi tous ceux qui lisent avec intérêt nos analyses de problèmes, soit dans la description des procédures, erreurs et obstacles, soit dans les propositions d'exploitations didactiques que nous sommes en mesure de rédiger après tant d'expérimentations répétées.

Les réponses à la troisième question sur l'accueil de nos réflexions sont données par les témoignages d'intérêt qui commencent à affluer : ceux de formateurs ou d'enseignants qui osent innover en faisant résoudre nos problèmes par leurs élèves.

Notre champ d'action n'est pas celui de la réflexion théorique, c'est celui de l'observation minutieuse de ce qui se passe dans la tête de l'élève lorsqu'il résout un problème. Nous osons le revendiquer comme un domaine important de la didactique des mathématiques, et nous affirmons avec conviction que nous poursuivons notre action, en précisant que notre porte est ouverte à tous ceux qui s'y intéressent.

8. RMT et le point de vue de l'élève

La vingt-troisième rencontre internationale qui s'est tenue à Alghero, a plus que jamais placé l'élève au centre des préoccupations de l'ARMT et le **numéro 10** de la Gazette en donne un témoignage important, en tenant également compte du lien assez fort entre RMT et recherche, ainsi rappelé dans le paragraphe précédent.

Les conférences générales, auxquelles correspondent deux articles de ce numéro, ont été présentées par deux chercheurs bien connus en didactique des mathématiques, en les personnes de Raymond Duval et Ferdinando Arzarello.

L'article*, Le premier seuil dans l'apprentissage de la géométrie : « voir » les « figures »* de RAYMOND DUVAL, a pour but principal de clarifier les raisons pour lesquelles les jeunes élèves ne voient pas les « figures » en mode mathématique, car pour eux c'est plutôt la perception et les mesures prises concrètement qui déterminent ce que représentent ces « figures ».

Le terme FIGURE est bien connu de tous les enseignants de Mathématiques. Il désigne non pas le dessin tracé sur un support papier ou apparaissant à l'écran, mais les propriétés géométriques que l'on se donne et que le dessin représente, c'est-à-dire le dessin *codé.* Cette opposition s'est développée avec les logiciels de construction de figures, et tout particulièrement avec Cabri géomètre (Laborde et Capponi, 1993). Elle vise à souligner la manière mathématique de voir et d'utiliser les figures « géométriques », c'est-à-dire les figures construites avec des instruments, les propriétés de l'instrument utilisé produisant le tracé d'une propriété géométrique. *Voir, c'est regarder une figure construite instrumentalement avec les lunettes des hypothèses données.*

Le verbe VOIR désigne la modalité perceptive qui, cognitivement, est la plus riche et la plus complète. En ce qui concerne les représentations visuelles bidimensionnelles (croquis, schémas, esquisses, cartes, graphiques, images, photos, etc.) *voir, c'est reconnaître au premier coup d'œil l'objet qu'une représentation bidimensionnelle montre.* Cette reconnaissance immédiate vient de ce que le contour de la forme reconnue ressemble ou reproduit celui de l'objet matériel qu'un dessin, une image ou une photo montre. Et le mot employé pour désigner la forme tracée est le nom de l'objet dessiné plus ou moins schématiquement. Autrement dit, il n'y a pas besoin de mettre des lunettes conceptuelles pour reconnaître ce qu'un croquis, un schéma, une carte, ou une image montrent. Cette manière de voir est fondamentalement iconique. Elle est la manière spontanée, universelle de regarder et d'utiliser les représentations bidimensionnelles dans tous les domaines de la connaissance.

La manière mathématique de voir les figures instrumentalement construites, même les plus élémentaires, est donc aux antipodes de la manière spontanée et iconique de voir toutes les représentations bidimensionnelles. Et pour franchir l'écart considérable qui les sépare, il ne suffit pas de mettre des lunettes conceptuelles. Car, ici, les lunettes conceptuelles requièrent l'acquisition des propriétés géométriques de base ainsi que la coordination entre les termes géométriques et ce que la figure donne à voir. Comment les élèves du Primaire et ceux du Collège pourraient-ils soupçonner cet écart et opérer d'eux-mêmes les changements de regard nécessaires pour comprendre en géométrie et pouvoir résoudre des problèmes ?

FERDINANDO ARZARELLO, dans son article *Avec les élèves et les enseignants entre nombres, formules et problèmes,* décrit les processus qui conduisent à la pensée algébrique et aux productions correspondantes des élèves comme maturation d'un méta-discours sur l'arithmétique. Il souligne ainsi les formes de continuité (cognitive et didactique) qui doivent être ciblées en classe pour stimuler et soutenir la transition de l'arithmétique à l'algèbre.

Il illustre ainsi les outils théoriques et opérationnels pour l'analyse discursive des productions écrites (mais aussi orales) des élèves, avec des exemples en référence aux travaux des animateurs du *Rallye Mathématique Transalpin*. L'objectif est de fournir aux équipes du RMT un nouvel outil d'analyse, à la fois théorique et opérationnel.

Dans ce **numéro 10** de la Gazette, on trouve aussi deux articles qui sont liés aux problématiques développés dans les deux conférences.

CLARA BISSO e FRANÇOIS JAQUET, dans l'article *À propos de périmètre*, présentent un problème du RMT qui met en œuvre le concept de périmètre de carrés et rectangles chez de jeunes élèves. On y présente son histoire et son origine, issues des pratiques permanentes du RMT sur l'élaboration et l'analyse de problèmes. Puis on le décrit par son énoncé, son analyse a priori et les résultats obtenus par environ 2500 classes qui l'ont résolu ou tenté de le résoudre lors de la deuxième épreuve du 27e RMT, en 2019.

Vient ensuite l'analyse a posteriori fondée sur l'examen approfondi de plusieurs centaines de copies et sur une première lecture d'un millier d'autres copies. On y découvre plusieurs procédures de résolution dont certaines conduisent à la réponse dite « correcte » et d'autres à des réponses différentes, caractéristiques d'une construction encore non achevée du concept de périmètre.

Ces observations nous invitent à tenter de mieux comprendre les obstacles rencontrés par les élèves, à propos de leur manière de « voir » les figures et d'opérer sur les grandeurs perçues, et nous permettent une analyse plus fine de leur tâche de résolution.

L'article *Réflexions sur l'évolution de la pensée algébrique chez les élèves à partir de l'analyse a posteriori d'un problème*, de MARIA FELICIA ANDRIANI, LUCIA DORETTI et LUCIA SALOMONE, est inspiré du Laboratoire d'algèbre, organisé par les auteures à l'occasion du premier cours de formation de la section de l'ARMT de Sienne, analyse en détail un grand nombre de copies relatives à un problème du RMT, ce qui représente un exemple sur lequel les élèves peuvent travailler dans la perspective d'un passage de l'arithmétique à l'algèbre.

A partir de l'examen des différentes procédures, de la manière de les représenter et d'expliquer le raisonnement, dans certains cas, nous avons émis des hypothèses sur le niveau atteint par les élèves concernant l'élaboration du discours algébrique. À cette fin, nous nous sommes référés à ce qui est rapporté dans (Arzarello, 2020), où l'auteur, reprenant la position de A. Sfard, définit l'algèbre élémentaire comme « une sous-catégorie du discours mathématique que les individus développent en réfléchissant sur les relations et les processus arithmétiques » (plus simplement, elle peut être considérée comme « un méta-discours sur l'arithmétique »).

Les articles de ce **numéro 10** de la Gazette constituent une riche synthèse de l'indéniable lien entre RMT et recherche didactique, avec des applications également à la pratique didactique, qui passe par la formation.

Pour l'instant, nous pourrions conclure avec le titre de la future vingt-quatrième conférence internationale : **Élaborer un problème du rallye mathématique transalpin : une tâche complexe.**

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

PANNEAU DÉCORATIF / PANNELLO DECORATIVO

Bernard Anselmo, M. Maddalena Asara, Paola Bajorko, Brunella Brogi, Concetta Caggiano, Federica Curreli, Speranza Dettori, Florence Falguères, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Elisabetta Mari, Elsa Renna, M. Agostina Satta, Cinzia Utzeri[1] e Angela Rizza (Gruppo Zeroallazero)

Groupe Géometrie Plane (pour les grands) / Gruppo Geometria Piana (per i grandi)

Résumé

Cette étude présente le travail collectif de membres du groupe Géométrie plane (pour les grands) et du groupe Zeroallazero, qui ont analysé a posteriori le problème Panneau décoratif (28e RMT Épreuve I) proposé par le groupe Zeroallazero.

Sunto

Questo studio presenta il lavoro collettivo di membri del gruppo Geometria piana (per i grandi) e del gruppo Zeroallazero che hanno analizzato a posteriori il problema Pannello decorativo (28° RMT Prova I), proposto dal gruppo Zeroallazero.

I. Le problème / Il problema

PANNEAU DÉCORATIF / PANNELLO DECORATIVO - (Cat. 8, 9, 10)

Aurore a trouvé des chutes de tapisserie de formes rectangulaires qui lui plaisent et qui ont des dimensions très particulières : 3 m sur 1 m pour la plus grande ; puis 1,5 m sur 1 m ; puis 1,5 m sur 0,5 m; puis 0,75 m sur 0,5 m ; … et ainsi de suite avec la même régularité.

Elle décide de les utiliser pour recouvrir un panneau rectangulaire de 3 m sur 2 m qu’elle placera sur une paroi de son restaurant.

Aurore utilise une seule chute de chaque dimension. Elle colle les chutes sur le panneau, sans qu’elles ne se superposent et sans laisser d’espaces entre elles.

Combien de chutes Aurore aura-t-elle collées sur le panneau rectangulaire quand il lui restera moins de 1 cm^2 à recouvrir ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Aurora ha trovato degli scampoli di carta da parati di forma rettangolare che le piacciono e che hanno misure particolari: 3 m e 1 m per il più grande; poi 1,5 m e 1 m; poi 1,5 m e 0,5 m; poi 0,75 m e 0,5 m; … e così via con la stessa regolarità.

[1] Le Groupe Géométrie pour les grands, est constitué aussi par d’autres membres / Il Gruppo di Geometria per i grandi comprende anche i seguenti membri: Fabio Brunelli, Cristina Caredda, Gloria Giacomelli, Silvia Mazzucco, Francesca Michienzi, Lucia Palmas, Luciana Rapposelli, Patrizia Sabatini, Rosanna Sanna.

Decide di usarli per ricoprire un pannello rettangolare di lati 3 m e 2 m da sistemare su una parete del suo ristorante.

Aurora utilizza un solo pezzo per ogni tipo di misura. Incolla gli scampoli sul pannello senza sovrapporli e senza lasciare spazi vuoti.

Quanti pezzi Aurora avrà incollato sul pannello rettangolare quando le resterà meno di 1 cm^2 da ricoprire?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Comme tout énoncé de problème du RMT, celui-ci a subi une longue phase de discussions et de négociation pour déterminer le contexte dans lequel on allait l'insérer. Finalement cette recherche sur une progression géométrique de raison 1/2, suggéré par le Groupe « Zeroallazero » a abouti dans le groupe Géométrie plane, vu son contexte de rectangles d'aires décroissante.

Come tutti gli enunciati di problemi del RMT, anche questo è passato attraverso una lunga fase di discussioni e di negoziazione per determinare il contesto nel quale sarebbe stato inserito. Alla fine, questa ricerca su una progressione geometrica di ragione 1/2, suggerito dal gruppo Zeroallazero è arrivato anche nel gruppo Geometria piana, visto il suo contesto di rettangoli di aree decrescenti.

II. Analyse a priori / Analisi a priori

L'analyse a priori d'un problème du RMT tient compte, dans la mesure du possible, des expériences et des données recueillies lors de l'analyse a posteriori d'anciens problèmes déjà expérimentés, qu'on trouve dans la banque de problèmes. En allant chercher dans les domaines Géométrie plane (GP), Fonctions (FN) et Grandeurs et mesures (GM) on trouve deux familles.

Dans la famille Traiter une suite numérique (SN) il existe plusieurs problèmes de différents types de fonctions définie sur les nombres naturels. Quelques-uns seulement concernent des progressions géométriques mais n'ont malheureusement pas été analysés a posteriori. Il a donc fallu partir des points de vue des différentes personnes tous enseignants – actifs ou retraités- ayant participé à l'élaboration du problème.

Voici la rubrique « Analyse de la tâche » de l'analyse a priori d'origine de la tâche de l'élève, qui sera comparée par la suite à l'analyse a posteriori.

L'analisi a priori di un problema del RMT tiene conto, per quanto possibile, delle esperienze e dei dati raccolti da analisi a posteriori di problemi precedenti, già sperimentati, che troviamo nella banca dei problemi. Se facciamo una ricerca negli ambiti Geometria piana (GP), Funzioni (FN), Grandezze e misure (GM), troviamo due famiglie.

Nella famiglia "Gestire una successione numerica" (SN) esistono molti problemi su diversi tipi di funzioni definite sui numeri naturali. Solo alcuni riguardano progressioni geometriche, ma comunque, purtroppo, non sono stati analizzati a posteriori. Si è quindi partiti dal punto di vista di diverse persone, tutti insegnanti, attivi o in pensione, che hanno partecipato all'elaborazione del problema.

Segue qui la rubrica "Analisi del compito" dell'analisi a priori originale, che sarà confrontata più avanti con l'analisi a posteriori.

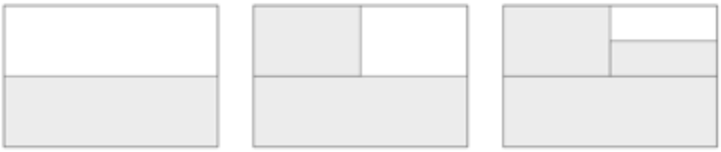
- Percevoir les régularités de la suite des dimensions des chutes : d'un rectangle au suivant, alternativement, une dimension est conservée alors que l'autre est la moitié de la précédente, (en partant de la première chute dont la longueur est la même que celle du panneau et la largeur est la moitié de celle du panneau).
  On peut se représenter la situation mentalement et/ou avec un dessin des premières chutes disposées sur le panneau :

- Comprendre que l'aire de la première chute est la moitié de celle du panneau - ou 1/2 en écriture fractionnaire – et est égale à celle de la partie encore à recouvrir ; puis l'aire de la seconde chute est la moitié de celle de la première et ainsi de suite.
- Comprendre que l'aire de chaque chute ajoutée est la moitié de celle de la précédente et qu'elle est égale à celle de la partie encore à recouvrir. Puis comprendre que le recouvrement s'arrêtera quand la partie restant à recouvrir sera celle qui aura une aire de moins de 1 cm^2.
- Se rendre compte que pour effectuer les calculs, il serait opportun de transformer initialement les 6 m^2 de l'aire du panneau en 60 000 cm^2.
- On peut alors raisonner sur la partie à recouvrir à partir de 30 000 (correspondant à la première chute), diviser successivement par 2 les suivantes jusqu'à obtenir le premier nombre inférieur à 1, qui correspond à la 16^e^ chute.

Ou

- Raisonner sur la partie déjà recouverte et additionner les aires des chutes ajoutées progressivement à partir de la première, d'aire 30 000 cm^2 : $30\,000 + 15\,000 + 7\,500 + 3\,750 + 1\,875 + 937{,}5 + 468{,}75, \ldots$ et comprendre qu'il manquera moins de 1 cm^2 quand la somme dépassera 59 999 et que le nombre de chutes est celui des termes de la somme. Avec le 16^e^ terme (0,915527344…) on obtient :
  30 000 + 15 000 + 7 500 + 3 750 + … + 0,915… = 59 999, 084…
  Ainsi Aurore a besoin de 16 chutes pour qu'il reste moins de 1 cm^2 à recouvrir.

- Capire con quale regolarità si susseguono le dimensioni degli scampoli (rettangoli) da sistemare sul pannello rettangolare: da un rettangolo al successivo, alternativamente, una dimensione è inalterata mentre l'altra è metà della precedente (a partire dal primo scampolo la cui lunghezza è uguale a quella del pannello e la larghezza è la metà di quella del pannello).
- Eventualmente si può rappresentare la situazione mentalmente e/o con un disegno, sistemando i primi scampoli sul pannello:



- Capire che il primo scampolo ricopre una metà del pannello, e passando alla rappresentazione in frazione, è ½ del pannello, come la parte ancora da ricoprire. Capire poi che il secondo scampolo è la metà del primo e così via
- Capire che ogni scampolo aggiunto è metà del precedente e che è uguale alla parte ancora da ricoprire. Capire che il ricoprimento si ferma quando la parte rimanente da ricoprire avrà un'area minore di 1 cm^2
- Capire che per effettuare i calcoli, è opportuno dapprima trasformare i 6 m^2 della superficie del pannello in cm^2, trovando 60 000 cm^2
- Ragionare sulle parti da ricoprire: a partire da 30 000 (che corrisponde al primo scampolo), dimezzare progressivamente fino ad arrivare a un numero inferiore a 1, che corrisponde al sedicesimo scampolo.

Oppure

Ragionare sulla parte già ricoperta e sommare con la calcolatrice le aree degli scampoli progressivamente aggiunti, a partire dal primo, di area 30000 cm^2: $30000 + 15000 + 7500 + 3750 + 1875 + 937{,}5 + 468{,}75, \ldots$; capire che mancherà meno di 1 cm^2 quando la somma supererà il valore 59999 e che il numero di scampoli è il numero di addendi della somma. Con il sedicesimo termine (0,915527344) si ha:

$$30000 + 15000 + 7500 + 3750 + 1875 + 937{,}5 + 468{,}75 + \cdots + 1{,}831054688 + 0{,}915527344 = 59999{,}08447$$

Quindi Aurora ha bisogno di 16 scampoli per avere meno di 1 cm^2 da ricoprire.

III. Résultats / Risultati

Les premières données recueillies après la passation de l'épreuve se présentent sous forme de tableaux des points attribués qui figureront dans la fiche de la banque de problèmes, suivis des critères d'attribution qui avaient été déterminés a priori.
I primi dati raccolti dopo la prova si presentano sotto forma di tabella dei punteggi attribuiti che figureranno nella scheda della banca di problemi, seguiti dai criteri di attribuzione che erano stati determinati a priori.

Points attribués, sur 1078 classes de 15 sections / Punteggi attribuiti su 1078 classi di 15 sezioni:

points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 8	389	173	129	42	47	780	1,0
Cat. 9	66	27	31	12	14	150	1,2
Cat. 10	62	31	11	12	32	148	1,5
tot	**517**	**231**	**171**	**66**	**93**	**1078**	**1,1**

en %					
Cat. 8	50%	22%	17%	5%	6%
Cat. 9	44%	18%	21%	8%	9%
Cat. 10	42%	21%	7%	8%	22%
tot	48%	21%	16%	6%	9%

Selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

4 Réponse correcte (Aurore a besoin de 16 chutes) avec des explications claires et complètes (par exemple par divisons successives par 2 : 60 000, 30 000, 15 000, jusqu'à 0.915… ou par sommes successives des aires des chutes comme dans l'exemple ci-dessus)

3 Réponse correcte avec des explications lacunaires (sans le détail des aires successives proches de 1 ou de 60 000) mais dont on comprend le raisonnement
Ou réponse « Aurore a besoin de 15 ou 17 chutes » suite à une erreur de dénombrement des chutes, mais avec des explications claires

2 Réponse correcte sans explication
Ou, un raisonnement bien expliqué, à partir d'un dessin ou d'une suite de calculs, mais qui n'aboutit pas à la réponse
Ou réponse cohérente mais erronée due par exemple à une erreur dans la transformation de m^2 en cm^2

1 Début de recherche correct (par exemple, esquisse d'un dessin avec au moins quatre termes de la progression ou au moins quatre valeurs calculées à la calculatrice …)

0 Incompréhension du problème

Secondo i criteri stabiliti all'atto dell'analisi a priori:

4 Risposta corretta (Aurora ha bisogno di 16 scampoli) con spiegazione chiara e completa (per esempio con applicazione della procedura di dimezzamento successivo: 60000, 30000, 15000 fino a 0,915 ... o per somme successive di aree come nell'esempio sopra)

3 Risposta corretta con spiegazione lacunosa (senza il dettaglio delle aree successive approssimate a 1 o a 60000), ma dalla quale si capisca il ragionamento
oppure risposta "Aurora ha bisogno di 15 o 17 scampoli" dovuta ad un errore di conteggio degli scampoli, ma con spiegazione chiara

2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure ragionamento ben spiegato a partire da un disegno o da una successione di calcoli, ma che non porta ad una risposta
o risposta coerente ma errata dovuta ad esempio a un errore nella trasformazione da m^2 a cm^2

1 Inizio di ricerca corretto (per esempio, bozza di un disegno oppure alcuni termini della progressione o almeno quattro valori trovati con la calcolatrice …)

0 Incomprensione del problema

A la lecture du tableau ci-dessus on se rend compte immédiatement que les résultats ne correspondent pas aux attentes des auteurs du problème : 50 % de « incompréhension du problème pour la catégorie 8, c'est beaucoup ! Chercher à en comprendre les raisons est un des buts de l'analyse a posteriori qui suit.

Alla lettura della tabella precedente ci si rende immediatamente conto del fatto che i risultati non corrispondono alle attese degli autori del problema: 50 % di punteggi "0" per la categoria 8, è troppo!

Cercare di capirne le ragioni è uno degli obiettivi dell'analisi a posteriori che segue.

IV. Analyse a posteriori / Analisi a posteriori

En ce qui concerne le RMT, comme on le sait bien, une analyse a posteriori est le premier aboutissement des recherches sur un problème. On y travaille sur le « matériel brut » qui est à la source de nos connaissances de « ce qui se passe dans la tête des élèves » lors de la résolution, alors que les phases précédentes n'étaient élaborées que de notre point de vue d'adulte en fonction de ce que nous pensons connaître ou espérons voir apparaître.

Dans les copies qu'ils nous ont rendu, les élèves nous ont raconté de leur mieux ce qu'ils ont fait effectivement. Nous n'avons examiné que quelques centaines de ces productions (sur plus de mille) ; on peut donc imaginer leur diversité et l'ampleur du travail de lecture et d'analyse et, par conséquent, l'extension de ce chapitre consacré à l'analyse a posteriori du problème sur une vingtaine de pages.

Cette présentation est organisée en plusieurs parties, selon six rapports de membres du Groupe Géométrie et Zeroallazero : l'un sur une analyse des copies de Franche Comté (FC) et de Suisse romande (SR), développé lui-même en quatre points (IV.1.1 à IV.1.4), et les cinq suivants qui sont déjà des synthèses d'analyse des sections de Sassari (SS, IV.2), Puglia (PU, IV.3), Emilia Romagna (RMG, IV.4), Parma (PR, IV.5), Cagliari (CA, IV.6).

Les analyses des sections de FC et SR concernent les copies de catégories 8. En ce qui concerne les cinq autres sections, il y a aussi des classes de catégories 9 et 10 et, pour les résultats on renvoie au tableau général qu'on a présenté auparavant.

Le chapitre se termine par une synthèse générale de ses six rapports sur l'analyse a posteriori (IV.7).

Per ciò che riguarda il RMT, come sappiamo bene, un'analisi a posteriori è il primo obiettivo delle ricerche su un problema. Si lavora sulla "materia prima" che è la sorgente delle nostre conoscenze su "ciò che passa nella testa degli allievi" durante la risoluzione del problema, mentre le fasi precedenti erano elaborate solo dal nostro punto di vista adulto in funzione di quello che pensiamo di conoscere o che speriamo veder apparire.

Nei loro elaborati, gli allievi ci hanno raccontato ciò che hanno effettivamente fatto. Abbiamo esaminato alcune centinaia di tali produzioni (su più di mille); si può dunque immaginare la loro diversità e l'ampiezza del lavoro di lettura e di analisi e, di conseguenza, l'estensione di questo capitolo che, consacrato all'analisi a posteriori di questo problema, occupa una ventina di pagine.

Questa presentazione è organizzata in diverse parti, secondo sei rapporti di membri del Gruppo Geometria e Zeroallazero: uno sull'analisi degli elaborati della Franche Comté (FC) e della Svizzera romande (SR), sviluppata, anch'essa in quattro punti (da IV.1.1 a IV.1.4), e i cinque successivi che sono già delle sintesi di analisi delle sezioni di Sassari (SS, IV.2), Puglia (PU, IV.3), Emilia Romagna (RMG, IV.4), Parma (PR, IV.5), Cagliari (CA, IV.6).

Le analisi degli elaborati delle sezioni FC e SR riguardano la categoria 8. Nel caso delle altre cinque sezioni, figurano anche classi delle categorie 9 e 10 e per i risultati rimandiamo alla tabella generale riportata in precedenza che sono, in certa misura, conformi a quelli di queste cinque sezioni.

Il capitolo termina con una sintesi generale dei sei rapporti sull'analisi a posteriori (IV.7).

IV.1. Analyse a posteriori des copies de FC et de SR / Analisi a posteriori sugli elaborati della FC e della SR

IV.1.1. Incompréhension / Incomprensione

Dans ces copies, le recouvrement géométrique n'est pas compris, ni la liste des dimensions successives.

On voit des dessins de rectangles qui ne respectent pas les contraintes indiquées dans l'énoncé ou parfois avec une disposition des deux premières chutes de tapisseries ; ou bien les dimensions des premières chutes sont celles

indiquées dans l'énoncé et sont directement recopiées, ou bien on trouve des commentaires du genre : " *nous faisons longueur fois largeur de chaque chute pour chacune des mesures jusqu'à arriver à 600 000 cm^2."*
ou bien des collages de petits rectangles de papier quadrillé,
Toutes les productions sont différentes et il n'y a pas moyen de les regrouper.
In questi elaborati, il "ricoprimento" geometrico non è compreso, così come la lista delle dimensioni successive. Vengono disegnati alcuni rettangoli senza rispettare la regolarità indicata nell'enunciato o, talvolta, con una disposizione dei primi due scampoli, oppure le dimensioni dei primi tre scampoli che sono quelli indicati nell'enunciato e che vengono direttamente ricopiati, oppure si trovano commenti del tipo: *facciamo lunghezza per larghezza di ciascuno scampolo per ciascuna misura per arrivare a 600 000 cm^2.*
oppure dei collage di rettangolini di carta quadrettata,
…
Tutte le produzioni sono differenti e non c'è modo di raggrupparle.

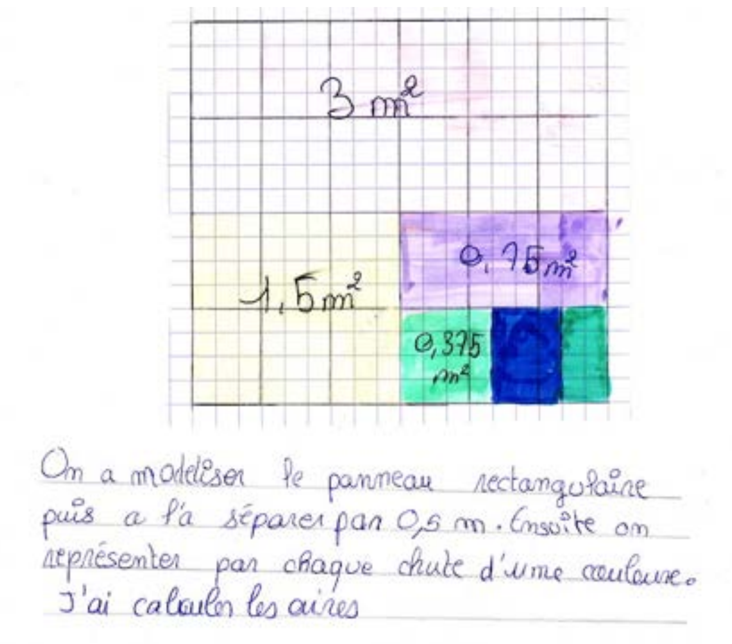
IV.1.2. Premières suites de figures ou de dimensions, avec ou sans opérations n'allant pas au-delà de 6 chutes / Prime successioni di figure o di dimensioni, con o senza operazioni, che non vanno oltre 6 scampoli

Attribution des points pour ces copies : 0 point ou 1 point / Attribuzione dei punteggi a questi elaborati: 0 punti oppure 1 punto.

On perçoit dans ces copies un début de construction d'une suite des dimensions, parfois suivie des calculs correspondants, voire d'une somme, qui comporte des erreurs.
Exemple 1 : dans une copie de catégorie 9 on lit
3 m x 1m = 3
1,5 m x 1 m = 1,5
1,5 m x 0,5 m = 0,75 avec la somme des 5 premières lignes : + = *5,71875*
0,75 m x 0,5 m = 0,375 et, juste au-dessous avec une accolade
0,375 m x 0,5 m = 0,09375 qui englobe les six lignes + = *5,8125*
0,375 :2 = 0,1875
se terminant par *0,1875 + 5,8125 = 6* sans autre indication.
Dans cet exemple, il y a
- sur les quatre premières lignes, ~~un~~ le début de rédaction des calculs est juste~~-~~et la somme des résultats obtenus aux six premières lignes est correcte.
- à la 5^e ligne apparaît une première erreur de dimension, le produit aurait dû être 0,75 x 0,25 = 0,1875 - erreur associée à une erreur d'écriture puisque ce n'est pas le produit de 0,375 par 0,5 qui donne 0,**0**9375 mais le produit de 0,375 par 0,25.
- à la sixième ligne, les élèves semblent constater que d'une ligne à l'autre on divise par 2 et calculent ainsi la moitié du produit obtenu à la quatrième ligne comme pour remplacer celui (erroné) de la 5^e ligne.
- et enfin la somme erronée des résultats des cinq premières lignes (5,8125 à la place de 5,71875) ajoutée à la valeur de la~~-~~sixième ligne aboutit déjà à 6 sans devoir passer par le « moins de 1 cm^2 à recouvrir ? », ce qui entraîne un désarroi et un blocage.
Esempio 1: in un elaborato si legge
3 m x 1m = 3
1,5 m x 1 m = 1,5
1,5 m x 0,5 m = 0,75 con la somma delle 5 prime righe: + = *5,71875*
0,75 m x 0,5 m = 0,375 e, subito sotto con una parentesi che ingloba le sei righe
0,375 m x 0,5 m = 0,09375 + = *5,8125*
0,375 :2 = 0,1875
E finisce con *0,1875 + 5,8125 = 6* senza altra indicazione.
In questo esempio troviamo:
- un inizio corretto sulle prime quattro righe e un'addizione corretta delle prime sei righe
- un primo errore sulle dimensioni, nella quinta riga dove il prodotto doveva essere 0,75 x 0,25 = 0,1875 - - e un secondo errore di scrittura perché non è il prodotto di 0,375 per 0,5 che dà 0,09375, ma il prodotto di 0,375 per 0,25.

- nella sesta riga gli allievi sembrano constatare che da una riga all'altra si divide per 2 e calcolano così la metà del prodotto ottenuto nella quarta riga come per sostituire quello (errato) della quinta riga;
- e infine la somma errata delle prime cinque righe (5,8125 al posto di 5,71875) aggiunta al valore della sesta riga arriva già a 6 senza dover passare per "meno di 1 cm^2 da ricoprire?", cosa che porta a una perplessità e a un blocco.

(une autre copie repose sur la même erreur avec deux fois 0,1875 m^2 en 5^e et 6^e ligne pour aboutir à un total de 6 m^2 pour les six premières chutes, mais avec une conclusion remarquable : *Quand il y aura moins de 1 cm^2 à recouvrir il aura collé 6 chutes de tapisserie.)*
(in un altro elaborato si trova lo stesso errore con due volte 0,1875 m^2 nella quinta e nella sesta riga per arrivare a un totale di 6 m^2 per i primi sei scampoli, ma con una conclusione interessante: Quando *ci sarà meno di 1 cm^2 da ricoprire avrà incollato 6 scampoli.)*
Exemple 2
Un beau dessin en couleur, sur papier quadrillé, représente les quatre premières chutes sur lesquelles sont inscrites les indications successives *3 m^2 - 1,5 m^2 - 0,75 m^2 - 0,375 m^2* avec le commentaire suivant :
On a modélisé le panneau rectangulaire puis on l'a séparé par 0,5m. Ensuite on représente par chaque chute d'une couleur. J'ai calculé les aires.
Dans cet exemple, l'obstacle non surmonté est une erreur dans la suite de la disposition des chutes sur le dessin : la 5^e et la 6^e occupent tout l'espace restant et ne respectent pas les dimensions exigées.
Esempio 2
Un bel disegno colorato, su carta quadrettata, rappresenta i primi quattro scampoli sui quali ci sono le indicazioni successive *3 m^2 - 1,5 m^2* - 0,*75 m^2 - 0,375 m^2* con il commento seguente:
Abbiamo modellizzato il pannello rettangolare poi lo abbiamo separato con 0,5m. Poi rappresentiamo ogni scampolo con un colore. Ho calcolato le aree.
In questo esempio, l'ostacolo non superato è dato da un errore nella disposizione degli scampoli sul disegno: il 5^o e il 6^o occupano tutto lo spazio rimanente e non rispettano le dimensioni richieste.



Exemple 3
Un petit rectangle tente de montrer les chutes, dont seules les deux premières sont correctes : rectangles de 1 cm sur 3 cm et de 1,5 sur 1. Avec le commentaire :
Nous avons essayé de trouver la suite logique 0,75 m sur 0,25 m / 0,375 m sur 0,25 m / 0,375 m sur 0,125 m/ 0,1875 m sur 0,125 m .

Dans cet exemple, l'obstacle est dans la disposition des chutes à partir de la troisième, les dimensions de la « suite logique » sont correctes, il s'agit des dimensions des quatre chutes qui suivent les trois qui sont précisées dans la donnée. Mais le passage au calcul des aires n'est pas fait.

Esempio 3

Alcuni rettangolini tentano di mostrare gli scampoli, solo i primi due sono corretti: quello di 1 cm su 3 cm e di 1,5 su 1. Con il commento:

Abbiamo tentato di trovare la successione logica 0,75 m su 0,25 m / 0,375 m su 0,25 m / 0,375 m su 0,125 m/ 0,1875 m su 0,125 m.

In questo esempio, l'ostacolo è nella disposizione degli scampoli a partire dal terzo, le dimensioni della "successione logica" sono corrette, si tratta di quattro scampoli che seguono i tre dei dati. Ma non è stato fatto il passaggio al calcolo delle aree.

Exemple 4

Un premier dessin représente les cinq premières chutes, de couleurs différentes, correctement, avec la légende des couleurs, *3 sur 1 ; 1,5 sur 1 ; …* reliées par des flèches indiquant la division par 2 d'une chute à la suivante.

Un second dessin *Schéma en plus grand*, représente les sept premières chutes, et le reste avec la même légende prolongée. Puis, *On n'a pas eu le temps de poursuivre notre raisonnement.*

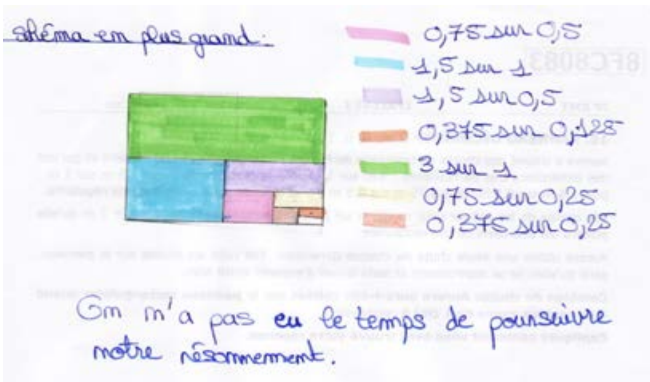
Dans cet exemple, l'obstacle du temps évoqué est dû à l'extrême soin des dessins, des coloriages et des légendes (dimensions des rectangles), mais le calcul des aires n'a pas été abordé comme si le problème pouvait se résoudre entièrement par le dessin.

Esempio 4

Un primo disegno rappresenta i primi cinque scampoli, di colori differenti, corretti, con la legenda dei colori, *3 su 1; 1,5 su 1; …* collegati con frecce che indicano la divisione per 2 da uno scampolo al successivo.

Un secondo disegno *Schema ingrandito*, rappresenta i primi sette scampoli e il resto con la legenda prolungata. Poi, *Non abbiamo avuto il tempo di proseguire il nostro ragionamento.*

In questo esempio, l'ostacolo del tempo evocato è dovuto alla gran cura dei disegni, delle colorazioni e delle legende (dimensioni dei rettangoli) ma il calcolo delle aree non è stato affrontato come se il problema potesse essere risolto interamente tramite il disegno.



Exemple 5

Pour trouver combien de chutes elle aura collé, il faut trouver combien de m^2 fait le panneau rectangulaire 3 m x 2 m = 6 m^2. Le rectangle fait 6 m^2.

Il faut additionner l'aire des chutes des tapisseries pour que ça remplisse l'aire du panneau 3m x 1m = 3 m^2. L'aire est remplie avec 3 m^2 pour une chute puis on fait 1,5 m x 1 m = 1,5 m^2 3 m^2 + 2,5 m^2 = 4,5 m^2. Le panneau est rempli avec 2 chutes qui font 4,5 m^2.

Puis 1,5 m x 0,5 m = 0,75 m^2 4,5 m^2 + 0,75 m^2 = 5,25.

Et on continue comme ça jusqu'on arrive à 1 cm^2 = et on aurait trouvé combien elle aurait utilisé de chutes.

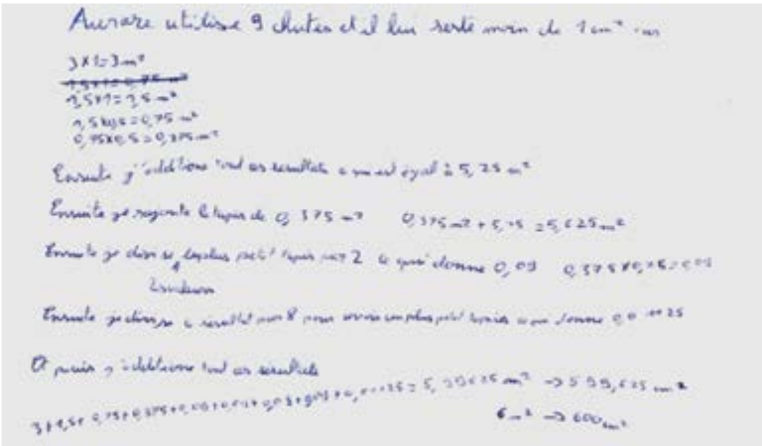
Ici les élèves restituent l'énoncé avec, en plus, les calculs des aires des trois premières chutes. Ils ont compri l'énoncé du problème mais ne vont pas plus loin, du genre « conversation du Café du commerce »*: je vous l'ai bien dit, il suffit de faire comme ça.* On peut aussi penser qu'ils se sont rendu compte que la suite d'opérations

serait longue et qu'ils ont abandonné là pour ne pas trop se fatiguer. On peut aussi imaginer qu'ils n'ont pas perçu la régularité des dimensions, ce qui les empêche d'envisager la quatrième chute et les suivantes.
Esempio 5
Per trovare quanti scampoli lei avrà incollato, bisogna trovare quanti m² misura il pannello rettangolare 3 m x 2 m = 6 m². Il rettangolo misura 6 m².
Bisogna addizionare l'area degli scampoli della tappezzeria perché riempia l'area del pannello 3m x 1m = 3 m². L'area è riempita con 3 m² per uno scampolo poi si fa 1,5 m x 1 m = 1,5 m²   3 m² + 2,5 m² = 4,5 m². Il pannello è riempito con 2 scampoli che fanno 4,5 m².
Poi 1,5 m x 0,5 m = 0,75 m² 4,5 m² + 0,75 m² = 5,25.
E si continua così fino a che si arriva a 1 cm² e avremmo trovato quanti scampoli avrà utilizzato.

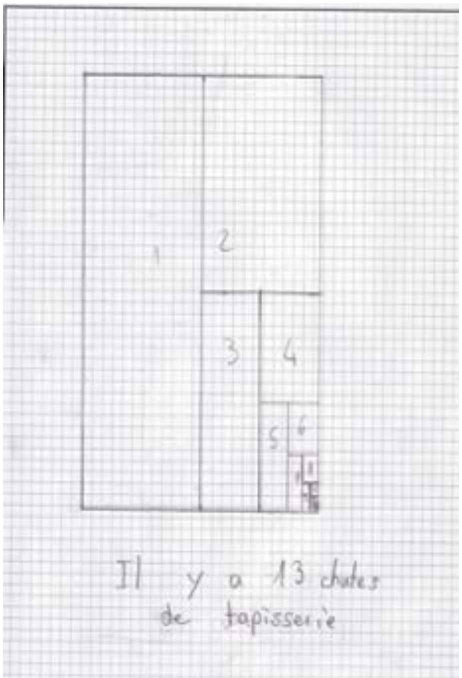
Qui gli allievi "restituiscono" l'enunciato, con in più i calcoli delle aree dei primi te scampoli. Si sono appropriati dell'enunciato ma non vanno più in là, come fosse una chiacchierata: *ve l'ho detto, basta fare così.* Possiamo anche pensare che si siano resi conto che la successione delle operazioni sarebbe stata lunga e che abbiano rinunciato per non stancarsi. Oppure possiamo pensare che non abbiano percepito le regolarità delle dimensioni, cosa che ha impedito loro di immaginare il quarto scampolo e i successivi.

IV.1.3. Suites de figures ou de dimensions, avec ou sans opérations n'allant pas au-delà de 9 ou 10 chutes / Successioni di figure o di dimensioni, con o senza operazioni, che non vanno oltre 9 o 10 scampoli

Un certain nombre de copies montrent un raisonnement et des calculs corrects quasiment jusqu'à la fin, sans toutefois utiliser des conversions en centimètres ce qui, dans plusieurs cas, conduit soit à une confusion sur le dernier terme utile de la progression avec une comparaison erronée entre le cm² et la mesure de l'aire de la surface restante à recouvrir calculée en m², soit à une conversion finale incorrecte des m² en cm² : 5,99625 m² se transforme en 599,625 cm² (comme s'il s'agissait de mesures de longueurs).
Un certo numero di elaborati presenta un ragionamento e calcoli corretti fin quasi alla fine senza però utilizzare la trasformazione in centimetri che porta in diversi casi a una confusione sull'ultimo termine utile della progressione dovuta al confronto errato tra valori ottenuti in m² e 1 cm² o ad una trasformazione finale errata di m² in cm²: 5,99625 m² viene trasformato in 599,625 cm² (come se fossero misure di lunghezze).



En fait, nous avons constaté que les erreurs dans les conversions d'unités de mesure d'aire se trouvent dans un nombre assez important de copies.
In effetti, abbiamo constatato che gli errori nella trasformazione delle unità di misura d'area si ritrovano in un numero rilevante di elaborati.
Le recours au dessin des chutes successives, même dans le cas de l'appropriation du problème, a souvent conduit les élèves à s'arrêter lorsque la chute semblait déjà très petite !
Il ricorso al disegno degli scampoli successivi, pur nel caso di appropriazione del problema, ha portato spesso gli allievi a fermarsi dove lo scampolo sembrava già molto piccolo!



IV.1.4. Réponse 16 chutes / Risposta 16 scampoli

Les copies avec réponses correctes font apparaître plusieurs types de procédures :

- Avec calcul des aires successives et de leur somme sans que les mesures aient été converties en centimètres, ce qui amène à l'écriture de nombres dont la partie décimale comporte beaucoup de chiffres.
- Avec conversion en cm^2 décrite dans l'analyse a priori: *Se rendre compte que pour effectuer les calculs, il serait opportun de transformer initialement les 6 m^2 de l'aire du panneau en 60 000 cm^2. On peut alors raisonner sur la partie à recouvrir à partir de 30 000 (correspondant à la première chute), diviser successivement par 2 les suivantes jusqu'à obtenir le premier nombre inférieur à 1, qui correspond à la 16^e chute.*

Gli elaborati con le risposte corrette evidenziano diversi tipi di procedure:

- Con calcolo successivo delle aree e loro somma dove i calcoli successivi sono effettuati senza trasformare le misure in centimetri e ciò porta alla scrittura di numeri decimali con un gran numero di cifre.
- Con trasformazione in cm^2 del tipo dell'analisi a priori: *Capire che per effettuare i calcoli, è opportuno dapprima trasformare i 6 m^2 della superficie del pannello in cm^2, trovando 60 000 cm^2, ragionare sulle parti da ricoprire: a partire da 30 000 (che corrisponde al primo scampolo), dimezzare progressivamente fino ad arrivare a un numero inferiore a 1, che corrisponde al sedicesimo scampolo.*

- D'abord, nous avons calculé l'air du panneau rectangulaire et nous avons mis toutes les unités en cm^2.

$A_{panneau} = 300\ cm \times 200\ cm$
$= 60\ 000\ cm^2$.

- Ensuite, on a calculé l'air de chaques chutes de tapisserie pour pouvoir les soustraires de l'air du panneau pour trouver l'air des chutes de tapisserie manquantes :

- $300 \times 100 = 30\ 000\ cm^2$.
- $150 \times 100 = 15\ 000\ cm^2$.
- $150 \times 50 = 7500\ cm^2$.
- $75 \times 50 = 3750\ cm^2$.

$\Rightarrow = 60\ 000 - (30000 + 15000 + 7500 + 3750)$
$= 3750\ cm^2$.

- On a trouvé la régularité pour calculer les autres plus petits morceaux de tapisserie : Il faut diviser par deux l'air d'une tapisserie pour trouver le morceau plus petit qui suit :

- $3750 \div 2 = 1875\ cm^2$
- $1875 \div 2 = 937,5\ cm^2$.
- $937,5 \div 2 = 468,75\ cm^2$.
- $468,75 \div 2 = 234,375\ cm^2$.
- $234,375 \div 2 = 117,1875\ cm^2$.
- $117,1875 \div 2 = 58,59375\ cm^2$.
- $58,59375 \div 2 = 29,296875\ cm^2$.
- $29,296875 \div 2 = 14,6484375\ cm^2$.
- $14,6484375 \div 2 = 7,32421875\ cm^2$.
- $7,32421875 \div 2 = 3,662109375\ cm^2$.
- $3,662109375 \div 2 = 1,831054688\ cm^2$
- $1,831054688 \div 2 = 0,915527343\ cm^2$
$\simeq 0,92\ cm^2$.

$\Downarrow$

Pour qu'il reste moins de $1\ cm^2$ à recouvrir avec des chutes de tapisseries sur un panneau rectangulaire, Aurore a besoin de 16 chutes.

On a trouvé la proportionalité entre chaque chute : l'aire est diviser par 2. On a additionn tous les nombres ensemble.

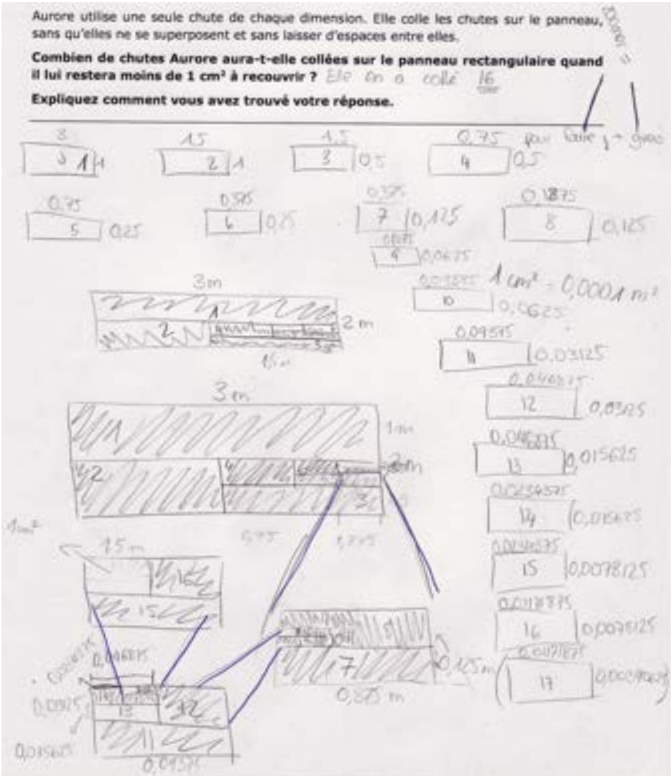
3
+1,5
+0,75
+0,375
+0,1875
+0,09375
+0,046875
+0,0234375
+0,01171875
+0,005859375
+0,0029296875
+0,001464844
+0,000732422
+0,000366211 +0,000183105
+0,000091553

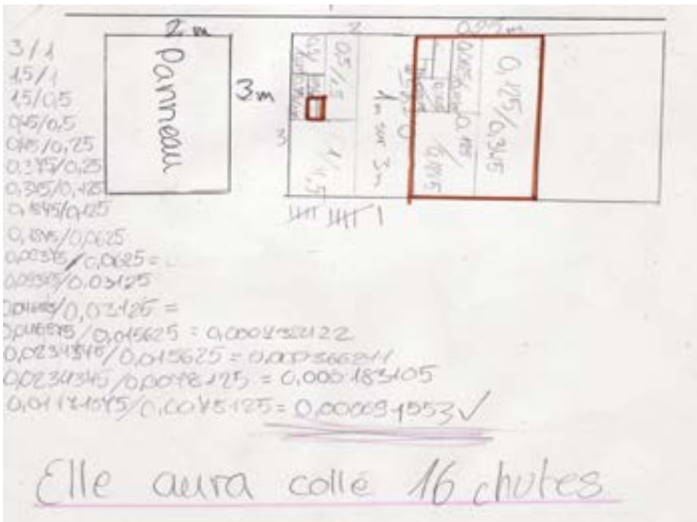
$5,999908445\ m^2 = 59999,08445\ cm^2$

Il faudra $\boxed{16\ chutes}$.

- Avec représentations des chutes et calculs de leurs dimensions et de leurs aires

- Con rappresentazione degli scampoli e calcoli delle dimensioni e delle aree



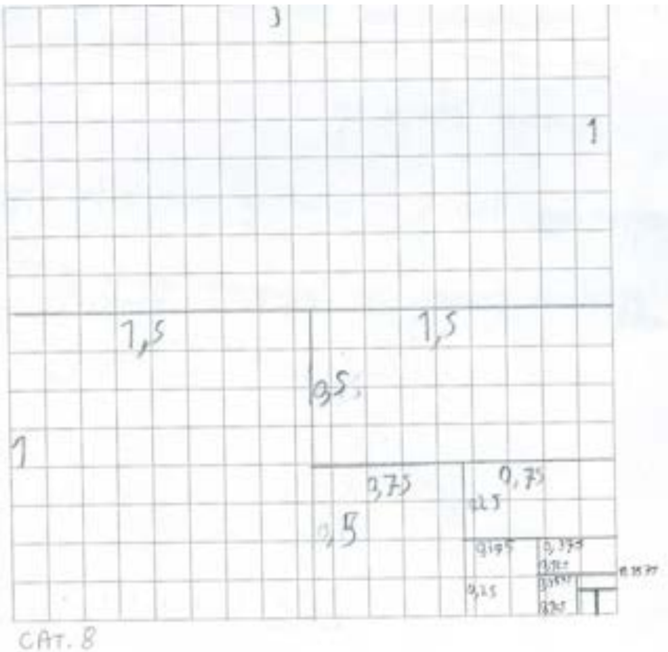


IV.2. Sintesi sezione SS / Synthèse section SS

Gli elaborati con punteggio zero sono circa la metà; di questi, una buona parte sono stati consegnati in bianco (15/29); nei rimanenti è stato disegnato il pannello suddiviso in 4 o 5 scampoli senza rispettare la regolarità oppure è stata presentata una spiegazione errata senza disegno.

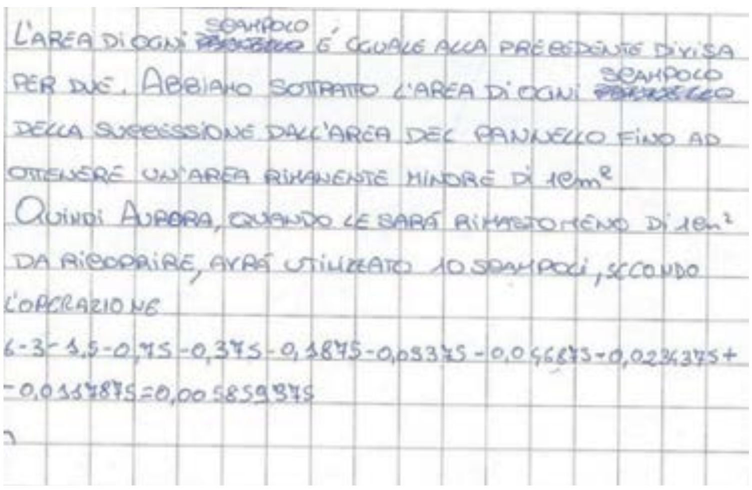
Negli elaborati con punteggio uno e due non è presente la risposta corretta, ma figurano alcuni calcoli corretti oppure il disegno del pannello che risulta suddiviso, benché non terminato, secondo la regolarità necessaria, anche, in qualche elaborato di categoria 8.

Environ la moitié des copies ont obtenu 0 point ; une bonne partie de celles-ci sont des copies blanches (15/29); parmi les autres, le panneau a été divisé en 4 ou 5 chutes sans respecter la régularité du processus, ou une explication erronée est fournie sans dessin.
Parmi les copies qui ont obtenu 1 point ou 2 points , la réponse correcte n'est pas présente. Apparaissent seulement quelques calculs corrects ou le dessin du panneau partagé correctement mais de façon inachevée —et ceci, même dans quelques copies de catégorie 8.



In diversi elaborati gli allievi hanno iniziato a calcolare l'area degli scampoli commettendo errori di calcolo dovuti, probabilmente, al fatto che, non avendo trasformato i metri in centimetri, si son trovati con numeri formati da tante cifre decimali che hanno ostacolato la prosecuzione dei calcoli.
Dans certaines copies, les élèves ont commencé à calculer l'aire des morceaux découpés en commettant des erreurs de calcul dues probablement au fait que, n'ayant pas converti les mètres en centimètres, ils se sont retrouvés avec des nombres écrits avec beaucoup de chiffres après la virgule ce qui a fait obstacle à la poursuite des calculs.

Cat. 9


L'AREA DI OGNI SCAMPOLO É UGUALE ALLA PRECEDENTE DIVISA PER DUE. ABBIAMO SOTTRATTO L'AREA DI OGNI SCAMPOLO DELLA SUCCESSIONE DALL'AREA DEL PANNELLO FINO AD OTTENERE UN'AREA RIMANENTE MINORE DI $10 m^2$
QUINDI AURORA, QUANDO LE SARÁ RIMASTO MENO DI $10 m^2$ DA RICOPRIRE, AVRÁ UTILIZZATO 10 SCAMPOLI, SECONDO L'OPERAZIONE
6-3-1,5-0,75-0,375-0,1875-0,09375-0,046875-0,0234375+
-0,01171875=0,005859375

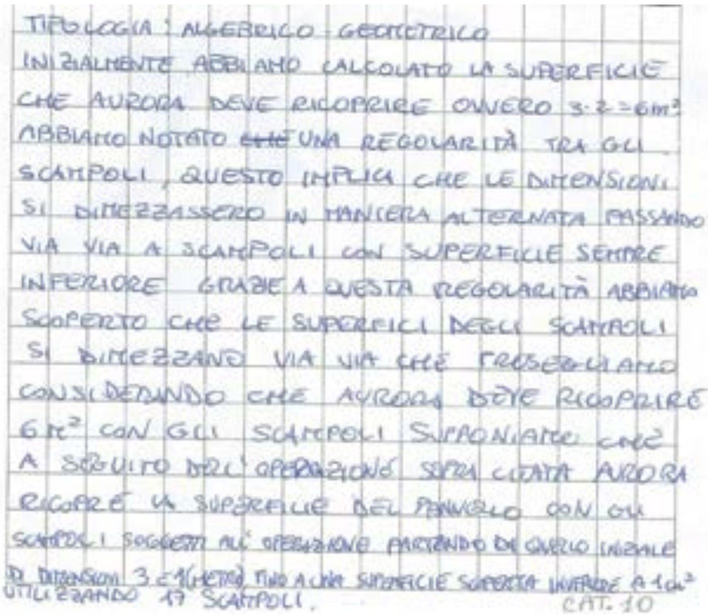
Negli elaborati con punteggio tre o quattro gli allievi hanno calcolato le aree e la loro somma e in qualche caso non hanno effettuato la trasformazione dei metri in centimetri portandoli, pur con appropriazione del problema, a trovare 15 0 17 scampoli o ancora, a "16 pezzi circa".

Parmi les copies qui ont obtenu trois ou quatre points, les élèves ont calculé les aires puis leur somme et dans certains cas n'ont pas effectué les conversions des mètres en centimètres, ce qui les a amenés, malgré une bonne approche du problème, à trouver 15 ou 17 morceaux découpés ou encore « environ 16 morceaux ».

Cat. 8


[redacted] Spiegazione
Abbiamo iniziato con trasformare da m a cm i lati degli scampoli, poi abbiamo trovato l'area. Il pannello rettangolare aveva l'area di 60.000 dall'area del pannello abbiamo sottratto l'area degli scampoli con la regolarità sempre uguale ovvero che dava sempre la metà trovando meno di 1 cm².
I pezzi utilizzati da Aurora sono 16.
(dietro si trovano i tentativi)

Cat. 10


TIPOLOGIA: ALGEBRICO GEOMETRICO
INIZIALMENTE ABBIAMO CALCOLATO LA SUPERFICIE CHE AURORA DEVE RICOPRIRE OVVERO 3·2=6m²
ABBIAMO NOTATO ~~CHE~~ UNA REGOLARITÀ TRA GLI SCAMPOLI, QUESTO IMPLICA CHE LE DIMENSIONI SI DIMEZZASSERO IN MANIERA ALTERNATA PASSANDO VIA VIA A SCAMPOLI CON SUPERFICIE SEMPRE INFERIORE GRAZIE A QUESTA REGOLARITÀ ABBIAMO SCOPERTO CHE LE SUPERFICI DEGLI SCAMPOLI SI DIMEZZANO VIA VIA CHE PROSEGUIAMO CONSIDERANDO CHE AURORA DEVE RICOPRIRE 6m² CON GLI SCAMPOLI SUPPONIAMO CHE A SEGUITO DELL'OPERAZIONE SOPRA CITATA AURORA RICOPRE LA SUPERFICIE DEL PANNELLO CON GLI SCAMPOLI SOGGETTI ALL'OPERAZIONE PARTENDO DA QUELLO INIZIALE DI DIMENSIONI 3 e 1(METRO) FINO A UNA SUPERFICIE SCOPERTA INFERIORE A 1cm² UTILIZZANDO 17 SCAMPOLI.
CAT. 10

Cat. 10

IV. 3. Sintesi sezione PU / Synthèse section PU

La prima osservazione è che nella categoria 8 non ci sono elaborati corretti e completi. Molti elaborati con punteggio 0 non hanno risposta (13), 6 nella categoria 9 e 5 nella categoria 10.

L'errore più frequente è l'errata trasformazione da una unità di misura all'altra.

Si evidenzia una difficoltà nell'operare con numeri con molte cifre decimali, pur utilizzando la calcolatrice, ed errori nell'approssimazione.

La première observation est que, en catégorie 8 il n'y a pas de copie à la fois correcte et complète. De nombreuses copies qui ont obtenu 0 point n'ont pas de réponse (13), 6 en catégorie 9 et 5 en catégorie 10.

L'erreur la plus fréquente est due à l'absence de conversion d'une unité de mesure ou à une conversion erronée.

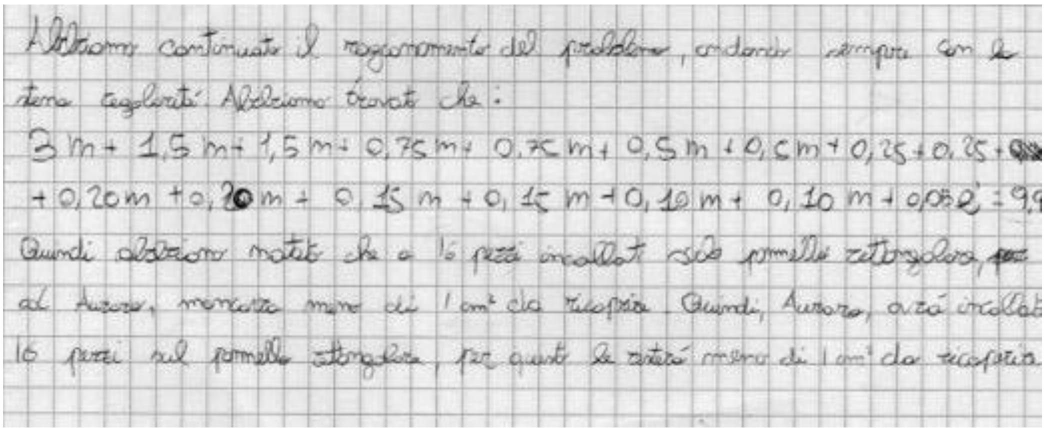
On note une difficulté à calculer avec des nombres s'écrivant avec de nombreux chiffres après la virgule, même en utilisant la calculatrice, et des approximations erronées.

Cat. 9

Il tipo di errore: sommare tutte le lunghezze come se fossero superfici, è presente in tutte e tre le categorie e conferma come l'ostacolo area – perimetro persiste tra gli allievi liceali o di istituti tecnici!

L'erreur qui consiste à additionner toutes les longueurs comme si elles étaient des aires, est présente dans les trois catégories et confirme que le conflit aire-périmètre persiste chez les élèves de lycée ou de bons instituts techniques.

Cat. 8



Abbiamo continuato il ragionamento del problema, andando sempre con le stime tagliate. Abbiamo trovato che:

3 m + 1,5 m + 1,5 m + 0,75 m + 0,75 m + 0,5 m + 0,5 m + 0,25 + 0,25 +

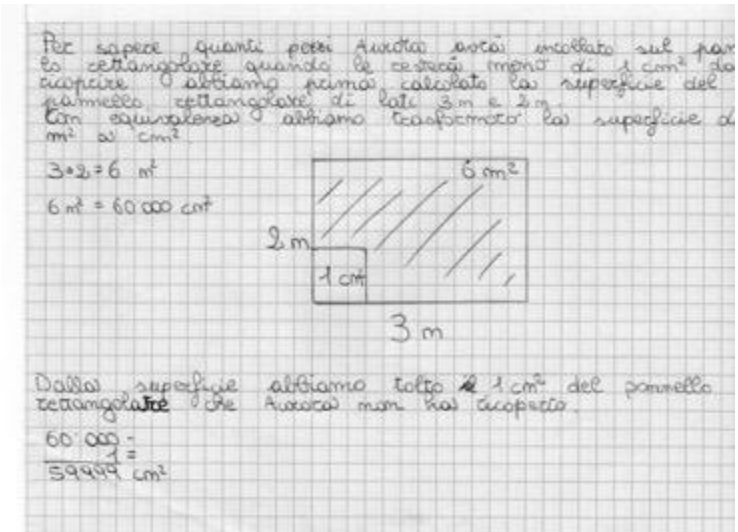
+ 0,20 m + 0,20 m + 0,15 m + 0,15 m + 0,10 m + 0,10 m + 0,05

Quindi abbiamo notato che a 16 pezzi incollati sul pannello rettangolare, per Aurora, mancava meno di 1 cm² da ricoprire. Quindi, Aurora, avrà incollato 16 pezzi sul pannello rettangolare, per questo le resterà meno di 1 cm² da ricoprire.

È interessante l'approccio di un elaborato che, a differenza di altri, spiega "*dalla superficie abbiamo tolto 1 cm^2 rettangolare che Aurora non ha ricoperto*". È vero che gli allievi non giungono alla soluzione ma si pongono e sviluppano correttamente la situazione problematica.

Dans une copie, très intéressante, les élèves, contrairement à d'autres, expliquent que « de la surface nous avons enlevé 1 cm^2 rectangulaire qu'Aurora ne couvrait pas ». Il est vrai que les élèves ne parviennent pas à la solution, mais ils posent et développent correctement la situation problématique.

Cat. 8



Per sapere quanti pezzi Aurora avrà incollato sul pannello rettangolare quando le resterà meno di 1 cm² da ricoprire abbiamo prima calcolato la superficie del pannello rettangolare di lati 3 m e 2 m.
Con equivalenza abbiamo trasformato la superficie da m² a cm²

3 • 2 = 6 m²

6 m² = 60 000 cm²

Dalla superficie abbiamo tolto 1 cm² del pannello rettangolare che Aurora non ha ricoperto.

60 000 -
1 =
59999 cm²

IV.4. Sintesi sezione RMG / Synthèse section RMG

Sono stati esaminati i 42 elaborati di questa sezione, di cui 28 di categoria 8, 8 di categoria 9 e 6 di categoria 10.

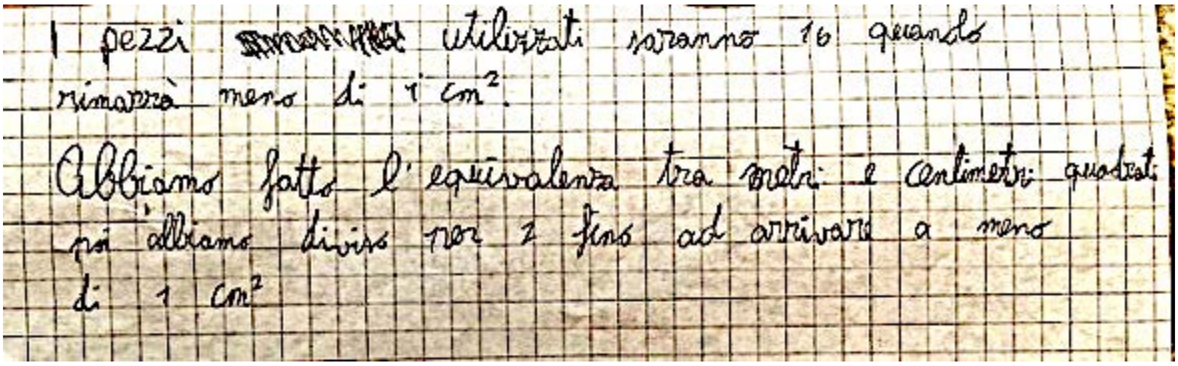
La regolarità nella quale si distribuiscono gli scampoli si evidenzia in 6 elaborati di categoria 8 e in 6 classi di categoria 9.

Per esempio, l'elaborato di categoria 8, che segue.

Les 42 copies de cette section ont été examinées, dont 28 de catégorie 8, 8 de catégorie 9 et 6 de catégorie 10.

La régularité dans laquelle les chutes se distribuent est mise en évidence dans 6 copies de catégorie 8 et dans 6 copies de catégorie 9.

Par exemple, la copie de catégorie 8, qui suit.


I pezzi utilizzati saranno 16 quando rimarrà meno di 1 cm^2.
Abbiamo fatto l'equivalenza tra metri e centimetri quadrati poi abbiamo diviso per 2 fino ad arrivare a meno di 1 cm^2

Benché non presenti i calcoli, mostra la piena comprensione del problema e la correttezza del ragionamento che rispecchia un passaggio dell'analisi a priori.

- Capire che per effettuare i calcoli, è opportuno dapprima trasformare i 6 m^2 della superficie del pannello in cm^2, trovando 60 000 cm^2

- Ragionare sulle parti da ricoprire: a partire da 30 000 (che corrisponde al primo scampolo), dimezzare progressivamente fino ad arrivare a un numero inferiore a 1, che corrisponde al sedicesimo scampolo.

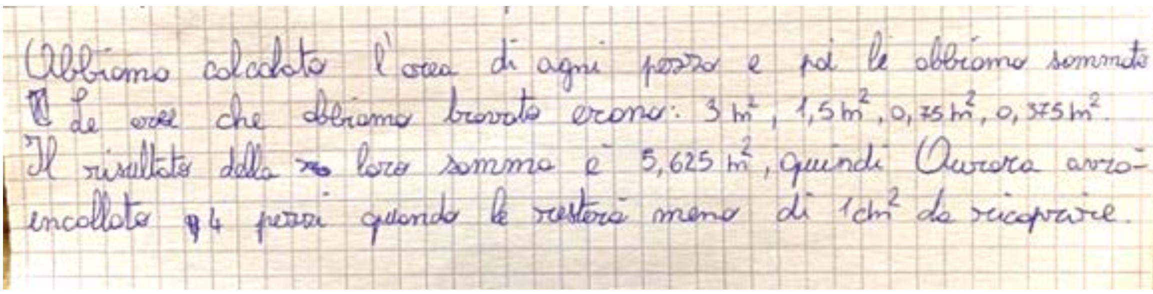
Bien que cette copie ne présente pas les calculs, elle témoigne d'une pleine compréhension du problème et du raisonnement correct qui correspond à une étape de l'analyse a priori :

- Se rendre compte que pour effectuer les calculs, il serait opportun de transformer initialement les 6 m^2 de l'aire du panneau en 60 000 cm^2.

- On peut alors raisonner sur la partie à recouvrir à partir de 30 000 (correspondant à la première chute), diviser successivement par 2 les suivantes jusqu'à obtenir le premier nombre inférieur à 1, qui correspond à la 16e chute.

Un altro elaborato di categoria 8, invece, evidenzia la non appropriazione del problema dove ci si limita a fare calcoli delle aree degli scampoli indicati nell'enunciato.

Une autre copie de catégorie 8 met en revanche en évidence la « non-appropriation » du problème et où les élèves se limitent à calculer les aires des chutes indiquées dans l'énoncé.

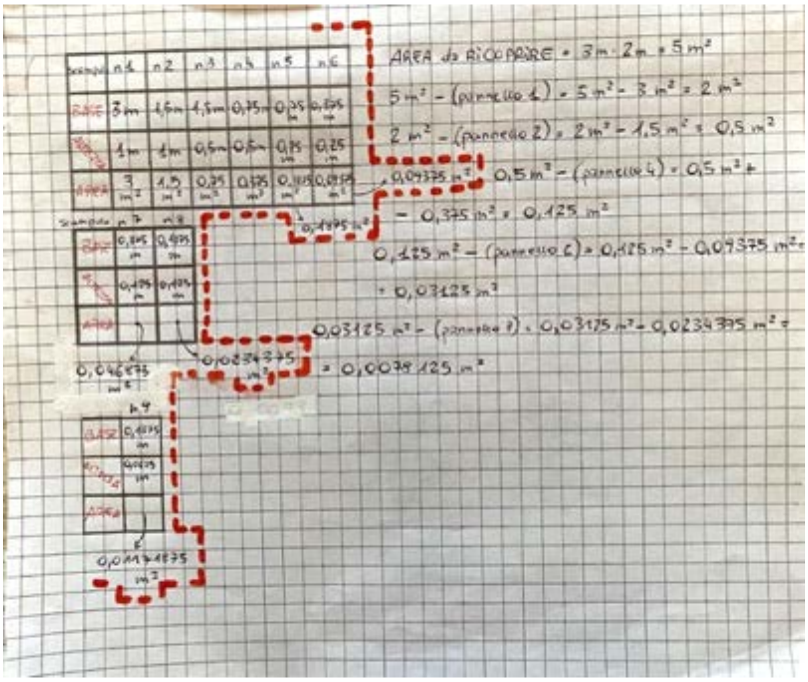

Abbiamo calcolato l'area di ogni pezzo e poi le abbiamo sommate
Le aree che abbiamo trovato erano: 3 m^2, 1,5 m^2, 0,75 m^2, 0,375 m^2.
Il risultato della loro somma è 5,625 m^2, quindi Aurora avrà incollato 4 pezzi quando le resterà meno di 1 cm^2 da ricoprire.

In alcuni elaborati la risposta errata (numero minore di scampoli), è probabilmente legata al numero di scampoli della rappresentazione grafica fatta, e gli allievi non riescono pertanto a generalizzare.

Dans certaines copies, la réponse incorrecte (un nombre insuffisant de chutes) est probablement due au nombre de chutes de la représentation graphique réalisée, et les élèves sont incapables de généraliser.

Nell'esempio che segue, ancora di categoria 8, si evince l'interessante organizzazione, scampolo per scampolo, della successione delle dimensioni fino al nono; gli allievi hanno applicato correttamente i calcoli di area, hanno sottratto sistematicamente le diverse aree, partendo purtroppo da 5 metri quadri invece che da 6. Questo errore forse impedisce loro di vedere che l'area rimanente è sempre metà della precedente e si sono fermati prima di arrivare "al centimetro quadrato".

Dans l'exemple qui suit, toujours de catégorie 8, on observe une organisation intéressante, chute par chute, de la succession des dimensions de la première à la neuvième ; les élèves ont correctement calculé les aires, ils les ont systématiquement soustraites, mais à partir de 5 mètres carrés au lieu de 6. Cette erreur les empêche peut-être de voir que l'aire restante est toujours la moitié de la précédente et ils se sont arrêtés avant d'atteindre « le centimètre carré ».



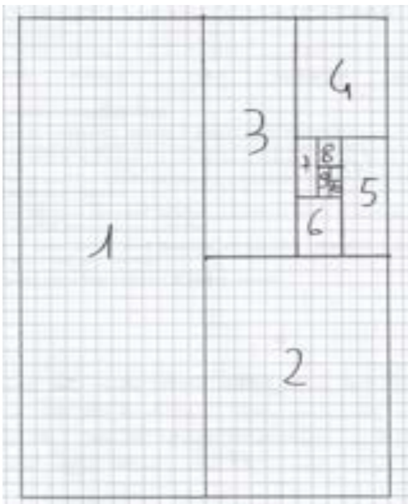
L'errata trasformazione da metri quadri a centimetri quadri si rileva in tutte e tre le categorie.
In alcune classi di categoria 8 e in una di categoria 9, non è stata compresa la domanda del testo "Quanti pezzi" e quindi il numero dato come risposta viene abbinato a parole come "volte" o "pannelli".
Incomprensione forse dovuta all'utilizzazione, nell'enunciato in italiano (peraltro un po' diverso dall'originale), di due termini differenti "scampolo" e "pezzo" per indicare il medesimo oggetto.
L'erreur de conversion des mètres carrés en centimètres carrés se retrouve dans les trois catégories.
Dans certaines classes de catégorie 8 et dans une de catégorie 10, la question « combien de chutes » de l'énoncé n'a pas été comprise et le nombre donné en réponse est accompagné de mots comme « fois » ou « panneaux ».
Incompréhension peut-être due à l'utilisation dans l'énoncé en italien des deux termes différents « chute » et « morceau » pour indiquer le même objet.

IV.5. Sintesi sezione PR / Synthèse section PR

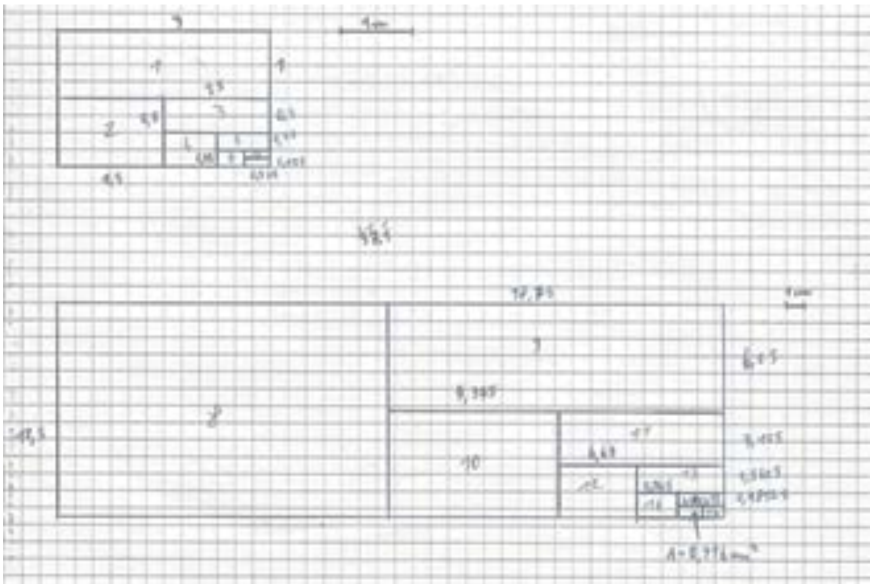
Sono stati esaminati 23 elaborati di cat.8, 43 di cat.9 e 27 di cat.10.
I punteggi medi aumentano da una categoria alla successiva, in modo significativo dalla cat.8 alla cat.10: cat.8 m=1,3; cat.9 m=1,4; cat.10 m=2,2. Solo pochi elaborati sono "in bianco".
Frequente, soprattutto in cat.8 e 9, la risposta "10 pezzi" legata all'errore di conversione dai m^2 ai cm^2 (1 cm^2 è stato erroneamente identificato con 0,01 m^2). In cat. 8 si riscontra anche la risposta "6 pezzi" dovuta allo stesso tipo di errore (1 cm^2 viene identificato con 0,1 m^2), che riteniamo ancora meno comprensibile.
23 copies de catégorie 8, 43 de catégorie 9 et 27 de catégorie 10 ont été examinées.
Les moyennes augmentent d'une catégorie à l'autre, de manière significative de la catégorie 9 à la catégorie 10: catégorie 8 m = 1,3 ; catégorie 9 m = 1,4 ; catégorie 10 m = 2,2. Il n'y a que quelques copies blanches.
La réponse « 10 morceaux », due à l'erreur de conversion des m^2 aux cm^2 (1 cm^2 a été identifié par erreur à 0,01 m^2) est fréquente, surtout en catégorie 8 et 9. En catégorie 8, la réponse « 6 morceaux » est également proposée, elle est due au même type d'erreur (1 cm^2 est associé à 0,1 m^2), que nous trouvons encore plus surprenante.

Alcuni elaborati non vanno oltre ai dati del testo nella costruzione dei pezzi successivi e si limitano a lavorare, con calcoli e/o disegni, solo con i 4 pezzi assegnati.
Altre risposte non sono del tutto comprensibili anche a causa delle poche motivazioni dei calcoli svolti.
Certaines copies ne vont pas au-delà des données de l'énoncé dans la construction des pièces suivantes et se limitent à travailler, avec des calculs et / ou des dessins, uniquement avec les 4 pièces attribuées.
D'autres réponses ne sont également pas tout à fait compréhensibles en raison du très peu d'explications données pour les calculs effectués.

Interessante il ruolo del disegno, molto difficile da completare con tutti i 16 pezzi necessari. In qualche caso (nel seguente con buona probabilità) è possibile che il cm^2 mancante sia stato rilevato direttamente sul disegno, senza riflettere sulla scala utilizzata.
"...abbiamo diviso in due ogni volta i pezzi del rettangolo per arrivare a completarlo tutto fino a meno di 1 cm^2. Infine abbiamo contato tutti i pezzi e siamo arrivati a 10." (nel disegno effettivamente il pezzo mancante ha le dimensioni di circa 1 cm^2.)
Le rôle du dessin, très difficile à réaliser avec les 16 chutes nécessaires, est intéressant. Dans certains cas (dans celui qui suit avec une bonne probabilité), il est possible que le cm^2 manquant ait été détecté directement sur le dessin, sans réfléchir à l'échelle utilisée.
« ... *Nous avons divisé les morceaux du rectangle en deux à chaque fois pour terminer le tout jusqu'à moins de 1 cm^2. Finalement, nous avons compté toutes les chutes et nous sommes arrivés à 10.* » (Sur le dessin, en fait, la pièce manquante a les dimensions d'environ 1 cm^2.)

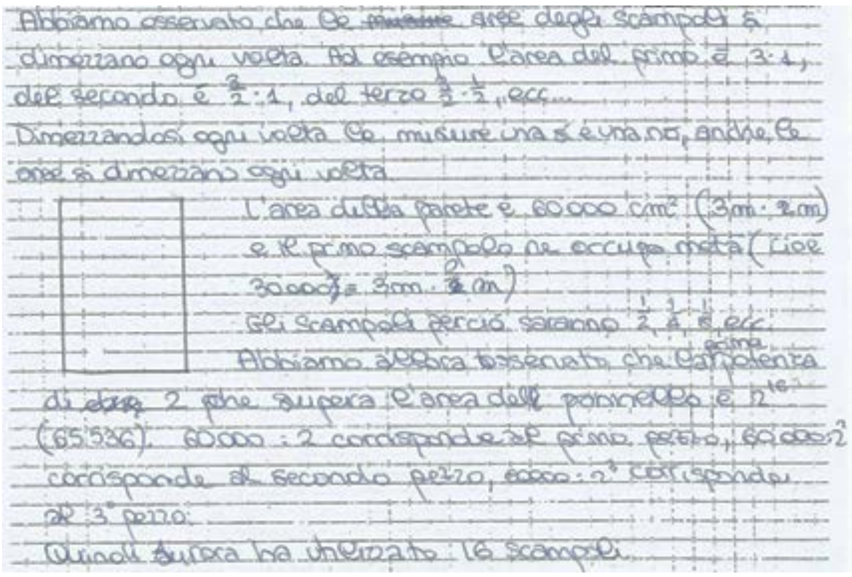


Un gruppo di cat. 10 è riuscito a rappresentare in modo corretto tutti i pezzi, facendo due disegni di cui il secondo è uno "zoom" di un particolare del primo. Geniale!
Un groupe de cat. 10 a réussi à représenter correctement toutes les pièces, en réalisant deux dessins dont le second est un « zoom » d'un détail du premier. Génial !



Per quanto riguarda i gruppi che sono arrivati ad una conclusione corretta, solitamente hanno lavorato su numeri interi a partire dall'area di 60000 cm². Talvolta hanno evitato le ripetute sottrazioni osservando che la parte rimanente equivaleva all'ultimo pezzo aggiunto. In particolare riportiamo questo elaborato di cat. 9 in cui emerge in modo significativo il ruolo delle potenze di 2.

En ce qui concerne les groupes qui sont arrivés à une conclusion correcte, la plupart ont travaillé sur des nombres entiers à partir de l'aire de 60 000 cm². Parfois, ils ont évité les soustractions répétées en observant que la partie restante était équivalente à la dernière pièce ajoutée. En particulier, nous reportons ci-dessous une copie de catégorie. 9 dans laquelle le rôle des puissances de 2 apparaît de manière significative.



Abbiamo osservato che le ~~misure~~ aree degli scampoli si dimezzano ogni volta. Ad esempio l'area del primo è 3 · 1, del secondo è $\frac{3}{2} \cdot 1$, del terzo $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$, ecc...
Dimezzandosi ogni volta le misure una sì e una no, anche le aree si dimezzano ogni volta.
L'area della parete è 60 000 cm² (3 m · 2 m) e il primo scampolo ne occupa metà (cioè 30 000 = 3 m · 1 m)
Gli scampoli perciò saranno $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ecc.
Abbiamo allora osservato che la prima potenza di 2 che supera l'area della parete è 2^{16} (65 536). 60 000 : 2 corrisponde al primo pezzo, 60 000 : 2² corrisponde al secondo pezzo, 60 000 : 2³ corrisponde al 3° pezzo.
Quindi Aurora ha utilizzato 16 scampoli.

In conclusione, riteniamo che un certo numero di allievi abbia in generale ben compreso la situazione proposta dal problema (la disposizione dei pezzi, i successivi dimezzamenti, l'attenzione sulla parte ancora da ricoprire, la richiesta "meno di…"), ma poi si sono scontrati con difficoltà "tecniche" legate:
- alla rappresentazione che deve essere molto accurata e tenere conto di un fattore di scala~~,~~
- al calcolo con numeri decimali che diventano molto "lunghi"
- e soprattutto alla conversione delle unità di misura di aree.

Pour conclure, nous pensons qu'une partie des élèves a bien compris la situation proposée par le problème (la disposition des chutes, les réductions successives de moitié, l'attention portée à la partie encore à recouvrir, la demande « moins de ... »), mais ensuite ils se sont heurtés à des difficultés « techniques » liées :
- à la représentation qui doit être très précise et prendre en compte un facteur d'échelle,
- au calcul avec des nombres décimaux qui deviennent très « longs »
- et, surtout, à la conversion des unités de mesure d'aire.

IV.6. Sintesi sezione CA / Synthèse section CA

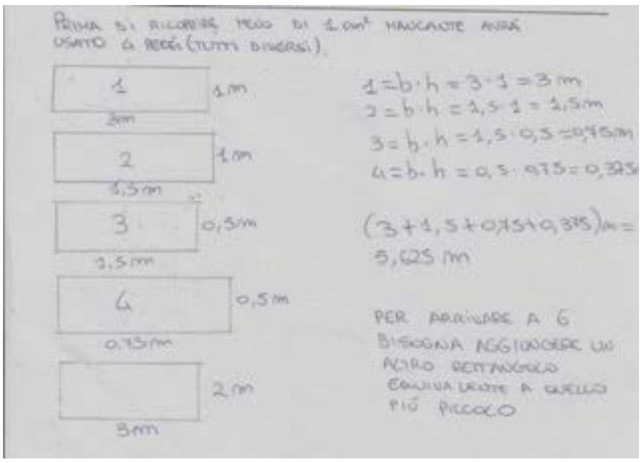
Sono stati esaminati 38 elaborati delle categorie 8-9-10.
Gli elaborati con punteggio zero sono circa la metà; di questi, una buona parte sono stati consegnati in bianco. (11/18); nei rimanenti è stato disegnato il pannello suddiviso in 4 - 6 o 8 scampoli senza rispettare la regolarità, oppure, in alcuni casi, è stata fornita una spiegazione errata senza disegno, del tipo "abbiamo rappresentato nel foglio un rettangolo da 30 × 20 quadretti e abbiamo iniziato a riempire fino a lasciare un cm^2".
38 copies des catégories 8, 9 et 10 ont été examinées.
Il y a environ la moitié de copies auxquelles a été attribué 0 point; parmi elles, une bonne partie sont blanches (11/18). Pour les autres copies, le panneau a été divisé en 4, 6 ou 8 parties, dessinées sans respecter la régularité, ou, dans certains cas, une explication incorrecte a été fournie sans dessin, comme « nous avons représenté un rectangle de 30 × 20 carrés sur la feuille et nous avons commencé à le remplir pour laisser un cm^2 ".

Negli elaborati con punteggio uno e due non è presente la risposta corretta, ma la bozza del disegno con la suddivisione del pannello, qualche calcolo e o la successione, corretti.
In effetti, gli allievi, anziché 16 scampoli, ne trovano di meno o di più 10-17-24, senza "dimostrazione", ma "ragionano" sulla misura finale.
In 5/18 elaborati è stata fatta un'errata trasformazione di metri in centimetri e di m^2 in cm^2.
Dans les copies avec 1 ou 2 points, on ne trouve pas de réponse correcte, mais des brouillons de dessin avec la subdivision du panneau, quelques calculs et / ou la succession, généralement corrects.
En fait, les élèves, au lieu de 16 chutes, en trouvent moins ou plus (10-17-24), sans une « démonstration », mais ils « raisonnent » sur la mesure finale.
Dans 5 copies sur 18, on relève une conversion incorrecte des mètres en centimètres et du m^2 en cm^2.

- In alcuni elaborati esaminati vengono disegnati i vari rettangoli senza mantenere la proporzionalità indicata nell'enunciato.

Dans certaines copies examinées, les différents rectangles sont dessinés sans respecter les rapports de proportionnalité indiqués dans l'énoncé.

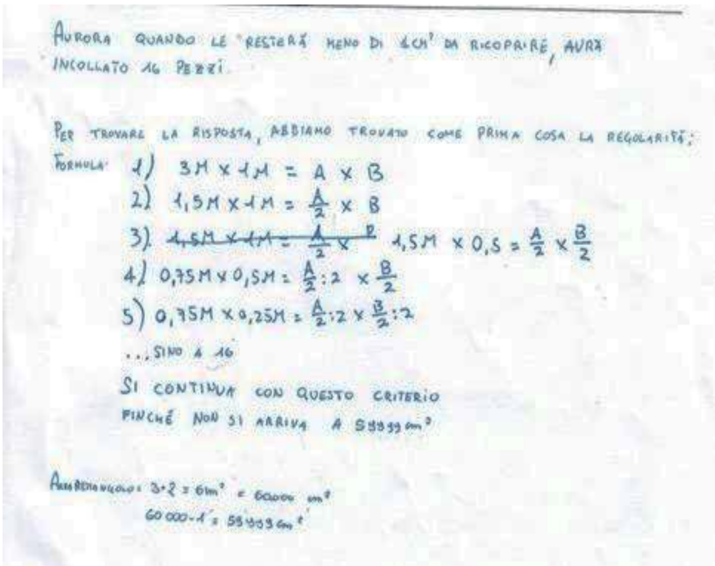
Cat. 9



- Nella maggior parte degli elaborati soprattutto categoria 9 e 10 non viene rappresentata la successione delle figure , gli allievi scrivono solamente "abbiamo fatto, abbiamo rappresentato".

- Nella maggior parte degli elaborati è riportato l'inizio corretto delle prime quattro righe.
- Dans la plupart des copies, notamment des catégories 9 et 10, la suite des figures n'est pas représentée bien que les élèves écrivent « nous avons fait », nous avons « représenté ».
- La plupart des copies montrent un début correct des quatre premières chutes.

Cat. 10



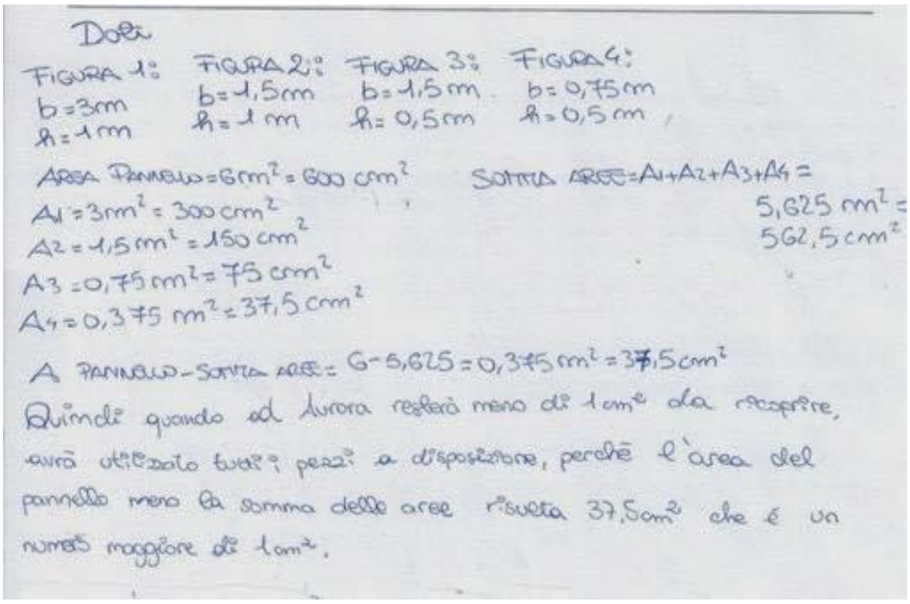
AURORA QUANDO LE RESTERÀ MENO DI 1CM² DA RICOPRIRE, AVRÀ INCOLLATO 16 PEZZI.

PER TROVARE LA RISPOSTA, ABBIAMO TROVATO COME PRIMA COSA LA REGOLARITÀ:
FORMULA:
1) $3M \times 1M = A \times B$
2) $1{,}5M \times 1M = \frac{A}{2} \times B$
3) $\cancel{1{,}5M \times 1M = \frac{A}{2} \times B}$ $1{,}5M \times 0{,}5 = \frac{A}{2} \times \frac{B}{2}$
4) $0{,}75M \times 0{,}5M = \frac{A}{2}:2 \times \frac{B}{2}$
5) $0{,}75M \times 0{,}25M = \frac{A}{2}:2 \times \frac{B}{2}:2$
..., SINO A 16
SI CONTINUA CON QUESTO CRITERIO FINCHÉ NON SI ARRIVA A 59999 cm²

RETTANGOLO: $3 \cdot 2 = 6m^2 = 60000\ cm^2$
$60000 - 1 = 59999\ cm^2$

- alcuni elaborati mostrano una errata trasformazione in centimetri.
- certaines copies font état d'une conversion incorrecte en centimètres carrés

Cat. 8

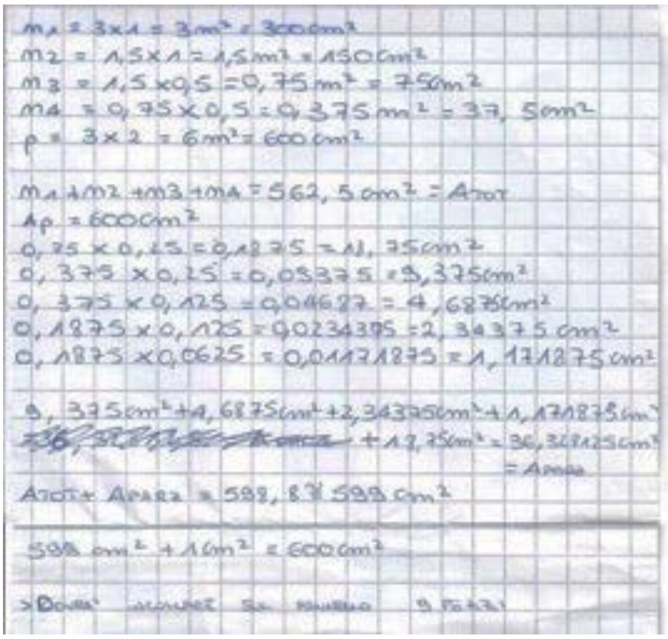


Dati
FIGURA 1: b=3cm h=1cm
FIGURA 2: b=1,5cm h=1 cm
FIGURA 3: b=1,5cm h=0,5cm
FIGURA 4: b=0,75cm h=0,5cm

AREA PANNELLO = $6m^2 = 600\ cm^2$
SOMMA AREE = $A_1+A_2+A_3+A_4 = 5{,}625\ m^2 = 562{,}5\ cm^2$
$A_1 = 3m^2 = 300\ cm^2$
$A_2 = 1{,}5\ m^2 = 150\ cm^2$
$A_3 = 0{,}75\ m^2 = 75\ cm^2$
$A_4 = 0{,}375\ m^2 = 37{,}5\ cm^2$

A PANNELLO − SOMMA AREE = $6 - 5{,}625 = 0{,}375\ m^2 = 37{,}5\ cm^2$
Quindi quando ad Aurora resterà meno di 1cm² da ricoprire, avrà utilizzato tutti i pezzi a disposizione, perché l'area del pannello meno la somma delle aree risulta 37,5cm² che è un numero maggiore di 1cm².

Cat. 10



Il problema è molto interessante dal punto di vista didattico perché, anche partendo dall'errore, consente all'insegnante di approfondire competenze che spesso sembrano apparentemente raggiunte, ma poi nella pratica non lo sono, come ad esempio il concetto di area e superficie e la trasformazione delle unità di misura nonché l'uso consapevole in situazioni reali.
Le problème est très intéressant du point de vue didactique car même à partir de l'erreur, il permet à l'enseignant d'approfondir des compétences qui, souvent, semblent acquises mais ne le sont pas dans la pratique, en particulier les concepts d'aire et de conversion des unités de mesure ainsi que leur application consciente dans des situations réelles.

IV.7. Synthèse générale / Sintesi generale

Nous sommes frappés par le manque de réussite de ce problème (qu'on peut estimer à 20% : 4 pts., 3 pts et 2 pts ou même moins pour la catégorie 8).
Siamo un po' impressionati dalla bassa riuscita di questo problema (che possiamo stimare al 20% tra i 4 punti, i 3 punti e i 2 punti o anche meno per la categoria 8).

- Parmi les productions des élèves, on observe tout d'abord un nombre non négligeable de feuilles blanches correspondant à une « non-appropriation » totale. / Tra gli elaborati osserviamo prima di tutto un numero non esiguo di fogli bianchi che corrispondono a una "non appropriazione" totale.

- Puis on remarque les difficultés à percevoir la régularité *« 3 m sur 1 m pour la plus grande ; puis 1,5 m sur 1 m ; puis 1,5 m sur 0,5 m; puis 0,75 m sur 0,5 m ; … et ainsi de suite avec la même régularité. »* au-delà de la quatrième chute ou, pour ceux qui se sont appuyés sur un dessin, à représenter les chutes dans le rectangle / Poi notiamo le difficoltà a percepire la regolarità al di là del quarto scampolo: *«3 m e 1 m per il più grande; poi 1,5 m e 1 m; poi 1,5 m e 0,5 m; poi 0,75 m e 0,5 m; … e così via con la stessa regolarità.»* o, per coloro che si sono appoggiati ad un disegno, a rappresentare gli scampoli nel rettangolo.

- Vient ensuite la partie des opérations avec les calculs des aires selon les deux procédures proposées dans l'analyse a priori : la recherche de l'aire totale des chutes (inspirée par l'énoncé où s'ajoutent progressivement les aires des chutes) et qui demande à chaque fois une suite d'additions (procédure « longue ») et une soustraction ou l'autre procédure qui s'intéresse à l'aire de la partie non recouverte (procédure « courte », beaucoup plus simple), qui se

limite à une suite de divisions par 2. / Viene poi la parte delle operazioni con i calcoli delle aree secondo le due procedure proposte nell'analisi a priori: la ricerca dell'area totale degli scampoli (ispirata dall'enunciato dove si aggiungono progressivamente le aree degli scampoli) e che richiede ogni volta una successione di addizioni (procedura "lunga") e una sottrazione o l'altra procedura che si interessa all'area della parte ancora non ricoperta, (procedura "corta", molto più semplice), che si limita a una successione di divisioni per 2.
Cette partie des opérations exige, du point de vue de l'élève qui a choisi la procédure longue, de fastidieuses écritures de nombres décimaux nécessitant beaucoup de chiffres et une très grande rigueur pour les recopier sans erreurs depuis l'écran de la calculatrice, ainsi qu'une répétition des opérations dès le début pour chaque nouvelle chute. (Il faudrait un tableur ou l'usage précis des mémoires de la calculatrice pour éviter cette répétition.) / Questa parte delle operazioni esige, dal punto di vista dell'allievo che ha scelto la procedura lunga, fastidiose scritture di numeri decimali con numerose cifre decimali e un gran rigore nel ricopiarli senza errori dallo schermo della calcolatrice, così come una ripetizione delle operazioni dall'inizio per ciascun nuovo scampolo (ci vorrebbe un tabulatore o l'uso preciso della memoria della calcolatrice per evitare tale ripetizione).
A cela s'ajoute la difficulté des transformations d'unités. La procédure longue part de mesures en mètres et l'usage de nombres décimaux où il faut déterminer qu'il faut atteindre un nombre supérieur à 5,9999 (= 6 – 0,0001) pour atteindre le but si l'on sait que 1 cm^2 = 0,0001 m^2 ! / A questo si aggiunge la difficoltà delle trasformazioni di unità. La procedura lunga parte da misure in metri e l'uso di numeri decimali dove bisogna determinare il fatto che è necessario ottenere un numero superiore a 5,9999 (= 6 – 0,0001) per arrivare all'obiettivo se si sa che 1 cm^2 = 0,0001 m^2!
La procédure courte repose sur le but à atteindre (première mesure inférieure à 1 cm$^{2)}$) à partir de 6 m^2 ou à partir de 60 000 cm^2. Dans un cas comme dans l'autre il faut non seulement maîtriser les transformations de mesures de m en cm et de m^2 en cm^2, mais encore y penser (stade beaucoup plus évolué que celui des transformations « mécaniques » ou « algorithmiques »). / La procedura corta si basa sull'obiettivo da raggiungere (meno di 1 cm^2) e induce forse a partire da 60 000 cm^2 piuttosto che da 6 m^2. In ogni caso bisogna non solo saper gestire le trasformazioni di misure da m a cm e da m^2 a cm^2, ma anche di pensarvi (stadio molto più evoluto rispetto a quello di trasformazioni «meccaniche» o «algoritmiche»).

- Le passage de la procédure longue à la procédure courte correspond à la prise de conscience – immédiatement ou au cours des premiers calculs d'aires – que chaque chute ajoutée correspond à une division par 2 de l'aire restante. Puis, avec les unités les plus « convenables » (cm^2), « celui qui sait » affiche 60 000 sur sa calculatrice et répète la suite des deux touches « : » et « 2 » en les comptant soigneusement, jusqu'à ce que s'affiche un nombre < 1. / Il passaggio dalla procedura lunga alla procedura corta corrisponde alla presa di coscienza – immediata o dopo i primi calcoli – che ogni scampolo aggiunto corrisponde a una divisione per 2 dell'area rimanente. Poi, con le unità più "convenienti" (cm^2), «colui che ha capito» scrive 60 000 sulla sua calcolatrice e ripete la successione di due tasti «:» e «2» contandoli con attenzione, fino a che compaia un numero < 1.

Le fait que, malgré tout, quelques groupes d'élèves (certes peu nombreux) aient correctement résolus le problème nous amène à penser qu'il était à leur portée.
C'est une activité inhabituelle mais riche en contenu, et dans laquelle entre autres, les conversions d'unités de mesures acquièrent du sens, au lieu d'être de simples exercices répétitifs détachés de situations dans lesquelles on peut appréhender leur efficacité.
Il fatto che comunque alcuni gruppi di allievi (benché poco numerosi) abbiano risolto correttamente, ci porta a pensare che il problema potesse essere alla loro portata.
Si tratta di un'attività non usuale a scuola, ma ci sembra ricca di contenuti, infatti, fra le altre cose, le trasformazioni di unità di misura acquistano un senso, invece di essere solo degli esercizi ripetitivi e avulsi da situazioni nelle quali si possa cogliere la loro efficacia.

On a évoqué l'analyse a posteriori comme premier objectif des recherches sur un problème. Un deuxième objectif qui suit l'analyse a posteriori est d'en profiter pour l'enseignement.
Si era parlato dell'analisi a posteriori come di un primo obiettivo delle ricerche su un problema. Un secondo obiettivo che segue l'analisi a posteriori è di tarne profitto per l'insegnamento.

V. Indications didactiques / Indicazioni didattiche

L’analisi di elaborati di diverse sezioni ha messo bene in evidenza che una delle difficoltà che gli allievi hanno incontrato nella risoluzione del problema del pannello decorativo, è stata l’errata conversione delle unità di misura in gioco, o ancora, la mancanza di consapevolezza dell’utilità del passaggio da un’unità di misura ad un’altra.
Queste difficoltà sono, da un lato, insite nel concetto di misura di grandezze e, dall’altro, pensiamo siano di tipo didattico.
Poiché le analisi degli elaborati hanno mostrato come gli allievi delle classi della Svizzera romanda abbiano trovato meno difficoltà rispetto agli allievi delle classi di altre sezioni francesi e italiane, abbiamo pensato che fosse utile verificare come l’argomento “conversione di unità”~~)~~ è proposto in libri di testo di questi tre paesi. In appendice sono riportate alcune considerazioni su alcuni di libri di testo, in merito a tale argomento.
La misura è un’operazione che (in *La matematica dalla scuola materna alla maturità,* edizione italiana[2]) viene definita “molto elaborata”; basti pensare che i numeri razionali e gli irrazionali positivi, sono generati proprio “dalle misure”.
Comme l’analyse des copies des différentes sections l’a bien mis en évidence, une des difficultés que les élèves ont rencontré dans la résolution du problème “Panneau décoratif” a été la mauvaise conversion des unités de mesure en jeu ou encore, l’absence de prise de conscience du nécessaire passage d’une unité de mesure à l’autre.
Ces difficultés sont, d’une part, inhérentes au concept de mesure de grandeurs et, d’autre part, nous pensons qu’elles sont didactiques.
Les analyses des copies ayant montré que les élèves des classes de Suisse romande rencontraient moins de difficultés que les élèves des classes d’autres sections, françaises et italiennes, nous avons pensé qu'il aurait été utile de vérifier comment le thème « conversion d'unité » est proposé dans les manuels des trois pays. Dans l'annexe, il y a quelques considérations à propos de certains des manuels, sur ce sujet.
La mesure est une notion qui (en *Les Mathématiques de la maternelle jusqu’à 18 ans*[3]) est définie comme “très élaborée”, il suffit de penser que les nombres positifs rationnels et les irrationnels, sont générés justement par des mesures.
Va tenuto in debita considerazione il fatto fondamentale secondo il quale, data una grandezza, ci sono tante misure possibili quante sono le scelte possibili di un’unità di misura e queste scelte sono peraltro in numero infinito.
Lo studio delle misure ingloba quello delle unità e della proporzionalità inversa. Più l’unità di misura è grande, più la misura è piccola. Esso comporta anche la pratica delle stime, l’osservazione degli ordini di grandezza, la scelta di un’unità comoda e la valutazione degli errori di misura.
Il faut tenir compte du fait fondamental selon lequel, étant donnée une grandeur, il y a autant de mesures possibles qu'il y a de choix possibles d'unité de mesure et ces choix sont, de plus, en nombre infini.
L'étude des mesures intègre celle des unités et de la proportionnalité inversée. Plus l'unité de mesure est grande, plus la mesure est petite. Cela implique également la pratique d'estimations, l'observation d'ordres de grandeur, le choix d'une unité appropriée et l'évaluation des erreurs de mesure.
Da tutto ciò discende una grande attenzione didattica che va posta al concetto di misura e al suo uso.
È chiaro dunque che, nella pratica in classe, non sono assolutamente sufficienti esercizi ripetitivi e meccanici sulle conversioni di misure (dette anche equivalenze), ma che sia necessario passare attraverso contesti problematici che ne mostrino il senso.
De tout cela découle qu’une grande attention didactique qui doit être portée au concept de mesure et à son utilisation.
Il est donc clair que, dans la pratique de la classe, les exercices répétitifs et mécaniques de conversion de mesures (également appelés équivalences) ne sont absolument pas suffisants, mais qu'il est nécessaire de passer par des contextes problématiques qui montrent leur sens.

A ce propos, nous pouvons citer une activité de classe imaginée par un des membres de notre groupe, Brunella Brogi.
A questo proposito riportiamo un’attività sviluppata in classe da uno dei membri del nostro gruppo, Brunella Brogi.

---

[2] Edizione italiana a cura di L. Grugnetti et V. Villani (traduzione di S. Gregori) – Pitagora Editrice Bologna, 1999.
[3] CREM a.s.b.l., 1995)

Un esempio di attività in classe sviluppata da Brunella Brogi

L'errore sulle equivalenze delle aree commesso dalla maggior parte delle classi nel risolvere il "Pannello decorativo", mi ha stimolato a far costruire a ciascuno dei miei alunni di categoria 7 un modello di metro quadrato, assemblando i fogli del quaderno con i quadretti di un cm di lato, da custodire insieme agli altri "artefatti matematici" nella cartellina di matematica che dovrebbero sempre avere quando facciamo lezione. Non lo avevo mai fatto fare, spero che così vedano, chiaramente, che ci sono "tanti" quadretti dentro, tuttavia, mi ha stupito una bimba che (il lavoro era assegnato per casa, dopo averne discusso in classe) mi ha portato una striscia lunga 100 quadretti, ma larga solo 2! Quindi abbiamo discusso per capire quante strisce dovesse ancora fare per ottenere un metro quadrato, mentre un altro ragazzo si chiedeva quanto fosse lunga una striscia equivalente a un metro quadrato, mentre in tre sono andati alla lavagna sorreggendo il metro quadrato per misurarne la superficie ...ecco, senza quel problema n. 16 (quindi senza il RMT), io non avrei lavorato così con i miei ragazzi.

Un exemple d'activité en classe qui vient de Brunella Brogi :

L'erreur sur les équivalences d'aires commise par la majorité des classes en résolvant le problème "Panneau décoratif", m'a incitée à faire construire à chacun de mes élèves de catégorie 7 un modèle de mètre carré en assemblant les feuilles quadrillées en centimètres, à conserver avec les autres "réalisations mathématiques" dans le classeur de mathématiques qu'ils doivent toujours avoir en cours de mathématiques. Je ne l'avais jamais fait faire, j'espère qu'ainsi ils pourront voir clairement qu'il y a "beaucoup" de carrés à l'intérieur, cependant, j'ai été étonnée par une élève qui (le travail était à faire à la maison, après en avoir discuté en classe) m'a apporté une bande de 100 carrés de long mais large de seulement 2 carrés ! Nous avons alors discuté pour comprendre combien de bandes elle devait encore faire pour obtenir un mètre carré, tandis qu'un autre garçon se demandait quelle serait la longueur d'une bande équivalente à un mètre carré tandis que trois d'entre eux sont allés au tableau en reportant leur mètre carré pour en mesurer la surface… Eh bien, sans ce problème n°16 (donc sans le RMT) personnellement je n'aurais pas travaillé ainsi avec mes élèves.

Un autre type de difficultés observé, au cas où l'obstacle des conversions d'unité est surmonté, se rapporte à la perception des régularités dans la suite des termes obtenus, comme sommes successives des aires (en procédure longue) ou des aires restantes (en procédure courte).

Du point de vue mathématique, la tâche peut se résumer ainsi :

Dans une progression géométrique de raison 1/2 partant de 60 000, déterminer le premier des termes qui est inférieur à 1.

Un altro tipo di difficoltà osservato, quando l'ostacolo della conversione di unità è superato, è quello della percezione delle regolarità nella successione dei termini ottenuti, come somme successive delle aree (procedura lunga) o delle aree rimanenti (procedura corta).

Dal punto di vista matematico, il compito può riassumersi come segue:

in una progressione geometrica di ragione 1/2 a partire da 60 000, determinare il primo dei termini minore di 1.

Les élèves ont de la peine à percevoir que d'un terme au suivant, il suffit de répéter toujours les mêmes opérations, c'est-à-dire la récurrence, même dans le cas de la procédure courte où il ne s'agit que d'une division par 2. Ils sont

gênés par la longueur des écritures des nombres et beaucoup d'eux sont loin de maîtriser les nombres décimaux, les approximations, ni même la lecture de l'affichage de leur calculatrice.
Il paraît opportun de profiter de ce problème du *Panneau décoratif* pour examiner attentivement les écritures des termes successifs, chercher à les simplifier, profiter de les lier aux écritures exponentielles, apprendre à lire l'affichage des nombres sur une calculatrice, à distinguer les nombres décimaux de leurs approximations et, pourquoi pas, utiliser pour ce cas un tableur.
Gli allievi hanno difficoltà a percepire che, da un termine all'altro, è sufficiente ripetere sempre le stesse operazioni, cioè la ricorsività, anche nel caso della procedura corta dove si tratta solo di una divisione per 2. Sono disturbati dalla lunghezza delle scritture dei numeri e molti fra essi sono lungi dal padroneggiare i numeri decimali, le approssimazioni e perfino la lettura del display della calcolatrice.
Sembra opportuno approfittare di questo problema del *Pannello decorativo* per esaminare con attenzione le scritture di termini successivi, cercare di semplificarle, connetterle alle scritture esponenziali, insegnare a leggere i numeri su una calcolatrice, a distinguere i numeri decimali dalle loro approssimazioni e, perché no, utilizzare in questo caso un foglio elettronico.

Annexe I / Allegato I

Considerazioni su libri di testo in merito alla conversione di unità / Considérations relatives aux manuels pour la conversion des unités

La domanda che ci si pone è se ci siano differenze nel trattare tale argomento, per esempio a livello di libri di testo.
La question qui se pose est de savoir s'il existe des différences dans l'approche didactique à ce sujet, par exemple au niveau des manuels.

In un testo per la categoria 6, della Svizzera romanda, rivolto agli insegnanti, si trova scritto
Dans un manuel de catégorie 6, de Suisse romande, adressé aux enseignants, il est écrit :

Non è facile visualizzare le unità di superficie, il che spiega perché a volte è difficile immaginare una data area dalla sua misurazione (ad esempio, cosa significa un sito di 20 ettari?), o per stimare la misura di una data superficie (ad esempio, qual è l'area del Lago di Ginevra?).
Allo stesso modo, mentre il m^2 è una delle unità di superficie più comune, non la si immagini mai così grande come in effetti è. Da qui l'interesse nel far costruire agli allievi quadrati di 1 mm^2, 1 cm^2, 1 dm^2 e 1 m^2. Inoltre, il rapporto da 1 a 100 tra unità di area successive sarà assimilato in modo più duraturo se si basa su una manipolazione efficace accompagnata dal conteggio. Questo approccio merita di essere rafforzato da un'esposizione a lungo termine sulle pareti dell'aula delle quattro lunghezze associate alle quattro unità d'area. Procedendo in questo modo, l'insegnante offre agli allievi l'opportunità di visualizzare ciascuna delle unità per comprenderne meglio la relazione con le altre.
Per gli allievi in difficoltà, l'insegnante può suggerire uno o l'altro dei seguenti "promemoria":
- "Quadretta, da decimetro a decimetro, il tuo quadrato di 1 m di lato e numera i decimetri quadrati così ottenuti. Ottieni lo stesso risultato del tuo vicino? "
- "Se facessi lo stesso, ma questa volta da centimetro a centimetro, quale sarebbe il numero dell'ultimo centimetro quadrato?"
Per quanto riguarda le "grandi" unità di aree, la loro rappresentazione sarà sicuramente migliore se acquisita attraverso la loro effettiva delimitazione in campo.
La visualisation des unités d'aire n'est pas une chose aisée, ce qui explique que l'on éprouve parfois de la difficulté à se représenter une aire donnée par sa mesure (par exemple, que signifie un terrain de 20 hectares ?), ou à estimer la mesure d'une surface donnée (par exemple, quelle est l'aire du lac Léman ?).
De même, si le m^2 est l'une des unités d'aire les plus courantes, on ne se l'imagine jamais aussi grand qu'il est en réalité. D'où l'intérêt de faire construire aux élèves des carrés de 1 mm^2, 1 cm^2, 1 dm^2 et 1 m^2. Par ailleurs, le rapport de 1 à 100 entre les unités d'aires successives sera assimilé plus durablement s'il repose sur une manipulation effective accompagnée de comptages. Cette démarche mérite d'être renforcée par un affichage de longue durée sur les murs de la classe des quatre carrés associés aux quatre unités d'aires. En procédant ainsi, le maître offre la possibilité aux élèves de visualiser chacune des unités pour mieux saisir son rapport aux autres.
Pour les élèves éprouvant de la difficulté, le maître pourra suggérer l'une ou l'autre des «relances» suivantes :
– « Quadrille, de décimètre en décimètre, ton carré de 1 m de côté et numérote les décimètres carrés ainsi obtenus. Obtiens-tu le même résultat que ton voisin ? »
– « Si tu procédais de même, mais cette fois de centimètre en centimètre, quel serait le numéro du dernier centimètre carré ? »
En ce qui concerne les «grandes» unités d'aires, leur représentation sera certainement meilleure si elle s'acquiert par leur délimitation effective dans le terrain.

Nel volume per gli allievi, in merito al tema delle misure d'area si trovano diverse attività nell'ambito delle quali la conversione di misure viene "costruita".
Dans le manuel destiné aux élèves, au sujet des mesures d'aire, il y a diverses activités dans lesquelles la conversion des mesures est "construite".

Ad esempio:

Fiche 1 – Scheda 1

- Chacune des six lignes de ce tableau correspond à un rectangle.

  Tous les rectangles ont la même mesure d'aire.
- Complète ce tableau.

● Ciascuna delle sei righe di questa tabella corrisponde a un rettangolo. Tutti i rettangoli hanno la stessa misura dell'area.

● Completa questa tabella.

mesures des côtés						mesures des aires		
en cm		en dm		en m		en cm^2	en dm^2	en m^2
	30	4	3				12	
10						1200		
					0,6			
		8						
	20							

- b)
- Il s'agit toujours de rectangles, mais ils n'ont plus la même mesure d'aire. D'une ligne à l'autre, une des dimensions double.
- Complète également ce deuxième tableau.
- Si tu veux vérifier tes résultats, construis le dernier rectangle. Tu pourras alors vérifier tous les autres par pliage.

● Questi sono ancora rettangoli, ma non hanno più la stessa misura dell'area. Da una riga all'altra, una delle dimensioni raddoppia.

● Completare anche questa seconda tabella.

● Se desideri controllare i risultati, crea l'ultimo rettangolo. Puoi quindi controllare tutti gli altri piegando.

mesures des côtés						mesures des aires		
en cm		en dm		en m		en cm²	en dm²	en m²
15	10					150		
15	20							
		3	2					
				0,3	0,4			
				0,6				
			8					

Questa scheda fa pensare al problema "da semplice a doppio" che abbiamo presentato per il prossimo RMT! E che sarà utile per una successiva attività in classe.

Cette fiche fait penser au problème du « simple au double » que nous avons présenté pour le prochain RMT ! Et cela sera utile pour une activité ultérieure en classe.

Da un'analisi degli aspetti in gioco su libri di testo francesi (Bernard Anselmo) / À partir d'une analyse des aspects en jeu dans les manuels français (Bernard Anselmo)

Éléments d'analyse :

Des obstacles à surmonter :

- Il n'existe pas d'instruments de mesure d'aire sur lesquels apparaissent les relations entre multiples et sous multiple de l'unité comme c'est le cas avec le double décimètre, le mètre ruban, ou le décamètre pour les longueurs.
- L'unité d'aire peut être associée à l'aire d'un carré mais aussi à des surfaces de même aire et de forme différente qu'il n'est pas possible de comparer par simple superposition.
- La dénomination des unités d'aire ressemblent à celle des unités de longueur, elles utilisent les même préfixes mais leur signification (kilo = mille ; hecto = cent ….) ne plus être mobilisée pour exprimer les relations entre le m² et ses multiples ou sous multiples.

Des difficultés peu ou pas prises en compte :

La construction de l'image mentale des unités d'aire du système international se limite souvent à la réalisation effective de petites unités de 1 mm², 1 cm² ou1 dm² sous forme unique de carrés (certains élèves en déduisent que, par exemple, 2 cm² est l'aire d'un carré de 2 cm de côté). Leur utilisation pour mesurer l'aire d'autres surfaces par pavage[4] ou pour construire des surfaces d'aires données n'est plus proposée. La détermination des mesures d'aire par calcul est rapidement privilégiée au détriment de la signification de l'unité de mesure dans l'expression des résultats.

Elementi di analisi:

Ostacoli da superare:

- Non esistono strumenti di misura d'area sui quali appaiano le relazioni tra multipli e sottomultipli dell'unità come avviene per il doppio decimetro, il metro a nastro, o il decametro, per le lunghezze.
- L'unità d'area può essere associata all'area di un quadrato ma anche a superficie con la medesima area e di forma differente che non è possibile confrontare per semplice sovrapposizione.

[4] Ce type d'activité est proposée dans les manuels de CM2 pour déterminer la mesure (souvent en cm²) de l'aire de carrés ou de rectangles .

- La denominazione delle unità d'area assomiglia a quella delle unità di lunghezza e utilizzano il medesimo prefisso, ma il loro significato (Kilo = mille; hecto= cent …) non può essere mobilizzato per esprimere relazioni tra il m² e i suoi multipli e sottomultipli

Difficoltà prese poco o per nulla in considerazione:

La costruzione dell'immagine mentale delle unità d'area del sistema di misura internazionale si limita sovente alla realizzazione effettiva di unità piccole di 1 mm², 1 cm² o 1 dm² sotto forma unicamente di quadrati (alcuni allievi ne deducono, ad esempio che (2 cm² è l'area di un quadrato di 2 cm di lato). La loro utilizzazione per misurare l'area di altre superfici per pavimentazione[5] o per costruire superfici d'area data non è più proposta.

La determinazione delle misure d'area è presto privilegiata a detrimento del significato dell'unità di misura nella indicazione dei risultati.

À partir d'une analyse des aspects en jeu dans les manuels italiens (Maria AgostinaSatta) /Da un'analisi degli aspetti in gioco su libri di testo italiani (Maria Agostina Satta)

En résumé: en ce qui concerne les unités de conversion des unités de mesure de la surface, une certaine uniformité d'activité a été trouvée que l'on peut qualifier de «mécanique» dans les manuels analysés.

On parle surtout de passage d'une unité de surface à une autre, "multipliée par 100".

Comme dans le cas des manuels français, mentionné ci-dessus, également en Italie: *La détermination des mesures d'aire par calcul est rapidement privilégiée au détriment de la signification de l'unité de mesure dans l'expression des résultats.*

Viene qui riportata una sintesi di un **lavoro dettagliato** sviluppato da **Maria Agostina Satta** e presentato al Gruppo Geometria. Riguardo alla conversione delle unità di misura della superficie è stata rilevata una certa uniformità di attività che possiamo definire "meccanica" nei libri di testo analizzati.

Si parla soprattutto di passaggio da un'unità di area all'altra, moltiplicando per 100 e **procedendo di cento in cento.**

Come nel caso di libri di testo francesi, riportata più sopra, anche in Italia, *la determinazione delle misure d'area è presto privilegiata a detrimento del significato dell'unità di misura nella indicazione dei risultati.*

Questo argomento dei programmi nazionali

In Italia dal 2012 per le classi della primaria (dalla 1ª classe alla 5ª) e della secondaria di primo grado (dalla 6ª classe alla 8ª) è in vigore il documento denominato *Indicazioni Nazional*i per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzion*e* nel quale **non sono indicati i contenuti**, ma **gli *obiettivi di apprendimento, i relativi traguardi per lo sviluppo delle competenze*** per ogni materia d'insegnamento.

In tale documento si trova un riferimento esplicito alla misura nel paragrafo relativo ai "Traguardi per lo sviluppo delle competenze" al termine della scuola primaria (classe 5ª)… *Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, **ne determina misure**, progetta e costruisce modelli concreti*. Al termine della scuola secondaria di primo grado invece leggiamo: *Riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi*. Un riferimento esplicito alla misura lo ritroviamo solo nelle **Indicazioni** per la scuola primaria.

La misura della superficie nei manuali della Scuola secondaria di primo grado

Per la scuola secondaria di primo grado (Cat. 6, 7, 8) sono stati analizzati i seguenti testi adottati nell'anno scolastico 2019- 2020:

[5] Questo tipo di attività è proposta nei libri di testo di quanta primaria per determinare la misura (sovente in cm²) dell'area del quadrato o del rettangolo.

Autore/i	Titolo	Percentuale ufficiale di adozione
1. A. Montemurro	Esatto!	45%
2. C. Bertinetto- A. Metiaien- J. Paasonen- E. Voutlainen	Contaci	20%
3. [6]L. Ferri- A. Matteo- F. Sgobbi- S. Bruno	Da zero a infinito	8%
[7]U. Pernigo	Wiki Math	6%
A. M. Arpinati	Matematica in azione	5%
R. Vacca	Tutti matematici	4%

Nei manuali della Scuola secondaria di primo grado analizzati, la trattazione delle unità di conversione delle unità di misura della superficie si presenta abbastanza simile, seppur con qualche differenza. L'argomento viene introdotto con la definizione di metro quadrato, a cui fanno seguito delle tabelle che indicano la relazione tra le unità di misura di area e la procedura per eseguire le equivalenze. In tutti i testi, ad eccezione di "Esatto" sono presenti le rappresentazioni grafiche in scala che potrebbe essere un riferimento alle dimensioni reali.

L'unico manuale che propone un'attività laboratoriale finalizzata alla costruzione delle unità di misura dell'area è **Da zero a infinito** di L. Ferri ed altri.

In diversi manuali si presentano tabelle di conversione da completare nelle quali vengono fornite indicazioni spesso meccaniche per la loro compilazione.

Relazioni tra le unità di misura di area

Anche le relazioni tra le unità di misura d'area sono proposte mediante tabelle che si possono raggruppare in due diversi tipi:

a. Relazione tra una unità e quella immediatamente vicina
b. Relazione tra il m² e i suoi multipli e tra il m² e i suoi sottomultipli

In nessun testo compare una relazione tra le unità di misura con scrittura frazionaria.

Alcune considerazioni di massima sui manuali analizzati

- **"Esatto!" di A. Montemurro "**

Si tratta del manuale maggiormente adottato nelle scuole italiane, come indicato precedentemente.

La misura di superficie viene introdotta con la definizione di metro quadrato che viene rappresentato graficamente in scala con un quadrato di 1 cm di lato. Pensiamo che questo tipo di presentazione costituisca **un ostacolo per una corretta immagine mentale della grandezza del metro quadrato.** Viene poi descritta la procedura "meccanica" di conversione da una unità a quella immediatamente superiore o inferiore.

Nella sezione "*Esercizi e problemi*" sono presenti quesiti sulle equivalenze e *problemi* e quest'ultimi, sono perlopiù esercizi di applicazione.

- **"Contaci" di C. Bertinetto - A. Metiaien – J. Paasonen – E. Voutlainen**

Nella presentazione delle unità di misura, sono raffigurati, in misure reali, il decimetro quadrato suddiviso in cm², il cm² suddiviso in mm² e il mm². Viene proposto uno schema in cui si specifica che il passaggio da una unità

[6] Nell'anno scolastico 2020/21 verrà proposto in una nuova versione dal titolo **"Tangram"**curata dagli autori con la collaborazione della Erickson.

[7] Nell'anno scolastico 2020/21 verrà proposto in una nuova versione dal titolo **Let's Math!"**

all'altra si effettua procedendo di cento in cento. Viene poi proposta una scheda dove sono indicate le istruzioni per eseguire le equivalenze: si tratta, purtroppo, secondo noi, di un procedimento meccanico.

- **"Da zero a infinito" di L. Ferri, A. Matteo, F. Sgobbi, S. Bruno**

Nell'introduzione troviamo la rappresentazione grafica del decimetro quadrato in dimensione reale e dei sottomultipli in relazione tra loro da cui scaturisce la tabella di conversione delle unità di area. A differenza degli altri manuali esaminati, qui compare, come già evidenziato precedentemente, **una proposta di costruzione delle unità di misura di superficie.**

- **"Wiki Math" di U. Pernigo**

Affronta l'argomento in modo simile a quelli già esaminati e anche in questo caso sembra preponderante l'acquisizione "meccanica" della procedura per eseguire le equivalenze.

- **"Matematica in azione" di A.M. Arpinati**

In questo manuale l'argomento viene affrontato mediante una **rappresentazione grafica in dimensioni reali** per mostrare la relazione tra 1 dm^2 e il cm^2 e il mm^2. Viene poi spiegato che per passare da una unità di misura inferiore all'unità di misura immediatamente superiore si moltiplica per 100 l'unità di misura inferiore. Non figurano tabelle di conversione da una unità di misura di area ad un'altra.

- **"Tutti matematici" di R. Vacca**

Definisce l'unità di misura della superficie, propone la rappresentazione di un quadrato di 1 dm di lato in dimensioni reali e la sua suddivisione in quadrati di 1 cm^2. Segue la tabella che illustra la "*regola"* per eseguire le equivalenze.

La misura della superficie in Sussidiari della Scuola primaria in uso nell'anno scolastico 2019/20

Non è stato possibile risalire alle percentuali di adozione dei testi presi in esame. Quasi tutti i manuali presi in considerazione presentano tabelle di conversione delle unità di misura, tabelle in cui le unità di misura sono in relazione tra loro e che ricalcano quelle viste nei manuali della secondaria. In quasi tutti i manuali sono quasi sempre raffigurate, in dimensioni reali, le unità di area dm^2, cm^2 e mm^2. Lo svolgimento delle equivalenze è quasi sempre proposto con procedura meccanica facendo ricorso all'utilizzo di tabelle. In un solo testo la procedura per eseguire la conversione è accompagnata da una rappresentazione grafica, dove, tuttavia, viene suggerito l'operatore per passare da una unità all'altra. In alcuni testi, viene proposta una spiegazione, poco ortodossa, riguardo al simbolo delle unità di misura, del tipo **ciascuna unità di misura di superficie si scrive con l'esponente 2, perché l'unità di misura ha due dimensioni.**

Le relazioni tra le unità di misura dell'area

Come nel caso dei manuali per la scuola secondaria di primo grado, anche nel caso dei sussidiari analizzati, le relazioni tra le unità di misura d'area sono proposte mediante tabelle che si possono raggruppare in due diversi tipi:

a. Relazione tra una unità e quella immediatamente vicina
b. Relazione tra il m^2 e i suoi multipli e tra il m^2 e i suoi sottomultipli

Nei manuali si precisa che ciascuna unità di misura è formata da due cifre: le decine e le unità. Questa puntualizzazione viene poi usata per guidare gli allievi ad eseguire meccanicamente le equivalenze.

Alcune considerazioni di massima sui manuali analizzati

- **"Navigazioni – 4 Matematica" di G. Girotti, Ed. Mondadori**

Riporta le indicazioni didattiche e metodologiche per affrontare il contenuto e per ciascun contenuto propone le schede per gli allievi.

In alcune schede compare anche la scrittura frazionaria.

L'equivalenza è accompagnata dalla rappresentazione grafica e all'allievo si richiede in effetti di calcolare anche l'area di figure di tipo diverso dai quadrati.

Sono proposte tabelle di relazione tra le unità di misura.

- "Tempo reale" di G.F. Besich – Ed. Il Capitello- CLASSE QUARTA

Nel manuale si precisa che il rapporto fra una misura quadrata e l'altra è sempre 100**.**

Ci chiediamo quale possa essere la conoscenza del **rapporto una classe quarta.**

Viene proposta una tabella in cui i multipli e sottomultipli sono in relazione rispetto al metro quadrato. Compare la rappresentazione grafica del dm^2 e dei suoi sottomultipli **in dimensioni reali**. A questa spiegazione segue il calcolo delle aree mediante l'uso di formule.

- "Grandi scoperte" di M. Carai, M.N. Caspani, L. Riboldi – CLASSE QUINTA- Ed. Pearson

In tale testo le unità di area sono presentate mediante una particolare tabella in cui ciascuna unità viene scomposta in decine e unità che saranno poi utilizzate per lo svolgimento meccanico delle equivalenze. Non sono presenti rappresentazioni grafiche delle unità di misura di area.

Colpisce che, a proposito del simbolo m^2, venga sottolineato, senza altre considerazioni che il "2" di quel simbolo, indichi una potenza.

Questa considerazione ci sembra didatticamente poco opportuna in quanto pensiamo che porti l'alunno ad associare alla "potenza" un simbolo con il 2 come apice, senza date alcun senso compiuto a tale scrittura.

In effetti, anche in altri due testi analizzati -**Discipline It. 5 Ed. La Spiga** e **Missione futuro 4 di P. Gherardi Ed. Pearson**–troviamo un uso piuttosto preoccupante del legame tra la scrittura del simbolo m^2 e l'idea si potenza.

- Forza ragazzi 5 di M. Mattiassich – Ed. Capitello

Presenta la rappresentazione grafica delle unità dm^2, cm^2 e mm^2 utilizzando la carta millimetrata; mediante uno schema grafico con frecce mette in relazione le unità di misura fra loro. Successivamente propone come attività Il Tangram, ma l'alunno è invitato a riprodurre le figure proposte e nel caso di costruzione di figure convesse fornisce i suggerimenti per realizzarle. Di seguito propone una tavola pitagorica geometrica per far notare che l'area del rettangolo si ottiene moltiplicando base per altezza, mentre l'area del quadrato lato per lato, cosa che ci sembra induca l'idea che il quadrato non sia un rettangolo particolare.

Peraltro, la tavola pitagorica potrebbe fornire altri spunti di attività che mettono in relazione il prodotto di due numeri e l'area del rettangolo, o ancora una relazione tra l'equivalenza delle figure e la proprietà commutativa della moltiplicazione.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

ANALISI A POSTERIORI *CESTO DI FRUTTA I E II*: RILEVAZIONI, RIFLESSIONI, SPUNTI PER IL LAVORO IN CLASSE

a cura di Carla Crociani e Rita Spatoloni, con il contributo di L. Abate, S. Guerri, C. Mazzoni, M.T. Nughedu, G. Percario, B. Perna, A. Quacquarelli, D. Sforzi, S. Tronconi

Gruppo Numerazione[1]

Résumé

Le travail que le GTNU propose et qui est en italien, est le résultat de l'analyse a posteriori des copies relatives aux problèmes *Beaucoup de fruits I, cat.3 - 4* et *Beaucoup de fruits II, cat.5-7*[2] recueillies dans les sections de Parme, Puglia, Romagna, Rozzano, Siena, Sassari et ce travail inclut les résultats d'autres sections, officiellement publiés dans la Banque de problèmes. L'analyse des productions des élèves, réalisée individuellement ou en binôme par les membres des sections d'appartenance, a été organisée lors de réunions à distance au cours desquelles, outre la discussion autour des constats effectués par chacun, ont émergé des pistes de réflexion et des idées d'activités ou de propositions pédagogiques à mettre en œuvre dans les classes.
Les deux problèmes sélectionnés ont été inclus dans la même étude car, à partir des copies examinées, nous avons identifié une certaine continuité dans la tâche demandée aux élèves : la version II, introduisant une propriété liée à la somme et au produit, constitue une évolution significative dans l'acquisition des opérations et de leurs caractéristiques. Le problème *Beaucoup de fruits II* nécessite la détermination de trois nombres connaissant leur somme, une relation additive entre deux d'entre eux et une relation multiplicative entre l'un d'entre eux et le troisième. Le problème *Beaucoup de fruits II* est basé sur la distributivité de la somme par rapport au produit, en particulier, la moitié (une n-ième) d'une somme est égale à la somme des moitiés (de la n-ième) et sur le fait que les relations multiplicatives entre les additions se maintiennent. Le problème *Beaucoup de fruits I*, considéré a priori comme adapté également à la cat. 3, a révélé la difficulté de compréhension de l'énoncé : les élèves n'ont souvent pas réussi à s'approprier l'énoncé du problème et, par conséquent, à activer une stratégie de résolution. Ce fait a été confirmé lors des échanges avec la classe de l'un des enseignants du groupe, au cours desquels les enfants eux-mêmes ont pu indiquer la "pierre d'achoppement" dans la structure linguistique. Cela a conduit à des propositions de modification du texte qui figurent dans l'annexe n° 1, en italien. Dans la catégorie 3 comme dans la catégorie 4, la stratégie la plus utilisée était celle des essais, plus ou moins clairement expliqués par une description verbale ou à l'aide de tableaux ou de diagrammes. Les productions des élèves, présentées dans l'étude approfondie, nous montrent comment dans plusieurs cas il est possible et utile de les utiliser pour travailler en classe et commencer un parcours de développement des compétences pré-algébriques, non seulement à travers la découverte de régularités, mais aussi sur la possibilité d'en trouver et d'en justifier le pourquoi. La discussion systématique sur l'utilisation des représentations (graphiques, tabulaires, ...), menée avec et entre les élèves, facilite non seulement le développement de la capacité à saisir les similitudes et les différences dans une situation dynamique, mais aussi celui d'identifier, par exemple, dans quel intervalle de nombres il faut chercher les solutions, afin de comprendre quand elles ont toutes été trouvées et que la recherche peut être considérée comme terminée. Le problème de *Beaucoup de fruits II*, bien que d'un contenu mathématique assez complexe, avait été a priori considéré comme intéressant pour la catégorie 5. Les résultats obtenus ont confirmé ce choix et montrent une progression adéquate et significative dans les passages de catégorie. Dans ce cas également, la stratégie la plus utilisée était celle de l'essai-erreur qui, bien que souvent considérée comme moins mathématique même par les enseignants correcteurs eux-mêmes, doit être considérée comme une procédure très intéressante du point de vue didactique. Le tâtonnement est une incitation à faire réfléchir les élèves sur les conséquences de la modification " régulière " d'une ou plusieurs données sur la situation problème observée. Les explications des élèves peuvent également donner lieu à des pistes de travail stimulantes lorsqu'elles font l'objet d'une discussion collective. Par exemple, il est presque toujours considéré comme acquis que la relation "le nombre de pommes est le double du nombre de poires" est maintenue même en raisonnant sur leurs moitiés. Dans l'enseignement secondaire en particulier, on pourrait proposer des problèmes similaires qui amènent à réfléchir sur la raison pour laquelle la relation est maintenue. L'annexe 2 contient les propositions que les enseignants du groupe ont utilisées dans leurs

---

[1] Il Gruppo Numerazione comprende anche i seguenti membri: F. Athias, S. Bezzini, M. Bonazzi, L. Gherarducci, G. M. Lombardi, M. Mandelli, I. Parisi.

[2] Référence Banque de problèmes :

Beaucoup de fruits I : http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=op135-fr&flag=1&langue=fr&w=0

Beaucoup de fruits II : http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=op138-fr&flag=1&langue=fr&w=0

classes, et dans l'étude approfondie (paragraphe 4) se trouvent les copies avec les observations qui découlent de l'expérimentation.
Les productions d'élèves présentées dans l'étude approfondie incitent également à réfléchir sur la capacité des élèves à présenter clairement la solution du problème : on trouve très souvent des formulations stéréotypées, parfois accompagnées d'erreurs, qui montrent à quel point elles sont dénuées de sens pour eux. Il est donc nécessaire de guider les classes dans un parcours de travail visant à développer la capacité à expliquer et argumenter la proposition de solution. Le groupe a échangé sur cette question afin de proposer des activités possibles.

1. Introduzione

In quest'anno di chiusura "forzata" per la pandemia, come gruppo GTNU, abbiamo cercato di mantenere il contatto fra noi per dare una linea di continuità al nostro lavoro. Nei mesi estivi, come coordinatrici e come da prassi consolidata prima della pandemia, abbiamo selezionato dei problemi, appartenenti all'ambito Numerazione, che dessero l'opportunità a tutte le insegnanti afferenti al Gruppo di essere coinvolte con i propri allievi. La nostra scelta è caduta su due problemi della prima prova del 28° RMT: *Cesto di frutta I,* cat.3 - 4 e *Cesto di frutta II,* cat.5-7[3].

2. Il problema *Cesto di frutta I* e la sua analisi a posteriori

La mamma ha comprato arance, mele e banane.
Tommaso conta i frutti: in tutto sono 29.
Il numero delle mele è il doppio di quello delle arance e le arance sono 3 di più delle banane.
Quante arance, quante mele e quante banane ci sono?

Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

La richiesta del problema è quella di individuare tre numeri in base alle relazioni date fra loro, in particolare il compito matematico è "trovare tre numeri sapendo che la loro somma è 29, il più grande è il doppio del secondo il quale, a sua volta, supera di 3 il minore".
A priori questo problema sembrava appropriato anche per alunni di categoria 3, a posteriori invece abbiamo notato che, soprattutto in questa categoria, è emersa fin da subito una difficoltà nella comprensione del testo: gli allievi spesso non sono riusciti ad entrare nella situazione problematica e, di conseguenza, ad attivare una strategia risolutiva.
La maggiore difficoltà per i più piccoli è confermata anche dai punteggi medi (internazionali) ottenuti, nei quali si evidenzia una progressione nel passare dalla cat.3 alla cat.4:
- Punteggi attribuiti a 1168 classi di 13 sezioni:

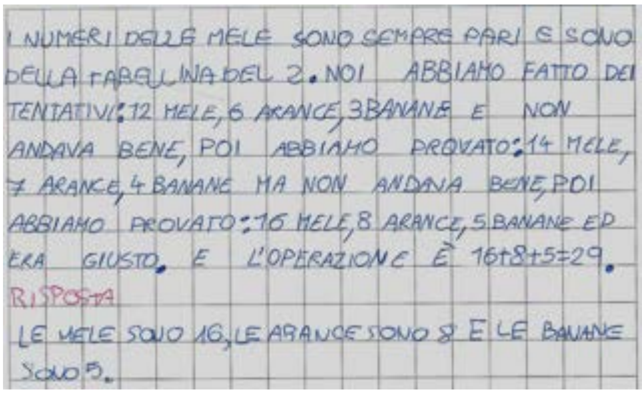
punteggi	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 3	122	66	124	106	85	503	1,9
Cat. 4	76	37	183	210	159	665	2,5
tot	**198**	**103**	**307**	**316**	**244**	**1168**	**2,3**

in %					
Cat. 3	24%	13%	25%	21%	17%
Cat. 4	11%	6%	28%	32%	24%
tot	**17%**	**9%**	**26%**	**27%**	**21%**

Nel corso dell'analisi degli elaborati abbiamo ipotizzato che la costruzione della frase, che indica le relazioni tra i frutti, fosse risultata difficile nella struttura logica perché al suo interno il termine "arance" ha dapprima il ruolo di *secondo termine di paragone* e subito dopo quello di *primo termine di paragone*. L'ipotesi ha trovato conferma

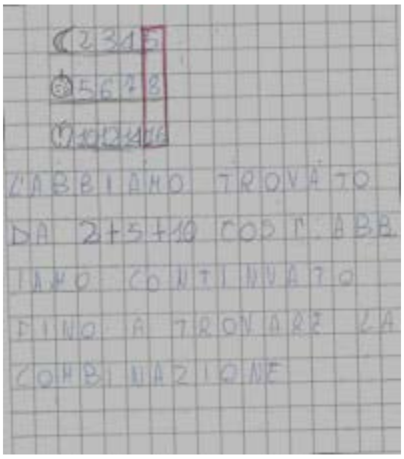
[3] Cfr. Banca Problemi:
Cesto di frutta I http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=op135-it&flag=1&langue=it&w=0
Cesto di frutta II http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=op138-it&flag=1&langue=it&w=0

in un'intervista, svolta in classe da un'insegnante del Gruppo, nel corso della quale i bambini hanno proprio detto: - *La frase* "*le mele sono il doppio delle arance e le arance sono 3 più delle banane" non si capiva bene perché c'era scritto due volte arance* -. Il vocabolo *arance*, presente due volte al centro della frase, è apparso dunque ai bambini come una ripetizione e non lo hanno assolutamente riconosciuto nelle sue due differenti funzioni. A questa difficoltà linguistica si deve inoltre aggiungere quella di gestire le relazioni fra i numeri dei frutti, che il testo fornisce senza rispettare l'ordine crescente o decrescente: per noi adulti, è naturale partire ipotizzando il numero delle arance, numero centrale della serie, ed una volta farne il doppio, ottenendo il numero delle mele, ed una volta togliere 3, ottenendo il numero delle banane. In questo modo però non si procede seguendo la linea dei numeri ma si parte da una posizione centrale, si va avanti e poi si torna indietro con l'aggiunta della difficoltà di dover tradurre "*arance 3 di più delle banane*" con "*banane 3 meno delle arance*". Dagli elaborati degli allievi, in particolare da quelli dei più piccoli, si deduce come essi sentano, invece, il bisogno di seguire la linea dei numeri in ordine crescente o decrescente.
Da queste osservazioni scaturisce l'opportunità di provare a rendere il testo più chiaro senza nulla togliere al compito matematico. Si ipotizzano due alternative: fornire un testo in cui, inserendo un punto, viene sostituita la coordinata con due frasi semplici oppure un testo in cui si apporta una modifica del tipo *Ci sono alcune banane, le arance sono tre più delle banane e le mele sono il doppio delle arance* che rispetta l'ordine crescente nel numero dei frutti (cfr. Allegato 1).
L'analisi degli elaborati ha permesso di rilevare che la **strategia** più utilizzata è stata quella **per tentativi**, esplicitati più o meno chiaramente attraverso la descrizione verbale o con l'uso di tabelle o schemi.
Si riportano due esempi di cat.3 che utilizzano questa strategia, nei quali le difficoltà osservate non si rilevano ma in cui, comunque, si nota la necessità di "ordinare". Nel primo, con descrizione verbale, gli allievi seguono l'ordine decrescente, nel secondo seguono l'ordine crescente, costruendo una specie di tabella.



I numeri delle mele sono sempre pari e sono della tabellina del 2. Noi abbiamo fatto dei tentativi: 12 mele, 6 arance, 3 banane e non andava bene, poi abbiamo provato: 14 mele, 7 arance, 4 banane ma non andava bene, poi abbiamo provato: 16 mele, 8 arance , 5 banane ed era giusto.
E l'operazione è 16+8+5=29.
Risposta.
Le mele sono 16, le arance sono 8 e le banane sono 5

Fig.1



banane	2	3	4	5
arance	5	6	7	8
mele	10	12	14	16

L'abbiamo trovato da 2+5+10. Così abbiamo continuato fino a trovare la combinazione.

Fig.2

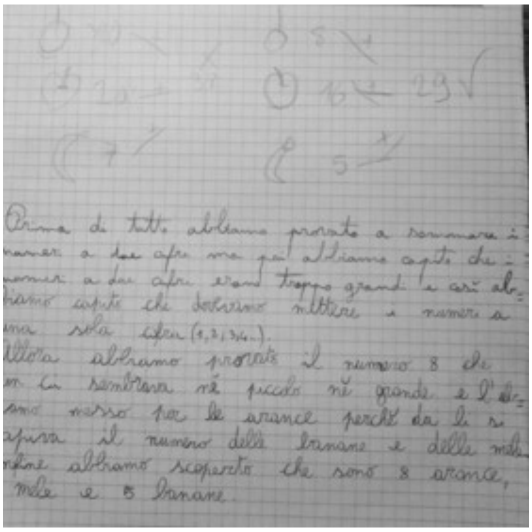
L'esempio successivo (elaborato di cat.4) mostra invece che la presentazione delle quantità, nel testo, benché non in ordine, non abbia dato alcuna noia: *"abbiamo capito che dovevamo partire dal numero 4 perché il problema dice che le arance sono 3 in più delle banane"* e riportano la tabella in fig.3

ARANCE	MELE	BANANE	RISULTATO
4	8	1	13
5	10	2	17
6	12	3	21
7	14	4	25
8	16	5	29

ARANCE	MELE	BANANE	RISULTATO

Fig.3

Il modo di procedere descritto negli elaborati riportati in Figg. 2 e 3 ci suggerisce di lavorare con i più grandi, anche a partire da cat.5, **in modo pre-algebrico**, per portarli a scoprire regolarità e la loro "giustificazione". Ci si può chiedere, ad esempio, come varia il numero totale dei frutti quando si aumenta di una unità il numero di banane o di arance.
La discussione sistematica in classe che stimoli l'uso di rappresentazioni (grafiche, tabulari,…) non favorisce solo lo sviluppo della capacità di cogliere somiglianze e differenze in una situazione dinamica ma anche quella di individuare in quale intervallo di numeri vadano ricercate le soluzioni, per capire quando si possa ritenere conclusa la ricerca perché le soluzioni sono state trovate tutte.
Si riportano, di seguito, due elaborati, il primo di cat. 4 e il secondo di cat. 3, che mostrano primi tentativi di "giustificare" il ragionamento seguito.

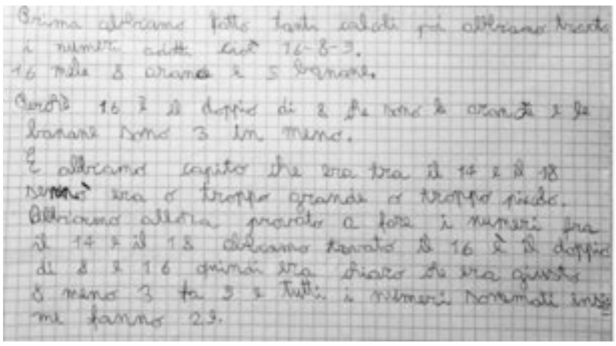


Disegno di due tentativi, uno annullato:

10 arance +20 mele + 7 banane = 37
l'altro corretto:
8 arance + 16 mele + 5 banane = 29)

Prima di tutto abbiamo provato a sommare i numeri a due cifre ma poi abbiamo capito che i numeri a due cifre erano troppo grandi e così abbiamo capito che dovevamo mettere i numeri a una sola cifra (1,2,3,4,…).
Allora abbiamo provato il numero 8 che ci sembrava né piccolo né grande e l'abbiamo messo per le arance perché da lì si capiva il numero delle banane e delle mele. Infine abbiamo scoperto che sono 8 arance, 16 *mele e 5 banane.*

Fig.4

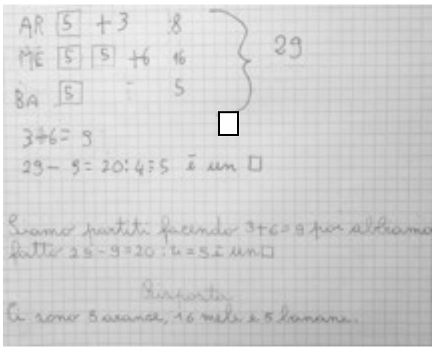


Prima abbiamo fatto tanti calcoli poi abbiamo trovato i numeri adatti cioè 16-8-5.
16 mele 8 arance 5 banane.
Perché 16 è il doppio di 8 che sono le arance e le banane sono 3 in meno.
E abbiamo capito che era tra il 14 e il 18 sennò era troppo grande o troppo piccolo
Abbiamo allora provato a fare i numeri fra il 14 e il 18 abbiamo trovato il 16 è il doppio di 8 e il 16 quindi era chiaro che era giusto. 8 meno 3 fa 5 e tutti i numeri sommati fanno 29.

Fig.4a

Alcuni elaborati ci hanno mostrato come spesso gli allievi usino la grafica (segmenti, quadratini, lettere,…), ma siamo sicuri che lo facciano consapevolmente, specialmente a livelli bassi di categoria o che, invece, non lo facciano in modo "meccanico? Magari "forzando" per arrivare alla soluzione, comunque giusta, trovata per altra via?

Questo interrogativo ci ha indotto ad indagare sia tramite le osservazioni effettuate direttamente dagli insegnanti nelle classi, che tramite una rilevazione fatta sugli elaborati relativi ai testi modificati, assegnati per l'attività sperimentale.
Il seguente elaborato, di cat. 3, utilizza il metodo grafico.



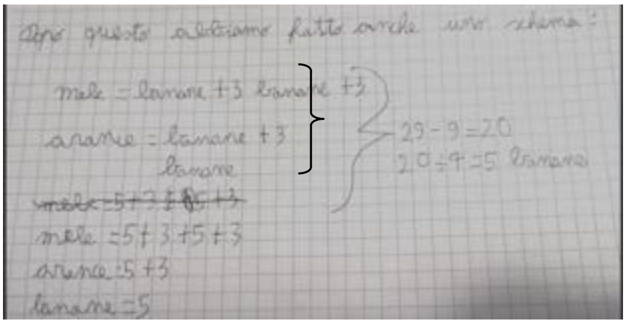
(Rappresentazione)

Siamo partiti facendo 3 + 6= 9 poi abbiamo fatto 29-9=20 :4=5 è un □

Risposta
Ci sono 8 arance, 16 mele e 5 banane

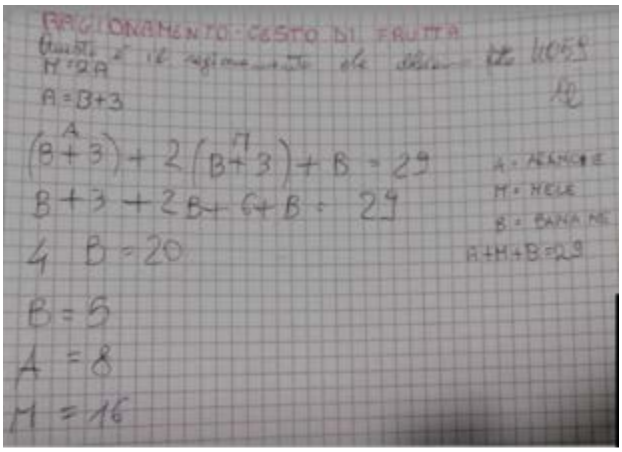
Fig.5

Questo tipo di strategia e rappresentazione, specialmente se presente in categorie basse, va comunque sfruttata per indagare, intervistando gli autori, per capire il loro grado di appropriazione della grafica come strumento operativo. In altri casi, come nei successivi esempi di cat. 4, (cfr. Figg. 6 e 7) gli allievi non introducono simboli grafici ma ricercano un linguaggio schematizzato "misto": rappresentano gli oggetti con parole o lettere che legano con simboli matematici. Questo modo di procedere, come anche il precedente, può essere inquadrato tra i primi passi in un processo di rappresentazione e algebrizzazione.
Nell'elaborato di Fig. 6 è interessante notare come gli allievi si avvicinino al linguaggio algebrico solo per avere un ulteriore controllo sulla soluzione trovata per altra via (*Dopo questo…abbiamo fatto anche….*): sarà solo più tardi che ne potranno scoprire la validità come ausilio per la ricerca della soluzione.



Dopo questo abbiamo fatto anche uno schema:
mele=banane+3 banane +3
arance = banane+3 *29-9=20*
banane
20:4=5banane
mele =5+3+5+3
arance= 5+3 *banane =5*

Fig.6

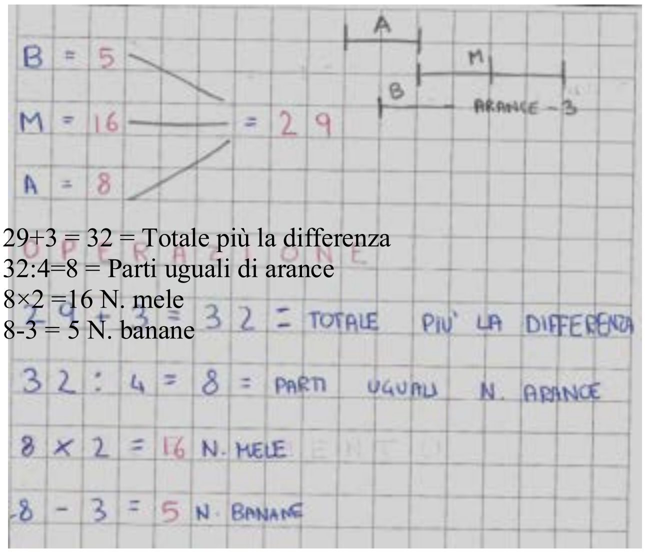


RAGIONAMENTO – CESTO DI FRUTTA

Questo è il ragionamento che abbiamo fatto

Fig.7

L'elaborato seguente (Figg. 8 e 9), di cat. 4, propone un processo risolutivo interessante anche nella rappresentazione; rispetto agli altri esempi di queste categoria mostra un livello "più avanzato".



29+3 = 32 = Totale più la differenza
32:4=8 = Parti uguali di arance
8×2 =16 N. mele
8-3 = 5 N. banane

La parte grafica, sulla destra in alto, costruita in maniera piuttosto creativa (manca la chiusura del segmento "banane"), è chiarita dalla descrizione delle operazioni. Hanno sentito il bisogno di includere una verbalizzazione che, però, omette la "giustificazione" di aver aggiunto 3[4].

Fig.8

PROCEDIMENTO:Abbiamo aggiunto la differenza al totale di prima. Abbiamo preso un foglio e abbiamo disegnato dei segmenti uguali, un segmento per le arance, due per le mele e uno per le banane. Abbiamo diviso la somma per 4 (numero dei segmenti) e trovato il n. delle arance (8).Il risultato delle arance l'abbiamo moltiplicato per 2 capendo il risultato delle mele (16)
8 l'abbiamo tolto la differenza ed è uscito il risultato delle banane.

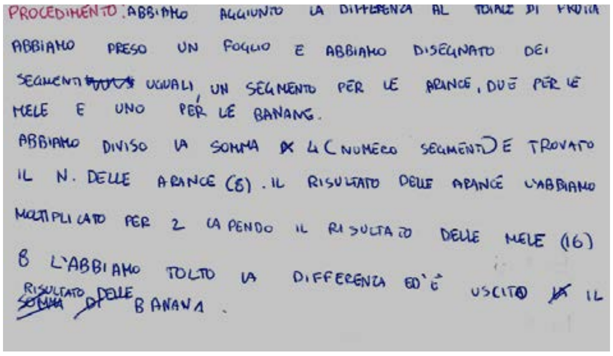


Fig. 9

In altri casi c'è stato lo stesso tentativo di risoluzione, ma gli allievi si sono limitati a togliere subito 3 frutti (29 – 3) anziché aggiungerne 3 (29 + 3) per poi dividere per 4 (numero delle occorrenze delle arance). Così facendo non sono riusciti a trovare un risultato perché il numero 26 non è divisibile per 4. Avrebbero potuto, in alternativa, far riferimento alle banane e quindi togliere 9 frutti dal totale, tenendo conto che la differenza 3 (tra arance e banane) interveniva una prima volta nel numero di arance ed ancora due volte nel numero di mele (doppio delle arance). Dividendo 20 (29 – 9) per 4 avrebbero ottenuto il numero delle banane[5].
Questi due procedimenti risolutivi (aggiungere 3 o togliere 9 dal totale dei frutti) potrebbero essere oggetto di discussione soprattutto in classi di categoria più alta perché conducono alla rappresentazione e successiva risoluzione per via algebrica con l'utilizzo delle equazioni.

1) $a \quad a-3=b \quad 2a=m$

$$(a-3)+a+2a=29 \quad 4a=29+3 \quad 4a=32 \quad a=\frac{32}{4} \quad a=8$$

2) $b \quad b+3=a \quad 2(b+3)=m$

$$b+(b+3)+2(b+3)=29 \quad 4b+9=29 \quad 4b=29-9 \quad 4b=20 \;\; b=\frac{20}{4} \quad b=5$$

---

[4] Questo elaborato, è stato proposto ad una classe di cat.6 in riferimento ad un'attività basata sulla riflessione della capacità di argomentazione (cfr. § 5).

[5] Se la differenza tra arance e banane fosse stata di una o di cinque unità, avrebbero ottenuto un numero divisibile comunque per 4 ma la somma dei frutti, rispettando le relazioni tra di loro, non sarebbe stata compatibile con il totale (29) assegnato. Se ne sarebbero accorti?

3. Il problema *Cesto di frutta II* e la sua analisi a posteriori

Tommaso ha messo in un cesto le pere e le mele che ha raccolto nel suo frutteto.
Il numero delle mele è il doppio del numero delle pere.
Tommaso dà la metà delle mele a Sofia e la metà delle pere ad Adele.
Nel cesto gli restano così 36 frutti.

Quante pere e quante mele ha raccolto Tommaso?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Il concetto matematico in gioco, questa volta, è basato sulla distributività della somma rispetto al prodotto, in particolare, la metà (un n-esimo) di una somma è uguale alla somma delle metà (degli n-esimi) e sul fatto che le relazioni **moltiplicative** fra gli addendi si mantengono.
A priori, nella proposta del problema si è tenuto conto sia dell'importanza di tale concetto che del fatto che esso viene presentato fin dalle classi di scuola Primaria e ripreso nella prima classe della Secondaria di Primo grado anche se, spesso, come applicazione di una procedura aritmetica. Il testo, costruito in modo chiaro ed essenzialmente privo di subordinate, era sembrato adatto per le categorie dei destinatari.
A posteriori, i risultati, dalla cat.5 alla cat.7 hanno confermato la scelta e mostrato un giusto progredire nel passaggio di categoria.

- Punteggi attribuiti a 3102 classi di 16 sezioni:

punteggi	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	**m**
Cat. 5	183	94	77	80	228	662	2,1
Cat. 6	281	122	146	161	571	1281	2,5
Cat. 7	124	88	99	192	656	1159	3,0
tot	**588**	**304**	**322**	**433**	**1455**	**3102**	**2,6**

in %					
Cat. 5	28%	14%	12%	12%	34%
Cat. 6	22%	10%	11%	13%	45%
Cat. 7	11%	8%	9%	17%	57%
tot	19%	10%	10%	14%	47%

La **strategia per tentativi**, più o meno organizzati, è stata la più utilizzata in tutte le categorie.
A proposito di questa strategia, trasversale alla risoluzione di problemi in tutti gli ambiti, bisogna sfatare il mito, sia da parte degli allievi ma anche, certe volte, degli insegnanti-correttori, che sia "*meno matematica*" e quindi meno accettabile rispetto ad altre che utilizzano *schemi o formule* proprie della matematica. Sarebbe più opportuno indirizzare gli allievi a capire che si tratta piuttosto di una strategia non sempre utilizzabile sia per le difficoltà dovute al numero di "prove" da effettuare sia per l'esigenza di dover mostrare *l'esaustività*[6] delle soluzioni trovate … e questo non sempre è semplice! E' comunque una procedura validissima, sostenuta anche dal fatto che rispecchia il naturale comportamento di un "matematico" di fronte ad un problema di cui non si intuisce la soluzione: il punto di partenza è procedere per tentativi, ovvero fare degli esempi e controesempi, e saranno proprio questi che, sapientemente utilizzati, indicheranno la possibile via di soluzione.
Il procedere per tentativi, dal punto di vista didattico, è un incentivo per sollecitare gli allievi a riflettere sulle conseguenze che il cambiamento "regolare" di uno o più dati possa avere sulla situazione problematica sotto osservazione: dalle spiegazioni degli allievi possono emergere spunti stimolanti se divengono oggetto di discussione collettiva.

[6] Cfr. Allegato 1 proposta 3.

Il seguente elaborato, di cat. 5, mostra come gli allievi si siano organizzati piuttosto bene partendo dalle pere: fanno riferimento alla media e tengono sotto controllo somma 36.

SIAMO ANDATI A TENTATIVI:

(Tabella numerica)

Siamo andati a tentativi:

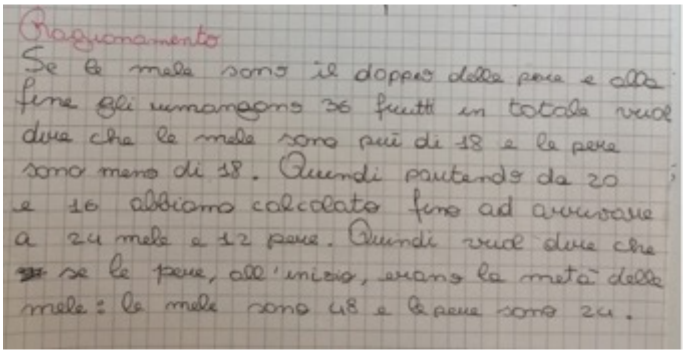
Abbiamo ipotizzato molti numeri fino ad arrivare a 48 mele e 24 pere – la metà di 48 è 24 e la metà di 24 è 12:

pere 12 +
mele 24 =
36

Fig.10

Il precedente elaborato, per quanto buono, è carente dal punto di vista dell'esaustività: gli allievi si fermano alla prima soluzione trovata senza "giustificare" che non ce ne possano essere altre (senza lo strumento delle equazioni, avrebbero dovuto continuare oppure far notare che da quel punto in poi il secondo numero superava sempre il doppio del primo). Inoltre si dà per scontato che la relazione "*mele doppio delle pere*" si mantenga anche ragionando sulle loro metà. La situazione potrebbe fornire spunti didattici, soprattutto per la scuola media, con problemi simili ma nei quali questa relazione non si mantiene: dividendo gli addendi per una stessa quantità si può mettere in evidenza il divisore comune e la relazione moltiplicativa fra i due addendi non cambia, se fosse additiva cambierebbe. L'insegnante potrebbe così intervenire chiedendo: *"Siete sicuri?" Perché? Cosa succede se le mele sono 2 (o in generale n) in più delle pere, e Tommaso regala metà delle mele a Sofia e metà delle pere ad Adele?*
La relazione tra i numeri di mele e pere iniziale è $m = p+2$ (o $m = p+n$) mentre dopo aver regalato metà di ciascuno dei frutti raccolti la relazione fra mele e pere rimaste sarà $m = p/2+1$ (o $p/2+ n/2$). Le mele rimaste non sono 2 (o n) in più delle pere rimaste: la relazione non si mantiene.
Andando avanti con l'indagine ci si potrebbe ancora chiedere: *se la relazione tra gli oggetti iniziali, m e p, fosse* $m = p+2$ (o $m = p+n$) *ma l'intervento fosse di tipo additivo, cosa succederebbe? La relazione iniziale si manterrebbe anche sugli oggetti rimasti?*[7].
Spunti didattici ulteriori potrebbero essere quelli di ragionare sulle scelte numeriche per p ed n *"Vanno tutte bene? Ci sono dei vincoli?"*
Insieme al gruppo abbiamo deciso, tuttavia, di seguire altre idee per la sperimentazione in classe: proporre dei testi di problemi analoghi a *Cesto di frutta II* dove, pur mantenendo la struttura moltiplicativa delle relazioni fra gli oggetti, su di essi si intervenisse con frazioni diverse (cfr. Allegato 2 proposte 1 e 2). Ci è sembrato interessante inoltre proporre, anche per far "giocare" e far riflettere gli allievi sul cambiamento delle variabili numeriche, il seguente quesito: *"Se si hanno tre oggetti due dei quali in una certa relazione tra loro ed il terzo in un'altra relazione con uno dei due, le scelte numeriche sono sempre possibili?* (cfr. Allegato 2, proposte 3 e 4).
Il successivo elaborato, di cat.6, mostra come gli allievi abbiano ragionato in modo analogo a quanto presentato nell'elaborato di Fig. 10 ma, partendo dalle mele, tengono sotto controllo la somma 36 e conducono un ragionamento "*teorico"* senza esplicitare i tentativi. Forse, a questo livello scolare, sembra riduttivo esplicitarli!? La richiesta di mostrarli, specialmente se iniziata nei primi anni di scuola e continuata in maniera regolare, potrebbe creare l'abitudine a "documentare" il procedimento risolutivo e favorire lo sviluppo di un atteggiamento riflessivo e metacognitivo.

[7] Esempio 1: p ed m sono due tipi di oggetti in relazione additiva m=p+n e si interviene togliendo k sia da p che da m (laddove sia lecito farlo), la relazione fra gli oggetti rimasti di tipo p e m questa volta si mantiene: p-k e p-k +n.
Esempio 2: p ed m sono due tipi di oggetti in relazione additiva m=p+k e si interviene su p ed m, quando ha senso, dimezzando o facendone l'n-esima parte (questi interventi hanno senso rispettivamente se p e k sono entrambi numeri pari o entrambi multipli di n). In ogni caso, la relazione fra i frutti rimasti non si mantiene $(p+k)/2 \neq p/2+k$ ed ugualmente $(p+k)/n \neq p/n+k$.



Ragionamento
Se le mele sono il doppio delle pere e alla fine gli rimangono 36 frutti in totale vuol dire che le mele sono più di 18 e le pere meno di 18. Quindi partendo da 20 e 16 abbiamo calcolato fino ad arrivare a 24 mele e 12 pere. Quindi vuol dire che se le pere, all'inizio erano la metà delle mele: le
mele sono 48 e le pere sono 24.

Fig.11

La spiegazione verbale del seguente elaborato, di cat.5, mostra un linguaggio molto impreciso e confuso: "da adulti" capiamo che hanno proceduto allo stesso modo presentato in Fig.10.

Risposta
Tommaso ha raccolto 48 mele e 24 pere in tutto 72 frutti.
Spiegazione
Abbiamo trovato il doppio di mele e la metà di pere e l'abbiamo moltiplicato per se stesso facendo il + e così siamo giunti alla conclusione che Tommaso ha raccolto 48 mele e 24 pere e 72 frutti in tutto.

36

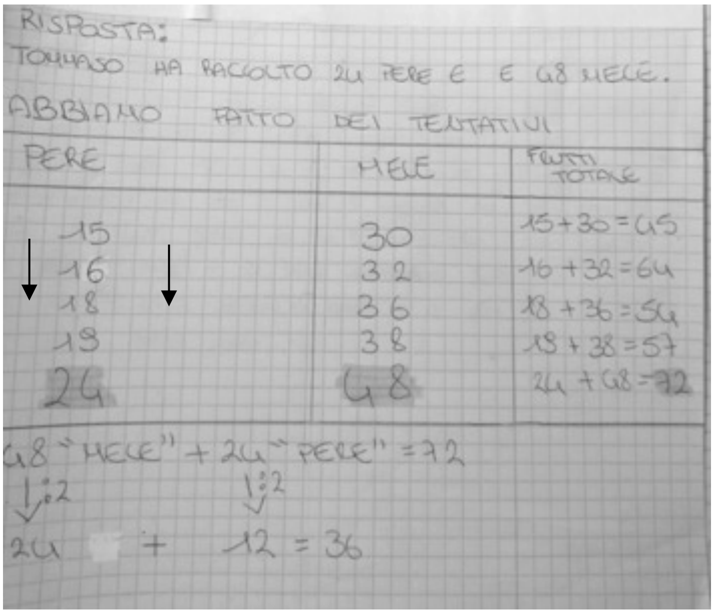
24 23 22 21 20 19 18 18 17 16 15 14 13 12

Fig.11a

Prendendo spunto da queste strategie per tentativi, si potrebbero "*pilotare"* gli allievi ad una riflessione sui numeri pari e dispari, che molto spesso è di aiuto per limitare il numero dei tentativi necessari per aver la certezza e l'esaustività delle soluzioni.
Il numero di tutti i frutti in gioco e delle loro metà, è pari:

- le **mele** sono in numero **pari** perché doppio del numero delle pere;
- le **pere** sono in numero **pari** perché se ne fa la metà;
- la **somma** del numero di **mele** e del numero di **pere** è **pari** perché somma di numeri pari;
- **metà** numero di **mele** è **pari** perché è uguale al numero iniziale di pere;
- **metà** numero di **pere** è **pari** perché sommato ad un numero pari (metà mele) dà un numero pari, 36;
- la **somma** della **metà** del numero di **mele** e della **metà** del numero di **pere** é uguale alla **metà** della somma del numero di **mele** e del numero di **pere** (distributività della somma);
- la somma del numero di frutti raccolti, pere e mele, è 72, il doppio di 36;
- la relazione numerica fra i due frutti si mantiene perché moltiplicativa.

La strategia per tentativi sarebbe stata agevolata da queste riflessioni: ad esempio, nel caso dell'elaborato di Fig.10, invece di sei tentativi sarebbe stato sufficiente esplicitarne tre.
Fra le osservazioni che ci sono pervenute ci risulta che in nessun elaborato abbiano utilizzato questa "scorciatoia". Si potrebbe proporre un problema analogo con variabili numeriche espresse da numeri più grandi, in modo che sia davvero utile ricorrere a queste considerazioni.
Per quanto riguarda l'esaustività delle soluzioni, se non si ha lo strumento algebrico che assicura l'unicità, bisognerebbe andare avanti con i tentativi fino ad esaurire l'intervallo numerico interessato.
Come già accennato, nel paragrafo relativo al primo incontro (problema *Cesto di frutta I*), incentivare negli allievi l'abitudine a definire l'ambito della ricerca, cioè stabilire, nel caso numerico, un minimo ed un massimo valore, è un'abitudine che potenzia notevolmente la capacità di ragionamento nonché quella di fare previsioni.
Il seguente elaborato di cat.7 mostra ancora una strategia per tentativi, ma questa volta si tengono sotto controllo la relazione "*mele il doppio delle pere*" e il totale. Ci si ferma quando il totale è 72, cioè il doppio dei frutti rimanenti. Le "pecche" sono ancora una volta quelle descritte in precedenza.


RISPOSTA:
TOMMASO HA RACCOLTO 24 PERE E E 48 MELE.
ABBIAMO FATTO DEI TENTATIVI

PERE	MELE	FRUTTI TOTALE
15	30	15+30=45
16	32	16+32=64
18	36	18+36=54
19	38	19+38=57
24	48	24+48=72

48 "MELE" + 24 "PERE" = 72
:2 :2
24 + 12 = 36

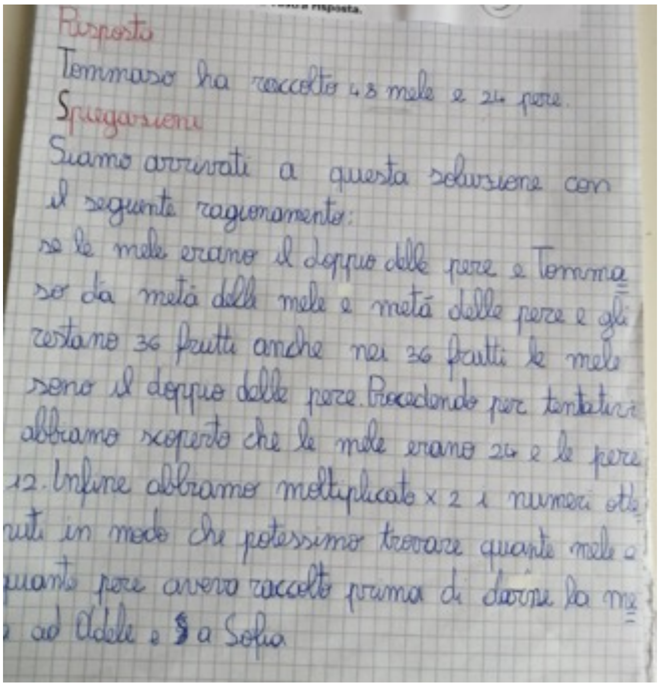
RISPOSTA:
Tommaso ha raccolto 24 pere e 48 mele.
Abbiamo fatto dei tentativi

(tabella)
48"mele" + 24"pere" = 72
:2 :2

24 + 12 = 36

Fig.12

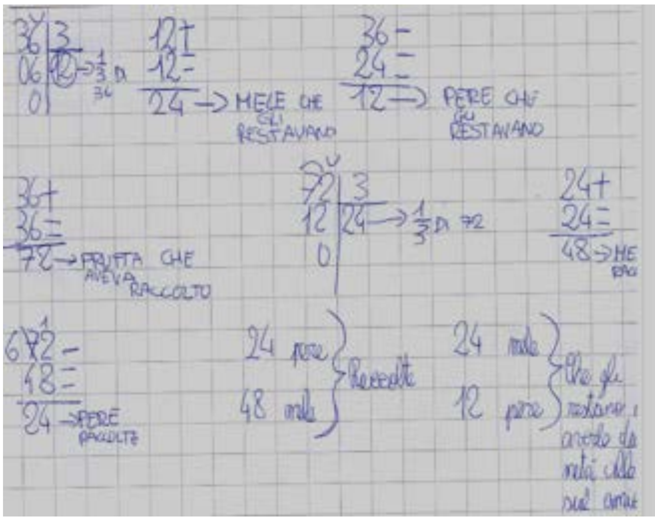
Dall'analisi degli elaborati abbiamo potuto rilevare come la quasi totalità dei gruppi, anche quelli di cat.5, abbiano compreso che "la somma delle metà è uguale alla metà della somma" e che la relazione "mele doppio delle pere" si mantiene anche nel passaggio alle metà ma questo è stato dato, quasi sempre, per scontato. Nella discussione con la classe sarebbe opportuno impostare una riflessione su questa proprietà ma anche sul fatto che la sua validità debba essere giustificata.
Il seguente elaborato, di cat. 5, mostra come gli allievi si siano posti, quanto meno, il problema di specificare che la relazione si conserva. Considerata la categoria, è notevole!


Risposta
Tommaso ha raccolto 48 mele e 24 pere.
Spiegazione
Siamo arrivati a questa soluzione con il seguente ragionamento: se le mele erano il doppio delle pere e Tommaso da metà delle mele e metà delle pere e gli restano 36 frutti anche nei 36 frutti le mele sono il doppio delle pere. Procedendo per tentativi abbiamo scoperto che le mele erano 24 e le pere 12. Infine abbiamo moltiplicato x 2 i numeri ottenuti in modo che potessimo trovare quante mele e quante pere avevo raccolto prima di darne la me[tà] ad Adele e a Sofia

Risposta
Tommaso ha raccolto 48 mele e 24 pere
Spiegazione
Siamo arrivati a questa soluzione con questo ragionamento:
se le mele erano il doppio delle pere e Tommaso dà metà delle mele e metà delle pere e gli restano 36 frutti anche nei 36 frutti le mele sono il doppio delle pere. Procedendo per tentativi abbiamo scoperto che le mele erano 24 e le pere 12. Infine abbiamo moltiplicato x 2 i numeri ottenuti in modo che potessimo trovare quante mele e quante pere aveva raccolto prima di darne la metà ad Adele e a Sofia

Fig.13

Oltre alla strategia per tentativi è stata spesso utilizzata quella del **"dividere per 3"**, sia a partire da 36 (frutti rimasti) che da 72 (frutti raccolti); l'evoluzione di questa strategia è evidente soprattutto nella formalizzazione.

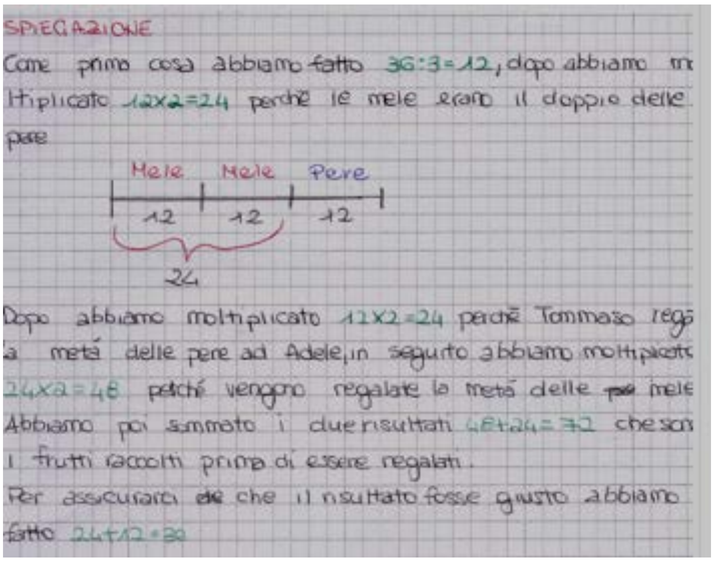


Si può notare come, una volta trovato 12 pere e 24 mele a partire da 36, non moltiplicano per 2 per trovare il totale delle mele e delle pere raccolte ma ripetono lo stesso ragionamento con 72 frutti.
Perché?

Per poter essere sicuri della verifica?

Fig.14

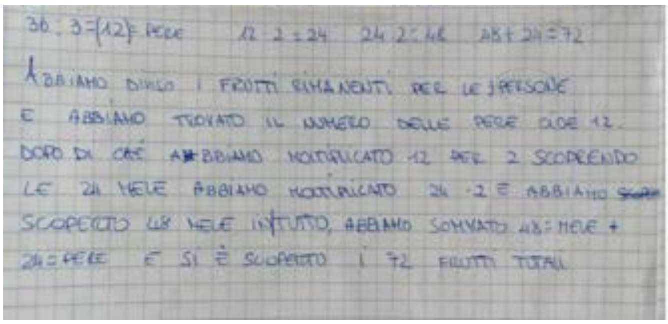
In tutte le categorie, la strategia del "dividere per 3" è stata spesso affiancata da una rappresentazione grafica (i frutti vengono rappresentati con segmenti, quadratini, rettangoli,…), come mostra ad esempio il seguente elaborato, ancora di cat.5.



SPIEGAZIONE
Come prima cosa abbiamo fatto 36:3=12, dopo abbiamo moltiplicato 12x2=24 perché le mele sono il doppio delle pere
(grafico)
Dopo abbiamo moltiplicato 12x2=24 perché Tommaso regala metà delle per ad Adele, in seguito abbiamo moltiplicato 24x2=48 perché vengono regalate metà delle mele. Abbiamo sommato i due risultati 48+24=72 che sono i frutti prima di essere regalati. Per assicurarci che il risultato fosse giusto abbiamo fatto
24+12=36.

Fig.15

Probabilmente gli allievi si sono persi nel riportare la giusta sequenza temporale del ragionamento seguito: prima il grafico, coerente con la relazione fra pere e mele, successivamente 36:3. Forse chi ha scritto non è lo stesso che ha risolto (come spesso succede nella dinamica del lavoro di gruppo) e non ha ben chiaro il ruolo del grafico come strumento risolutivo. Purtroppo nel successivo elaborato, come in molti altri, non viene spiegato perché inizialmente si "divide per 3" e rimane il dubbio che sia perché i "personaggi " in gioco sono 3, come esplicitamente viene detto nei seguenti elaborati (Cfr. Allegato 2 proposta 1).



36:3=(12)=pere 12x2=24 24x2=48 48+24=72
Abbiamo diviso i frutti rimanenti per le 3 persone e abbiamo trovato il numero delle per cioè 12. Dopo di che abbiamo moltiplicato 12 per 2 scoprendo le 24 mele, abbiamo moltiplicato 24x2 e abbiamo scoperto 48 mele in tutto, abbiamo sommato 48 mele + 24 pere e si è scoperto i 72 frutti totali.

Fig.16

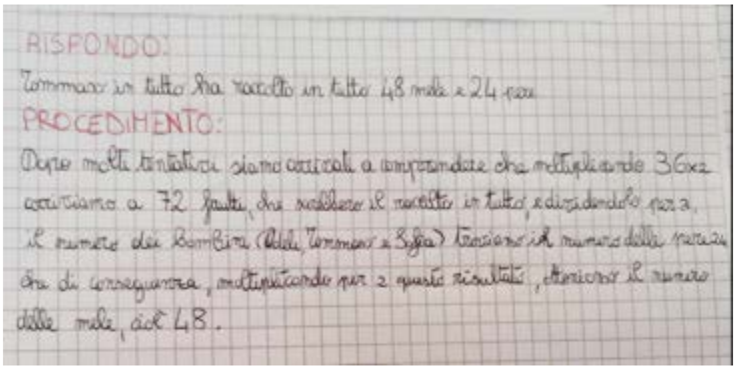


Fig.17

Rispondo: *Tommaso in tutto ha raccolto 48 mele e 24 pere.*
Procedimento: *Dopo molti tentativi siamo arrivati a comprendere che moltiplicando 36x2 arriviamo a 72 frutti, che sarebbero il raccolto in tutto, e dividendolo per 3, il numero dei bambini (Adele, Tommaso, Sofia) troviamo il numero delle pere 24 che, di conseguenza, moltiplicando per 2 questo risultato, otteniamo il numero delle mele, cioè 48.*

In entrambi i casi, purtroppo, il risultato torna ma il ragionamento non si può considerare corretto!
<u>Motivare il perché si divide per 3</u> é un passaggio importante: potrebbero aver ragionato anche in altro modo, altrettanto scorretto, come mostra il seguente elaborato di cat.5

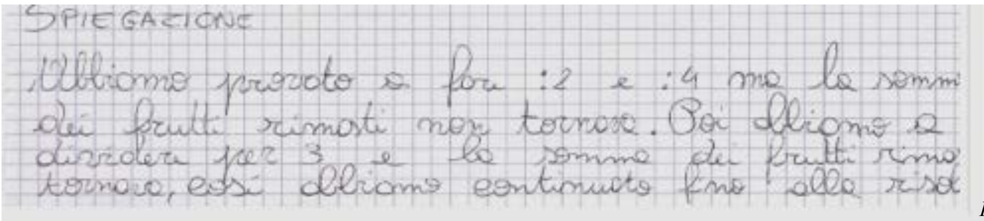


Fig.18

SPIEGAZIONE
Abbiamo provato a fare :2 e :4 ma la somma dei frutti rimasti non tornava. Poi abbiamo (provato) a dividere per 3 e la somma dei frutti rimasti tornava, così abbiamo continuato fino alla risoluzione.

Spesso, solo a posteriori, ci rendiamo conto che la scelta delle variabili numeriche nel testo del problema, può portare alla soluzione giusta ma basata su un ragionamento almeno "nella fase iniziale" errato!

In cat. 6 e cat.7 si vedono soprattutto soluzioni trovate con l'uso di segmenti, rappresentate in modo più o meno coerente e con tutti i dovuti passaggi. Spesso si ha la sensazione che gli allievi usino il linguaggio grafico come una sorta di "gergo " per comunicare solo fra "addetti": allievi e docenti … ci si capisce!
Secondo noi gli esempi successivi, Fig.18a, si mostrano significativi anche sul tema dell'argomentazione.

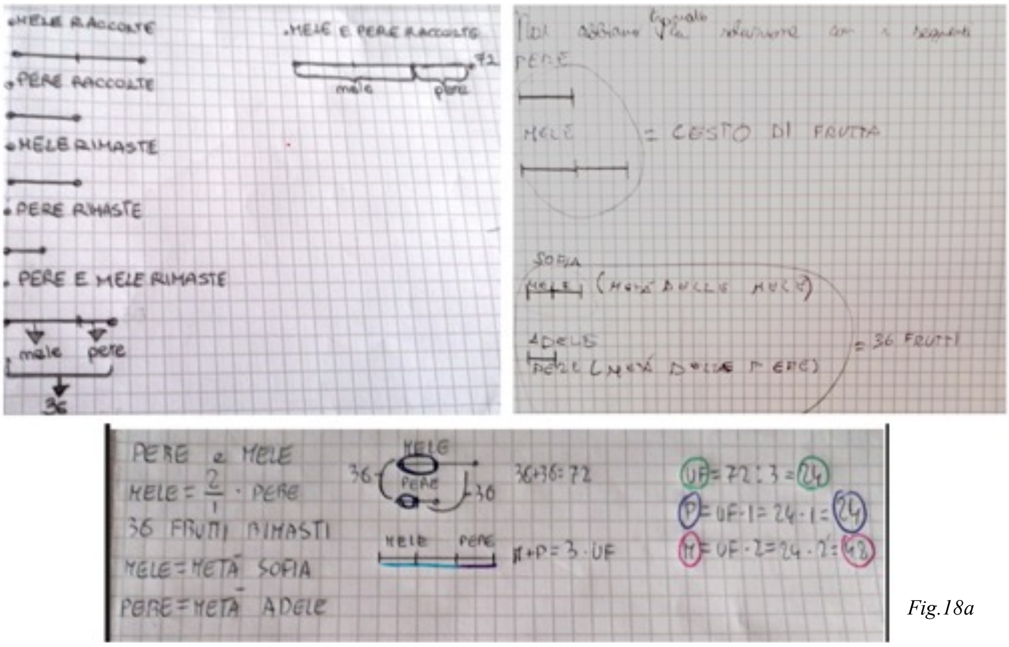
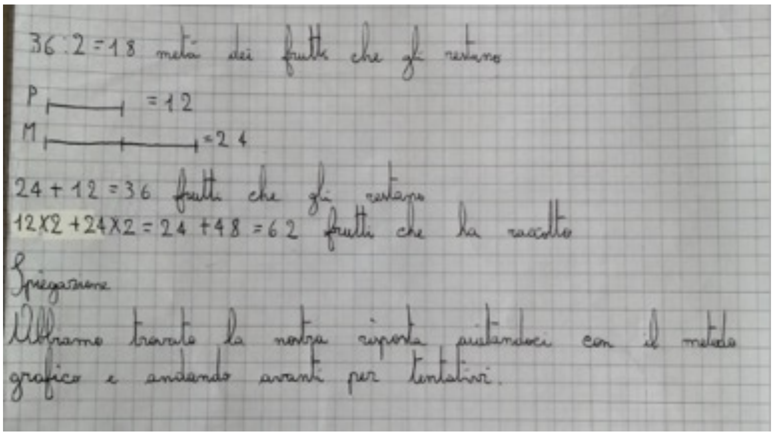


Fig.18a

Provare a leggere! C'è tutto, ma chi non è "del mestiere", cosa capisce?
Sempre sul tema dell'argomentazione è interessante il seguente elaborato di cat.5 che mostra come gli allievi, spesso, intraprendano un percorso risolutivo e poi lo cambino "completamente", in corso d'opera. Questo, dal punto di vista didattico, può fornire l'occasione per discutere sulla necessità di motivare il cambiamento e sul perché ritengano opportuno lasciare traccia del ragionamento abbandonato. Si potrebbe avviare, in classe, una discussione su come avrebbero potuto procedere per quella strada, a quali difficoltà/errori avrebbe condotto, se sarebbe stato un percorso alternativo, …
Probabilmente anche in cat.5, vengono introdotti i metodi di risoluzione grafica con segmenti e gli allievi spesso li utilizzano per verifica quando non riescono ad argomentare quanto compreso e fatto per altra via, come mostra il seguente elaborato.



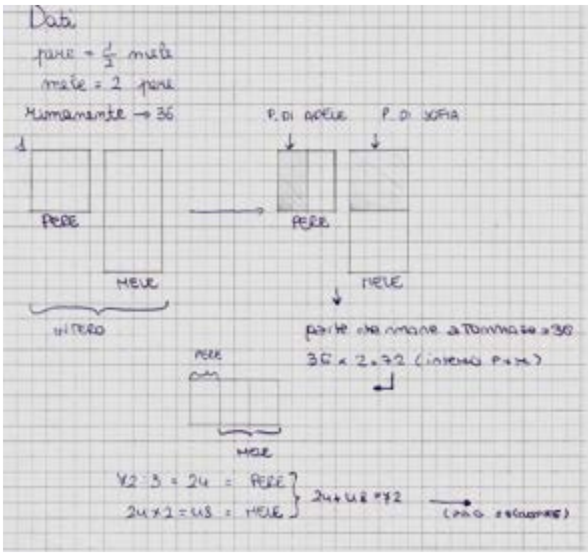
36:2 = 18 metà dei frutti che gli restano

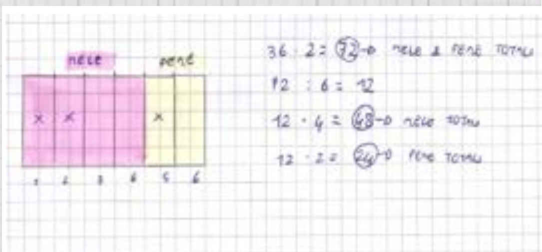
(grafico)

24+12=36 frutti ce gli restano
12×2+24×2=24+48=62 frutti che ha raccolto
Spiegazione
Abbiamo trovato la nostra risposta aiutandoci con il metodo grafico e andando avanti per tentativi.

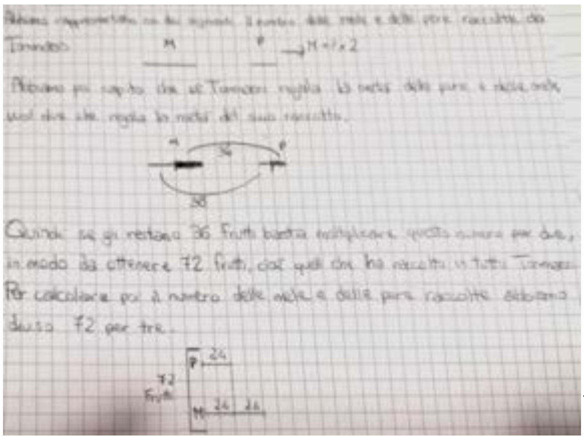
Fig.19

I successivi cinque esempi di cat.7 sono senz'altro più efficaci nell'argomentazione: il passaggio cruciale è esplicitato con ricorso alla grafica, alle frazioni o verbalmente. Raramente, in questa categoria, come anche nella cat.6, si procede per tentativi ed il metodo grafico è il più utilizzato (probabilmente perché nella scuola Secondaria di primo grado ne fanno esperienza con continuità).



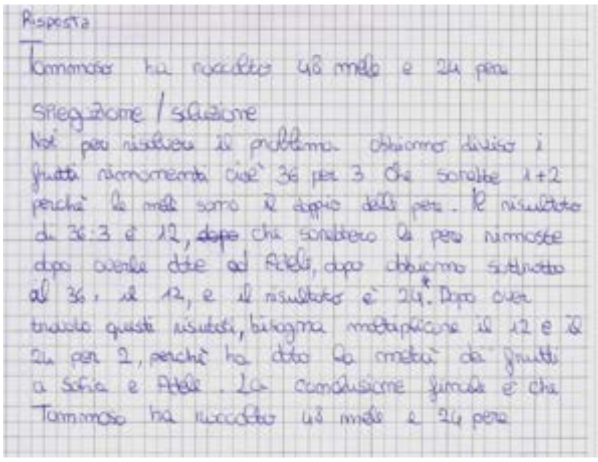


Figg.20-22



Abbiamo rappresentato con dei segmenti il numero delle mele e delle pere raccolte da Tommaso
(segmento di 4 quadretti per le mele e di 2 quadretti per le pere)
Abbiamo poi capito che se Tommaso regala la metà delle mele e delle pere, vuol dire che regala la metà del suo raccolto
(rappresentazione grafica, con evidenza della metà)
Quindi se gli restano 36 frutti basta moltiplicare questo numero per due, in modo da ottenere 72 frutti, cioè quelli che ha raccolto in tutto Tommaso.
Per calcolare poi il numero delle mele e delle pere raccolte abbiamo diviso 72 per 3.
(schema)

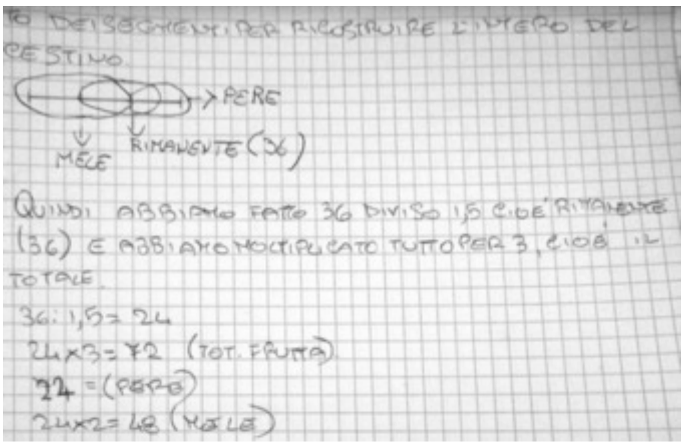
Fig. 23



Risposta
Tommaso ha raccolto 48 mele e24pere.
Spiegazione/soluzione
Noi per risolvere il problema abbiamo diviso i frutti rimanenti cioè 36 per 3 che sarebbe 1+2 perché le mele sono il doppio delle pere. Il risultato di 36:3 è 12, che sarebbero le pere rimaste dopo averle date ad Adele, dopo abbiamo sottratto al 36 il 12 e il risultato è 24. Dopo aver trovato questi risultati, bisogna moltiplicare il 12 e il 24 per 2, perché ha dato la metà dei frutti a Sofia e Adele.
La conclusione finale è che Tommaso ha raccolto 48 mele e 24 pere.

Fig. 24

Ci sono state anche delle strategie originali come mostra, ad esempio, il seguente elaborato di cat.7 in cui gli allievi disegnano le mele (2 unità) in numero doppio delle pere (1 unità), poi individuano, sempre sul disegno, la metà delle mele e la metà delle pere, scrivono "rimanente 36" e dal disegno deducono che corrisponde ad 1,5 (1,5 unità) quindi procedono come mostrato in Fig. 25.



(Per risolvere questo problema abbiamo utilizzato) *dei segmenti per ricostruire l'intero del cestino.*

(disegno)

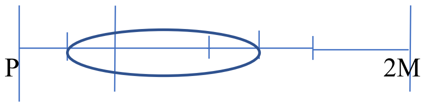
Quindi abbiamo fatto 36:1,5 cioè rimanente (36) e abbiamo moltiplicato tutto per 3, cioè il totale.
36:1,5 = 24
24×3 = 72 (Tot. Frutta)
24 = (pere)

Fig. 25

C'è molto sottointeso: perché 36:1,5 rappresenta il numero di pere iniziali?

Osservando attentamente la loro rappresentazione, si può dedurre che abbiano ragionato così:

l'intero è suddivisibile in 3 parti e 1,5 = 3/2 è la sua metà. I 36 frutti rimasti sono rappresentati da 1 intero e mezzo. Dividere 36 per 1,5 è come fare 36×2/3 = 24 cioè dividere 36 in tre parti e prenderne 2 che rappresentano proprio il numero delle pere o la metà delle mele.
Oppure c'è sotto una proporzione?
36: 1,5=x:3
x= (36: 1,5) × 3 = 72 e quindi … le pere sono 24 perché terza parte di tutto.
Cambiando i dati: mele il triplo delle pere avrebbero ragionato così?



36 : 2 = x : 4

36

x = (36:2) × 3 = 72 oppure
36:2= 18 sono le pere
18×3 = 54 sono le mele

Fra le strategie originali c'è anche l'utilizzo delle frazioni e della frazione complementare, come mostrano i seguenti elaborati di cat.7 (cfr. Allegato II proposta 2: il problema può avere una valenza didattica per l'utilizzo delle frazioni).

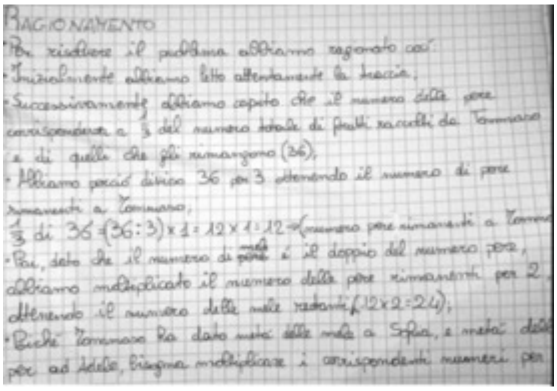


Fig.26

RAGIONAMENTO
Per risolvere il problema abbiamo ragionato così:
-Inizialmente abbiamo letto attentamente la traccia,
-successivamente abbiamo capito che il numero delle pere corrispondeva a 1/3 del numero totale di frutti raccolti da Tommaso e di quelli che gli rimangono (36)
-Abbiamo perciò diviso 36 per 3 ottenendo il numero di pere rimanenti a Tommaso;
1/3 di 36 =36:3)x1=12x1=12→(numero pere rimanenti a Tommaso
Poi, dato che il numero di mele è il doppio del numero di pere, abbiamo moltiplicato il numero delle pere rimanenti per 2, ottenendo il numero delle mele restanti (12 x2=24);
poiché Tommaso ha dato metà delle mele a Sofia e metà delle pere ad Adele, bisogna moltiplicare i corrispondenti numeri per due.

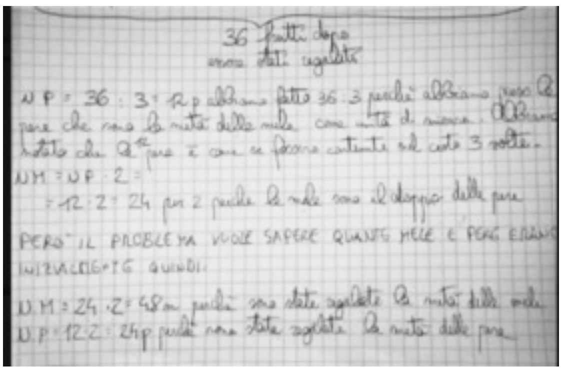


Fig.27

36 Frutti dopo essere stati regalati
NP=36:3=12p abbiamo fatto 36:3 perché abbiamo preso le pere che sono la metà delle mele come unità di misura. Abbiamo notato che le 12 pere è come se fossero contenute nel cesto3 volte.
NM = NP x2= 12x2=24 per2 perché le mele sono il doppio delle pere
PERO' IL PROBLEMA VUOL SAPERE QUANTE MELE E PERE ERANO INIZIALMENTE QUINDI
N.M=24x2 = 48 perché sono state regalate la metà delle mele
N.P=12 x2=24 p perché sono state regalate la metà delle pere

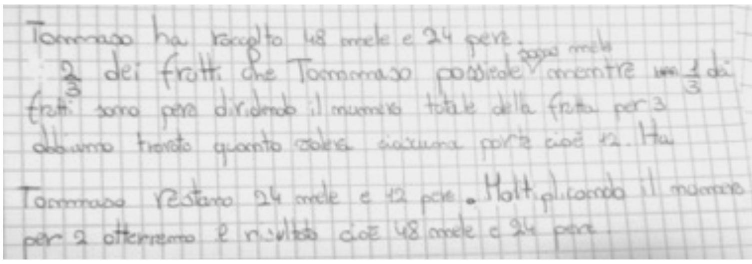


Fig.28

Tommaso ha raccolto 48 mele e 24 pere. 2/3 dei frutti che Tommaso possiede sono mele mentre 1/3 dei frutti sono pere dividendo il numero totale della frutta per 3 abbiamo trovato quanto valeva ciascuna parte cioè 12. A Tommaso restano 24 mele e 12 pere. Moltiplicando il numero per 2 otterremo il risultato cioè 48 mele e 24 pere.

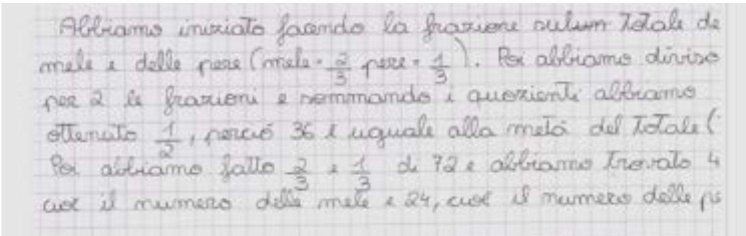
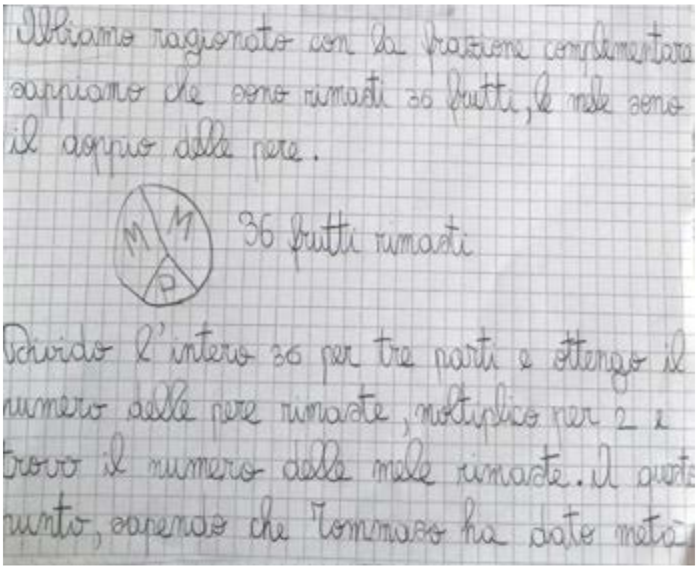


Fig.29

Abbiamo iniziato facendo la frazione sul totale delle mele e delle pere (mele=2/3 pere=1/3). Poi abbiamo diviso per 2 le frazioni e sommando i quozienti abbiamo ottenuto ½, perciò 36 è uguale alla metà del totale. Poi abbiamo fatto 2/3 e 1/3 di 72 e abbiamo trovato 48 cioè il numero delle mele e 24, cioè il numero delle pere.



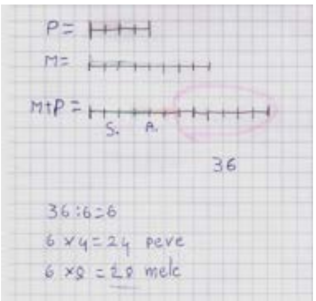
Abbiamo ragionato con la frazione complementare, sappiamo che sono rimasti 36 frutti, le mele sono il doppio delle pere.

(grafico) *36 frutti rimasti.*

Divido l'intero 36 per tre parti e ottengo il numero delle pere rimaste, moltiplico per 2 e trovo il numero delle mele rimaste. A questo punto, sapendo che Tommaso ha dato metà.

Fig.30

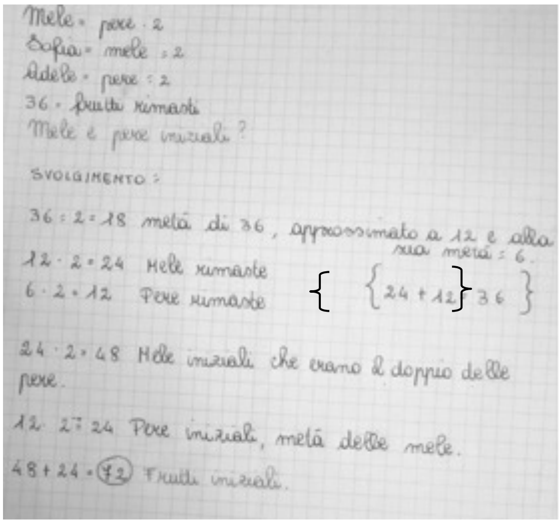
Nel precedente elaborato e nei tre successivi è interessante notare l'uso di alcuni termini e/o concetti, non sempre appropriati, ma da cui traspare la quotidianità degli argomenti del programma che stanno affrontando in quel momento.
In particolare gli elaborati delle figure 31 e 33 ci fanno riflettere sul fatto che bisogna abituare i propri allievi a rileggere e valutare ciò che hanno scritto: i "segmenti" diventano "centimetri di frutta" ed "approssimare" ha un uso molto fantasioso!



(rappresentazione grafica con uso di segmenti)

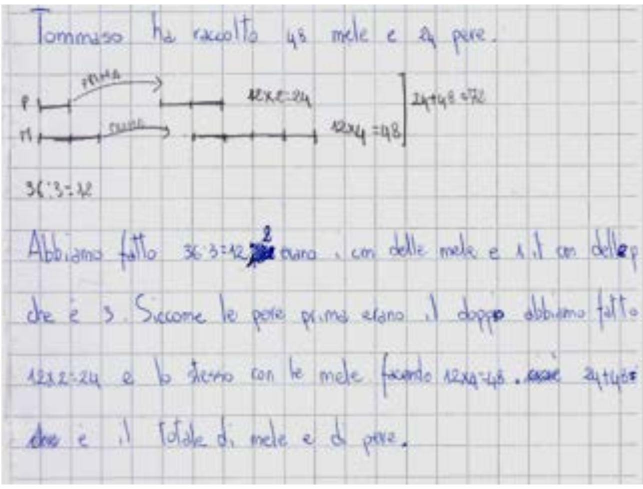
36 : 6 = 6
6 × 4 = 24 pere
6 × 8 = 48 mele

Fig.31



Mele = pere x 2Sofia = mele : 2
Adele = pere : 2
36 = frutti rimasti
Mele e pere iniziali?
Svolgimento:
36 : 2 =18 metà di 36, approssimato a 12 e alla sua metà =6
12x2= 24 mele rimaste 24 +12 =36
6 x 2 = 12 pere rimaste
24 x2 = 48 mele iniziali che erano il doppio delle pere
12 x 2 =24 pere iniziali, metà delle mele
48 + 24 =72 frutti iniziali

Fig.32



Tommaso ha raccolto 48 mele e 24 pere.

(grafico)

Abbiamo fatto 36:12=12 2 erano i cm delle mele e 1 i cm delle pere, che è 3. Siccome le pere prima erano il doppio abbiamo fatto 12x2=24 e lo stesso con le mele facendo 12x4=48. 24+48=72 è il totale di mele e di pere.

Fig.33

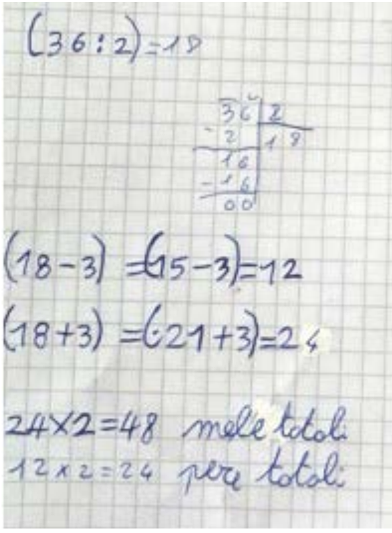


Fig.34

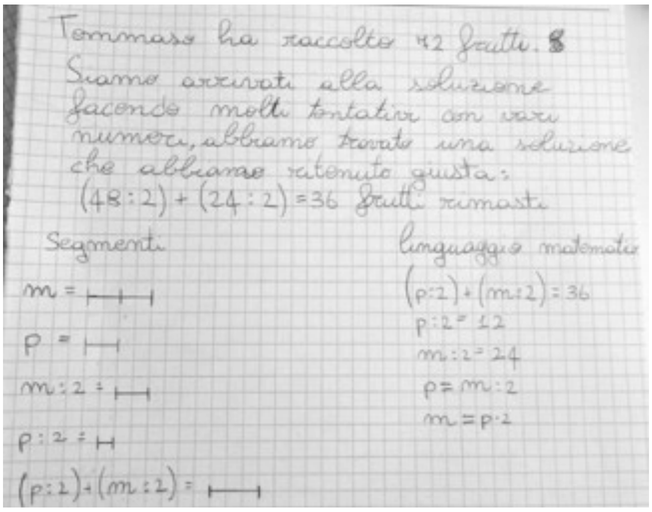
Non sono mancati nemmeno elaborati in cui viene presentata una serie di calcoli senza alcuna spiegazione e con un uso del simbolo "=" molto discutibile.

Chi scrive ha buone intenzioni, forse vuole risparmiare tempo nella scrittura, ma non si rende conto di avere scritto che 18-3 = 12 e 18 + 3 =24 poiché l'uguaglianza è una

Molti degli elaborati presentati possono essere utili per promuovere una discussione con i ragazzi con l'obiettivo di capire che il ragionamento seguito, scritto o anche orale, indipendentemente dal linguaggio utilizzato, deve essere costruito in modo chiaro, con tutte le esplicitazioni, per essere corretto e compreso da tutti coloro che leggono o che ascoltano.

Potrebbe essere una proposta valida, anche in un periodo di "scuola a distanza" in cui mancano tutti quei "segnali" che caratterizzano la scuola in presenza e che facilitano la comprensione.

Abbiamo trovato elaborati con compresenza di più linguaggi come, ad esempio, il successivo di cat.6.



Tommaso ha raccolto 72 frutti.
Siamo arrivati alla soluzione facendo molti tentativi con vari numeri, abbiamo trovato una soluzione che abbiamo ritenuto giusta:

(48:2)+(24:2)=36 frutti rimasti

Segmenti linguaggio matematico

(grafico)

Fig.35

Sono incerti sulla validità di un linguaggio o semplicemente sentono il bisogno della verifica e/o conferma?

4. Prime attività sperimentali

Come abbiamo visto i due problemi selezionati per un'analisi a posteriori condivisa con il nostro Gruppo, propongono lo stesso contesto ma "la loro messa in formula" evidenzia equazioni di natura molto diversa:

- *Cesto di frutta I* si traduce con l'equazione $n + (n + 3) + 2(n + 3) = 29$ e mette in gioco i concetti di somma e di doppio;
- *Cesto di frutta II* si traduce con l'equazione $36 = \frac{n}{2} + \frac{2n}{2} = \frac{n+2n}{2}$ e, pur mettendo ancora in gioco i concetti di somma e di doppio aggiunge il concetto di metà ed è centrato sulla proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto.

Il Gruppo condivide la scelta di denominarli versione I e versione II, proprio perché quest'ultima,
introducendo una proprietà legata alla somma ed al prodotto, costituisce una evoluzione significativa nell'acquisizione delle operazioni e delle loro proprietà. Le due versioni possono essere inserite in un percorso

didattico mirato a far superare la difficoltà di muoversi sulla linea dei numeri in presenza di relazioni, ma anche a creare l'abitudine di ragionare su un range di numeri possibili, che tenga conto dei vincoli imposti.
Per gli allievi di categorie più alte la versione II (insieme con le sue modifiche), come accennato sopra, può essere utile per dare un significato alle proprietà delle operazioni, spesso solo elencate e applicate in modo automatico (pensiamo ai ripetuti esercizi sulle espressioni) ma anche per riflettere sulle proprietà dei numeri (pari, dispari, multipli, divisori …) e per avviare al linguaggio algebrico.
Entrambe le versioni possono essere utilizzate dall'insegnante per sviluppare negli allievi la capacità di rappresentare situazioni problematiche e di condividerle in classe in modo da evidenziarne la chiarezza, la correttezza e l'efficacia (cfr. § *5*).
Le sperimentazioni fatte (cfr. Allegati 1 e 2) ci hanno permesso di rilevare la difficoltà che anche allievi di scuola Secondaria di primo grado, ai quali è stata proposta la versione I del problema con il testo modificato, trovano nel rappresentarsi una situazione problematica (cfr. Allegato 1 proposte 1 e 2). E' stato possibile riconoscere che la maggiore difficoltà, almeno a questo livello, non è stata quella della comprensione linguistica legata alla complessità della frase, ma proprio quella di utilizzare lo strumento della rappresentazione per attivare una strategia risolutiva. Gli esempi successivi, relativi rispettivamente alla proposta 1 (Figg. 36 e 37) e alla proposta 2 (Fig.38), mostrano che la soluzione del problema è stata trovata a tentativi e che la rappresentazione grafica è stata fatta a posteriori e utilizzata solo per effettuare una verifica.

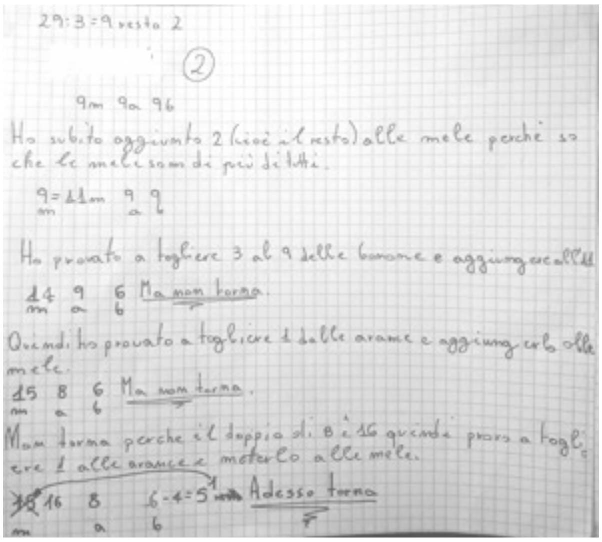


Fig.36

29 : 3 = 9 resto 2
2
9m 9a 9b
Ho subito aggiunto 2 (cioè il resto) alle mele perché so che le mele sono più di tutti.
9=11m 9 9
m a b
Ho provato a togliere 3 al 9 delle banane e aggiungere all'11
14 9 6
m a b <u>Ma non torna</u>
Quindi ho provato a togliere 1 dalle arance e aggiungerlo alle mele
15 8 6
m a b <u>Ma non torna</u>
Non torna perché il doppio di 8 è 16 quindi provo a togliere 1 alle arance e metterlo alle mele
~~15~~16 8 6 - 1=5 <u>Adesso torna</u>
m a b

L'allievo non tiene conto della descrizione verbale *togliere 1 alle arance e metterlo alle mele* sarebbe dovuto essere "togliere 1 alle banane e metterlo alle mele". Questo non gli impedisce di fare la verifica corretta, limitatamente al controllo dei calcoli, con rappresentazione grafica.

Torna perché 16 è il doppio di 8 e 5 sono 3 meno di 8
mele
arance
banane

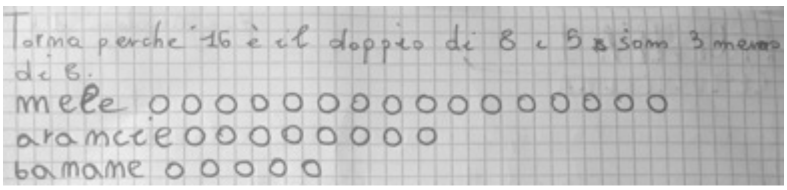


Fig. 37

Ancora un elaborato con risoluzione per tentativi nel quale compare la rappresentazione, successiva alla risoluzione del problema, pertanto non di supporto per chiarire il ragionamento condotto.

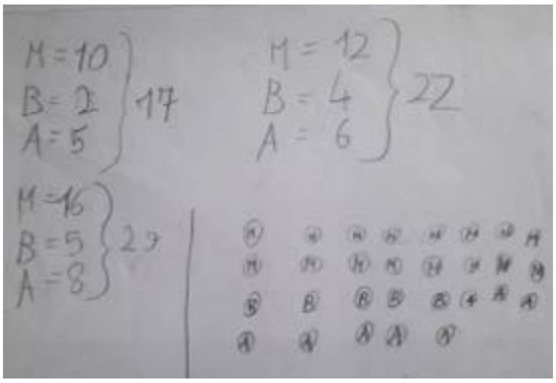


Fig. 38

La proposta 3 relativa alla versione I del problema (cfr. Allegato 1), conferma, a livello di scuola secondaria di I grado, quanto avevamo previsto come mostra il successivo elaborato.

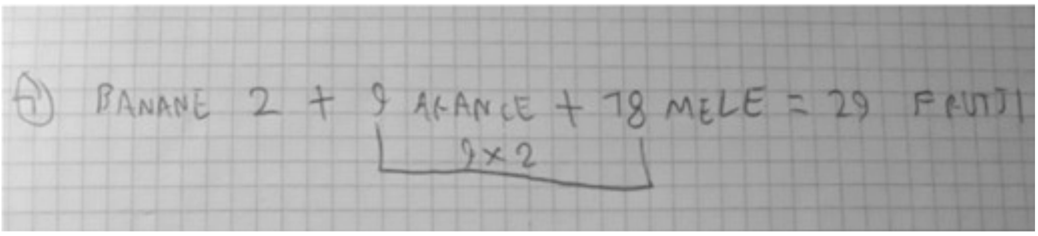
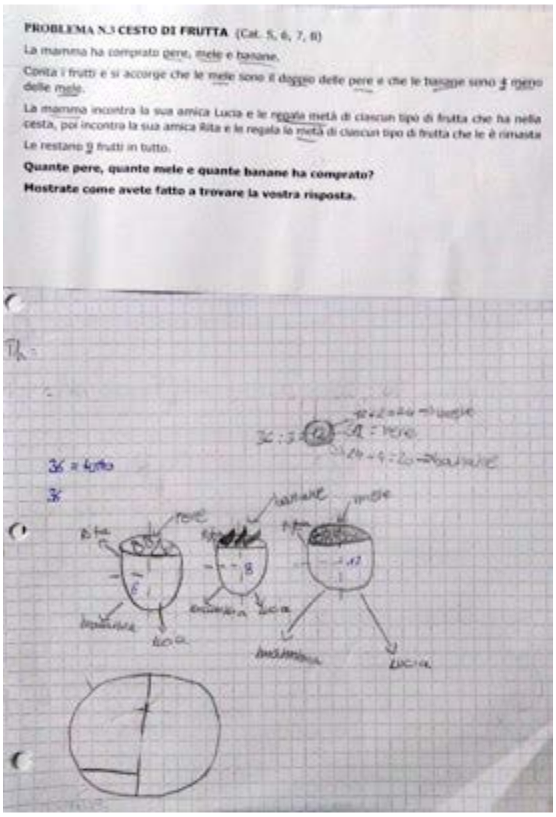


Fig. 39

Per quanto riguarda le sperimentazioni legate alla versione II del problema, condotte in classi di scuola secondaria di I grado, permane il problema della rappresentazione tanto che un'insegnante sperimentatrice ha ammesso di aver suggerito l'utilizzo di una tabella altrimenti gli allievi erano bloccati!

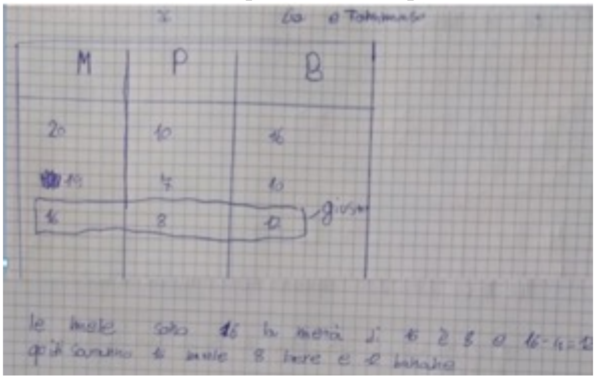


La stessa insegnante riferisce che due allievi hanno lavorato sulla proposta n.4 della versione II (Allegato 2) e che sono partiti disegnando tre contenitori con i diversi frutti. Hanno trovato il numero corretto dei frutti (36), ma poi dividevano per 3 questo totale e, applicando le relazioni date dal problema, hanno ottenuto:

36 : 3 = 12 → *12x2 =24 mele*
→ *12 pere*
→ *24-4=20 banane*

Fig. 40

L'insegnante è intervenuta suggerendo di cambiare strategia: con il totale dei frutti, avrebbero potuto ragionare sulle relazioni. Hanno quindi lavorato per tentativi con la tabella seguente:



(grafico)
Le mele sono 16 la metà di 16 è 8 e 16 - 4 =12
Quindi saranno 16 mele 8 pere e 12 banane

Fig. 41

Mancano sia la corrispondenza con il disegno che un controllo sul numero di frutti rimasti.
Si potrebbe ipotizzare che, pur avendolo scritto, non erano certi che 36 fosse proprio il totale!
Sempre l'insegnante, nella stessa classe, riferisce che a quel problema hanno lavorato, questa volta in modo autonomo, una coppia di allieve che ha scoperto una regolarità sulla differenza tra il numero di mele e quello di banane: tale numero si dimezza in corrispondenza del progressivo dimezzare dei frutti (algebricamente, sempre per la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto, abbiamo: $\frac{3a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{3a-a}{2}$). Le due allieve hanno trovato la soluzione del problema proprio ragionando sulle relazioni tra i frutti rimasti: se la differenza tra mele e banane è di 4 unità, dopo il primo dimezzare essa diventa di 2 unità e dopo il secondo diventa di 1 unità.
A questo punto hanno individuato la terna corretta dei 9 frutti rimasti (2 pere, 4 mele, 3 banane) e, raddoppiandola per due volte, hanno trovato il risultato corretto. I numeri assegnati, piccoli, non spingono a scoprire e motivare altre regolarità, tuttavia l'insegnante potrebbe trarre spunti per osservazioni e discussioni in classe (ad esempio: il numero delle banane rimaste dovrà essere sempre dispari, dato che il suo successivo, quello delle mele, dovrà essere pari per rispettare la relazione con le pere; se il problema non trattasse di quantità discrete ma continue, cosa cambierebbe?).
In una classe seconda di secondaria di I grado, a cui è stata somministrata la proposta 2 dell'Allegato 2, si è avuta la gradita e sorprendente risposta mostrata in Fig. 42.

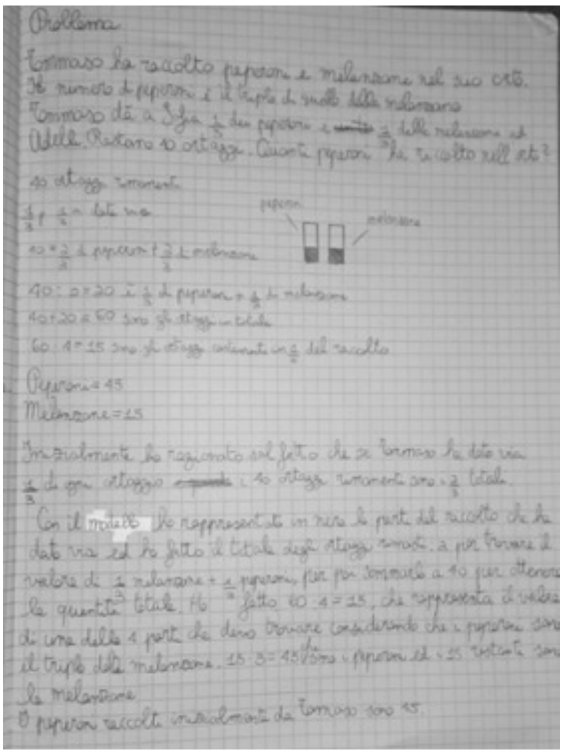
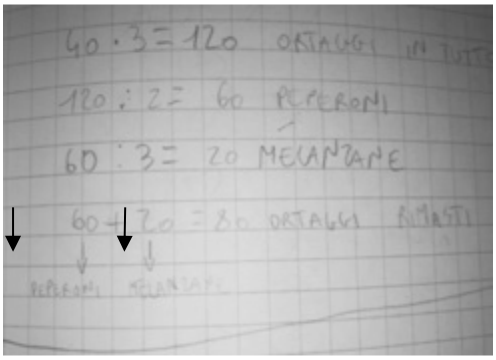


Fig. 42

Problema
cfr. proposta 2, Allegato 2

40 ortaggi rimanenti
1/3 p 1/3 m date via
40 = 2/3 di peperoni + 2/3 di melanzane
40 :2 =20 è 1/3 di peperoni + 1/3 di melanzane
40 + 20 = 60 sono gli ortaggi in totale
60 : 4 =15sono gli ortaggi contenuti in ¼ del raccolto
Peperoni=45
Melanzane = 15
Inizialmente ho ragionato sul fatto che se Tommaso ha dato via 1/3 di ogni ortaggio i 40 ortaggi rimanenti sono i 2/3 totali.
Con il modello ho rappresentato in nero le parti del raccolto che ha dato via ed ho fatto il totale degli ortaggi rimasti : 2 per trovare il valore di 1/3 di melanzane + 1/3 di peperoni per poi sommarli a 40 per ottenere la quantità totale.
Ho fatto 60 : 4 = 15, che rappresenta il valore di una delle 4 parti che devo trovare considerando che i peperoni sono il triplo delle melanzane
15 x 3 = 45 che sono i peperoni e i 15 restanti sono le melanzane .
I peperoni raccolti inizialmente da Tommaso sono 45.

Nella spiegazione verbale il gruppo che ha risolto il problema ha sentito il bisogno di esplicitare il fatto di essersi aiutati con il "modello". Tuttavia, gli allievi non si sono resi conto che il modello stesso avrebbe potuto essere fuorviante perché le due quantità disegnate non avrebbero dovuto essere uguali tra loro (nella loro mente questo non aveva importanza).
Come ha detto l' insegnante sperimentatrice, questo tipo di spiegazione non rappresenta lo standard della classe, infatti, a livello di comprensione, nella stessa si è avuta una situazione ben più variegata. Spesso, come mostrano i seguenti tre elaborati, si considerano gli ortaggi rimasti come un terzo anziché come i due terzi di quelli iniziali, scambiando la parte regalata con quella rimasta. Nel testo originale (*Cesto di frutta II*) questo ostacolo non c'era perché un mezzo è complementare di se stesso mentre un terzo ha per complementare due terzi.

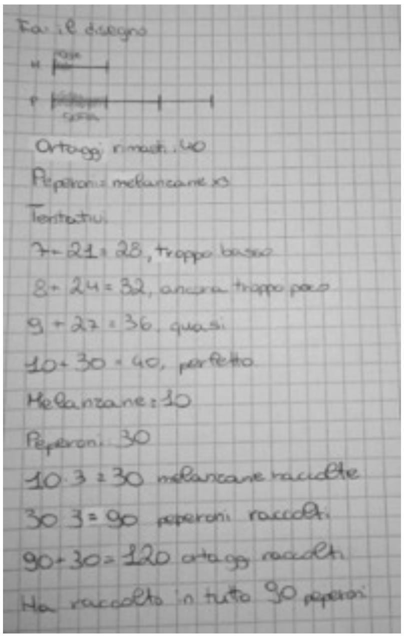


40 x 3 = 120 ortaggi in tutto
120 : 2 = 6' peperoni
60 : 3 = 20 melanzane
60 + 20 = 80 ortaggi rimasti

Peperoni   melanzane

Fig. 43

Gli allievi procedono nei calcoli senza dare spiegazioni e soprattutto senza verificare che, a conti fatti, gli ortaggi rimasti non corrispondono più a quelli dati dal testo!
Non rispondono comunque alla domanda formulata!
Nei successivi elaborati sembrerebbe compreso il rapporto (1:3) tra le parti rimanenti ma, per trovare gli ortaggi iniziali bisognava, dopo aver moltiplicato per 3, anche dividere per 2!

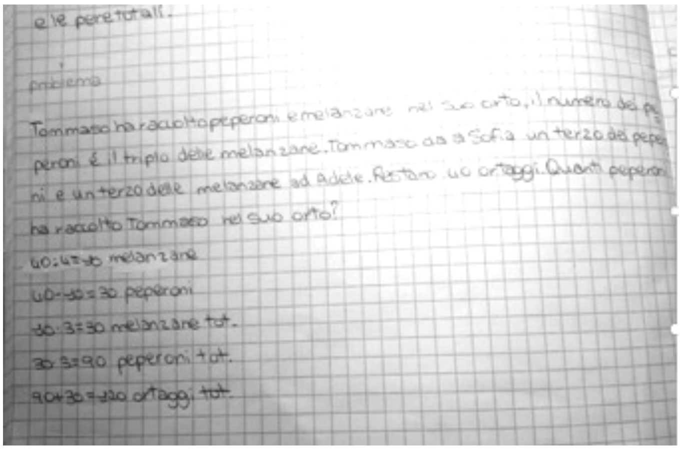


Fai il disegno

(grafico)

Ortaggi rimasti: 40
Peperoni = melanzane x 3
Tentativi
7 + 21 =28 troppo basso
8 + 24 = 32, ancora troppo poco
9 + 27 = 36, quasi
10 + 30 = 40, perfetto
Melanzane: 10
Peperoni: 30
10 × 3= 30 melanzane raccolte
30×3 = 90 peperoni raccolti
90 + 30 = 120 ortaggi raccolti
Ha raccolto in tutto 90 peperoni.

Fig.44

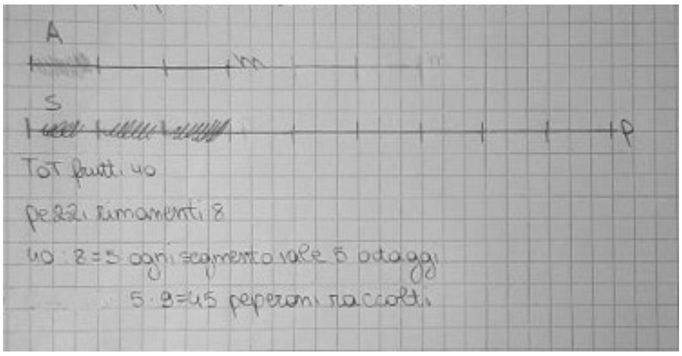


(Riportano il testo di proposta 2 Allegato 2)

40 : 4 = 10 melanzane
40 – 10 = 30 peperoni
10 ×3 = 30 melanzane tot.
30×3 = 90 peperoni tot.
90 + 30 = 120 ortaggi tot.

Fig.45

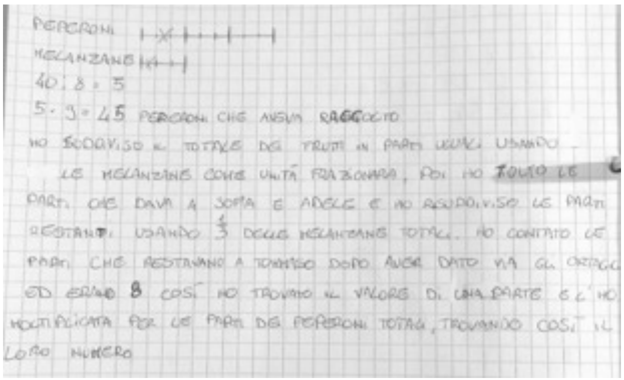
Gli allievi, autori del seguente elaborato, seguendo la narrazione del testo e rappresentando graficamente, comprendono che i 40 ortaggi rimasti corrispondono a 8 unità frazionarie e risolvono correttamente il problema.



(grafico)

Tot. frutti 40
pezzi rimanenti 8
40 : 8 = 5 ogni segmento vale 5 ortaggi
5×9 = 45 peperoni raccolti

Fig. 46



(rappresentazione grafica e calcoli)

Ho suddiviso il totale dei frutti in parti uguali usando le melanzane come unità frazionaria, poi ho tolto le parti che dava a Sofia e Adele e ho risuddiviso le parti restanti usando 1/3 delle melanzane totali. Ho contato le parti che restavano a Tommaso dopo aver dato via gli ortaggi ed erano 8, così ho trovato il valore di una parte e l'ho moltiplicato per le parti dei peperoni totali, trovando così il loro numero.

Fig. 47

Le proposte 3 e 4 dell'allegato 2 sono state assegnate ad una classe di cat. 8 che non aveva affrontato i problemi originari (*Cesto di frutta I e II*). A causa delle restrizioni dovute alla pandemia, i problemi sono stati risolti singolarmente e svolti a casa in modo facoltativo.
Abbiamo evidenziato che, anche a questo livello di categoria, le strategie sono le stesse di quelle utilizzate nei problemi originari dalle categorie più basse. Gli allievi non hanno ancora raggiunto la dovuta "maturità" nell'utilizzo dello strumento algebrico, introdotto ma evidentemente non ancora assimilato per la risoluzione dei problemi.
Gli elaborati relativi alle proposte 3 (Figg. 48, 49 e 50) e 4 (Figg. 51 e 52) mostrano, più o meno esplicitamente, che il primo passo per risolvere il problema è quello di risalire al numero dei frutti iniziali (15×2=30 nella proposta 3 e 9×2×2=36 nella proposta 4), poi procedere per tentativi, mediante la costruzione di una tabella oppure, dopo aver considerato le "unità frazionarie" iniziali di mele, pere e banane, comprendendo che queste ultime, nel primo caso, sono equivalenti al numero delle pere più 2 e, nel secondo caso, al numero di mele meno 4.

Cesto di frutta
Frutta = mele per banane
In tutto 30
Mele doppio delle pere
Banane sono meno 2 delle pere

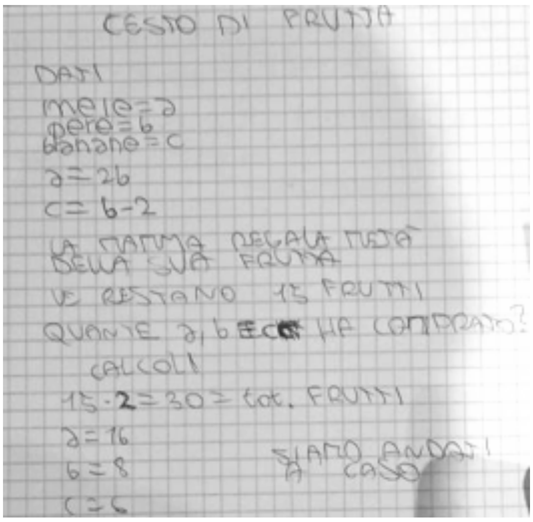
Mele	*Pere*	*Banane*	*Tot. frutta*

Fig.48

Prima di tutto devo capire quanti erano i frutti, quindi faccio:
15+15=30 frutti totali
Poi aggiungo 2, che sono le altre parti delle banane
30+2=32
Adesso divido per 4 (erano le parti di: 2 mele, 1 pere e 1 banane):
32:4=8 sarebbe la cifra di ogni frutto ma poi per capire il vero risultato di ogni frutto si fa:
mele=8×2=16
pere=8 } *16+8+6=30 frutti totali*
banane=8-2=6

Fig.49

Oppure si tenta di "algebrizzare" ma poi non si sa gestire fino in fondo



Cesto di frutta

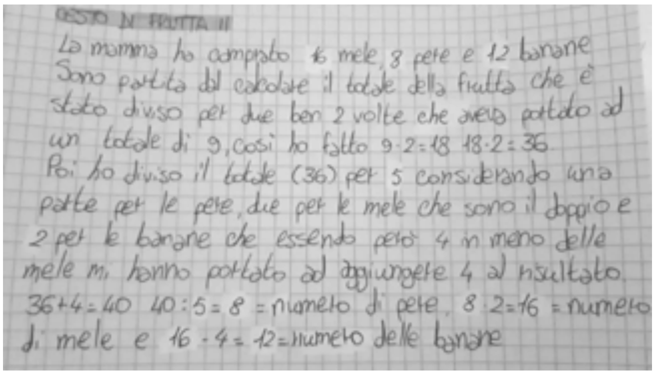
Dati
Mele= a
pere= b
banane= c
a= 2b
c= b-2
La mamma regala metà della sua frutta le restano 15 frutti
Quante a, b e c ha comprato?
Calcoli
15 ×2=30=tot. Frutti
a=16
b=8 *Siamo andati a caso*
c=6

Fig.50

Cesto di frutta II
Frutta=mele pere banane
In tutto= 9×2=18   18×2=36
Mele doppio delle pere
Banane 4 meno delle mele

Mele	Pere	banane	Frutta tot.

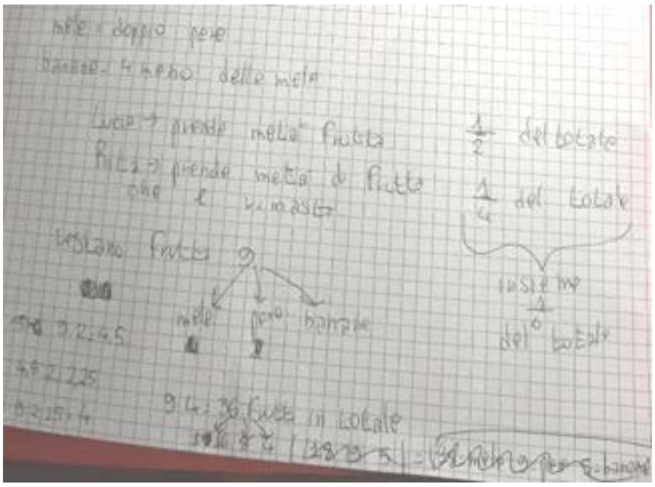
Fig.51



La mamma ha comprato 16 mele 8 pere e 12 banane. Sono partita dal calcolare il totale della frutta che è stato diviso per ben due volte che aveva portato ad un totale di 9, così ho fatto 9×2=18   18×2=36.
Poi ho diviso il totale (36) per 5 considerando una parte per le pere, due per le mele che sono il doppio e 2 per le banane che essendo però 4 in meno delle mele mi hanno portato ad aggiungere 4 al risultato
36+4=40   40:5=8=numero di pere
8×2=16=numero di mele e
16-4=12=numero delle banane.

Fig.52

Nessuno, per trovare i frutti acquistati, ha compreso che i 9 frutti rimasti rappresentano $\frac{1}{4}$ del totale e ha ragionato utilizzando le frazioni. Solo l'elaborato qui di seguito mostra un tentativo di utilizzo che, però, non è stato gestito correttamente né dal punto di vista operativo ($\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$) né concettuale (si trovano soluzioni decimali).



Mele = doppio pere
Banane = 4 meno delle pere

Lucia prende metà frutta
Rita prende metà frutta che è rimasta
½ del totale
¼ del totale

Insieme ⅙ del totale

Restano frutti   9 (mele, pere, banane)
9:2=4,5
6,5:2=2,25
9:2,25=4   9 x 4=36 frutti in totale
16   8   4

Fig.53

5. Ancora qualche spunto per il lavoro in classe

Gli elaborati degli allievi ci hanno suggerito un'attività che ci sembrava interessante dal punto di vista dell'argomentazione. Più volte, infatti, abbiamo notato che "chi legge" non sempre è in grado di capire il ragionamento seguito da “altri” specialmente se “chi scrive” utilizza un “metodo” standardizzato, in quel momento, nella propria classe[8].

Proposta di attività:

- fornire il testo del problema,
- lasciare il tempo, agli allievi sperimentatori, di comprenderlo ed appropriarsene,
- mostrare le soluzioni prodotte da altri e chiedere di leggerle e di interpretarle,
- raccogliere, in breve, le osservazioni degli alunni seguendo ad esempio la traccia riportata:
  - Il procedimento presentato è chiaro in tutte le sue parti?
    - E’ completo?
    - Secondo voi, un lettore non già competente (es. non insegnante) è in grado di capirlo fino in fondo?
    - Quali modifiche sarebbero necessarie? In quali punti in particolare?
    - La pagina è organizzata in modo da far comprendere cosa è stato fatto prima e cosa dopo?

La sperimentazione è stata condotta in una classe di cat. 6 e sono stati utilizzati gli elaborati di Fig.8 e di Fig.18a. Riguardo l’elaborato di Fig.8, relativo al problema *Cesto di frutta I*, gli allievi, osservando la rappresentazione grafica, non capivano i calcoli ed hanno sentito il bisogno di andare alla lavagna per “correggere”. C’è stato chi ha voluto inserire una unità frazionaria con il nome “banane+3” e chi invece ha voluto separare “le banane dalla differenza 3”. A quasi tutti però tornava meglio la seconda rappresentazione (cfr. figura sotto) perché, secondo loro, mette meglio in evidenza che si deve aggiungere 3 al numero totale di frutti per poi dividere per le 4 unità frazionarie.

Per *Cesto di frutta II*, sono stati consegnati due degli elaborati presenti in figura 18a relativi al problema che gli allievi già avevano affrontato come proposta di sperimentazione.

Alla maggior parte degli allievi sperimentatori è piaciuta molto fin da subito la schematizzazione mostrata nell’elaborato in alto a sinistra: per loro era molto chiara, ed apprezzavano il fatto che fosse stato raggiunto l’obiettivo “senza calcoli”. Un alunno ha detto addirittura che lo svolgimento era talmente chiaro da non rendere necessario leggere il testo!

L’elaborato illustrato in basso, nella figura 18a, è inizialmente piaciuto a pochissimi e quei pochi che lo hanno apprezzato, hanno detto: *se bisogna fare matematica, facciamola con i numeri, come si deve!!*

Dopo che l’insegnante ha fatto notare che nel primo non era esplicitato il numero di mele e pere, la maggior parte degli allievi ha cambiato idea ed ha preferito l’argomentazione del secondo elaborato.

6. Alcune osservazioni

Si potrebbe ritenere che gli allievi, in questa attività, si siano concentrati soprattutto sulla ricerca della correttezza procedurale, intesa come applicazione di conoscenze acquisite e di strumenti a loro familiari, piuttosto che sull’efficacia dell’argomentazione, sulla base di criteri “oggettivi”. Siamo all’inizio di un percorso che porta a capire l’importanza di argomentare: gli allievi non si pongono ancora in modo critico per cogliere pregi e difetti di un modo di esporre … basta un’osservazione dell’insegnante e cambiano idea.

Se non fossero stati in possesso degli stessi strumenti (grafici) utilizzati dai risolutori, sarebbero stati in grado di decodificare e comprendere l’argomentazione proposta nell’elaborato?

L’attività ci spinge a riflettere su quanto sarebbe opportuno stimolare gli allievi nella valutazione critica delle proprie e delle altrui argomentazioni e, quindi, a programmare sistematicamente anche esperienze di questo tipo.

Ancora una volta i problemi del Rally matematico transalpino ci aiutano non solo nella matematica ma anche nell’acquisizione di competenze trasversali di cittadinanza!

---

[8] Si fa riferimento a strategie di rappresentazione o di risoluzione che, poiché proposte frequentemente anche come esercizi, divengono talvolta viste dagli allievi come unica possibilità e acquisiscono la connotazione di standard.

ALLEGATO 1

Proposte di lavoro relative al problema *Cesto di frutta I*

La proposta 1 fa riferimento alla difficoltà linguistica del testo, "*Il numero delle mele è il doppio di quello delle arance e le arance sono 3 di più delle banane"*, derivante dalla vicinanza del sostantivo "arance" che una volta è complemento ed una volta soggetto all'interno della stessa frase: si è intervenuti spezzando la frase e inserendo una sorta di elenco puntato.

La proposta 2 è nata in riferimento alla difficoltà nella comprensione delle relazioni matematiche tra i numeri dei frutti, fornite senza rispettare l'ordine crescente o decrescente dei dati numerici

La proposta 3 prende spunto dalla stesso contesto ma in realtà è un problema diverso il cui obiettivo è l ricerca di "più soluzioni" ed approfondire le conoscenze degli alunni sul concetto di resto nella divisione

PROPOSTA 1: *CESTO DI FRUTTA* (cat. 3-4)

La mamma ha comprato arance, mele e banane.
Tommaso conta i frutti: in tutto sono 29.
Il numero delle mele è il doppio di quello delle arance.
Le arance sono 3 di più delle banane.
Quante arance, quante mele e quante banane ci sono?
Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

PROPOSTA 2: *CESTO DI FRUTTA* (cat. 3-4)

La mamma ha comprato arance, mele e banane.
Tommaso conta i frutti: in tutto sono 29.
Le arance sono 3 più delle banane e le mele sono il doppio delle arance.
Oppure (ancora più indirizzato)
Ci sono alcune banane, le arance sono tre più delle banane e le mele sono il doppio delle arance.
Quante arance, quante mele e quante banane ci sono?
Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta

PROPOSTA 3: *CESTO DI FRUTTA* (cat. 5, 6, 7, 8)

La mamma ha comprato arance, mele e banane.
Tommaso conta i frutti: in tutto sono 29.
Le mele sono il doppio delle arance.
Quante arance, quante mele e quante banane ci saranno nel cesto?
Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta

Ci aspettiamo la soluzione 18 mele, 9 arance e 2 banane (29:3= 9 con resto di 2 … quindi arance 9, mele 18 e banane 2). Quanti si accorgeranno delle altre otto possibili soluzioni? E quale regolarità si scopre attraverso la ricerca?
Se mettiamo nella domanda "ci possono/potrebbero/potranno essere, non devolviamo agli allievi il compito di capire che devono individuare più soluzioni. Abbiamo usato "saranno" perché più aperto ad ogni interpretazione.

ALLEGATO 2

PROPOSTA 1: *CESTO DI FRUTTA* (cat. 5, 6, 7)

Tommaso ha messo in un cesto le pere e le mele che ha raccolto nel suo frutteto.
Il numero delle mele è il triplo del numero delle pere.
Tommaso dà la metà delle mele a Sofia e la metà delle pere ad Adele.
Nel cesto gli restano così 36 frutti.

Quante pere ha raccolto Tommaso?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

I bambini protagonisti della storia sono sempre 3 ma questa volta, essendo le mele il triplo delle pere, i 36 frutti rimanenti devono essere divisi per 4 e non per 3, a Tommaso rimarrebbero così 27 mele e 9 pere e i frutti raccolti sarebbero stati ancora 72 ma suddivisi in 54 pere e 18 mele

PROPOSTA 2: *LE VERDURE DELL'ORTO*[9] (cat. 5, 6, 7)

Tommaso ha raccolto peperoni e melanzane nel suo orto.
Il numero dei peperoni è il triplo del numero delle melanzane.
Tommaso dà un terzo dei peperoni a Sofia e un terzo delle melanzane ad Adele.
A Tommaso restano 40 ortaggi fra peperoni e melanzane.

Quanti peperoni ha raccolto Tommaso nel suo orto?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta

I 40 ortaggi che restano a Tommaso anche questa volta vanno divisi per 4 e non per 3 e rappresentano gli 8/12 (=2/3) del totale. Tommaso ha raccolto 15 melanzane e 45 peperoni.

PROPOSTA 3: *CESTO DI FRUTTA* (cat. 5, 6, 7, 8)

La mamma ha comprato pere, mele e banane.
Conta i frutti e si accorge che le mele sono il doppio delle pere e che le banane sono 2 meno delle pere.
La mamma regala metà di ciascun tipo di frutta alla sua amica.
Le restano 15 frutti in tutto.
Quante pere, quante mele e quante banane ha comprato?
Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.
[8, 16, 6]

Analogamente

PROPOSTA 4: *CESTO DI FRUTTA* (cat. 5, 6, 7, 8)

La mamma ha comprato pere, mele e banane.
Conta i frutti e si accorge che le mele sono il doppio delle pere e che le banane sono 4 meno delle mele.
La mamma incontra la sua amica Lucia e le regala metà di ciascun tipo di frutta che ha nella cesta, poi incontra la sua amica Rita e le regala la metà di ciascun tipo di frutta che le è rimasta
Le restano 9 frutti in tutto.
Quante pere, quante mele e quante banane ha comprato?
Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.
[8, 16, 12]

---

[9] È stato cambiato il contesto in modo che gli allievi non lo riconoscessero subito.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

I TULIPANI DI ANNA

Maria Felicia Andriani, Antonella Castellini, Lucia Doretti, Daniela Medici, Maria Gabriella Rinaldi, Lucia Salomone, Valeria Zagaria

per il Gruppo Algebra[1]

L'approfondimento sul problema "I tulipani di Anna" si basa essenzialmente sulle osservazioni emerse dall'analisi a posteriori degli elaborati delle sezioni di Siena e Puglia.

L'étude du problème des « Tulipes d'Anne » est basé essentiellement sur les observations concernant l'analyse a posteriori des copies des sections de Sienne et des Pouilles.

L'article est en italien avec des synthèses en français.

1. Il testo del problema e la sua analisi a priori / Le problème et son analyse priori

I TULIPANI DI ANNA 27.I.17 (Cat. 8, 9, 10)

Anna desidera piantare dei bulbi di tulipano al centro del suo giardino lungo i lati di una figura composta da due quadrati concentrici, con i lati paralleli e distanti fra loro 30 centimetri.

Anna vuole piantare i suoi bulbi sui lati dei due quadrati nel modo seguente:

- ci sarà un bulbo sui vertici di ciascun quadrato
- il numero dei bulbi sarà lo stesso per ogni quadrato
- i bulbi saranno piantati a una distanza di 20 cm l'uno dall'altro sul contorno del quadrato grande e a una distanza di 15 cm sul contorno del quadrato piccolo.

Quanti bulbi pianterà in tutto Anna?

Spiegate come avete trovato la vostra riposta.

Analisi a priori

Compito matematico

Determinare il numero dei punti disposti sul contorno di due quadrati concentrici, con i lati paralleli e distanti 30 cm, sapendo che nel quadrato più grande i punti distano l'uno dall'altro 20 cm e in quello più piccolo 15 cm e che c'è lo stesso numero di punti su ogni quadrato.

Analisi del compito

- Immaginare come si presenta la doppia bordura che Anna vuole realizzare ed eventualmente rappresentare la situazione con un disegno: un quadrato piccolo e l'altro più grande, concentrici e con i lati paralleli, che formano una doppia bordura larga 30 cm, con lo stesso numero di bulbi su ogni quadrato che determinano sui lati dei due quadrati, uno stesso numero di segmenti, di 15 cm sul quadrato piccolo e di 20 cm su quello più grande.
- Comprendere anche che, poiché c'è un bulbo su ogni vertice e tutti i segmenti sono della stessa lunghezza, il loro numero è quello dei bulbi su ciascun quadrato (la metà del totale) e che c'è lo stesso numero di segmenti su ogni lato dei due quadrati.

[1] I componenti del Gruppo Algebra che hanno dato il loro contributo alla discussione su quanto emerso dall'analisi a posteriori del problema sono Maria Felicia Andriani, Antonella Castellini, Alessandro Carciola, Rosanna Di Liddo, Lucia Doretti, Lucia Frati, Antonella Giacomin, Chiara Marchionni, Daniela Medici, Maria Gabriella Rinaldi, Lucia Salomone, Apollonia Santoniccolo, Valeria Zagaria.

- Capire dall'informazione "distanti fra loro 30 cm" che il lato del quadrato grande misura 60 cm più di quello del quadrato piccolo oppure che il perimetro del quadrato grande misura 240 cm più di quello del quadrato piccolo.
- Ci sono più modi di procedere per determinare il numero di bulbi a partire dalla lunghezza dei segmenti (15 e 20), sia secondo la lunghezza dei lati o del perimetro dei quadrati. Per esempio:
- Procedere per tentativi organizzati (bulbi per lato): se per esempio il numero bulbi su ogni lato fosse 3, la misura del lato più lungo sarebbe 40 e quella del lato più corto 30, ma la loro differenza sarebbe 10 e non 60; se il numero dei bulbi fosse 5, la differenza fra le due misure sarebbe 20 (=80−60) e così via fino ad arrivare a 13 bulbi su ogni lato che porta ad una differenza di 60 cm [60 = 20 × (13−1) – 15 × (13−1)], poi calcolare il numero dei bulbi non contando due volte quelli dei vertici: (4 × 13) – 4 = 48 per quadrato e 96 in tutto.
- Procedere pensando ai multipli di 20 e 15 (segmenti per lato): comprendere che la lunghezza di un lato del quadrato grande si ottiene moltiplicando per 20 il numero dei segmenti sul lato, allo stesso modo la misura del lato del quadrato piccolo si ottiene moltiplicando per 15 il numero dei segmenti sul suo lato e sapendo che la lunghezza dei lati differisce di 60 cm, trovare che ci sono i dodicesimi multipli rispettivamente di 20 e 15 che danno questa differenza.
- Procedere per proporzionalità, con riferimento all'omotetia tra i due quadrati: il rapporto è 15/20 = 3/4 per la lunghezza dei segmenti, quindi anche per i perimetri, la cui differenza è 240 cm. Si ricava che il perimetro del quadrato piccolo è 720 = (240 ×3), quello del quadrato grande è 960 = (240 × 4), ciascuno dei quali, diviso rispettivamente per 15 e per 20 dà 48.
- Ricorrere all'algebra. Per esempio (bulbi per lato): indicare con n il numero di bulbi su ciascun lato di ogni quadrato e risolvere l'equazione $20(n\text{-}1) – 15(n\text{-}1) = 60$; la soluzione è 13 che conduce a 48 bulbi per quadrato dopo aver tolto i 4 bulbi sui vertici (per non contarli due volte),
- o, più semplicemente (bulbi sul contorno): indicando con b il numero di bulbi su ogni contorno, impostare l'equazione: $20\,b – 15\,b = 240$ la cui soluzione è 48.

LES TULIPES D'ANNE 27.I.17 (Cat. 8, 9, 10)

Anne désire planter des bulbes de tulipes au centre de son jardin le long des côtés d'une figure composée de deux carrés de même centre, dont les côtés sont parallèles et distants de 30 cm.

Anne veut planter ses bulbes sur les côtés des deux carrés de la façon suivante :

- il y aura un bulbe aux sommets de chaque carré ;
- le nombre de bulbes sera le même sur chaque carré ;
- les bulbes seront plantés à une distance de 20 cm les uns des autres sur le contour du grand carré et à une distance de 15 cm sur le contour du petit carré.

Combien de bulbes Anne plantera-t-elle en tout ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Analyse de la tâche

- Imaginer la figure qu'Anne veut réaliser et éventuellement faire un dessin représentant la situation : un petit et un grand carré de même centre et de côtés parallèle formant une double bordure (ou bande) de 30 cm de largeur, avec le même nombre de bulbes sur chaque carré, déterminant sur les côtés des deux carrés un même nombre de segments, de 15 cm sur le petit, de 20 cm sur le grand.
- Comprendre encore, puisqu'il y a un bulbe sur chaque sommet et que tous les segments sont de même longueur, que leur nombre est celui des bulbes sur chaque carré (la moitié du total) et qu'il y a le même nombre de segments sur chacun des côtés des deux carrés.
- Tirer encore de la donnée « distants de 30 cm » que le côté du grand carré mesure 60 cm de plus que celui du petit carré, ou que le périmètre du grand mesure 240 cm de plus que celui du petit.

Il y a de nombreuses manières de procéder pour déterminer le nombre de bulbes à partir des longueurs des segments (15 et 20), et selon les différences de longueur des côtés ou des pourtours des carrés, (respectivement de 60 et 240 cm). Par exemple :

- Procéder par essais organisés, (bulbes par côté) : si par exemple le nombre de bulbes sur chaque côté était 3, la mesure du côté le plus long serait 40 cm et celle du côté le plus court 30 cm, mais leur différence serait de 10 cm et non de 60 cm ; si le nombre de bulbes était 5, la différence entre les deux mesures serait de 20 cm (20 = 80 - 60) et ainsi de suite jusqu'à 13 bulbes sur chaque côté qui correspond à une différence de 60 cm [60 = 20 × (13 - 1) - 15 × (13 - 1)] puis au calcul du nombre de bulbes en décomptant ceux des sommets pris deux fois : (4 × 13) - 4 = 48 par carré et 96 en tout.

- Procéder en pensant aux multiples de 20 et 15 (longueurs des segments par côté) : comprendre que la longueur d'un côté du grand carré s'obtient en multipliant par 20 le nombre de segments sur le côté, de la même manière la longueur d'un côté du petit carré s'obtient en multipliant par 15 le nombre de segments sur le côté, et sachant que les longueurs des côtés diffèrent de 60 cm, trouver que ce sont les 12^e multiples respectifs de 20 et 15 qui donnent cette différence.

- Procéder par proportionnalité, en se référant à l'homothétie entre les deux carrés : le rapport est 15/20 = 3/4, pour les longueurs des segments, il l'est aussi pour les périmètres dont la différence de longueur est 240 cm. On en tire les deux périmètres du petit 720 = (3 × 240) et du grand 960 = (4 × 240), qui divisés respectivement par 15 et 20 donnent chacun 48.

- Recourir à l'algèbre. Par exemple (bulbe par côté) : désigner par n le nombre de bulbes sur chaque côté des deux carrés, mettre en équation le problème: $20\ (n - 1) – 15\ (n - 1) = 60$ dont la solution est 13 qui conduit à 48 bulbes par carré après avoir décompté les quatre bulbes des sommets

ou, plus simplement (bulbe par pourtour) : avec b bulbes sur chaque pourtour, poser l'équation : $20\ b$ -¨$15\ b = 240$ dont la solution est 48.

2. Risultati / Résultats

Punti attribuiti su 1254 classi di 20 sezioni:

Categoria	0	1	2	3	4	N° classi	Media
Cat. 8	516 (60%)	180 (21%)	41 (5%)	59 (7%)	58 (7%)	854	0.79
Cat .9	96 (46%)	59 (28%)	9 (4%)	23 (11%)	21 (10%)	208	1.11
Cat. 10	83 (43%)	38 (20%)	20 (10%)	19 (10%)	32 (17%)	192	1.37
Totale	695 (55%)	277 (22%)	70 (6%)	101 (8%)	111 (9%)	1254	0.93

secondo i seguenti criteri di attribuzione dei punteggi:

4 Risposta corretta (96 bulbi di tulipano) con spiegazioni chiare e complete (rappresentazione grafica, procedura per tentativi con verifica delle condizioni, o procedura di tipo algebrico con nominalizzazione chiara dell'incognita)

3 Risposta corretta con una spiegazione incompleta o poco chiara
oppure risposta sbagliata per un errore di calcolo, ma spiegazione chiara e completa che provi un ragionamento corretto
oppure risposta 48 (dimenticando di raddoppiare), ma con spiegazione chiara
oppure risposta corretta con solo la verifica di alcune condizioni

2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure risposta 48 (perché ci si è dimenticati di raddoppiare), con spiegazione incompleta

1 Inizio di ricerca corretto (rappresentazione grafica corretta, effettuati alcuni tentativi, …)
oppure risposta 104 causata dal non aver sottratto 4 per ciascun quadrato

0 Incomprensione del problema

4 Réponse correcte (96 bulbes de tulipe) avec une explication claire et complète (représentation graphique, procédure par essais avec vérification de la compatibilité avec les conditions ou procédure algébrique avec désignation claire de l'inconnue.)

3 Réponse correcte avec une explication peu claire ou incomplète
ou réponse erronée suite à une erreur de calcul, mais explication claire et complète qui atteste d'un raisonnement correct

ou réponse 48 (oubli de doubler), mais avec explication claire ou réponse correcte avec seulement la vérification des conditions

2 Réponse correcte sans explication
ou réponse 48 (oubli de doubler), mais avec explication incomplète

1 Début de recherche correct (représentation graphique exacte, présence de quelques essais, ...)
ou réponse 104 due au non retrait de 4 bulbes aux sommets de chaque carré

0 Incompréhension du problème

La tabella mostra chiaramente che la media dei punteggi è molto bassa per tutte e tre le categorie, anche se si evidenzia un progressivo, lieve miglioramento, dalla cat.8 alla cat.10.

Come sempre, è solo un esame approfondito degli elaborati che può dare informazioni più precise sulle cause delle difficoltà incontrate dagli allievi e quindi far riflettere sugli ostacoli insiti nel problema. Allo stesso tempo un esame più attento potrà mostrare pensieri e deduzioni degli allievi che spesso non sono ben esplicitati e argomentati perché difficili da spiegare e non sempre ben interpretati al momento della correzione durante la prova.

3. Osservazioni a posteriori su errori commessi e procedure utilizzate

Le osservazioni che seguono sono ricavate dall'analisi a posteriori di 313 elaborati della sezione di Siena (212 di cat.8, 48 di cat.9 e 53 di cat.10) e di 61 elaborati (33 di cat. 8, 13 di cat. 9 e 15 di cat. 10) della sezione Puglia. In generale i risultati di entrambe le sezioni non si discostano molto da quelli internazionali: nella sezione di Siena si ha un leggero miglioramento in cat. 10, ma un peggioramento in cat. 8, cosicché la media complessiva dei punteggi delle tre categorie scende a 0.7; nella sezione Puglia la media complessiva delle tre categorie è 0.9, del tutto in linea con quella internazionale.

Synthèse : Les observations rapportées dans cette étude approfondie sont obtenues à partir de l'analyse a posteriori de 313 copies de la section de Sienne (212 de la cat. 8, 48 de la cat. 9 et 53 de la cat. 10) et de 61 copies de la section des Pouilles (33 de la cat. 8, 13 de la cat. 9 et 15 de la cat. 10). En général, les résultats des deux sections ne diffèrent pas beaucoup des résultats internationaux (voir tableau à la page 2) : dans la section de Sienne, il y a une légère amélioration dans la cat. 10, mais une détérioration dans la cat. 8, de sorte que la moyenne globale des scores des trois catégories tombe à 0,7 ; dans la section des Pouilles, la moyenne globale des trois catégories est de 0,9, valeur parfaitement conforme à la moyenne internationale.

Negli elaborati esaminati si ritrovano utilizzate tutte le procedure illustrate nell'analisi a priori (tentativi organizzati, multipli di 15 e di 20, proporzionalità, via algebrica), ma anche qualche altra procedura interessante e non prevista.

Tra queste ultime da segnalare per la sua frequenza il ricorso al disegno in scala su foglio quadrettato dei due quadrati concentrici, con l'indicazione sul loro contorno della posizione dei bulbi e l'esplicitazione del loro numero. Tale procedura non è prevista nell'analisi a priori, in cui si fa solo riferimento all'eventuale rappresentazione dei quadrati concentrici per visualizzare dove saranno posizionati i bulbi e per riportare sul disegno informazioni ricavate dalla lettura del testo. Il ricorso alla rappresentazione in scala compare in molti elaborati di cat. 8, anche se spesso non gestito correttamente, ma è presente anche in elaborati di cat. 9 e 10.

Dall'analisi a posteriori emerge che la frequenza nell'uso delle diverse procedure varia a seconda delle categorie: in cat. 8, oltre al disegno in scala, si fa spesso ricorso alla procedura che considera i multipli di 15 e 20 e a quella per tentativi sulla lunghezza del lato di uno dei quadrati (solo in qualche rarissimo caso sono utilizzate le altre procedure). In cat. 9, e ancor di più in cat. 10, si fa ricorso alla strategia algebrica (nella sez. di Siena è la prevalente in quest'ultima categoria), seguita dalla procedura che utilizza i multipli di 15 e 20, ma sono presenti anche gli altri tipi di procedure. Nella sezione Puglia, anche in cat. 9 e 10 prevalgono le procedure non algebriche. Solo in due casi sono evidenti delle impostazioni algebriche, ma errate, una delle quali casualmente conduce alla risposta corretta (Fig.1).

Da segnalare lo scarso uso in tutte le categorie della strategia che sfrutta la proporzionalità.

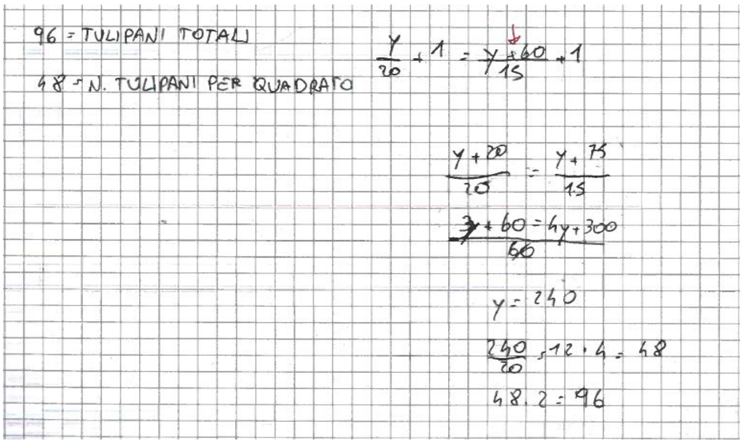


Fig.1 (cat.10)

3.1 Analisi degli errori più diffusi

Gli errori compaiono soprattutto in cat. 8, dove gli elaborati con punteggio 0 e non consegnati in bianco, sono il **56% del totale nella sez. di Siena** e il **61% nella sez. Puglia,** ma permangono anche nelle categorie superiori, seppure con percentuali più basse. Analizzeremo gli errori più frequenti dividendoli in tre categorie: errori dovuti alla perdita o non comprensione di almeno una delle condizioni e che si ritrovano negli elaborati indipendentemente dalla strategia utilizzata; errori di gestione contemporanea della "messa in scala" per i due quadrati in rapporto anche ad altre condizioni; errori ricorrenti che caratterizzano l'incomprensione del problema.

Synthèse : Les erreurs apparaissent surtout dans la cat. 8, où les copies avec une note de 0 et non remises en blanc, représentent 56% du total dans la section de Sienne et 61% dans la section des Pouilles.

Les erreurs les plus fréquentes peuvent être classées en trois catégories :

- Erreurs dues à la non prise en compte ou à l'incompréhension d'au moins une des conditions.

Ces types d'erreurs se retrouvent dans les copies indépendamment de la stratégie utilisée et sont essentiellement dues à une (ou plusieurs) des situations suivantes :

- la différence entre les longueurs des côtés des deux carrés est considérée comme étant de 30 cm, au lieu de 60 cm, identifiant ainsi cette différence à la distance entre les côtés parallèles des deux carrés concentriques ;
- la condition selon laquelle le nombre total de bulbes dans chaque carré doit être le même n'est pas prise en compte ;
- la relation entre le nombre de bulbes et le nombre de segments-distance entre deux bulbes n'est pas bien comprise, de sorte que l'on finit par enlever ou ajouter, de manière incorrecte, les 4 bulbes aux sommets des deux carrés.

- Erreurs dans la "représentation à l'échelle »

L'utilisation de la représentation à l'échelle (non envisagée dans l'analyse a priori) apparaît dans de nombreux dessins en cat. 8 mais est également présente dans les dessins en cat. 9 et 10. Elle consiste à dessiner les deux carrés concentriques à l'échelle sur une feuille quadrillée, à indiquer la position des bulbes sur leur contour et à préciser leur nombre. Souvent cependant, surtout en cat.8, cette procédure n'est pas appliquée correctement. L'erreur qui apparaît le plus fréquemment est celle qui consiste à dessiner deux carrés concentriques sans tenir compte correctement des proportions car la valeur attribuée à l'unité de mesure n'est pas respectée.

- Erreurs récurrentes qui caractérisent une mauvaise compréhension du problème

Dans de nombreuses copies, l'incapacité des élèves à s'approprier le problème apparaît clairement. Soit les données numériques sont mal interprétées (par exemple, 15 cm et 20 cm sont considérés comme les longueurs des côtés des deux carrés, ou 30 cm est considéré comme la longueur du petit carré), soit les élèves sont incapables d'interpréter et de traiter correctement la situation géométrique : Deux carrés concentriques sont dessinés mais l'attention n'est fixée que sur l'un d'eux, sur son côté est dessiné un certain nombre de bulbes en respectant les distances, la valeur obtenue est multipliée par 4 en ajoutant ou pas les bulbes situés sur les sommets, puis le résultat est doublé en le considérant a priori comme également correct pour l'autre carré, ou bien des carrés non concentriques sont dessinés, ou encore les bulbes sont dessinés à l'intérieur des carrés et non sur les bords.

3.1.1 Errori dovuti alla perdita o non comprensione di almeno una delle condizioni

Gli errori di questo tipo più diffusi, qualunque sia la strategia utilizzata, sono i seguenti:

a) si considera di 30 cm, anziché di 60 cm, la differenza tra le lunghezze dei lati dei due quadrati, identificando così tale differenza con la distanza tra i lati paralleli dei due quadrati concentrici;
b) si perde la condizione che il numero totale dei bulbi in ciascun quadrato debba essere lo stesso;
c) non è ben compresa la relazione tra numero di bulbi e numero di segmenti-distanza tra due bulbi.

Un esempio di errore di tipo a) si può osservare nell'elaborato in Fig.2, dove si utilizza la procedura per tentativi sulla misura A del lato del quadrato piccolo che, giustamente, deve essere un multiplo di 15. L'errore che si commette è però quello di considerare, come indicato chiaramente in tabella, che la misura B del lato del quadrato grande sia A + 30, anziché A + 60. Notiamo invece che la condizione sull'uguaglianza del numero di bulbi su ogni lato dei due quadrati è rispettata, ma si commette l'errore di confondere "il numero di bulbi per lato" con "il numero di segmenti-distanza tra bulbi per lato", come mostrato anche nel disegno dei due quadrati concentrici (ovviamente non in scala!), presente nell'elaborato.

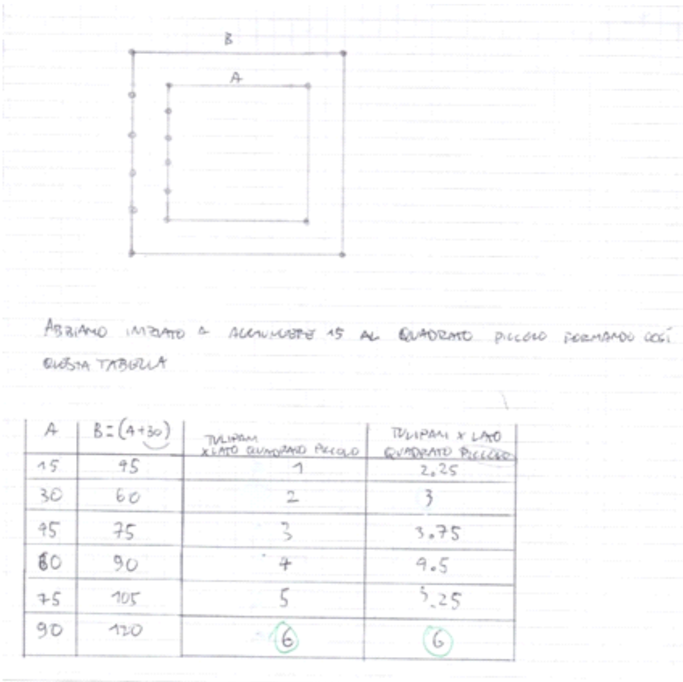


Fig. 2 (cat. 9)

"*Abbiamo iniziato ad aumentare 15 al quadrato piccolo formando così questa tabella* […]."

[le intestazioni della terza e quarta colonna sono "*Tulipani per lato quadrato piccolo*" e "*Tulipani per lato quadrato grande*", ma in realtà ciò che si trova (quando possibile) è il numero di segmenti-distanza tra bulbi su ogni lato del quadrato piccolo e del quadrato grande]

Un esempio di errore di tipo b) è visibile nell'elaborato in Fig. 3, nel quale gli allievi rappresentano i due quadrati concentrici e indicano sui loro contorni la posizione dei bulbi rispettando le distanze in scala. Tutte le condizioni sono state rispettate ad eccezione di quella relativa "allo stesso numero di bulbi nei due quadrati".

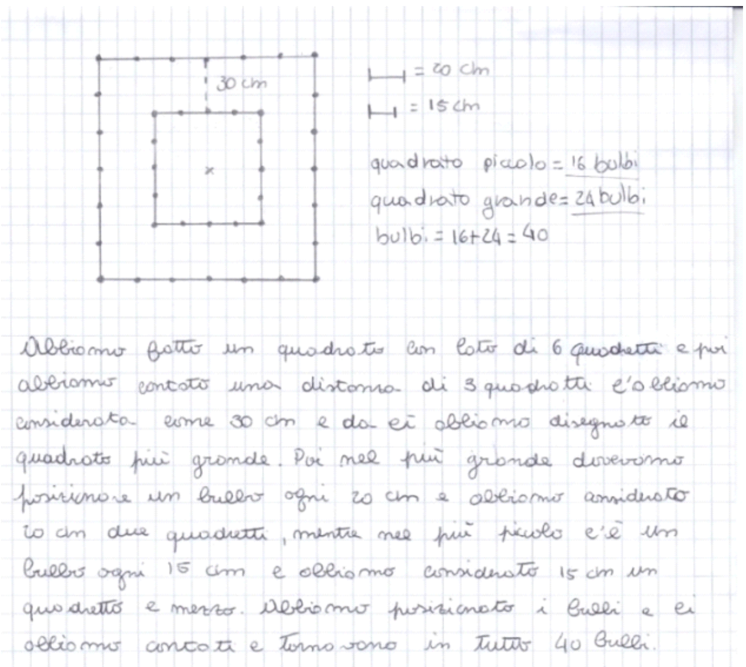


Fig. 3 (cat. 8)

"*Abbiamo fatto un quadrato con il lato di 6 quadretti e poi abbiamo contato una distanza di 3 quadretti, l'abbiamo considerata come 30 cm e da lì abbiamo* *disegnato il quadrato più grande. Poi nel più grande dovevamo posizionare un bulbo ogni 20 cm e abbiamo considerato 20 cm due quadretti, mentre nel più piccolo c'è un bulbo ogni 15 cm e abbiamo considerato 15 cm un quadretto e mezzo. Abbiamo posizionato i bulbi e li abbiamo contati e tornavano in tutto 40 bulbi."*

L'errore di tipo c) compare con maggiore frequenza rispetto agli altri. In questi casi, anche quando la procedura utilizzata è corretta, nel momento in cui si giunge ad ottenere che il numero dei bulbi è 96, si finisce per dare una risposta sbagliata (88 o 104), perché si aggiungono o tolgono gli 8 bulbi ai vertici dei due quadrati. Si può ipotizzare che questo tipo di errore sia legato al fatto che la relazione *numero bulbi-numero segmenti* si esprime in modo diverso a seconda che si fissi l'attenzione su un lato o sul perimetro del quadrato. Infatti, se **b** è il numero di bulbi ed **s** è il numero dei segmenti su un lato, la relazione che li lega è **b = s+1**, mentre sul perimetro **è b = s** (come si può anche visualizzare "rettificando il perimetro")[2]. Se non si tiene conto delle due differenti situazioni, la conseguenza è proprio quella osservata, cioè nel conteggio totale dei bulbi su un quadrato o se ne conteggiano 4 in più (si considera un bulbo in più per lato e si moltiplica per 4) oppure, all'opposto, 4 in meno, perché si pensa di dover togliere quelli ai vertici per non ripeterli, mentre sono già stati eliminati dal conteggio.

Da quanto emerge dall'esame degli elaborati, non sono molti i casi in cui si ha piena consapevolezza della situazione: spesso, infatti, si trova scritto di aver ottenuto il numero dei bulbi per lato dividendo la misura del lato grande per 20, o quella del lato piccolo per 15. In realtà facendo così si trova il numero di segmenti per lato. Occorre a questo punto fare l'ulteriore passaggio alla relazione "bulbi-segmenti", altrimenti il rischio "errore" è alto, come mostrano i casi seguenti.

In Fig. 4 è riportato un esempio di errore di tipo c) con risposta 88: da notare le cancellature che probabilmente derivano da un "ripensamento" finale sul numero dei bulbi per lato (da 12 a 10), che cambia di conseguenza il risultato finale.

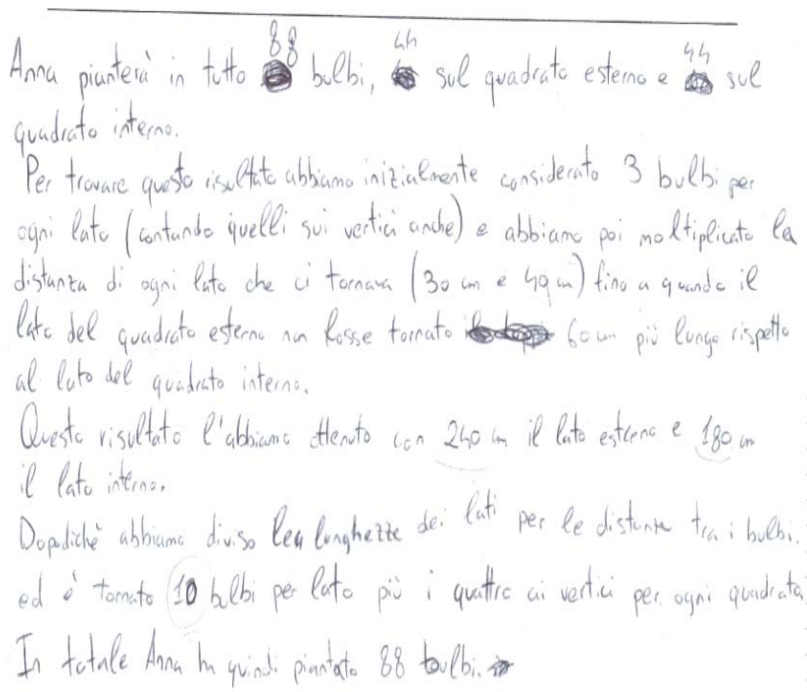

Anna pianterà in tutto 88 bulbi, 44 sul quadrato esterno e 44 sul quadrato interno.
Per trovare questo risultato abbiamo inizialmente considerato 3 bulbi per ogni lato (contando quelli sui vertici anche) e abbiamo poi moltiplicato la distanza di ogni lato che ci tornava (30 cm e 40 cm) fino a quando il lato del quadrato esterno non fosse tornato 60 cm più lungo rispetto al lato del quadrato interno.
Questo risultato l'abbiamo ottenuto con 240 cm il lato esterno e 180 cm il lato interno.
Dopodiché abbiamo diviso le lunghezze dei lati per le distanze tra i bulbi. ed è tornato 10 bulbi per lato più i quattro ai vertici per ogni quadrato.
In totale Anna ha quindi piantato 88 bulbi.

Fig. 4 (cat. 8) -*"Anna pianterà in tutto 88 tulipani, 44 sul quadrato esterno e 44 sul quadrato interno. Per trovare questo risultato abbiamo inizialmente considerato 3 bulbi per ogni lato (contando quelli sui vertici anche) e abbiamo poi moltiplicato la distanza di ogni lato che ci tornava (30 cm e 40 cm) fino a quando il lato del quadrato esterno non fosse tornato 60 cm più lungo del lato del quadrato interno. Questo risultato l'abbiamo ottenuto con 240 cm il lato esterno e 180 cm il lato interno. Dopodiché abbiamo diviso la lunghezza dei lati per le distanze tra i bulbi ed è tornato* 10 [prima c'era scritto12] *bulbi per lato più i quattro ai vertici per ogni quadrato. In totale Anna ha quindi piantato 88 bulbi."*

La Fig. 5 mostra invece un elaborato di cat. 9 in cui al risultato 96, trovato correttamente con procedura algebrica (anche originale nell'impostazione dell'equazione), si aggiungono gli 8 bulbi ai vertici, ottenendo come risultato finale 104.

[2] Osserviamo che la relazione "*numero bulbi-numero segmenti*", nel caso in cui si consideri un singolo lato, si può esprimere anche in altri modi a seconda che si fissi l'attenzione solo sul *numero **b** di bulbi interni al lato* determinati dagli ***s*** *segmenti* (in questo caso è ***b = s-1***), o sul numero di segmenti su un lato dotati di un bulbo ad un estremo (sempre destro o sempre sinistro) (in questo caso è ***b = s***). Conseguentemente, nel primo caso, *il totale dei bulbi su ogni quadrato sarà ottenuto moltiplicando per 4 i bulbi su un lato e aggiungendo poi i 4 ai vertici del quadrato*; nel secondo caso, *basterà moltiplicare per 4 i bulbi conteggiati su un lato.*

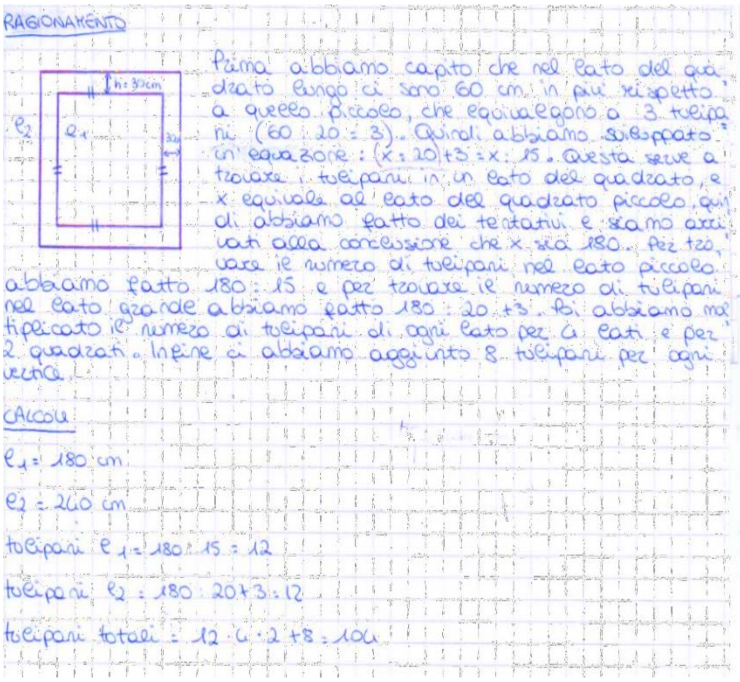


Fig. 5 (cat. 9) - *"Prima abbiamo capito che nel lato del quadrato lungo ci sono 60 cm in più rispetto a quello piccolo, che equivalgono a 3 tulipani (60:20=3). Quindi abbiamo sviluppato un'equazione: **(x : 20) + 3 = x : 15.** Questa serve a trovare i tulipani in un lato del quadrato, e x equivale al lato del quadrato piccolo, **quindi abbiamo fatto dei tentativi** e siamo arrivati alla conclusione che x sia 180. Per trovare il numero di tulipani nel lato piccolo abbiamo fatto 180:15 e per trovare il numero di tulipani nel lato grande abbiamo fatto (180:20)+3. Poi abbiamo moltiplicato il numero di tulipani di ogni lato per 4 lati e per 2 quadrati. Infine ci abbiamo aggiunto 8 tulipani per ogni vertice.*" [Seguono i calcoli e la risposta: *tulipani totali 104*]

Notiamo inoltre che, in cat. 9, hanno risolto per tentativi l'equazione, senza ricorrere alle procedure algebriche già apprese.

In altri elaborati si osserva che addirittura **manca la risposta sul numero totale dei bulbi**. Ci si può chiedere se sia dovuta ad una "dimenticanza" o alla "difficoltà nel darla": non possiamo saperlo, ma resta il dubbio che in qualche caso possa anche dipendere dalla seconda opzione…

3.1.2 Errori nella rappresentazione in scala

L'errore che compare più spesso nell'uso della rappresentazione in scala è quello di disegnare due quadrati concentrici senza rispetto delle proporzioni perché si cambia il valore attribuito all'unità di misura. È piuttosto frequente in cat. 8, ma si ritrova anche in qualche elaborato di categorie superiori. Di solito, si utilizza come unità di misura il lato del quadretto del foglio al quale si attribuisce una determinata misura, ma si commette poi l'errore di non rispettare la "scala" così definita, rendendo di conseguenza del tutto fuorvianti i ragionamenti sulla figura. Per esempio, in certi elaborati si può trovare che, nello stesso disegno, tre lati di quadretto rappresentano 30 cm ed anche 15 cm, oppure che un lato di quadretto rappresenta 20 cm nel quadrato grande, 15 cm nel quadrato piccolo, ma anche i 30 cm della distanza tra i due quadrati. In Fig. 6 e in Fig. 7 sono riportati due esempi di elaborati con errori nella rappresentazione in scala.

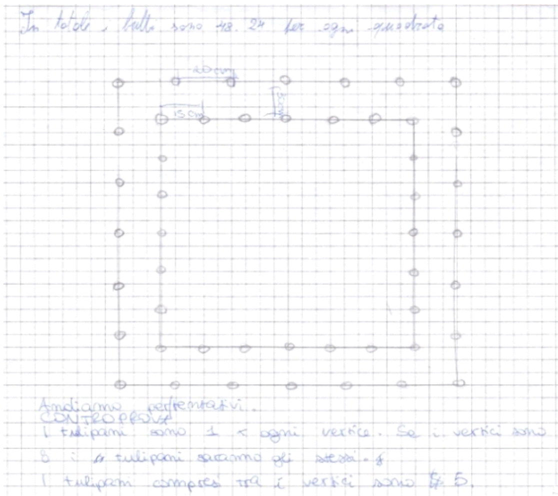


Fig. 6 (cat. 8)

"*In totale i bulbi sono 48. 24 per ogni quadrato.*

Andiamo per tentativi.

CONTROPROVA

I tulipani sono 1 per ogni vertice. Se i vertici sono 8 i tulipani saranno gli stessi. I tulipani compresi tra i vertici sono 5."

[seguono poi i calcoli: 5 × 4 = 20 + 4 (vertici) = 24 tulipani per ogni quadrato, 24 × 2 = 48]

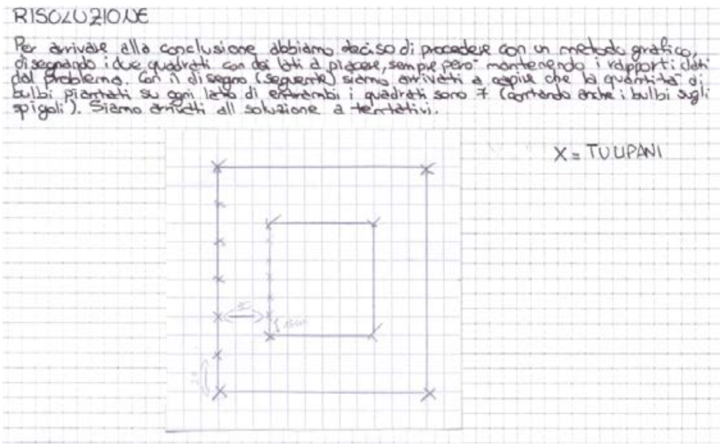


Fig.7 (cat. 9)

"RISOLUZIONE.

Per arrivare alla conclusione abbiamo deciso di procedere con un metodo grafico, disegnando i due quadrai con dei lati a piacere, sempre però mantenendo i rapporti dati dal problema. Con il disegno (seguente) siamo arrivati a capire che la quantità di bulbi piantati su ogni lato di entrambi i quadrati sono 7 (contando anche i bulbi sugli spigoli). Siamo arrivati alla soluzione a tentativi."

Dal punto di vista didattico, questo tipo di errore porta ad interrogarsi su ciò che gli allievi hanno costruito come idea di "disegno in scala" e del suo collegamento con la situazione "reale" che vuole rappresentare (e qui entrano in gioco i concetti di similitudine, rapporto di similitudine, figure simili… sui quali sarà opportuno ritornare a riflettere con gli allievi).

3.1.3 Elaborati con incomprensione del problema

Dall'esame di questi elaborati emerge chiaramente l'incapacità degli allievi di entrare nella situazione problematica. In alcuni si trova proprio scritto "*mancano i dati*", ma in genere gli allievi si sentono in obbligo di fornire comunque una risposta al problema che, nella maggior parte dei casi, deriva da una loro "interpretazione accomodante" dei dati numerici presenti nel testo. Elenchiamo di seguito alcune situazioni fra le più ricorrenti:

- l'informazione relativa a 15 cm e 20 cm, è interpretata come se fosse la misura dei lati dei quadrati piccolo e grande e quindi la soluzione al problema è **8 bulbi in totale**; alla stessa risposta si arriva anche quando si considera solo l'informazione riguardante il posizionamento dei bulbi sui vertici dei due quadrati concentrici, eliminando tutto il resto!
- Il dato 30 cm, oltre ad essere interpretato come la distanza tra i lati paralleli dei due quadrati, è anche considerato come lunghezza del lato del quadrato piccolo. Il passaggio successivo è quello di calcolare la lunghezza del lato del quadrato grande per la quale si può trovare 90 cm oppure 60 cm, a seconda che consideri di 60 cm o di 30 cm la differenza delle lunghezze tra i lati dei due quadrati, e poi si procede con la determinazione del numero di bulbi, dividendo le lunghezze per 20 o per 15.
- Si trascura in parte o del tutto la situazione geometrica spostandosi in ambito aritmetico e qui si effettuano calcoli di vario tipo per ottenere "la risposta" al problema ("*Geometria ridotta a pura Aritmetica*"). Una situazione che si trova più volte è quella di non fare riferimento, né con un disegno, né a parole, ai due quadrati concentrici e alle loro caratteristiche, ma di limitarsi a **cercare una coppia di numeri che divisi per 15 e per 20 diano lo stesso risultato e, con la prima coppia trovata, si calcola il numero totale bulbi.** Un esempio è il seguente: "*Anna pianterà in tutto 30 bulbi. Ovvero 15 per ogni quadrato. Per risolvere questo problema abbiamo cercato due numeri che divisi per 15 e per 20 diano lo stesso numero. Essi sono 225 (divisibile per 15) e 300 (divisibile per 20). Infatti 225/15=15 e 300/20 = 15*[non si tiene conto che 225 e 300 dovrebbero essere anche le misure dei perimetri dei due quadrati, la cui differenza è 240!]". Altri casi sono i seguenti: si calcola il **mcm (15, 20) = 60 e lo si considera come se fosse il numero di bulbi su ogni quadrato,** oppure si continua dividendo 60 per 2 e quindi diventa 30 il numero di bulbi su ogni quadrato; si calcola il **MCD(15, 20) = 5 e lo si considera come numero di bulbi su ogni lato dei due quadrati;** a questo stesso risultato per il numero di bulbi per lato si perviene anche per altra via, come in qualche elaborato si trova scritto: *"Anna **pianta 5 bulbi per ogni lato perché 20-15=5**, che sono i cm di differenza tra un bulbo e l'altro".*
- Si parte da un disegno di due quadrati concentrici a lati paralleli, **si fissa l'attenzione solo su uno dei due quadrati**, si disegna su un suo lato un certo numero di bulbi rispettando le distanze, si moltiplica per 4, aggiungendo o no i bulbi sui vertici**, e poi si raddoppia il valore trovato, considerandolo a priori valido anche per l'altro quadrato** *("perché nel testo dice così")* senza tener conto del rispetto delle condizioni (e soprattutto senza rendersi conto che in questo modo il problema avrebbe infinite soluzioni!).

- Si disegnano **quadrati non concentrici** (e si lavora "in qualche modo" su di essi…). Due esempi di elaborati con questo tipo di errore sono riportati in Fig 8(a) e in Fig. 8(b). La considerazione che si può fare è che, per alcuni allievi, sia del tutto sconosciuto il significato del termine "concentrici" riferito a quadrati.

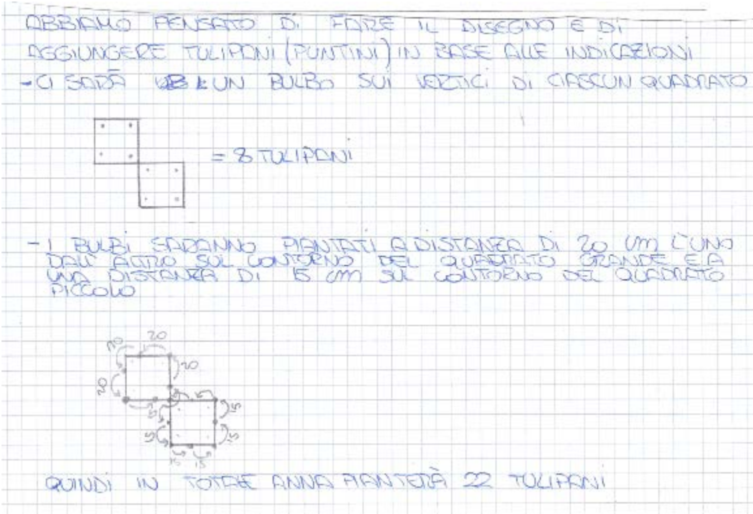


Fig. 8(a) (cat. 8)

"Abbiamo pensato di fare il disegno di aggiungere tulipani (puntini) in base alle indicazioni.

- Ci sarà un bulbo sui vertici di ciascun quadrato.

- I bulbi saranno piantati a distanza di 20 cm l'uno dall'altro sul contorno del quadrato grande e a distanza di 15 cm sul contorno del quadrato piccolo.

Quindi in totale Anna pianterà 22 tulipani."

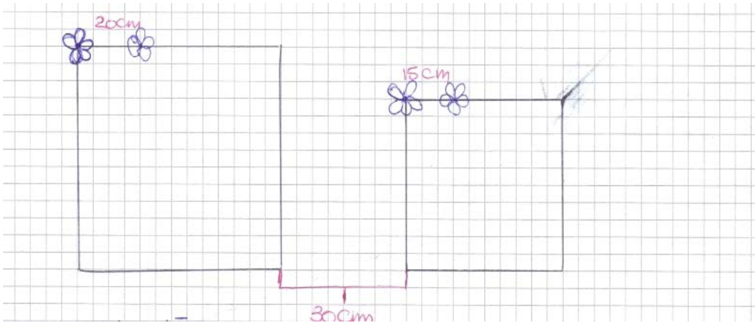


Fig 8(b) (cat. 8)

[Disegno di due quadrati concentrici con i lati paralleli e distanti fra loro 30 cm !]

- Conflitto cognitivo perimetro/area: un esempio è mostrato nell'elaborato in Fig. 9 in cui, oltre al fatto che sono disegnati quadrati non concentrici, le distanze 20 cm e 15 cm tra i bulbi sono interpretate come perimetri dei quadrati, e i bulbi sono posizionati non solo sul perimetro, ma anche all'interno dei quadrati.

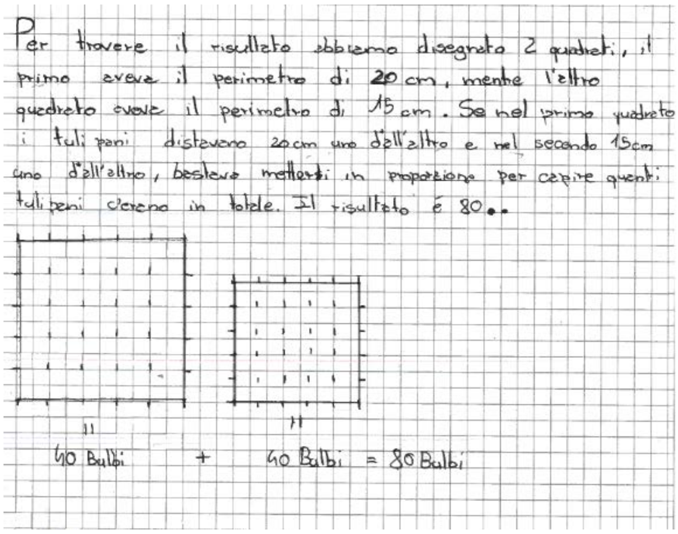


Fig. 9 (cat.9)

"Per trovare il risultato abbiamo disegnato 2 quadrati, il primo aveva il perimetro di 20 cm, mentre l'altro quadrato aveva il perimetro di 15 cm. Se nel primo quadrato i tulipani distavano 20 cm l'uno dall'altro e nel secondo quadrato 15 cm l'uno dall'altro, bastava metterli in proporzione per capire quanti tulipani c'erano in totale. Il risultato è 80."

Si noti quanto la spiegazione data sia importante per comprendere, per esempio in questo caso, il grado elevato di confusione in cui si trovano gli allievi. Infatti, se l'analisi fosse limitata all'osservazione del disegno avremmo dedotto certamente la non conoscenza del termine "concentrici", come anche avremmo chiaramente percepito il conflitto area/perimetro. Dall'argomentazione però si va oltre: gli allievi, dalla lettura del testo, sono portati ad associare il "contorno" al perimetro poi, cercando "i dati" tra i numeri presenti nel testo, trovano 20 cm e 15 cm che collegano automaticamente alla lunghezza dei perimetri dei due quadrati. Nella fase successiva *tornano* a considerare i 20 cm e i 15 cm come "distanze tra i bulbi". E ancora… *bastava metterli in proporzione per capire*…ci chiediamo: quanto è consapevole questa affermazione? A partire da situazioni di questo tipo, il suggerimento che se ne può ricavare è quello di indagare in classe sull'appropriazione del pensiero proporzionale da parte degli allievi, scegliendo opportunamente altre attività.

3.2 Quando il problema è stato compreso: varietà di procedure utilizzate e di spiegazioni fornite

Presentiamo e commentiamo una selezione di elaborati in cui si arriva alla soluzione attraverso ragionamenti e procedute differenti.

Synthèse : Lorsque le problème est correctement résolu, en plus de la procédure qui prévoit le recours à la représentation à l'échelle, non prévue a priori, toutes les procédures indiquées dans l'analyse a priori apparaissent dans les copies. Parmi celles-ci, la procédure par tâtonnement à partir de multiples de 20 et 15 est l'une des plus utilisées, même s'il existe aussi des exemples de tâtonnements plus ou moins systématiques sur la mesure du côté du petit carré ou du grand carré. En revanche, il existe peu de copies dans lesquelles la proportionnalité est utilisée : les élèves comprennent que " *Le rapport de la distance entre les bulbes est de ¾. Par conséquent, le rapport des côtés est aussi de ¾.*" et la différence entre les côtés des deux carrés, 60 cm, correspond à ¼. On en déduit alors les mesures des côtés des deux carrés, puis le nombre de bulbes.

L'utilisation de la stratégie algébrique est presque absente dans la cat. 8, alors qu'elle prévaut dans la cat. 10 (au moins pour les copies de la section de Sienne). Il est intéressant d'observer la grande diversité de manières dont ceux qui ont eu recours à l'algèbre ont exprimé l'équation ou le système utilisé pour résoudre le problème. Il convient également de noter que, malgré toute cette diversité, aucun groupe n'a utilisé l'équation de résolution proposée dans l'analyse a priori. Il semble que lorsqu'on est confronté à un problème inhabituel, une grande partie de la créativité se "libère" !

En outre, il est intéressant d'observer que, une fois l'équation obtenue, les élèves la résolvent très souvent par tâtonnement, sans appliquer les procédures habituelles basées sur l'application des principes d'équivalence, sur lesquels, au moins dans les cat. 9 et 10, ils se sont certainement exercés. On peut supposer que lorsqu'on est confronté à un problème intéressant non standard, le "chemin" historique refait surface : on identifie d'abord une ou plusieurs équations pour mathématiser la situation, puis on se "débrouille" pour les résoudre. Traditionnellement, en revanche, la séquence d'enseignement consiste d'abord à apprendre à résoudre des équations, puis à aborder quelques problèmes qui peuvent être "résolus avec des équations".

Enfin, dans deux copies de la section de Sienne, il existe une autre procédure qui n'est pas prévue dans l'analyse a priori. Elle se base sur l'observation que les longueurs des côtés des deux carrés diffèrent de 60 cm, mais aussi sur le fait que les côtés du grand et du petit carrés doivent être composés du même nombre de segments, respectivement de 20 cm et 15 cm, donc avec une différence de 5 cm. Par conséquence, si on se déplace d'un segment à la fois sur chacun des deux côtés, "à chaque pas" on gagne 5 cm sur le côté du grand carré par rapport au petit. Comme la différence entre les longueurs des côtés des deux carrés est de 60 cm, le "nombre de pas", c'est-à-dire le nombre de segments nécessaires pour compléter les côtés, doit être de 12 (= 60 : 5), d'où 12×4=48 qui est aussi le nombre de bulbes sur chaque carré.

3.2.1 Per tentativi organizzati sulla misura del lato di uno dei due quadrati

Esaminiamo tre elaborati di cat. 8 che utilizzano questo tipo di procedura, ma con modalità diverse di presentazione e spiegazione.

Nell'elaborato di Fig. 10, i tentativi sono riportati e permettono di determinare la misura dei lati dei due quadrati e poi il numero di "segmenti-distanza" (12) su ciascun lato. Gli allievi fanno poi il disegno in scala dei due quadrati con l'indicazione del numero di bulbi (48) sul quadrato grande e calcolano poi, con il raddoppio, il numero totale richiesto.

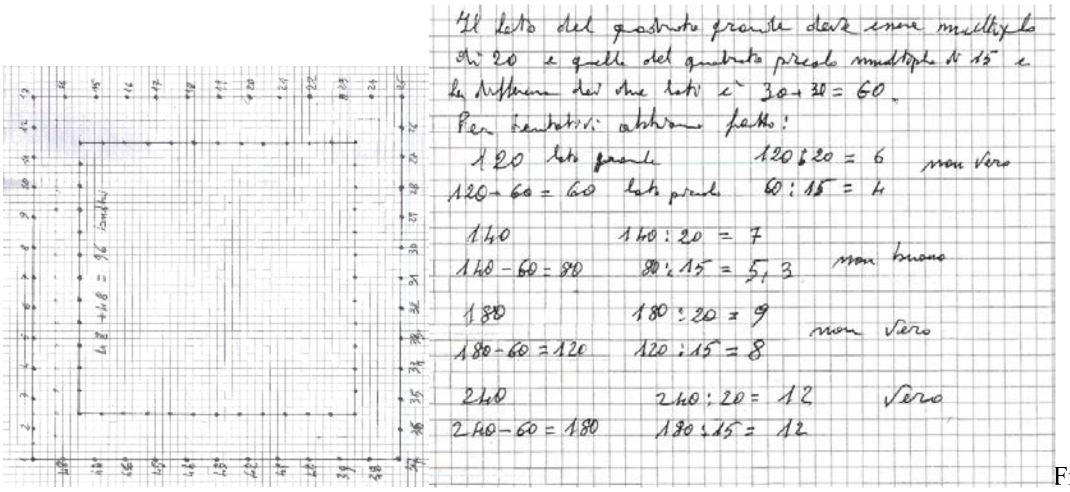


Fig.10 (cat. 8)

"Il lato del quadrato grande deve essere multiplo di 20 e quello del quadrato piccolo multiplo di 15 e la differenza dei due lati è 30+30 = 60." [procedono poi per tentativi fino alla determinazione della misura corretta, 240, per il lato del quadrato grande e 180 per il lato di quello piccolo; il numero totale dei bulbi è contato direttamente sul disegno].

In Fig. 11 la procedura per tentativi è fatta in modo sistematico sulla misura del lato del quadrato grande, considerando i multipli di 20, a partire da 60, e riportandoli in tabella. La tabella è auto-esplicativa: sopra a ciascuna colonna è indicato "*come si deve agire"* su ogni numero della colonna stessa, procedendo ogni volta per riga, e sono evidenziati i valori 240 e 120 per le misure dei lati dei due quadrati che sono poi utilizzati per il calcolo del numero tortale dei bulbi.

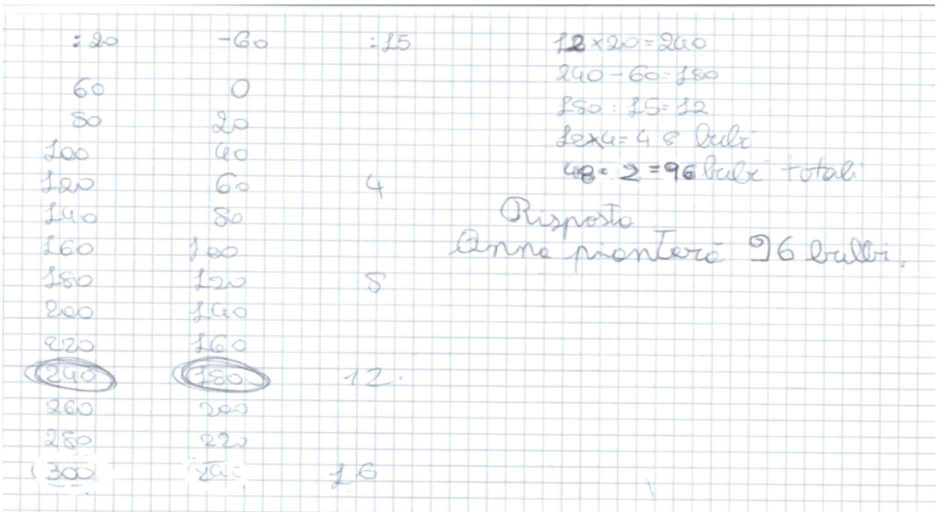


Fig. 11 (cat. 8)

Nel terzo elaborato, in Fig. 12, si dà la risposta corretta dicendo di aver proceduto per tentativi, senza riportarli, sul lato del quadrato piccolo, e spiegando in modo molto sintetico.

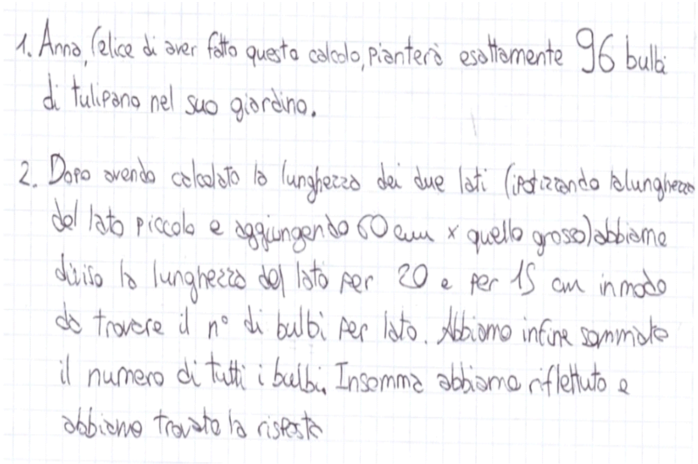
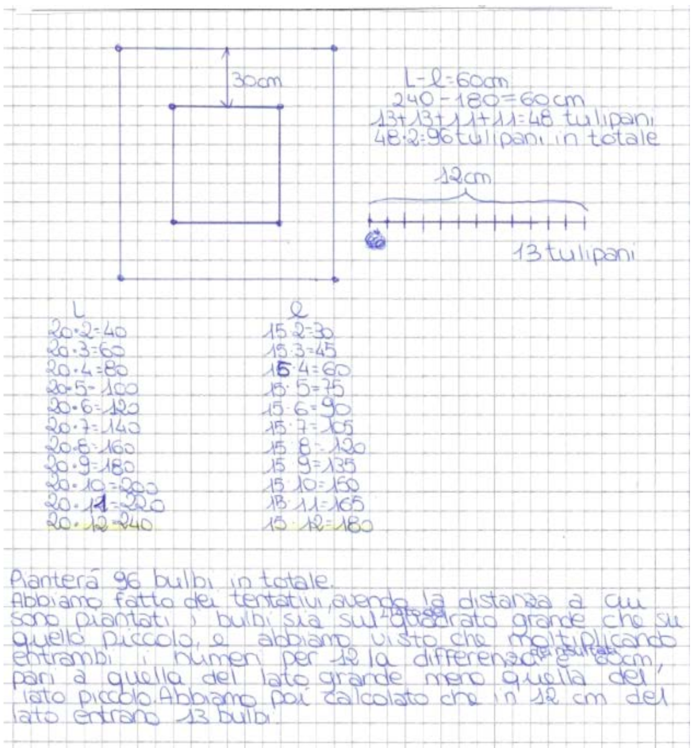


Fig. 12 (cat. 8) - "***1.** Anna, felice di aver fatto questo calcolo, pianterà esattamente 96 bulbi di tulipano nel suo giardino. **2.** Dopo aver calcolato la lunghezza dei due lati (ipotizzando la lunghezza del lato piccolo e aggiungendo 60 cm per quello grosso) abbiamo diviso la lunghezza del lato per 20 e per 15 cm in modo da trovare il n° dei bulbi per lato. Abbiamo infine sommato il numero di tutti i bulbi. Insomma abbiamo riflettuto e abbiamo trovato la risposta.*"

3.2.2 Utilizzo di multipli di 20 e 15

Questa procedura, che fa riferimento alla misura, 15 e 20, dei segmenti per lato nei due quadrati, è fra le più utilizzate in tutte le categorie. Di seguito riportiamo due esempi che sono interessanti per aspetti diversi.



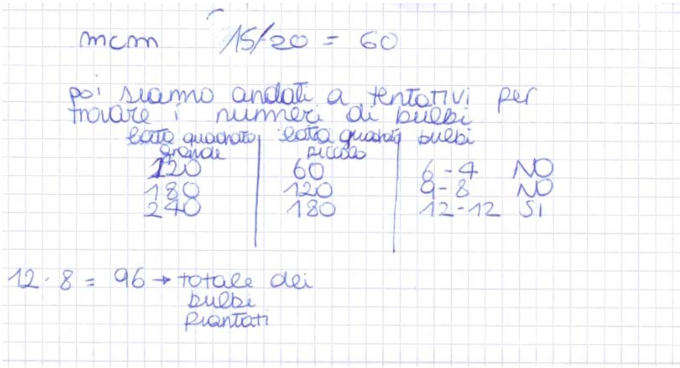
In Fig.13, è mostrato un elaborato di cat. 8 in cui si procede con tentativi sistematici sui multipli di 20 (per la misura del lato del quadrato grande) e di 15 (per la misura del lato del quadrato piccolo), riportati in tabella, fino a trovare che il dodicesimo multiplo di 15 e 20 è quello per il quale i valori dei due lati differiscono di 60. Un ulteriore aspetto da sottolineare è che si tratta di uno dei pochissimi elaborati in cui è chiaro, ed anche esplicitato con un disegno, il legame tra numero di bulbi su un lato (13) e numero di segmenti che li distanziano (12)

Fig. 13 (cat.8) - *"[…] Pianterà 96 tulipani in totale. Abbiamo fatto dei tentativi avendo la distanza a cui sono piantati i bulbi sia sul quadrato grande che su quello piccolo, e abbiamo visto che moltiplicando entrambi i numeri per 12 la differenza dei risultati è 60 cm, pari a quella del lato grande meno quella del lato piccolo. Abbiamo poi calcolato che in 12 cm del lato entrano 13 bulbi."*

Non mancano casi in cui tutta l'intera procedura è descritta a parole e ben argomentata, come nel seguente elaborato di cat. 8, dove la strategia per tentativi unita alla ricerca dei multipli comuni a 20 e 15 è rafforzata da un'analisi iniziale che tiene conto della necessaria differenza di 60 cm tra la misura del lato del quadrato più grande e la misura del quadrato più piccolo:

"*Per trovare la misura del lato del quadrato grande, abbiamo trovato un multiplo di 20 maggiore di 75, considerando che la distanza tra due lati paralleli dei due quadrati è 30 l'uno (60 cm) e considerando che la misura del quadrato piccolo deve essere grande, minimo 15 (60 + 15 = 75). Dato che 75 non è un multiplo di 20, abbiamo iniziato a considerare prima l'80 e andando a tentativi con i multipli di 20 abbiamo sottratto sempre 60 cm, cioè la distanza per calcolare il lato del quadrato piccolo, finché non abbiamo trovato un multiplo di 15, notando che, il primo numero che seguisse la regola già scritta è stato 120, perché 120-60 = 60, multiplo di 15, ma i quadrati non avrebbero avuto lo stesso numero di bulbi. Continuando così, abbiamo trovato un numero* *multiplo di 20 che sottratto a 60, desse un numero multiplo di 15, cioè 240 (240-60=180). Abbiamo concluso che su ogni lato abbiamo piantato 12 bulbi, quindi in tutto Anna pianterà 96 bulbi".*

In alcuni casi, come mostrato in Fig. 14, si parte dal calcolo del mcm (20,15) = 60, si procede, considerando le coppie di numeri che siano due multipli consecutivi di 60, si calcola in ciascun caso il numero di bulbi fino a quando non si scopre che è lo stesso. Gli allievi scrivono "*Abbiamo calcolato che la differenza tra il quadrato grande e quello piccolo è di 60 cm facendo 30·2 e abbiamo fatto il minimo comune multiplo tra la distanza dei fiori del quadrato piccolo e i fiori del quadrato grande".* Segue poi la tabella, che si vede in figura, con i tentativi fatti.



mcm 15/20 = 60

poi siamo andati a tentativi per trovare i numeri di bulbi

lato quadrato grande	lato quadrato piccolo	bulbi	
120	60	6-4	NO
180	120	9-8	NO
240	180	12-12	SI

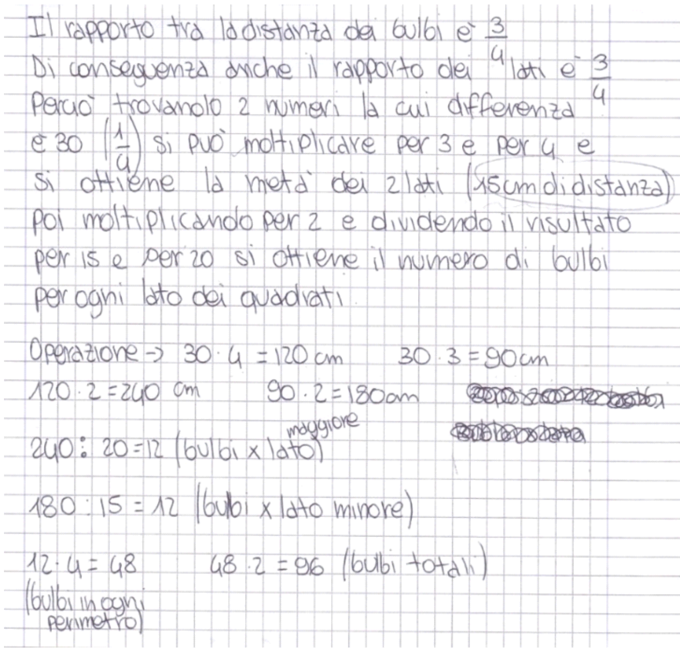
12 · 8 = 96 → totale dei bulbi piantati

Fig. 14 (cat. 8) - "*mcm(15,20) = 60 poi siamo andati a tentativi per trovare i numeri dei bulbi* […]."

3.2.3 Uso della proporzionalità

In entrambe le sezioni gli elaborati che utilizzano la proporzionalità sono molto rari. Non mancano però alcuni casi interessanti, come quelli di seguito riportati.

Cominciamo dall'elaborato di cat. 8 in Fig.15, in cui gli allievi mostrano di aver compreso il rapporto di proporzionalità che lega i due quadrati e lo estendono dai segmenti-distanza ai lati. Comprendono anche che la semi-differenza, 30, fra i lati dei due quadrati corrisponde a ¼, quindi moltiplicando 30 per 3 e poi per 4 e infine raddoppiando ciascun valore trovato, ottengono le misure dei lati dei quadrati stessi e da qui procedono al calcolo dei bulbi totali.



Il rapporto tra la distanza dei bulbi è $\frac{3}{4}$
Di conseguenza anche il rapporto dei lati è $\frac{3}{4}$
Perciò trovando 2 numeri la cui differenza è 30 ($\frac{1}{4}$) si può moltiplicare per 3 e per 4 e si ottiene la metà dei 2 lati (15 cm di distanza) poi moltiplicando per 2 e dividendo il risultato per 15 e per 20 si ottiene il numero di bulbi per ogni lato dei quadrati

Operazione → 30 · 4 = 120 cm 30 · 3 = 90 cm
120 · 2 = 240 cm 90 · 2 = 180 cm
240 : 20 = 12 (bulbi x lato maggiore)
180 : 15 = 12 (bulbi x lato minore)
12 · 4 = 48 (bulbi in ogni perimetro) 48 · 2 = 96 (bulbi totali)

Fig.15 (cat. 8)

"Il rapporto tra la distanza dei bulbi è ¾. Di conseguenza anche il rapporto dei lati è ¾. Perciò trovando 2 numeri la cui differenza è 30 (1/4) si può moltiplicare per 3 e per 4 e si ottiene la metà dei 2 lati (15 cm di distanza), poi moltiplicando per 2 e dividendo il risultato per 15 e per 20 si ottiene il numero di bulbi per ogni lato dei quadrati [seguono le operazioni]."

Una procedura analoga che porta a determinare la misura dei lati dei due quadrati sfruttando il rapporto di proporzionalità e la differenza 60 tra le misure dei lati dei due quadrati, si trova nell'elaborato in Fig. 16. In questo caso, come si può osservare, gli allievi lavorano in modo "esperto", mostrando padronanza nell'uso delle proporzioni e delle proprietà relative, usate frequentemente solo in modo meccanico.

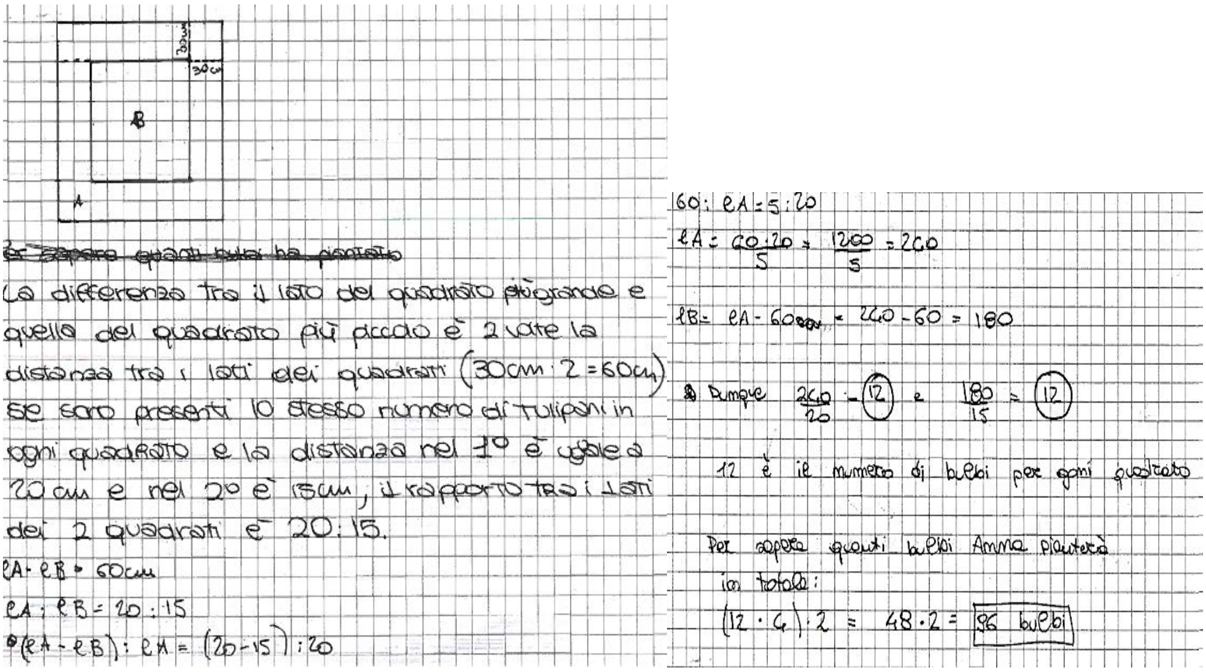


Fig. 16 (cat. 9)

"La differenza tra il lato del quadrato più grande e quella del quadrato più piccolo è 2 volte la distanza tra i lati dei quadrati (30 cm ·2 = 60 cm). Se sono presenti lo stesso numero di tulipani in ogni quadrato e la distanza nel 1° è uguale a 20 cm e nel 2° è 15 cm, il rapporto tra i lati dei 2 quadrati è 20:15 [seguono i calcoli, derivanti tutti dalla seguente proporzione e dal suo sviluppo: *lA: lB = 20:15*, da cui (*lA- lB): lA = (20-1):20*, quindi *60: lA = 5:20* che consente di ottenere *lA = 240* e di conseguenza *lB =180*]."

Molto interessante è anche l'elaborato di cat. 9 in Fig.17 in cui gli allievi, consapevoli del rapporto di proporzionalità ¾ esistente tra le misure dei lati dei quadrati piccolo e grande, si rendono conto che la differenza 60 (= 30 + 30) tra i lati dei due quadrati corrisponde a ¼ della misura del lato del quadrato grande (come ben evidenziato anche nella figura che compare nell'elaborato).

Si tratta dell'informazione-chiave che permette poi agli allievi di risolvere il problema.

Purtroppo, nonostante la correttezza del ragionamento e della procedura seguita, come si nota, anche in questo caso si commette l'errore, nel conteggio finale dei bulbi, di aggiungere ancora gli 8 bulbi dei vertici dei quadrati che fa innalzare il numero totale da 96, quello corretto, a 104.

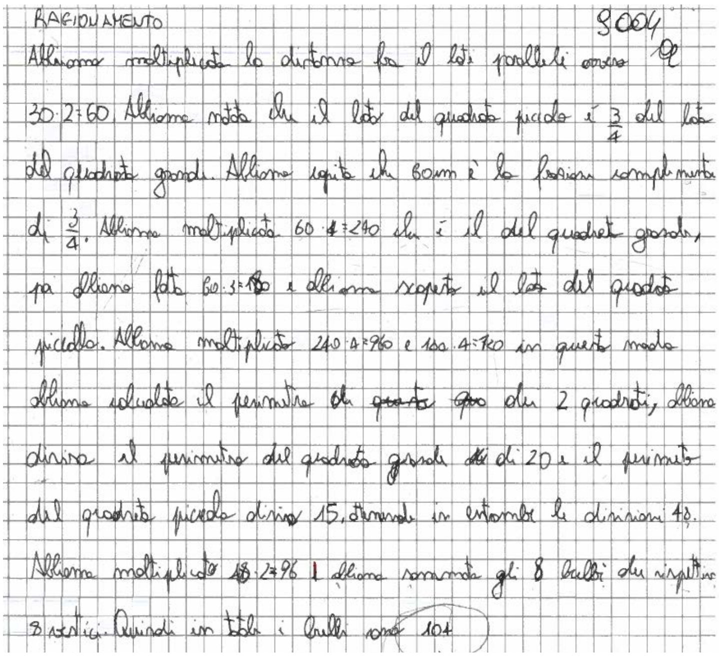
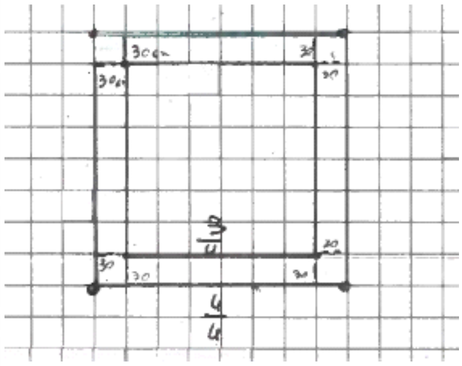


Fig. 17 (cat. 9)



"Abbiamo moltiplicato la distanza fra i lati paralleli, ovvero 30·2= 60. Abbiamo notato che il lato del quadrato piccolo è ¾ del lato del quadrato grande. Abbiamo capito che 60 cm è la frazione complementare di ¾. Abbiamo moltiplicato 60·4=240 che è il lato del quadrato grande, poi abbiamo fatto 60·3=180 e abbiamo scoperto che il lato del quadrato piccolo. Abbiamo moltiplicato 240·4=960 e 180·4=720 in questo modo abbiamo calcolato il perimetro dei due quadrati, abbiamo diviso il perimetro del quadrato grande per 20 e il perimetro del quadrato piccolo per 15, ottenendo in entrambe le divisioni 48. Abbiamo moltiplicato 48·2=96, abbiamo sommato gli 8 bulbi dei rispettivi 8 vertici. <u>Quindi in totale i bulbi sono 104</u>".

La procedura adottata nell'elaborato di cat. 9 in Fig. 18 è analoga alla precedente, con la sola differenza che, anziché fissare l'attenzione sui lati dei due quadrati, si considerano i loro <u>perimetri</u> per i quali resta valido il rapporto di proporzionalità ¾. In questo caso è la differenza 240 (= 30 × 8) fra i perimetri dei due quadrati che corrisponde a ¼ del perimetro del quadrato grande e che permetterà di calcolare il numero totale dei bulbi, come spiegano gli allievi.

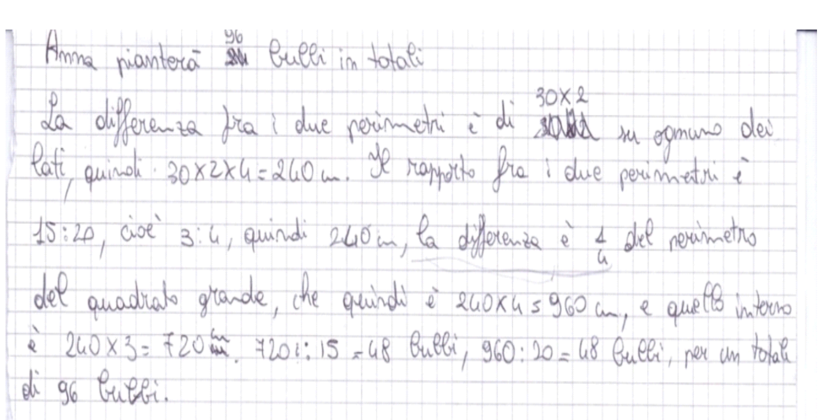


Fig. 18 (cat. 9) - *"Anna pianterà 96 bulbi in totale. La differenza fra i due perimetri è di 30×2 su ognuno dei lati, quindi 30×2×4 = 240 cm. Il rapporto fra i due perimetri è 15:20, cioè 3:4, quindi 240 cm, la differenza, è ¼ del perimetro del quadrato grande, che quindi è 240×4 = 960 cm, e quello interno è 240×3 = 720 cm; 720:15= 48 bulbi, 960:20 = 48 bulbi, per un totale di 96 bulbi".*

3.2.4 Uso dell'algebra

In cat. 8, il ricorso alla strategia algebrica è pressoché assente, se si eccettua qualche caso in cui si può riconoscere un'equazione espressa in "forma retorica" come nell'elaborato in Fig. 19.

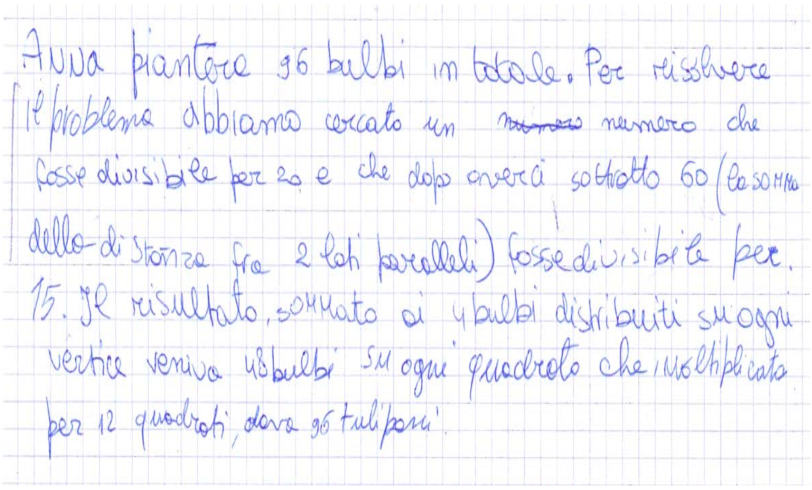

Anna pianterà 96 bulbi in totale. Per risolvere il problema abbiamo cercato un ~~numero~~ numero che fosse divisibile per 20 e che dopo averci sottratto 60 (la somma delle distanze fra 2 lati paralleli) fosse divisibile per 15. Il risultato, sommato ai 4 bulbi distribuiti su ogni vertice veniva 48 bulbi su ogni quadrato che moltiplicato per 12 quadrati, dava 96 tulipani.

Fig. 19 (cat. 8) "*Anna pianterà 96 bulbi in totale. Per risolvere il problema* <u>*abbiamo cercato un numero che fosse divisibile per 20 e che dopo averci sottratto 60*</u> *(la somma delle distanze fra 2 lati paralleli)* <u>*fosse divisibile per 15*</u>*. Il risultato, sommato ai 4 bulbi distribuiti su ogni vertice veniva 48 bulbi su ogni quadrato che moltiplicato per i 2 quadrati dava 96 tulipani.*"

Acquista quindi particolare valore l'elaborato di cat. 8 in Fig. 20, nel quale compare l'equazione che matematizza il problema scritta nel linguaggio simbolico e dove la soluzione, che è trovata per tentativi, fa supporre che le tecniche di risoluzione non siano state ancora istituzionalizzate.

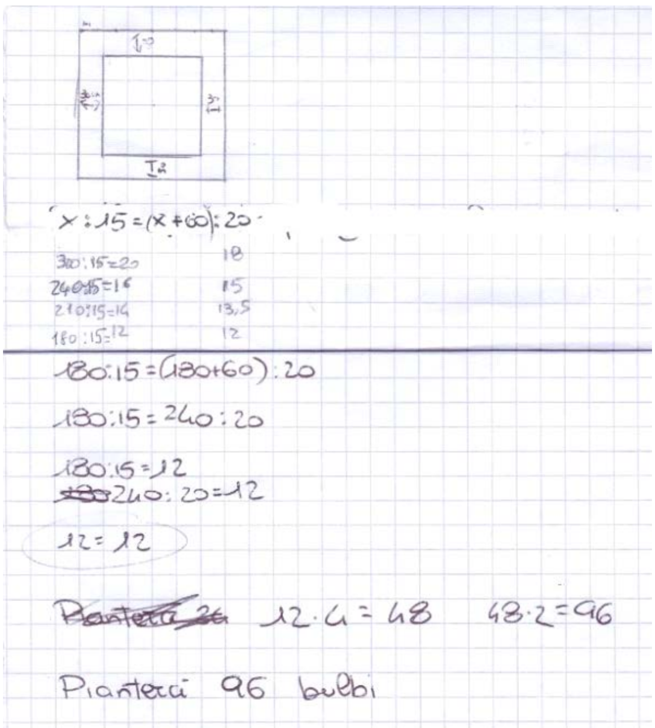


Fig. 20 (cat. 8)

La strategia algebrica comincia, invece, ad essere più frequente in cat. 9. Ecco alcuni estratti da elaborati di questa categoria in cui la strategia è utilizzata in modo corretto:

<u>Elaborato 1</u> (cat. 9): "*Ho impostato un'equazione sapendo che l/15 dovrà essere uguale a (l+60) /20 poiché se i lati sono paralleli e distanti 30 cm da ciascun lato, il lato del secondo quadrato sarà più grande di 60 cm",* poi l'equazione è risolta in modo esperto trovando i valori 180 e 240 per le misure dei lati dei due quadrati, quindi si procede con i calcoli (180:15)·4= 48 e 48·2=96 per il numero totale dei bulbi.

<u>Elaborato 2</u> (v. Fig. 21)

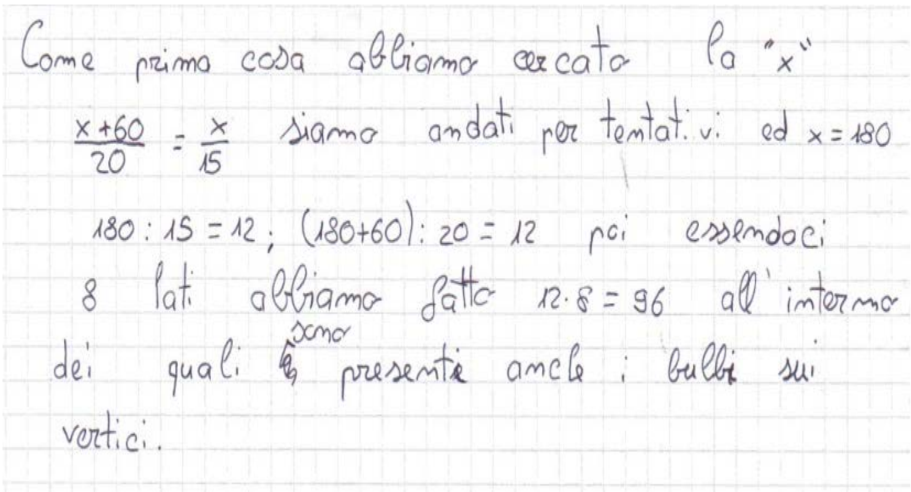


Fig. 21 (cat. 9) - *"Come prima cosa abbiamo cercato la "x"*

(x+60)/20 = x/15 siamo andati per tentativi ed x=180.

180:15=12; (180+60):20 = 12 poi essendoci 8 lati abbiamo fatto 12 · 8 = 96 all'interno dei quali sono presenti anche i bulbi sui vertici".

<u>Elaborato 3</u> (v. Fig. 22)

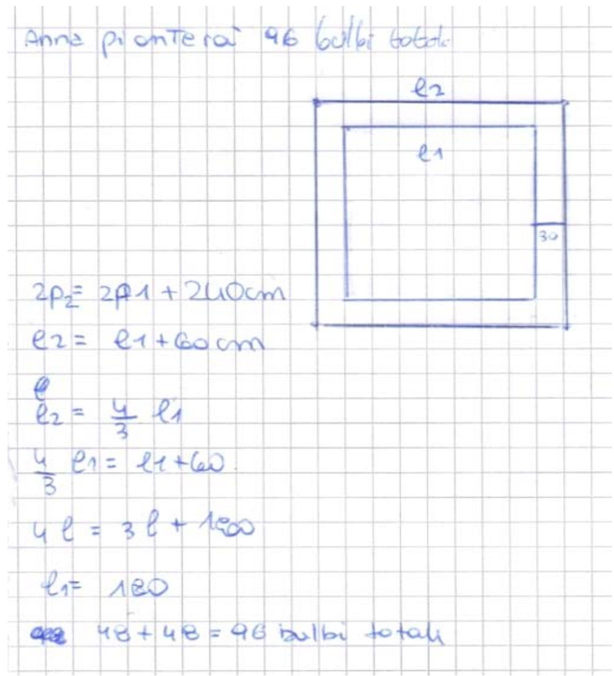


Fig. 22 (cat. 9)

Da notare che in questo elaborato gli allievi hanno sostanzialmente **risolto un sistema** di due equazioni, le cui incognite sono le misure l_2 e l_1 dei lati dei quadrati grande e piccolo:

- una delle equazioni sfrutta la <u>differenza 60</u> tra le misure l_2 e l_1 dei lati dei due quadrati
- l'altra equazione sfrutta <u>il rapporto 4/3</u> fra le precedenti misure

Nella sezione di Siena, la **strategia algebrica è prevalente in cat. 10** ed è stata utilizzata in tutti gli elaborati valutati 4 punti. Nelle Figg. 23 e 24 sono riportati due esempi di elaborati con nominalizzazione chiara delle incognite: <u>nel primo caso</u>, il problema è risolto con *un'equazione* (impostata considerando il perimetro dei quadrati), nel <u>secondo caso</u> con <u>*un sistema*</u>. Da notare che il secondo elaborato è uno dei pochi casi in cui si trova esplicitata chiaramente la relazione "numero di bulbi-numero di segmenti per lato".

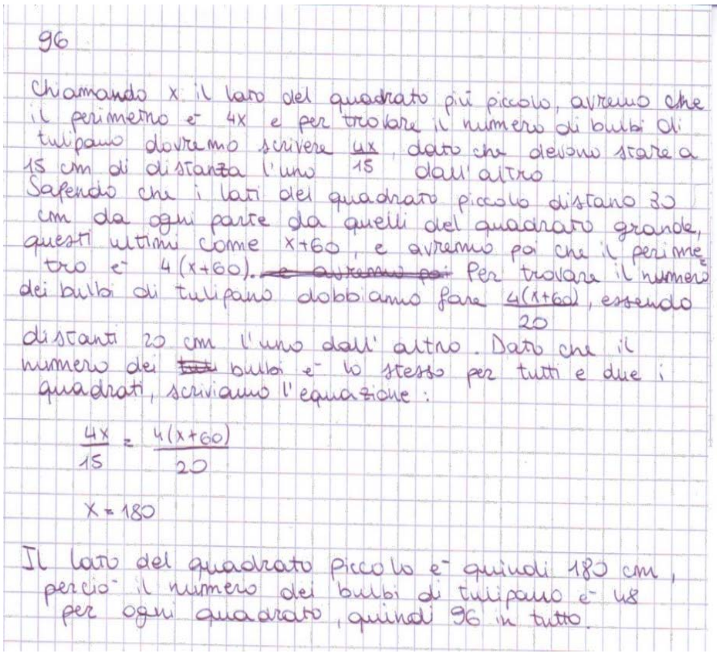


Fig.23 (cat. 10) – *"Chiamando x il lato del quadrato più piccolo, avremo che il perimetro è 4x e per trovare il numero di bulbi di tulipani dovremo scrivere 4x/15, dato che devono stare a 15 cm di distanza l'uno dall'altro. Sapendo che i lati del quadrato piccolo distano 30 cm da ogni parte da quelli del quadrato grande, questi ultimi come x+60, e avremo poi che il perimetro è 4(x+60). Per trovare il numero di bulbi di tulipano dobbiamo fare 4(x+60) /20, essendo distanti 20 cm l'uno dall'altro. Dato che il numero dei bulbi è lo stesso per tutti e due i quadrati, scriviamo l'equazione: 4x/15 = 4(x+60) /20, da cui x = 180. Il lato del quadrato piccolo è quindi 180 cm, perciò il numero dei bulbi di tulipano è 48 per ogni quadrato, quindi 96 in tutto."*

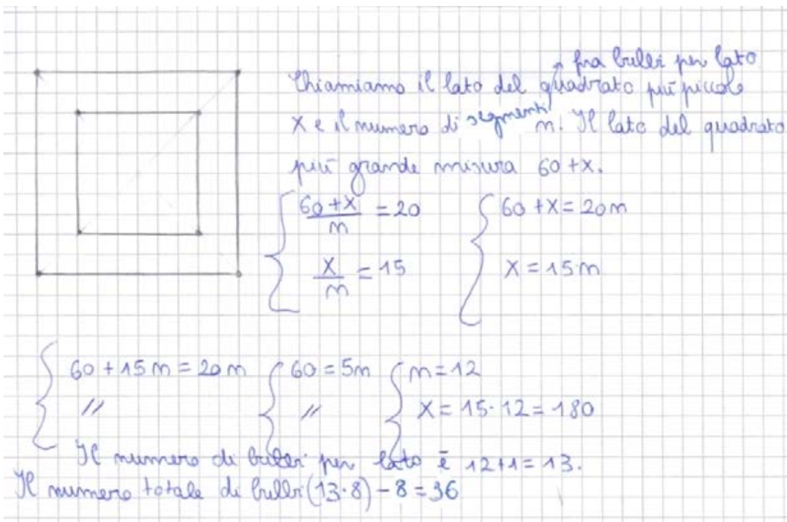


Fig. 24 (cat. 10) – *"Chiamiamo il lato del quadrato più piccolo x e il numero di segmenti tra bulbi per lato n. Il lato del quadrato più grande misura 60+x.*

[segue l'impostazione del sistema e la sua risoluzione: *n=12*, *x =180*]

Il numero dei bulbi per lato è 12+1 = 13. Il numero dei bulbi totali è (13·8)-8=96."

Un aspetto che ci sembra interessante sottolineare è la **varietà di modi** in cui, chi ha fatto ricorso all'algebra, ha espresso l'equazione o il sistema utilizzati per risolvere il problema. Ecco alcuni esempi:

Equazione: ***(60+x) /20 = x/15***, dove x indica la misura lato quadrato piccolo.

Equazione: si considerano i perimetri dei due quadrati e si imposta l'equazione ***4l/15 = (4l+240) /20,*** dove l è la misura del lato del quadrato piccolo.

Sistema di 2 equazioni: ***y = x-60, x/20=y/15***, dove x indica la misura lato quadrato grande e y la misura lato quadrato piccolo.

Sistema di 2 equazioni: ***y = x+60, x/20 = y/15***, dove x indica la misura lato quadrato piccolo e y la misura lato quadrato grande.

Sistema di 3 equazioni: $l_1 = n\cdot 15$, $l_2 = n\cdot 20$, $l_1 = l_2 - 60$, con l_1 misura del lato piccolo, l_2 misura del lato grande e n il numero di segmenti-distanza per lato di ciascun quadrato.

Sistema di 4 equazioni: $n_1 = l_1:20$, $n_2 = l_2:15$, $n_1 = n_2$ e $l_1 = l_2 + 60$, dove n_1 e n_2 sono, rispettivamente, il numero di segmenti-distanza su ogni lato del quadrato grande e del quadrato piccolo, e l_1 e l_2 sono, rispettivamente, le misure del lato del quadrato grande e del quadrato piccolo.

Notiamo che, con tutta questa varietà di equazioni risolventi, nessun gruppo ha utilizzato quella prevista nell'analisi a priori. Sembra proprio che davanti ad un problema insolito si "scateni" una bella creatività!

Inoltre è interessante osservare che, una volta ottenuta l'equazione, gli allievi la risolvano molto spesso per tentativi, senza applicare le procedure standard basate sull'applicazione dei principi di equivalenza, sulle quali, almeno in cat. 9 e 10, si sono senz'altro esercitati. Si può ipotizzare che di fronte ad un interessante problema non standard riemerga il "percorso" storico: prima si individuano una o più equazioni per matematizzare la situazione e poi "ci si arrangia" per risolverle. Tradizionalmente invece la sequenza di insegnamento prevede di imparare prima a risolvere equazioni per poi affrontare qualche problema "risolubile con equazioni".

3.2.5 Disegno in scala dei due quadrati con il posizionamento dei bulbi (non previsto a priori)

Le soluzioni corrette si trovano negli elaborati in cui i disegni dei due quadrati, ottenuti per tentativi, sono in scala e tutte le condizioni indicate nel testo sono soddisfatte. Solo in qualche raro caso, però, sono riportati i tentativi fatti. Un esempio significativo in questo senso è fornito dall'elaborato di cat. 8, riportato in Appendice, completo sia nella spiegazione della procedura, sia nel riportare i tentativi fatti per arrivare al disegno finale, ben rappresentato in scala e con l'indicazione della posizione corretta di tutti i bulbi. Da sottolineare lo spirito di collaborazione, proprio del Rally Matematico Transalpino, messo in atto dagli allievi nella risoluzione del problema, come scrivono nella spiegazione, riportata anch'essa in Appendice: "*Facendo prove ripetute partendo dal numero dei bulbi del quadrato più piccolo,* ***siamo arrivati alla soluzione dividendoci il lavoro.*** *La conclusione è che Anna ha piantato 96 bulbi di tulipano […].*"

Nella maggior parte dei casi gli allievi forniscono solo il disegno finale con il posizionamento dei bulbi ed il loro numero, come in Fig. 25(a). In altri casi, come mostrato Fig. 25(b), il disegno corretto in scala della soluzione del problema è stato fatto dopo aver trovato, procedendo a tentativi, le misure dei lati dei due quadrati (240 e 180), come si intuisce dalla tabella dei multipli di 15 e di 20 riportata nell'elaborato, dalla quale è evidente anche l'unicità della soluzione.

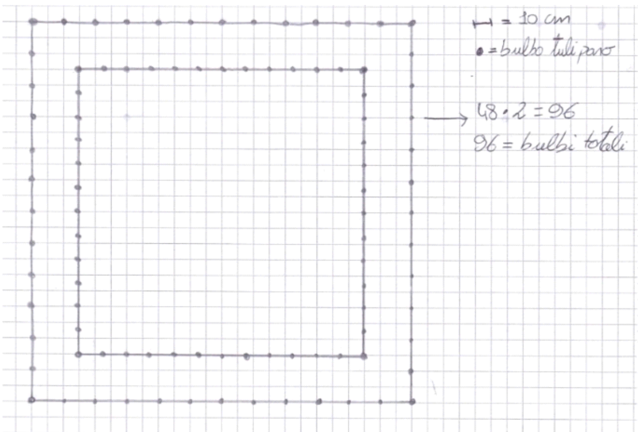


Fig. 25(a) (cat. 8)

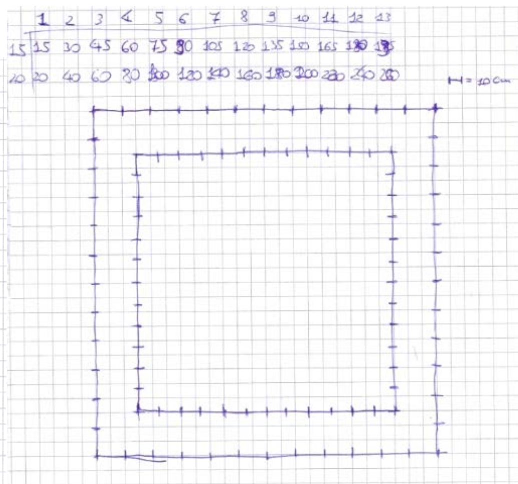


Fig. 25(b) (cat. 8)

Di seguito riportiamo qualche altro esempio interessante in cui, anche se non sono riportati i tentativi, si fornisce una spiegazione di quello che è stato fatto.

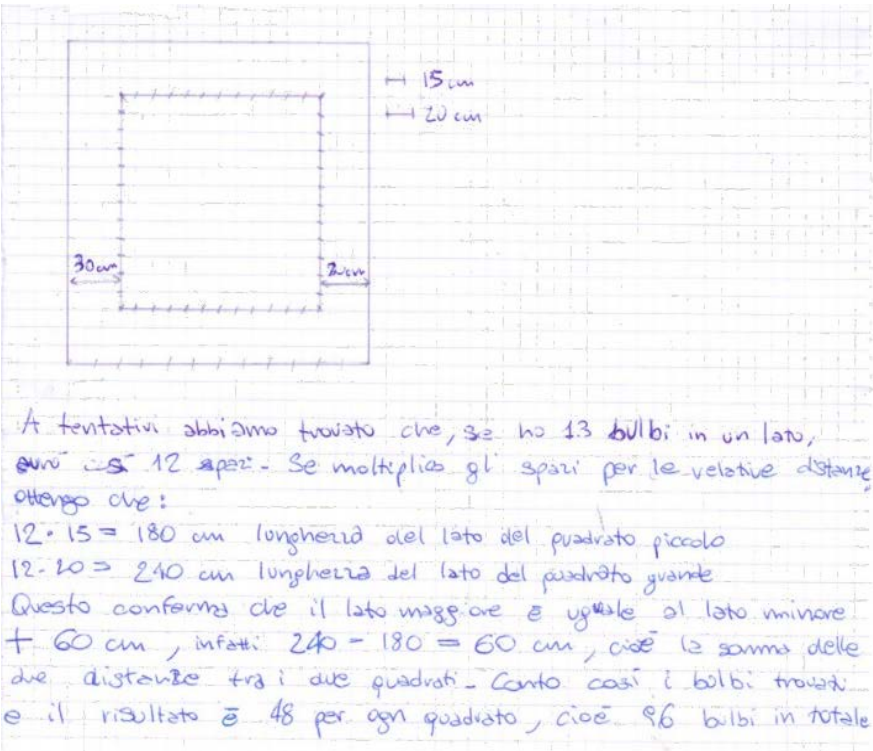


Fig. 26 (cat.8)

"*A tentativi abbiamo trovato che, se ho 13 bulbi in un lato, avrò così 12 spazi. Se moltiplico gli spazi per le relative distanze ottengo che:*

12·15=180 cm lunghezza del lato del quadrato piccolo;

12·20=240 cm lunghezza del lato del quadrato grande.

Questo conferma che il lato maggiore è uguale al minore +60 cm, infatti 240-180=60 cm, cioè la somma delle due distanze tra i due quadrati. Conto così i bulbi trovati e il risultato è 48 per ogni quadrato, cioè 96 bulbi in totale."

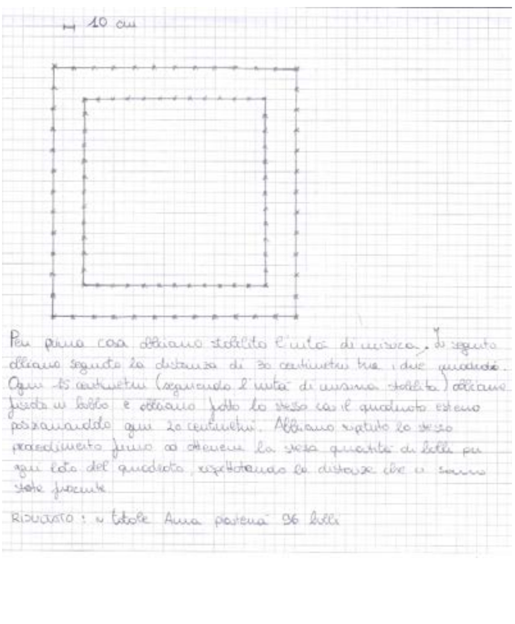
Da notare:

a) l'esplicitazione del legame tra numero di bulbi e numero di segmenti per lato

b) il controllo fatto sul disegno finale del rispetto di tutte le condizioni.

L'elaborato in Fig. 27, di cat. 10, mostra che anche nelle categorie alte si può ricorrere al disegno in scala. La spiegazione che danno gli allievi della procedura seguita è chiara e completa e permette a chi legge di costruire per passi successivi (in questo caso "*segmento dopo segmento*") il disegno finale dei due quadrati con i bulbi posizionati.

Fig. 27 (cat.10)



"*Per prima cosa abbiamo stabilito l'unità di misura. In seguito abbiamo segnato la distanza di 30 centimetri tra i due quadrati.* ***Ogni 15 centimetri*** *(seguendo l'unità di misura stabilita)* ***abbiamo fissato un bulbo*** *e* ***abbiamo fatto lo stesso con il quadrato esterno posizionandolo ogni 20 cm****.*

Abbiamo ***ripetuto lo stesso procedimento*** *fino ad ottenere la stessa quantità di bulbi per ogni lato del quadrato, rispettando le distanze che ci sono state fornite.*

RISULTATO: in totale Anna pianterà 96 bulbi."

3.2.6 Procedura non prevista, significativa per la sua efficacia e sinteticità

Questa procedura si basa sulla constatazione che le lunghezze dei lati dei due quadrati differiscono di 60 cm, ma anche sul fatto che i lati dei quadrati grande e piccolo devono essere costituiti dallo stesso numero di segmenti, rispettivamente di 20 cm e di 15 cm, quindi con differenza 5 cm. Ne consegne che, spostandosi contemporaneamente di un segmento alla volta su ciascuno dei due lati, “ad ogni passo” si guadagna 5 cm sul lato del quadrato grande rispetto al piccolo. Poiché la differenza tra le lunghezze dei due lati è 60 cm, il “numero dei passi”, ovvero il numero di segmenti necessari a completare i lati stessi deve essere 12 (= 60 : 5). Questa strategia si trova in due elaborati della sezione di Siena, uno di cat. 10, in Fig. 28(a), e l’altro di cat. 8, in Fig. 28(b).

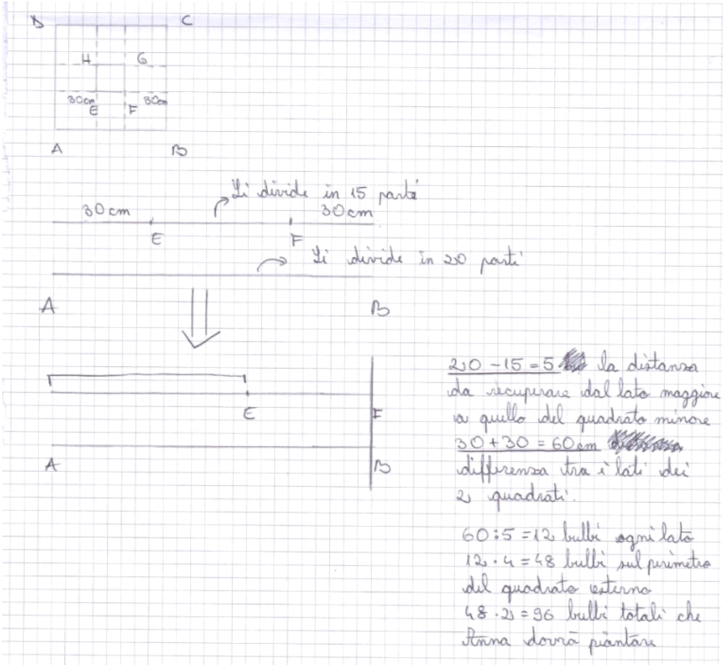


Fig.28(a) (cat. 10) – Come si nota, gli allievi, più che spiegare a parole, lasciano che siano i disegni a “parlare”.

Partono dal disegno dei due quadrati che serve come “schizzo” per capire la situazione generale. Poi fissano l’attenzione su due lati paralleli dei due quadrati, li disegnano mettendoli a confronto e fanno su di essi il ragionamento:

“20 - 15 = 5 la distanza da recuperare dal lato maggiore a quello del quadrato minore; 30 + 30 = 60 differenza tra i lati dei 2 quadrati

60:5=12 bulbi ogni lato

12·4=48 bulbi sul perimetro del quadrato esterno

48·2=96 bulbi totali che Anna dovrà piantare.”

Nell’elaborato di cat. 8 si utilizza la stessa procedura, anche se la spiegazione è più “sintetica”.

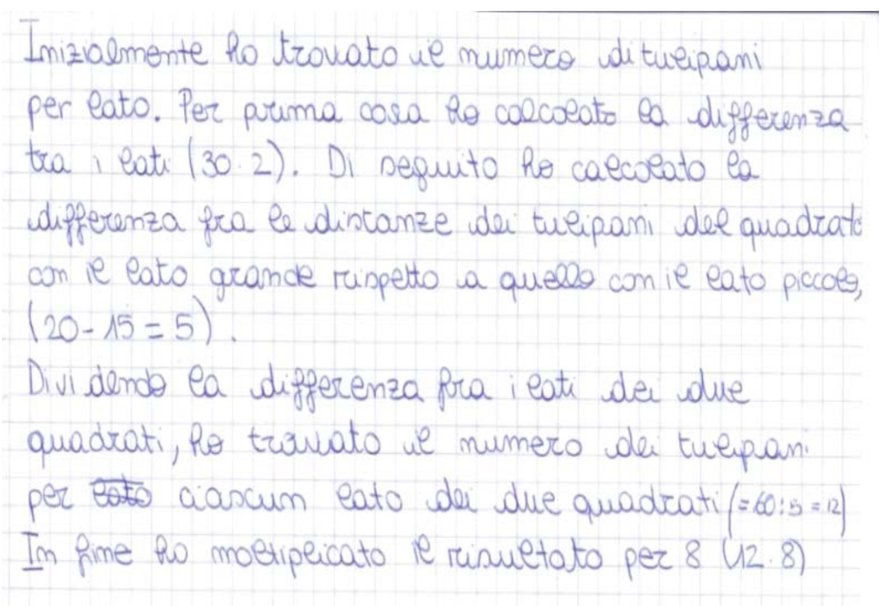


Fig. 28(b) (cat. 8) - “*Inizialmente ho trovato il numero di tulipani per lato. Per prima cosa ho calcolato la differenza tra i lati (30·2). Di seguito ho calcolato la differenza fra le distanze dei tulipani del quadrato con il lato grande rispetto a quello con il lato piccolo (20-15=5). Dividendo la differenza fra i lati dei due quadrati, ho trovato il numero dei tulipani per ciascun lato dei due quadrati (=60:5=12). Infine ho moltiplicato il risultato per 8 (12·8).”*

4. Indicazioni didattiche

Notiamo che i dati che compaiono nel testo del problema si riferiscono a relazioni (differenza fra le misure dei lati, distanza tra i bulbi, stesso numero di bulbi sul contorno di ogni quadrato) e non esprimono quantità o misure. Questo è sempre "spiazzante" per gli allievi. D'altra parte, la possibilità di rappresentare con un disegno la situazione porta a provare a risolvere. Altro pregio del problema è la domanda finale, molto concreta e naturale prima di cominciare un lavoro in giardino: quanti bulbi servono ad Anna? Anche la richiesta quindi contribuisce affinché gli allievi si impegnino nella risoluzione.

Synthèse : Le problème semble intéressant en raison des **nombreux concepts mathématiques qu'il met en jeu, appartenant à des domaines différents** (voir la fiche de la Banque de problèmes) : géométrie (carré, centre d'un carré, carrés concentriques, distance entre deux carrés concentriques à côtés parallèles, homothétie) ; mesure (choix de l'unité de mesure et mesure des longueurs des côtés, périmètres, distances entre les côtés) ; arithmétique (multiples et diviseurs, opérations arithmétiques sur les nombres naturels, rapports et proportions) ; algèbre (équations et systèmes) ; logique et raisonnement en géométrie déductive.

Cette pluralité de concepts mathématiques issus de différents domaines pouvant être utilisés présente le double avantage d'offrir aux élèves la possibilité d'appliquer des procédures mathématiques différentes pour résoudre le problème, et de fournir aux enseignants un utile outil de diagnostic quant au niveau d'acquisition par les élèves, de ces concepts que les procédures utilisées ont mis en jeu.

Dall'analisi a posteriori sono emerse le difficoltà incontrate dagli allievi, in particolare in cat 8, nella fase di appropriazione del compito**.** Ciò è evidente anche quando gli allievi si sono serviti del disegno per rappresentare la situazione descritta nel testo del problema.

La riflessione in seno al gruppo di lavoro ha portato alla conclusione che la causa principale di insuccesso sia da ricercare nella complessità del testo che gli allievi si sono trovati davanti. Questa ipotesi ci ha ricondotto ad analizzare in dettaglio ciò che è necessario per **comprendere il testo**, passaggio indispensabile per l'appropriazione del compito.

La prima parte dell'enunciato dà informazioni su ***dove devono essere posizionati i bulbi***, cioè "*lungo i lati di una figura formata da due quadrati concentrici, con lati paralleli e distanti fra loro 30 cm"*. Qui, per visualizzare la situazione ed eventualmente disegnarla, devono intervenire le conoscenze sul quadrato riguardanti in particolare i seguenti concetti: centro di un quadrato, quadrati concentrici a lati paralleli, distanza fra lati paralleli, perimetro. La rappresentazione corretta della situazione dovrebbe poi servire a far comprendere che il lato del quadrato grande è 60 cm in più del lato del quadrato piccolo (o, equivalentemente, che il perimetro del quadrato grande è 240 cm in più del perimetro del quadrato piccolo).

La seconda parte dell'enunciato dà informazioni su ***come devono essere posizionati i bulbi,*** attraverso tre condizioni: *a) su ogni vertice dei due quadrati deve esserci un bulbo; b) sul contorno del quadrato grande i bulbi devono essere sistemati ad una distanza di 20 cm uno dall'altro, mentre per il quadrato piccolo tale distanza deve essere di 15 cm; c) su ciascun quadrato ci deve essere lo stesso numero di bulbi.* Da osservare che la condizione b) è "duplice" in quanto si diversifica a seconda che si riferisca al quadrato grande o a quello piccolo. Si può quindi senz'altro ritenere che una delle **difficoltà del problema** sia quella di dover comprendere e tenere sotto controllo contemporaneamente molte condizioni, con un processo di andata-ritorno da un quadrato all'altro.

Infine, ***cosa è richiesto,*** cioè l'oggetto della ricerca***:*** *determinare il numero totale dei bulbi che si possono disporre sul contorno dei due quadrati concentrici*. Qui, come abbiamo visto negli elaborati, si presenta un altro punto critico: per rispondere alla domanda, occorre ***capire la relazione esistente tra numero di bulbi e numero di segmenti che li individuano*** ed utilizzarla correttamente. In realtà, come è emerso dall'analisi a posteriori, in molti elaborati la relazione tra numero di bulbi e numero di segmenti non è stata correttamente percepita, forse anche sottovalutata, diventando così un **ostacolo** alla determinazione della risposta corretta al problema.

Nonostante le difficoltà e gli ostacoli sopra citati, il problema appare interessante proprio per i **molti concetti matematici che mette in gioco, appartenenti ad ambiti diversi** (cfr. anche scheda nella Banca Problemi[3]): geometria (quadrato, centro di un quadrato, quadrati concentrici, distanza tra due quadrati concentrici con lati paralleli, omotetia); misura (scelta dell'unità di misura e misurazione di lunghezze di lati, perimetri, distanze fra lati); aritmetica (multipli e divisori, operazioni aritmetiche su numeri naturali, rapporti e proporzioni); algebra (equazioni e sistemi); logica e ragionamento in geometria deduttiva. Questa pluralità di concetti matematici di vari ambiti, che si possono utilizzare a seconda del grado di conoscenza e competenza che si è raggiunto nei loro confronti, ha il vantaggio di *offrire agli allievi* la **possibilità di applicare procedure matematiche diverse nella**

[3] Rispetto agli ambiti già indicati nella scheda presente nella Banca Problemi, proponiamo di aggiungere l'ambito MISURA

risoluzione del problema; nello stesso tempo, l'analisi degli errori commessi nell'applicazione delle diverse procedure *offre all'insegnante* un utile strumento di diagnosi riguardo al livello di acquisizione degli allievi di quei concetti che le procedure utilizzate fanno intervenire.

Ci sembra quindi di poter affermare che siano proprio gli aspetti sopra evidenziati che possono giustificare l'utilizzazione didattica più appropriata del problema, anziché il suo inserimento in un percorso finalizzato alla costruzione di un determinato concetto.

Altra indicazione che ricaviamo in modo molto chiaro dall'analisi a posteriori è la necessità di differenziare il tipo di attività da fare in classe, a seconda che si presenti il problema in cat. 8 o nelle categorie 9 e 10.

Tenuto conto delle difficoltà incontrate dagli allievi, per un utilizzo del problema in classi di cat. 8, riteniamo fondamentale dedicare tempo all'appropriazione del compito. Si può cominciare da un'attività, individuale o a coppie, rivolta a lettura ed interpretazione del testo, seguita poi da una fase di confronto e discussione con la guida dell'insegnante che coinvolga tutta la classe. A partire dal significato dei "termini matematici" presenti nel testo stesso si può alle indicazioni riguardanti *dove e come i bulbi devono essere disposti,* e alla *richiesta del problema* di determinare il numero totale dei bulbi. Sarà proprio questa richiesta che porterà ad interrogarsi *su come contare i bulbi* e quindi a riflettere e discutere sulla *relazione "numero di bulbi - numero di segmenti che li distanziano"* e su come esprimerla.

La fase successiva riguarderà la risoluzione del problema durante la quale gli allievi lavoreranno (a coppie o in piccoli gruppi) in autonomia, dedicando poi spazio al confronto e alla discussione sulle procedure adottate e sugli errori commessi, senza penalizzare questi ultimi, ma considerandoli spunti interessanti su cui discutere per chiarirsi le idee. Potrebbe anche essere svolta un'attività laboratoriale di analisi di elaborati di allievi di altre classi o prodotti durante la gara, opportunamente scelti, in modo da favorire la discussione in classe sulle procedure corrette e sugli errori.

Un'attenzione particolare potrebbe essere riservata alle procedure poco utilizzate, o utilizzate male, che fanno intervenire la proporzionalità. L'analisi a posteriori ha messo bene in evidenza che i concetti di rapporto e di proporzionalità sono stati usati solo in pochissimi casi nella risoluzione del problema, mostrando così la scarsa familiarità degli allievi nei confronti di tali concetti e della loro utilizzazione anche in altri ambiti, come quello della geometria.

Proprio in cat. 8, si può rimanere in ambito geometrico, chiedendo agli allievi di realizzare il **disegno in scala dei due quadrati** in modo che siano rispettate tutte le condizioni indicate nel testo, oppure **utilizzare il disegno in scala per controllare la correttezza della soluzione** (la loro o quella di altri). Queste attività richiedono di riflettere sulle condizioni del problema, di farle proprie nell'applicarle, di porre attenzione al legame "numero di bulbi-numero di segmenti tra bulbi" su un lato o su tutto il perimetro, di far intervenire le proprie conoscenze sulla misurazione e sul rispetto delle proporzioni (il disegno deve essere in scala!).

Come abbiamo osservato, in cat 9 e soprattutto in cat. 10, la strategia algebrica prende il sopravvento sulle altre. In quest'ottica, il problema può configurarsi in queste categorie come strumento di diagnosi riguardo alla padronanza e all'uso corretto di equazioni e sistemi, dalla fase di nominalizzazione dell'incognita o delle incognite a quella finale della risoluzione di equazioni o sistemi. Può essere anche l'occasione per far riflettere e discutere gli allievi sulla presenza delle "marche" nella scrittura e risoluzione di un'equazione o di un sistema (come spesso si è trovato in elaborati di categorie 9 e 10, e di cui un esempio è riportato in Fig, 29), sollecitando un confronto ed una presa di coscienza collettiva sul significato di tali scritture.

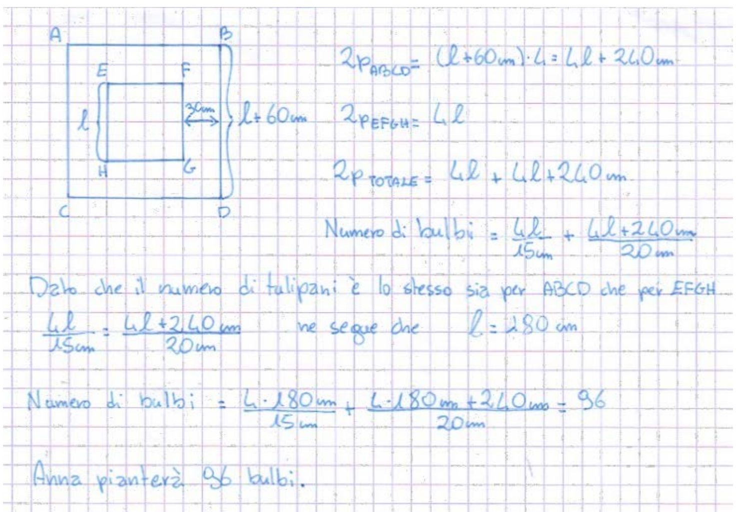
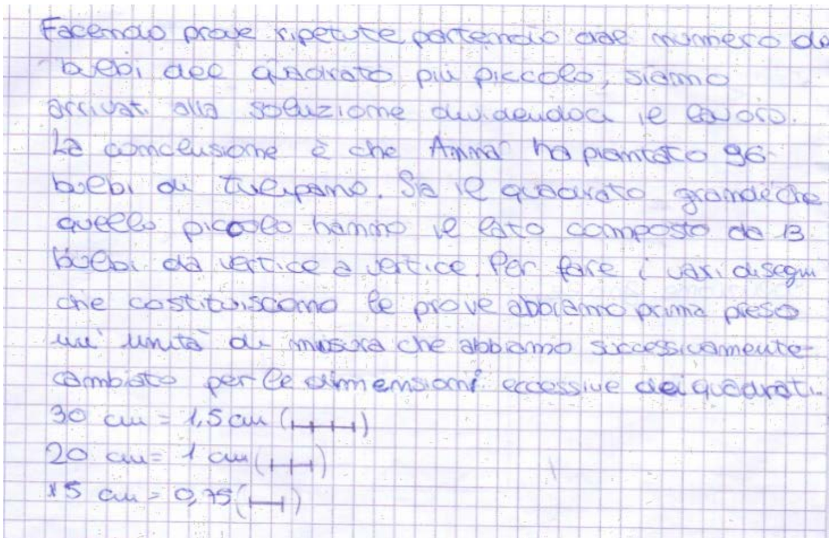


Fig. 29 (cat.9)

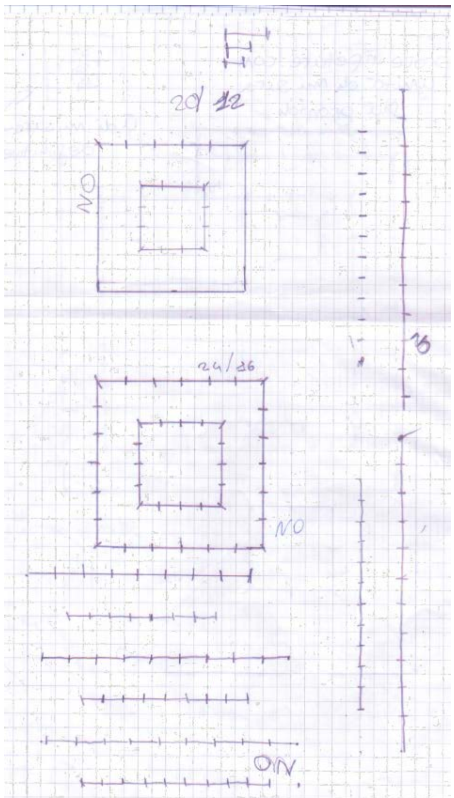
APPENDICE

Disegno in scala: sono riportati i diversi tentativi che gli allievi hanno fatto dividendosi il lavoro all'interno del gruppo, consistenti nel disegnare i lati dei due quadrati con diverse lunghezze fino ad arrivare alla "soluzione finale", con il disegno in scala dei due quadrati ed il posizionamento corretto di tutti i bulbi sul loro contorno.

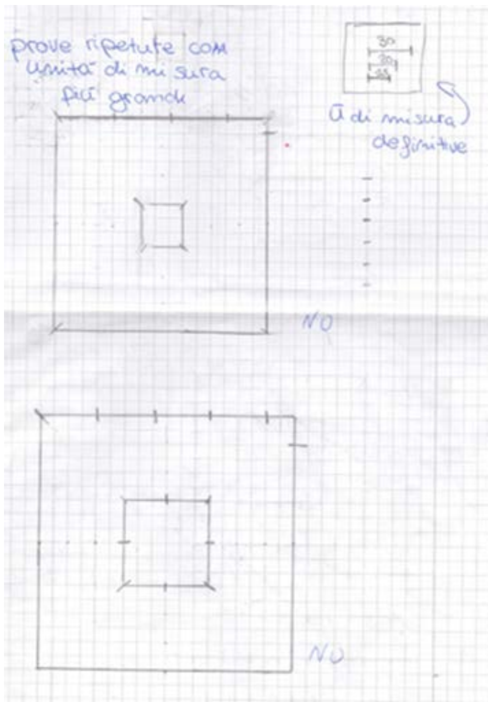


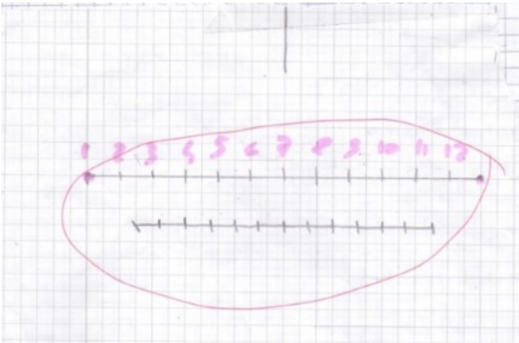
"*Facendo prove ripetute partendo dal numero dei bulbi del quadrato più piccolo,* ***siamo arrivati alla soluzione dividendoci il lavoro.*** *La conclusione è che Anna ha piantato 96 bulbi di tulipano. Sia il quadrato grande che quello piccolo hanno il lato composto da 13 bulbi da vertice a vertice. Per fare i vari disegni che costituiscono le prove abbiamo prima preso un'unità di misura che abbiamo successivamente cambiato per le dimensioni eccessive dei quadrati.*

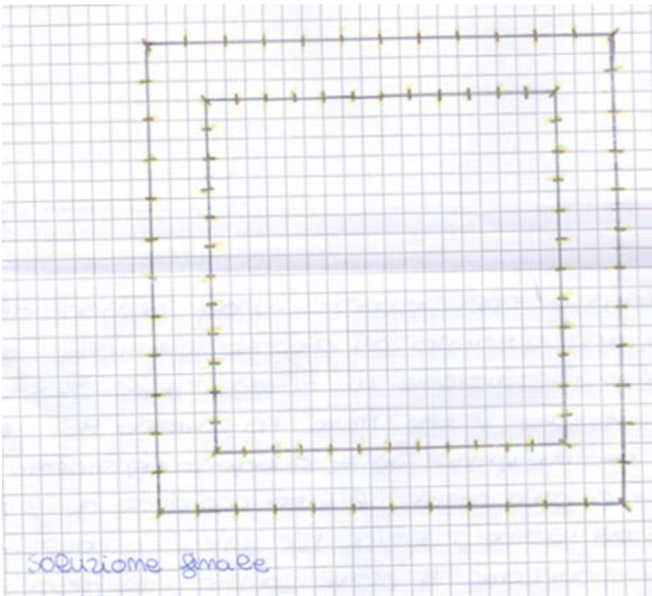
30 cm =1,5 cm *20 cm = 1 cm* *15 cm = 0,75 cm"*



"Prove ripetute con unità di misura più grande"







"Soluzione finale"

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

DALLE RETTE ALLA PASSEGGIATA DEI ROBOT / DES DROITES AUX PARCOURS DES ROBOTS

R. Iaderosa, M. Henry, A. Rizza, con la collaborazione del gruppo Funzioni / avec la collaboration du groupe Fonctions[1]

Sunto

Il seguente studio mostra il percorso dall'analisi *a posteriori* di un problema alla formulazione di un nuovo enunciato. Il cambiamento di contesto permette di testare diverse competenze, geometriche e algebriche, a diversi livelli scolari.

Résumé

Cet étude montre le parcours de l'analyse *a posteriori* d'un problème à la formulation d'un nouvel énoncé. Le changement de contexte permet de tester différentes compétences, géométriques et algébriques, à différents niveaux scolaires.

Nel corso dei lavori del gruppo "Funzioni" dell'ARMT è stato analizzato, in particolare al convegno di Charleroi del 2017, il problema 24.I.15 *Intersezione*, di cui riportiamo l'enunciato:

INTERSEZIONE (Cat. 7, 8, 9, 10)

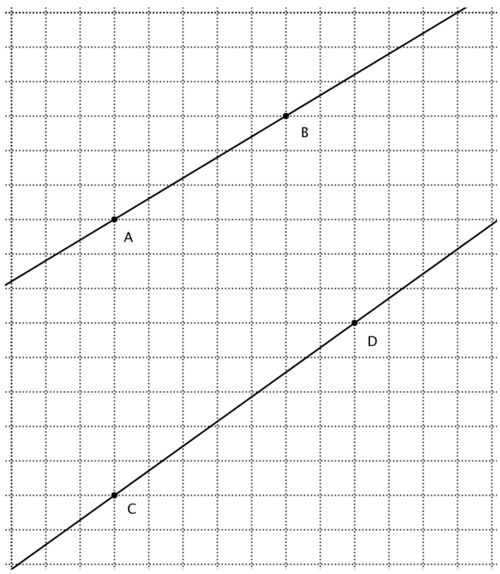
Andrea traccia due rette su un foglio di carta quadrettata: una passante per A e B, l'altra per C e D, come vedete nel disegno.

Egli osserva che se prolungasse queste due rette, su un foglio di carta quadrettata molto più esteso, le due rette si intersecherebbero.

Dove è situato questo punto d'intersezione?

(Date la sua posizione indicando di quanti quadretti ci si deve spostare verso destra e di quanti verso l'alto a partire dal punto C)

Spiegate come l'avete trovato.



[1] Partecipanti al gruppo Funzioni: Luciana Berto, Laura Branchetti, Emanuela Colombi, Valeria Ferrari, Mathias Front, Silvano Gregori, Annie Henry, Mattia Laurini, Chiara Leone, Andrea Maffia, Luc-Olivier Pochon, Salvatore Sini, Lucia Trentadue

Au cours des travaux du groupe "Fonctions" de l'ARMT, notamment lors de la rencontre de Charleroi de 2017, nous avons analysé le problème 24.I.15 *Intersection* dont nous rappelons ici l'énoncé :

INTERSECTION (Cat. 7, 8, 9, 10)

André a tracé deux droites sur une feuille de papier quadrillé, l'une passant par A et B, l'autre par C et D, comme vous le voyez sur le dessin.

Il remarque que si on prolonge ces deux droites sur une feuille quadrillée beaucoup plus grande, les deux droites vont se couper.

Où se situe ce point d'intersection ?

(Donnez sa position en indiquant de combien de carreaux il faut se déplacer vers la droite et vers le haut depuis C).

Expliquez comment vous l'avez trouvé.

Come si deduce dalla scheda per la banca dei problemi reperibile al sito http://www.projet-ermitage.org/ARMT, il problema è risultato molto difficile. Si tratta infatti di una proposta inusuale, nella quale molte informazioni devono essere reperite direttamente dal disegno, con alcune ambiguità nell'individuare quali punti delle rette, oltre a quelli dati, coincidono con nodi della quadrettatura. Inoltre nell'espressione "se prolungasse queste due rette su un foglio di carta quadrettata molto più esteso" il testo sembra suggerire la strategia da adottare per la risoluzione, cioè il completamento del disegno delle due rette; tale operazione si rivela tuttavia difficoltosa, per la necessità di disporre di un foglio molto lungo (per ottenere questo risultato gli studenti devono incollare più fogli) e per il conseguente rischio di incorrere in errori di approssimazione nell'individuare il punto di intersezione.

Comme il ressort de la fiche de la banque de problèmes disponible sur le site http://www.projet-ermitage.org/ARMT, le problème s'est avéré très difficile. Il s'agit en effet d'une proposition inhabituelle, dans laquelle beaucoup d'informations doivent être trouvées directement sur le dessin, avec quelques ambiguïtés pour déterminer quels points des droites, outre ceux donnés, coïncident avec des nœuds du quadrillage. En outre, dans l'expression "si on prolongeait ces deux droites sur une feuille de papier quadrillé beaucoup plus étendue", le texte semble suggérer la stratégie à adopter pour la résolution, c'est-à-dire l'achèvement du dessin des deux droites ; cette opération s'avère cependant difficile, en raison de la nécessité de disposer d'une feuille très longue (pour obtenir ce résultat, les élèves doivent coller plusieurs feuilles) et du risque d'erreur d'approximation lors de la détermination du point d'intersection.

Molto meno frequente, anche se di maggior successo, è risultata la strategia aritmetica, basata sull'osservazione che la distanza tra i punti A e C tende a diminuire spostandosi verso destra e in particolare che uno spostamento orizzontale di 35 quadretti da C (mcm fra 5 e 7) produce un avvicinamento verticale di 4 quadretti. Infine la strategia algebrica, consistente nell'impostazione e nella risoluzione di un sistema lineare, è stata molto rara e non sempre ben coordinata con l'osservazione del grafico.

Beaucoup moins fréquente, mais mieux réussie, la stratégie arithmétique, basée sur l'observation que la distance entre les points A et C tend à diminuer en se déplaçant vers la droite et en particulier qu'un déplacement horizontal de 35 carreaux de C (le ppcm entre 5 et 7) donne un écart vertical de 4 carreaux. Enfin, la stratégie algébrique, consistant à poser et résoudre un système linéaire, a été très rare et pas toujours bien coordonnée avec l'observation du graphique.

Tutte queste considerazioni hanno portato il gruppo Funzioni ad elaborare un nuovo testo in cui il contenuto matematico del problema è essenzialmente lo stesso (pendenza di due rette, osservazione del non parallelismo, determinazione del punto di intersezione) ma cambiano sia il modo di proporre il disegno, sia la descrizione a parole, sia le richieste. Si voleva cercare il più possibile di forzare l'utilizzo, da parte dei ragazzi, di conoscenze matematiche, a diversi livelli, che facilitassero la risposta mettendo in atto strategie alternative rispetto al semplice completamento del disegno.

Toutes ces considérations ont conduit le groupe "Fonctions" à élaborer un nouvel énoncé, dans lequel le contenu mathématique du problème est essentiellement le même (pentes de deux droites, observation du non parallélisme, détermination du point d'intersection) mais qui modifie à la fois la façon de présenter le dessin, la description de l'énoncé, et les questions. Nous voulions autant que possible obliger les enfants à utiliser des connaissances mathématiques à différents niveaux, pour induire une réponse mettant en œuvre des stratégies alternatives à la simple réalisation du dessin.

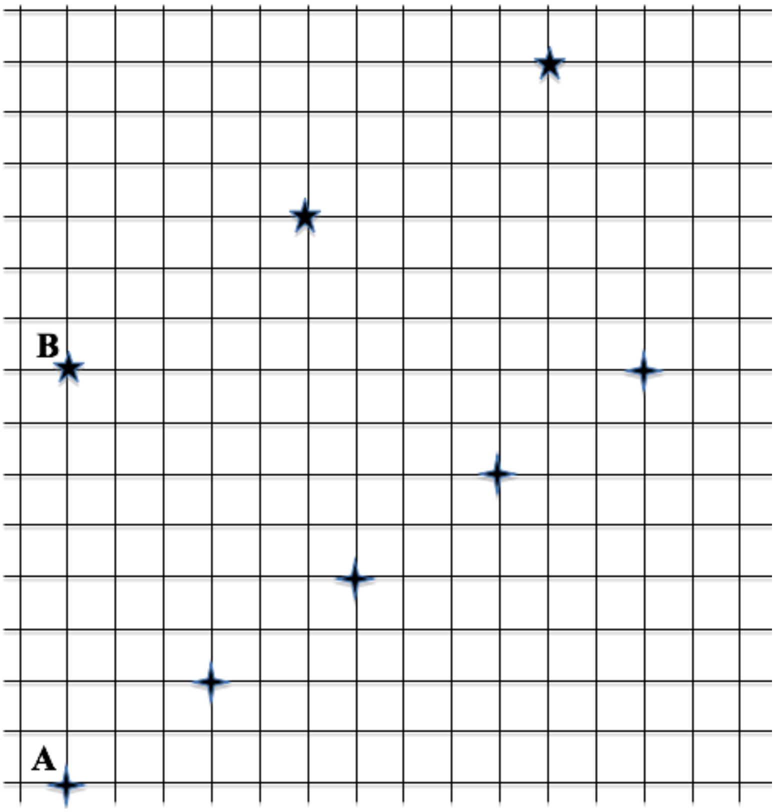
È nato così il problema *Passeggiata di robot saltatori*, ulteriormente rivisto dal gruppo problemi dell'ARMT e proposto nella prima prova del 27° RMT (27.I.15):

PASSEGGIATA DI ROBOT SALTATORI (Cat. 7, 8, 9, 10)

Agata e Beatrice hanno programmato due robot saltatori per farli muovere in modo regolare su una griglia quadrettata. Ad ogni salto i due robot lasciano una impronta sulla griglia, indicata sulla figura con una stellina.

- Con ogni salto, il robot di Agata si sposta di 3 quadretti orizzontalmente verso destra, e di 2 quadretti verticalmente verso l'alto;
- Con ogni salto, il robot di Beatrice si sposta di 5 quadretti orizzontalmente, verso destra, e di 3 quadretti verticalmente verso l'alto.

Il robot di Agata parte della posizione A, mentre quello di Beatrice parte della posizione B. Su questa figura potete vedere le impronte dei loro primi salti.



Prolungando la quadrettatura verso destra e verso l'alto, ci sarà un punto d'intersezione sulla griglia quadrettata, sulla quale si troveranno le loro due impronte?

Se sì, quanti salti dovrà fare ognuno dei robot per arrivare al punto in cui le loro impronte si sovrappongono?

Se no, quanti salti dovrà fare ciascuno per arrivare al punto in cui le loro impronte hanno la distanza minima?

Spiegate come avete fatto per trovare le vostre risposte.

Ainsi est né le problème du *Parcours de robots sauteurs*, revu plus en détail par le groupe ‘’Problèmes’’ de l’ARMT et proposé dans la première épreuve du 27^{e} RMT (27.I.15) :

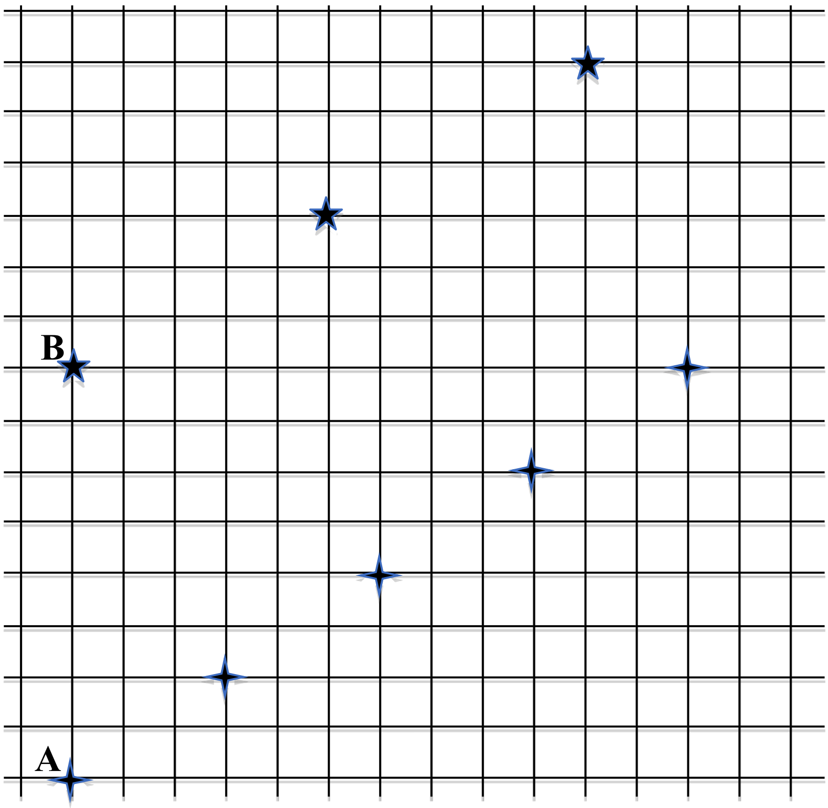
PARCOURS DE ROBOTS SAUTEURS (Cat. 7, 8, 9, 10)

Agathe et Béatrice ont programmé leurs robots sauteurs pour les faire se déplacer régulièrement sur un quadrillage. À chaque saut, les deux robots laissent une empreinte sur la grille, indiquée sur la figure par les étoiles.

- À chaque saut, le robot d'Agathe se déplace de 3 cases horizontalement vers la droite, et de 2 cases verticalement vers le haut ;

- À chaque saut, le robot de Béatrice se déplace de 5 cases horizontalement vers la droite, et de 3 cases verticalement vers le haut.

Le robot d'Agathe part de la position A, et celui de Béatrice part de la position B. Sur cette figure, on voit les empreintes de leurs premiers sauts.



En prolongeant le quadrillage vers la droite et vers le haut, y a-t-il un point d’intersection du quadrillage sur lequel on trouvera leurs deux empreintes ?

Si oui, combien de sauts devra faire chacun des robots pour arriver au point où leurs empreintes se superposent ?

Si non, combien de sauts devra faire chacun des robots pour arriver au point où la distance entre leurs empreintes est la plus petite possible ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

Vediamo nel dettaglio le principali modifiche e la relativa motivazione:
Voici en détail les principales modifications et leurs motivations :

Oggetto della modifica	Modifica	Motivazione
Disegno	Uso di punti al posto delle rette	Non indurre necessariamente l'idea di prolungare i segmenti di retta fino ad incontrarsi Eliminare l'ambiguità su quali punti delle rette coincidono con nodi della quadrettatura e quali no Lasciare la possibilità di percorsi diversi, come un percorso a scala (suggerito dal testo con la specifica degli spostamenti orizzontali e verticali) Lasciare la libertà di focalizzarsi solo sui punti per calcolare più facilmente la pendenza delle rette (a questo scopo i punti sono più numerosi rispetto al problema Intersezione per favorire la scoperta di una regolarità)
Testo: parte descrittiva	Presenza della descrizione a parole dei percorsi dei due robot a integrazione del disegno	Favorire il coordinamento fra il registro grafico e quello verbale
Testo: richieste	Introduzione di una richiesta preliminare sull'esistenza di un punto comune Cambiamento nella richiesta: dal numero di quadretti orizzontali/verticali al numero di salti Proposta della ricerca di una distanza minima	Collegare il concetto di pendenza di una retta a quello di parallelismo di due rette Focalizzare l'attenzione sul processo discreto dei salti piuttosto che sulla traiettoria dei robot (processo continuo) Precisazione del concetto di distanza

Objet des modifications	Modifications	Motivations
Dessin	Utilisation de points plutôt que de droites	Ne pas induire nécessairement l'idée de prolonger les segments de droites jusqu'à leur intersection. Éliminer l'ambiguïté sur les points des droites qui coïncident ou non avec des nœuds du quadrillage. Laisser la possibilité de parcours différents, comme un parcours en escalier (suggéré par l'énoncé avec la description des déplacements horizontaux et verticaux). Laisser la liberté de se concentrer uniquement sur les points pour calculer plus facilement les pentes des droites (pour cela les points sont plus nombreux que dans le problème *Intersection* pour favoriser la découverte d'une régularité).
Énoncé : Partie descriptive	Présence de la description verbale des parcours des deux robots pour compléter le dessin	Favoriser le lien entre le registre graphique et le registre verbal
Énoncé : Les questions	Introduction d'une question préliminaire sur l'existence d'un point commun. Modification de la demande : passage du nombre de carreaux horizontaux/verticaux au nombre de sauts. Objectif de la recherche d'une distance minimale.	Relier le concept de pente d'une droite à celui de parallélisme de deux droites. Focaliser l'attention sur les variables discrètes des sauts plutôt que sur les trajectoires des robots (variables continues). Clarification de la notion de distance.

Il problema, nella sua seconda versione, ha avuto una migliore riuscita rispetto alla prima versione, anche se i punteggi medi, piuttosto bassi, ne evidenziano la complessità.
Le problème, dans sa seconde version, a eu un plus grand succès que dans la première version, même si les scores moyens, assez faibles, en montrent la complexité.

Punteggi del problema *Intersezione*/ Scores du problème *Intersection* :

Points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 7	654	153	38	9	12	866	0,4
Cat. 8	438	124	43	18	21	644	0,5
Cat. 9	98	39	10	4	6	157	0,6
Cat. 10	82	34	3	12	26	157	1,1
Tot	**1272**	**350**	**94**	**43**	**65**	**1824**	**0,5**

Punteggi del problema *Passeggiata di robot saltatori*/ Scores du problème *Parcours de robots sauteurs*

Points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 7	658	322	146	62	85	1273	0,9
Cat. 8	383	218	126	59	70	856	1,1
Cat. 9	81	55	27	13	32	208	1,3
Cat. 10	55	32	33	21	52	193	1,9
Tot	**1177**	**627**	**332**	**155**	**239**	**2530**	**1,1**

Alcune delle difficoltà riscontrate nel problema Intersezione, sono state meglio comprese nel problema dei robot; tuttavia, data la ricchezza e la complessità della situazione, altre questioni sono emerse, in alcuni casi non previste dall'analisi a priori.
Certaines des difficultés rencontrées dans le problème *Intersection* ont été mieux comprises dans le problème des robots, cependant, étant donné la richesse et la complexité de la situation, d'autres questions sont apparues, dans certains cas non prévues par l'*analyse a priori*.

Analizzando la nuova formulazione, emergono scelte precise che sono state ampiamente discusse tra gli estensori del nuovo problema "Passeggiata dei robot saltatori".
Volutamente, come già evidenziato nella tabella precedente, non sono state tracciate le rette che uniscono i punti che descrivono le posizioni dei robot, per evitare di forzare una visione del continuo che rimandasse necessariamente alle rette.
Avec l'analyse de la nouvelle formulation, apparaissent des choix précis qui ont été largement discutés par les concepteurs du nouveau problème *Parcours de robots sauteurs*.
Délibérément, comme le montre la figure donnée dans l'énoncé, on n'a pas tracé les droites reliant les points décrivant les positions des robots, pour éviter d'induire une vision du continu qui nécessairement aurait renvoyé au tracé de ces droites.

In questo modo, gli studenti più piccoli (cat.7 e 8) hanno avuto modo di ragionare sul discreto descrivendo il percorso dei due robot attraverso un disegno "a scala", come quello riportato qui di seguito, evidenziando le due componenti, orizzontale e verticale, degli spostamenti in diagonale (figura 1.a), oppure (cosa che ha fatto la maggioranza) disegnando i percorsi solo con la sequenza di punti isolati (figura 1.b).
Ainsi, les plus jeunes élèves (cat.7 et 8) ont eu l'occasion de raisonner sur le discret en décrivant les parcours des deux robots, ou en réalisant un dessin "en escalier", comme le montrent les dessins ci-dessous, en soulignant les deux composantes horizontale et verticale des déplacements en diagonale (figure 1.a), ou (ce qui a été le cas pour la plupart) en donnant les parcours uniquement par la suite de points isolés (figure 1.b).

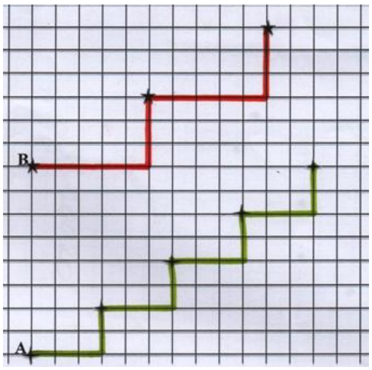


Figura 1.a/ Figure 1.a

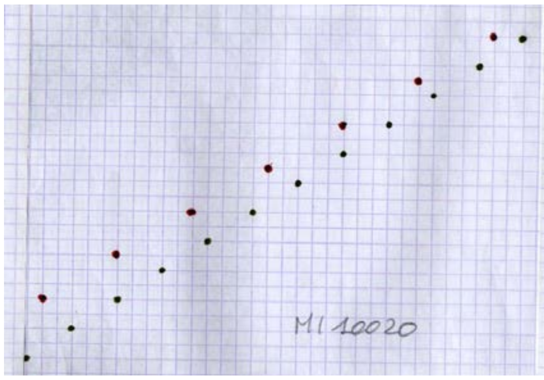


Figura 1.b/ Figure 1.b

Molti studenti, soprattutto di categoria 7, hanno utilizzato quest'ultima strategia, che, se portata avanti con pazienza, evidenzia aspetti possibili da elaborare poi anche aritmeticamente.
Ad esempio, si può osservare che le distanze in verticale e in orizzontale diminuiscono procedendo nei salti successivi e che dopo 8 salti la distanza in verticale tra le posizioni dei due robot diminuisce di un quadretto; soprattutto è importante rilevare che la rappresentazione 1.b favorisce meglio della 1.a l'individuazione del punto in cui i due robot si incontrano.
Beaucoup d'élèves, surtout de catégorie 7, ont utilisé cette dernière stratégie, qui, si elle est menée avec patience, met aussi en évidence la possibilité d'utiliser l'arithmétique.
Par exemple, on peut observer que les distances verticales et horizontales diminuent en suivant les sauts successifs et qu'après 5 sauts de A et 3 sauts de B, la distance verticale entre les empreintes des deux robots diminue d'un carreau. Surtout, il est important de noter que la représentation 1.b favorise mieux que 1.a l'identification des points où les deux robots laissent leurs deux empreintes.

La strategia aritmetica si è rivelata la più vantaggiosa e disponibile anche agli allievi delle categorie più basse. Riportiamo un elaborato di cat.7 che spiega con dettaglio e precisione i passaggi necessari (figura 2):
La stratégie arithmétique s'est avérée la plus avantageuse et disponible même pour les élèves des catégories inférieures. Voici une copie de cat.7 qui explique en détail, avec précision, les étapes nécessaires (figure 2) :

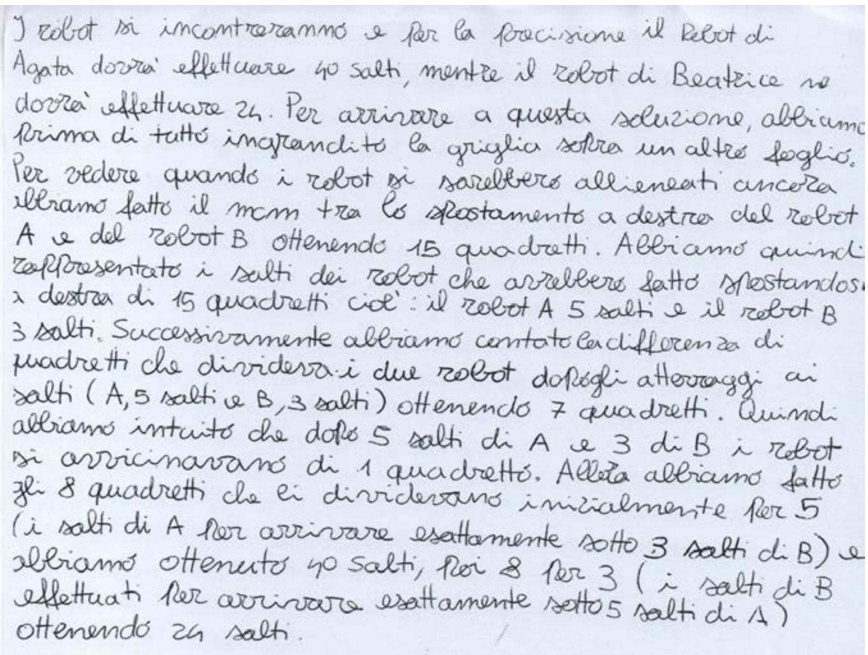

I robot si incontreranno e per la precisione il robot di Agata dovrà effettuare 40 salti, mentre il robot di Beatrice ne dovrà effettuare 24. Per arrivare a questa soluzione, abbiamo prima di tutto ingrandito la griglia sopra un altro foglio. Per vedere quando i robot si sarebbero allineati ancora abbiamo fatto il mcm tra lo spostamento a destra del robot A e del robot B ottenendo 15 quadretti. Abbiamo quindi rappresentato i salti dei robot che avrebbero fatto spostandosi a destra di 15 quadretti cioè: il robot A 5 salti e il robot B 3 salti. Successivamente abbiamo contato la differenza di quadretti che dividerà i due robot dopo gli atterraggi ai salti (A, 5 salti e B, 3 salti) ottenendo 7 quadretti. Quindi abbiamo intuito che dopo 5 salti di A e 3 di B i robot si avvicinavano di 1 quadretto. Allora abbiamo fatto gli 8 quadretti che ci dividevano inizialmente per 5 (i salti di A per arrivare esattamente sotto 3 salti di B) e abbiamo ottenuto 40 salti, poi 8 per 3 (i salti di B effettuati per arrivare esattamente sotto 5 salti di A) ottenendo 24 salti.

Figura 2/ Figure 2

Les robots passeront par un même point et précisément le robot d'Agathe devra effectuer 40 sauts, alors que le robot de Béatrice ne devra en effectuer que 24. Pour arriver à cette solution, nous avons tout d'abord agrandi la grille sur une autre feuille. Pour voir quand les robots vont s'aligner de nouveau, nous avons fait le ppcm des sauts entre le robot mobile A et le robot B vers la droite, obtenant 15 carrés. Nous avons donc représenté les sauts *que les robots feront vers la droite sur 15 carrés, soit : pour le robot A 5 sauts et pour le robot B 3 sauts. Ensuite, nous avons compté la différence de carrés qui séparent les deux robots dans ces positions et nous nous sommes rendu compte qu'après 5 sauts de A et 3 de B les robots se sont rapprochés de 1 carré. Alors nous avons multiplié les 8 carrés qui les séparaient initialement par 5 (les sauts de A pour obtenir exactement 3 sauts de B) et nous avons obtenu 40 sauts, puis 8 par 3 (les sauts de B effectués pour obtenir exactement les 5 sauts de A) pour obtenir 24 sauts.*

Talvolta gli allievi più piccoli (cat. 7) riescono ad intuire che il m.c.m. fra 3 e 5 (ampiezze degli spostamenti in orizzontale) è collegato alle posizioni finali dei due tipi di salto, ma non riescono a portare a termine il ragionamento per determinare il punto di intersezione.
Parfois, les plus jeunes élèves (cat. 7) parviennent à deviner que le ppcm de 3 et 5 (amplitudes des déplacements horizontaux) est lié aux positions finales des deux types de saut, mais ne parviennent pas à mener à bien le raisonnement pour déterminer le point d'intersection des empreintes.

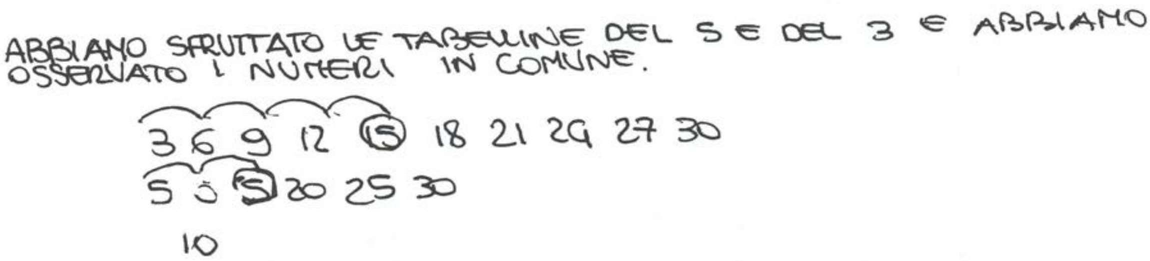


Figura 3/ Figure 3

Nous avons utilisé les tables de multiplication du 5 et du 3 et nous avons observé les nombres en commun.

Nell'elaborato precedente, dopo l'individuazione del mcm, gli allievi concludono che: "il robot di Agata dovrà fare 5 salti, mentre il robot di Beatrice dovrà fare 3 salti".
In un paio di casi, la descrizione delle distanze è stata fatta in cm invece che utilizzando la quadrettatura (figura 4).
Dans la copie précédente, après l'identification du ppcm, les élèves concluent que : "le robot d'Agathe devra faire 5 sauts, alors que le robot de Béatrice devra faire 3 sauts".
Dans quelques cas, la mesure des distances a été faite en cm plutôt qu'en utilisant le quadrillage (figure 4) :

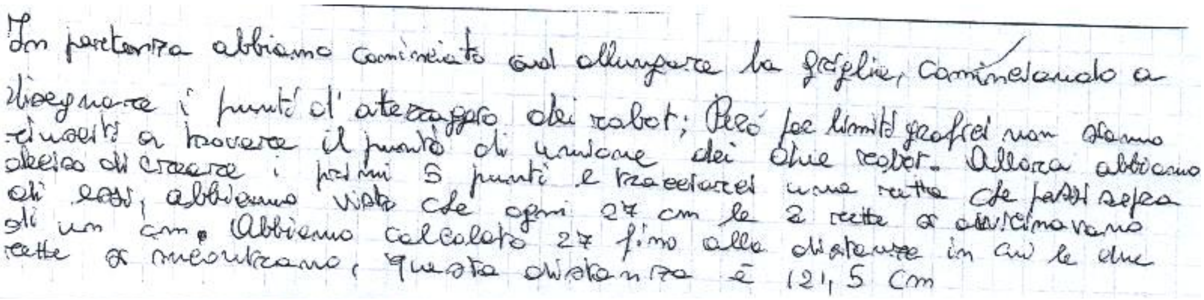

In partenza abbiamo cominciato ad allungare la griglie, cominciando a disegnare i punti d'atterraggio dei robot; però per limiti grafici non siamo riusciti a trovare il punto di unione dei due robot. Allora abbiamo deciso di creare i primi 5 punti e tracciare una retta che passi per essi, abbiamo visto che ogni 27 cm le 2 rette si avvicinavano di un cm. Abbiamo calcolato 27 fino alla distanza in cui le due rette si incontrano, questa distanza è 121,5 cm

Figura 4/ Figure 4

Au début, nous avons commencé par allonger la grille, en commençant par dessiner les points de passage des robots ; cependant, en raison des limitations graphiques, nous n'avons pas pu trouver le point de rencontre des deux robots. Nous avons donc décidé de créer les 5 premiers points et de tracer une ligne qui les relie, nous avons vu que tous les 27 cm les deux lignes sont rapprochées d'un cm. Nous avons calculé 27 jusqu'à la distance où les deux lignes se rencontrent, cette distance est de 121,5 cm.

Se nell'elaborato della figura 3 la ricerca del minimo comune multiplo tra la lunghezza degli spostamenti in orizzontale del primo e del secondo robot resta solo implicita, nel seguente elaborato (figura 5) essa è meglio spiegata e vantaggiosamente utilizzata:

Si, dans la copie de la figure 3, la recherche du plus petit commun multiple des longueurs des déplacements horizontaux du premier et du second robot reste implicite, elle est mieux expliquée et avantageusement utilisée dans la copie suivante, figure 5 :

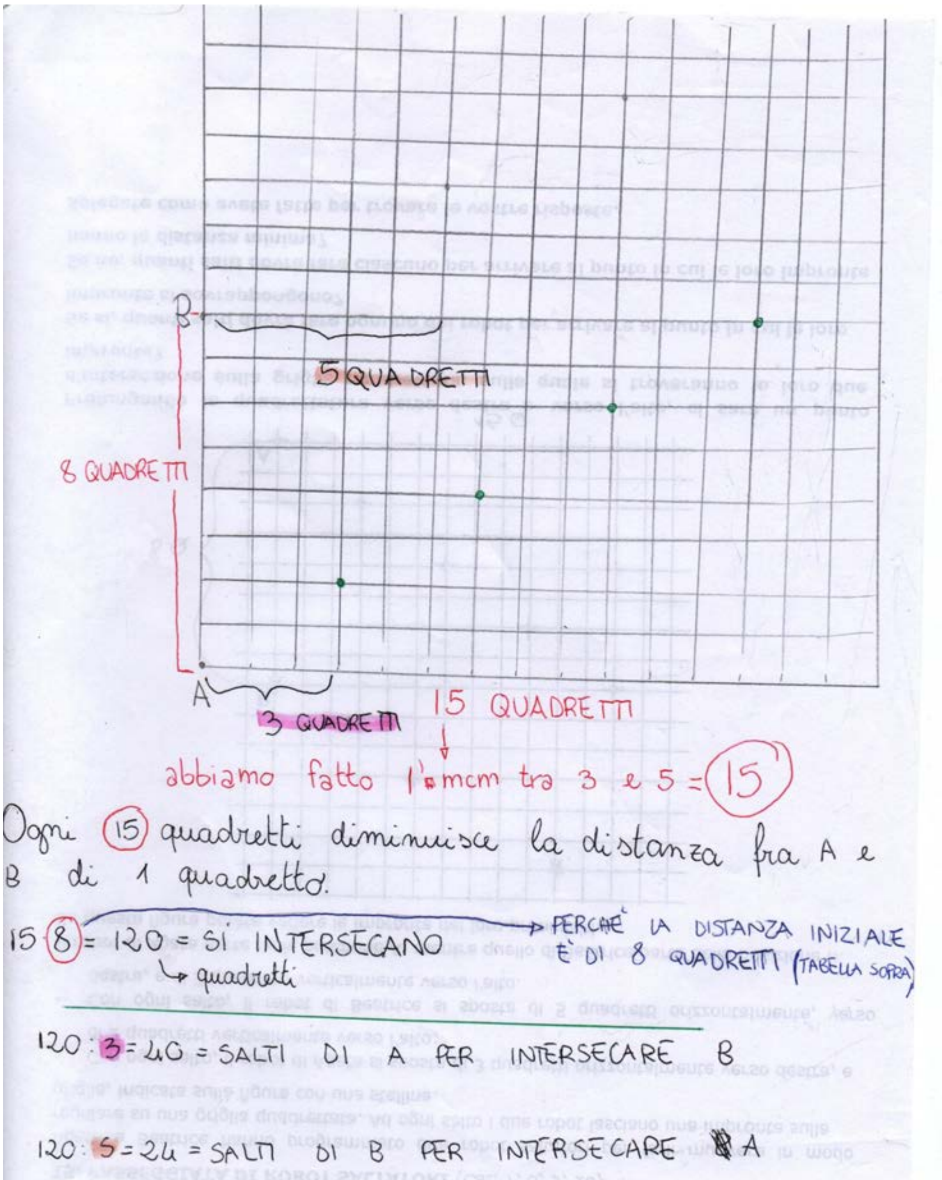
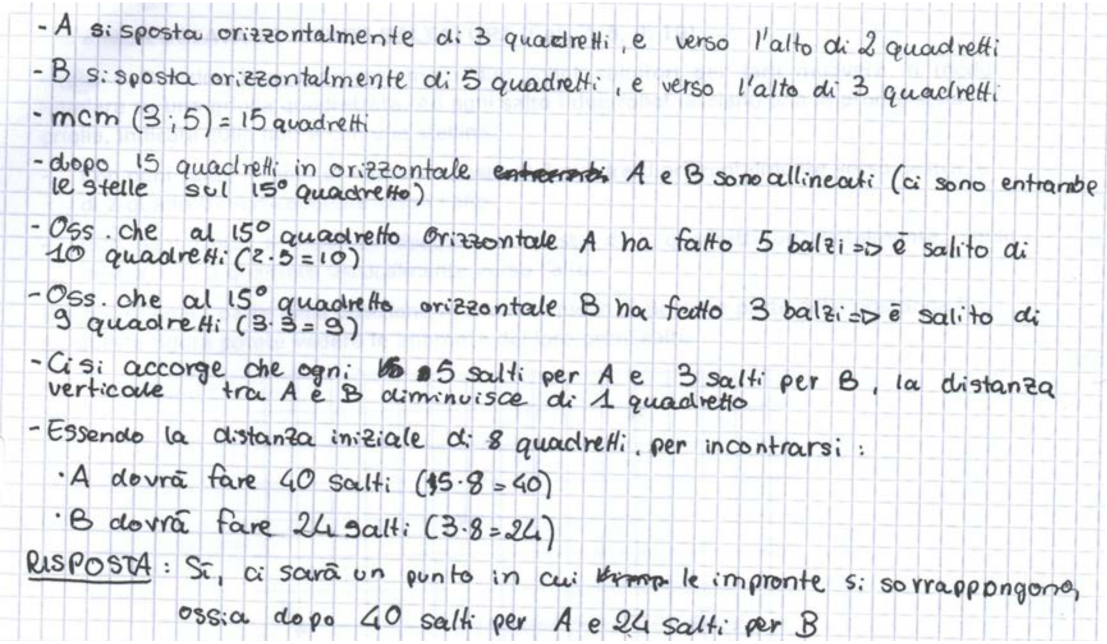


Figura 5/ Figure 5

Nous avons fait le ppcm de 3 et 5 = 15
Tous les 15 carreaux, la distance entre A et B diminue de 1 carreau.
15 x 8 = 120 carreaux = ils se rencontrent
Parce que la distance initiale est de 8 carreaux (tableau ci-dessus)
120 : 3 = 40 sauts de A pour rencontrer B
120 : 5 = 24 sauts de B pour rencontrer A

La stessa strategia aritmetica è utilizzata nell'elaborato seguente (figura 6) di cat.10 ma con una maggior chiarezza e qualità delle argomentazioni, che non rendono più necessario il ricorso al disegno:
La même stratégie arithmétique est utilisée dans la copie suivante (figure 6), de cat. 10, mais avec une plus grande clarté et de qualité des arguments, ce qui ne rend plus nécessaire le recours au dessin :



- A si sposta orizzontalmente di 3 quadretti, e verso l'alto di 2 quadretti
- B si sposta orizzontalmente di 5 quadretti, e verso l'alto di 3 quadretti
- mcm (3 ; 5) = 15 quadretti
- dopo 15 quadretti in orizzontale ~~entrambi~~ A e B sono allineati (ci sono entrambe le stelle sul 15° quadretto)
- Oss. che al 15° quadretto orizzontale A ha fatto 5 balzi => è salito di 10 quadretti (2 · 5 = 10)
- Oss. che al 15° quadretto orizzontale B ha fatto 3 balzi => è salito di 9 quadretti (3 · 3 = 9)
- Ci si accorge che ogni ~~15~~ 5 salti per A e 3 salti per B, la distanza verticale tra A e B diminuisce di 1 quadretto
- Essendo la distanza iniziale di 8 quadretti, per incontrarsi:
  · A dovrà fare 40 salti (5 · 8 = 40)
  · B dovrà fare 24 salti (3 · 8 = 24)

RISPOSTA: Sì, ci sarà un punto in cui le impronte si sovrappongono, ossia dopo 40 salti per A e 24 salti per B

Figura 6/ Figure 6

- A se déplace horizontalement de 3 carreaux, et vers le haut de 2 carreaux
- B se déplace horizontalement de 5 carreaux, et vers le haut de 3 carreaux
- PPCM (3 ; 5) = 15 carreaux
- après 15 carreaux horizontalement, A et B sont alignés (avec les deux étoiles sur le 15e carreau)
- On observe qu'au 15e carreau horizontal A a fait 5 sauts et est monté de 10 carreaux (2 . 5 = 10)
- On observe qu'au 15e carré horizontal B a fait 3 sauts et est monté de 9 carreaux (3 . 3 = 9)
- On remarque que tous les 5 sauts pour A et 3 sauts pour B, la distance verticale entre A et B diminue de 1 carré
- La distance initiale était de 8 carreaux, pour se rencontrer :
. A devra faire 40 sauts (5 x 8 = 40)
. B devra faire 24 sauts (3 x 8 = 24)

Réponse : Oui, il y aura un point où les empreintes se superposent, c'est-à-dire après 40 sauts pour A et 24 sauts pour B

Questi aspetti risolutivi più semplici o intuitivi sono importanti e pure inducono i ragazzi a ritrovare e riscoprire le loro esperienze matematiche, e in qualche modo ci fanno vedere anche quali siano ancora le loro confusioni a livello di linguaggio e di concetti. Si pensi alla difficoltà riscontrata, per la categoria 7, nel confrontarsi con l'idea di parallelismo: alcuni studenti affermano che le rette sono parallele, ma poi parlano della loro intersezione in un punto più "lontano", altri negano che ci sia una intersezione, ma poi cercano il punto in cui si incontreranno…

Ces essais de résolution plus simples ou intuitifs sont importants et incitent aussi les élèves à retrouver et à redécouvrir leurs expériences mathématiques, et d'une certaine manière ils nous montrent aussi quelles sont encore leurs confusions au niveau du langage et des concepts. Il suffit de penser à la difficulté pour la catégorie 7 de se confronter à l'idée de parallélisme : certains élèves disent que les droites sont parallèles, mais ensuite parlent de leur intersection à un point plus "lointain", d'autres nient qu'il y ait une intersection, Mais ils cherchent où ils se rencontreront...

Un'osservazione interessante, proprio sul piano delle ambiguità di linguaggio, riguarda sempre la risposta fornita dopo la rappresentazione "a scala" (figura 1.a). Elaborati di categorie 7 e 8 in cui abbiamo trovato la risposta "non si incontrano", gli allievi si sono concentrati sulla richiesta della *distanza minima* delle posizioni raggiunte dai due robot, come era richiesto nel testo. Se si osserva la rappresentazione "a scala", questa mostra che inizialmente i tracciati delle due component (orizzontale e verticale) del vettore spostamento per ciascun robot non si intersecano, mentre successivamente si sovrappongono in punti intermedi diversi dalla posizione di arrivo del salto (vedi ad esempio i punti V e W in figura 7). Tale distanza è stata interpretata da alcuni allievi come la *distanza minima* tra i due percorsi dei robot.

Une observation intéressante, précisément à propos des ambiguïtés de langage, concerne toujours la réponse donnée après la représentation "en escalier" (figure. 1.a). Dans les copies de catégories 7 et 8 où nous avons trouvé la réponse "*ne se rencontrent pas*", les élèves se sont concentrés sur la recherche de la distance minimum des positions atteintes par les deux robots, comme il était demandé dans l'énoncé. Si l'on observe la représentation "en escalier", celle-ci montre qu'au début les traces pour chaque robot des deux composantes (horizontale et verticale) du vecteur déplacement ne se croisent pas, alors qu'elles se chevauchent par la suite en des points intermédiaires différents de la position d'arrivée du saut (voir, par exemple, les points V et W de la figure 7). Cette distance a été interprétée par certains élèves comme la *distance minimale* entre les deux parcours des robots.

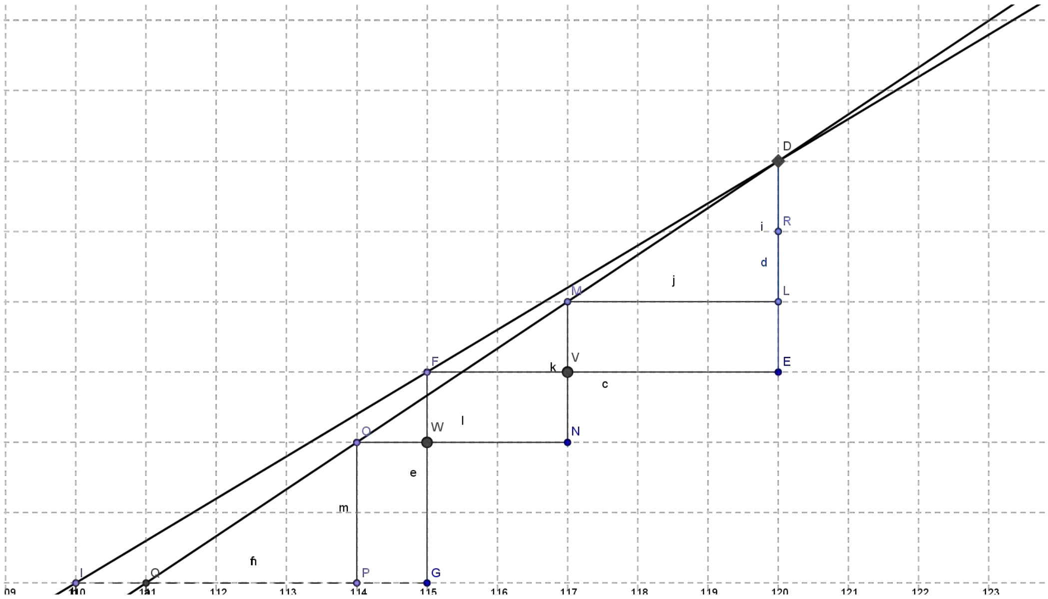
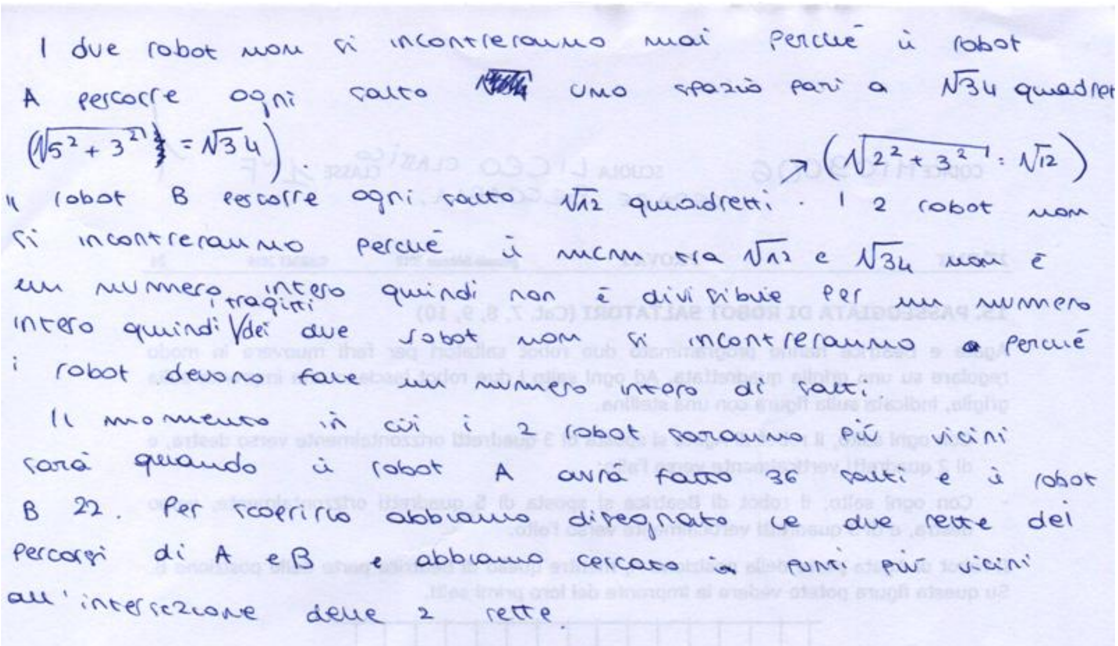


Figura 7/ Figure 7

Anche in questo elaborato, il comparire di numeri non interi per il numero dei salti conduce i ragazzi a concludere che non ci sia una intersezione, e che esista una distanza minima:
Aussi dans la copie suivante (figure 8), l'apparition de nombres non entiers pour les nombres de sauts conduit les élèves à conclure qu'il n'y a pas d'intersection, et qu'il existe une distance minimale :



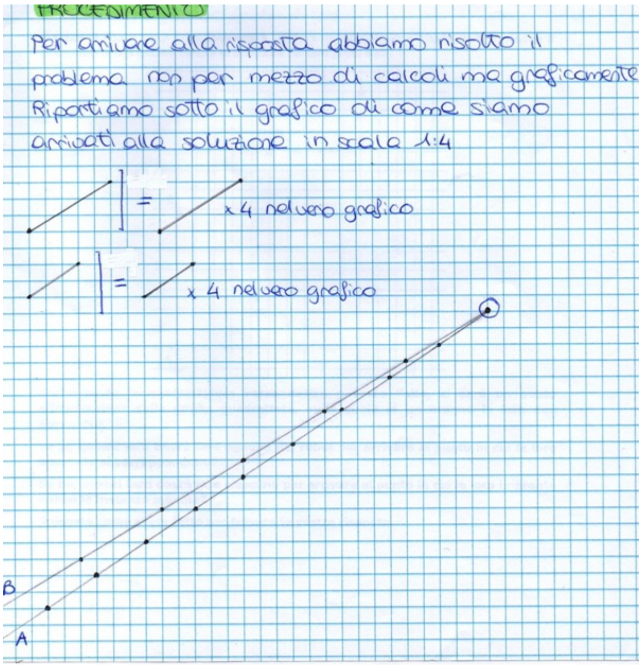
I due robot non si incontreranno mai perché i robot A percorre ogni salto uno spazio pari a $\sqrt{34}$ quadret[ti] $\left(\sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34}\right)$ $\left(\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{12}\right)$ il robot B percorre ogni salto $\sqrt{12}$ quadretti. I 2 robot non si incontreranno perché il mcm tra $\sqrt{12}$ e $\sqrt{34}$ non è un numero intero quindi non è divisibile per un numero intero quindi i tragitti dei due robot non si incontreranno perché i robot devono fare un numero intero di salti.
Il momento in cui i 2 robot saranno più vicini sarà quando i robot A avrà fatto 36 salti e i robot B 22. Per scoprirlo abbiamo disegnato le due rette dei percorsi di A e B e abbiamo cercato i punti più vicini all'intersezione delle 2 rette.

Figura 8/ Figure 8

Les deux robots ne se rencontreront jamais car le robot A parcourt à chaque saut une distance de $\sqrt{34}$ carreaux ($\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$)
A chaque saut le robot B parcourt $\sqrt{12}$ carreaux ($\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{12}$)
Les deux robots ne se rencontreront pas car le ppcm de $\sqrt{12}$ et $\sqrt{34}$ n'est pas un entier donc il n'est pas divisible par un nombre entier donc les parcours des deux robots ne se rencontreront pas car les deux robots doivent faire un nombre entier de sauts. Le moment où les deux robots seront les plus proches sera celui où le robot A aura effectué 36 sauts et le robot B 22. Pour le savoir, nous avons tracé les deux lignes des chemins de A et B et nous avons cherché les points les plus proches de l'intersection des deux lignes.

L'elaborato di figura 8 introduce un'ulteriore questione: come è già stato osservato, a differenza del problema *Intersezione*, la richiesta del problema non è di localizzare il punto di intersezione ma di contare quanti salti compie ciascun robot per arrivare a tale punto. Nella figura del testo sono rappresentati, attraverso i punti che indicano le posizioni successive dei robot, 2 salti del robot A e 5 salti del robot B. Ogni salto di A si compone di uno spostamento orizzontale di 3 quadretti, verticale di 2 quadretti e "diagonale" di $\sqrt{13}$ e ogni salto di B si compone di uno spostamento orizzontale di 5 quadretti, verticale di 3 quadretti e "diagonale" di $\sqrt{34}$ quadretti. Quindi nel salto sono presenti molteplici informazioni e chi si concentra sullo spostamento "diagonale" rischia di essere penalizzato, per la difficoltà di gestire numeri irrazionali che richiedono dimestichezza con il calcolo simbolico (radicali) o necessità di approssimazione.
La copie de la figure 8 introduit une autre question : comme cela a déjà été dit, à la différence du problème "*Intersection*", le but de ce problème n'est pas de localiser le point d'intersection mais de compter combien de sauts chaque robot doit accomplir pour arriver à ce point.
Dans la figure de l'énoncé, avec les points qui indiquent les positions successives des robots, sont représentés 4 sauts du robot A et 2 sauts du robot B. Chaque saut de A se compose d'un déplacement horizontal de 3 carreaux, vertical de 2 carreaux et "diagonal" de $\sqrt{13}$ carreaux et chaque saut de B se compose d'un déplacement horizontal de 5 carrés et vertical de 3 carrés et "diagonal" de $\sqrt{34}$ carreaux. De nombreuses informations sont donc présentes dans les sauts et ceux qui se concentrent sur le déplacement "diagonal" risquent d'être pénalisés, en raison de la difficulté de gérer des nombres irrationnels qui nécessitent une familiarisation avec le calcul symbolique (les radicaux) ou la nécessité d'une approximation.

Molto interessanti sono poi gli intrecci tra gli atteggiamenti degli allievi e le loro conoscenze matematiche nel segmento scolare delle categorie 9 e 10.
In un elaborato (figura 9), ad esempio, c'è la riduzione in scala 1:4 che consente di gestire in maniera ottimale la risoluzione.
Les liens entre les procédures des enfants et leurs connaissances mathématiques au niveau scolaire des catégories 9 et 10 sont également très intéressants.
Dans cette copie (figure 9), par exemple, une réduction à l'échelle 1:4 permet de d'obtenir la résolution de manière optimale.



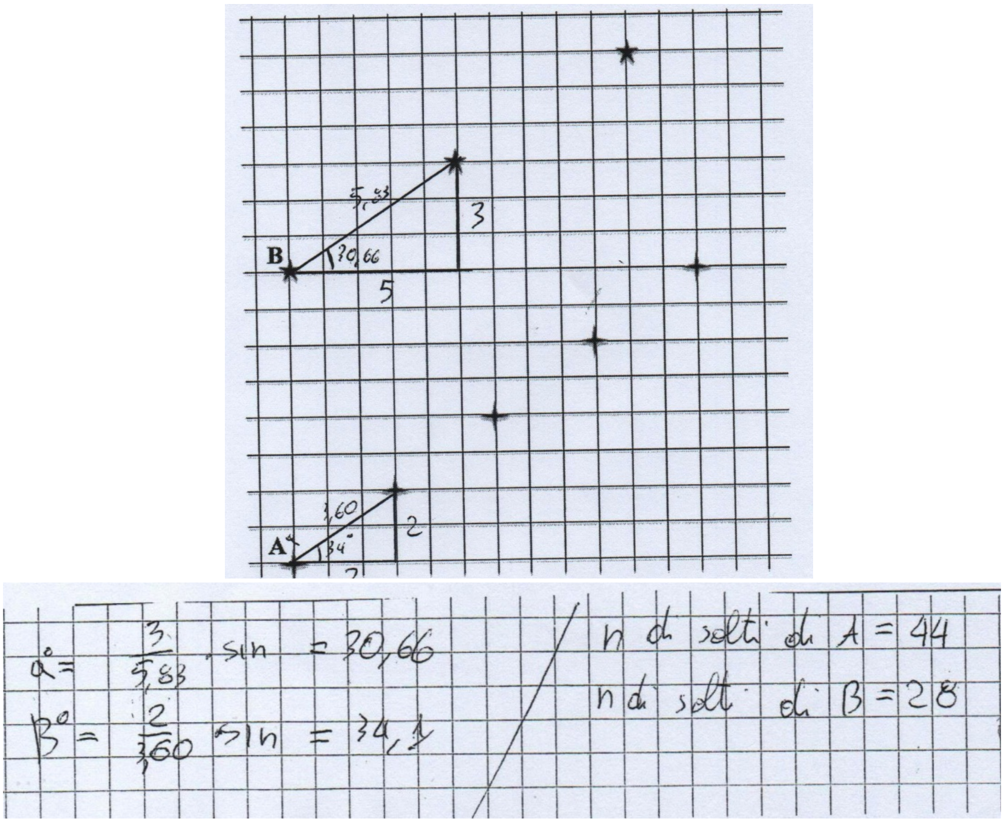
Pour trouver la réponse, nous avons résolu le problème non par le calcul, mais graphiquement.
Voici le graphique qui montre comment nous sommes arrivés à la solution avec une échelle 1:4

× 4 dans le vrai graphique

× 4 dans le vrai graphique

Figura 9/ Figure 9

In un altro caso (figura 10), abbiamo trovato il tentativo, purtroppo infruttuoso, di descrivere la determinazione delle posizioni dei due robot dopo i salti attraverso funzioni goniometriche:
Dans un autre cas (figure 10), nous avons trouvé la tentative, malheureusement infructueuse, de décrire la détermination des positions des deux robots après les sauts par des fonctions trigonométriques :



Traduction:
nb de sauts de A = 44
nb de sauts de B = 28

Figura 10/ Figure 10

Per gli studenti di tali categorie (9 e 10), alle strategie più frequenti di seguire il disegno ampliandolo ed evidenziando con varie modalità punti, spostamenti, salti, si sono affiancate procedure in cui gli allievi hanno rappresentato le rette che congiungono le posizioni dei due robot con la loro equazione, mettendo in atto metodi analitici. In questi casi, la scelta più frequente dell'origine del riferimento cartesiano è stata quella del punto A; è però da rilevare che in nessun elaborato abbiamo ritrovato un accenno al disegno degli assi cartesiani, che pure avrebbe potuto essere presenti, visto che i ragazzi avevano già fatto delle esperienze con la geometria analitica.
Pour les élèves de ces catégories (9 et 10), avec les stratégies les plus fréquentes suivant le dessin en le prolongeant et en mettant en évidence de diverses manières des points, des déplacements, des sauts, il y a des procédures dans lesquelles les élèves ont représenté les droites qui relient les positions des deux robots à leurs équations, mettant en œuvre des méthodes analytiques. Dans ces cas, le choix le plus fréquent de l'origine du repère cartésien a été celui du point A, mais il est à noter que dans aucune copie nous avons trouvé une allusion au dessin des axes du repère, qui pourtant auraient pu être donnés, vu que ces élèves avaient déjà rencontré la géométrie analytique.

A volte si trovano errori nella scrittura algebrica delle rette (figura 11).
On trouve parfois des erreurs dans l'écriture algébrique des droites (figure 11).

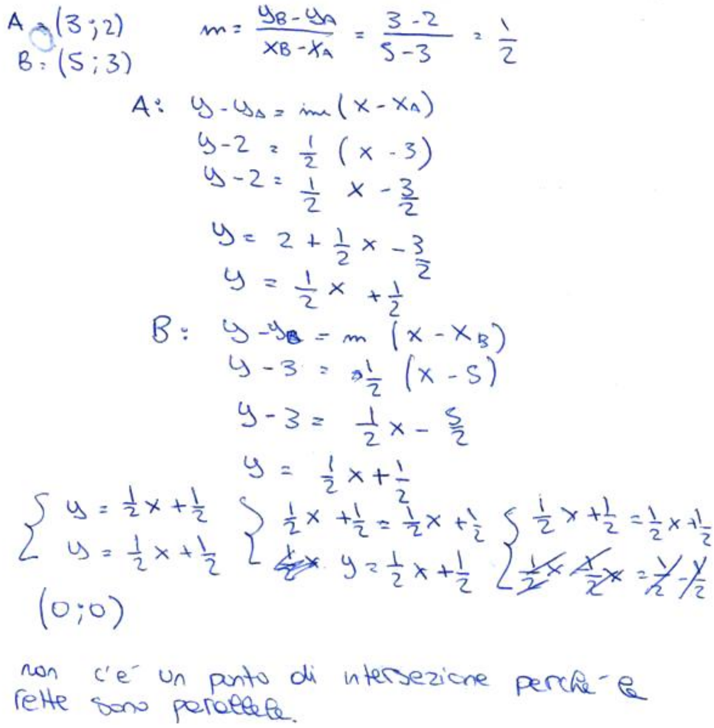


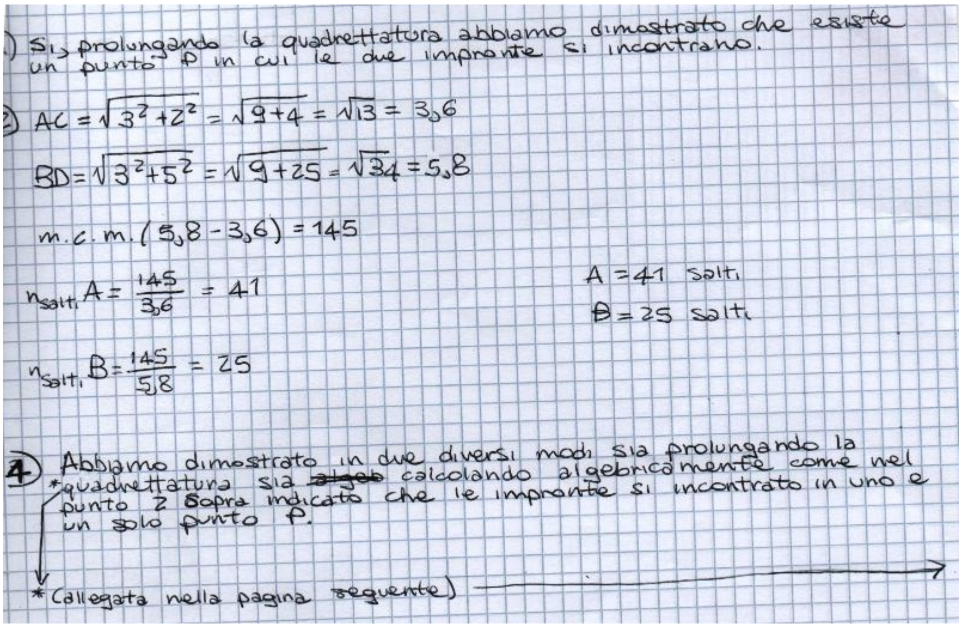
Figura 11/ Figure 11

Ce n'est pas un point d'intersection car les droites sont parallèles

Qui l'errore di calcolo per i due coefficienti angolari porta a identificare come parallele le rette che uniscono i salti, in contraddizione con la figura in cui la quadrettatura mostra con una certa evidenza l'incidenza delle due rette. Evidentemente non è maturata neppure per gli studenti più grandi *l'associazione fra il parallelismo di rette e l'uguaglianza delle loro pendenze*, espresse dai coefficienti angolari. Ancora una volta si tratta di una difficoltà legata alla gestione simultanea di diversi registri rappresentativi.
Ici l'erreur de calcul pour les deux coefficients angulaires conduit à identifier comme parallèles les droites qui relient les sauts, en contradiction avec la figure où le quadrillage montre avec une certaine évidence les deux droites ne le sont pas. De toute évidence, l'association entre le parallélisme des droites et l'égalité de leurs pentes, exprimées par les coefficients angulaires, n'est pas maîtrisée non plus par les élèves plus âgés. Encore une fois, il s'agit d'une difficulté liée à la gestion simultanée de plusieurs registres de représentation.

A volte la rappresentazione delle equazioni delle due rette, la determinazione dei loro coefficienti angolari con metodi analitici, la risoluzione di un sistema lineare per determinare il loro punto di intersezione, è stata

accompagnata dalla ricerca sul disegno di tale punto. Osserviamo che questo atteggiamento è abbastanza frequente nel passaggio da metodi intuitivi ad altri che mettono maggiormente in gioco la teoria.
Gli studenti, in questa fase iniziale, seguono parallelamente le due strategie, quasi vogliano metterle a confronto e trovare una conferma della correttezza di un sapere non ancora consolidato. Ecco alcuni esempi di questo tipo:
Parfois l'écriture des équations des deux droites, la détermination de leurs coefficients angulaires par des méthodes analytiques, la résolution d'un système linéaire pour déterminer leur point d'intersection, ont été accompagnées de la recherche sur le dessin d'un tel point. Observons que cette attitude est assez fréquente dans le passage de méthodes intuitives à d'autres qui mettent davantage en jeu la théorie. Les élèves dans cette phase initiale, suivent parallèlement les deux stratégies, comme s'ils voulaient les comparer et trouver une confirmation de l'exactitude d'un savoir non encore consolidé.
Voici quelques exemples de ce type :


1) Si, prolungando la quadrettatura abbiamo dimostrato che esiste un punto P in cui le due impronte si incontrano.

2) $AC = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} = 3,6$

$BD = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} = 5,8$

m.c.m. (5,8 - 3,6) = 145

$n_{salti} A = \frac{145}{3,6} = 41$ $\quad$ A = 41 salti

$n_{salti} B = \frac{145}{5,8} = 25$ $\quad$ B = 25 salti

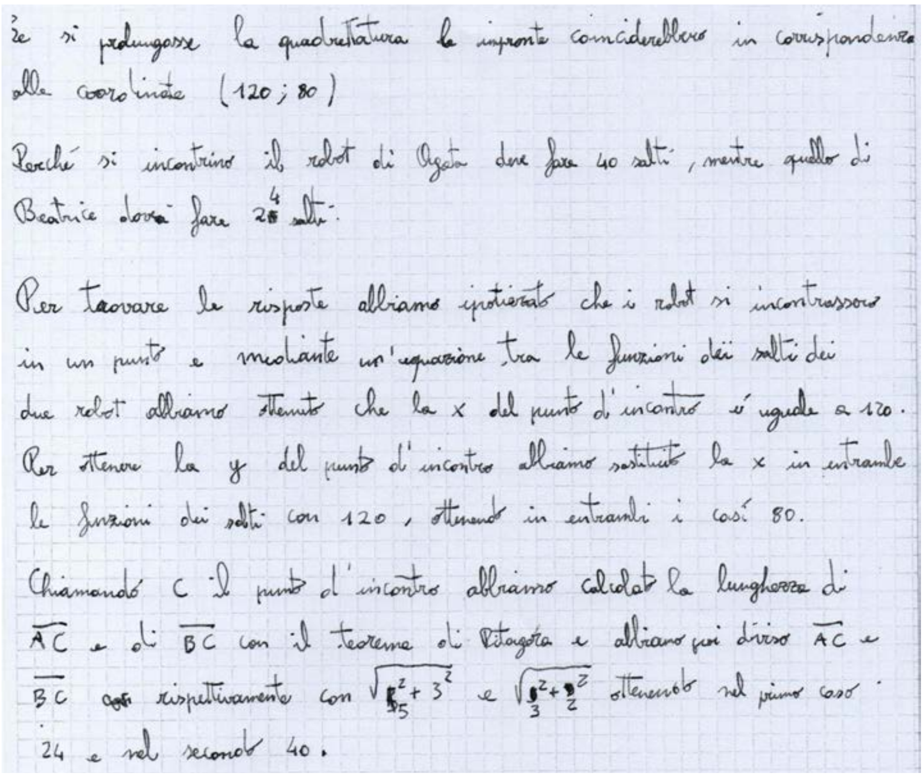
4) Abbiamo dimostrato in due diversi modi sia prolungando la *quadrettatura sia ~~algeb~~ calcolando algebricamente come nel punto 2 sopra indicato che le impronte si incontrato in uno e un solo punto P.

*(allegata nella pagina seguente)

Figura 12/ Figure 12

Oui, en prolongeant la grille, nous avons montré qu'il y a un point P où les deux empreintes se rencontrent.
AC = …..... = 3,6
BD = ….......= 5,8
ppcm (5,8 ; 3,6)= 145
$n_{sauts}A = 145/3,6 = 41$ *A = 41 sauts*
$n_{sauts}B = 145/5,8 = 25$ *B = 25 sauts*

Nous avons démontré de deux manières différentes à la fois en prolongeant la grille (jointe à la page suivante) et en calculant algébriquement comme au point 2 ci-dessus indiqué que les empreintes se rencontrent en un et un seul point P.


Se si prolungasse la quadrettatura le impronte coinciderebbero in corrispondenza alle coordinate (120 ; 80)
Perché si incontrino il robot di Agata deve fare 40 salti, mentre quello di Beatrice dovrà fare 24 salti.

Per trovare le risposte abbiamo ipotizzato che i robot si incontrassero in un punto e mediante un'equazione tra le funzioni dei salti dei due robot abbiamo ottenuto che la x del punto d'incontro è uguale a 120.
Per ottenere la y del punto d'incontro abbiamo sostituito la x in entrambe le funzioni dei salti con 120, ottenendo in entrambi i casi 80.
Chiamando C il punto d'incontro abbiamo calcolato la lunghezza di $\overline{AC}$ e di $\overline{BC}$ con il teorema di Pitagora e abbiamo poi diviso $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ rispettivamente con $\sqrt{5^2+3^2}$ e $\sqrt{3^2+2^2}$ ottenendo nel primo caso 24 e nel secondo 40.

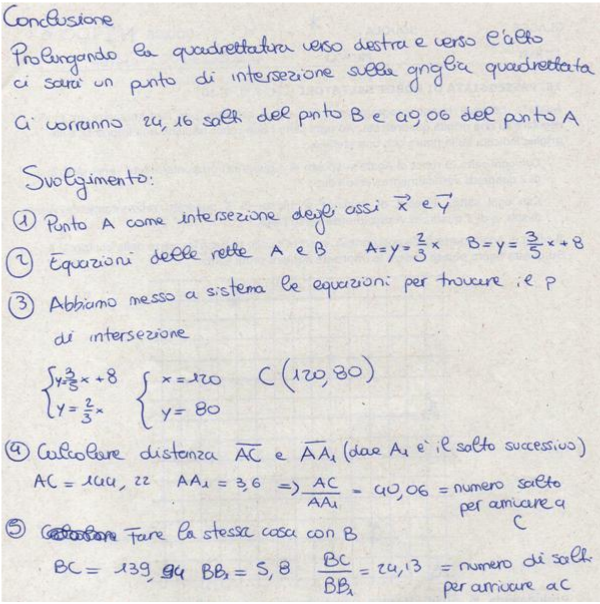
Figura 13/ Figure 13

Si la grille était prolongée, les empreintes coïncideraient aux coordonnées (120; 80). Pour qu'ils rencontrent, le robot d'Agata doit faire 40 sauts, tandis que le robot de Béatrice doit faire 24 sauts. Pour trouver les réponses, nous avons émis l'hypothèse que les robots se sont rencontrés en un point et par une équation entre les fonctions des sauts des deux robots, nous avons obtenu que le x du point de rencontre est égal à 120. Pour obtenir le y du point de rencontre, nous avons remplacé le x dans les deux fonctions des sauts par 120, obtenant ainsi 80. En appelant C le point de rencontre, nous avons calculé la longueur de AC et BC avec le théorème de Pythagore, puis nous avons divisé AC et BC respectivement par $\sqrt{5^2+3^2}$ *et par* $\sqrt{3^2+2^2}$ *en obtenant dans le premier cas 24 et dans le second 40.*

Qui c'è una sovrapposizione di metodi legati al calcolo delle distanze in geometria euclidea, alla determinazione analitica del punto di intersezione e ad un calcolo aritmetico che comunque riesce ad aggirare la difficoltà di ottenere un risultato, per il numero dei salti, non intero.
C'est une superposition de méthodes pour calculer des distances en géométrie euclidienne, pour déterminer analytiquement le point d'intersection et faire un calcul arithmétique qui réussisse à contourner la difficulté d'obtenir un résultat non entier pour le nombre de sauts.

Certo è infatti che la risoluzione del problema con un approccio analitico ha comportato una difficoltà in più: *la determinazione delle coordinate del punto di intersezione delle due rette deve poi servire a trovare il numero di salti necessari per raggiungere il punto di intersezione*. Su questo si sviluppa un aspetto interessante posto dal problema, che forse nell'analisi a priori non era stato previsto: il numero di salti può essere ottenuto effettuando una divisione fra lo spostamento "totale" e lo spostamento "unitario" di ciascun robot, ragionando sugli utilizzando gli spostamenti orizzontali, espressi da numeri interi. In alcuni elaborati, invece, si considerano gli spostamenti "diagonali": come già visto questo comporta la gestione di numeri irrazionali e le conseguenti difficoltà connesse con la necessaria approssimazione.
Alcuni studenti hanno approssimato le distanze totali e parziali ma poi non hanno approssimato il quoziente della divisione di tali distanze all'intero (figura 14), ottenendo un numero di salti con la virgola!
Il est certain en effet que la résolution du problème par une approche analytique a entraîné une difficulté supplémentaire : *la détermination des coordonnées du point d'intersection des deux droites doit ensuite servir à déterminer le nombre de sauts nécessaires pour l'atteindre*.
Notons à ce propos un aspect intéressant posé par ce problème, qui n'avait peut-être pas été prévu dans l'*analyse à priori* : le nombre de sauts peut être obtenu en effectuant une division entre le déplacement "total" et le déplacement "unitaire" de chaque robot, en raisonnant sur les déplacements horizontaux, verticaux ou "en

diagonale". Dans la plupart des copies, comme celle de la figure 5, on utilise les déplacements horizontaux, exprimés par des nombres entiers. Dans certaines copies, par contre, on considère les déplacements "en diagonale" : comme nous l'avons déjà vu, cela implique l'utilisation de nombres irrationnels et les difficultés qui en résultent avec les approximations nécessaires. Quelques élèves ont donné des approximations des distances totales et partielles mais n'ont alors pas donné d'approximation entière du quotient de la division de ces distances (figure 14), obtenant un nombre de sauts avec une virgule !


Conclusione
Prolungando la quadrettatura verso destra e verso l'alto ci sarà un punto di intersezione sulla griglia quadrettata
Ci vorranno 24,16 salti dal punto B e 40,06 dal punto A

Svolgimento:
① Punto A come intersezione degli assi $\vec{x}$ e $\vec{y}$
② Equazioni delle rette A e B $A = y = \frac{2}{3}x$ $B = y = \frac{3}{5}x + 8$
③ Abbiamo messo a sistema le equazioni per trovare il p di intersezione

$$\begin{cases} y = \frac{3}{5}x + 8 \\ y = \frac{2}{3}x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 120 \\ y = 80 \end{cases} \quad C(120, 80)$$

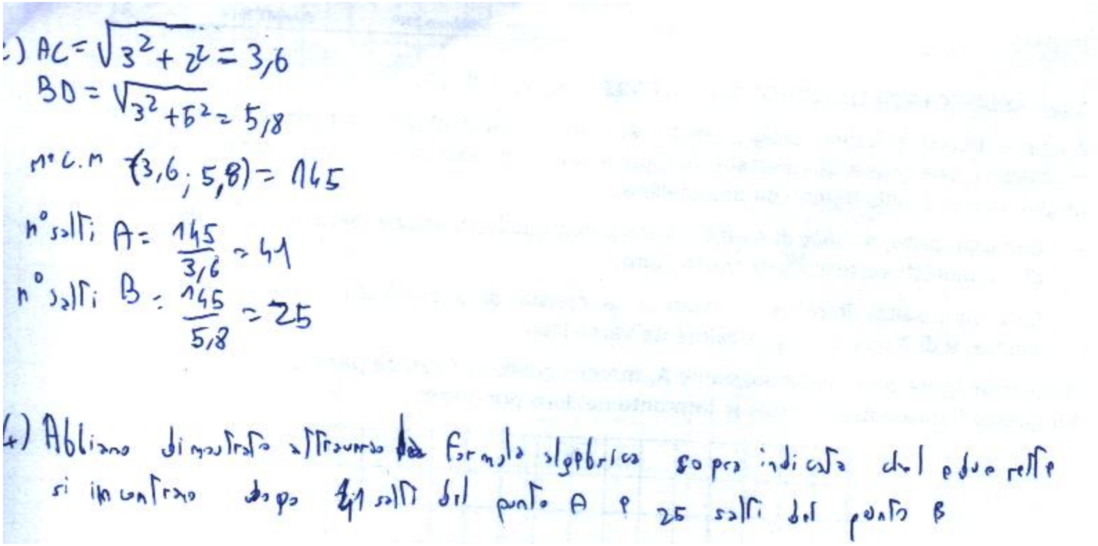
④ Calcolare distanza $\overline{AC}$ e $\overline{AA_1}$ (dove A_1 è il salto successivo)
$AC = 144,22$ $AA_1 = 3,6$ $\Rightarrow \frac{AC}{AA_1} = 40,06$ = numero salto per arrivare a C
⑤ ~~Calcolare~~ Fare la stessa cosa con B
$BC = 139,94$ $BB_1 = 5,8$ $\frac{BC}{BB_1} = 24,13$ = numero di salti per arrivare a C

Figura 14/ Figure 14

Traduction: *Conclusion. En prolongeant la grille vers la droite et vers le haut, il y aura un point d'intersection sur un carreau de la grille. Il faudra 24,16 sauts depuis le point B et 40,06 depuis le point A.*

Développement
1) Le point A comme intersection des axes x et y
2) Équations des droites A et B : A: $y = \frac{2}{3}x$ *B:* $y = \frac{3}{5}x + 8$
3) Nous avons écrit un système d'équations pour trouver le point d'intersection
4) Calculer les distances $\overline{AC}$ *et* $\overline{AA_1}$ *(où A1 est le saut suivant)*
AC = 144,22 $AA_1 = 3,6 \Rightarrow AC/AA_1 = 40,06$ *= nombre de sauts pour arriver à C*
5) Faire la même chose avec B
BC = 139,94 $BB_1 = 5,8$ $BC/BB_1 = 24,13$ *= nombre de sauts pour arriver à C*

Altri invece, come nell'elaborato di figura 15, pur approssimando correttamente all'intero il numero di salti, ottengono un risultato errato a causa delle approssimazioni precedenti.
D'autres, par contre, comme dans la copie de la figure 15, tout en approchant correctement par un entier le nombre de sauts, obtiennent un résultat incorrect en raison des approximations précédentes.



3) $AC = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3{,}6$

$BD = \sqrt{3^2 + 5^2} = 5{,}8$

m.c.m $(3{,}6 ; 5{,}8) = 145$

n° salti $A = \frac{145}{3{,}6} = 41$

n° salti $B = \frac{145}{5{,}8} = 25$

4) Abbiamo dimostrato attraverso la formula algebrica sopra indicata che le due rette si incontrano dopo 41 salti dal punto A e 25 salti dal punto B

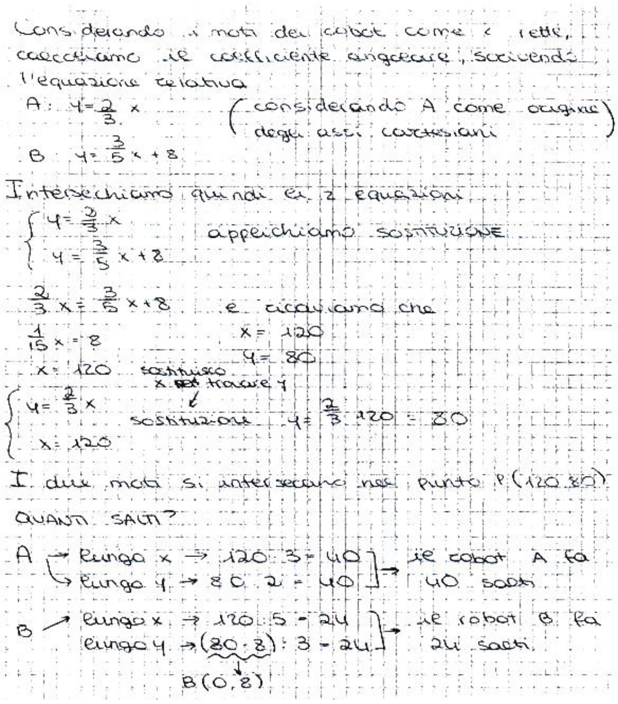
Figura 15/ Figure 15

Si noti che tale inconveniente poteva essere evitato dividendo le distanze calcolate solo secondo una direzione (verticale o orizzontale), oppure mettendo in atto una procedura più raffinata che evitasse, mediante il calcolo con i radicali, di approssimare, come probabilmente è stato fatto nell'elaborato di figura13.

Il est à noter que cet inconvénient pouvait être évité, soit en divisant les distances calculées seulement selon une direction (verticale ou horizontale), soit en mettant en œuvre une procédure plus raffinée qui éviterait les approximations par un calcul avec des radicaux, comme cela a probablement été fait dans la copie de la figure 13.

Riportiamo infine uno dei migliori elaborati che evidenziano la strategia analitica messa in atto e argomentata:

Enfin, nous présentons l'une des meilleures copies qui met en évidence la stratégie analytique vue en cours et argumentée :



Considerando i moti dei robot come 2 rette, calcoliamo il coefficiente angolare, scrivendo l'equazione relativa

A: $y = \frac{2}{3}x$ (considerando A come origine degli assi cartesiani)

B: $y = \frac{3}{5}x + 8$

Intersechiamo quindi le 2 equazioni

$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ y = \frac{3}{5}x + 8 \end{cases}$ applichiamo sostituzione

$\frac{2}{3}x = \frac{3}{5}x + 8$ e ricaviamo che $x = 120$, $y = 80$

$\frac{1}{15}x = 8$

$x = 120$ sostituisco x ~~per~~ trovare y

$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ x = 120 \end{cases}$ sostituzione $y = \frac{2}{3} \cdot 120 = 80$

I due moti si intersecano nel punto P (120, 80)

QUANTI SALTI?

A → lungo x → 120 : 3 = 40, lungo y → 80 : 2 = 40 → il robot A fa 40 salti

B → lungo x → 120 : 5 = 24, lungo y → $(\underbrace{80 - 8}_{B(0,8)}) : 3 = 24$ → il robot B fa 24 salti

Figura 16/ Figure 16

Nous considérons les trajets des robots comme des droites, nous calculons les coefficients angulaire, nous avons les équations relatives
A : $y = 2/3\,x$ *(Nous considérons A comme*
B : $y = 3/5\,x + 8$ *l'origine des axes cartésiens)*
Nous croisons ensuite les 2 équations
$y = 2/3\,x$
$y = 3/5\,x + 8$ *nous effectuons la substitution*
$2/3\,x = 3/5\,x + 8$ *et nous avons que*
$1/15\,x = 8$ $x = 120$
$y = 80$
$x = 120$ *nous remplaçons*
x pour trouver y
$y = 2/3\,x$
nous substituons $y = 2/3 \,.\, 120 = 80$
$x = 120$
Les deux parcours se croisent au point P(120, 80)
COMBIEN DE SAUTS ?
A → *longueur en x →* $120 : 3 = 40$
longueur en y → $80 : 2 = 40$ *→ le robot A fait 40 sauts*
B → *longueur en x →* $120 : 5 = 24$
longueur en y → $(80 – 8) : 3 = 24$ *→ le robot fait 24 sauts*

Abbiamo trovato un interessante tentativo di formalizzazione algebrica spontanea, nel voler esprimere simbolicamente la relazione tra lo spostamento orizzontale e la distanza tra le impronte cioè il fatto che “ad uno spostamento orizzontale di 15 quadretti corrisponde un avvicinamento verticale di un quadretto”. Per esprimere questo concetto i ragazzi hanno scritto: “per ogni 15x, y=y-1”. Pur non essendo una codifica corretta, essa testimonia il tentativo di descrivere l’intuizione dell’aspetto funzionale di questa relazione, che vede variare la distanza in verticale tra le impronte al variare dello spostamento in orizzontale. (figura 17)
Nous avons trouvé une tentative intéressante de formalisation algébrique spontanée, voulant exprimer symboliquement la relation entre le déplacement horizontal et la distance entre les empreintes, c’est-à-dire le fait que "un déplacement horizontal de 15 carreaux correspond à une approche verticale d’un carreau". Pour traduire cette remarque, les élèves ont écrit : "pour chaque 15x, y = y-1". Bien qu’il ne s’agisse pas d’un codage correct, cela témoigne de la tentative de décrire l’aspect fonctionnel de cette relation qui relie la distance verticale entre les empreintes au déplacement horizontal (figure 17).

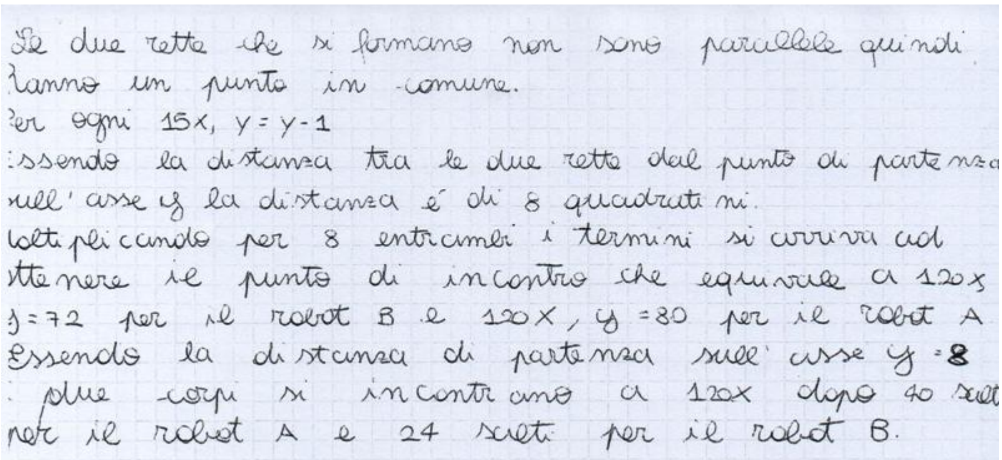

Le due rette che si formano non sono parallele quindi
hanno un punto in comune.
Per ogni 15x, y = y-1
Essendo la distanza tra le due rette dal punto di partenza
sull'asse y la distanza è di 8 quadratini.
Moltiplicando per 8 entrambi i termini si arriva ad
ottenere il punto di incontro che equivale a 120x
y = 72 per il robot B e 120x, y = 80 per il robot A
Essendo la distanza di partenza sull'asse y = 8
due corpi si incontrano a 120x dopo 40 salti
per il robot A e 24 salti per il robot B.

Figura 17/ Figure 17

Les deux droites qui sont formées ne sont pas parallèles et ont donc un point commun.
Pour chaque 15x, y = y-1
Sachant que la distance entre les deux droites à partir du point x = 0 sur l'axe des y est de 8 carreaux,
En multipliant les deux termes par 8, nous obtenons le point de rencontre qui équivaut à 120x,
y = 72 pour le robot B et 120x, y = 80 pour le robot A.

Puisque la distance de départ sur l'axe y est 8, les deux robots se rencontreront à 120x après 40 sauts pour le robot A et 24 sauts pour le robot B

Un'ultima osservazione:
i criteri per l'attribuzione dei punteggi non prendevano in considerazione alcune situazioni che invece nell'analisi delle prove si sono rivelate frequenti. Esse saranno state risolte, forse in maniera non del tutto omogenea, dal buon senso dei correttori.
In particolare segnaliamo che a volte i ragazzi hanno fornito un numero di salti necessari per l'intersezione di poco diverso da 40 e 24, mentre altre volte i risultati sono molto distanti dai valori corretti. Pensiamo che nel primo caso l'errore possa derivare da un calcolo, da un'approssimazione (cfr. Fig. 12) o da un errore materiale nella lettura di un disegno complesso, mentre nel secondo caso l'errore sia più probabilmente dovuto ad una impostazione errata. Ci auguriamo che i correttori abbiano colto questa differenza valutando con punteggi diversi le due situazioni.
Une dernière remarque :
Les critères d'attribution des points ne tenaient pas compte de certaines procédures qui se sont avérées relativement fréquentes lors de l'analyse des copies. Il en aura été tenu compte, peut-être de manière pas tout à fait homogène, grâce au bon sens des correcteurs.
Signalons en particulier que les élèves donnent parfois des nombres de sauts nécessaires pour arriver à l'intersection, légèrement différents de 40 et 24, alors que d'autres résultats sont très éloignés des valeurs correctes. Nous pensons que dans le premier cas l'erreur peut résulter d'une erreur de calcul, d'une approximation (cf. figure 12) ou d'une erreur matérielle dans la lecture d'un dessin complexe (dans la figure 1.b le résultat était-il correct ou non ? On ne peut pas le dire), tandis que dans le second cas, l'erreur est plus probablement due à un réglage incorrect. Nous espérons que les correcteurs ont pris cette différence en compte en évaluant les deux situations avec des scores différents.

Alcune conclusioni

Le variabili didattiche presenti in questo problema, in entrambe le versioni, e la ricchezza di strategie che possono fare appello a diversi ambiti delle conoscenze matematiche da parte dei ragazzi, lo rendono un bel problema, ricco e significativo, anche nell'analisi a posteriori.
Quelques conclusions :
Les variables didactiques présentes dans ce problème, dans les deux versions, et la richesse de des stratégies qui peuvent faire appel à différents domaines des connaissances mathématiques de la part des élèves, en font un beau problème, riche et significatif, également pour l'*analyse a posteriori.*

Ciò che emerge (ed è positivo che ciò venga osservato e rilevato), è la difficoltà che hanno gli studenti delle prime classi della scuola secondaria superiore a coordinare più registri rappresentativi: abbiamo visto che il controllo sui risultati algebrici dovrebbe poi essere correlato e messo in atto anche attraverso quello sulle considerazioni di tipo geometrico, cosa che a volte non avviene. Alcuni ragazzi trovano pendenze uguali per le due rette nelle loro equazioni, tuttavia cercano il punto di intersezione di queste rette; la gestione delle approssimazioni e la scelta degli ambiti numerici in cui collocare i risultati numerici trovati costituiscono ancora una difficoltà, nella complessità delle situazioni da affrontare.
Ce qui en ressort (et il est important de l'observer et le relever), c'est la difficulté pour les élèves des premières classes de l'enseignement secondaire supérieur de coordonner plusieurs registres de représentation : nous avons vu que le contrôle sur les résultats algébriques devrait ensuite être aussi corrélé et mis en œuvre par des considérations de type géométrique, chose qui parfois ne se produit pas. Certains élèves trouvent dans leurs équations des pentes égales pour les deux droites, mais ils cherchent le point d'intersection de ces droites ; la gestion des approximations et le choix des domaines numériques dans lesquels donner les résultats, constituent une difficulté supplémentaire dans la complexité des situations à affronter.

Ciò non deve essere considerato del tutto negativo: nell'ottica di una "valutazione formativa" di queste prestazioni si legge con chiarezza la necessità di un tempo adeguato, ulteriore, perché i vari strumenti teorici che i ragazzi via via acquisiscono nel progredire dei loro studi in matematica vengano poi rielaborati e armonizzati, perché si consolidino come competenze vere e proprie.
Ceci ne doit pas être considéré comme entièrement négatif : du point de vue d'une « évaluation formative » de ces performances, on peut clairement lire la nécessité d'un temps suffisant, supplémentaire, car les différents outils théoriques que les enfants acquièrent progressivement au fur et à mesure de leurs études en mathématiques, sont ensuite retravaillés et harmonisés, afin qu'ils soient consolidés comme de véritables compétences.

Per quanto riguarda il cambiamento di contesto, nel secondo problema, rispetto a quello delle rette assegnate sulla quadrettatura, è certamente risultato più motivante per gli allievi di tutte le categorie lavorare nel contesto dei salti dei robot, anche se questa scelta ha portato ad altre ambiguità nelle varie risoluzioni, in quanto mette a fuoco in maniera più forte la difficoltà di controllare contemporaneamente le situazioni nel discreto e nel continuo. Anche questa considerazione didattica è un elemento da tenere presente ogni volta che si propongono situazioni in cui l'approccio euclideo e quello analitico possono coesistere nello stesso problema, anche a più livelli scolari.
Le changement de contexte du second problème, par rapport à celui des droites dessinées sur un quadrillage, a été certainement plus motivant pour les élèves de toutes les catégories, de travailler avec des sauts de robots, même si ce choix a conduit à d'autres ambiguïtés dans les différentes résolutions, car il met plus fortement l'accent sur la difficulté de contrôler simultanément les situations dans les domaines du discret et du continu. Cette considération didactique est également un élément à se rappeler chaque fois que sont proposées des situations dans lesquelles les approches euclidienne et analytique peuvent coexister dans le même problème, même dans plusieurs niveaux scolaires.

Sottolineiamo infine, anche in vista della creazione di nuovi problemi della stessa tipologia, i seguenti elementi di interesse:
1) il contesto inusuale del problema, che, pur svolgendosi su una griglia, lascia al solutore la scelta di come posizionare gli assi cartesiani. Questo non avviene quasi mai nei problemi scolastici eppure nella ricerca matematica (o fisica) la buona scelta di un sistema di riferimento è competenza fondamentale;
2) il passaggio dal contesto del problema a quello matematico (sia geometrico sia algebrico in questo caso) e poi la rilettura della soluzione nel contesto del problema (in questo caso necessaria per escludere soluzioni non intere). Questi sono elementi di base della cosiddetta modellizzazione matematica che viene vista come obiettivo alla fine della secondaria di secondo grado, ma ancora poco praticata nelle nostre scuole;
3) il collegamento tra successioni e funzioni. Spesso esse sono viste separatamente, ma da alcuni elaborati qui vediamo il tentativo di armonizzarle. Su questo aspetto il gruppo Funzioni si impegna a ideare ad altri problemi in cui una successione possa essere interpretata anche come funzione.
Enfin, nous soulignons, également en vue de la création de nouveaux problèmes de même type, les points intéressants suivants :
1) le contexte inhabituel de ce problème, qui, bien que se situant sur une grille, laisse aux élèves le choix des axes du repère cartésien. Cela n'arrive presque jamais dans les problèmes scolaires, pourtant dans la recherche en mathématiques (ou physique), le bon choix d'un système de référence est une compétence fondamentale ;
2) le passage du contexte du problème au contexte mathématique (à la fois géométrique et algébrique dans ce cas) puis la relecture de la solution dans le contexte du problème (dans ce cas nécessaire pour exclure les solutions non entières), sont les éléments de base de la modélisation dite mathématique qui est considérée comme un objectif à la fin de l'enseignement secondaire, mais toujours pas pratiquée dans nos établissements;
3) les liens entre les suites et les fonctions sont souvent vus séparément, mais dans quelques copies nous trouvons une tentative de les harmoniser. Sur cette question, le groupe Fonctions entreprend d'imaginer d'autres problèmes dans lesquels une suite numérique peut aussi être interprétée comme une fonction.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

ASSEMBLAGE DE TRIANGLES / PUZZLE DI TRIANGOLI

François Jaquet

avec la collaboration de membres du Groupe Géométrie Plane/ con la collaborazione di membri del Gruppo Geometria piana: Bernard Anselmo, M. Maddalena Asara, Paola Bajorko, Clara Bisso, Brunella Brogi, Federica Curreli, AnnaMaria D'Andrea, Giorgia Delledonne, Luana De Nicolo, Speranza Dettori, Florence Falguères, Cinzia Frongia, Lucia Grugnetti, Giuseppina Lungheu, Silvia Mazzucco, Francesca Michienzi, Antonella Pierno, Luciana Rapposelli, Patrizia Sabatini, Rosanna Sanna, M. Agostina Satta, Francesca Tanda, CinziaUtzeri

Introduction / Introduzione

Lors de la première épreuve du 28e Rallye mathématique transalpin, près de 4000 groupes, ou plus de 10000 élèves ont passé 50 minutes sur le problème *Assemblage de triangles* dans ses deux versions (I) et (II). Ils conserveront le souvenir d'un défi, d'une diversion ou d'une situation ludique, d'une expérience d'un travail coopératif, où ils devaient prendre toutes les décisions en l'absence de leur professeur, et peut-être aussi d'un énoncé qui va s'ajouter à leur répertoire de problèmes.

Si cette expérience n'aura duré que 50 minutes pour les élèves, il n'en va pas de même pour les animateurs du RMT, qui avaient déjà passé beaucoup de temps à la préparer et les maîtres des classes participantes qui aimeraient la faire revivre dans leur classe.

Tous ceux qui ont analysé a posteriori les copies rendues par les élèves, en particulier les membres du groupe Géométrie plane (dont les deux composantes sont GP « petits » - cat. de 3 à 5 – et GP « grands » cat. de 6 à 10) , ont trouvé que ce problème mérite en effet d'être exploité dans la pratique didactique et s'inscrit ainsi dans une des finalités du RMT : *améliorer l'apprentissage, pour les élèves et la formation des maîtres*.

Il s'agit d'un situation de construction de figures, très riche, qui peut être proposée à des classes de catégories 5 à 8, qui permet des découvertes surprenantes dans un contexte simple, qui offre de nombreuses possibilités de donner (ou redonner) du sens à certaines notions. L'intérêt pour cette situation est confirmé par plusieurs expérimentations du problème où les premières observations de l'analyse a posteriori ont été utiles pour sa reprise en classe.

Par conséquent, l'analyse a posteriori qui constitue le cœur de cette étude est enrichie des premières exploitations en classe et chacun de ses chapitres est accompagné de réflexions et questions sur ce qu'on pourrait en tirer s'il passait du statut de « problème de rallye » au statut de « problème à insérer dans un parcours didactique ».

L'étude publiée ici est organisée dans l'ordre chronologique des phases de construction, d'analyses et de propositions didactiques du problème.

Le premier chapitre illustre l'évolution du regard des adultes entre l'élaboration du problème, son analyse a priori et son « expérimentation » par les élèves. On s'inscrit ici dans une des finalités implicites du RMT : *améliorer la formation des élaborateurs de problèmes*.

Le deuxième chapitre présente les résultats statistiques, leurs limites de fiabilité.

Le troisième chapitre décrit la démarche de travail de l'analyse a posteriori. Les obstacles y figurent en priorité : l'appropriation, les règles d'ajustement des figures, le dessin des figures ; puis viennent les erreurs ; pour finir par les procédures de résolution des élèves.

Le quatrième chapitre redéfinit les tâches de résolution et les savoirs mobilisés imaginés lors de l'analyse a priori, mais cette fois-ci à la lumière de ce que les élèves ont effectivement fait et dit.

Le cinquième chapitre est consacré à l'exploitation didactique du problème, sous forme d'inventaire des connaissances et savoirs que l'enseignant pourrait reprendre ou développer durant la mise en commun, où les élèves décrivent leurs démarches de résolution, et ensuite en phase d'institutionnalisation des savoirs.

Le sixième propose des activités pour appliquer, consolider, et étendre les concepts évoqués lors de la phase d'institutionnalisation.

La septième partie propose, en synthèse, d'envisager les conditions les plus favorables pour l'enseignant intéressé qui envisage de « passer à l'action » en proposant le problème à ses élèves.

Per quanto riguarda la prima prova del 28° Rally matematico transalpino, circa 4000 gruppi per un totale di circa 10000 allievi, hanno passato 50 minuti a lavorare sul problema *Puzzle di triangoli* nelle sue due versioni (I) e (II).

Conserveranno il ricordo di una sfida, di una disgressione, di una situazione ludica di un'esperienza di lavoro cooperativo dove dovevano prendere tutte le decisioni in assenza dell'insegnante e forse anche di un enunciato che si aggiunge alla loro lista di problemi.

Se questa esperienza è durata solo 50 minuti per gli allievi, per gli animatori del RMT, le cose sono ben diverse, visto che avevano già passato molto tempo a prepararla e anche per gli insegnanti delle classi partecipanti che vogliano farla rivivere nella propria classe.

Tutti coloro che hanno analizzato a posteriori gli elaborati degli allievi, in particolare i membri del gruppo Geometria piana (nelle sue due componenti indicate come GP "piccoli"- cat. da 3 a 5- e "grandi"- cat. da 6 a 10), hanno trovato che questo problema merita effettivamente di essere utilizzato nella pratica di classe e si inscrive anche in una delle finalità del RMT: *migliorare l'apprendimento, per gli allievi e la formazione degli insegnanti*.

Si tratta di una situazione relativa alla costruzione di figure, che può essere proposta a classi delle categorie da 5 a 8, che permette di fare scoperte sorprendenti in un contesto semplice e che offre numerose possibilità di dare (o ridare) senso a certe nozioni.

L'interesse per questa situazione è confermato da diverse sperimentazioni del problema in classe per le quali sono risultate utili le prime osservazioni dell'analisi a posteriori.

Di conseguenza, l'analisi a posteriori, che costituisce il nodo centrale di questo studio o approfondimento, risulta arricchita da tali sperimentazioni in classe e ogni capitolo è accompagnato da riflessioni e domande circa le conseguenze di un passaggio da "problema del rally" a "problema da inserire in un percorso didattico".

Lo studio pubblicato qui è organizzato in ordine cronologico secondo le fasi di costruzione, analisi e proposte didattiche del problema.

Il primo capitolo illustra l'evoluzione dello sguardo degli adulti tra l'elaborazione del problema e della sua analisi a priori e la sua "sperimentazione" da parte degli allievi. Ci si ritrova qui in una delle finalità implicite del RMT: *migliorare la formazione degli elaboratori di problemi*.

Il secondo capitolo presenta i risultati statistici e i loro limiti di affidabilità.

Il terzo capitolo descrive le procedure di lavoro dell'analisi a posteriori. Dapprima vi figurano gli ostacoli: l'appropriazione, le regole di sistemazione delle figure, il disegno delle figure; poi vengono gli errori; per finire con le procedure di risoluzione degli allievi.

Il quarto capitolo ridefinisce i compiti di risoluzione e i saperi mobilitati immaginati nell'analisi a priori, ma questa volta alla luce di ciò che gli allievi hanno effettivamente fatto e descritto

Il quinto capitolo è dedicato alle indicazioni didattiche del problema, sotto forma di inventario delle conoscenze e dei saperi che l'insegnante potrebbe riprendere o sviluppare durante la messa in comune dove gli allievi descrivono le proprie procedure di risoluzione o a seguito della fase di istituzionalizzazione dei saperi.

Il sesto propone delle attività atte ad applicare, consolidare e ampliare i concetti evocati durante la fase di istituzionalizzazione.

Il settimo propone, in sintesi, di considerare le condizioni più favorevoli per l'insegnante interessato, che voglia "passare all'azione" nel proporre il problema ai propri allievi.

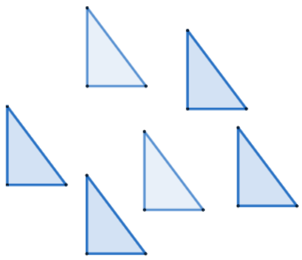
1. L'élaboration du problème

1.1. L'énoncé

Voici l'idée originale du problème, qui a été conçue et rédigée par des étudiants en mathématiques de l'Université de Parme/ Ecco l'idea originale del problema che è stata concepita da studenti di matematica dell'Università di Parma:

PUZZLE DI TRIANGOLI II (Cat. 9 , 10)

Andrea sta giocando con 6 mattoncini a forma di triangolo rettangolo, tutti uguali tra loro, con lati di lunghezza 3, 4 e 5 cm. Sta accostando i mattoncini, facendoli combaciare lungo lati uguali, fino ad ottenere una unica figura senza 'buchi' al suo interno e si accorge che le figure hanno qualcosa in comune, perché sono formate dagli stessi pezzi, ma sembrano molto diverse.



Come deve disporre i mattoncini in modo che il bordo della figura sia il più grande possibile? Rappresenta la figura e spiega perché.

Cette proposition a été retenue pour son originalité : la composition de figures est ici centrée sur les périmètres alors que d'autres problèmes de la famille de tâches de notre Banque de problèmes, *Découper et ou assemble des figures,* portent sur la forme des polygones ; elle est aussi intéressante pour la richesse de ses futures exploitations didactiques, permettant de le relier à de nombreux autres problèmes du domaine de la géométrie plane. Cette version d'origine a été aménagée selon les expériences du RMT en particulier :

- la disposition traditionnelle des triangles (avec une « base » horizontale) a été modifiée et deux des triangles ne présentent pas la même « face » que les quatre autres (il faut une symétrie axiale pour les superposer)

- on a renoncé aux catégories 9 et 10 pour proposer le problème aux catégories 7 et 8 et en créer une version avec quatre triangles pour les catégories 5 et 6,

- les règles de disposition des figures ont été illustrées d'exemples (comme nous le faisons depuis les problèmes *Miss Troispointes* 10.II.10, *M. Trapèze* 12.I.07, *Le carré change de forme* 24.F.07).

On a encore renoncé à préciser que les triangles sont rectangles (aussi en vue d'exploitations didactiques) et effectué quelques adaptations de style après la phase de consultation du projet d'épreuve.

Voici la version du problème pour les catégories 7 et 8 :

La version limités à quatre triangles, pour les catégories 5 et 6, se trouve sur Assemblages de triangles (I) **(ral.** 28.I.07 **; cat.** 5-6 **)**

Questa proposta è stata presa in considerazione sia per la sua originalità: la composizione di figure è centrata qui sui perimetri, mentre altri problemi della nostra famiglia *Ritagliare o assemblare figure* sono incentrati sulla forma dei poligoni, e sia per la ricchezza delle sue future utilizzazioni didattiche che consentiranno di collegarlo a numerosi altri problemi di geometria piana. Questa versione iniziale è stata ripresa e sistemata secondo le esperienze del RMT, in particolare nei seguenti termini:

- la disposizione tradizionale dei triangoli (con la "base" orizzontale) è stata modificata e due dei triangoli non presentano la medesima "faccia" degli altri quattro (per sovrapporli è necessaria una simmetria assiale);

- abbiamo rinunciato alle categorie 9 e 10 per proporre il problema alle categorie 7 e 8 e crearne anche una versione con quattro triangoli per le categorie 5 e 6;

- le regole della disposizione delle figure sono state illustrate con esempi (come avevamo fatto a partire dal problema "Miss Trepunte" 10.II.10, "Signor Trapezio" 12.I.07, "Il quadrato cambia forma!" 24.F.07;

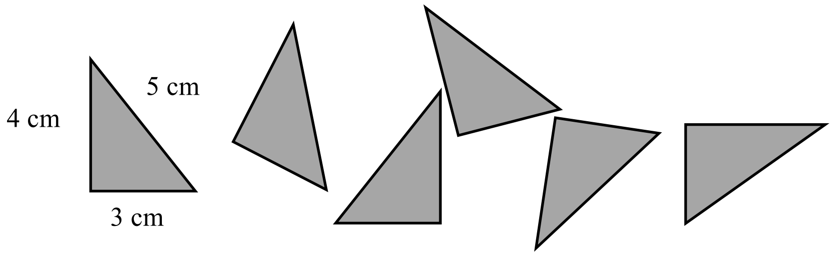
Abbiamo anche rinunciato a precisare che i triangoli sono triangoli rettangoli (anche in vista di utilizzazioni didattiche) ed effettuato qualche adattamento nello stile dopo la fase di consultazione del progetto di prova.

Ecco la versione del problema per le categorie 7 e 8.

La versione limitata a quattro triangoli, per le categorie 5 e 6 si trova su Puzzle di triangoli (I) (ral. 28.I.07; cat. 5-6)

(28.I.13) **ASSEMBLAGES DE TRIANGLES / PUZZLE DI TRIANGOLI (II)** (CAT. 7, 8)

André a découpé six triangles égaux dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm et 5 cm.
Andrea ha a disposizione questi sei triangoli uguali, i cui lati misurano 3 cm, 4 cm e 5 cm.



En assemblant ses six triangles André forme des figures. Il veut que :
Accostando i sei triangoli, Andrea forma delle figure e vuole che:

- les triangles ne se superposent pas ; i triangoli non si sovrappongano
- les triangles se touchent par des côtés de même longueur ;
  i triangoli siano uniti lungo lati della stessa lunghezza;
  aucune figure n'ait un trou nessuna figura abbia un buco.

Voici quelques-uns des essais d'André Ecco alcuni dei tentativi di Andrea:

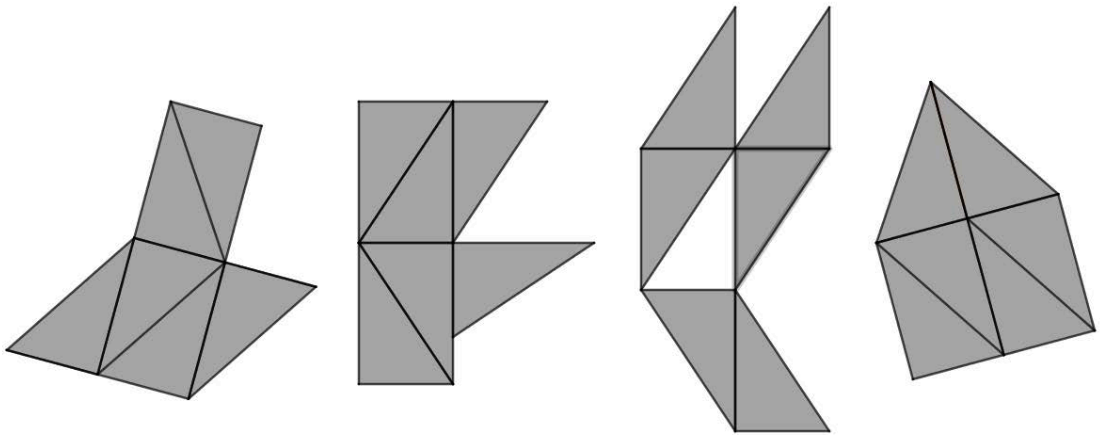


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*

Les figures 1 et 4 sont correctes, la figure 2 n'est pas correcte car il y a deux triangles qui se touchent par deux côtés qui n'ont pas la même longueur, la figure 3 n'est pas correcte parce qu'elle a un trou.
Le figure 1 e 4 sono corrette, la figura 2 non è corretta perché ci sono due triangoli che si toccano su due lati che non hanno la stessa lunghezza, la figura 3 non è corretta perché ha un buco.

Parmi toutes les figures qu'André peut construire avec ses six triangles en respectant les règles qu'il s'est fixées, dessinez-en une qui a le plus grand périmètre possible.
Écrivez la mesure de son périmètre et les calculs que vous avez faits.
Fra tutte le figure che Andrea può costruire con questi sei triangoli seguendo le regole che ha fissato, disegnatene una il cui perimetro sia il più lungo possibile.
Scrivete quanto misura il suo perimetro e mostrate i calcoli che avete fatto.

1.2. L’analyse a priori de la tâche de l’élève / L’analisi a priori del compito dell’allievo

Voici deux versions de l’analyse a priori, celle des auteurs de l’énoncé d’origine :

Qui di seguito presentiamo due versioni dell’analisi a priori, quella degli autori dell’enunciato iniziale:

- *Provare con alcune configurazioni e calcolare il perimetro*
- *Rendersi conto che i lati in comune interni vanno considerati due volte e che il perimetro si può calcolare come 72 - 2 × lato in comune*
- *Calcolare il perimetro in più configurazioni cercando criteri che lo facciano aumentare*
- *Rendersi conto che conviene avere i lati in comune di lunghezza minore compatibilmente col vincolo del non avere buchi e di far combaciare i lati*
- *Formulare la risposta esibendo una costruzione e una spiegazione sul perché non può esistere una figura di perimetro maggiore.*

- Essayer quelques configurations et calculer le périmètre
- Se rendre compte que les côtés communs internes doivent être considérés deux fois et que le périmètre peut être calculé comme 72 - 2 × côté commun
- Calculer le périmètre dans plusieurs configurations en cherchant des critères qui le font augmenter
- Se rendre compte qu'il vaut mieux avoir les côtés en commun de longueur plus courte selon la contrainte de ne pas avoir de trous et d'apparier les côtés
- Formuler la réponse en présentant une construction et une explication expliquant pourquoi une figure de plus grand périmètre ne peut pas exister

et celle des responsable de l’élaboration de l’épreuve, après la consultation des sections :

e quella dei responsabili dell’elaborazione della prova, dopo la fase di consultazione delle sezioni:

- Observer les exemples pour s’approprier les règles de construction des figures.
- Procéder par essais : après avoir construit une figure et calculé son périmètre, chercher à en construire un autre dont le périmètre est plus grand et continuer ainsi en cherchant des figure avec des périmètres de plus en plus grands.
- Osservare gli esempi per appropriarsi delle regole di costruzione dei poligoni.
- Procedere per tentativi: dopo aver costruito un poligono e calcolato il suo perimetro, cercare di costruirne uno che abbia il perimetro maggiore e continuare così cercando poligoni con il perimetro sempre più grande.

Ou / Oppure

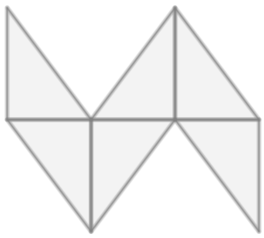
- Se rendre compte que pour obtenir le périmètre maximal il faut avoir le maximum de côtés de triangles sur le pourtour et comprendre que le périmètre sera le plus grand si ceux-ci sont les côtés les plus longs des triangles.
- Quelle que soit la figure formée, il y a toujours cinq côtés communs et donc, puisqu’il n’y a que 18 côtés de triangles et 5 en commun, le pourtour sera formé de 18 – (2 × 5) = 8 côtés, dont seuls six peuvent être des hypoténuses et deux pouvant être des côtés les plus grands de l’ange droit. Le périmètre le plus grand sera donc 6 × 5 + 2 × 4 = 38 (en cm).
- Chercher ensuite à dessiner un polygone ayant ce périmètre.
- Rendersi conto che per avere il perimetro massimo occorre avere sul contorno il maggior numero possibile di lati dei triangoli e capire che il perimetro sarà maggiore se questi sono i lati più lunghi dei triangoli.
- Qualunque figura si formi i lati in comune sono sempre cinque e dunque, poiché i lati dei triangoli sono in tutto 18 e cinque i lati in comune, rimane un contorno formato da 18 – (2 × 5) = 8 lati, di cui sei possono essere ipotenuse e due i cateti maggiori, dunque il perimetro più grande è 6 × 5 + 2 × 4 = 38 (in cm).
- Cercare poi di disegnare un poligono con questo perimetro.

Ou / Oppure

- Raisonner tout de suite sur le périmètre. La somme des périmètres de tous les triangles est 12 × 6 = 72. Les côtés adjacents ne font pas partie du pourtour et leurs mesures n’interviennent pas dans le calcul du périmètre. En disposant les triangles deux à deux avec un seul côté commun, seuls le premier et le dernier peuvent avoir leur hypoténuse et le côté « 4 cm » sur le contour, par conséquent leurs côtés « 3 cm » sont communs au deuxième et au cinquième triangle, qui auront à leur tour un côté « 4 cm » commun avec les troisième et quatrième triangles qui eux auront leurs côtés « 3 cm » en commun. On en déduit que le périmètre maximum du polygone est 72 – (2 × 2 × 3 + 2 × 2 × 4 + 2 × 3) = 38.

- Chercher ensuite à dessiner une figure ayant ce périmètre.
- Ragionare fin da subito sul perimetro, la somma dei perimetri di tutti triangoli è 12 × 6 = 72, se si uniscono due triangoli fra loro, i due lati coincidenti non fanno parte del contorno e quindi le loro misure non concorrono nel calcolo del perimetro. Se si uniscono i triangoli a due a due, il primo e l'ultimo possono avere sul contorno l'ipotenusa e il cateto maggiore, quindi due cateti minori in comune con i triangoli adiacenti, mentre gli altri due triangoli hanno necessariamente in comune con i precedenti il cateto maggiore e fra loro quello minore. In definitiva il perimetro massimo è 72 – (2 × 2 × 3 + 2 × 2 × 4 + 2 × 3) = 38.
- Cercare poi di disegnare un poligono con tale perimetro.

Voici un exemple Ecco un esempio:



La première version, avait été rédigée par des étudiants en mathématiques, qui ne connaissaient pas encore très bien le RMT. Elle repose sur le calcul du périmètre d'un triangle, 12 cm, multiplié par 6 pour trouver le maximum possible, 72, duquel on retranche le double des longueurs des côtés en commun. C'est typiquement une procédure d'adulte, que nous qualifions « d'experte », généralisée à l'ensemble des assemblages possibles.
Dans la deuxième, on trouve quelques éléments d'appropriation du problème, une procédure par essais non organisés, puis une procédure où les essais sont précédés d'une réflexion sur la prise en compte que le périmètre de l'assemblage doit être composé des plus longs côtés des triangles pour être maximum et pour terminer la procédure « experte », plus détaillée que celle de la première analyse a priori.
Après l'examen des productions d'élèves, on constatera que cette deuxième analyse est encore bien loin de la réalité : le terrain de l'élève. On peut cependant déjà relever une affirmation tout à fait contestable de cette deuxième analyse a priori : *Quelle que soit la figure formée, il y a toujours cinq côtés communs* démentie par le quatrième exemple de l'énoncé (l'assemblage en forme de « maison ») où il y a six côtés communs !!

La prima versione era stata redatta da studenti in matematica che non conoscevano ancora molto bene il RMT. Si basa sul calcolo del perimetro di un triangolo, 12 cm, moltiplicato per 6, per trovare il valore massimo possibile , 72, dal quale si sottrae il doppio delle lunghezze dei lati in comune. Si tratta di una procedura tipicamente di un adulto, che qualifichiamo "da esperto", generalizzata all'insieme degli assemblaggi possibili.
Nella seconda versione troviamo qualche elemento di appropriazione del problema, una procedura per tentativi non organizzata, poi una procedura dove i tentativi sono preceduti da una riflessione sul fatto che il perimetro dell'assemblaggio deve essere composto con i lati lunghi dei triangoli per poter essere massimo e infine qualche elemento di procedura "esperta" più dettagliata di quella della prima analisi a priori.
Dopo l'analisi delle procedure degli allievi, constateremo che questa seconda analisi a priori è ancora lontana dalla realtà: il terreno dell'allievo. Possiamo intanto già rilevare un'affermazione del tutto discutibile: *Qualunque figura si formi i lati in comune sono sempre cinque* smentita dal quarto esempio dell'enunciato (l'assemblaggio a forma di "casa") dove ci sono sei lati in comune!!

2. Les résultats statistiques / I risultati statistici

2.1. Les données brutes / I dati grezzi

Ce tableau des résultats a été établi selon les attributions des points aux productions des 3716 classes auxquelles ont été proposés, dans 15 sections, les problèmes 7 (cat. 5 et 6 dans la version « 4 triangles ») et 13 (cat. 7 et 8 dans la version « 6 triangles ») de la première épreuve du 28e RMT. Ces résultats sont regroupés dans le même tableau, vu la similitude des tâches de résolution.
Questa tabella dei risultati è stata compilata secondo le attribuzioni dei punteggi alle produzioni delle 3716 classi alle quali sono stati proposti, in 15 sezioni, i problemi 7(cat. 5 e 6 nella versione "4 triangoli") e 13 (cat. 7 e 8 nella versione "6 triangoli") della prima prova del 28° RMT. Questi risultati sono stati raggruppati nella medesima tabella, vista la somiglianza dei compiti di risoluzione.

points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	
Cat. 5	221 (34%)	99 (15%)	93 (14%)	120 (19%)	112 (17%)	645	1,7
Cat. 6	442 (36%)	107 (9 %)	164 (13%)	304 (25%)	215(17%)	1232	1,8
Cat. 7	232 (21%)	276 (25%)	207 (19%)	176 (16%)	203 (19%)	1094	1,9
Cat. 8	108 (14%)	132 (22%)	125 (18%)	152 (18%)	228 (23%)	745	2,3
tot	**1003** (27%)	**614** (16%)	**589** (16%)	**752** (20%)	**758** (20%)	**3716**	

On constate immédiatement que les effectif sont élevés et on imagine l'ampleur du travail d'attribution des points par les 15 jurys selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori / Si constata immediatamente che gli elaborati sono molto numerosi e si può immaginare il grande lavoro per l'attribuzione dei punteggi da parte delle 15 sezioni. Secondo i criteri determinati dall'analisi a priori:

4 Dessin correct d'une figure de périmètre 38 (28) cm, avec indication et calcul du périmètre

3 Dessin correct d'une figure de 38 (28) cm de périmètre avec indication du périmètre mais sans le calcul
Ou dessin correct d'une figure de 36 (26) cm de périmètre avec indication et calcul du périmètre

2 Dessin d'un polygone de 38 (28) cm de périmètre sans indication ni calcul du périmètre
Ou dessin correct d'une figure de (38) 28 cm de périmètre mais avec erreur de calcul du périmètre
Ou dessin correct d'une figure de 36 (26) cm avec indication du périmètre mais sans le calcul
Ou dessin correct d'une figure de 34 (24) cm de périmètre avec indication et calcul du périmètre

1 Dessin correct d'une figure de 34 (24) cm avec indication du périmètre, mais sans le calcul
Ou dessin correct d'une figure de périmètre 34 (24) cm, différente de la figure 1
Ou début de recherche cohérent (dessin de plusieurs figures respectant les contraintes, mais sans conclure)

0 Incompréhension du problème (dessin de figures qui ne respectent pas les règles)

4 Disegno corretto di una figura di 38 (28) cm di perimetro con indicazione e calcolo del perimetro

3 Disegno corretto di una figura di 38 (28) cm di perimetro con indicazione del perimetro, ma senza calcolo
oppure disegno corretto di una figura di 36 (26) cm di perimetro con indicazione e calcolo del perimetro

2 Disegno corretto di una figura di 38 (28) cm di perimetro senza indicazione né calcolo del perimetro
oppure disegno corretto di una figura di 38 (28) cm di perimetro ma con errore di calcolo nel perimetro
oppure disegno corretto di una figura di 36 (26) cm di perimetro con indicazione del perimetro, ma senza calcolo
oppure disegno corretto di una figura di 34 (24) cm di perimetro con indicazione e calcolo del perimetro

1 Disegno corretto di una figura di 34 (24) cm di perimetro con indicazione del perimetro, ma senza calcolo
oppure inizio di ricerca coerente (disegno di più figure che rispettano le condizioni, ma senza concludere)

0 Incomprensione del problema (disegno di poligoni che non rispettano le condizioni)
(cat 7 e 8; cat 5 e 6)

2.2. L'interprétation des données statistiques / L'interpretazione dei dati statistici

Les moyennes, proches de 2, sont évidemment à considérer avec circonspection au vu des marges d'interprétation des critères par chacun des 15 jurys.

En particulier, la demande de l'énoncé « *Ecrivez … les calculs que vous avez faits* », renforcée par le critère pour 3 points par la précision « *sans le calcul* » a entraîné une attribution différente des points d'un jury à l'autre. Certains ont exigé des calculs écrits sous forme de sommes ou de sommes de produits pour attribuer les « 4 points », d'autres ont estimé que l'énumération des mesures sur les côtés de la figure et la réponse 38 (ou 28) étaient suffisants, en acceptant que le calcul soit conduit mentalement.

Cet exemple souligne la difficulté de la rédaction des critères, puis de leur interprétation et par conséquent la prudence avec laquelle il faut considérer les moyennes de points. Il ne s'agit que d'indices globaux qui, en général, nous permettent de dire si le problème n'est pas « trop difficile » ou inadapté au niveau des élèves comme lorsque les moyennes se situent aux environs de 1 point, ni « trop facile » ou n'est plus un véritable problème comme lorsque les moyennes sont proches ou supérieures à 3 points.

La lecture des occurrences de points en dit un peu plus sur la signification des résultats. Par exemple, les 20% de « 4 points » et de « 3 points » ajoutés aux 16% de « 2 points », soit 56% pour la ligne des totaux indiquent, à la lecture des trois critères, que près de la moitié des copies produisent une réponse optimale, à quelques nuances près.

On peut donc tirer une première conclusion de ce tableau des résultats : le problème est parfaitement adapté au niveau des élèves ; 20 % l'ont résolu comme l'attendaient ceux qui ont écrit les critères, 20 % ont trouvé une réponse optimale ou presque, sachant que certains jurys estiment (de leur point de vue d'enseignants) qu'il auraient pu décrire mieux leur démarche, 16 % ne sont pas loin du périmètre optimal, 16% n'ont qu'une réussite partielle et les 27% à qui ont été attribués 0 point ont soit rendu une feuille blanche, soit n'ont pas pu s'approprier le problème, soit n'ont pas compris les règles d'ajustement des triangles, soit ne savent pas encore vraiment ce que signifie le périmètre d'une figure composée de triangles (3 ; 4 ; 5).

Le medie, prossime a 2, sono evidentemente da considerare con circospezione tenendo conto dei margini di interpretazione dei criteri di attribuzione dei punteggi da parte dei correttori di ognuna delle 15 sezioni.

In particolare, la domanda dell'enunciato "*Scrivete… i calcoli che avete fatto*", rafforzata dal criterio per 3 punti con la precisazione, "*senza i calcoli*" ha portato ad attribuzioni dei punteggi differente da una commissione all'altra.

Alcune hanno preteso calcoli scritti sotto forma di somme o di somme di prodotti per attribuire i "4 punti", altri hanno pensato che l'enumerazione delle misure sui lati delle figura e la risposta 28 (o 38) fossero sufficienti, accettando che il calcolo fosse stato fatto mentalmente.

Questo esempio sottolinea la difficoltà di redazione dei criteri, poi della loro interpretazione e di conseguenza la prudenza con la quale bisogna considerare la media dei punteggi. Si tratta solo di indici globali che, in generale ci permettono di dire se il problema non è "troppo difficile" o non adatto a livello degli allievi come quando le medie si situano intorno a 1 punto, né "troppo facile", o non è più un vero problema, come quando le medie sono vicine a 3 punti, o anche a 4.

La lettura delle occorrenze dei punteggi dice qualcosa di più sul significato dei risultati. Per esempio, il 20% di "4 punti" e anche di "3 punti" aggiunto al 16% dei "2 punti", cioè il 56% nella riga dei totali indicati, alla lettura dei tre criteri, che circa la metà degli elaborati producono una riposta ottimale, al di là di qualche sfumatura.

Possiamo pertanto tirare una prima conclusione da questa tabella dei risultati: il problema è decisamente adatto al livello degli allievi; il 20% lo hanno risolto come si aspettavano coloro che hanno scritto i criteri, il 20% hanno trovato una risposta ottimale o quasi, sapendo che certe commissioni pensano (dal loro punto di vista di insegnanti) che avrebbero dovuto descrivere meglio la procedura, il 16% non sono lontani dal perimetro ottimale, il 16% hanno solo una riuscita parziale e il 27% al quale è stato attribuito il punteggio "0" hanno consegnato un foglio in bianco, o non sono riusciti ad appropriarsi del problema, o ancora non hanno capito le regole di assemblaggio dei triangoli, o infine non sanno ancora veramente che cosa significhi il perimetro di una figura composta da triangoli (3; 4; 5).

3. Obstacles, erreurs et procédures / Ostacoli, errori e procedure

Les observations qui suivent sont le fruit d'analyses a posteriori de 1216 copies d'élèves de 10 sections du RMT : Bourg-en-Bresse, Cagliari, Franche-Comté, Parma, Romagna, Sassari, Suisse romande et Udine, répartis entre 690 copies du problème 7 (avec 4 triangles, pour les catégories 5 et 6) et 526 du problème 13 (avec 6 triangles, pour les catégories 7 et 8).[1] A ces productions d'élèves s'ajoutent les commentaires de 4 enseignantes ayant proposé le problème dans leur classe et relevé les résultats.[2]

Le osservazioni che seguono sono il frutto di analisi a posteriori di 1216 elaborati di allievi di 10 sezioni del RMT: Bourg-en-Bresse, Cagliari, Franche-Comté, Parma Romagna, Perugia, Puglia, Sassari, Suisse romande e Udine, dei quali 690 riguardanti il problema 7 (con 4 triangoli, per le categorie 5 e 6) e 526 riguardanti il problema 13 (con 6 triangoli, per le categorie 7 e 8). A queste produzioni di allievi si aggiungono i commenti di 4 insegnanti che hanno proposto il problema nella loro classe e hanno preso nota dei risultati.

Les observations ont été relevées par une dizaine de groupes de deux ou trois personnes, elles se sont déroulées dans des endroits différents, pour des raisons liées à la pandémie COVID et sur une période de plusieurs mois, pour aboutir à des analyses a posteriori des copies de leur section. Certaines ont été évoquées lors d'une réunion du Groupe de travail *Géométrie plane pour les grands* (problème 13).

Il n'y avait pas de critères d'analyse a posteriori définis, chacun des petits groupes qui a examiné les copies l'a fait à sa manière, selon ce qu'il jugeait important de relever et a rédigé son compte rendu. Des différences sont apparues

[1] BB (choix de 15 copies de cat. 6 et 18 de cat. 7 et 8), CA (70 de cat. 5 et 6 et 63 de cat 7 et 8), FC (176 de cat. 7 et 8), PG (62 de cat. 5 et 6), PR (130 de cat. 5 et 6), PU (134 de cat. 5 et 6), Romagna (77 de cat. 7 et 8), SS (18 de cat 6 et 60 de cat. 7 et 8), SR (148 de cat. 5 et 6) et 132 de cat. 7 et 8), UD (113 de cat. 5 et 6).

[2] Brunella Brogi (TSN), Luciana Rapposelli (SS), Patrizia Sabatini (SI), Rosanna Sanna (SS).

dans leur présentation et dans les degrés d'approfondissement des analyses mais les contenus présentent une très grande homogénéité : les mêmes procédures se retrouvent d'une section ou d'une catégorie à l'autre, les obstacles ou erreurs sont analogues.

Il a donc été convenu de rédiger une synthèse commune, qui fait l'objet de cet article, en sachant qu'il a fallu faire des choix dans la présentation des exemples ou dans les citations des rapports locaux.

Le osservazioni sono state fatte da una decina di gruppi di due o tre persone, si sono svolte in posti diversi, anche per ragioni legate alla pandemia COVID e su un periodo di diversi mesi, per arrivare ad analisi a posteriori degli elaborati della propria sezione. Di alcune si è parlato durante una delle riunioni del Gruppo di lavoro *Geometria piana per i grandi* (problema13).

Non c'erano dei criteri definiti per l'analisi a posteriori, ognuno dei piccoli gruppi che ha esaminato gli elaborati l'ha fatto a modo suo, secondo ciò che giudicava importante rilevare e ha redatto il proprio rapporto. Le presentazioni sono state un po' diverse nel grado di approfondimento delle analisi, ma i contenuti sono molto omogenei: le medesime procedure si ritrovano da una sezione all'altra o da una categoria all'altra, gli ostacoli o anche gli errori sono analoghi.

Si è pertanto deciso di redigere una sintesi comune che è l'oggetto di questo articolo, ben consci del fatto che sia stato necessario fare delle scelte nelle presentazioni degli esempi o nelle citazioni delle relazioni.

3.1. Les obstacles / Gli ostacoli

3.1.1. L'appropriation / L'appropriazione

Comme pour tout problème du RMT, il y a des obstacles à l'appropriation de la situation qui se révèlent par une « feuille blanche » ou quelques esquisses maladroites qui montrent que le groupe n'a pas pu « entrer dans la problème ». Comme environ 95% des groupes ont pu s'engager dans la tâche, il faut imaginer que l'obstacle pour ces 5 % d'échecs est lié à la dynamique du groupe ou de la classe, c'est-à-dire à l'insuffisance des échanges et communications entre les membres du groupe ou entre les différents groupes de la classe.

La coopération est une nécessité dans la résolution de problèmes dans les conditions des épreuves du RMT. Elle l'est aussi dans la résolution de problèmes en classe, lors de la phase de recherche qui est dévolue à l'élève. Elle ne tombe pas du ciel mais elle s'apprend lors de la phase de mise en commun (qui ne peut pas se dérouler après l'épreuve puisque les élèves y ont résolu des problèmes différents), mais est indispensable dans une résolution en classe. Y prête-t-on une attention suffisante ?

Come per tutti i problemi del RMT, ci sono degli ostacoli relativi all'appropriazione della situazione che si rileva con un "foglio in bianco" o con qualche bozza maldestra che mostra che il gruppo non è riuscito a "entrare nel problema". Poiché circa il 95% dei gruppi sono stati capaci di avviare la risoluzione, possiamo immaginare che l'ostacolo per questo 5 % di insuccesso nell'appropriazione possa essere legato alla dinamica di gruppo o della classe, cioè all'insufficiente comunicazione tra membri del gruppo o tra i diversi gruppi della classe.

La cooperazione è una necessità nella risoluzione di problemi nelle condizioni delle prove del RMT. E lo è anche nella risoluzione di problemi in classe, nella fase di ricerca devoluta all'allievo. Non cade dal cielo ma la si impara nella fase della messa in comune (che non può svolgersi dopo la prova perché gli allievi non hanno affrontato gli stessi problemi), ma è indispensabile nella risoluzione in classe. Vi prestiamo un'attenzione sufficiente?

3.1.2. Les règles d'ajustement des figures / Le regole di costruzione delle figure

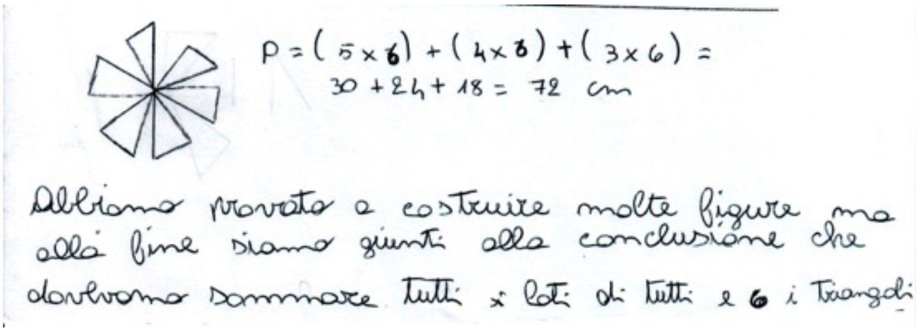
Nous l'avons déjà signalé dans le chapitre **2.** sur l'élaboration des problèmes, dans les compositions de figures les règles de disposition sont délicates. Si on relit attentivement les trois consignes de cet énoncé, on constate que la première - *les triangles ne se superposent pas* - et la troisième - *aucune figure n'a un trou* – sont claires et ont toujours été respectées. C'est la deuxième - *les triangles se touchent par des côtés de même longueur* – qui a été comprise par 10 à 15 % des groupes d'une manière différente des adultes qui ont préparé et relu l'énoncé.

Les *côtés de même longueur* était illustré par l'exemple de la figure 2 de l'énoncé, mais *les triangles se touchent*, ne précise pas qu'il s'agit de tous les triangles.

Lo abbiamo già segnalato nel capitolo **2.** sull'elaborazione dei problemi, nella composizione di figure le regole della disposizione sono delicate. Se si rileggono con attenzione le tre consegne dell'enunciato, si constata che la prima - *che i triangoli non si sovrappongano* – e la terza *che nessuna figura abbia un buco* – sono chiare e sono sempre state rispettate. È la seconda – *che i triangoli siano uniti lungo lati della stessa lunghezza* – che è stata compresa da 10-15% dei gruppi in maniera differente dagli adulti che hanno preparato e riletto l'enunciato.

I *lati della medesima lunghezza* erano illustrati dall'esempio della figura 2 dell'enunciato, ma *i triangoli si toccano* non precisa che si tratta di tutti i triangoli.

Exemple 1 (Cat. 7)



Nous avons essayé de construire de nombreuses figures mais à la fin nous sommes arrivés à la conclusion qu'il faut additionner tous les côtés de chacun des 6 triangles.

Les six triangles, sont esquissés sur papier blanc, en réduction sans distinction sans pouvoir distinguer la forme des triangles. La règle d'assemblage par des côtés communs n'est pas respectée. En revanche le résultat, 72, est cohérent et le calcul, par sommes et produits est correct.

Dans ce premier exemple, aucun des triangles n'a un côté commun avec un autre et l'on peut considérer que la règle d'ajustement des figures n'est pas respectée. Mais dans l'exemple suivant, elle l'est pour chacun des triangles.

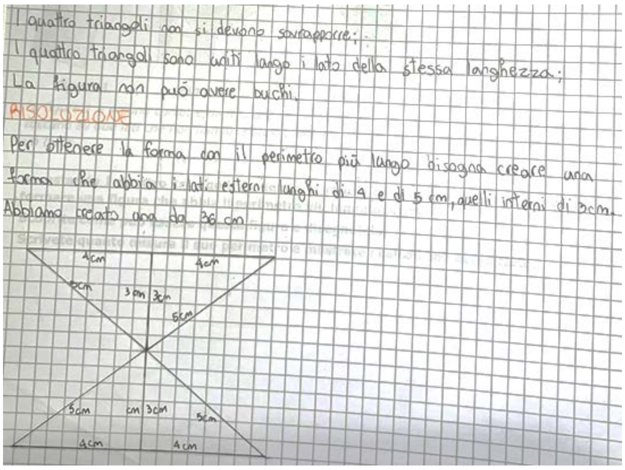
I sei triangoli sono abbozzati su foglio bianco, in una sorta di scala ridotta senza che si possa distinguere la forma dei triangoli. La regola di composizione tramite i lati comuni non è rispettata. Per contro, il risultato, 72, è coerente e il calcolo, per somme e prodotti è corretto.

In questo primo esempio nessuno dei triangoli ha un lato in comune con un altro e possiamo considerare che la regola di sistemazione delle figure non sia rispettata, mentre lo è nell'esempio successivo, per ciascuno dei triangoli.

Exemple 2 (Cat. 6)

Les quatre triangles sont dessinés sur papier quadrillé de 5 × 5 mm, en vraie grandeur, avec les dimensions indiquées ; le périmètre est exact, la raison pour laquelle il faut placer les côtés les plus longs sur l'extérieur de la figure et les côtés communs de 3 cm à l'intérieur est aussi correcte et bien expliquée. Les deux triangles du haut et les deux triangles du bas *se touchent par un côté de même longueur*.

I quattro triangoli sono disegnati su carta a quadretti 5 × 5 mm, in vera grandezza, con le dimensioni indicate: il perimetro è corretto, anche la ragione per la quale si devono sistemate i lati più lunghi all'esterno della figura e i lati comuni di 3 cm all'interno è corretta e ben spiegata. I due triangoli in alto e i due *sono uniti lungo lati della stessa lunghezza*.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>les quatre triangles ne doivent pas se recouvrir,

les triangles se touchent par des côtés de même longueur ;

la figure n'a pas de trou.
Pour obtenir la forme avec le périmètre le plus long il faut créer une forme qui a les côtés extérieurs de 4 et de 5 cm et les côtés intérieurs de 3 cm.
Nous en avons créé une de 36 cm.</td>
</tr>
</table>

(Selon les critères d'attribution des points, cette copie a reçu « 0 point ». Si ses auteurs avaient déposé un recours contre cette attribution, ils auraient certainement pu passer de 0 à 2 ou 3 points ! Ce genre de mésaventure peut se produire, il renforce ce qui est dit précédemment sur la circonspection avec laquelle il faut considérer les points attribués, il montre aussi la difficulté pour les auteurs et lecteurs de problèmes de définir des règles d'ajustement rigoureuses. Mais l'attribution des points est limitée à la période qui suit l'épreuve et n'a plus rien à voir avec ce que deviendra le problème dans son exploitation didactique, lorsqu'on sera libéré de l'obligation de juger les copies ou de « mettre des notes ».)

(Secondo i criteri di attribuzione dei punteggi, questo elaborato ha ricevuto "0 punti". Se i suoi autori avessero "fatto ricorso" contro questo punteggio, avrebbero potuto passare da 0 a 2 ou 3 punti! Questo genere di disavventure può capitare e ciò rafforza quanto detto in precedenza sulla prudenza nel considerare i punteggi attribuiti; mostra anche la difficoltà per gli autori e i lettori del problema per definire in maniera rigorosa le regole di sistemazione dei triangoli. Ma l'attribuzione dei punteggi è limitata al periodo che segue la prova e non ha poi più nulla a che vedere con ciò che diventerà il problema nella sua successiva utilizzazione didattica, quando ci si libererà dall'obbligo di giudicare gli elaborati e di "mettere dei voti").

3.1.3. Les conceptions erronées / Le concezioni errate

Au cours des analyses a posteriori de toutes les sections et pour toutes les degrés, on a trouvé quelques cas (globalement 5 à 10 %) pour lesquels le concept de périmètre d'une figure composée de plusieurs triangles n'est pas encore clair pour tous les élèves.

Parfois il s'agit d'une conception du périmètre élaborée à l'école primaire où l'on présente à l'élève une succession de segments, en ligne fermée, (polygone) et où on lui apprend que « l'aire » est la partie intérieure de polygone et que le « périmètre » est la somme des longueurs de tous les segments. Lorsqu'il y a des segments intérieurs, cette définition ne suffit plus.

Nel corso delle analisi a posteriori di tutte le sezioni e per tutte le categorie, abbiamo trovato alcuni casi (globalmente da 5 a 10%) nei quali il concetto di perimetro di una figura composta da diversi triangoli non è ancora chiaro a tutti gli allievi.

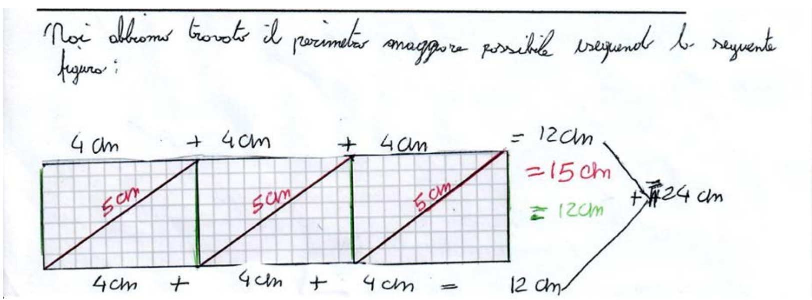
Talvolta si tratta di una concezione del perimetro elaborata alla scuola primaria dove si presenta all'allievo una successione di linee chiuse (poligono) e dove gli si insegna che la sua "area" è la parte interna della figura e che il suo "perimetro" è la somma delle lunghezze di tutti i segmenti. Quando ci sono segmenti interni, questa definizione non è più sufficiente.

Exemple 3 (Cat. 7)

Les élèves ont construit les six triangles sur papier quadrillé (4×4 mm). (La largeur est une approximation de 3 cm représentés par 7 côtés du quadrillage de 4 mm). Les mesures sont indiquées, le périmètre semble décomposé en 24 cm (12 cm + 12 cm, en noir) des six côtés horizontaux, 12 cm (en vert) de quatre côtés verticaux et 15 cm (en rouge) correspondant à la somme de trois côtés obliques.

Gli allievi hanno costruito i sei triangoli su carta quadrettata (4×4 mm). (La larghezza è un'approssimazione di 3 cm rappresentati da 7 lati della quadrettatura di 4 mm). Le misure sono indicate, il perimetro sembra essere scomposto in 24 cm corrispondenti alla somma dei sei lati orizzontali (12 + 12, in nero, in 12 cm (in verde) corrispondenti alla somma di quattro lati verticali e 15 cm (in rosso) corrispondenti alla somma di tre lati obliqui.

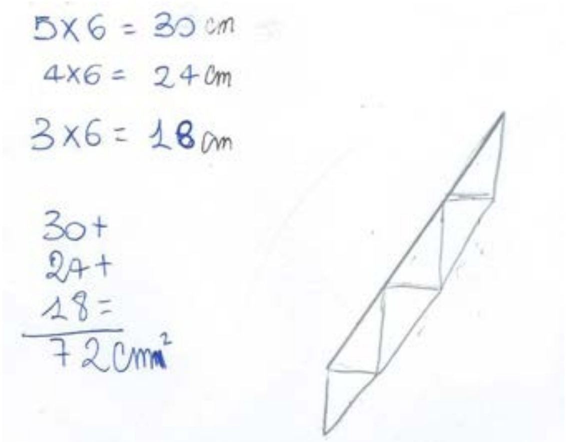
Commentaire des auteurs de l'analyse a posteriori / Commenti degli autori dell'analisi a posteriori: *Errata conoscenza del perimetro: sanno calcolare il perimetro del triangolo ma di fronte alla figura composta considerano anche i lati interni* / *Erreur dans la connaissance du périmètre : ils savent calculer le périmètre du triangle mais, lorsqu'il s'agit d'une figure composés, ils prennent aussi les côtés intérieurs en considération.*



Une deuxième conception rencontrée, est que le périmètre de la figure composée est la somme des périmètres des triangles / Una seconda concezione che è stata evidenziata riguarda il fatto di considerare il perimetro della figura composta come la somma dei perimetri dei triangoli.

Exemple 4 (Cat. 7)

Une figure correcte en forme de parallélogramme (croquis assez précis sur papier blanc) avec réponse 72 cm^2. Cette somme est calculée par types de côtés 5×6, 4×6 et 3×6 en cm. Mais le total est en cm^2 ce qui laisse percevoir une confusion possible entre aires et périmètres / Una figura corretta a forma di parallelogramma (disegno abbastanza preciso su foglio bianco) con risposta 72 cm^2. Questa somma è calcolata con tipi di lati 5 × 6, 4 × 6 et 3 × 6 in cm. Ma il totale è in cm^2, cosa che lascia percepire una confusione possibile tra aree e perimetri.



Abbiamo visto che nel problema riportavano le misure di ogni lato e le abbiamo moltiplicate per i numeri di lati (6 lati) e poi abbiamo addizionato tutti i risultati.
Nous avons vu que les mesures de chaque côté étaient notées et nous les avons multipliées par le nombre des côtés (6 côtés) e puis nous avons additionné tous les résultats.

On trouve encore, dans de rares cas, une troisième conception erronée selon laquelle le périmètre ne varie pas puisque chaque assemblage est composé des mêmes figures. / In rari casi si trova anche una terza concezione errata secondo la quale il perimetro non varia perché ogni raggruppamento è composto dalle medesime figure.

Exemple 5 (Cat 6)

Vu que c'est à chaque fois les mêmes formes donc le périmètre ne change pas.

Visto che ogni volta ci sono le medesime figure allora il perimetro non cambia.

3.1.4. La construction des figures / La costruzione delle figure

L'énoncé demande de dessiner une des figures qui a le plus grand périmètre possible. Pour répondre, les élèves pouvaient travailler par découpage et collage, dessiner sur papier blanc ou sur papier quadrillé, en vraie grandeur ou à l'échelle, tracer les figures à main levée ou à la règle.

Parmi les 526 copies examinées du problème 13, toutes donnent au moins une figure représentant l'assemblage des six triangles. En cas de découpage et collage on ne relève pas d'obstacle à cette construction.

La construction sur papier quadrillé (5 × 5 mm) facilite la tâche, les triangles ont les côtés de l'angle droit sur les lignes du quadrillage ; ce sont des demi-rectangles de (3 × 4) ou (6 × 8) côtés de carrés du quadrillage, à l'échelle 1/2 ou en vraie grandeur. Ce choix de l'échelle n'est cependant jamais mentionné explicitement.

On peut relever, en passant, que le type de papier qui est fourni aux élèves ou sur lequel est photocopié l'énoncé varie d'une section à l'autre et pourrait parfois faciliter la tâche de résolution. Dans certaines régions le quadrillage est de (4 × 4 mm), qui exigerait des nombres décimaux de côtés de carrés sur quadrillage si l'on voulait un dessin en vraie grandeur.

L'enunciato chiede di disegnare una delle figure che ha il perimetro più grande possibile. Per rispondere, gli allievi possono lavorare con ritagli e collage, disegnare su foglio bianco o su carta quadrettata, in grandezza reale o in scala, tracciare figure a mano libera o con il righello.

Tra i 526 elaborati esaminati del problema 13, tutti presentano almeno una figura che rappresenta il raggruppamento dei sei triangoli. Nel caso di ritaglio e collage non si rilevano ostacoli a questa costruzione.

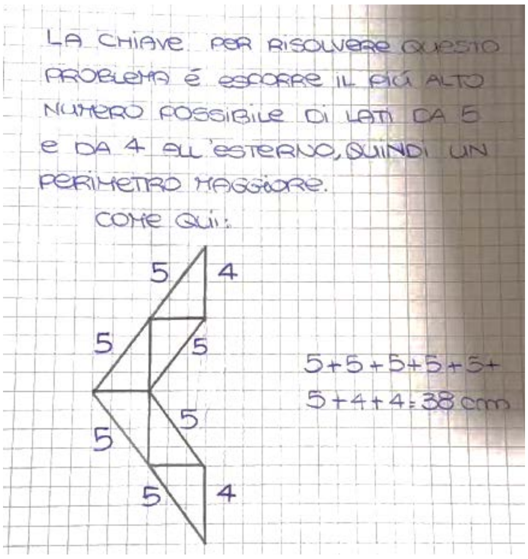
La costruzione su carta quadrettata (5 × 5 mm) facilita il compito, i triangoli hanno i cateti sulle righe della quadrettatura; si tratta di semi rettangoli di (3 × 4) o (6 × 8) lati di quadretti della quadrettatura, in scala 1/2 o in grandezza reale. Questa scelta della scala non è però mai menzionata esplicitamente.

Possiamo peraltro rilevare che il tipo di fogli che sono forniti agli allievi o sui quali è fotocopiato l'enunciato, varia da una sezione all'altra e, talvolta, potrebbe facilitare il compito di risoluzione. In alcuni casi la quadrettatura è di (4 × 4 mm), che esigerebbe dei numeri decimali di lati di quadretto sulla quadrettatura se si volesse fare un disegno in grandezza reale.

Exemple 6 (Cat 7)

L'unité de mesure a passé des « cm » en « côtés du quadrillage », ce qui est une généralisation à relever. Le dessin est facilité par le quadrillage, les mesures « 3 » et « 4 » des longueurs de côtés se « voient » bien. les mesures 5 sont données « de bonne foi ». (On en reparlera dans les exploitations didactiques.) Le raisonnement sur les côtés de 5 cm et de 4 cm est correct et complet.

L'unità di misura è passata da "cm" a "lati dei quadretti della quadrettatura", cosa che rappresenta una sorta di generalizzazione da evidenziare. Il disegno è facilitato dalla quadrettatura, le misure "3" e "4" delle lunghezze dei lati si "vedono" bene. le misure 5 sono prese come "buone". (Ne riparleremo nella utilizzazioni didattiche.) Il ragionamento sui lati di 5 cm e di 4 cm è corretto e completo.



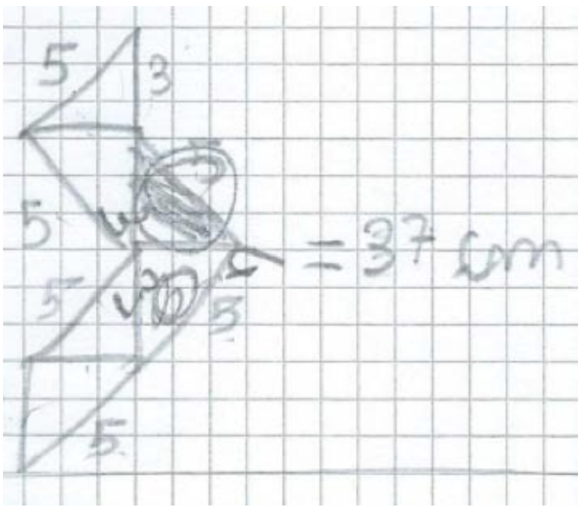
La chiave per risolvere questo problema è esporre il più alto numero di lati da 5 e da 4 all'esterno quindi un perimetro maggiore.

La clé pour résoudre ce problème est d'exposer le plus grand nombre de côtés 5 et 4 à l'extérieur pour avoir ainsi un périmètre maximum.

L'utilisation de papier quadrillé n'assure cependant pas la précision nécessaire, comme dans l'exemple suivant, ou atteindra ses limites lorsqu'il faudra dessiner deux triangles symétriques.

L'utilizzazione di carta a quadretti non assicura comunque la precisione necessaria, come nell'esempio seguente o sarà presto finito lo spazio necessario se si vorrà disegnare due triangoli simmetrici.

<u>Exemple 7</u> (Cat 8)

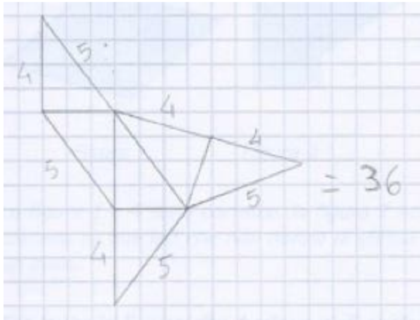


Dans une suite de six figures découvertes par croquis d'essais successifs, l'unité de mesure est le côté du quadrillage, mais de moins en moins précise, On ne distingue pas les « 3 » des « 4 », voir aussi le « 8 ».
La démarche de recherche par essais est évidente.

In una successione di sei figure scoperte con tentativi di schizzi successivi l'unità di misura è il lato dei quadretti, ma i tratti sono via via meno precisi. Non si distinguono i "3" dai "4", e neanche "8".
La procedura per tentativi è evidente.

Exemple 8 (Cat 8)

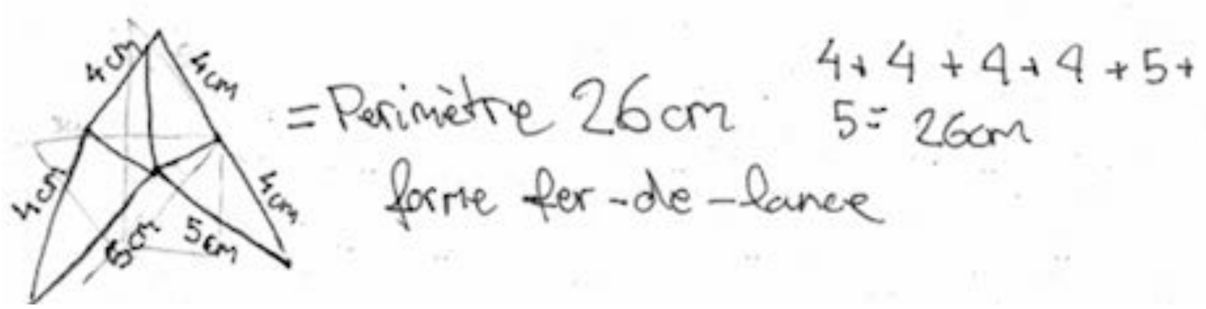
Dans cet assemblage on constate que deux des triangles n'ont pas leurs côtés de l'angle droit sur les lignes du quadrillage.
Lorsqu'on demandera le nombre de côtés de la figure composée lors des exploitations didactiques, la réponse sera-t-elle 7 ou 8 ?
Les deux côtés adjacents de langueur 4 sont-ils alignés ?
In questo raggruppamento possiamo constatare che due dei triangoli non hanno i cateti sulle righe della quadrettatura.
Quando, nell'utilizzazione didattica si chiederà il numero di lati della figura composta La risposta sarà 7 o 8?
I due lati adiacenti di lunghezza 4 sono allineati?



Exemple 9 (Cat 6)

Les quatre triangles sont esquissés sur papier blanc, la figure est très réduite, le triangle du bas à gauche semble isocèle mais les dimensions indiquées et le périmètre sont exacts.

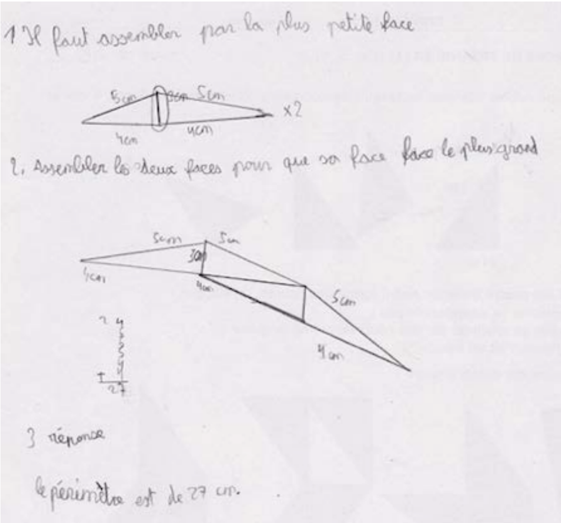
I quattro triangoli sono disegnati a mano libera su un foglio bianco , la figura è molto ridotta, il triangolo in basso a sinistra sembra isoscele, ma le dimensioni indicate e il perimetro sono corretti.



Exemple 10 (Cat 5)

Les quatre triangles sont tracés à la règle sur papier blanc, la figure est très réduite et déformée, le triangle du bas à droite n'est pas rectangle et il y a confusion entre les côtés 4 et 5 ; ce qui entraîne l'erreur 4 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 = 27. Il faut cependant remarquer ici la prise de conscience qu'il faut assembler les triangles par « la plus petite face ». Ce raisonnement est correct mais encore incomplet, les deux « modules » de deux triangles ont deux côtés de 4 cm et les deux autres de 5 cm. Il faut encore que leur ajustement se fasse par les côtés de 4 cm pour obtenir (5 × 4) + (4 × 2) sinon on aura (5 × 2) + (4 × 4) = 26

I quattro triangoli sono tracciati con il righello su foglio bianco, la figura è molto ridotta e deformata, il triangolo in basso a destra non è rettangolo e c'è confusione tra i lati 4 e 5; cosa che induce l'errore 4 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 = 27. Bisogna comunque osservare qui la presa di coscienza del fatto che si debba sistemare i triangoli rispetto alla "faccia più piccola". Questo ragionamento è corretto, ma ancora incompleto, due "moduli" di due triangoli hanno due lati di 4 cm e gli altri due di 5 cm. Bisogna allora che la loro sistemazione si faccia con i lati di 4 cm per ottenere (5 × 4) + (4 × 2), altrimenti si avrà (5 × 2) + (4 × 4) = 26.



1. Il faut assembler par la plus petite face
2. Assembler les deux faces pour que ça face le plus grand
3. réponse
le périmètre est de 27 cm

1. Bisogna raggruppare con la faccia più piccola
2. Raggruppare le due facce perché faccia la più grande
3. Risposta
il perimetro è di 27 cm.

3.2. Les erreurs / Gli errori

Les obstacles mentionnés ci-dessus ne sont pas des erreurs au sens de « faute ». Il s'agit plutôt de connaissances dont la construction n'est pas encore suffisamment élaborée et empêche par conséquent d'arriver à la réponse attendue.

Les « erreurs » ne sont pas nombreuses dans les copies examinées. On y trouve :

- quelques « fautes de calcul » dans les additions des longueurs des segments, qui ne sont pas dues aux constructions imprécises ni aux concepts erronés ;

- quelques confusions de mesures : les assemblages sont cohérents avec les mesures 3, 4 et 5 mais ne sont pas en vraie grandeur et les élèves y prennent des mesures à la règle graduée, en cm.

Gli ostacoli menzionati più sopra non sono errori in senso stretto. Si tratta piuttosto di conoscenze la cui costruzione non è ancora sufficientemente elaborata e di conseguenza impedisce di arrivare alla risposta attesa.

Gli "errori" non sono numerosi negli elaborati analizzati. Troviamo:

- qualche "errore di calcolo" nelle addizioni delle lunghezze dei segmenti, che non sono dovuti alle costruzioni imprecise né a concetti errati;

- qualche confusione nelle misure: i raggruppamenti sono coerenti con le misure 3, 4, e 5, ma non sono in grandezza reale e gli allievi prendono le misure con il righello, in cm.

3.3. Les procédures / Le procedure

Lorsque les élèves se sont approprié le problème, lorsqu'ils ont opté pour une des interprétations des règles d'ajustement, lorsqu'ils ont compris qu'il fallait construire les assemblages pour rechercher leur périmètre ils obtiennent des réponses qui vont de 20 à 28 pour la version à quatre triangles, ou de 30 à 38 pour la version à six triangles.

On peut regrouper les procédures de recherche du maximum selon trois types, lorsque le contenu des copies est suffisamment détaillé :

- Les essais successifs : dessin d'un assemblage, calcul de son périmètre, puis dessin d'un nouvel assemblage et calcul de son périmètre, etc.
- Un raisonnement partiel, sur les plus longs côtés (de 5 cm) qui devraient se trouver à l'extérieur, mais sans contrôle qu'ils y soient tous, ni que les autres côtés de 3 ou de 4 cm soient placés correctement ; ou un autre raisonnement partiel, sur les plus petits côtés (de 3 cm) qui se trouvent à l'intérieur, mais sans contrôle sur les côtés de 4 cm et de 5 cm (voir exemple 10).
- Un raisonnement complet, qui précise que tous les côtés de 5 cm sont à l'extérieur avec les deux autres côtés de 4 cm (voir exemple 6) ou tous les côtés de 3 cm sont à l'intérieur et seulement deux côtés de 4 cm à l'extérieur.

Les huit rapports d'analyses a posteriori des sections, les quatre comptes rendus des classes qui ont expérimenté le problème et les 280 copies de la section SR permettent d'estimer certaines fréquences de réponses. Pour la variante du problème avec quatre triangles, 21 % des copies donnent la réponse maximale, 28 ; 27% arrivent à la réponse 26 ; et 15 % se répartissent entre les réponses 20, 22 ou 24.

Parmi ces 63 % de copies conduisant à ces réponses, environ un tiers décrit la procédure de choix des positions des côtés 5 cm et 3 cm (description non demandée par l'énoncé).

Les observations sont les mêmes pour la variante du problème avec six triangles.

Il y a donc, de la catégorie 5 à la catégorie 8, de nombreuses explications qui témoignent d'une approche déductive de la résolution du problème, qui va bien au-delà d'une simple succession d'essais. Par conséquent, on peut confirmer que le problème, proposé en classe est potentiellement fructueux, en particulier pour les échanges lors de la phase de mise en commun.

Quando gli allievi si sono appropriati del problema, quando hanno optato per un'interpretazione delle regole di sistemazione dei triangoli, quando hanno capito che bisogna costruire dei raggruppamenti per cercare il loro perimetro, ottengono risposte che vanno da 20 a 28 per la versione con quattro triangoli, o da 30 a 38 per la versione con sei triangoli.

Possiamo raggruppare le procedure di ricerca del perimetro massimo secondo tre modalità, quando il contenuto degli elaborati è sufficientemente dettagliato:

- I tentativi successivi: disegno di un raggruppamento, calcolo del perimetro, poi disegno di un nuovo raggruppamento e calcolo del suo perimetro, etc.
- Un ragionamento parziale sui lati più lunghi (di 5 cm) che dovrebbero trovarsi all'esterno, ma senza controllo che tutti lo siano, né degli altri (4 cm e 3 cm) o un altro ragionamento parziale sui lati di 3 cm che sono all'interno, senza controllo sui lati di 4 cm e 5 cm (si veda l'esempio 10).
- Un ragionamento completo che precisa che tutti i lati di 5 cm sono all'esterno con gli altri due lati di 4 cm (si veda l'esempio 6) o tutti i lati di 3 cm sono all'interno e solamente due lati di 4 cm sono all'esterno.

Gli otto rapporti di analisi a posteriori delle sezioni, i quattro resoconti delle classi che hanno sperimentato il problema e i 280 elaborati della sezione della SR, permettono comunque di fare una stima delle frequenze delle risposte. Per la variante del problema con quattro rettangoli, il 21 % degli elaborati dà la risposta massima, 28; il 27% arriva alla risposta 26; e il 15 % si situa tra le risposte 20, 22 o 24.

Tra questo 63 % di elaborati che ottengono tali risposte, circa un terzo descrive la procedura di scelta delle posizioni dei lati di 5 cm e 3 cm (descrizione non richiesta nell'enunciato).

Le osservazioni sono le medesime per la variante del problema con sei triangoli.

Ci sono dunque dalla categoria 5 alla categoria 8, numerose spiegazioni che mostrano un approccio deduttivo alla risoluzione del problema che va ben al di là di una semplice successione di tentativi. Di conseguenza, possiamo confermare che il problema, proposto in classe, è potenzialmente fruttuoso, in particolare per gli scambi all'atto della messa in comune.

3.4. L'écriture des opérations arithmétiques / La scrittura della operazioni aritmetiche

Plusieurs analyses a posteriori locales ont consacré quelques lignes aux écritures des opérations arithmétiques pour le calcul du périmètre, suite à la demande de l'énoncé *Écrivez la mesure de son périmètre et les calculs que vous avez faits.*

Par exemple, le rapport de la section FC relève que *sur 64 copies de catégorie 7 sur lesquelles des calculs de la mesure du périmètre sont présentés, 20 copies proposent une somme de produits (ex : 6 × 5 + 2 × 4), alors que 34 copies proposent une somme (ex : 4 + 5 + 5 + 5 + 4 + 5 + 5 + 5) et 10 copies montrent plusieurs calculs mixtes. Sur les 52 copies de catégorie 8, 9 copies proposent une somme de produits, 35 une somme, 8 des calculs séparés.*

Des constatations analogues sont relevées dans d'autres rapports.

Comme les nombres en jeu (3, 4 et 5) sont très petits, la demande d'écrire les calculs n'était pas des plus appropriées puisqu'ils pouvaient très bien se faire mentalement. C'est sans doute la raison pour laquelle près de 40% des copies ne présentent que les nombres inscrits sur les côtés des assemblages ou n'indiquent que le périmètre maximum ou encore ne présentent que la figure obtenue. Le calcul écrit n'étant pas nécessaire, la demande a simplement été oubliée. (Cet oubli a coûté un point à ces copies selon les critères d'attribution des points ! Cependant, ici encore, on sera débarrassé de cette attribution lorsque le problème sera proposé en classe.)

Il faut remarquer encore que, vu le caractère additif du « périmètre », les nombres en présence sont des mesures de longueurs de segments, en cm ou côtés du quadrillage. Lorsque des produits apparaissent dans les écritures, l'un des facteurs est une mesure de longueur, l'autre est un « nombre de fois ».

Diverse analisi a posteriori locali hanno dedicato qualche riga alle scritture delle operazioni aritmetiche per il calcolo del perimetro, a seguito della richiesta dell'enunciato *Scrivete quanto misura il suo perimetro e mostrate i calcoli che avete fatto.*

Per esempio, il rapporto della sezione FC rileva che su *64 elaborati di categoria 7 nei quali sono presenti calcoli per la misura del perimetro, 20 elaborati presentano una somma di prodotti (ex: 6 × 5 + 2 × 4), mentre 34 elaborati propongono una somma (ex: 4 + 5 + 5 + 5 + 4 + 5 + 5 + 5) e 10 elaborati mostrano vari calcoli misti* .

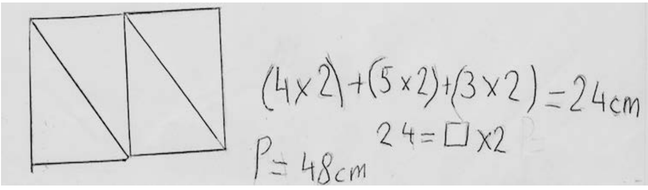
Sui 52 elaborati di categoria 8, 9 elaborati propongono una somma di prodotti, 35 elaborati una somma, 8 elaborati calcoli separati.

Si trovano constatazioni analoghe in altri rapporti.

Poiché i numeri in gioco (3, 4 e 5) sono molto piccoli, la richiesta di scrivere i calcoli non era delle più appropriate visto che si potevano fare mentalmente. Questa è senz'altro la ragione del fatto che circa il 40% degli elaborati riporta solo i numeri scritti sui lati dei raggruppamenti o indicano solo il perimetro massimo o ancora riportano solo la figura ottenuta. Poiché il calcolo scritto non era necessario, la domanda è stata semplicemente dimenticata. (Questa dimenticanza è costata un punto a tali elaborati, secondo i criteri di attribuzione dei punteggi! Comunque, anche nel caso di questo problema, ci si sbarazzerà dell'attribuzione dei punteggi, quando il problema sarà proposto in classe).

Bisogna anche osservare che, visto il carattere additivo del "perimetro", i numeri presenti sono misure di lunghezze di segmenti, in cm o lati dei quadretti. Quando appaiono dei prodotti nelle scritture, uno dei fattori è una misura di lunghezza, l'altro è un "numero di volte".

Exemple 11 (Cat 6)

	Dans cette conception du « périmètre - somme de tous les segments de l'assemblage », les facteurs « 2 » sont des « nombres de fois ». Les facteurs « 4 », « 5 » et « 3 » des mesures de longueurs. In questa concezione del "perimetro – somma di tutti i segmenti del raggruppamento", i fattori "2" sono "numeri di volte". I fattori "4°", "5" e "3" sono misure di lunghezze.

Ce type de constatation peut être utile en vue des exploitations didactiques, lors de la phase de mise en commun et, surtout, dans les activités de consolidation et d'application (proposées dans le chapitre 6), où il faudra confronter les connaissances sur les périmètres avec celles sur les aires, où interviennent des produits de longueurs.

Questo tipo di constatazione può essere utile in vista delle indicazioni didattiche, nella fase della messa in comune e, soprattutto nelle attività di consolidamento e applicazione (proposte nel capitolo 6), dove bisognerà confrontare le conoscenze sui perimetri con quelle sulle aree, nelle quali intervengono prodotti di lunghezze.

4. Tâche de résolution et savoirs mobilisés / Compiti per la risoluzione e saperi mobilizzati

Après avoir découvert la réalité de la tâche de résolution par les élèves, il est nécessaire de revenir à l'analyse a priori imaginée par les adultes et de la réécrire.

Il ne s'agit pas ici de la critiquer ou d'en révéler les lacunes, mais de s'approcher d'une description plus proche de la tâche effective pour sensibiliser l'enseignant qui va reprendre le problème, en sachant que les nouvelles expérimentations permettront à leur tour d'affiner les analyses précédentes.

Dopo aver scoperto la realtà del compito di risoluzione degli allievi, è necessario ritornare all'analisi a priori immaginata dagli adulti e riscriverla.

Non si tratta qui di criticarla o di rilevarne le lacune, ma di avvicinarsi a una descrizione più vicina al compito effettivo per sensibilizzare l'insegnante che riprenderà il problema, sapendo che le nuove sperimentazioni permetteranno a loro volta di affinare le analisi precedenti.

4.1 Les tâches / I compiti

- L'appropriation : comprendre qu'il y a un très grand nombre d'assemblages possibles et que les longueurs de leurs « pourtours » peuvent être différents, bien que les triangles donnés soient tous égaux, même s'ils sont dans des positions différentes.
- Une observation attentive des exemples pour s'approprier les règles d'ajustement (qu'il faudra modifier et illustrer par des exemples permettant d'éviter les interprétations différentes).
- La construction des assemblages (découpage, dessin sur quadrillage, dessin sur papier blanc).
- La recherche du périmètre maximum (par essais progressifs ou par raisonnements logico-déductifs sur les longueurs des côtés à placer sur le pourtour et/ou à l'intérieur de l'assemblage).

Au vu de la très grande diversité des modalités de calcul du périmètre, il faut renoncer à entrer dans le détail des opérations, comme à la procédure « experte » à partir de la somme des périmètres des six triangles à laquelle on soustrait les côtés situés à l'intérieur de l'assemblage qui n'est pas apparue dans les copies examinées.

- L'appropriazione: capire che c'è un gran numero di raggruppamenti o costruzioni possibili e che le lunghezze dei loro "contorni" possono essere diverse anche se i triangoli utilizzati sono tutti uguali, benché in posizioni differenti!

- Un'osservazione attenta degli esempi per appropriarsi delle regole di sistemazione (che bisognerà modificare e illustrare con esempi che permettano di evitare le diverse interpretazioni delle regole).

- La costruzione dei raggruppamenti (ritagli, disegni su carta quadrettata, disegni su carta bianca).

- La ricerca del perimetro massimo (per tentativi progressivi o con ragionamento logico-deduttivo sulle lunghezze dei lati da sistemare sul contorno e/o all'interno del raggruppamento).

In vista della grande diversità delle modalità del calcolo del perimetro, bisogna rinunciare a entrare nel dettaglio delle operazioni, così come alla procedura "esperta" a partire dalla somma dei perimetri dei sei triangoli alla quale si sottraggono i lati situati all'interno del raggruppamento, che non è apparsa negli elaborati analizzati.

4.2 Les savoirs / I saperi

Les savoirs nécessaires sont évidemment la connaissance du terme « périmètre » d'une figure géométrique du plan et l'addition de nombres naturels qui peut s'effectuer par calcul mental.

Il y a cependant d'autres savoirs, connaissances ou compétences, absolument nécessaires pour conduire les procédures de résolution. Ceux-ci ne figurent pas explicitement dans les programmes et sont souvent ignorés par les manuels. L'analyse a priori ne les avait non plus pas mentionnés et ce sont les élèves qui nous les ont révélés. Par exemple :

- Savoir que les périmètres ne s'additionnent pas dans la composition de figures car les côtés « collés » ne sont pas pris en compte dans le périmètre de la figure composée, mais que, l'aire de la figure composée est la somme des aires de ses parties.

- Être conscient que les mesures données des côtés des triangles sont en centimètres mais pourraient l'être aussi en côtés de carrés d'un quadrillage ou en toute autre unité.

- Être capable de faire des croquis suffisamment précis. Les essais en vraie grandeur prennent du temps et occupent beaucoup de place ; alors que les essais sur quadrillage sont plus économiques, à condition de conserver les proportions (dessins « à l'échelle »), et donc de comprendre qu'il s'agit qu'on peut ne s'occuper que du nombre de carreaux 3 et 4 sur les côtés de l'angle droit.

I saperi necessari sono evidentemente la conoscenza del termine "perimetro" di una figura geometrica piana e l'addizione di numeri naturali che si può effettuare a mente.

Ci sono comunque altri saperi, conoscenze o competenze, assolutamente necessari per sviluppare le procedure di risoluzione. Quelli che non figurano esplicitamente nei programmi e sono spesso ignorati dai testi scolastici. Anche l'analisi a priori non li aveva citati e sono gli allievi ad averceli menzionati. Per esempio:

- Sapere che i perimetri non si addizionano nella composizione di figure perché il lati comuni non sono presi in considerazione nel perimetro della figura composta, ma che l'area della figura composta è la somma delle aree delle sue parti.

- Essere coscienti che le misure date dei lati dei triangoli sono in centimetri, ma potrebbero anche essere in lati dei quadretti della quadrettatura o in una qualunque altra unità.

- Essere capaci di fare dei disegni su carta bianca sufficientemente precisi. I tentativi in grandezza reale richiedono tempo e occupano molto spazio, mentre i tentativi su carta quadrettata sono più economici, a condizione di conservare le proporzioni (disegni "in scala"), e dunque di capire che si tratta di tener conto solo del numero di quadretti 3 e 4 sui cateti..

5. Exploitation didactique / Indicazioni didattiche

On arrive ici à la phase la plus délicate et complexe d'un problème de rallye, lorsqu'il devient le point de départ d'une activité en classe. On quitte l'analyse *a posteriori* pour entrer dans une réflexion *a priori* sur une pratique future, mais déjà éclairée par toutes les données recueillies précédemment et par quatre expérimentations.

La balle est alors dans le camp de l'enseignant.

- Il choisit le problème selon les besoins de ses élèves.

- Il détermine les modalités de la résolution : matériel à disposition, formation des groupes, durée, … (la tâche étant entièrement dévolue aux élèves).

- Il organise la (les) mise(s) en commun où la parole est aux élèves et où l'enseignant intervient progressivement pour orienter les débats sur les notions qu'il juge opportunes.

- Il dirige la (les) phase (s) d'institutionnalisation des savoirs apparus lors des débats.

- Il conçoit un « parcours » didactique pour appliquer, consolider, approfondir … les savoirs qu'il juge importants dans le contexte du problème devenu familier aux élèves.

Ce scénario est évidemment celui qui découle des options didactiques du RMT : ce sont les élèves qui construisent leurs connaissances, en coopération, alors que l'enseignant a la tâche de stimuler et orienter les débats vers les savoirs. Tâche beaucoup plus délicate que celle de « montrer », « d'expliquer », « d'aider », « corriger », « juger », c'est-à-dire « d'enseigner », selon sa définition « transmettre un savoir ».

Les comptes rendus des membres du Groupe géométrie qui ont proposé le problème à leurs élèves montrent que le problème *Assemblage de triangles*, proposé en classe dans une conception socio-constructiviste, peut s'insérer parfaitement dans un parcours d'apprentissage. A titre d'exemples, voici quelques extraits ce ces rapports.

Si arriva qui alla fase più delicata e complessa di un problema del nostro rally, quando diventa il punto di partenza di un'attività in classe. Si lascia l'analisi *a posteriori* per entrare in una riflessione *a priori* su una pratica futura, ma già messa in chiaro da tutti i dati raccolti in precedenza e da quattro sperimentazioni.

La palla è ora nel campo dell'insegnante.

- Sceglie il problema secondo i bisogni dei suoi allievi.

- Determina le modalità di risoluzione: materiale a disposizione, formazione dei gruppi, durata,… (il compito è poi devoluto interamente agli allievi).

- Organizza la (le) messa (e) in comune dove la parola è agli allievi e dove l'insegnante interviene progressivamente per orientare il dibattito sulle nozioni che giudica opportune.

- Dirige la (le) fase (i) di istituzionalizzazione dei saperi venuti alla luce nel corso del dibattito.

- Progetta un "percorso" didattico per applicare, consolidare, approfondire… i saperi che giudica importanti nel contesto del problema divenuto familiare agli allievi.

Questo scenario è evidentemente quello che discende dalle opzioni didattiche del RMT: sono gli allievi che costruiscono le loro conoscenze, in collaborazione, mentre l'insegnante ha il compito di stimolare e orientare il dibattito verso i saperi. Compito molto più delicato di quello di "mostrare", "spiegare", "aiutare", "correggere", "giudicare", cioè di "insegnare" secondo la sua definizione di "trasmettere un sapere".

I rapporti dei membri del Gruppo geometria che hanno presentato *Il puzzle di triangoli* ai propri allievi mostrano come, proposto in classe in una concezione socio-costruttivista, possa inserirsi perfettamente in un percorso di apprendimento. A titolo di esempio, riportiamo qui di seguito alcuni estratti di tali rapporti

Rosanna[3] (Cat. 6, version du problème avec 4 triangles / versione del problema con 4 triangoli)

Un esempio relativo alla ricchezza della messa in comune dove l'insegnante riesce a orientare il dibattito verso le nozioni che le sembrano interessanti e verso l'utilizzazione della situazione con nuove attività.

Le osservazioni sono state tante e gli allievi facevano a gara per scoprire nuove osservazioni come se fosse un gioco.

Successivamente ho mostrato la seguente figura (una figura prodotta dagli allievi dove i quattro triangoli, di diversi colori, sono disposti a forma di trapezio isoscele) *in cui non erano state indicate le lunghezze dei lati. Ho proposto agli allievi di scoprire il perimetro e di indicare le strategie che potevano essere utilizzate per relativo calcolo.*

Inizialmente hanno proposto di sommare le lunghezze di tutti i lati; successivamente qualcuno ha suggerito di sommare prima i lati di uguale lunghezza e il risultato ottenuto sommarlo alla misura degli altri lati, altri ancora hanno suggerito di utilizzare la moltiplicazione anziché sommare i lati di uguale lunghezza…. Insomma… anche questa discussione è stata molto ricca.

… si sono soffermati sui triangoli, come erano accostati, se erano uguali o diversi; poi hanno esaminato le lunghezze dei lati. Successivamente un'allieva ha osservato che entrambe le figure erano formate dallo stesso

[3] Un'attività in classe similare è stata svolta anche da Luciana Rapposelli nella sua classe di categoria 6.

numero di triangoli, ma il perimetro era diverso perché i lati esterni avevano lunghezze diverse (speravo che qualcuno parlasse dell'area delle figure ma non è emerso).

Ho posto la domanda: "Quali osservazioni potete fare riguardo all'area delle due figure?" Alcuni hanno affermato con sicurezza che l'area era diversa, non poteva essere uguale se la forma delle figure era diversa. Sembravano tutti convinti poi un'alunna (speciale!) timidamente ha affermato che forse l'area era la stessa perché entrambe le figure erano formate dagli stessi pezzi e questi pezzi erano tra loro uguali. Si riaccende la discussione e molti si mostrano d'accordo con l'affermazione della compagna, altri no. (Proporrò in seguito agli allievi di individuare delle strategie per confrontare le aree delle figure).

La discussione è stata molto efficace per:

- potenziare le capacità di osservazione;

- per verificare se le figure realizzate rispettavano o meno le condizioni poste dal problema.

L'osservazione delle figure potrebbe essere utilizzata per classificare i triangoli, gli angoli, definire la condizione di perpendicolarità dei lati da loro definiti "dritti" ecc…

Il problema offre numerosi spunti per sviluppare concetti importanti come ad esempio quelli di perimetro, isoperimetria, area, equiestensione, …

Un exemple de la richesse d'une mise en commun, de la manière dont l'enseignant arrive à orienter les débats vers les notions qui lui semblent intéressantes, et vers l'exploitation de la situation avec de nouvelles activités.

Les observations étaient nombreuses et les élèves s'ingéniaient à en trouver de nouvelles comme s'il s'agissait d'un jeu.

Ensuite l'ai montré la figure suivante (une figure produite par les élèves où les quatre triangles, de couleurs différentes, sont disposés en trapèze isocèle) *sur laquelle les longueurs des côtés n'étaient pas indiqués. J'ai proposé aux élèves d'en découvrir le périmètre et d'indiquer les stratégies qui pouvaient être utilisées pour le calcul.*

Au début, ils ont proposé d'additionner les longueurs de tous les côtés ; puis quelqu'un a suggéré de commencer par l'addition des côtés de même longueur et d'ajouter au résultat obtenu la mesure des autres côtés ; d'autres ont encore suggéré d'utiliser la multiplication à la place de l'addition pour les côtés de même longueur … En fait, cette discussion s'est révélée aussi très riche.

… Ils se sont concentrés sur les triangles, comment ils étaient juxtaposés, s'ils étaient identiques ou différents ; puis ils ont regardé les longueurs des côtés. Par la suite, un élève a observé que les deux figures étaient formées par le même nombre de triangles, mais que le périmètre était différent car les côtés extérieurs avaient des longueurs différentes (j'espérais que quelqu'un parlerait de l'aire des figures mais cela ne s'est pas produit).

J'ai posé la question "Quelles observations pouvez-vous faire concernant l'aire des deux figures.?" Certains ont affirmé avec assurance que l'aire était différente, qu'elle ne pouvait pas être la même si la forme des figures était différente. Ils semblaient tous convaincus, puis une élève (spéciale !) a déclaré timidement que l'aire était peut-être la même parce que les deux figures étaient constituées des mêmes pièces et que ces pièces étaient les mêmes. La discussion est ravivée et beaucoup sont d'accord avec la déclaration de leur compagne, d'autres non. (Je proposerai plus tard aux élèves d'identifier des stratégies pour comparer les aires des figures).

Patrizia (Cat. 6, version du problème avec 4 triangles / versione del problema con 4 triangoli)

Un altro esempio dell'apporto della messa in comune e di sperimentazione della situazione con nuove attività: la ricerca di tutte le figure con perimetro massimo, le proprietà dei poligoni,…

… L'attività è proseguita con la ricerca di tutte le figure con perimetro massimo e questa fase, dove ogni alunno ha cercato di arricchire la lista, è stata particolarmente coinvolgente e niente affatto facile perché molto spesso il poligono presentato ai compagni era già stato disegnato in posizione diversa e non riconosciuto. In questa fase abbiamo anche cercato una modalità per procedere con una ricerca ordinata, lasciando fissi 2 triangoli e componendo gli altri due nelle varie posizioni possibili.…

La sperimentazione si è rivelata una vera e propria miniera di spunti didattici: un'occasione per affrontare la nomenclatura dei poligoni, parlare di concavità e convessità, per gettare le prime basi per il riconoscimento delle proprietà delle figure, per far lavorare attivamente gli allievi sulla congruenza, per consolidare una ricerca ordinata delle soluzioni.

Il problema ha inoltre avuto l'enorme merito di far emergere dubbi relativi al concetto di poligono e di perimetro; dilemmi fondamentali, quanto nascosti e difficilmente identificabili dai docenti.

La sperimentazione, come spesso succede con i problemi dell'ARMT, è stata particolarmente inclusiva e anche in una classe così disordinata e formata da individui competitivi tra loro, ha mostrato quanto sia importante la cooperazione e la costruzione condivisa della risposta: il tentativo, anche non corretto, di un compagno quando accolto e compreso può essere lo spunto su cui costruire il proprio contributo.

Un autre exemple de l'apport de la mise en commun et d'exploitation de la situation avec de nouvelles activités : la recherche de toutes les figures avec périmètre maximum, les propriétés des polygones, …

… L'activité s'est poursuivie avec la recherche de toutes les figures de périmètre maximum et cette phase, où chaque élève essayait d'enrichir la liste, a été particulièrement engageante et pas du tout facile car très souvent le polygone présenté aux camarades avait déjà été dessiné dans des positions différentes et non reconnu. Dans cette phase, nous avons également cherché un moyen de procéder à une recherche ordonnée, en laissant 2 triangles fixes et en composant les deux autres dans les différentes positions possibles.

L'expérimentation s'est avérée une véritable mine d'idées didactiques : une occasion de traiter de la nomenclature des polygones, de parler de concavité et de convexité, de poser les premières bases pour la reconnaissance des propriétés des figures, de faire travailler activement les élèves sur la congruence, pour consolider une recherche ordonnée de solutions.

Le problème a aussi l'énorme mérite de soulever des doutes quant à la notion de polygone et de périmètre ; dilemmes fondamentaux, comme cachés et difficiles à identifier par les enseignants.

L'expérimentation, comme cela arrive souvent avec les problèmes d'ARMT, a été particulièrement inclusive et a montré que, même dans une classe aussi hétérogène composée d'individus compétitifs, à quel point la coopération et la construction partagée de la réponse sont importantes : la tentative d'un camarade, même incorrecte bien prise en compte et comprise, peut être le point de départ sur lequel construire sa contribution

6. Quelques idées d'application, consolidation et extension pour l'exploitation didactique du problème en classe / Alcune idee di applicazione, consolidazione ed estensione per l'utilizzo didattico del problema in classe

(pour ne pas gaspiller tout le travail effectué lors de la résolution)
(per non sprecare il lavoro svolto durante la risoluzione).

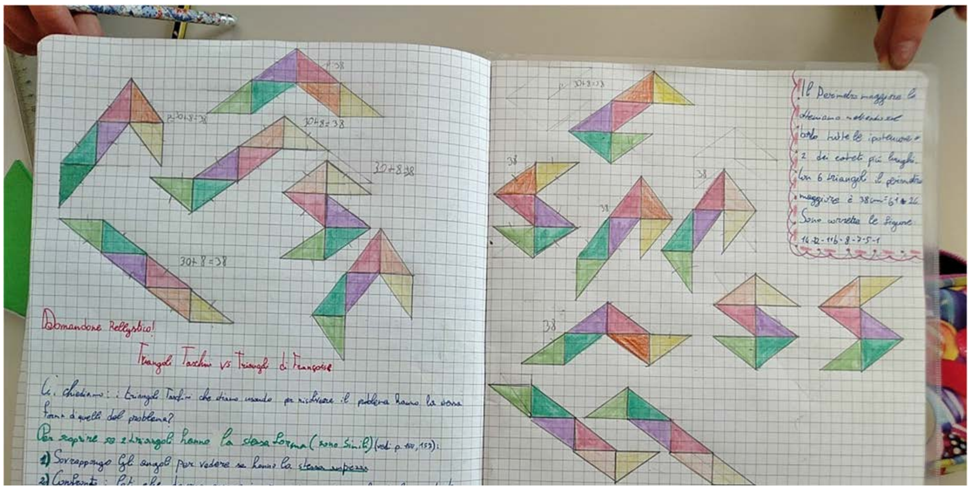
6.1. Construction de figures / Costruzione di figure

Combien existe-t-il de figures différentes, de 38 cm de périmètre formées des six triangles ? (Comme par exemple celles trouvées par la classe lors de la résolution du problème)
Quante figure diverse, con perimetro di 38 cm, composte dai sei triangoli, esistono? (Come per esempio quelle trovate dalla classe durante la risoluzione del problema)

L'enseignant choisi la manière de confronter les découvertes pour vérifier collectivement celles qui sont nouvelles et éliminer celles qui sont déjà trouvées. (Par exemple, on peut les afficher sur un panneau). Il peut proposer de travailler pas découpages pour la recherche puis de dessiner les solutions sur papier quadrillé ou sur papier blanc.
L'insegnante sceglie la modalità per confrontare le nuove scoperte, per verificare collettivamente quelle nuove ed eliminare quelle già trovate. (Ad esempio, si possono affiggere su un cartellone). L'insegnante, per la ricerca delle figure, potrebbe suggerire di lavorare con il ritaglio e poi disegnare le soluzioni su fogli quadrettati o bianchi**.**

En une heure de recherche, les élèves font largement appel aux isométries : symétries axiales, rotations, translations. Ils font aussi une belle activité de dessin géométrique.
In un'ora di lezione, gli allievi fanno ampio uso delle isometrie: simmetrie assiali, rotazioni, traslazioni. Eseguono anche un'ottima attività di disegno geometrico.
Exemple 12 (Classe de Brunella TSN cat. 8)
Les élèves de cette classe ont recherché, et trouvé les différents assemblages des six triangles de 38 cm de périmètre. Il y a un peu trop sur ce cahier. Au lecteur de découvrir les doublons!
Gli alunni di questa classe hanno ricercato e trovato i differenti assemblaggi dei sei triangoli di 38 cm di perimetro. C'è un po' troppo su questo quaderno. Sta al lettore scoprire i doppioni!

Ecco alcune foto dei nostri quaderni / Voici quelques photos de nos cahiers :



Développement : Combien existe-t-il de « figures » différentes ? de tous les périmètres possibles, de 38 au plus petit)

Sviluppo ulteriore: quante figure differenti esistono? Di tutti i perimetri possibili, da 38 al più piccolo.

Il s'agit d'une recherche à long terme qui peut se faire à la maison, en devoirs, sous forme de concours.

Si tratta di una ricerca a lungo termine che si può fare a casa, come compito, sotto forma di competizione.

6.2. Vers les fonctions ou écritures littérales / Verso le funzioni o scritture letterali

Un clin d'œil vers les fonctions du premier degré ou les « écritures littérales » ou les équations.

Un cenno sulle funzioni di primo grado o sulle "scritture letterali" o sulle equazioni.

Quel est le périmètre maximum d'une figure composée de 20 triangles ?

Qual è il perimetro massimo di una figura composta da 20 triangoli?

Ou, avec un peu plus d'ambition, partir directement de la question qui exige une « mis en équation.

Oppure, con un po' di ambizione in più, partire direttamente dalla domanda che richiede la «messa in equazione».

Combien de nos triangles a-t-on utilisé pour former une figure avec un périmètre maximum de 218 cm ?

Quanti dei nostri triangoli sono stati utilizzati per formare una figura con un perimetro massimo di 218 cm?

Cette deuxième suggestion implique que les élèves sont convaincus que 38 est le périmètre maximum pour une figure composée de 6 triangles à la suite de la mise en commun de la résolution du problème d'origine ou de la proposition 1 précédente.

Questo secondo suggerimento implica che gli allievi siano convinti che 38 sia il perimetro massimo per una figura composta da 6 triangoli in seguito alla messa in comune della soluzione del problema originale o della proposizione 1 precedente.

Ce problème complémentaire ne peut pas être proposé dans les conditions des épreuves du RMT car le maître devra peut-être faire une mise en commun intermédiaire pour voir apparaître la nécessité de dresser un inventaire systématique.

Questo problema complementare (o aggiuntivo) non può essere proposto nelle condizioni delle prove del RMT perché l'insegnante, forse, dovrà fare una messa in comune intermedia per verificare la necessità di redigere un inventario sistematico.

On rencontre des tâches analogues dans les problèmes de la banque : famille SN / Si riscontrano compiti analoghi nei problemi della banca nell'ambito della famiglia SN - Traiter une suite numérique, -/ Gestire una successione numerica par exemple Grilles d'allumettes (ral. 13.I.09 ; cat. 5-7) Griglie di flammiferi (ral. 13.I.09 ; cat. 5-7)

Lors d'une mise en commun, on peut souligner le fait que, les deux grandeurs en jeu sont le nombre de triangles (nombre naturel pair) et le périmètre maximum (mesure de longueur en cm) et que chaque valeur de la première correspond à une valeur de la deuxième (tableau, flèches, listes ordonnées …). Pour le cas général il est pratique d'utiliser une lettre pour indiquer le nombre de triangle et une autre pour indiquer le périmètre maximum, du genre :

$n \longrightarrow p = 8 + 5n$

All'atto della messa in comune, si può sottolineare il fatto che le due grandezze in gioco sono il numero di triangoli (numero naturale pari) e il perimetro massimo (misura di lunghezza in cm) e che ogni valore della prima corrisponde ad un valore della seconda (tabella, frecce, elenchi ordinati...). Per il caso generale è conveniente utilizzare una lettera per indicare il numero di triangoli e un'altra per indicare il perimetro massimo, del genere

$n \longrightarrow p = 8 + 5n$

On arrive ainsi à une écriture littérale bien pratique qui permet d'exprimer l'une des grandeurs en fonction de l'autre.
Si arriva cosi a una scrittura letterale molto pratica che permette di esprimere una grandezza in funzione dell'altra.
C'est à l'enseignant de décider jusqu'où il souhaite développer l'activité au profit de la préparation aux équations, d'une approche du calcul littéral, de la notion de fonction ou même d'une représentation graphique.
Spetta all'insegnante decidere fino a che punto sviluppare l'attività a vantaggio della preparazione alle equazioni, di un approccio al calcolo letterale, della nozione di funzione o anche di una rappresentazione grafica.

6.3. Figures à l'échelle / Figure in scala

Comme les copies examinées montrent qu'il y a plusieurs échelles adoptées spontanément par les élèves : la vraie grandeur (ou échelle 1/1) et les réductions utilisant le quadrillage (échelle 1/2 avec les carreaux de 5 × 5 mm ; échelle 2/5 ou 4/10 avec les carreaux de 4 × 4 mm), on voit immédiatement une exploitation de l'activité pour la construction de connaissance dans le domaine des similitudes et des « échelles », soit dans le domaine des fractions et pourcentages.
Gli elaborati esaminati mostrano che ci sono parecchie scale adottate spontaneamente dagli allievi: la grandezza reale (scala 1/1) e le riduzioni utilizzando la quadrettatura (scala 1/2 con i quadrati di 5 × 5 mm, scala 2/5 o 4/10 con i quadrati di 4x4 mm), si vede immediatamente che l'attività può essere utilizzata per la costruzione di conoscenze nell'ambito delle similitudini e delle «scale», sia nell'ambito delle frazioni che delle percentuali.

Une esquisse d'un problème qui pourrait être proposé par le maître, même oralement après une mise en commun des manières de résoudre le problème :
Una bozza di un problema che potrebbe essere proposto dall'insegnante, anche oralmente, dopo aver condiviso dei modi per risolvere il problema.

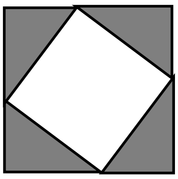
Dans la classe il y a des élèves qui ont dessiné les triangles en vraie grandeur sur papier blanc. (A)
Il y en a aussi qui ont dessiné des triangles sur papier quadrillé 5 × 5 mm avec les côtés de l'angle droit de 3 carreaux et de 4 carreaux. Leurs triangles sont plus petits. (B) Combien mesurent les hypoténuses ?
Et d'autres encore sur du papier quadrillé de 4 × 4 mm (C) Combien mesurent les hypoténuses ?
Allez voir sur une photocopieuse ce qu'il faut régler pour obtenir, à partir de figures en vraie grandeur des figures de grandeur B, puis de grandeur C !!

Nella classe ci sono degli allievi che hanno disegnato i triangoli in grandezza reale su fogli bianchi. (A).
Ci sono anche quelli che hanno disegnato dei triangoli su carta quadrettata 5 × 5 mm con i cateti di 3 piastrelle e di 4 piastrelle (B). I loro triangoli sono più piccoli. Quanto misurano le ipotenuse?
E altri ancora che hanno disegnato dei triangoli su carta quadrettata 4 × 4 mm, con i cateti di 3 piastrelle e di 4 piastrelle. (C).
Andate a vedere sulla fotocopiatrice della scuola (altri dispositivi di riduzione) che cosa bisogna regolare per ottenere, a partire da figure in grandezza reale (A) delle figure di grandezza B, poi di grandezza C!

6. 4. Carrés et triangles rectangles / Quadrati e triangoli rettangoli

L'énoncé du problème *Assemblage de triangles* ne précise pas que les triangles (3 ; 4 ; 5) sont rectangles. Ce sont les illustrations qui l'indiquent et, selon les copies examinées, aucun groupe d'élèves ne l'a mis en doute. (Aucun lecteur n'a d'ailleurs signalé qu'il y avait là une « évidence » discutable ; et on peut se demander s'il n'aurait pas été plus correct de dire que les triangles sont rectangles et que des côtés de l'angle mesurent respectivement 3 et 4 cm et de demander seulement de dessiner la figure de plus long périmètre, sans demander sa longueur !)
L'enunciato del problema *Puzzle di sei triangoli (II)* non precisa che i triangoli (3; 4; 5) sono rettangoli. Sono le illustrazioni che lo indicano e, in base agli elaborati esaminati, nessun gruppo di alunni l'ha messo in dubbio. (Nessun lettore ha peraltro segnalato che vi era una «evidenza» discutibile; ci si può chiedere se non sarebbe stato più corretto dire che i triangoli sono rettangoli e che i cateti misurano rispettivamente 3 e 4 cm e chiedere solo di disegnare la figura con il perimetro più lungo, senza chiedere la sua lunghezza!)
Ce serait dommage de ne pas poursuivre l'exploitation / Sarebbe un peccato non continuare l'attività

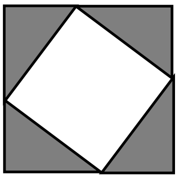
Découpez deux rectangles de 4 cm sur 3 cm puis découpez ces deux rectangles pour en faire quatre triangles rectangles égaux.
Formez un carré avec ces quatre rectangles ayant seulement un sommet commun avec deux autres (voir figure)
Ritagliate due rettangoli di 4 cm per 3 cm e poi tagliate questi due rettangoli per ottenere quattro triangoli rettangoli uguali. Formate un quadrato con questi quattro triangoli rettangoli aventi solamente un vertice comune con altri due triangoli (vedi figura)

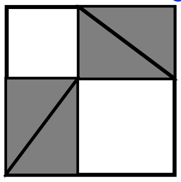


Combien mesurent les côtés de ce carré ?
Quelle est la forme de la figure formée par les quatre hypoténuses des triangles ? Quelle est son aire ? Combien mesurent ses côtés ?
Quanto misurano i lati di questo quadrato? Qual è la forma della figura formata dalle quattro ipotenuse dei triangoli? Qual è la sua area? Quanto misurano i suoi lati?

(Pour les côtés du grand carré c'est simple, pour montrer que la figure du centre est un carré les élèves peuvent dire « ça se voit bien » mais on peut espérer un essai de justification, par exemple par des rotations d'un quart de tour ou 90 degrés. Pour l'aire, un travail sur quadrillage facilite la résolution ou le calcul 49 – 4 × 6 = 25. Pour le côté, combien va-t-on trouver ?
(Per i lati del quadrato grande è semplice, per mostrare che la figura del centro è un quadrato gli allievi possono dire "si vede bene" ma si può sperare in un tentativo di giustificazione, per esempio con rotazioni di un quarto di giro o 90 gradi. Per l'area, un lavoro su quadrettatura facilita la risoluzione o il calcolo 49 – 4 × 6 = 25. Per il lato quanto troviamo?

Certains y avaient déjà pensé il y a très longtemps ! Qualcuno vi aveva già pensato tanto tempo fa!





On trouve encore de nombreuses activités sur le calcul des aires sur quadrillage dans la famille CA/P - Comparer des aires sur un quadrillage de la banque, par exemple : Comparaison de figures (ral. 26.I.12 ; cat. 6-8 ; 26rmti_fr-12) Jaquet, F. (2018). Aire de polygones sur quadrillage. La Gazette de Transalpie.
Si trovano ancora numerose attività sul calcolo delle aree sulla quadrettatura nella famiglia CA/P - Confrontare aree su una quadrettatura della banca, per esempio: Confronto di figure (ral. 26.I.12; cat. 6-8. Jaquet, F. (2018). Aree di poligoni su quadrettatura. La Gazette de Transalpie / La Gazzetta di Transalpino No.8 http://www.armtint.org/fr/le-gazzette-di-transalpino/numero-8/finish/33-la-gazzetta-n-8-articoli-la-gazette-n-8-articles/1108-08-aree-di-poligoni

7. Synthèse / Sintesi

D'un thème de composition de triangles, qui semblait assez élémentaire du point de vue des « savoirs » mobilisés (reconnaissance et calcul d'un périmètre), l'analyse a posteriori a permis de découvrir des éléments qui avaient échappé à l'attention des adultes.
En particulier :
- Lors de son élaboration, les différentes interprétations des règles d'ajustement des triangles dans l'énoncé et par conséquent les doutes sur les critères d'attribution des points.
- Avec les productions des élèves, l'apparition d'obstacles, erreurs, procédures, savoirs et compétences essentiels pour la résolution mais sous-estimés, voire parfois ignorés.
- De l'intérêt de la reprise du problème et du développement de l'activité en classe.

C'est, en particulier à ce dernier propos que le travail du « Groupe géométrie plane » s'avère le plus fructueux :
L'analyse a posteriori s'exerce sur le problème qui a été résolu par des milliers de groupes d'élève et on peut la considérer « au passé ».
Les expérimentations en classe appartiennent aussi au passé, mais plus récent que le précédent car ce sont les données de l'analyse a posteriori qui les a incitées. Les comptes rendus qui en découlent montrent l'intérêt d'une exploitation didactique du problème.
On peut ainsi passer à « l'avenir » et répondre aux demandes de ceux qui ont envie de proposer le problème à leurs élèves ou qui hésitent ou encore cherchent à légitimer leur choix.

Vais-je travailler sur « Assemblages de triangles » et ses développement « en plus », « en complément » ou « à la place » du « programme » officiel ?

Par cette étude le « Groupe géométrie plane » apporte des données sur le problème, lorsqu'on se place sur le terrain des élèves, mais il ne répond pas à la question ci-dessus. C'est à chaque enseignant de faire le choix, en son âme et conscience.

Da un argomento riguardante una composizione o raggruppamento di triangoli che sembrava essere elementare dal punto di vista dei "saperi" mobilizzati (riconoscimento e calcolo di un perimetro) l'analisi a posteriori ha permesso di scoprire elementi che erano sfuggiti all'attenzione degli adulti.
In particolare:
- All'atto della sua elaborazione, le diverse interpretazioni delle regole per la sistemazione dei triangoli nell'enunciato e di conseguenza i dubbi sui criteri di attribuzione dei punteggi.
- Con le produzioni degli allievi, l'apparizione di ostacoli, errori, procedure, saperi e competenze essenziali per la risoluzione, ma sottostimati, se non talvolta ignorati.
- Dall'interesse e la ripresa del problema e lo sviluppo dell'attività in classe.
È a proposito in particolare di quest'ultimo aspetto che il lavoro del "Gruppo geometria piana" si rivela il più fruttuoso.
L'analisi a posteriori si conduce sul problema che è stato risolto da migliaia di gruppi di allievi e possiamo considerarla volta "al passato".
Le sperimentazioni in classe appartengono anch'esse al passato, ma più recente in quanto sono proprio i dati dell'analisi a posteriori che le hanno stimolate. I rapporti che ne conseguono mostrano l'interesse di una utilizzazione didattica del problema in oggetto.
Possiamo anche pensare a "l'avvenire" e rispondere alle domande di coloro che hanno voglia di proporre il problema ai propri allievi o che esitano o ancora che cercano di legittimare la loro scelta.

Lavorerò sul "Puzzle di triangoli" e i suoi sviluppi "in più", "come complemento" o "al posto" del "programma" ufficiale?

Con questo studio, il "Gruppo geometria piana" apporta dei dati sul problema, quando ci si situa sul terreno degli allievi, ma non risponde alla precedente domanda. Sta a ogni insegnante fare la propria scelta, in piena coscienza.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

POKEMON

Maria Felicia Andriani, Antonella Assirelli, Alessandro Carciola, Lucia Doretti, Paola Hippoliti, Elena Marangoni, Daniela Medici, Maria Gabriella Rinaldi, Lucia Salomone

per il Gruppo Algebra[1]

L'approfondimento qui proposto sul problema "Pokemon" si basa sulle osservazioni emerse dall'analisi a posteriori degli elaborati delle sezioni di Siena, Romagna e Puglia.

L'étude du problème «Pokémone » est basé essentiellement sur les observations concernant l'analyse a posteriori des copies des sections de Sienne, Romagna et des Pouilles.

L'article est en italien avec des synthèses en français.

Il testo del problema e la sua analisi a priori

POKEMON (Cat. 3, 4, 5) **26.II.05**

Andrea e Giacomo hanno da poco iniziato a collezionare le figurine dei Pokemon.

Ieri Andrea aveva 5 figurine in meno di Giacomo.

Oggi Giacomo ha ancora lo stesso numero di figurine che aveva ieri, invece Andrea ne ha ricevute in dono 21 e ora ha il doppio del numero di figurine di Giacomo.

Quante figurine ha oggi Andrea?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare due numeri di cui si conosce la differenza (5), sapendo che aggiungendo un numero (21) al minore si ottiene il doppio del maggiore; poi determinare questo doppio.

Analisi del compito

- Capire che ieri Andrea aveva meno figurine di Giacomo, che oggi Giacomo ha sempre lo stesso numero di figurine mentre Andrea che ne riceve 21, ne ha ora il doppio di quelle di Giacomo.
- Fare un primo tentativo con un numero a caso. Fare i calcoli e verificare se questo numero soddisfa ai dati. Fare altri tentativi basandosi sui precedenti fino a trovare il numero che va bene.

Oppure: procedere con uno studio sistematico dei numeri a partire da 1.

La procedura può essere migliorata osservando che i numeri pari non vanno bene perché addizionati ad un numero dispari (21), danno luogo ad un numero dispari, quindi non divisibile per 2.

Oppure (procedura esperta, poco probabile ai livelli considerati):

- Comprendere che delle 21 figurine che oggi Andrea ha ricevuto in dono, 5 servono per avere lo stesso numero di figurine di Giacomo e le altre 16 per raddoppiare questo numero.
- Concludere che oggi Giacomo ha 16 figurine e che, quindi, Andrea ne ha 32.

1

POKÉMON (Cat. 3, 4, 5) I componenti del Gruppo Algebra che hanno dato il loro contributo alla discussione su quanto emerso dall'analisi a posteriori del problema era composto da: Maria Felicia Andriani, Alessandra Desogus, Lucia Doretti, Lucia Frati, Paola Hippoliti, Elena Marangoni, Daniela Medici, Maria Gabriella Rinaldi, Lucia Salomone.

André et Jacques ont commencé depuis peu une collection des images de Pokémon.

Hier André avait 5 images de moins que Jacques.

Aujourd'hui, Jacques a encore le même nombre d'images qu'hier. Par contre André en a reçu 21 et maintenant il en a le double du nombre d'images de Jacques.

Combien d'images André a-t-il aujourd'hui ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer deux nombres dont on connaît la différence (5), sachant qu'en ajoutant un nombre (21), au plus petit on obtient le double du plus grand, puis déterminer ce double.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'hier, André avait moins d'images que Jacques, qu'aujourd'hui Jacques en a toujours le même nombre, pendant qu'André qui en a 21 de plus, en a le double du nombre d'images de Jacques.
- Faire un premier essai avec un nombre au hasard. Faire les calculs et vérifier si ce nombre est conforme aux données. Faire d'autres essais en s'appuyant sur les précédents jusqu'à trouver le nombre qui convient.

Ou

Procéder par étude systématique des nombres à partir de 1.

La procédure peut être améliorée en remarquant que les nombres pairs ne conviennent pas, parce qu'additionnés à un nombre impair (21), cela donnerait un nombre impair qui n'est pas divisible par 2.

Ou (procédure experte, peu probable au niveau considéré).

- Comprendre que parmi les 21 images reçues par André aujourd'hui, 5 servent à avoir le même nombre d'images que Jacques, et les 16 autres pour doubler ce nombre.
- Conclure qu'aujourd'hui Jacques a 16 images et André en a 32.

2. Risultati

Punti attribuiti su 2420 classi di 18 sezioni:

Categoria	0	1	2	3	4	N° classi	Media
Cat 3	354 (55%)	96 (15%)	49 (8%)	74 (11%)	76 (12%)	649	1.11
Cat 4	383 (45%)	107 (12%)	68 (8%)	146 (17%)	156 (18%)	860	1.52
Cat 5	257 (28%)	112 (12%)	88 (10%)	186 (20%)	268 (29%)	911	2.11
Totale	994 (41%)	315 (13%)	205 (8%)	406 (17%)	500 (21%)	2420	1.63

secondo i criteri indicati nell'analisi a priori:

4 Risposta corretta (Andrea ha 32 figurine) con descrizione chiara della procedura seguita (per tentativi con verifica delle condizioni, o altra procedura con dettaglio dei calcoli)

3 Risposta corretta con descrizione incompleta o poco chiara o soltanto una verifica

2 Risposta corretta senza spiegazione

oppure risposta sbagliata per un errore di calcolo, ma descrizione chiara che prova un ragionamento corretto

1 Inizio di ricerca corretta (per esempio, dei tentativi che mostrino la comprensione che il numero di figurine che ha Andrea oggi è il doppio di quello di Giacomo)

0 Incomprensione del problema

4 Réponse correcte (André a 32 images) avec une description claire de la procédure suivie (par essais avec vérification des conditions, ou par une autre procédure avec détails des calculs).

3 Réponse correcte avec une description incomplète ou peu claire ou seulement une vérification.

2 Réponse correcte sans explication,

ou réponse erronée par erreur de calcul, mais description claire montrant un raisonnement correct.

1 Début de recherche correcte (par exemple des essais attestant de la compréhension que le nombre d'images qu'André a aujourd'hui est le double de celui de Jacques).

0 Incompréhension du problème.

Dalla tabella dei risultati emerge una media dei punteggi piuttosto bassa, di poco superiore a 1 in cat. 3, con un miglioramento di solo mezzo punto passando da una categoria all'altra, fino ad arrivare a poco più di 2 in cat. 5. In particolare ci sembra importante segnalare l'alta percentuale relativa al punteggio 0 nelle categorie 3 e 4 (quasi il doppio di quella riscontrata in cat.5), che comprende sia gli elaborati "in bianco" che quelli che mostrano totale incomprensione della situazione.
Ad una prima lettura, il testo, piuttosto breve, appare scorrevole e non sembra presentare difficoltà di comprensione, dal punto di vista linguistico, della situazione che descrive.
Non sfugge però, ad una lettura più attenta, una riflessione sulla natura del problema: non si tratta di un tipico "problema aritmetico", poiché per risolverlo è necessario "operare" su quantità incognite e sulle relazioni che le legano. Nella frase "*Andrea aveva 5 figurine in meno di Giacomo*", "5" non esprime una quantità, ma un operatore ("– 5") che agisce su una quantità incognita (il numero di figurine di Giacomo non si conosce); analogamente nella frase "*Andrea ne ha ricevuto in dono 21* (figurine)", il numero rappresenta un operatore ("+21") che opera sul numero non noto di figurine che aveva Andrea e di nuovo "*ora ha il doppio* (ancora un operatore, "× 2") *del numero di figurine di Giacomo*". Di conseguenza, soprattutto per allievi di categoria 3 o 4, il problema può costituire una *situazione nuova* da affrontare e gestire, rispetto alle precedenti esperienze di problemi e alle strategie utilizzate per risolverli.

Un'altra "criticità" potrebbe essere causata dal fatto che la situazione "raccontata" nell'enunciato si svolge in due giorni. Le informazioni sulle figurine possedute da Andrea e Giacomo sono infatti assegnate sia in riferimento a "ieri" che ad "oggi" e sono legate fra loro da opportune relazioni che, per essere comprese e ben utilizzate, richiedono più volte, a chi legge, di effettuare un processo di "andata-ritorno" tra la situazione di ieri e quella di oggi. È già capitato con altri problemi del RMT, che gli allievi abbiano incontrato difficoltà nella risoluzione quando nel testo sono presenti "situazioni che variano nel tempo". Per esempio in "Le rondini" e "Rondini e colombe"[2] occorre riconoscere l'ordine cronologico e le variazioni tra gli stati successivi di una grandezza (in "Rondini") o di due grandezze (in "Rondini e colombe") a proposito dei quali L. Grugnetti e F. Jaquet nell'articolo citato in nota[3], facendo riferimento alla teoria di Vergnaud nella quale si parla di stati incogniti e trasformazioni, scrivono: *Per Vergnaud, innanzitutto, "Ciò che succede nel tempo può essere descritto sotto forma di una successione di trasformazioni" e i nostri enunciati si sviluppano effettivamente nel tempo e implicano pertanto una trasformazione o una successione di trasformazioni, connesse a uno stato iniziale e uno stato finale".*
Segnaliamo infine che un'unica frase, la terza, riporta addirittura tre condizioni (il numero di figurine di Giacomo non è cambiato rispetto al giorno precedente, Andrea ne riceve 21 e la relazione relativa al doppio) e anche questo può aver contribuito, soprattutto nelle categorie 3 e 4, a creare un po' di confusione.
Un adulto alle prese con questo problema che utilizza la strategia algebrica, è probabile che non si renda conto delle difficoltà di chi affronta il problema con procedure aritmetiche.

3. Osservazioni a posteriori

Le osservazioni che seguono sono ricavate dall'analisi a posteriori di 370 elaborati (105 di cat.3, 132 di cat. 4 e 133 di cat.5) della sezione di Siena, di 108 elaborati (29 di cat. 3, 39 di cat. 4 e 40 di cat. 5) della sezione Romagna e di 163 elaborati della sezione Puglia (46 di cat. 3, 61 di cat. 4 e 56 di cat. 5).
I risultati ottenuti in ciascuna delle tre sezioni sono in linea con quelli internazionali, o addirittura inferiori nelle categorie più basse. Questo comporta che la <u>media complessiva dei punteggi relativa ai 370 elaborati della sezione Siena scende a 1.37</u> (*media 0.9 in cat. 3; media 1.3 in cat. 4; media 1.9 in cat. 5*), quella dei <u>108 elaborati della sezione Romagna scende a 1.40</u> (*media 0.6 in cat. 3; media 1.3 in cat. 4; media 2.3 in cat. 5*), mentre quella dei <u>163 elaborati della sezione Puglia scende a 1,53</u> (*media 1.2 in cat. 3; media 1.3 in cat. 4; media 2.1 in cat. 5*).

---

[2] <u>Le rondini</u> (23.I.01) Cat. 3 e <u>Rondini e colombe</u> (23.I.06) Cat.(4, 5)

[3] L. Grugnetti, F. Jaquet *"Scrivo, dunque sono anche in matematica nel contesto dei problemi del RMT"*, in La Gazzetta di Transalpino n. 8, pp.7-23.

Nei paragrafi seguenti presentiamo aspetti dell'analisi a posteriori degli elaborati, riguardanti sia le procedure utilizzate che gli errori più frequentemente commessi, unitamente a osservazioni e commenti che abbiamo raccolto e condiviso negli incontri on line con il gruppo.

Les observations qui suivent sont tirées de l'analyse a posteriori de 370 copies (105 de cat. 3, 132 de cat. 4 et 133 de cat. 5) de la section de Sienne, de 108 copies (29 de cat. 3, 39 de cat. 4 et 40 de cat. 5) de la section Romagna et 163 copies de la section des Pouilles (46 du cat. 3, 61 de cat. 4 et 56 la cat. 5).

Les résultats obtenus dans chacune des trois sections sont conformes aux résultats internationaux, voire inférieurs dans les catégories les plus basses.

4. Le procedure utilizzate: osservazioni generali

Ricordiamo che le procedure indicate nella scheda di Analisi a priori del problema sono essenzialmente di due tipi: *per tentativi*, che possono essere sistematici oppure no; con "*procedura esperta*", ritenuta però "*poco probabile ai livelli considerati*". Questa seconda procedura, che si potrebbe definire "per deduzione", implica un ragionamento non banale basato sulla considerazione che "*delle 21 figurine che Andrea riceve oggi in dono, 5 servono per avere lo stesso numero di figurine di Giacomo* (che non cambia da ieri a oggi)" e dedurre poi da questo che *"le altre 16 che restano* sono proprio quelle che servono *per raddoppiare questo numero*". Una rappresentazione della situazione mediante un disegno (es. per entrambi i giorni una scatola o un ovale che rappresenti la parte uguale di figurine non note di ogni bambino con accanto le singole figurine) potrebbe essere illuminante per la precedente deduzione.
Ci aspettavamo quindi che, per risolvere il problema, gli allievi di ogni categoria facessero ricorso prevalentemente alla strategia per tentativi, e che l'altra, se applicata, potesse comparire in casi piuttosto rari e presumibilmente in cat. 5.
Dall'analisi a posteriori emerge però un situazione diversa: nelle categorie 3 e 4 la procedura più utilizzata non è quella **per tentativi**, (che indicheremo con **A**), ma la **procedura "esperta"** citata nell'analisi a priori (che indicheremo con **B**), che si esplicita aritmeticamente con le due operazioni: 21 – 5 = 16 (numero di figurine possedute da Giacomo ieri e quindi anche oggi, perché il numero non cambia) e 16 × 2 = 32 (numero di figurine che ha Andrea oggi, avendone il doppio di quelle di Giacomo).
L'analisi a posteriori ci ha anche permesso di osservare che in un numero ristretto di casi, ma presenti in tutte le categorie, compare anche una **"variante" della procedura esperta** (che indicheremo con **C**), non prevista nell'analisi a priori, espressa per via aritmetica dalle seguenti tre operazioni: si inizia ancora da 21-5= 16, numero di figurine possedute da Giacomo ieri e anche oggi, poi si procede con 16-5 = 11, numero di figurine possedute da Andrea ieri (5 meno di Giacomo) ed infine si conclude con 11+21 = 32, numero di figurine possedute da Andrea oggi (che è proprio il doppio del numero di figurine di Giacomo). Si può osservare che questo modo di procedere permette automaticamente di verificare la correttezza della soluzione del problema!
La situazione cambia notevolmente in cat. 5, dove la procedura A, per tentativi, è quella di gran lunga più utilizzata, seguita dalla procedura B e poi dalla procedura C, applicata quest'ultima sono in pochissimi casi.
Ritornando sulla strategia B, un esame degli elaborati di tutte e tre le sezioni in cui è stata utilizzata per ottenere la risposta corretta al problema ci ha offerto una diversa "chiave di lettura" riguardo alla sua applicazione da parte degli allievi. Abbiamo notato infatti che, in circa metà degli elaborati di cat. 3 e di cat. 4 e in poco meno di un terzo degli elaborati di cat. 5, gli allievi arrivano al risultato corretto, limitandosi a riportare i calcoli fatti, senza specificare ogni volta che cosa è stato effettivamente trovato.
Nelle spiegazioni riportate in diversi elaborati, gli allievi scrivono chiaramente che hanno fatto molti tentativi con le operazioni. Riportiamo di seguito alcuni "estratti" da elaborati di allievi di cat. 3 e 4.
Cat. 4 (4047) - "*Operazione: 21– 5 =16   16×2 =32. RISPOSTA: Oggi Andrea ha 32 figurine. SPIEGAZIONE: **Abbiamo fatto tante operazioni e alla fine ci siamo arrivati***".
Cat 3 (3089) - *"Soluzione: 21– 5 = 16   16+16 = 32. **Abbiamo fatto tante soluzioni e solo una era quella giusta che è 32** e per vedere se quello era il risultato giusto 16+16=32 e 21– 5=16. Infatti nella scheda c'è scritto che Giacomo ne ha metà di Andrea."* [Qui almeno fanno la verifica!]
Altre volte è detto esplicitamente che la prima operazione (21– 5=16) è stata suggerita dalla frase "*Andrea aveva 5 figurine in meno di Giacomo…"*:
Cat. 4 (4111) - "*Oggi Andrea ha 32 figurine di Pokemon. **Ci siamo arrivati perché prima Andrea aveva 5 figurine in meno di Giacomo e quindi abbiamo fatto 21 meno 5 che veniva 16 che erano le figurine di prima**, abbiamo fatto 16 per 2 per vedere quante figurine ha ora e siccome ci aveva il doppio quindi è venuto 32. Es. 21– 5 = 16 16×2 = 32*" [qui la risposta è giusta, ma non è molto chiaro il ragionamento fatto…]
Cat. 4 (4094) - "*Risposta. Oggi Andrea ha 32 figurine. Abbiamo trovato la nostra risposta facendo 21– 5 = 16 e una volta trovato 16 si è fatto 16 + 16=32*" [Anche qui non si fa alcun riferimento alla situazione di Giacomo…]
Da questo tipo di "giustificazioni", è forte il dubbio che gli allievi, anziché essere stati guidati da un ragionamento appropriato, abbiano trovato casualmente il risultato corretto dopo aver scelto le operazioni da fare procedendo

per tentativi a partire dai numeri 21 e 5, o che la prima operazione 21– 5=16 sia stata provvidenzialmente "suggerita" dal numero 21 e dall'espressione "*5 figurine in meno*"!
Il lavoro di analisi a posteriori ci ha fatto "toccare con mano" una conseguenza diretta di questa situazione, cioè la difficoltà incontrata dai correttori nella valutazione degli elaborati degli allievi quando è stata applicata la procedura B (e talvolta anche la C) e la sua ricaduta sull'attribuzione dei punteggi: in entrambe le sezioni, si sono riscontrati diversi casi di elaborati in cui c'è stata sottovalutazione o sopravvalutazione nel punteggio ad essi attribuito.

Les procédures indiquées par l'analyse a priori du problème sont essentiellement de deux types : la *procédure par essais* et la procédure désignée par *procédure experte* caractérisée, du point de vue arithmétique, par les deux opérations : 21 - 5 = 16 (nombre d'images appartenant à Jaques hier et aussi aujourd'hui, car il ne change pas) et 16 × 2 = 32 (nombre d'images qu'André a aujourd'hui, étant le double de ceux de Jacques)

La procédure par essais était la plus utilisée en catégorie 5 avec des nuances différentes : essais plus ou moins organisés, essais systématiques, essais "économiques" (par exemple, partant du nombre d'images d'André hier et constatant qu'il doit être un nombre impair ou commençant par observer que le nombre d'images d'André aujourd'hui doit être pair) indiqué ou non dans le tableau.

La procédure "experte" de l'analyse a priori est estimée peu probable aux niveaux considérés. Nous nous attendions donc à ce qu'elle n'apparaisse que rarement et surtout en catégorie 5. L'analyse a posteriori a cependant conduit à une observation différente : la procédure la plus utilisée dans les catégories 3 et 4, est précisément la **procédure « experte »**.

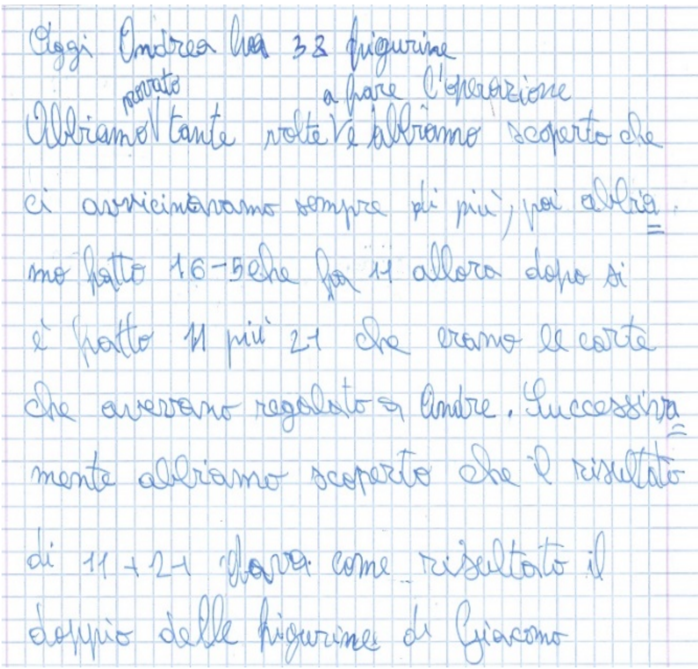
Un examen plus approfondi des copies, nous a offert en revanche une « clé de lecture » différente de cette observation inattendue, en nous faisant douter de la conscience réelle des élèves d'adopter une procédure « expert ». Nous avons remarqué en effet que, dans environ la moitié des copies de cat. 3 et de cat. 4, et dans un peu moins d'un tiers des copies de cat. 5, les élèves arrivent au bon résultat, en rapportant simplement les calculs effectués, sans préciser à chaque fois ce qui a été réellement trouvé et, parfois, en ajoutant des commentaires tels que : ***Nous avons fait beaucoup d'opérations et finalement nous y sommes arrivés***, ***Nous avons essayé beaucoup de solutions et une seule était la bonne qui est 32***, ce qui suggèr que la bonne réponse a été trouvée par hasard. D'autres fois encore, il est explicitement indiqué que la première opération (21 - 5 = 16) a été suggérée par la phrase de l'énoncé : « *Hier André avait 5 images de moins que Jacques ….* ». En fait, on trouve souvent des explications telles que : « ***On y est arrivé car avant André avait 5 images de moins que Jacques et donc on a fait 21 moins 5 qui étaient 16 qui étaient les images*** d'avant ».

Dans chaque catégorie, cependant, il existe des copies dans lesquels les élèves ont appliqué la stratégie « experte », en montrant, par leurs explications, qu'ils avaient compris la situation. Ainsi, par exemple, nous lisons dans une copie de cat. 4 : « *André, aujourd'hui, a 32 images et Jacques en a 16, c'est-à-dire, la moitié. Nous avons retiré 5 à 21 pour voir combien d'images André avait en plus que Jacques, il en a 16 de plus ; nous avons multiplié 16 × 2 et il on a trouvé 32, c'est-à-dire les images d'André* ».

En plus de ces deux stratégies, une apparaît dans certaines copies, une troisième stratégie non prévue dans l'analyse a priori : on trouve le nombre d'images que Jacques avait hier, 16, en faisant 21 - 5, on calcule donc qu'André, ayant 5 images de moins, en avait 11 hier et puis, en ajoutant 21, on conclut qu'André a maintenant 32 images.

4.1 Procedura A: per tentativi

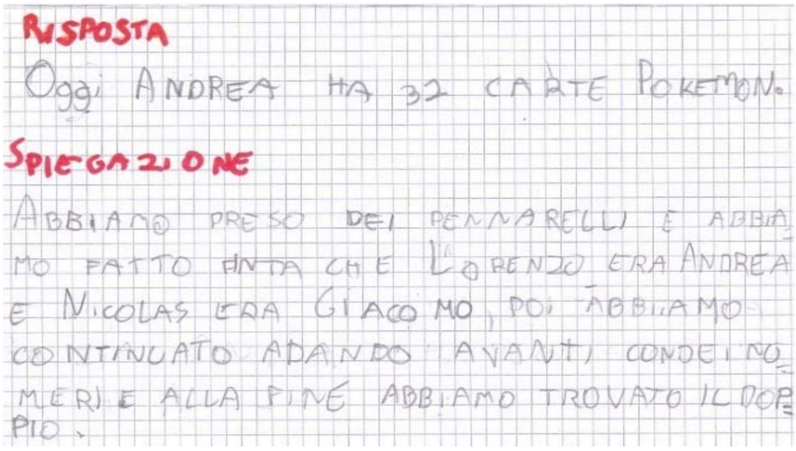
La strategia per tentativi si trova utilizzata in pochi elaborati di cat. 3 e 4, ma diventa nettamente prevalente in cat. 5. In ogni categoria abbiamo comunque riscontrato ricchezza e varietà di modi nell'applicarla, come mostriamo di seguito.
Cominciamo con due elaborati di allievi di cat. 3 sui quali riteniamo interessante fissare l'attenzione, anche se non sono esplicitati i tentativi fatti. Nel primo, in Fig. 1, *si intuisce* che gli allievi hanno proceduto per tentativi sul numero di figurine di Giacomo, togliendo ogni volta 5 e poi aggiungendo 21 al risultato, ed hanno continuato fino a quando non hanno "scoperto" che, ripetendo il procedimento a partire dal numero 16, ottenevano 32, cioè il suo doppio. Questi allievi di categoria 3 mostrano così di aver ben compreso la situazione problematica anche se hanno riportato solo il tentativo "giusto" con il quale hanno trovato la soluzione al problema.



Oggi Andrea ha 32 figurine
Abbiamo provato tante volte a fare l'operazione e abbiamo scoperto che
ci avvicinavamo sempre più più, poi abbia=
mo fatto 16-5 che fa 11 allora dopo si
è fatto 11 più 21 che erano le carte
che avevano regalato a Andre. Successiva=
mente abbiamo scoperto che l risultato
di 11+21 dava come risultato il
doppio delle figurine di Giacomo

Fig. 1 (cat. 3)
"Oggi Andrea ha 32 figurine. Abbiamo provato tante volte a fare l'operazione e abbiamo scoperto che ci avvicinavamo sempre di più, poi abbiamo fatto 16– 5 che fa 11 allora dopo si è fatto 11 più 21 che erano le carte che avevano regalato a Andrea. Successivamente abbiamo scoperto che il risultato di 11 + 21 dava come risultato il doppio delle figurine di Giacomo."

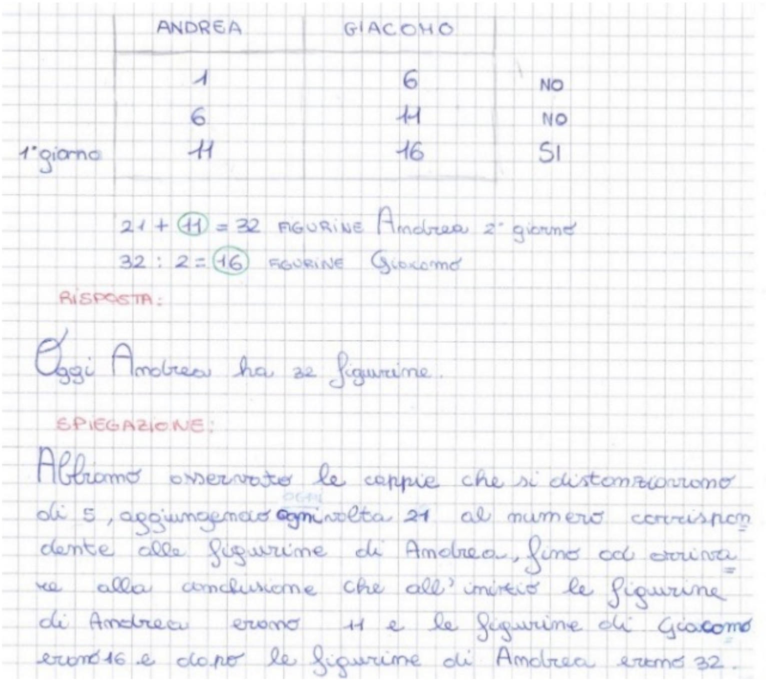
Il secondo elaborato, in Fig. 2, è originale e mostra chiaramente, ancora una volta, che gli allievi lasciati liberi di esprimersi, anche di fronte ad una situazione "nuova" sono stimolati a trovare "strade alternative" e in questo caso ne hanno trovata una un po' diversa (anche se naturale per bambini di questa fascia di età…): essi hanno infatti "resa reale" la situazione problematica facendo interpretare a due bambini il ruolo di Andrea e Giacomo e utilizzando, al posto delle figurine citate nel testo, gli oggetti che avevano a disposizione, cioè pennarelli. Hanno poi fatto varie ipotesi su quante ne potevano possedere l'uno o l'altro dei bambini-attori [immaginiamo quindi che abbiano distribuito, tolto o aggiunto pennarelli secondo le indicazioni fornite nel testo…] fino a quando non hanno trovato il numero corretto per Andrea, cioè 32!



RISPOSTA
OGGI ANDREA HA 32 CARTE POKEMON.
SPIEGAZIONE
ABBIAMO PRESO DEI PENNARELLI E ABBIA=
MO FATTO FINTA CHE LORENZO ERA ANDREA
E NICOLAS ERA GIACOMO, POI ABBIAMO
CONTINUATO ADANDO AVANTI CON DEI NU=
MERI E ALLA FINE ABBIAMO TROVATO IL DOP=
PIO.

Fig. 2 (cat. 3)
"RISPOSTA.
Oggi Andrea ha 32 carte Pokemon.
SPIEGAZIONE.
Abbiamo preso dei pennarelli e abbiamo fatto finta che Lorenzo era Andrea e Nicolas era Giacomo, poi abbiamo continuato andando avanti con dei numeri e alla fine abbiamo trovato il doppio."

Originale è anche la strategia utilizzata nell'elaborato di cat. 5 in Fig. 3, in cui gli allievi fanno la scelta di lavorare sul "*numero di figurine che potevano avere ieri ciascuno dei due bambini*", quindi su <u>coppie di numeri che differiscono di 5</u> e, al terzo tentativo, hanno trovato la coppia giusta, come poi hanno verificato



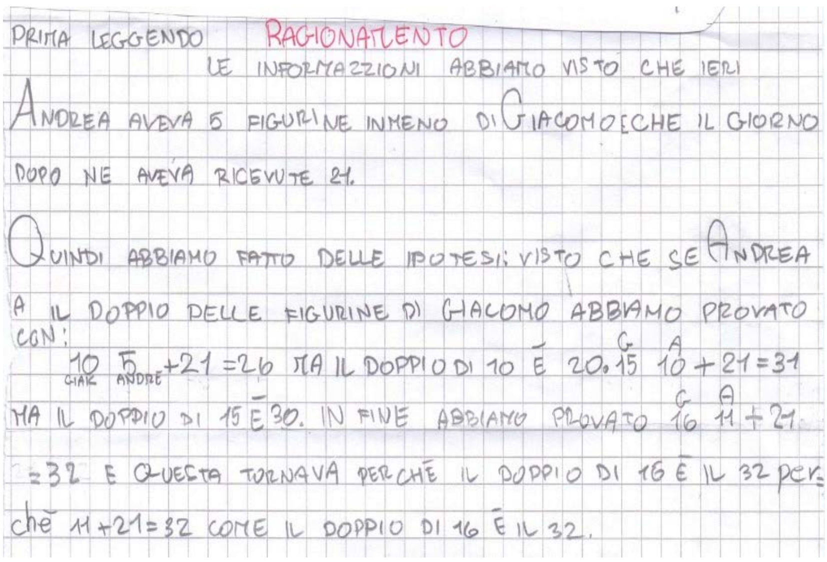
	ANDREA	GIACOMO	
	1	6	NO
	6	11	NO
1° giorno	11	16	SI

21 + 11 = 32 figurine Andrea 2° giorno
32 : 2 = 16 figurine Giacomo
RISPOSTA:
Oggi Andrea ha 32 figurine.
SPIEGAZIONE:
Abbiamo osservato le coppie che si distanziavano di 5, aggiungendo ogni volta 21 al numero corrispondente alle figurine di Andrea, fino ad arrivare alla conclusione che all'inizio le figurine di Andrea erano 11 e le figurine di Giacomo erano 16 e dopo le figurine di Andrea erano 32.

Fig. 3 (cat. 5)

"RISPOSTA. Oggi Andrea ha 32 figurine.
SPIEGAZIONE. Abbiamo osservato le coppie che si distanziavano di 5, aggiungendo ogni volta 21 al numero corrispondente alle figurine di Andrea, fino ad arrivare alla conclusione che all'inizio le figurine di Andrea erano 11 e le figurine di Giacomo erano 16 e dopo le figurine di Andrea erano 32"

Lo stesso tipo di procedura si trova anche, sorprendentemente, in un elaborato di cat. 3 (in Fig. 4) in cui gli allievi, dopo i primi tentativi, rendendosi conto di essersi molto avvicinati al valore 32, hanno opportunamente "aggiustato" la coppia di numeri da considerare**.**

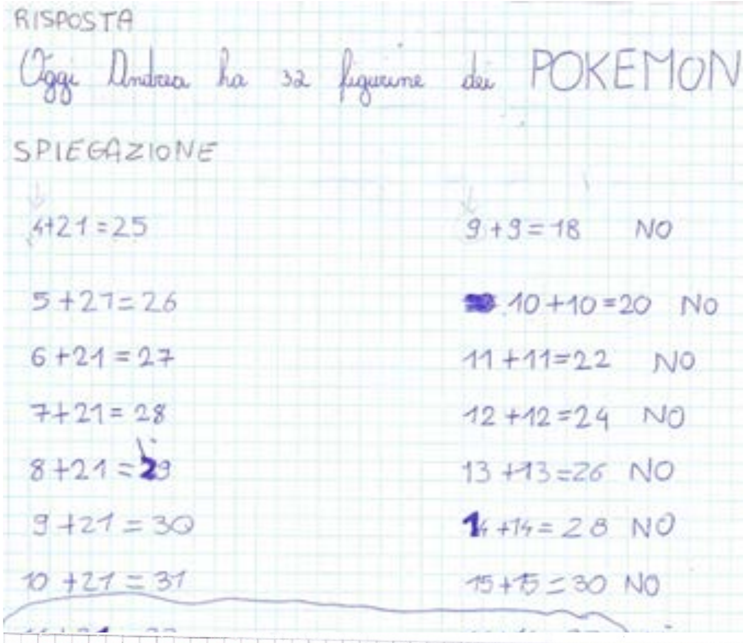


RAGIONAMENTO
PRIMA LEGGENDO LE INFORMAZZIONI ABBIAMO VISTO CHE IERI ANDREA AVEVA 5 FIGURINE INMENO DI GIACOMO E CHE IL GIORNO DOPO NE AVEVA RICEVUTE 21.
QUINDI ABBIAMO FATTO DELLE IPOTESI: VISTO CHE SE ANDREA A IL DOPPIO DELLE FIGURINE DI GIACOMO ABBIAMO PROVATO CON: 10 (GIAC) 5 (ANDRE) +21 = 26 MA IL DOPPIO DI 10 È 20. 15 (G) 10 (A) + 21 = 31 MA IL DOPPIO DI 15 È 30. IN FINE ABBIAMO PROVATO 16 (G) 11 (A) + 21 = 32 E QUESTA TORNAVA PERCHÉ IL DOPPIO DI 16 È IL 32 PERCHÈ 11 + 21 = 32 COME IL DOPPIO DI 16 È IL 32.

Fig. 4 (cat.3) "*RAGIONAMENTO. Prima leggendo le informazioni abbiamo visto che ieri Andrea aveva 5 figurine in meno di Giacomo e che il giorno dopo ne aveva ricevute 21. Quindi abbiamo fatto delle ipotesi: visto che se Andrea ha il doppio delle figurine di Giacomo abbiamo provato con:*
10(G) 5(A) +21 = 26, ma il doppio di 10 è 20.
15(G) 10(A) + 21 = 31, ma il doppio di 15 è 30. Infine abbiamo provato
16(G) 11(A) +21 = 32 e questa tornava perché il doppio di 16 è il 32 perché 11 + 21 = 32, come il doppio di 16 è 32."

I **tentativi sistematici** si ritrovano solo in pochi, ma interessanti, casi. Alcuni sono mostrati nelle Figg.5, 6 e 7.

In Fig. 5 è riportata solo la parte dell'elaborato di cat. 3 relativa ai tentativi fatti.



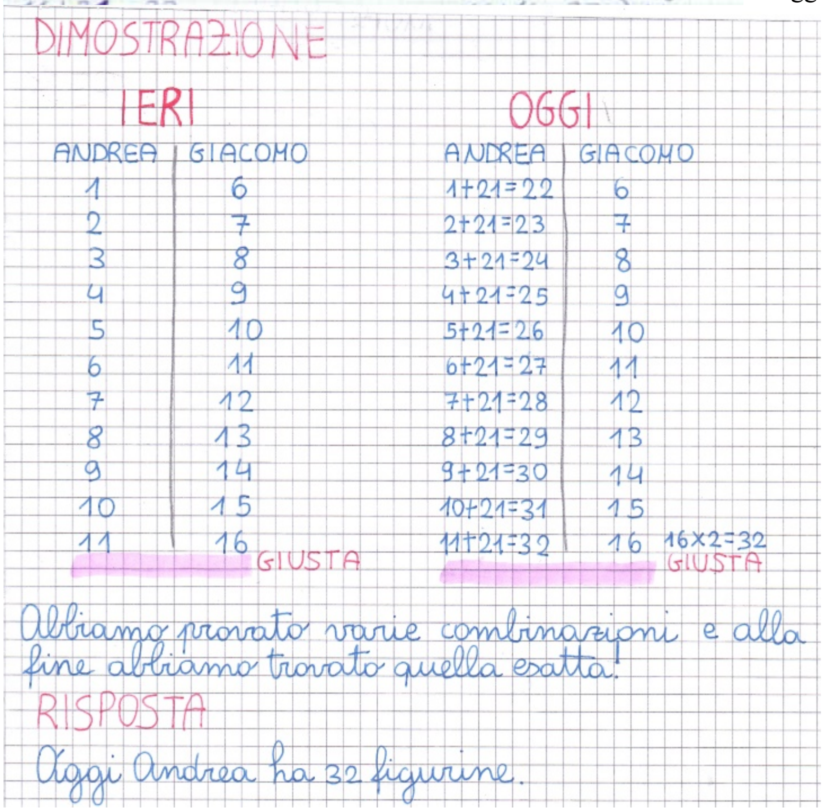
RISPOSTA
Oggi Andrea ha 32 figurine dei POKEMON
SPIEGAZIONE

4+21=25	9+9=18 NO
5+27=26	10+10=20 NO
6+21=27	11+11=22 NO
7+21=28	12+12=24 NO
8+21=29	13+13=26 NO
9+21=30	14+14=28 NO
10+21=31	15+15=30 NO

Fig. 5 (cat. 3)

La spiegazione che gli allievi hanno dato è la seguente:
"*Abbiamo aggiunto sempre più 5 alle figurine di Giacomo perché Andrea ieri aveva 5 figurine in meno di quelle di Giacomo, poi oggi ad Andrea gli hanno donato 21 figurine. Ora Andrea ha il doppio delle figurine di quelle di Giacomo, perché Giacomo aveva sempre le figurine di ieri.*"

In Fig. 6 è mostrato un elaborato di cat. 4: colpisce la chiarezza e precisone con cui gli allievi hanno realizzato le tabelle dei tentativi fatti, distinguendo quelli relativi a "ieri" da quelli relativi ad "oggi".



DIMOSTRAZIONE

IERI		OGGI	
ANDREA	GIACOMO	ANDREA	GIACOMO
1	6	1+21=22	6
2	7	2+21=23	7
3	8	3+21=24	8
4	9	4+21=25	9
5	10	5+21=26	10
6	11	6+21=27	11
7	12	7+21=28	12
8	13	8+21=29	13
9	14	9+21=30	14
10	15	10+21=31	15
11	16 GIUSTA	11+21=32	16 16x2=32 GIUSTA

Abbiamo provato varie combinazioni e alla fine abbiamo trovato quella esatta!
RISPOSTA
Oggi Andrea ha 32 figurine.

Fig.6 (cat.4)

"*Abbiamo provato varie combinazioni e alla fine abbiamo trovato quella esatta.*
RISPOSTA
Oggi Andrea ha 32 figurine."

Non sempre sono riportati tutti i tentativi in modo sistematico, ma gli allievi si limitano ad indicare i primi fatti e poi il tentativo finale che fornisce la soluzione. Un esempio di questo tipo si trova nell'elaborato in Fig. 7, nel quale si è scelto di utilizzare, per ogni tentativo, una tabella a due colonne, che riporta la situazione di ieri e di oggi di Andrea e Giacomo, e che permette di fare subito il controllo dell'esattezza o meno del valore ipotizzato (e anche di rendersi conto come si evolve la situazione…).

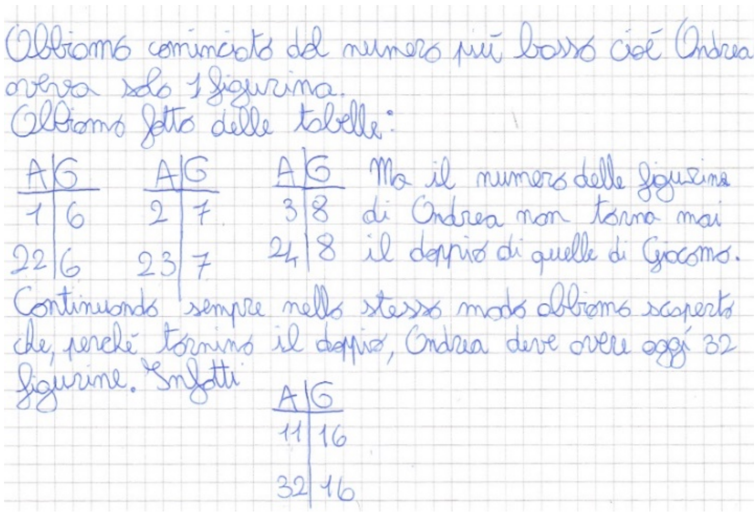


Fig. 7 (cat.5)

"Abbiamo cominciato dal numero più basso, cioè Andrea aveva solo una figurina.
Abbiamo fatto delle tabelle, ma il numero delle figurine di Andrea non torna mai il doppio di quelle di Giacomo.
Continuando sempre nello stesso modo abbiamo scoperto che, perché tornino il doppio, Andrea deve avere oggi 32 figurine."

Altre volte i tentativi non sono sistematici, ma sono fatti con "**aggiustamenti successivi**" come possiamo osservare nella trascrizione del seguente elaborato di cat. 5: "*Dopo svariati tentativi, abbiamo scoperto che Giacomo ha 16 figurine e Andrea ne ha 32, cioè il doppio. TENTATIVI - Abbiamo ipotizzato che Giacomo avesse 10 figurine e Andrea 5: 21+5 = 26   10+10 = 20, non va bene. Poi abbiamo ipotizzato che Giacomo avesse 17 figurine e Andrea 12: 21 + 12 = 33   17 + 17 = 34, non va bene. Infine, abbiamo ipotizzato che Giacomo avesse 16 figurine e Andrea 11: andava bene perché 11+21 = 32   16+16 = 32*".

Nelle categorie più alte, in particolare in cat. 5, sono presenti elaborati in cui i **tentativi sono fatti "in economia"**, ovvero si è potuto limitarli grazie all'individuazione di una proprietà posseduta dal numero che si ricerca. Riportiamo due esempi di cat. 5.
Nel primo elaborato, gli allievi vogliono determinare il numero di figurine possedute da Andrea ieri e spiegano in modo chiaro che questo numero deve essere dispari: "*RISPOSTA: Oggi Andrea ha 32 figurine. SPIEGAZIONE: Prima abbiamo letto il testo e scoperto che le figurine che aveva ieri Andrea avrebbero dovute essere dispari, perché se la metà delle figurine di Andrea è il numero delle figurine di Giacomo, per essere diviso per 2 questo numero deve essere pari e per fare un numero pari ci vogliono 2 numeri dispari. Successivamente abbiamo fatto dei tentativi per capire quante figurine avevano ognuno di loro ieri: 7 Andrea e 12 Giacomo, 9 Andrea e 14 Giacomo, ma invano. Così abbiamo provato 11 Andrea e 16 Giacomo perché 11 + 21 = 32 ed è il doppio di 16, quindi Andrea ha 32 figurine.*"
Nel secondo esempio, l'obiettivo è la ricerca del numero di figurine possedute da Andrea oggi. Gli allievi, non solo mostrano di aver ben compreso il testo del problema, ma osservano anche che il numero cercato: "*1° Deve essere un numero pari per dividerlo a metà; 2° Deve essere maggiore di 21*", cosa che rende molto più rapida la ricerca.
In Fig. 8 è mostrata la parte dell'elaborato con i tentativi fatti. Come si nota, gli allievi provano con i numeri 24, 26, 30 ed infine 32. Ogni volta dividono per 2 il numero considerato (*per avere il numero di figurine di Giacomo*), al risultato della divisione tolgono 5 (*per avere il numero di figurine di Andrea ieri*) e alla differenza ottenuta aggiungono 21 (*per avere ancora il numero di figurine di Andrea oggi*) e controllano se il risultato dell'ultima operazione è il numero di partenza. La verifica dell'uguaglianza si ha con il numero 32, che è quindi la risposta al problema!

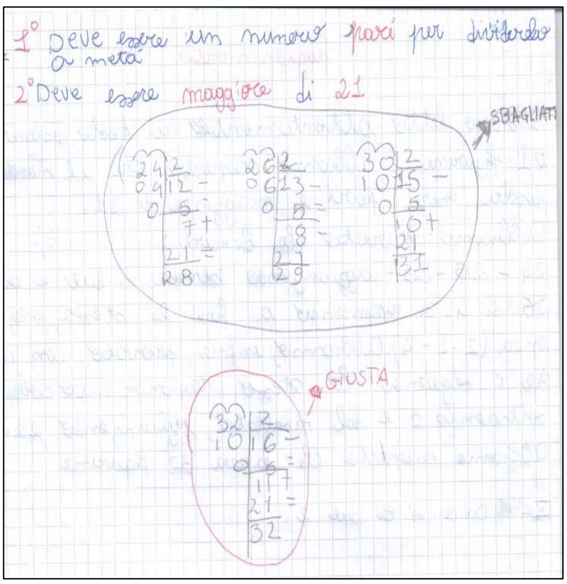


Fig. 8 (cat.5)

In genere, l'applicazione corretta della strategia per tentativi dà luogo ad una delle seguenti situazioni:
a) si arriva ad ottenere **il numero 16** delle figurine possedute da Giacomo e poi si continua con 16 – 5 = 11, figurine di Andrea ieri e con 16 × 2 = 32, figurine di Andrea oggi; oppure si continua con 16 – 5 = 11, figurine di Andrea ieri e poi con 11 + 21 = 32, figurine di Andrea oggi. In qualche elaborato si trova anche la verifica 32: 2 = 16;
b) si arriva ad ottenere il **numero 11** di figurine possedute da Andrea ieri e poi si procede con 11 + 5 = 16, figurine di Giacomo e 11 + 21 = 32, figurine di Andrea oggi; oppure, da 11 + 5 = 16, figurine di Giacomo, si passa a 16 × 2 = 32, figurine di Andrea oggi;
c) si arriva ad ottenere il **numero 32** di figurine possedute da Andrea oggi e poi si procede con 32 – 21 = 11, figurine di Andrea ieri, 11 + 5 = 16, figurine di Giacomo; oppure si continua con 32: 2 = 16, figurine di Giacomo, 16 – 5 = 11, figurine di Andrea ieri; oppure si continua con 32: 2 = 16, figurine di Giacomo e 16 × 2 = 32, figurine di Andrea.

4.2 Procedura B ("esperta")

In ogni categoria si trovano elaborati in cui gli allievi hanno applicato questo tipo di strategia, mostrando con le loro spiegazioni di aver compreso la situazione. Come è naturale, si nota un miglioramento dalla cat. 3 alla cat. 5 della capacità di descrivere la procedura seguita.

In Fig. 9 è riportato un elaborato di cat. 3: gli allievi disegnano le 21 figurine di Andrea e ne cancellano 5, poi eseguono la sottrazione 21– 5=16 e attribuiscono questo numero alle figurine di Giacomo

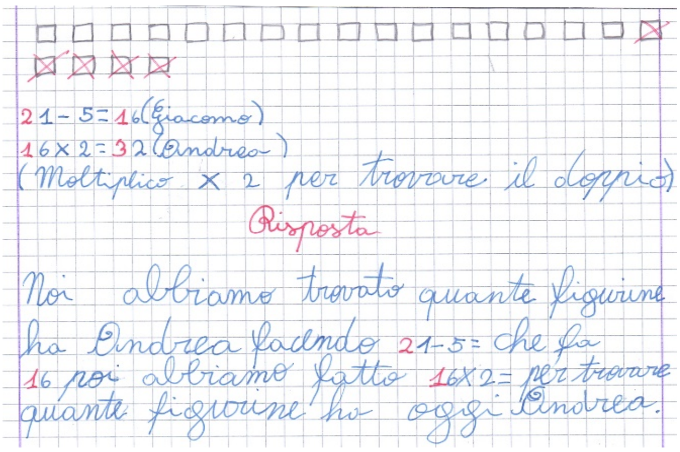


Fig. 9 (cat. 3)

"*21– 5 = 16 (Giacomo)*
16×2 = 32 (Andrea)
Risposta. Noi abbiamo trovato quante figurine ha Andrea facendo 21– 5= che fa 16, poi abbiamo fatto 16×2= per trovare quante figurine ha oggi Andrea".

In altri elaborati di cat. 3 si trovano descrizioni di questo tipo: "*Noi per sapere quante figurine ha Giacomo abbiamo fatto 21– 5 = 16 figurine e con un lungo ragionamento abbiamo capito che dovevamo fare 16 + 16 = 32 che sono le figurine di Andrea*". Le parole degli allievi fanno ipotizzare che ci sia stato un "certo impegno", probabilmente anche di confronto e discussione con i compagni del gruppo, per arrivare a risolvere il problema!

In Fig. 10 è riportato un elaborato di cat. 4 che presenta, a differenza dei precedenti, una descrizione chiara della procedura seguita poiché, per ogni operazione effettuata, si precisa il significato dei valori numerici utilizzati e dei risultati trovati.

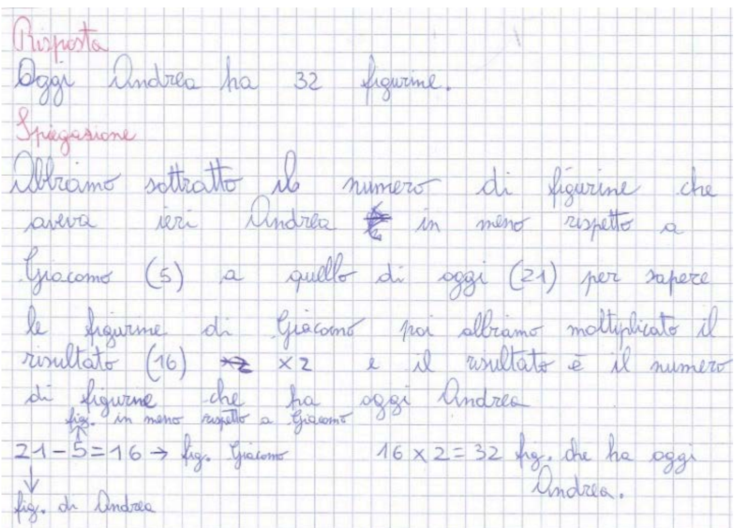


Fig. 10 (cat. 4)

"*Risposta. Oggi Andrea ha 32 figurine.*
Spiegazione. Abbiamo sottratto il numero di figurine che aveva ieri Andrea in meno rispetto a Giacomo (5) a quello di oggi (21) per sapere le figurine di Giacomo, poi abbiamo moltiplicato il risultato (16) × 2 e il risultato è il numero di figurine che ha oggi Andrea.
21 (fig. di Andrea) – 5 (fig. in meno rispetto a Giacomo) = 16 (fig. di Giacomo)
16×2 = 32 fig. che ha oggi Andrea."

Altre volte la spiegazione è più sintetica, ma ugualmente chiara come in quest'altro elaborato di cat. 4: "*Andrea, oggi, ha 32 figurine e Giacomo ne ha 16, cioè la metà. Abbiamo tolto 5 a 21 per vedere quante figurine aveva Andrea in più di Giacomo, ne ha 16 in più; abbiamo moltiplicato 16×2 ed è venuto 32, cioè le figurine di Andrea*".

In cat. 5, si trovano elaborati in cui la procedura "esperta" è spiegata con un ragionamento del tipo di quello indicato nell'analisi a priori, come mostra la trascrizione dei seguenti elaborati:

- "*Rispondo. Oggi Andrea ha 32 figurine. Ecco come abbiamo fatto: abbiamo fatto 21– 5 = 16 (perché 5 sono le figurine che servono ad Andrea) e abbiamo trovato le figurine di Giacomo e poi 16×2 = 32, che sono le figurine che Andrea ha oggi*".
- "***1.** Abbiamo trovato inizialmente le figurine che ha Giacomo, e abbiamo fatto: 21– 5 = 16 che sono le figurine che Giacomo e Andrea hanno uguali. **2.** Leggendo il problema abbiamo capito che il giorno dopo Andrea ne aveva il doppio. Allora abbiamo fatto: 16 × 2 = 32 che sono le figurine che ha oggi Andrea*".
- "*Andrea ha oggi 32 figurine. Andrea aveva 5 figurine in meno di quelle di Giacomo, perciò per arrivare alla soluzione dobbiamo trovare il numero di figurine di Andrea. Per trovarlo dobbiamo fare: 21 – 5 = 16, 16 × 2 =32. Abbiamo fatto questo perché: 21 sono le figurine ricevute da Andrea – 5, cioè quelle che ha in meno rispetto a Giacomo. Poi dobbiamo arrivare a 32 facendo: 16 figurine di Giacomo +16 figurine che sono avanzate dalle 21 iniziali = 32 figurine di Andrea, doppio di quelle di Giacomo*".

In qualche elaborato di cat. 5, gli allievi utilizzano la rappresentazione grafica con "segmenti" per visualizzare la situazione. Uno di questi elaborati è mostrato in Fig. 11.

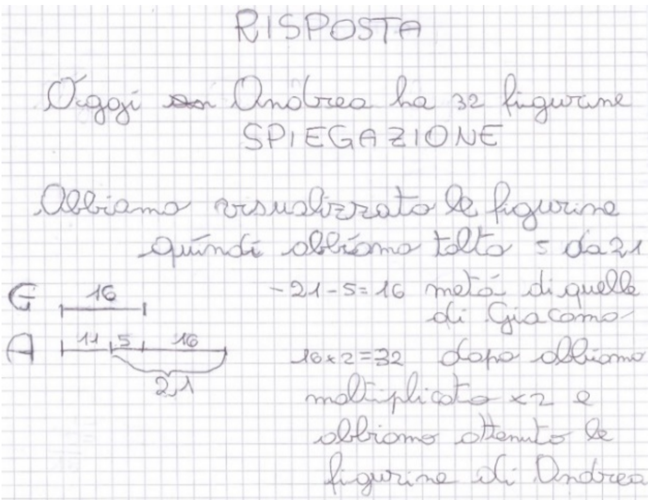


Fig. 11 (cat.5)

"*RISPOSTA. Oggi Andrea ha 32 figurine*
SPIEGAZIONE. Abbiamo visualizzato le figurine quindi abbiamo tolto 5 da 21
[GRAFICO]
21– 5 =16 metà di quelle di Giacomo
16×2 = 32 dopo abbiamo moltiplicato x2 e abbiamo ottenuto le figurine di Andrea."

4.3 Procedura C (non prevista a priori)

La procedura C compare in tutte le categorie, ma con una frequenza molto inferiore rispetto alla procedura B. Nelle Figg.12 e 13 sono riportati due esempi ben spiegati di applicazione di questa procedura, il primo di cat. 3 e l'altro di cat. 4.

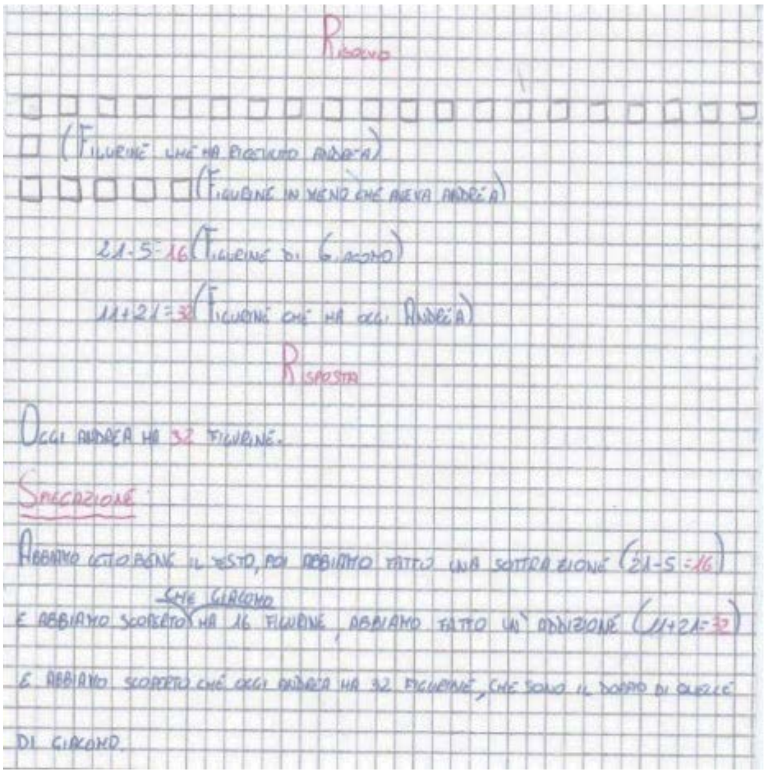


Fig. 12 (cat. 3)

"*<u>Risolvo</u>: 21 (Figurine che ha ricevuto Andrea)*
5 (Figurine in meno che aveva Andrea)
21– 5 = 16 (Figurine di Giacomo)
11+21 = 32 (Figurine che ha oggi Andrea)

<u>Risposta</u>:
Oggi Andrea ha 32 figurine
<u>Spiegazione:</u>
Abbiamo letto bene il testo, poi abbiamo fatto la sottrazione (21–5=16) e abbiamo scoperto che Giacomo ha 16 figurine, abbiamo fatto un'addizione (11+21 = 32) e abbiamo scoperto che oggi Andrea ha 32 figurine, che sono il doppio di quelle di Giacomo."

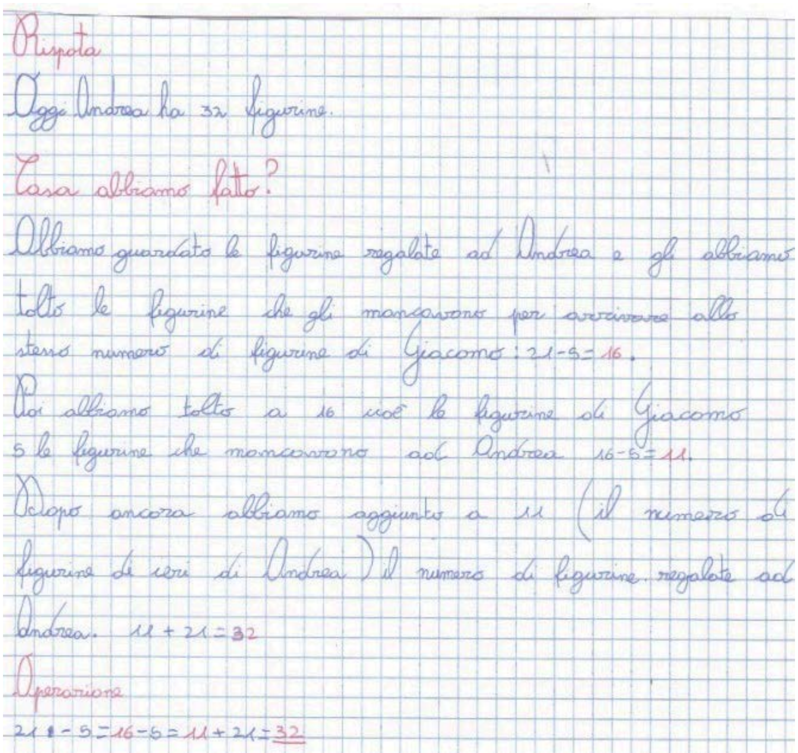


Fig.13 (cat.4)
"*Risposta. Oggi Andrea ha 32 figurine.*
Cosa abbiamo fatto?
Abbiamo guardato le figurine regalate ad Andrea e gli abbiamo tolto le figurine che gli mancavano per arrivare allo stesso numero di figurine di Giacomo: 21– 5 = 16. Poi abbiamo tolto a 16, cioè le figurine di Giacomo, 5 le figurine che mancavano ad Andrea 16– 5 =11. Dopo ancora abbiamo aggiunto a 11 (il numero di figurine di ieri di Andrea) il numero di figurine regalate ad Andrea 11+21 = 32.
Operazione [4]

21–5 = 16–5 = 11+21 = 32

5. Analisi commentata degli errori

Gli errori che compaiono più comunemente negli elaborati sono dovuti all'incomprensione di una o più condizioni presenti nel testo del problema. La conseguenza è che gli allievi arrivano a dare una risposta errata al problema, utilizzando sequenze di operazioni di vario tipo, a partire solitamente dai numeri 21 e 5.
Di seguito riportiamo le procedure errate più frequenti negli elaborati, con nostre osservazioni e ipotesi sugli errori commessi:
a) si somma il numero 21 delle figurine che Andrea riceve in dono al numero 5 delle figurine di differenza con Giacomo: **21 + 5 = 26, figurine di Andrea oggi** [*Non ci si rende conto che 5 è il numero di figurine che Andrea non ha rispetto a Giacomo e si trascura del tutto la relazione "ha il doppio di" tra il numero di figure di Andrea e quelle di Giacomo, così come la collocazione temporale "ieri /oggi" delle informazioni]*
b) si somma il numero 21 delle figurine che Andrea riceve in dono al numero 5 delle figurine di differenza con Giacomo e poi si considera la metà del numero ottenuto: **21 + 5 = 26, poi 26 : 2 = 13, figurine di Andrea oggi** [*Qui, rispetto al caso precedente, la relazione "ha il doppio di" è stata considerata, ma interpretata come se fosse la sua inversa, oppure si crede che sia Giacomo che ha il doppio di figurine di Andrea*]
c) Si esegue la sottrazione: **21 – 5 = 16, figurine di Andrea oggi** [*Si ipotizza che gli allievi usino il 21 e il 5 perché sono gli unici dati numerici presenti nel testo; inoltre, dal momento che la locuzione "in meno" compare vicino al 5, si esegue la sottrazione 21-5 e poiché entrambi i dati, 21 e 5, si riferiscono ad Andrea, si considera che il risultato 16 dell'operazione, sia proprio il numero figurine di Andrea oggi (anche qui la condizione relativa al "doppio" è completamente ignorata)*]
d) Si esegue la sottrazione tra 21 e 5 ma, a differenza del caso precedente, si considera che **21 – 5 = 16, figurine di Andrea ieri, quindi si continua con 16 + 21 = 37 per ottenere il numero di figurine che ha oggi Andrea**.
Oppure, in qualche caso, **37 è interpretato come numero di figurine di Giacomo e quindi è raddoppiato per ottenere 74, numero di figurine di Andrea oggi.**

[4] Anche in questo caso, come si trova spesso negli elaborati, siamo di fronte ad una catena di operazioni dove il segno "=" non è usato come indicatore della relazione matematica di uguaglianza tra le due quantità che sono a sinistra e a destra del segno, ma ha il significato dell'"=" nel tasto della calcolatrice, quindi è utilizzato per "indicare" il risultato che ogni volta si ottiene, nell'elenco di operazioni fatte in successione. Ricordiamo che in algebra il significato del segno è ovviamente quello "relazionale", quindi sarà opportuno fare una riflessione in proposito con gli allievi (cfr. su questo aspetto anche l'Editoriale di F. Jaquet "*A proposito del rigore del linguaggio*" in La Gazzetta di Transalpino, n° 8, p. 4)

e) Si individua correttamente il numero di figurine di Giacomo, ma poi lo si divide per 2, anziché raddoppiarlo: **21 – 5 = 16, figurine di Giacomo e 16 : 2 = 8, figurine di Andrea oggi** [*Anche qui la relazione "essere doppio di", relativa ad oggi, tra il numero di figurine di Andrea e il numero di figurine di Giacomo è stata invertita*]

Nei casi seguenti ci si concentra sulla parola "doppio" riferendola al numero 21, poi si raddoppia o si dimezza questo numero

f) 21×2 = 42, figurine di Andrea oggi [*Pensiamo che in questa situazione possa aver influito la vicinanza nel testo del problema del numero 21 alla parola "doppio"*]

g) si divide per 2 il numero 21 delle figurine che Andrea riceve in dono e si ignora il resto: **21:2 = 10, figurine di Giacomo, poi si procede con 10 – 5 = 5, figurine di Andrea ieri ed infine con 5+21=26, figurine di Andrea oggi.**

In altri casi, nella divisione **21:2 si accetta il risultato decimale 10,5** perdendo così di vista la situazione reale (il riferimento alle figurine!) e si procede in uno di dei seguenti modi:

procedura (1) **21: 2 = 10,5 poi 10,5 – 5 = 5,5 (figurine di Andrea ieri), a seguire 10,5 + 21 = 31,5 (figurine di Giacomo oggi) ed infine 31,5 × 2 = 63 (figurine di Andrea oggi);**

procedura (2) **21:2 = 10,5 poi 10,5 – 5 = 5,5 ed infine 5,5 +21 = 26,5 (figurine di Andrea oggi)**.

Oppure, **si trova una strategia per eliminare il problema della "mezza" figurina**. Un esempio è fornito nel seguente elaborato di cat. 5: "*Noi abbiamo fatto queste operazioni: 21:2 = 10,5 e poi lo abbiamo arrotondato in 11, poi abbiamo fatto 11 – 5 = 6 e poi 21 +6 = 27 figurine di Andrea".*

In qualche caso, invece, ci si rende conto che 21: 2 = 10,5 non è accettabile e allora si decide di "cambiare operazione" come nel seguente elaborato di cat. 5: "*Abbiamo cercato di dividere 21, ma essendo un numero dispari veniva 10,5 quindi abbiamo sommato 21+5=26* ***così potevamo dividerlo meglio*** *26:2=13; abbiamo sottratto il 5 dal 13, 13– 5=8 più quelle donate (21) si ottiene 29. Si capisce che ieri e oggi Giacomo aveva 13 figurine e Andrea ieri 8, +21 = 29, quindi Andrea oggi ne ha 29".* [È un tipico esempio di elaborato in cui le operazioni sono fatte "a tentativi", controllando se il risultato è un numero "accettabile" o no]

h) Si fissa l'attenzione sulle parole "doppio" e "differenza", senza però comprendere a cosa tali relazioni si riferiscono, pertanto si raddoppia il numero di figurine che Andrea ha ricevuto in dono e poi si sottraggono le 5 di differenza con Giacomo: **21 + 21 = 42; 42 – 5 = 37, figurine di Andrea oggi**; oppure si considera 37 come numero di figurine di Andrea ieri, e quindi si procede con **37+21 = 58 figurine di Andrea oggi.**

In molti altri elaborati, infine, compaiono sequenze di calcoli, suggeriti probabilmente dalle parole "*differenza, doppio*" ma anche dall'espressione "*riceve in dono*" che porta all'*addizione*, che vengono eseguiti senza specificare ogni volta ciò che si ottiene, e quindi con "perdita del senso" di ciò che si fa.

Riportiamo alcuni esempi di questo tipo, che si ritrovano in elaborati di ogni categoria:

Elaborato di cat. 3: "*21×2 = 42 – 5 = 37 Giacomo 37 figurine Andrea 42 figurine*".

Elaborato di cat. 4: "*OPERAZIONI: 21 – 5 = 16, 21 × 2 = 42, 42 + 16 = 58. RISPOSTA: Andrea ha oggi 58 figurine*

COME CI SIAMO ARRIVATI: ci siamo arrivati con tre operazioni: sottrazione, addizione, moltiplicazione".

Elaborato di cat. 5: "*Per risolvere questo problema prima di tutto abbiamo letto attentamente il testo più di una volta. Poi dopo abbiamo provato a fare tante operazioni ma nessuna tornava, poi siamo arrivati a scoprire questa soluzione:*

21 + 5 = 26 26 : 2 = 13 13 – 5 = 8 8 + 21 = 29. Risposta. Oggi Andrea ha 29 figurine".

Una delle insegnanti della Sezione Romagna, per descrivere il contenuto di elaborati di questo genere, ha coniato l'espressione **"marmellata di numeri",** che ci sembra del tutto appropriata alla situazione!

Dall'esame degli errori emerge chiaramente che le relazioni tra le quantità in gioco non sono state comprese o comprese solo parzialmente o una completamente dimenticata (spesso l'ultima, relativa al doppio), e che su questa difficoltà incontrata dagli allievi ha sicuramente influito sia il numero delle condizioni, sia la necessità di dover operare su quantità incognite, sia quella di dover considerare una situazione non statica, ma che varia nel tempo (da ieri a oggi) e che fa variare le relazioni tra le quantità incognite. Ricordiamo infatti che dalle ricerche effettuate analizzando a posteriori numerosi problemi del Rally assegnati in cat. 3, si è concluso "*che non emergono in modo specifico ambiti concettuali particolarmente difficili*", ma "*le difficoltà appaiono più legate alla struttura del problema (numero delle condizioni da gestire, dati numerici assenti o elevati, questioni che variano nel tempo) e al tipo di strategia da mettere in atto*" (fra cui procedure retroattive di ipotesi e verifica) (cfr. articolo di D. Medici e M.G. Rinaldi "*I problemi del RMT per la categoria 3: difficoltà e potenzialità"* in Atti delle giornate di studio sul Rally Matematico Transalpino, Vol. 5, 2006).

Le criticità individuate a priori sono quindi pienamente confermate dall'analisi a posteriori.

De l'examen des erreurs présentes dans les copies, il ressort clairement que les relations entre les quantités impliquées n'ont pas été comprises ou comprises que partiellement ou complètement oubliées (souvent la dernière, relative au double), et que sur cette difficulté rencontrée par les élèves a certainement influencé à la fois le nombre de conditions et la nécessité d'opérer sur des quantités inconnues, et celui d'avoir à considérer une situation qui n'est pas statique, mais qui évolue dans le temps (d'hier à aujourd'hui) et qui provoque la variation des relations entre les quantités inconnues.

Tout cela a fait que les élèves ont fini par combiner entre eux, par diverses opérations, les deux données numériques présentes dans l'énoncé, 21 et 5. Ainsi, par exemple, ils font 21 - 5 = 16 et interprètent cela comme le nombre d'images qu'André a aujourd'hui, ou comme celui des images d'André hier et ils continuent en faisant 21 + 16 = 37. Dans d'autres cas, les élèves font plutôt 21 + 5 = 26 pour conclure que c'est le nombre d''images d'André aujourd'hui ou, encore une fois, divisent 26 par 2 et disent que 13 est le nombre d'images d'André aujourd'hui. Dans d'autres cas encore, ils se concentrent sur le mot « double » en faisant référence au nombre 21, puis ils doublent ou divisent par deux ce nombre, en ajustant, dans ce second cas, le résultat ou en négligeant le reste ou encore, en passant aux décimaux et en arrondissant à l'entier précédent ou suivant.

6. Indicazioni didattiche

Da quanto è emerso dall'analisi a posteriori e dal confronto con gli insegnanti del Gruppo, siamo concordi nel ritenere il problema poco adatto ad essere proposto, così com'è, in cat. 3[5], soprattutto in mancanza di una fase iniziale dedicata all'appropriazione del compito con la guida dell'insegnante. L'analisi degli elaborati della gara ha infatti mostrato che, solo in un ristretto numero di casi, gli allievi sono riusciti a risolvere il problema, mostrando di aver ragionato in modo corretto. Osserviamo inoltre che, in questo caso, anche la *procedura per tentativi* non è facile da gestire per la complessità e la numerosità delle condizioni da tenere sotto controllo (e quindi a maggior ragione è difficile per bambini di categoria 3), con l'ovvia conseguenza che la possibilità di risolvere il problema per questa via è molto bassa. Più spesso, invece, la soluzione sembra essere stata trovata con la "*tecnica del provare vari tipi di operazione a partire dai numeri 21 e 5*", procedura alla quale, in genere, ricorrono gli allievi nella pratica scolastica, quando, di fronte ad un problema che non comprendono, si sentono comunque in obbligo (forse per "contratto didattico") di fornire una risposta!
Riteniamo che sia possibile, invece, l'utilizzazione del problema in classi di cat. 3 se l'insegnante dedica tempo alla fase di appropriazione del compito, guidando gli allievi in un'attività condivisa e finalizzata allo scopo. Per esempio, potrebbe essere proposta in classe proprio l'attività descritta nell'elaborato riportato in Fig. 2, in cui si "dà vita" alla situazione problematica con bambini che recitano la parte di Andrea e Giacomo e oggetti che rappresentano figurine, che ci sembra possa ben funzionare per coinvolgere gli allievi e far loro comprendere, nel realizzarle concretamente, le condizioni indicate nel testo. Inoltre si suggerisce di riportare, per esempio alla lavagna, i tentativi fatti e la relativa verifica delle condizioni, fino all'individuazione della soluzione, cioè di quel numero che soddisfa tutte le condizioni espresse nell'enunciato. Questa attività ha l'importante conseguenza di condurre in modo naturale alla scoperta della "procedura per tentativi" per la risoluzione di problemi.
Per le altre categorie, in particolare per la cat. 4, può essere opportuna una prima fase, guidata dall'insegnante, dedicata alla lettura e comprensione del testo, aperta al confronto e alla discussione con gli allievi. È poi fondamentale che questi ultimi siano lasciati liberi di risolvere il problema nelle modalità che ritengono più opportune e, ovviamente, anche di sbagliare. Una successiva fase sarà poi dedicata alla riflessione sulle procedure utilizzate e sugli errori commessi, e permetterà all'insegnante di capire i ragionamenti, corretti o meno, degli allievi e potrà far luce anche sulle risposte, giuste o sbagliate, trovate tentando varie operazioni e delle quali gli alunni non abbiano fornito motivazioni.
Se invece si vuole proporre il problema, in entrambe le categorie più basse, con le modalità del Rally Matematico Transalpino, si può pensare di togliere la questione tempo e di eliminare la condizione "*Oggi Giacomo ha ancora lo stesso numero di figurine che aveva ieri*", che è sottointesa proprio perché le variazioni si hanno solo sulle figurine di Andrea. In nota a piè di pagina si riporta, come esempio, una proposta[6].
La situazione cambia in cat. 5 dove la percentuale degli elaborati corretti aumenta, così come l'uso della procedura per tentativi (nelle sezioni di Siena e di Romagna, è di fatto la strategia più utilizzata per risolvere il problema).
Riteniamo quindi che, soprattutto a partire dalla cat. 5, questo problema possa offrire spunti ed indicazioni interessanti per un insegnante che intenda servirsene anche all'interno di un percorso finalizzato allo sviluppo del pensiero algebrico e all'introduzione del concetto di equazione.
In un uso in classe del problema, come l'analisi a posteriori ha mostrato, è infatti molto probabile che gli allievi ricorrano alla strategia per tentativi con utilizzo spontaneo di tabelle, organizzate in vari modi, per riportare i

---

[5] Originariamente, il problema "Pokemon" non era stato previsto per cat. 3, ma in sede di sistemazione della prova per la gara è stato deciso di proporlo anche a questa categoria (come sesto problema) per la necessità di completare il numero dei problemi richiesti per la categoria stessa.

[6] "Andrea e Giacomo contano le loro figurine dei Pokemon. Andrea ha 5 figurine in meno di Giacomo. Ecco però che arriva la zia di Andrea e gliene regala altre 21. Ora Andrea ha il doppio delle figurine di Giacomo. **Quante figurine ha Andrea? Mostrate come avete trovato la vostra risposta.**"

tentativi fatti. Prendendo spunto proprio dal lavoro degli allievi, si può avviare il percorso che porta al concetto di equazione (e anche a quello di funzione…). Per esempio, a partire da una tabella che mostra una procedura per tentativi sistematici, si può, coinvolgendo gli allievi, arrivare progressivamente all'individuazione dell'*incognita*, (il valore numerico che non si conosce ma che si vuole determinare) e alla sua *rappresentazione con un simbolo*, al *riconoscimento delle leggi che deve soddisfare* e alla loro *esplicitazione nel linguaggio simbolico*, cioè, in altri termini, all'*equazione* che "matematizza" il problema. Per esempio, utilizzando le tabelle nell'elaborato di Fig. 6, indicato con n il numero di figurine di Andrea ieri, dall'uguaglianza tra il numero di figurine di Andrea oggi, cioè $n + 21$, e il doppio delle figurine di Giacomo, cioè $2 \times (n + 5)$, si arriva alla scrittura: $(n + 21) = 2 \times (n + 5)$, che altro non è che un'equazione che traduce in termini matematici il problema. La valenza didattica di tutto il procedimento è molto chiara: così facendo, la scrittura dell'equazione non è solo un insieme di simboli (lettere, numeri, segni di operazioni…) "calati dall'alto" e messi insieme in qualche modo, ma ha un "senso" per gli allievi, proprio perché hanno partecipano consapevolmente, passo dopo passo, alla sua costruzione[7].

De ce qui ressort de l'analyse a posteriori et des discussions avec les enseignants de notre Groupe, nous estimons que le problème n'est pas très approprié pour être proposé, tel quel, en cat. 3. Nous pensons qu'il est cependant possible d'utiliser le problème dans des classes de cat. 3 et 4 si l'enseignant consacre du temps à la phase d'appropriation de la tâche, en guidant les élèves dans une activité partagée visant la finalité (par exemple, lecture et analyse du texte ouvert à la comparaison et au partage avec les élèves ou par une « dramatisation » du texte avec des enfants qui « donnent vie » à la situation problématique).

Par contre, il nous semble que, surtout à partir de la cat. 5, ce problème peut offrir des idées et des indications intéressantes pour un enseignant qui entend l'utiliser également dans un parcours d'apprentissage vers le développement de la pensée algébrique et l'introduction du concept d'équation.

Dans une utilisation en classe du problème, comme l'analyse a posteriori l'indique, il est en effet très probable que les élèves recourent à la stratégie des essais avec l'utilisation spontanée de tableaux, organisés de diverses manières, pour rendre compte des essais effectués. En s'inspirant des travaux des élèves, on peut s'engager sur le chemin qui mène à la notion d'équation (et aussi à celle de fonction...). Les Fig. 14, 15 et 16 sont trois copies, l'une de cat. 4 et deux de cat. 5, dans lesquelles apparaît la procédure par essais, que nous considérons intéressante du point de vue de l'enseignement de l'algèbre car elles sont des exemples d'une progression significative dans le développement de la pensée algébrique et de la manière de l'exprimer par les élèves qui l'ont produite de manière autonome.

Riportiamo di seguito tre elaborati del problema Pokemon, tutti risolti per tentativi, uno di cat. 4 e due di cat. 5 (cfr. Figg. 14, 15 e 16), che riteniamo interessanti dal punto di vista della didattica dell'algebra, perché costituiscono esempi di una progressione significativa nell'ambito dello sviluppo del pensiero algebrico e del modo di esprimerlo da parte degli allievi che li hanno autonomamente prodotti.
Nel primo caso (Fig. 14) la strategia è applicata riportando i tentativi fatti ("in economia", perché *ci si limita ai numeri pari maggiori di 5* per il numero di figurine di Giacomo), mostrando per ciascun tentativo la procedura seguita (sempre la stessa): **successione delle operazioni e verifica dell'uguaglianza**. In questo esempio, si è ancora ad un livello prettamente aritmetico.

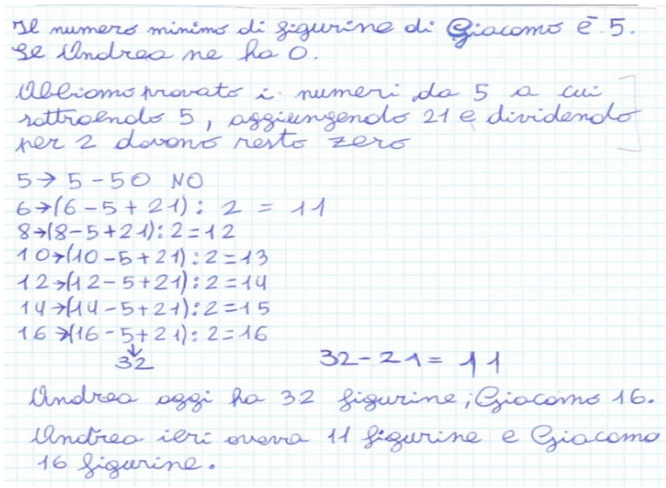

Il numero minimo di figurine di Giacomo è 5.
Se Andrea ne ha 0.
Abbiamo provato i numeri da 5 a cui sottraendo 5, aggiungendo 21 e dividendo per 2 davano resto zero
5→5-5 0 NO
6→(6-5+21): 2 = 11
8→(8-5+21):2=12
10→(10-5+21):2=13
12→(12-5+21):2=14
14→(14-5+21):2=15
16→(16-5+21): 2=16
32   32-21=11
Andrea oggi ha 32 figurine; Giacomo 16.
Andrea ieri aveva 11 figurine e Giacomo 16 figurine.

Fig 14 (cat.5)
"*Il numero minimo di figurine di Giacomo è 5, se Andrea ne ha 0.*
Abbiamo provato i numeri da 5 a cui sottraendo 5, aggiungendo 21 e dividendo davano resto zero
[TABELLA]
Andrea oggi ha 32 figurine, Giacomo 16.
Andrea ieri aveva 11 figurine e Giacomo 16 figurine."

[7] Sarà compito del docente gestire la "*fase di istituzionalizzazione*" della nuova conoscenza, che comprende anche "insegnare" le notazioni, la terminologia, gli algoritmi e quant'altro ritiene necessario.

Nel secondo caso (Fig. 15), la procedura è colta in generale, quindi a prescindere dai particolari valori numerici. Di fatto gli allievi **hanno descritto in "*forma retorica*"** (usando cioè il linguaggio naturale) **l'equazione con cui determinare il numero delle figurine di Giacomo**[8].

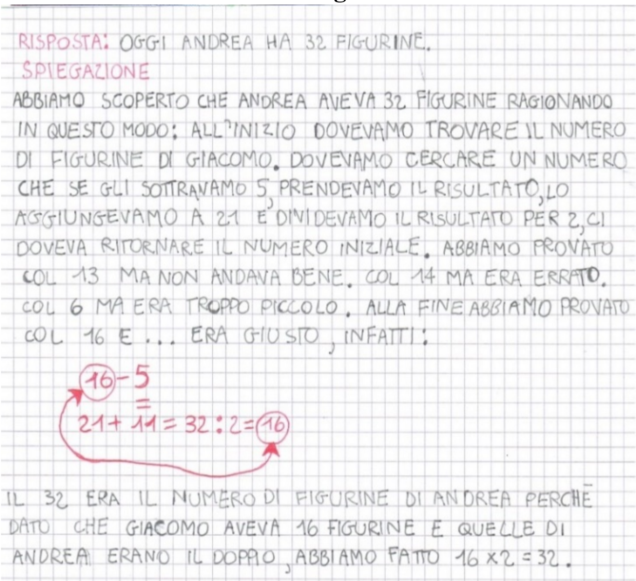

RISPOSTA: OGGI ANDREA HA 32 FIGURINE.
SPIEGAZIONE
ABBIAMO SCOPERTO CHE ANDREA AVEVA 32 FIGURINE RAGIONANDO IN QUESTO MODO: ALL'INIZIO DOVEVAMO TROVARE IL NUMERO DI FIGURINE DI GIACOMO. DOVEVAMO CERCARE UN NUMERO CHE SE GLI SOTTRAVAMO 5, PRENDEVAMO IL RISULTATO, LO AGGIUNGEVAMO A 21 E DIVIDEVAMO IL RISULTATO PER 2, CI DOVEVA RITORNARE IL NUMERO INIZIALE. ABBIAMO PROVATO COL 13 MA NON ANDAVA BENE. COL 14 MA ERA ERRATO. COL 6 MA ERA TROPPO PICCOLO. ALLA FINE ABBIAMO PROVATO COL 16 E... ERA GIUSTO, INFATTI:
16-5
=
21+11=32:2=16
IL 32 ERA IL NUMERO DI FIGURINE DI ANDREA PERCHE DATO CHE GIACOMO AVEVA 16 FIGURINE E QUELLE DI ANDREA ERANO IL DOPPIO, ABBIAMO FATTO 16x2=32.

Fig. 15 (cat. 4)

"*RISPOSTA: Oggi Andrea ha 32 figurine SPIEGAZIONE: Abbiamo scoperto che Andrea aveva 32 figurine ragionando in questo modo: all'inizio dovevamo trovare il numero di figurine di Giacomo. Dovevamo cercare un numero che gli sottraevamo 5, prendevamo il risultato, lo aggiungevamo a 21 e dividevamo il risultato per 2, ci doveva ritornare il numero iniziale. Abbiamo provato col 13 ma non andava bene. Col 14 ma era errato. Col 6 ma era troppo piccolo. Alla fine abbiamo provato col 16 e… era giusto, infatti:*

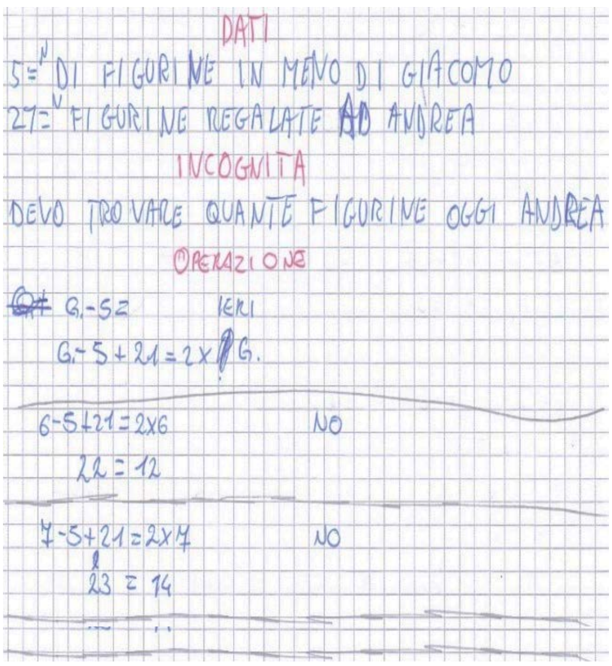
16** – 5= 11   21+11 = 32   32:2 =**16

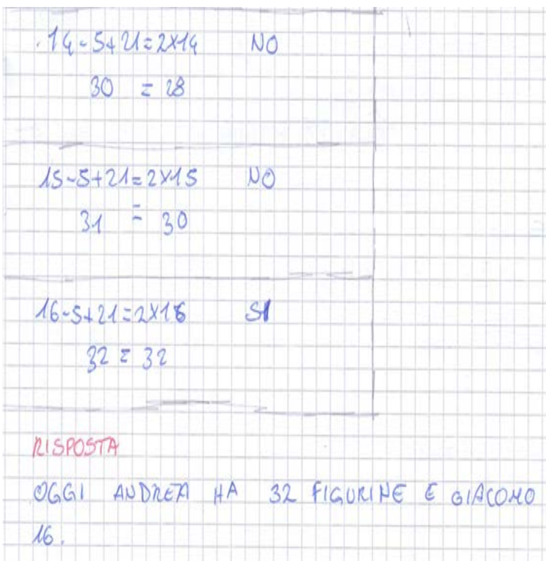
Il 32 era il numero di figurine di Andrea perché dato che Giacomo aveva 16 figurine e quelle di Andrea era il doppio, abbiamo fatto 16×2=32."

Nel terzo caso, la procedura è descritta nella sua generalità in ***forma simbolica***: di fatto, gli allievi scrivono l'equazione **G – 5 + 21 = 2 × G** nell'incognita G, numero di figurine di Giacomo, e la risolvono per tentativi. In Fig. 16 sono riportati solo i primi e gli ultimi tentativi, mentre nell'elaborato originale i tentativi per determinare G sono stati fatti in modo sistematico a partire da 6 fino ad arrivare a 16, che è il valore che verifica l'uguaglianza (cioè la soluzione dell'equazione)!

Per un insegnante, un elaborato di questo tipo da discutere in classe con gli allievi, può offrire un buon punto di partenza per aprire (o continuare), il discorso sul tema "equazioni", ed estenderlo poi anche a "modalità di risoluzione" più economiche di quelle per tentativi.

Fig.16 (cat. 5)


DATI
5= N° DI FIGURINE IN MENO DI GIACOMO
21= N° FIGURINE REGALATE AD ANDREA
INCOGNITA
DEVO TROVARE QUANTE FIGURINE OGGI ANDREA
OPERAZIONE
G-5= IERI
G-5+21=2xG.
6-5+21=2x6 NO
22=12
7-5+21=2x7 NO
23=14


14-5+21=2x14 NO
30=28
15-5+21=2x15 NO
31=30
16-5+21=2x16 SI
32=32
RISPOSTA
OGGI ANDREA HA 32 FIGURINE E GIACOMO 16.

[8] La traduzione nel linguaggio simbolico della frase che abbiamo sottolineato nell'elaborato degli allievi darebbe luogo alla scrittura: $[(n - 5) + 21]:2 = n$, dove n è il numero di figurine di Giacomo.

Concludiamo con un interessante elaborato di cat. 5. Qui gli allievi mostrano di aver compreso le indicazioni contenute nel testo e le rappresentano, come essi stessi scrivono, in "*una specie di schema*" nel quale la situazione di oggi del numero di figurine di Andrea rispetto al numero incognito, x, di figurine di Giacomo è descritta da "*x – 5 + 21 = doppio di x*", che di fatto è *un'**equazione in forma "sincopata"*** (contiene cioè parole e simboli matematici). Altro fatto da notare è che questi allievi sanno lavorare con i numeri relativi, come espresso nella rase che abbiamo sottolineato nella loro spiegazione. Purtroppo, si perdono alla fine e commettono l'errore di considerare 16 come il doppio del numero x di figurine di Giacomo (in altri termini, considerano $16 = 2x$, anziché $x + 16 = 2x$!).

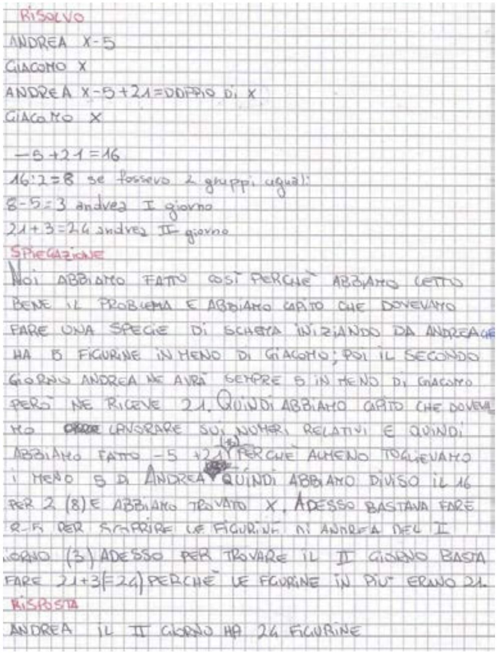


Fig. 17 (cat. 5)
"*RISOLVO*
Andrea x – 5 Giacomo x
Andrea x–5+21 = doppio di x
Giacomo x
–5+21 =16
16:2 = 8 *se fossero due gruppi uguali*
8–5 = 3 *Andrea I giorno* 21+3=24 *Andrea II giorno*
SPIEGAZIONE. Noi abbiamo fatto così perché abbiamo letto bene il problema e abbiamo capito che dovevamo fare una specie di schema iniziando da Andrea che ha 5 figurine in meno di Giacomo; poi il secondo giorno Andrea ne avrà sempre 5 in meno di Giacomo, però ne riceve 21. Quindi abbiamo capito che dovevamo lavorare sui numeri relativi e quindi abbiamo fatto –5 + 21 (16) perché almeno toglievamo i meno 5 di Andrea. Quindi abbiamo diviso il 16 per 2 (8) e abbiamo trovato x. Adesso bastava fare 8–5 per scoprire le figurine di Andrea del I giorno (3). Adesso per trovare il II giorno basta fare 21+3 (=24) perché le figurine in più erano 21.
RISPOSTA Andrea il II giorno ha 24 figurine

APPENDICE

Uno degli insegnanti del Gruppo, Alessandro Carciola, ha aderito alla nostra richiesta di sperimentare il problema nella scuola secondaria di I grado e lo ha proposto nelle sue tre classi di cat. 6, cat. 7 e cat. 8. Purtroppo, a causa del Covid, gli allievi non sono stati in presenza ed hanno quindi lavorato singolarmente. Solo la fase di discussione degli elaborati è avvenuta con la partecipazione degli allievi collegati a distanza.

Con la classe prima l'insegnante aveva già avviato un percorso sui problemi utilizzando vari tipi di esperienze, anche allo scopo di fare emergere quanto può essere utile per la risoluzione la rappresentazione grafica dei dati relazionali. Ecco, con le sue parole, il motivo per cui lo ha proposto anche alle classi successive: «*Ho deciso di far svolgere il problema anche agli allievi di seconda e di terza perché ho ipotizzato che la gestione delle relazioni tra i dati potesse generare delle difficoltà. Infatti la relazione tra il numero di figurine di Andrea e quelle di Giacomo "si muove" nel tempo. Ho pensato che questo "movimento" potesse risultare di non facile gestione in fase di rappresentazione*».

Riportiamo di seguito una sintesi commentata del lavoro svolto.

Non ci sono state differenze sostanziali fra le tre classi: alcuni, in modo analogo agli allievi della scuola primaria, forniscono la risposta corretta elencando le operazioni senza dare alcuna spiegazione, altri, soprattutto in cat.6, non effettuano alcun controllo sul risultato (soprattutto in quegli elaborati che riportano16 figurine per Andrea e 8 per Giacomo), dimenticandosi totalmente delle altre condizioni assegnate, altri ancora rappresentano la situazione disegnando scatole e palline, ma hanno difficoltà ad includere la relazione «oggi Andrea ha il doppio del numero di figurine di Giacomo» e procedono con tentativi organizzati in una tabella.

In molti elaborati è evidente l'impronta dell'insegnante, che ha abituato gli allievi a rappresentare con un disegno la situazione, ma in alcuni la rappresentazione non supporta il pensiero ed emerge il contratto didattico: *rappresento perché il prof dice che «è importante».*

Nell'elaborato di Fig.18 (cat.7) la soluzione è supportata sia da una rappresentazione corretta di tutte le condizioni sia da un uso appropriato dei simboli.

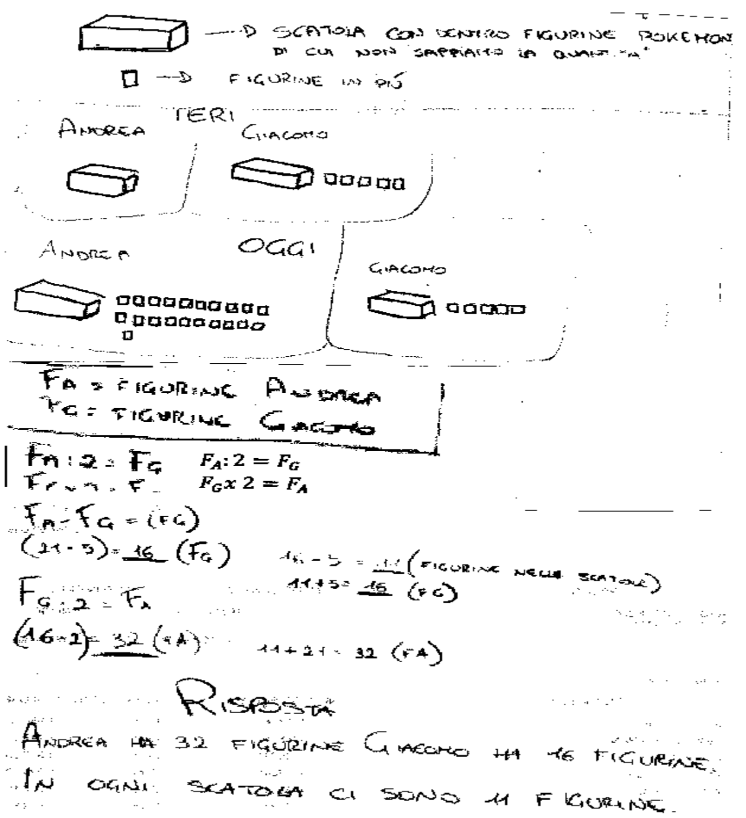


Fig.18 (cat.7)

In cat 8, nonostante non fosse stato ancora affrontato in modo sistematico l'argomento "equazioni", due allievi hanno simbolizzato con una lettera il numero delle figurine di uno dei due bambini. Uno dei due ha proceduto impostando un'equazione e risolvendola correttamente. (Fig. 19 cat. 8). Ciò ha dato l'occasione all'insegnante di introdurre il concetto di equazione e di equazioni equivalenti

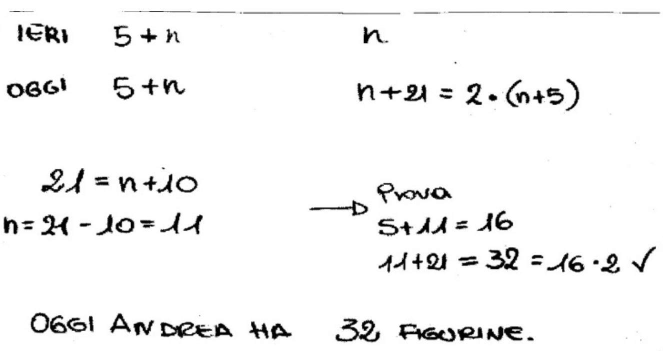


Fig 19 (cat 8)

In definitiva, è vero che l'attività è stata affrontata singolarmente, ma la sperimentazione ha mostrato che anche per gli allievi della scuola secondaria di primo grado il problema non è di semplice risoluzione ed è interessante dal momento che può far emergere procedure da analizzare e discutere con la scolaresca.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

"LE SCATOLE DI CATERINA": ANALISI DI UN PROBLEMA/ « LES BOÎTES DE CATHERINE » : ANALYSE D'UN PROBLÈME

Gruppo Geometria dello spazio / Groupe de Géométrie de l'espace

A cura di Chiara Cateni e Francesca Ricci[1]

1. Introduzione generale/ Introduction générale

Perché proporre a bambini della scuola primaria problemi di geometria dello spazio? Nonostante il fatto che la didattica laboratoriale stia prendendo piede nella scuola, spesso permane un approccio alla geometria solida che ricalca l'impostazione euclidea, a partire dalla geometria piana. Infatti a una modalità laboratoriale sovente non corrisponde un cambiamento nella scansione didattica della maggior parte degli insegnanti.

Diverse ricerche mettono invece in evidenza come la geometria tridimensionale sia quella più vicina all'esperienza del bambino e quindi più intuitiva (Arrigo G., Sbaragli S., 2004. - Sbaragli S., Mammarella I.C., 2010).

Inoltre, anche se le rappresentazioni utilizzate per far comprendere un concetto matematico sono solo modelli e quindi lontani dall'idealità, i modelli in tre dimensioni sono più vicini alla realtà perché, almeno dimensionalmente, corrispondono all'oggetto matematico. Questo a differenza delle rappresentazioni a 0, 1 o 2 dimensioni (punti, segmenti, superfici), che invece non trovano nessuna correlazione fra la realtà e l'oggetto matematico[2].

Pourquoi faut-il proposer des problèmes de géométrie de l'espace aux élèves du primaire ? Malgré le fait que les activités expérimentales (constructions, pliages, découpages) gagnent du terrain à l'école, on rencontre encore souvent une approche de la géométrie solide de type euclidienne, à partir de la géométrie plane. En fait, souvent une modalité « manipulatoire » ne correspond pas à un changement dans l'approche didactique de la plupart des enseignants.

Plusieurs recherches, en revanche, mettent en évidence le fait que la géométrie tridimensionnelle est la plus proche de l'expérience de l'enfant et donc la plus intuitive (Arrigo G., Sbaragli S., 2004. - Sbaragli S., Mammarella I.C., 2010).

De plus, même si les représentations utilisées pour faire comprendre un concept mathématique ne sont que des modèles et donc loin d'être idéales, les modèles tridimensionnels sont plus proches de la réalité car, au moins dimensionnellement, ils correspondent à l'objet mathématique. Ceci contrairement aux représentations en 0, 1 ou 2 dimensions (points, segments, surfaces), qui ne trouvent aucune corrélation entre la réalité et l'objet mathématique.

Noi riteniamo importante cominciare presto a utilizzare modelli tridimensionali e situazioni problematiche che facciano riferimento alla realtà, anche intercalandole con attività di geometria piana.

Oltretutto ragionare in tre dimensioni allena la mente allo sviluppo di abilità visuo-spaziali che si dimostrano essere molto importanti, non solo per l'apprendimento della geometria, ma di tutta la matematica e delle scienze in generale (incolonnamento, gestione del foglio…).

Il problema su cui ci siamo concentrati si inserisce bene in un percorso in cui geometria tridimensionale e bidimensionale si alternino sia per stimolare negli allievi capacità visuo-spaziali così importanti nell'apprendimento della geometria sia per fornire una pluralità di modelli che, seppure incompleti, permettano di avvicinarsi progressivamente al corretto concetto matematico.

Un altro aspetto che assume particolare rilevanza è quello che riguarda le difficoltà che incontrano gli allievi nelle concezioni sulla relazione fra area e volume. Come già evidenziato da Jaquet (Jaquet F., 2000) riguardo al conflitto area-perimetro, anche nel caso di area e volume le difficoltà non sono solo legate al significato di questi concetti, ma anche alle modalità didattiche con cui vengono proposti.

---

[1] Roberto Battisti, Michela Mattei, Giuseppe Raffaelli, Ester Bonetti, Rita Orsola D'Agata, Irene Serpieri, Mari Cutrera, Carlo Marchini, Daniela Blanchet, Lucia Fazzino, Rosa Santori, Thierry Dias, Sebastien Dessertine. Testo della presentazione del Gruppo Geometria solida all'incontro di Besançon, Besançon, 29-31 ottobre 2010/ Texte de la présentation du Groupe Géométrie solide à la rencontre de Besançon, Besançon, 29-31octobre 2010.

[2] Si veda articolo di Raymond Duval Gazzetta di Transalpino n.10, pp17-26/ Voir l'article de Raymonde Duval, Gazette de Transalpie 10, pp 7-16.

A questo proposito gli studi di Rogalski (Rogalski J.,1979) e di Vergnaud (Vergnaud G.,1983 - Vergnaud G. et al.,1983) hanno messo in evidenza gli ostacoli che incontrano gli allievi nel cogliere le diverse concezioni di volume, così come quelli concernenti il cambio di dimensione e l'unità di misura.

Nous pensons qu'il est important de commencer tôt à utiliser des modèles tridimensionnels et des situations problématiques qui se réfèrent à la réalité, en les entremêlant également avec des activités de géométrie plane.

De plus, le raisonnement en trois dimensions entraîne l'esprit à développer des compétences visuo-spatiales qui s'avèrent très importantes, non seulement pour l'apprentissage de la géométrie, mais pour toutes les mathématiques et les sciences en général (empilement, gestion de feuilles, ...).

Le problème sur lequel nous nous sommes concentrés s'inscrit bien dans un cheminement dans lequel l'alternance des géométrie tridimensionnelle et bidimensionnelle d'une part stimulent les compétences de visualisation dans l'espace des élèves si importantes dans l'apprentissage de la géométrie et d'autre part fournissent une pluralité de modèles qui, bien qu'incomplets, permettent d'approcher progressivement le concept mathématique correct.
Un autre aspect qui revêt une importance particulière est celui qui concerne les difficultés que les élèves rencontrent dans les concepts de relation entre l'aire et le volume. Comme déjà souligné par Jaquet (Jaquet F., 2000) à propos du conflit aire-périmètre, même dans le cas de l'aire et du volume, les difficultés ne sont pas seulement liées au sens de ces concepts, mais aussi aux méthodes didactiques avec lesquelles ils sont proposés.
A cet égard, les travaux de Rogalski (Rogalski J., 1979) et de Vergnaud (Vergnaud G., 1983 - Vergnaud G. et al., 1983) ont mis en évidence les obstacles que rencontrent les élèves pour appréhender les différentes conceptions du volume, ainsi que celles concernant le changement de taille et l'unité de mesure.

Il Rally Matematico Transalpino ha un approccio più pragmatico. Crea e analizza problemi ispirati dai contesti più vari. Quelli che si situano nello spazio in cui vivono gli alunni vengono elaborati e analizzati dal Gruppo Geometria dello spazio. Ce ne sono circa un centinaio, raggruppati nella Banca dei problemi RMT. Migliaia di gruppi di studenti si sono impegnati nella loro risoluzione e hanno descritto come l'hanno fatto.

Un'attenta lettura delle loro spiegazioni aiuta a identificare ostacoli, errori e procedure.

A tal proposito si può leggere un resoconto del lavoro del gruppo, scritto da Roberto Battisti, molto vicino alle questioni sollevate in questa introduzione: La visualizzazione spaziale... dimenticata.[3]

Le Rallye Mathématique Transalpin, adopte une approche plus pragmatique. Il crée et analyse des problèmes de contextes variés. Ceux qui se situent dans l'espace où vivent les élèves sont élaborés et analysés par le Groupe de Géométrie de l'espace. Il y en a une centaine, regroupés dans la Banque de problèmes du RMT. Des milliers de groupes d'élèves se sont engagés dans leur résolution et ont décrit la manière dont ils ont procédé.

La lecture attentive de leurs explications permet d'identifier obstacles, erreurs et procédures. On peut lire à ce propos un compte rendu des travaux de ce groupe sous la plume de Roberto Battisti qui est très proche des questions évoquées dans cette introduction : « La visualisation spatiale. .. oubliée ».[3]

3

2. Introduzione al problema/ Introduction au problème

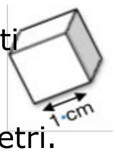
"Le scatole di Caterina" è il problema n.7 della finale del 26° Rally Matematico Transalpino.
Di seguito sono riportati l'enunciato e l'analisi a priori:

« Les boîtes de Catherine », est le 7e problème de la finale du 26° Rallye Mathématique Transalpin.
Voici son énoncé et son analyse a priori :

LE SCATOLE DI CATERINA (Cat. 4, 5, 6)

Caterina ha 70 cubetti tutti uguali con le facce di 1 centimetro di lato.

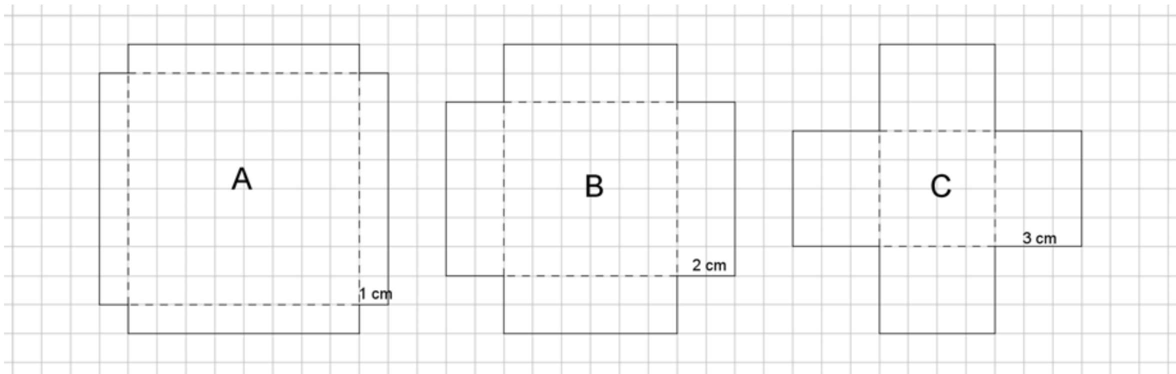
Caterina vuole costruire una scatola senza coperchio che contenga tutti i cubetti.



Prende tre cartoncini quadrati uguali, con il lato che misura 10 centimetri.

Da ciascuno di essi ritaglia in ogni angolo un quadrato: nel cartoncino A il lato di ogni quadrato ritagliato misura 1 cm, nel cartoncino B misura 2 cm e nel cartoncino C misura 3 cm.

Ecco i disegni dei cartoncini dopo che sono stati ritagliati i quadrati



Caterina piega poi i cartoncini lungo le linee tratteggiate e costruisce le tre scatole, senza coperchio, attaccando le facce con del nastro adesivo.

Quale scatola potrà contenere tutti i cubetti di Caterina senza che questi sporgano dalla scatola?

Mostrate come avete fatto a individuare la scatola giusta e spiegate perché è l'unica che può essere scelta da Caterina.

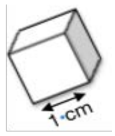
LES BOÎTES DE CATHERINE (Cat. 4, 5, 6)

Catherine a 70 cubes dont toutes les faces ont 1 cm de côté.

Elle désire construire une boîte sans couvercle qui pourra les contenir tous.

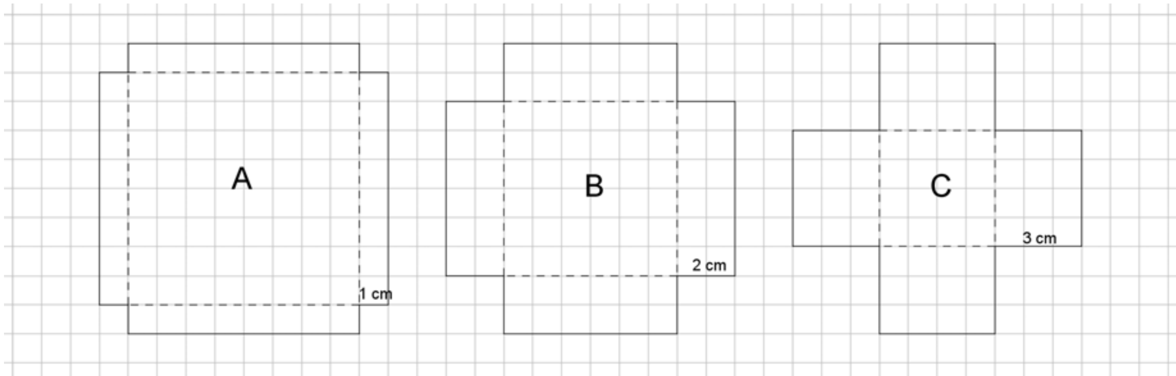
Elle prend trois feuilles cartonnées carrées, dont les côtés mesurent 10 cm.

Dans chacune de ces feuilles, elle découpe un petit carré de chaque angle :



dans la feuille A le côté de chaque petit carré mesure 1 cm, dans le feuille B il mesure 2 cm et dans le feuille C il mesure 3 cm.

Voici les trois feuilles cartonnées avec les petits carrés découpés.



Catherine plie chaque feuille selon les lignes on pointillés et construit les trois boîtes sans couvercle en collant les faces avec du papier adhésif.

Quelle boîte pourra contenir tous les cubes de Catherine, sans que ceux-ci ne dépassent de la boîte ?

Montrez comment vous avez trouvé la boîte demandée et pourquoi Catherine ne peut choisir que cette boîte.

Analisi a priori / Analyse a priori

Compito matematico / Tâche mathématique

A partire dall'osservazione di tre sviluppi di parallelepipedi mancanti di una faccia, stabilire quale può da dare origine ad una scatola che possa contenere un determinato numero di cubetti (70) di volume assegnato (1 cm^3).
A partir de trois développements partiels de boîtes à base carrée (sans couvercle), imaginer les solides correspondant et déterminer si on peut y placer 70 cubes de 1 cm d'arête.

Analisi del compito/ Analyse de la tâche

- Osservare le figure e rendersi conto che esse mostrano i tre cartoncini dopo che da ciascuno sono stati ritagliati negli angoli quattro quadrati uguali, ma con lato diverso in ogni cartoncino (1 cm, 2 cm, 3 cm)
- Rendersi conto che, piegando i cartoncini lungo le linee tratteggiate e unendo poi le facce laterali, si ottengono scatole a forma di parallelepipedo a base quadrata con altezze diverse e diverso spigolo di base
- Capire che l'altezza di ogni scatola è uguale al lato di un quadratino ritagliato dal cartoncino e su ogni livello (strato) si può disporre al massimo lo stesso numero di cubetti.
- Capire che per poter riempire le scatole con il maggior numero di cubetti bisogna sistemarli uno vicino all'altro per non lasciare spazi vuoti tra di loro.
- Capire che ogni quadretto che forma la base di ogni scatola coincide con una faccia del cubetto e che perciò sul fondo di ciascuna scatola si potranno sistemare tanti cubetti quanti sono i quadretti
- Contare o calcolare il numero di cubetti che si possono mettere sul fondo di ogni scatola, rispettivamente di 64, 36 e 16 cubetti.
- Poiché l'altezza della scatola A è uguale allo spigolo del cubetto, la scatola si può riempire con un unico strato (64 cubetti, (8 × 8), mentre la scatola B può contenere due strati di cubetti, quindi la scatola B può

contenere al massimo 72 cubetti 36 + 36 oppure (36 × 2) a scatola C può contenere tre strati, quindi 48 cubetti (16 + 16 + 16) oppure (16 × 3)

- Concludere che l'unica scatola che può contenere tutti i 70 cubetti è la scatola B.

Oppure

- Ritagliare le figure e costruire le scatole unendo con il nastro adesivo le facce laterali; se si hanno a disposizione cubetti di 1 cm^3 provare a riempire almeno il primo strato per capire come contare tutti i cubetti che ogni scatola può contenere, altrimenti immaginarsi la disposizione dei cubetti. Calcolare poi quanti sono i cubetti che ciascuna scatola può contenere.
- Observer les figures et se rendre compte qu'elles montrent les trois cartons carrés après le découpage des petits carrés dans les angles de longueurs de côtés (1 cm, 2 cm, 3 cm) c'est-à-dire les développements de trois boîtes de dimensions différentes.
- Se rendre compte que, en pliant les cartons selon les lignes pointillées et en faisant se rejoindre les faces latérales, on obtient des parallélépipèdes rectangles de hauteurs différentes dont les bases sont des carrés de mesures aussi différentes.
- Comprendre que la hauteur de chaque boîte est égale au côté des petits carrés découpés dans les angles et que sur chaque niveau (couche) on pourra disposer au maximum le même nombre de cubes que sur la base.
- Comprendre que pour pouvoir remplir les boîtes avec le maximum de cubes, il faut les disposer l'un contre l'autre afin de ne pas laisser d'espaces vides entre eux.
- Se rendre compte, en comptant les carreaux, que les bases des boîtes ont des aires respectives de 64, 36 et 16 carrés et que chaque cube a ses faces égales à ces carreaux.
- Puisque la hauteur de la boîte A est égale à l'arête d'un cube, on la remplira avec une seule couche de 64 cubes (8 × 8), alors que la boîte B peut contenir 72 cubes au maximum (36 + 36 ou 36 × 2), boîte C peut contenir trois couches de cubes, donc 48 (16 + 16 + 16 ou 16 × 3).
- Conclure que l'unique boîte qui peut contenir les 70 cubes est la boîte B

Ou : découper les figures et construire les boîtes en utilisant du papier adhésif pour rejoindre les faces latérales ; si des cubes de 1 cm d'arête sont à disposition, remplir les boîtes et compter les cubes.

L'analisi a priori del compito dell'alunno riportata qui sopra è stata redatta al momento dell'elaborazione del problema, prima della prova del rally. Quindi è ancora ipotetica. Sarà convalidata, adattata o modificata in base ai risultati della sperimentazione e alla lettura degli elaborati degli allievi, quindi diventerà l'analisi a posteriori del problema. È quest'ultima che permetterà di redigere le rubriche *Compito per la risoluzione e saperi mobilitati*, *Procedure, ostacoli ed errori rilevati* e *Indicazioni didattiche* della scheda del problema nella Banca di problemi del RMT.

L'analyse *a priori* de la tâche de l'élève ci-dessus a été rédigée lors de l'élaboration du problème avant l'épreuve du rallye. Elle est donc encore hypothétique. Elle sera validée, adaptée ou modifiée selon les résultats de l'expérimentation, à la lecture des copies rendues et deviendra l'analyse *a posteriori* du problème. C'est cette dernière qui permettra de rédiger les rubriques *Tâche de résolution et savoirs mobilisées, Procédures, obstacles et erreurs relevées et Indications didactiques* de la fiche du problème dans la Banque de problèmes du RMT.

Si ricorda che il problema è stato affrontato nelle condizioni particolari del RMT: intera classe, allievi in completa autonomia, da 5 a 7 problemi da risolvere, un solo foglio risposta per problema, senza la presenza dell'insegnante.

On rappelle que le problème a été abordé dans les conditions particulières du RMT : toute la classe, élèves en totale autonomie, de 5 à 7 problèmes à résoudre, une seule feuille réponse par problème, hors de la présence de l'enseignant.

3. Risultati/ Résultats

Punti attribuiti, su 164 classi di 19 sezioni:
Points attribués, sur 164 classes de 19 sections :

Punti/ Points :	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Classi/ Classes**	**Media/ Moyenne**
Cat 4	9 (17%)	3 (6%)	12 (22%)	9 (17%)	21 (39%)	54	2.6
Cat 5	3 (6%)	2 (4%)	10 (19%)	9 (17%)	30 (56%)	54	3.1
Cat 6	3 (5%)	0 (0%)	8 (14%)	8 (14%)	37 (66%)	56	3.4
Tot.	**15 (9%)**	**5 (3%)**	**30 (18%)**	**26 (16%)**	**88 (54%)**	**164**	**3**

Secondo i criteri determinati nell'analisi a priori:

- **4 punti**: Risposta corretta (scatola B) con descrizione chiara e completa (almeno la determinazione del numero massimo di cubetti che ogni scatola può contenere: B 72, A 64, C 48 e i motivi per cui la scatola B è l'unica che può contenere tutti i cubetti perché 72 > 70 mentre 64 e 48 sono minori di 70
- **3 punti**: Risposta corretta con descrizioni parziali o poco chiare della procedura (ad esempio determinazione di 72, 64 e 48, senza spiegare la scelta della scatola B)
- **2 punti**: Risposta corretta (scatola B) senza descrizione della procedura **oppure** calcolo dei cubetti di ogni scatola (72, 64 e 48), senza dire qual è la scatola scelta.
- **1 punto**: Inizio di ricerca coerente, per esempio trovato il numero di cubetti che si possono sistemare sulla base di ciascuna scatola (64, 36, 16) **oppure** risposta corretta in base all'affermazione che la scatola A è troppo bassa e che la scatola C è troppo stretta senza tener conto delle altre dimensioni.
- **0 punti**: Incomprensione del problema

Selon les critères déterminés de l'analyse *a priori* :

- **4** Réponse correcte (boîte B) avec description claire et complète (au moins, la détermination du nombre de cubes maximum que chaque boîte peut contenir : B (72) et A (64) ou C (48) et les raisons du choix de la boîte B 72 > 70, alors que 64 et 48 sont plus petits que 70.
- **3** Réponse correcte (boîte B) avec description partielle de la procédure (par exemple détermination de 72, 64 et 48, sans expliquer le choix de la boîte B)
- **2** Réponse correcte (boîte B) sans description de la procédure
ou calcul du nombre de cubes par boîte (72, 64 et 48) sans le choix de la boîte B
- **1** Début de recherche cohérent ou calcul ; par exemple détermination de la surface de base de chaque boîte : 64, 36 et 16
- ou réponse affirmant que la boîte A est trop basse et que la boîte C'est trop étroite sans tenir compte des autres dimensions
- **0** Incompréhension du problème

La tabella riportata sopra mostra un aumento molto netto della media dei punteggi dalla categoria 4 alla categoria 6. Si nota inoltre che, secondo i criteri elencati, la risposta corretta è ottenuta nell'insieme delle categorie per il 78 % (54 + 16 + 18) degli elaborati e, nella categoria 6, per il 94 % (66 + 14 + 14), cosicché la ricerca della scatola che può contenere i 70 cubi non è più un problema significativo per gli alunni di quest'ultima categoria. I quali, peraltro, rappresentano soltanto 56 classi selezionate tra circa 1500 classi che partecipano alle prove I e II, e sono motivati dalle circostanze straordinarie: la finale "fuori dalle mura" della propria scuola, l'atmosfera di festa, la proclamazione della classifica che seguirà immediatamente la gara.
Occorre inoltre ricordare che i punti sono attribuiti da una ventina di giurie diverse, a partire da criteri che lasciano un ampio margine di interpretazione. Le medie e le occorrenze ottenute non sono quindi che indici globali, da considerare con un margine d'errore di circa mezzo punto.
Le tableau ci-dessus fait apparaître une progression très nette des moyennes de points de la catégorie 4 à la catégorie 6. On remarque aussi que, selon les critères, la réponse correcte est obtenue, dans l'ensemble des catégories. par 78 % (54 + 16 + 18) des copies et, en catégorie 6, par 94 % (66 + 14 + 14), si bien que la recherche de la boîte qui peut contenir les 70 cubes n'est plus un problème pour les élèves de cette dernière catégorie qui, cependant, ne représentent que 56 classes sélectionnées parmi environ 1500 classes participant aux épreuves I et II, motivées par les circonstances extraordinaires d'une finale « hors des murs » de son école, une ambiance de fête, une proclamation du classement qui va suivre immédiatement.

Il faut aussi rappeler que les points sont attribués par une vingtaine de jurys différents, à partir de critères laissant une grande marge d'interprétation. Les moyennes et occurrences obtenues ne sont donc que des indices globaux, à considérer avec une marge de signification d'un demi-point environ.

Per l'analisi a posteriori abbiamo potuto utilizzare 24 elaborati delle finali delle sezioni Rozzano, Puglia, Siena e, per ampliare il nostro campione, abbiamo proposto il problema nelle classi di scuola primaria di alcune scuole della provincia di Siena. In quest'ultimo caso i problemi sono stati affrontati in gruppo secondo modalità leggermente diverse da quelle del RMT (presenza dell'insegnante, lo stesso problema proposto a tutti i gruppi) ma in alcuni casi anche singolarmente a causa della situazione pandemica. In un secondo momento sono stati analizzati anche gli elaborati di tre classi della scuola primaria di Bagnacavallo (RA) in cui il problema è stato somministrato a piccoli gruppi.
Come era prevedibile i risultati globali delle classi finaliste di Rozzano, Puglia e Siena sono del tutto comparabili con quelli riportati nella tabella precedente. Per quanto riguarda gli altri elaborati c'è stato un calo sensibile nelle categorie 6 e più leggero nelle categorie 4 e 5; ma poiché le condizioni di svolgimento sono anomale, non è possibile ricavarne dati statistici significativi.
Pour l'analyse *a posteriori* nous avons pu utiliser 24 copies des finales des sections de Rozzano, Puglia, Siena et, pour étendre notre échantillon, nous avons proposé le problème dans les classes primaires de certaines écoles du territoire de Siena, par groupes selon des modalités légèrement différentes de celles du RMT (présence de l'enseignant, le même problème donné à tous les groupes), mais aussi, dans certains cas, individuellement, en raison de la situation pandémique. Finalement les copies de trois classes de l'école primaire de Bagnacavallo (RA), où le problème a été administré à de petits groups, ont été analysés. Comme prévu, les résultats globaux des classes finalistes de RZ, PU et SI sont tout à fait comparables à ceux du tableau précédent. Pour les autres copies il y a une baisse sensible en catégorie 6 et plus légère en catégories 4 et 5 ; mais, comme les conditions de passation ne sont pas vraiment contrôlées, on ne peut en tirer des données statistiques significatives.

4. Procedure, ostacoli ed errori rilevati / Procédures, obstacles et erreurs relevés

4.1. Le risposte corrette / Les réponses correctes

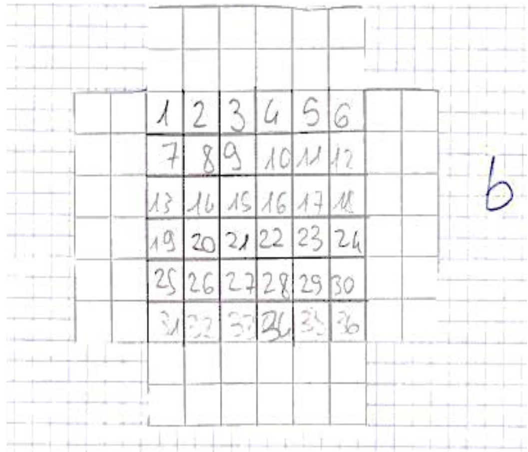
Le strategie adottate dagli allievi corrispondono a quelle presenti nell'analisi a priori, in particolare quasi tutti hanno utilizzato strategie di conteggio o calcolo. Non abbiamo rilevato alcun elaborato in cui venisse utilizzata una strategia non prevista nell'analisi a priori.
Les stratégies adoptées par les élèves correspondent à celles présentées dans l'analyse *a priori*, en particulier, presque tous les groupes ont utilisé des stratégies de comptage ou de calcul. Nous n'avons relevé aucune copie dans lequel serait utilisée une stratégie qui n'était pas prévue dans l'analyse *a priori*.

Nell'esempio riportato sotto (esempio 1), un elaborato della finale di categoria 5, il ragionamento seguito dagli allievi è esplicitato in maniera dettagliata e sistematica e segue in modo puntuale i passi dell'analisi a priori.
Dans l'exemple ci-dessous (exemple 1), une copie de la finale de catégorie 5, le raisonnement suivi par les élèves est explicité en détail, et suit de manière ponctuelle les étapes de l'analyse *a priori*.

Esempio 1 (Cat. 5, Finale) / Exemple 1 (Cat. 5, Finale)
Siamo arrivati alla conclusione che Caterina può scegliere solo la scatola B perché può contenere 72 cubetti. Abbiamo cominciato col calcolare l'area della scatola A: $8 \times 8 = 64$ cm². Dato che la capienza della scatola A non era sufficiente per 70 cubetti, l'abbiamo esclusa. Successivamente abbiamo calcolato l'area della scatola B: $6 \times 6 = 36$ cm². Ma l'altezza era di 2 cm e perciò bisognava raddoppiare 36 e dava come risultato 72. Poteva essere un'ipotetica soluzione. Infine abbiamo calcolato l'area della scatola C: $4 \times 4 = 16$ cm²; anche se l'altezza misurava 3 cm, $16 \times 3 = 48$ cm²: la capienza non era sufficiente e quindi abbiamo escluso la scatola C. In conclusione l'unica scatola scelta da Caterina è la lettera B, perché anche se 72 è maggiore di 70, il testo, non dice che la capienza non può essere maggiore del numero di cubetti che ha Caterina.
Nous sommes arrivés à la conclusion que Catherine ne peut choisir que la boîte B parce qu'elle peut contenir 72 cubes. Nous avons commencé par calculer la surface de la boîte A : $8 \times 8 = 64$ cm². Comme la capacité de la boîte A n'était pas suffisante pour 70 cubes, nous l'avons exclue. Nous avons ensuite calculé la surface de la boîte B : $6 \times 6 = 36$ cm². Mais la hauteur était de 2 cm et il fallait donc doubler 36 et et donnait 72 comme résultat. Cela pouvait être une solution hypothétique. Enfin nous avons calculé la surface de la boîte C : $4 \times 4 = 16$ cm² ; même si la hauteur mesure 3 cm, $16 \times 3 = 48$ cm² : la capacité n'était pas suffisante et donc nous avons exclu la boîte C. Finalement la seule boîte choisie par Catherine est la lettre B, parce que même si 72 est supérieur à 70, le texte ne dit pas que la capacité ne peut pas être plus grande que le nombre de cubes de Catherine.

*La soluzione è la B perché è l'unica che può contenere 70 cubetti. Per trovare la soluzione abbiamo costruito tutte e 3 le figure e abbiamo numerato i quadretti all'interno, siccome la figura B è di 2 cm e i quadretti alla base sono 36 si fa 36 × 2 = 72 quadretti con l'avanzo di 2***.**

La solution est la B parce que c'est la seule qui peut contenir 70 cubes. Pour trouver la solution nous avons construit les 3 figures et nous avons numéroté les carreaux à l'intérieur, puisque la figure B est de 2 cm et les carreaux à la base sont 36 on fait 36 × 2 = 72 petits carrés avec le reste de 2.



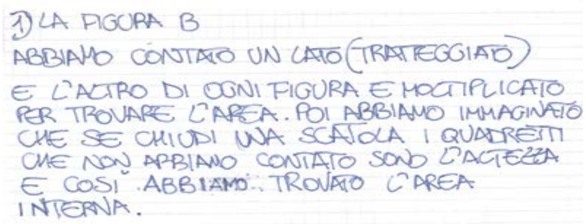
In numero decisamente minore gli elaborati in cui gli allievi hanno provato a "*Ritagliare le figure e costruire le scatole unendo con il nastro adesivo le facce laterali*", anche in modo parziale (esempio 2).
Il y a beaucoup moins de copies dans lesquelles les élèves ont essayé de *Découper les figures et construire les boîtes en réunissant avec le ruban adhésif les faces latérales,* même de façon partielle (exemple 2).

Esempio 2 (Cat. 6, Finale) / Exemple 2 (Cat. 6, Finale)
Gli allievi dichiarano di avere costruito tutte e tre le *figure*, contando poi i quadretti all'interno. Il ritaglio della scatola è stato incollato nel foglio protocollo come sviluppo. Non parlano di *scatole,* hanno semplicemente disegnato i tre cartoncini dell'enunciato a grandezza reale (su carta quadrettata in cm) senza i quadrati degli angoli. Sanno che il quadrato interno è il luogo in cui sarà necessario posare i 36 cubi (preferiscono ancora scrivere i numeri uno a uno sulle caselle, piuttosto che calcolare il prodotto 6 x 6 = 36). Quando scrivono "*siccome la figura B è di 2 cm*" significa 2 cm di profondità o altezza. Tuttavia verosimilmente hanno "visto" l'oggetto nello spazio, senza la necessità di piegare effettivamente i lati di 2 cm di altezza e di attaccarli con il nastro adesivo.
Les élèves déclarent avoir construit les trois figures, en comptant les carreaux à l'intérieur. La découpe de la boîte a été collée dans la feuille de protocole en tant que développement. Ils ne parlent pas de « boîtes », ils ont dessiné les trois *feuilles cartonnées* de l'énoncé en vraie grandeur (sur du papier quadrillé en cm) sans les carrés des angles. Ils savent que le carré intérieur est l'endroit où il faudra poser les 36 cubes (ils préfèrent encore écrire les nombres un à un sur les cases plutôt que de calculer le produit 6 × 6 = 36). L'expression *siccome la figura B è di 2 cm* signifie *2* cm de profondeur ou de hauteur. Ils ont cependant vraisemblablement « vu » l'objet dans l'espace, sans avoir besoin de replier effectivement les côtés de 2 cm de hauteur et de les coller avec un ruban adhésif, ce qui est inutile.

Nell'esempio 3, gli allievi scrivono di avere solo immaginato di chiudere la scatola, ma specificano che il lato utilizzato per trovare l'area di base del parallelepipedo è quello tratteggiato nella figura del testo, lasciando intendere di avere molto chiaro il passaggio da sviluppo a costruzione in 3 dimensioni.
Dans l'exemple 3, les élèves écrivent qu'ils ont seulement imaginé de fermer la boîte, mais ils précisent que le côté utilisé pour trouver l'aire de base du parallélépipède est celui en pointillés dans la figure du texte, laissant entendre que le passage du développement à la construction en 3 dimensions est très clair.

Esempio 3 (Cat. 5, Finale) / Exemple 3 (Cat. 5, Finale)

La figura B
Abbiamo contato un lato (tratteggiato) e l'altro di ogni figura e moltiplicato per trovare l'area. Poi abbiamo immaginato che se chiudi una scatola i quadretti che non abbiamo contato sono l'altezza e così abbiamo trovato l'area interna.
La figure BNous avons compté un côté (en pointillés) et l'autre de chaque figure et multiplié pour trouver l'aire. On s'est alors dit que si on fermait une boîte, les carreaux qu'on n'avait pas comptés seraient la hauteur et on aurait trouvé l'aire intérieure.



Tutti gli altri elaborati in cui la scatola B è indicata come risposta, seguono la seguente procedura: determinazione dell'area di base che viene moltiplicata per il numero di strati e confronto dei tre numeri ottenuti con 72, per tenere conto soltanto di 70. Non si può fare altrimenti, che si sia adulti o allievi. Si potrebbe immaginare una procedura esclusivamente per manipolazioni se si disponesse effettivamente di 70 cubi di 1 cm di bordo e di sviluppi a grandezza reale delle tre scatole.
Queste risposte corrette (circa due terzi del totale) sono tuttavia molto diverse quando si leggono accuratamente le spiegazioni fornite dagli alunni, che vengono prese in considerazione per l'assegnazione dei punti. Alcune si limitano all'indicazione della scatola B e del numero di cubi, 72, che può contenere, con o senza il dettaglio dei calcoli; altre mostrano i tre volumi; altre ancora sono molto complete, come nell'esempio 1.
Toutes les autres copies qui donnent la boîte B comme réponse suivent la procédure : détermination de l'aire du fond, suivie d'une multiplication par le nombre de couches et comparaison des trois nombres de cubes avec 72 pour ne retenir que 70. On ne peut pas faire autrement, qu'on soit adulte ou élève. On pourrait imaginer une procédure exclusivement par manipulations si l'on disposait effectivement de 70 cubes de 1 cm d'arête et de développements en vraie grandeur des trois boîtes.
Ces réponses correctes (environ deux tiers du total) sont cependant très variées lorsqu'on s'intéresse aux explications données par les élèves, qui sont prises en compte pour l'attribution des points. Certaines se limitent à l'indication de la boîte B et du nombre de cubes, 72, qu'elle peut contenir, avec ou sans le détail des calculs, d'autres font apparaître les trois volumes, d'autres sont très complètes, comme l'exemple 1.

Gli elaborati in cui non viene data come risposta la scatola B (circa un terzo) sono rivelatori delle difficoltà ad appropriarsi del problema: la lettura, la terminologia, il linguaggio e quello che è l'oggetto principale di questo studio, cioè la visualizzazione spaziale.
Les copies qui n'aboutissent pas à la boîte B (environ un tiers) sont révélatrices des difficultés à s'approprier le problème : la lecture, la terminologie, le langage et celle qui est l'objet principal de cette étude, c'est-à-dire la visualisation spatiale.

4.2. L'appropriazione del problema / L'appropriation du problème

Ostacoli legati al linguaggio / Obstacles liés au langage o
Per quanto riguarda ostacoli ed errori emergono situazioni diverse: in alcuni casi l'incomprensione del problema è legata alla terminologia. Riportiamo sotto le osservazioni di un'insegnante di scuola primaria della provincia di Siena, che ha partecipato alla sperimentazione.
En ce qui concerne les obstacles et les erreurs, différentes situations apparaissent : dans certains cas, l'incompréhension du problème est liée à la terminologie. Ci-dessous les observations d'une enseignante de l'école primaire du territoire de Siena, qui a participé à l'expérimentation.

Classi IV – Quercegrossa (SI): "... il concetto di area è stato affrontato ... a maggio di quest'anno durante la didattica a distanza. ... per quanto riguarda la geometria, sin dalla classe prima il percorso è iniziato lavorando con i solidi, costruendoli, individuandone le parti che li compongono e sviluppandoli poi sul piano per affrontare lo studio delle figure piane.
... in generale, i bambini si sono concentrati più sulla osservazione dei disegni piuttosto che sulla lettura del testo del problema che per alcuni è risultato invece, perlomeno al primo impatto, meno comprensibile e facilitante."
Classes IV - Quercegrossa (SI) : « ... le concept d'aire a été abordé ... en mai de cette année lors de l'enseignement à distance. ... en ce qui concerne la géométrie, dès la première année primaire, le parcours a commencé en travaillant avec les solides, en les construisant, en identifiant les parties qui les composent et en les développant ensuite sur le plan pour affronter l'étude des figures planes.
... en général, les enfants se sont plus concentrés sur l'observation des dessins que sur la lecture du texte du problème qui, pour certains, s'est avéré moins compréhensible et facilitateur. »

Un'altra insegnante durante l'osservazione si è resa conto che la parola "sporgere" in una classe 5° primaria con maggioranza di alunni stranieri risulta sconosciuta.
Une autre enseignante, pendant l'observation, s'est rendue compte que le mot « sporgere » (dépasser » est inconnu dans une classe 5° primaire avec une majorité d'élèves étrangers.
Classe V - Castellina in Chianti (SI): "difficoltà nel lessico della prova: il significato di "sporgere""
Classe V - Castellina in Chianti (SI) : difficulté dans les termes du texte : le sens de « dépasser ».

Si noti a questo proposito che i commenti riportati provengono da insegnanti che hanno osservato gli studenti durante la risoluzione. Portano un'illuminazione diversa da quella degli elaborati compilati nelle condizioni di gara del RMT: in assenza dell'insegnante.

On relèvera à ce propos que ces commentaires viennent d'enseignants qui ont observé les élèves pendant la résolution. Ils apportent un éclairage différent de celui des copies passées dans les conditions de celles du RMT : en absence de l'enseignant.

Uso dei termini matematici / Utilisation des termes mathématiques

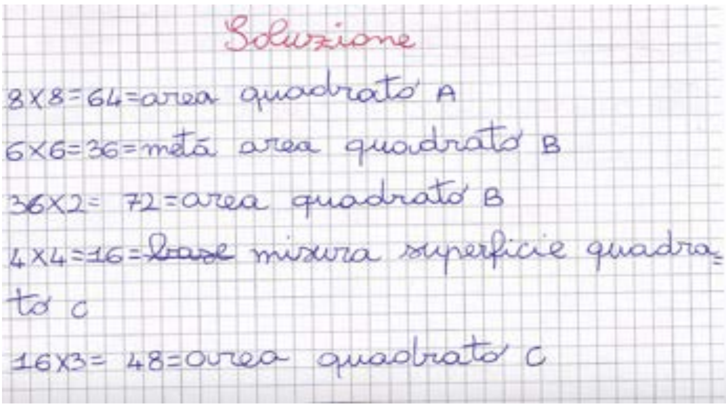
Si evince comunque, sempre dalle relazioni degli osservatori, che in alcuni casi i ragazzi non hanno letto accuratamente il testo, ma si sono basati solo sull'osservazione dei disegni che talvolta, forse per scarsa esperienza pratica, non sono stati compresi appieno.

Il linguaggio usato dagli allievi delle tre categorie è spesso inesatto, si capisce che si riferiscono al concetto/oggetto corretto ma con nomenclatura errata: per esempio usando angolo al posto di spigolo, quadrato al posto di cubo e area al posto di volume. Come nell'esempio 4, in cui il termine "area del quadrato" è usato talvolta in modo corretto e talvolta come sinonimo di "volume". Interessante notare che, rispetto alla scatola B, gli allievi si riferiscono all'area di base indicandola come "metà area del quadrato" per spiegare che all'interno di quella scatola ci possono stare due piani di cubetti. Pur non utilizzando i termini specifici in modo adeguato il procedimento utilizzato porta a una soluzione corretta, il che fa pensare che la rappresentazione mentale corrisponda alla situazione proposta dal problema.

D'après les rapports des observateurs, il est évident que, dans certains cas, les enfants n'ont pas lu correctement le texte, mais se sont fondés uniquement sur l'observation des dessins qui, parfois, peut-être par manque d'expérience pratique, n'ont pas été pleinement compris. Le langage utilisé par les élèves des trois catégories est souvent inexact, on comprend qu'ils se réfèrent au concept/objet correct mais avec une nomenclature erronée : par exemple en utilisant angle au lieu de arête, carré au lieu de cube et aire au lieu de volume.

Il est intéressant de noter que, par rapport à la boîte B, les élèves se réfèrent à l'aire de base en l'indiquant comme « moitié de l'aire du carré » pour expliquer qu'à l'intérieur de cette boîte il peut y avoir deux couches de cubes. Bien que le procédé utilisé n'utilise pas les termes spécifiques de manière adéquate, il permet de trouver une solution correcte, ce qui donne à penser que la représentation mentale correspond à la situation proposée par le problème.

<u>Esempio 4</u> (Cat.5, sperimentazione di Siena)/ <u>Exemple 4</u> (Cat.5, expérimentation de Siena)

Soluzione *8 × 8 = 64 = area quadrato A* *6 × 6 = 36 = metà area quadrato B* *36 × 2 = 72 = area quadrato B* *4 × 4 = 16 = ~~base~~ misura superficie quadrato C* *16 × 3 = 48 = area quadrato C* *Solution* *8 × 8 = 64 = aire du carrée A* *6 × 6 = 36 = moitié aire du carrée B* *36 × 2 = 72 = aire du carrée B* *4 × 4 = 16 = base mesure surface du carrée C* *16 × 3 = 48 = aire du carrée C*	

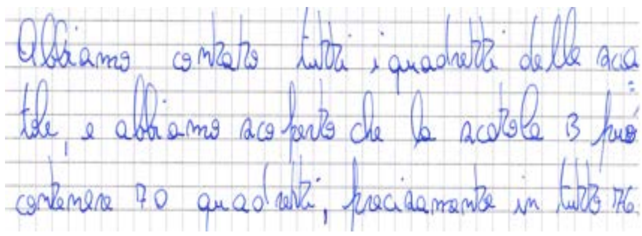
Nell'esempio 5 il termine quadretti è usato al posto di cubetti forse in riferimento al disegno dello sviluppo sul piano. Se la risposta data fosse stata 72, non ci sarebbero dubbi sul significato di "quadretto" che potrebbe essere considerato come il posto relegato a un cubo in fondo alla scatola e poi sul primo strato di cubi. Si tratterebbe allora soltanto di un'espressione spontanea, da rivedere al momento della discussione in classe successiva alla risoluzione. La risposta 76 lascia il dubbio perché non si può ricostruire il percorso che l'ha generata: un errore nell'operazione 36 x 2, o un errore nel conteggio effettivo di tutti i piccoli quadrati del cartoncino B (se ne dovrebbero trovare 84).

(Questo dubbio ha evidentemente un'incidenza sull'attribuzione dei punti a questo elaborato e ci riporta a quanto detto al capitolo 3: le medie forniscono un'indicazione molto generale con un margine di errore stimato a 1/2 punto, e non sono utili nel lavoro di classe sul problema).

Dans l'exemple 5, le terme carré est utilisé à la place de cubes peut-être en référence à la conception du développement sur le plan. Si la réponse donnée avait été 72, on n'aurait pas de doutes sur la signification de *quadretto* qui pourrait être considérée comme la place réservée à un cube au fond de la boîte puis sur la première

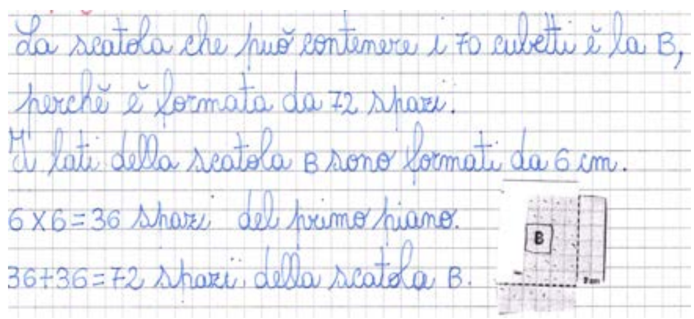
couche de cubes. Il ne s'agirait alors que d'une expression spontanée à rectifier lors de la mise en commun qui suit la résolution. La réponse 76 laisse le doute car on ne peut pas savoir d'où elle tombe : une erreur dans l'opération 36 × 2, ou une erreur dans le comptage effectif de tous les petits carrés de la *feuille cartonnée* B (on devrait en trouver 84).
(Ce doute a évidemment une incidence sur l'attribution des points à cette copie et rappelle ce qui a été dit au chapitre 3 : les moyennes ne sont que des indices très généraux avec une marge d'erreur estime à 1/2 point ; qui n'ont plus d'intérêt pour l'avenir du problème en classe).

Esempio 5 (Cat.4, sperimentazione di Siena) / Exemple 5 (Cat.4, expérimentation de Siena)

Abbiamo contato tutti i quadretti delle scatole, e abbiamo scoperto che la scatola B può contenere 70 quadretti, precisamente in tutto 76. *Nous avons compté tous les carrés des boîtes, et nous avons découvert que la boîte B peut contenir 70 carrés, en tout 76.*	

Particolarmente interessante l'elaborato dell'esempio 6 in cui gli allievi utilizzano la parola "spazi" per indicare le diverse ripartizioni all'interno della scatola in cui alloggeranno i cubetti. A riprova di questo, infatti, parlano di spazi del primo piano e poi di spazi dell'intera scatola, come se immaginassero una griglia tridimensionale da riempire con i cubetti.
Nous sommes particulièrement intéressés par l'exemple 6, dans lequel les élèves utilisent le mot « espaces » pour indiquer les différentes subdivisions à l'intérieur de la boîte dans laquelle ils logeront les cubes. Pour prouver cela, en effet, ils parlent d'espaces du premier étage et ensuite d'espaces de la boîte entière, comme s'ils imaginaient une grille tridimensionnelle à remplir avec les cubes.

Esempio 6 (Cat.4, sperimentazione di Siena) / Exemple 6 (Cat.4, expérimentation de Siena)

La scatola che può contenere i 70 cubetti è la B, perché è formata da 72 spazi. *I lati della scatola B sono formati da 6 cm.* *6 × 6 = 36 spazi del primo piano.* *36 + 36 = 72 spazi della scatola B.* *La boîte qui peut contenir les 70 cubes est la B, car elle est formée de 72 espaces.* *Les côtés de la boîte B sont formés de 6 cm.* *6 × 6 = 36 espaces du premier plan.* *36 + 36 = 72 espaces de la boîte B.*	

Se si dovesse trarre una conclusione da questi tre esempi precedenti sull'uso dei termini matematici, si potrebbe sottolineare l'esistenza di due linguaggi: quello degli insegnanti di matematica e quello degli allievi. Gli osservatori, quando dicono che "*in alcuni casi i ragazzi non hanno letto accuratamente il testo, ma si sono basati solo sull'osservazione dei disegni che talvolta, forse per scarsa esperienza pratica, non sono stati compresi appieno",* sembrano giudicare negativamente che gli allievi si esprimano con il loro linguaggio, ancora molto approssimativo. Questo si avvicinerà progressivamente al "linguaggio comune" dell'ambiente in cui vivono, che è esso stesso ancora molto lontano dalla precisione ricercata dai matematici (che desidererebbero ad esempio che tutti distinguessero "numero" e "cifra, o "misura" e "lunghezza"...; o come i fisici il cui sogno è che non si confondano "massa" e "peso"!).
S'il fallait tirer une conclusion des trois exemples précédents sur l'utilisation de termes mathématiques, on pourrait insister sur l'existence de deux langues : celle des enseignants de mathématiques et celle des élèves. Les observateurs, lorsqu'ils disent que *« Dans certains cas, les enfants n'ont pas lu le texte correctement, mais se sont basés uniquement sur l'observation des dessins qui, parfois, peut-être par manque d'expérience pratique, n'ont pas été pleinement compris »* semblent regretter que les élèves s'expriment dans leur langue propre, encore très

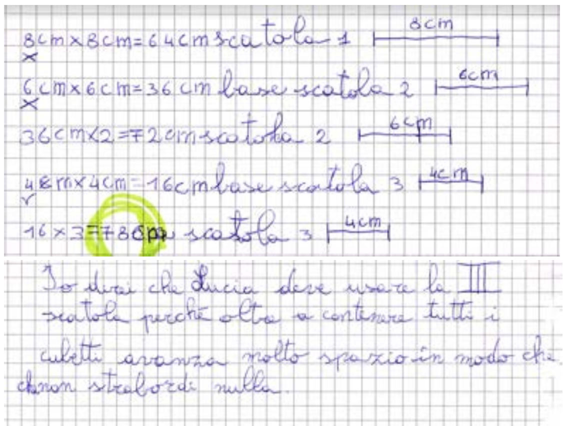
approximative, qui va progressivement s'approcher de la « langue courante » de la société où ils vivent qui est elle-même encore très loin de la précision espérée par les mathématiciens (qui souhaiteraient par exemple que tout le monde distingue « nombre » et « chiffre », ou « mesure » et « longueur » … ; comme les physiciens qui souhaiteraient qu'on ne confonde pas « masse » et « poids »!).

Errori di calcolo e di conteggio / Erreurs de calcul et de comptage

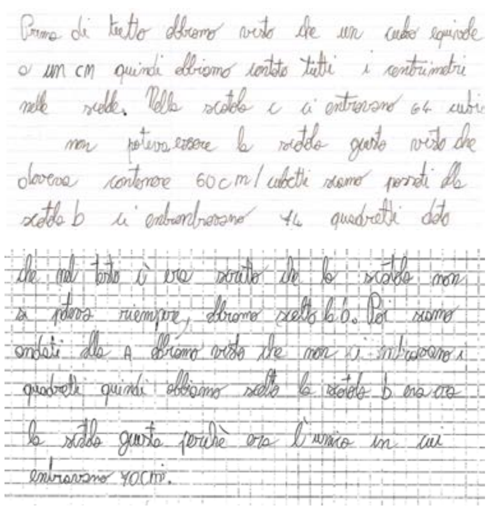
Diversi elaborati riportano errori di calcolo, come negli esempi 7 e 8. Tuttavia gli errori di calcolo non sempre sono frutto di un ragionamento scorretto, anzi per loro natura più spesso sono determinati da distrazione, e in alcuni casi non incidono nemmeno sulla risposta finale.

Plusieurs copies rapportent des erreurs de calcul, comme dans les exemples 7 et 8. Cependant, les erreurs de calcul ne sont pas toujours le résultat d'un raisonnement incorrect, mais par leur nature elles sont plus souvent causées par la distraction, et dans certains cas elles n'affectent même pas la réponse finale.

Esempio 7 (Cat. 5 Sperimentazione di Siena) / Exemple 7 (Cat.5, expérimentation de Siena)

8 cm × 8 cm = 64 cm scatola 1 *6 cm × 6 cm = 36 cm base scatola 2* *36 cm × 2 cm = 72 cm scatola 2* *4 cm × 4 cm = 16 cm base scatola 3* *16 × 3 = 78 cm scatola 3* *Io direi che Lucia deve usare la III scatola, perché oltre a contenere tutti i cubetti avanza molto spazio in modo che non strabordi nulla.* *8 cm × 8 cm = 64 cm boîte 16 cm × 6 cm = 36 cm base boîte 236 cm × 2 cm = 72 cm boîte 24 cm × 4 cm = 16 cm base boîte 316 × 3 = 78 cm boîte 3 e dirais que Lucia doit utiliser la troisième boîte, parce qu'en plus de contenir tous les cubes, il y a beaucoup d'espace pour que rien ne déborde.*	

Esempio 8 (Cat. 4 Sperimentazione di Siena) / Exemple 8 (Cat.4, expérimentation de Siena)

Prima di tutto abbiamo visto che un cubo equivale a un cm quindi abbiamo contato tutti i centimetri nelle scatole. Nella scatola C ci entrano 64 cubi non poteva essere la scatola giusta visto che doveva contenere 60 cm/cubetti siamo passati alla scatola B ci entravano 74 quadretti dato che nel testo c'era scritto che la scatola non si poteva riempire, abbiamo scelto la B. Poi siamo andati alla A abbiamo visto che non ci entravano i quadretti quindi abbiamo scelto la scatola B era la scatola giusta perché era l'unica in cui entravano 70 cm. *Tout d'abord, nous avons vu qu'un cube équivaut à un centimètre, donc nous avons compté tous les centimètres dans les boîtes. Dans la boîte C il y a 64 cubes, elle ne pouvait pas être la bonne boîte puisqu'elle devait contenir 60 cm/cubes nous sommes passés à la boîte B il y avait 74 carrés vu que dans le texte il y avait écrit que la boîte ne pouvait pas être remplie, On a choisi B. Puis on est allé à A et on a vu que les carreaux n'entraient pas dedans, donc on a choisi la boîte B parce que c'était la seule boîte où il y avait 70 cm.*	

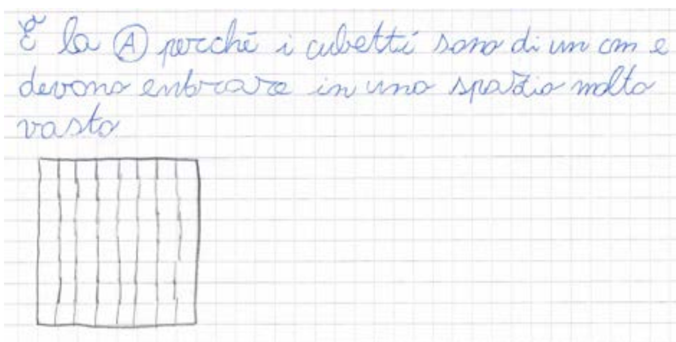
Come per l'uso di termini matematici, ritroviamo in questi ultimi due esempi tutte le problematiche dell'insegnante in fase di messa in comune o di istituzionalizzazione dopo la risoluzione del problema da parte degli alunni. Ovviamente gli alunni dovranno correggere la scrittura dell'esempio 7: *16 x 3 = 78 cm scatola 3* che può essere considerata un "errore", una "mancanza di padronanza" o una "distrazione" al momento della scrittura dell'operazione, a discrezione dell'insegnante. Dallo stesso esempio, una scrittura come 8 cm x 8 cm = 64 cm nel "linguaggio dell'allievo" deve essere corretta dall'insegnante e ampiamente commentata, poiché questo errore frequente può avere conseguenze negative sulla costruzione del concetto di "prodotto di due misure". L'insegnante dovrà far notare, con particolare enfasi, che se i due "8" sono misure di lunghezza, in cm, il "64" è anche una misura, ma di una grandezza diversa dalle prime due, cioè di area, che si esprime in cm^2. Così proporrà di scrivere 8 cm x 8 cm = 64 cm^2 o 8 x 8 = 64 (in cm^2) a seconda che accetti la prima o che richieda la seconda, più rigorosa per il matematico che considera che l'operazione di moltiplicazione "8 x 8" e l'uguaglianza "8 x 8 = 64" si scrivano esclusivamente tra numeri (misure) "liberati" dalla grandezza che rappresentano.
Comme pour l'utilisation de termes mathématiques on retrouve dans ces deux derniers exemples toute la problématique de l'enseignant en phase de mise en commun ou d'institutionnalisation après la résolution du problème par les élèves. Il faudra évidemment que les élèves rectifient l'écriture de l'exemple 7 : *16 × 3 = 78 cm scatola 3* qui peut être considérée comme une « erreur », une « faute » ou une « distraction » lors du report de l'opération, selon le degré d'exigences de l'enseignant. Une écriture comme *8 cm × 8 cm = 64 cm* du même exemple, en langue « élève » doit être rectifiée par l'enseignant et largement commentée car elle contient une confusion fréquente aux conséquences négatives sur la construction du « produit de deux mesures ». L'enseignant devra faire remarquer ici, avec insistance, que si les deux « 8 » sont des mesures de longueur, en cm, le « 64 » est aussi une mesure, mais d'une grandeur différente des deux premières : d'aire, en cm^2. Il proposera *8 cm × 8 cm = 64* cm^2 ou *8 × 8 = 64 (en* cm^2*)* selon qu'il accepte la première ou qu'il exige la seconde, plus rigoureuse pour le mathématicien qui considère que l'opération de multiplication « 8 × 8 » et l'égalité « 8 × 8 = 64 » s'écrivent exclusivement entre nombres (mesures) « libérés » de la grandeur qu'ils représentent.

Difficoltà di visualizzazione / Difficulté de visualisation
Nella maggior parte dei casi, però, gli errori sono legati alla difficoltà di visualizzare le scatole nello spazio e passare dal modello piano a quello tridimensionale (esempi 9, 10, 11).
Dans la plupart des cas, cependant, les erreurs sont liées à la difficulté de visualiser les boîtes dans l'espace et de passer du modèle plan au modèle tridimensionnel (exemples 9, 10, 11).

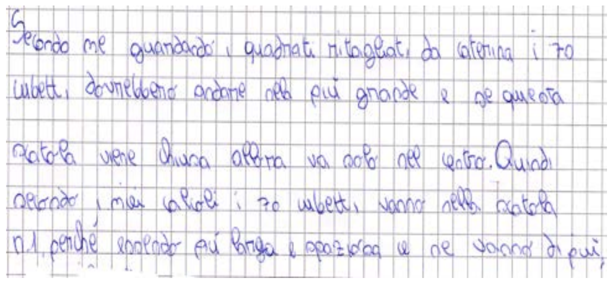
Esempio 9 (Cat. 5 Sperimentazione di Siena) / Exemple 9 (Cat.5, expérimentation de Siena)
La scatola giusta è la A perché possono entrare 70 cubetti perché guardando il cubo in alto sembra grande ma è piccolo.
La bonne boîte est A parce qu'ils peuvent entrer 70 cubes parce que regardant le cube en haut semble grand mais il est petit.

A questo proposito bisogna ammettere che il cubetto rappresentato in alto, a destra dell'enunciato, può essere un ostacolo per l'appropriazione del problema. Considerato verosimilmente come un aiuto, si rivela inadeguato, soprattutto per la scala diversa e il disegno in prospettiva.
A ce propos, il faut admettre que le petit cube en haut à droite de l'énoncé est un obstacle pour l'appropriation du problème. Vraisemblablement considéré comme une aide, il se révèle inapproprié, surtout par son échelle différente et son image en perspective.

Esempio 10 (Cat. 4 Sperimentazione di Siena) / Exemple 10 (Cat.4, expérimentation de Siena)

È la A perché i cubetti sono di 1 cm e devono entrare in uno spazio molto vasto. *C'est le A parce que les cubes sont de 1 cm et doivent entrer dans un espace très large.*	

Esempio 11 (Cat. 5 Sperimentazione di Siena) / Exemple 11 (Cat.5, expérimentation de Siena)

Secondo me guardando i quadrati ritagliati da Caterina i 70 cubetti dovrebbero andare nel più grande e se questa scatola viene chiusa allora va solo nel centro. Quindi secondo i miei calcoli i 70 cubetti vanno nella scatola n.1, perché essendo più larga e spaziosa ce ne vanno di più. *Selon moi, en regardant les carrés découpés par Catherine, les 70 cubes devraient aller dans le plus grand et si cette boîte est fermée alors elle va seulement dans le centre. Donc d'après mes calculs, les 70 cubes vont dans la boîte n°1, étant plus large et plus spacieuse, il y en a plus.*	

Un caso interessante è riportato nell'esempio12: l'allievo sostiene che la scatola più capiente sia la C, perché è più alta delle altre. Questo errore ci rimanda al celebre problema posto da Galileo Galilei nel "Dialogo sui massimi sistemi" se con una stessa pezza di stoffa, arrotolata una volta lungo una dimensione e una volta sull'altra, si ottengano sacchi di volume uguale o differente. È un'illusione facilmente comprensibile quella che ci fa scegliere il solido più alto come quello di volume maggiore.
Un cas intéressant est rapporté dans l'exemple 12 : l'élève prétend que la boîte la plus grande est C, parce qu'elle est plus haute que les autres. Cette erreur nous renvoie au célèbre problème posé par Galileo Galilei dans le « Dialogo sui massimi sistemi » si avec une même pièce de tissu, roulée une fois le long d'une dimension et une fois sur l'autre, on obtient des sacs de volume égal ou différent. C'est une illusion facilement compréhensible qui fait choisir le solide plus élevé que celui avec le plus grand volume.

Esempio 12 (Cat. 5, Sperimentazione di Siena) / Exemple 12 (Cat.5, expérimentation de Siena)
La scatola giusta per me è la C perché è la più alta e c'è più probabilità che entrino tutti e 70 i cubi.
La bonne boîte pour moi est le C parce que c'est la plus haute et il y a plus de chances que les 70 cubes entrent.

A proposito di queste difficoltà di appropriazione, occorre ricordare che i problemi del RMT propongono agli alunni situazioni nuove, in cui devono cercare procedure o strategie, fare appello a conoscenze spesso da ricostruire o riscoprire, lavorare in modo cooperativo (in particolare per la lettura o la terminologia), farsi carico di tutte le iniziative necessarie (ad esempio scegliendo, qui, di costruire effettivamente le scatole). L'appropriazione rientra fra questi compiti affidati agli alunni nella risoluzione di un problema (ma spesso presi in carico dall'insegnante con "buone intenzioni").
Le difficoltà emerse dagli esempi precedenti sono quindi "naturali", se non sono causate da errori o imprecisioni dell'enunciato.
(Nel caso di Scatole di Caterina, si potrebbe certamente migliorare il disegno dei cartoncini e presentarli separatamente, come suggerisce il testo, e non su un'unica griglia in cui l'allievo può distinguere gli sviluppi delle scatole ma ha difficoltà a "vedere" i due tipi di "quadrati" menzionati: i "cartoncini" e i "quadrati tagliati negli angoli").
A propos de ces difficultés d'appropriation, il faut rappeler que les problèmes du RMT proposent aux élèves des situations nouvelles, où ils doivent chercher des procédures ou stratégies, faire appel à des connaissances souvent à reconstruire ou redécouvrir, à travailler en coopération (en particulier pour la lecture ou la terminologie), à prendre toutes les initiatives nécessaires (par exemple en choisissant, ici, de construire effectivement les boîtes). L'appropriation fait partie de ces tâches dévolues aux élèves lors de la résolution d'un problème (mais souvent prises en charge par l'enseignant avec de « bonnes intentions »).
Les difficultés évoquées par les exemples précédents sont donc « naturelles », si elles ne sont pas causées par des erreurs ou imprécisions de l'énoncé.
(Dans le cas des *Boîtes de Catherine*, on pourrait certes améliorer le dessin des *feuilles cartonnées* et les présenter séparément comme le suggère le texte et non sur la figure d'un seul quadrillage sur lequel l'élève peut distinguer les développements des boîtes mais a de la peine à « voir » les deux types de « carrés » mentionnés : les « feuilles cartonnées » et les « carrés découpés dans les angles »).

5. Indicazioni didattiche / Indications didactiques

Il problema può essere usato in percorsi di geometria solida, con i seguenti obiettivi:
Le problème peut être utilisé dans des parcours de géométrie solide, avec les objectifs suivants :

Cercare di migliorare la visualizzazione spaziale

"Vedere cosa diventa nello spazio una figura disegnata nel piano" è un sapere o una competenza che non si insegna nel senso stretto della trasmissione dall'insegnante all'allievo, né con esercizi, né con consigli, né con ingiunzioni. Spetta all'allievo costruire questa abilità. Lo fa fin dall'infanzia manipolando gli oggetti a sua disposizione. Si pensa che "giochi", in realtà la sua attività va ben oltre l'aspetto giocoso: muove questi oggetti, li giustappone, li impila, li tasta, ... Questa "sperimentazione" gli permette di scoprire relazioni e proprietà. Per migliorare la visualizzazione spaziale è importante stimolare la manipolazione in classe, per tutto il tempo necessario. Nel caso di Scatole di Caterina, gli alunni che non hanno trovato la soluzione devono iniziare tagliando, piegando, incollando, costruendo di fatto le scatole, per poi riempirle di cubi (se disponibili) o almeno stabilendo le loro posizioni.

Essayer d'améliorer la visualisation spatiale

« Voir ce que devient dans l'espace une figure dessinée dans le plan » est un savoir ou une compétence qui ne s'enseigne pas au sens strict de la transmission de l'enseignant à l'élève, ni par des exercices, ni par des conseils, ni par des injonctions. C'est à l'élève de construire ce savoir. Il le fait depuis la petite enfance en manipulant les objets à sa disposition. On pense qu'il « joue », mais son activité va bien au-delà de l'activité ludique : il déplace ses objets, les juxtapose, les empile, les palpe, … Cette « expérimentation » lui permet de découvrir des relations, des propriétés, … Pour améliorer ce savoir, il suffit de stimuler cette manipulation en classe, aussi longtemps que nécessaire. Dans le cas des *Boîtes de Catherine,* il faut que les élèves qui n'ont pas trouvé la solution commencent par découper, plier, coller, construire effectivement les boîtes, puis les remplir avec des cubes (s'ils sont à disposition) ou au moins désigner leurs emplacements.

Introdurre o potenziare il concetto di misura

Questo concetto al pari della "visualizzazione spaziale" non si insegna in modo teorico, deve essere sperimentato. Nell'uso didattico di questo problema, la misura delle dimensioni dei cartoncini permetterà di mettere in relazione i numeri 10, 8, 6, 4 con le lunghezze e il conteggio dei quadrati della griglia, ciascuno dei quali ha un'area di 1 cm^2, aiuterà a collegare i numeri 64, 36 e 16 con le aree. Così il conteggio dei cubi sistemati in ogni scatola, che sono anche unità di volume, cm^3, aiuterà a mettere in relazione i numeri 64, 72 e 48 con i volumi.

Introduire ou renforcer le concept de mesure

Ce concept ne s'enseigne pas plus que la « visualisation spatiale », il s'expérimente. Dans l'exploitation didactique de ce problème, c'est le mesurage des dimensions des *feuilles cartonnées*, qui permettra de les relier aux nombres 10, 8, 6, 4, pour les longueurs, le comptage des carrés du quadrillage, dont chacun a une aire de 1 cm^2, aux nombres 64, 36 et 16 pour les aires, le comptage des cubes rangés dans chaque boîte, qui sont aussi des unités de volume, cm^3 aux nombres 64, 72 et 48 pour les volumes.

Introdurre il calcolo del volume

Anche in questo caso, gli alunni che avranno riempito le scatole con cubi di 1 cm di bordo (o cm^3), trarranno vantaggio da un'esperienza pratica al momento dell'introduzione del volume del parallelepipedo rettangolo secondo i programmi scolastici. Siamo ancora lontani dalla formula del volume V = abc in cui le tre misure a, b e c sono intercambiabili, ma è possibile far emergere il prodotto che restituisce l'area di base (il fondo della scatola) che è poi moltiplicato per un terzo fattore, l'altezza (o il numero di strati).

Approcher le calcul de volume

Là encore, les élèves qui auront rempli les boîtes avec des cubes de 1 cm d'arête (ou des cm^3), bénéficieront d'une expérience pratique au moment de l'introduction du volume du parallélépipède rectangle selon les programmes scolaires. Dans ce concept de volume, on est encore loin de la formule $V = abc$ dans laquelle les trois mesures a, b et c sont interchangeables, mais il est possible de faire émerger le produit qui donne l'aire de base (le fond) qui est multiplié ensuite par un troisième facteur, la hauteur (ou le nombre de couches).

6. Per andare più lontano / Pour aller plus loin

Le conoscenze affrontate durante la risoluzione del problema delle Scatole di Caterina, discusse dagli alunni durante la messa in comune e poi commentate dal docente durante la fase di istituzionalizzazione, non sono però acquisite da tutti. C'è bisogno di una fase di assimilazione o consolidamento.
Nell'enunciato sono proposte tre scatole A, B, C, ce n'è una quarta che può essere riempita interamente da cubi di 1 cm di lato. Ce ne sono altre? E, sempre a partire da cartoncini di 10 cm di lato, ci sono delle scatole che non si possono riempire interamente con questo tipo di cubi? E se prendessimo dei cartoncini quadrati da 20 cm di lato? E se i cartoncini fossero rettangolari? Non è forse un'occasione per approfittare di una situazione di cui gli studenti

si sono ben appropriati per effettuare moltiplicazioni con senso, per ricercare soluzioni ottimali, per affrontare numeri non interi...?
Les connaissances abordées lors de la résolution du problème des *Boîtes de Catherine* discutées par les élèves lors d'une mise en commun puis commentée par l'enseignant lors de la phase d'institutionnalisation ne sont pourtant pas acquises par tous. Elles ont besoin d'une phase d'assimilation ou de consolidation. Trois boîtes A, B, C sont proposées par l'énoncé, il y en a une quatrième qui peut aussi être remplie entièrement par des cubes de 1 cm de côté. Y en a-t-il d'autres ? Et, toujours à partir de *feuilles cartonnées* de 10 cm de côté, y a-t-il des boîtes qu'on ne peut pas remplir entièrement avec ce type de cubes ?
Et si l'on prend des *feuilles cartonnées* carrées de 20 cm de côté ? Et si les *feuilles cartonnées* sont rectangulaires ? N'est-ce pas une occasion de profiter d'une situation que les élèves se sont déjà bien appropriée pour effectuer des multiplications avec du sens, pour rechercher des solutions optimales, pour aborder des nombres non entiers… ?

Più avanti, con gli alunni delle categorie da 7 a 10, e oltre, è possibile passare ai numeri decimali e allo studio delle funzioni come nel "Problema della scatola" di Emma Castelnuovo (Castelnuovo e Barra - Matematica nella realtà - Bollati Boringhieri, 1977) in cui si propone, a partire da un quadrato di 18 cm di lato, di ritagliare ai quattro angoli dei quadratini di 1 cm, poi 2 cm e così via. Ripiegando i bordi si ottengono varie scatole. Si chiede prima di stimare il volume delle scatole e quale possa essere la più capiente. Successivamente si possono verificare con il calcolo le ipotesi fatte e costruire un grafico cartesiano mettendo in relazione il lato del quadretto ritagliato con il volume della scatola.
Plus tard, avec des élèves des catégories de 7 à 10, et au-delà, il sera possible de passer aux nombres décimaux et à l'étude des fonctions comme dans le « Problema della scatola » d'Emma Castelnuovo (Castelnuovo e Barra – Matematica nella realtà - Bollati Boringhieri, 1977) dans lequel on propose, à partir d'un carré de 18 cm de côté, de découper aux quatre coins des petits carrés de 1 cm, puis 2 cm et ainsi de suite. En pliant les bords on obtient plusieurs boîtes. On demande d'abord d'estimer le volume des boîtes et celui qui peut être le plus grand. On peut ensuite vérifier par le calcul les hypothèses faites et construire un graphique cartésien en mettant en relation le côté du carré découpé avec le volume de la boîte.

Tra i 96 problemi del dominio 3D della banca del RMT, alcuni permettono di riprendere le stesse operazioni in un contesto di scatole, in particolare "La boîte de sucres" (ral. 05.I.03) e "Goloserie" (ral. 21.I.01). Altri sono più centrati sulla visualizzazione spaziale delle facce di un parallelepipedo, come "La scatola da ricoprire" (ral. 18.I.04) e "Scatoline" (ral. 17.I.05). Ci sono circa venti problemi utili nella famiglia VS/SV - Gestire sviluppi di solidi.
Parmi les 96 problèmes du domaine 3D de la banque du RMT, certains permettent de reprendre les mêmes opérations dans un autre contexte de boîtes, en particulier *La boîte de sucres* (ral. 05.I.03), *Gourmandises* (ral. 21.I.01)
d'autres sont plus centrés sur la visualisation spatiale et les faces de parallélépipèdes comme *La boîte à recouvrir* (ral. 18.I.04) et *Boîtes* (ral. 17.I.05). Il y en a encore une vingtaine dans la famille VS/SV - Traiter des développements de solides

Bibliografia / Bibliographie

Arrigo G., Sbaragli S.: 2004, I solidi. Riscopriamo la geometria, Carocci.
Battisti R et al. La visualizzazione spaziale...dimenticata, La Gazzetta di Transalpino N.2 pp 29-48
Castelnuovo E., Barra M.: 1977, Matematica nella realtà, Bollati Boringhieri,
Duval R., Il primo passo nell'apprendimento della geometria: "vedere" le "figure", La Gazzetta di Transalpino N.10, pp 17-26
Jaquet F.: 2000, Il conflitto area-perimetro, L'educazione Matematica, NN .2 e 3
Rogalski J.: 1979, Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifcation: les cardinaux finis, les longeurs, surfaces et volumes, Bulletin de l'APMEP. 320, 563-586.
Sbaragli S., Mammarella I.C.: 2010, L'apprendimento della geometria. In: Lucangeli D., Mammarella I.C. (2010). Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento, Franco Angeli.
Vergnaud G.: 1983, Didactique du concept de volume, Recherches en Didactique des Mathématiques, 4, 1, 9-25.
Vergnaud G. et al.: 1983, Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12-13 ans), Recherches en Didactique des Mathématiques, 4, 1, 71-120