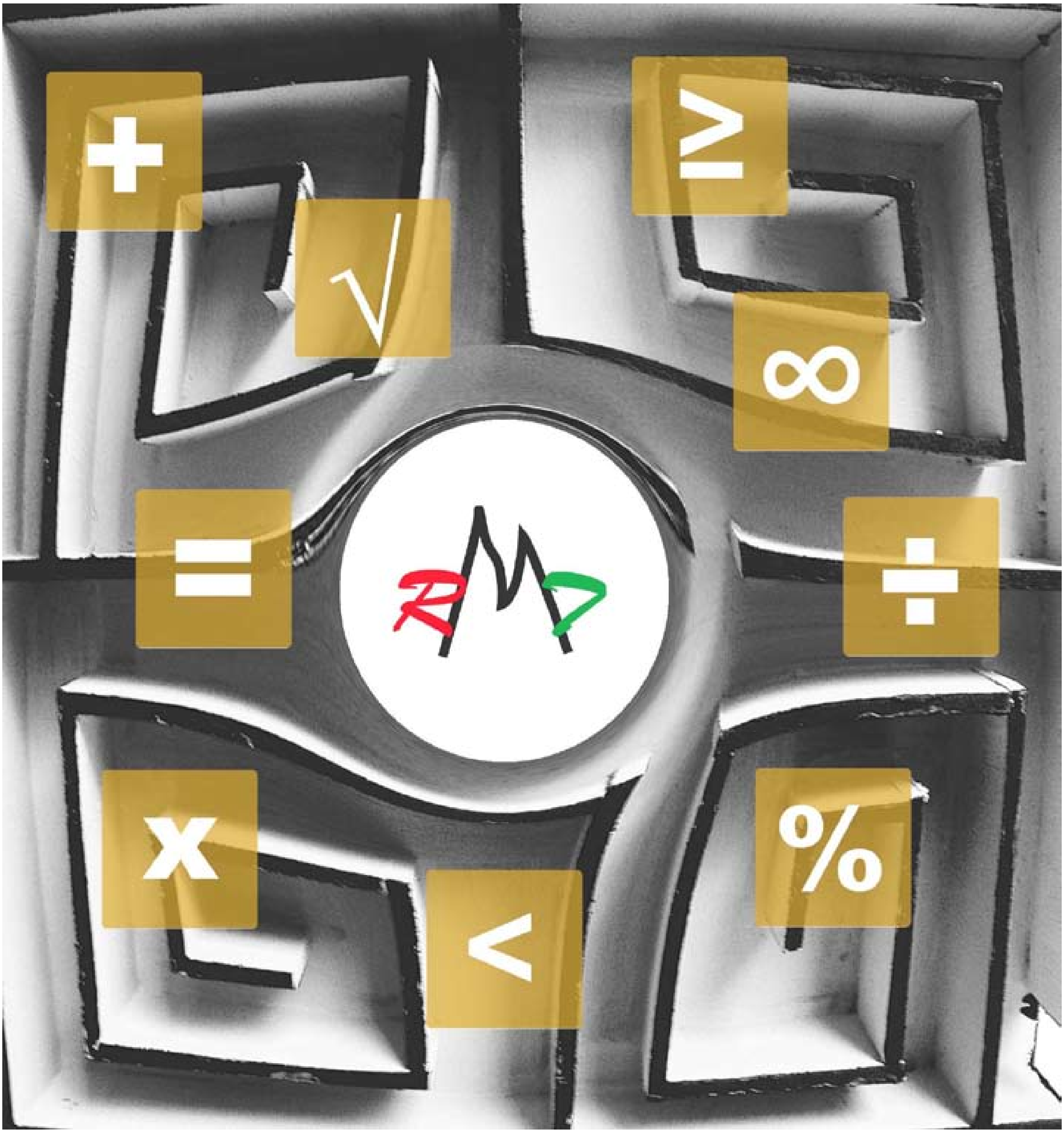
La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 10, octobre / ottobre 2020



Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Comité de rédaction / Comitato di redazione

Rédacteurs responsables Direttori responsabili	Lucia GRUGNETTI François JAQUET
Comité de gestion de l'ARMT Comitato di gestione dell'ARMT	Maria Felicia ANDRIANI Philippe PERSICO Clara BISSO Florence FALGUÈRES Pauline LAMBRECHT Maria Gabriella RINALDI

Comité de lecture / Comitato di lettura

Bernard ANSELMO
Clara BISSO
Georges COMBIER
Lucia DORETTI
Mathias FRONT
Carlo MARCHINI
Daniela MEDICI
Vincenza VANNUCCI
Maria Felicia ANDRIANI
Ester BONETTI
Annamaria D'ANDREA
Sébastien DESSERTINE
Michel HENRY
Claudia MAZZONI
Luc-Olivier POCHON

Maquette / Copertina

Esther HERR

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.eu

ISSN 2234-9596

© ARMT 2020

TABLE DES MATIÈRES / INDICE

Numéro 10, octobre 2020/ Numero 10, ottobre 2020

EDITORIALE: IL LOCKDOWN DEL RMT

Lucia Grugnetti

In questo difficile e complesso 2020, anche il Rally Matematico Transalpino ha dovuto confrontarsi con una dimensione di una nuova e inimmaginabile realtà, arrivata improvvisa e terribile.
Se da un lato il RMT, nella sua ventottesima edizione, ha dovuto fermarsi alla prima prova, dall'altro ha guardato al "dopo", a quando quella che potremmo chiamare "normalità", tornerà e permetterà di poter svolgere tutte le prove a partire dalla sua ventinovesima edizione e di poter portare avanti tutte le attività della nostra associazione.
Nel frattempo, che cosa fare? Tenere i problemi del RMT ben chiusi nel cassetto, in attesa che la sperata "normalità" torni oppure trovare il modo di utilizzarli anche nella nuova e obbligata dimensione didattica, detta "a distanza"? In alcune realtà c'è stata una spinta a non lasciare i problemi nel cassetto! Le modalità non sono peraltro state omogenee, tanto che il direttivo dell'ARMT Italia, nelle persone di Maria Felicia Andriani, Speranza Dettori, Rosa Iaderosa, Daniela Medici e Lucia Salomone, ha giudicato opportuno predisporre all'attenzione delle sezioni un documento propositivo che cerchi di salvaguardare la "filosofia" del RMT anche nella didattica a distanza, in alcuni casi con il ricorso a un video.
Tra gli aspetti salienti del documento, figurano alcune fasi fondamentali da tenere presenti:

- *Una* ***prima fase*** *che riguarda la* ***lettura del testo****: il problema richiede numerosi ritorni nella lettura e quindi è indispensabile che il testo scritto sia a disposizione dei risolutori durante l'intera attività. Sarebbe quindi opportuno avere un "fermo immagine" sull'intero testo.*
- *Una* ***seconda fase*** *riguarda l'****appropriazione*** *del problema da parte degli allievi: si tratta di un momento molto importante ai fini della risoluzione. Durante questa fase gli allievi devono avere modo, allo scopo di una migliore comprensione, di rappresentare il problema attraverso schemi, annotazioni, disegni, tabelle e ogni altro mezzo che favorisca lo scambio e la comunicazione tra i componenti del gruppo. Sarà compito dell'insegnante lasciare il tempo opportuno ai propri allievi affinché possano scambiarsi pensieri che saranno relazionati, nella modalità a distanza di cui si può disporre (file condivisi, foto delle produzioni, appunti presi durante l'ascolto e l'osservazione degli scambi…). L'importante, inoltre, è che ciascun allievo non si senta mai valutato e si senta libero di esprimersi sia verbalmente sia nelle produzioni condivise con i compagni. Il docente si mostrerà sempre rispettoso delle idee avute dagli allievi, senza forzare con una lettura più adulta.*
- *Una* ***terza fase*** *riguarda la* ***ricerca di una strategia risolutiva.*** *Nella didattica a distanza, laddove l'insegnante è disposto a non affrettare i tempi, nella consapevolezza che un "buon lavoro" darà a posteriori molti frutti, si offre un'occasione unica per sollecitare e documentare i processi della ricerca di una strategia risolutiva da parte degli allievi. Questa fase può essere svolta anche in una lezione successiva, che segua realmente la fase di appropriazione, dove ciascuno possa avere la possibilità di esprimere, nei documenti, le proprie difficoltà o le proprie certezze. I componenti del gruppo dovranno negoziare e concordare la soluzione del problema ed è possibile che ad una prima battuta di un allievo "non so come risolvere" segua, prima anche solo per simulazione, successivamente con più consapevolezza, un cammino per la risoluzione del problema.*

Per l'uso dei problemi del RMT nella didattica a distanza, gli aspetti più sopra ricordati ci sembrano irrinunciabili.
Si è pensato ad un uso diverso dei problemi del RMT, a causa della chiusura delle scuole per il Covid 19, ma ci sembra doveroso porci la questione se in tal modo i nostri problemi mantengano effettivamente la loro personalità originale.
Le posizioni in tal senso non sono univoche.
Ai posteri l'ardua sentenza!

ÉDITORIAL : LE CONFINEMENT DU RMT

Lucia Grugnetti

Dans cette année 2020 difficile et complexe, le Rallye Mathématique Transalpin a dû faire face à une réalité nouvelle et inimaginable, soudaine et angoissante.

Pour cette vingt-huitième édition, il a fallu se contenter de la première épreuve, en espérant toutefois, après un retour à une période « normale », effectuer toutes les épreuves à partir de la vingt-neuvième édition et de pouvoir poursuivre toutes les autres activités de l'association. Mais que faire entre temps ? Conserver les problèmes d RMT dans un tiroir, en attendant un retour de la normalité espérée ou chercher à les utiliser dans la nouvelle dimension didactique imposée, qu'on appelle « enseignement à distance ? Dans certaines cas bien réels, il y a eu une pression pour ne pas laisser les problèmes dans leur tiroir mais les modalités proposées de leur utilisation n'ont cependant pas été homogènes, à tel point que le comité de gestion de « l'ARMT Italia », constitué de Maria Felicia Andriani, Speranza Dettori, Rosa Iaderosa, Daniela Medici et Lucia Salomone, a jugé nécessaire de préparer un document, à l'attention des sections, visant à sauvegarder la « philosophie » du Rallye mathématique transalpin selon laquelle les problèmes sont élaborés dans le but spécifique d'inciter les élèves à les résoudre **par groupes et en toute autonomie**, même dans l'enseignement à distance où, parfois on fait appel à des vidéo.

Parmi les aspects saillants du document, il y a quelques phases fondamentales à relever et maintenir à l'esprit :

- *Une **première phase** est **la lecture de l'énoncé** : le problème nécessite de nombreux allers et retours dans sa lecture et il est essentiel que le texte écrit reste à la disposition des élèves pendant toute leur activité de résolution. Il est donc nécessaire de maintenir une « image fixe » de l'énoncé plutôt qu'une description orale de la situation ou une présentation par video.*
- *Une **deuxième phase** se rapporte à **l'appropriation** du problème par les élèves : c'est un moment très important pour la résolution. Au cours de cette phase, les élèves doivent être capables, pour mieux comprendre, de représenter la situation par des diagrammes, annotations, dessins, tableaux et tout autre moyen favorisant l'échange et la communication entre les membres du groupe. Il appartient à l'enseignant de laisser le temps approprié à ses élèves afin qu'ils puissent échanger des réflexions dans le respect des distances exigé (fichiers partagés, photos des productions, notes prises en écoutant et en observant les échanges ...). L'important est aussi que chaque élève ne se sente jamais évalué et se sente libre de s'exprimer verbalement dans les échanges avec ses camarades de classe. L'enseignant fera toujours preuve de respect pour les idées des élèves, sans les forcer à lire plus à l'âge adulte.*
- *Une **troisième phase** est celle de **la recherche d'une stratégie** de résolution. Dans l'enseignement à distance, où l'enseignant accepte de ne pas précipiter les temps, sachant qu'un « bon travail » donnera a posteriori de meilleurs fruits, une occasion unique s'offre à lui de solliciter et de documenter les processus de recherche d'une stratégie décisive de la part des élèves. Cette phase pourra être encore développée lors de leçons ultérieures, qui suivent les phases d'appropriation et de recherche, où chacun pourra exprimer, par les documents qu'il produira, ses difficultés ou certitudes. Les membres du groupe devront négocier et s'entendre sur la solution du problème et il est possible qu'à une première réaction d'un élève disant « je ne comprends pas comment arriver à la solution », s'ouvre, peut être d'abord par une simple hypothèse, puis avec plus de conviction, un chemin pour résoudre le problème.*

Pour l'utilisation des problèmes de RMT dans l'enseignement à distance, les aspects mentionnés nous semblent essentiels et ont fait l'objet de discussions, évidemment « à distance », avec tous les membres de « l'ARMT Italia ».

Une utilisation différente des problèmes de RMT a été envisagée, en raison de la fermeture des écoles à cause du Covid 19, mais il nous semble nécessaire de se poser la question de savoir si, de cette manière, nos problèmes conservent réellement leur « personnalité » d'origine.

Les points du vue sur le sujet sont variées. Il sera intéressant d'avoir un « retour » des expériences et d'en discuter ensemble.

PRESENTAZIONE DEL NUMERO

Questo numero 10 de *La Gazzetta di Transalpino* contiene quattro articoli: i primi due relativi alle conferenze plenarie tenute al 23° Convegno Internazionale dell'ARMT ad Alghero, il terzo e il quarto si connettono, rispettivamente, alle problematiche delle due conferenze; segue la rubrica con due studi di approfondimento di schede della banca di problemi e, in chiusura, diversi articoli relativi ai poster presentati al suddetto convegno.

- L'articolo ***Il primo passo nell'apprendimento della geometria: "vedere" le "figure"*** di **Raymond Duval**, ha lo scopo precipuo di chiarire le ragioni secondo le quali i giovani allievi non vedono le "figure" in modalità matematica in quanto per loro sono piuttosto la percezione e le misure fatte concretamente che determinano ciò che le "figure" rappresentano.

- **Ferdinando Arzarello**, nel suo articolo dal titolo ***Con gli studenti e gli insegnanti tra numeri, formule e problemi***, a partire dalla constatazione che la transizione dall'aritmetica all'algebra è irta di difficoltà, evidenzia lacune e salti sia di natura epistemologica sia di natura didattica, conseguenze del cambio di prospettiva e dei nuovi strumenti di rappresentazione propri della disciplina e chiarisce come la scuola secondaria di primo grado sia decisiva per gestire questa transizione in modo opportuno.

- **Clara Bisso** e **François Jaquet** in ***Mettere a frutto le risorse didattiche dell'ARMT in classe e nella formazione*** presentano e analizzano un problema del RMT che porta i giovani allievi a confrontarsi con il concetto di perimetro di quadrati e rettangoli e di tale problema vengono tracciate la storia e l'origine, derivanti dalle pratiche permanenti del RMT sull'elaborazione e l'analisi dei problemi. Quindi lo si descrive attraverso il suo enunciato, la sua analisi a priori e i risultati ottenuti da circa 2 500 classi che l'hanno risolto o hanno tentato di risolverlo durante la seconda prova del 27° RMT, nel 2019.

- L'articolo ***Riflessioni sullo sviluppo del pensiero algebrico negli allievi a partire dall'analisi a posteriori di un problema,*** di **Maria Felicia Andriani, Lucia Doretti** e **Lucia Salomone**, prende spunto dal Laboratorio di Algebra, organizzato dalle autrici in occasione del Primo corso di formazione dell'ARMT Siena e analizza nei dettagli un gran numero di elaborati relativi a un problema del RMT, che rappresenta un esempio su cui far lavorare gli allievi nella prospettiva di un passaggio dall'aritmetica all'algebra.

Nella **rubrica APPROFONDIMENTI**, che ospita le note di approfondimento di schede della banca di problemi, **Concetta Caggiano, Lucia Grugnetti** e **François Jaquet**, propongono uno studio (in versione bilingue) a partire dal problema *Un mosaico del Marocco* elaborato nell'ambito dei lavori del **gruppo Zeroallazero**.
I membri del sottogruppo "per i grandi" del Gruppo Geometria piana presentano (in versione bilingue) un'analisi del problema *Triangoli sul geopiano* a partire dagli elaborati delle sezioni alle quali afferiscono i membri del Gruppo stesso.

Nella **rubrica dedicata ai poster presentati al convegno internazionale di Alghero** figurano gli articoli che riportano gli aspetti precipui dei poster delle Sezioni *di Franche-Comté, della Puglia, di Siena e di Udine* oltre alle immagini dei poster presentati dalla Sezione di Sassar*i,* dal Gruppo Zeroallazero, da Clara Bisso e François Jaquet.

PRÉSENTATION DU NUMÉRO

Ce numéro 10 de *La Gazette de Transalpie* contient quatre articles : les deux premiers sont les textes des conférences plénières tenues à la rencontre d'Alghero, les troisième et quatrième sont liés aux problématiques développés dans les deux conférences ; la rubrique suivante est dédiée à nos approfondissements et présente deux études de problèmes ; une partie finale est dédiée à plusieurs articles issus de posters présentés lors de la rencontre mentionnée ci-dessus.

- L'article*, **Le premier seuil dans l'apprentissage de la géométrie : « voir » les « figures »*** de **Raymond Duval**, a pour but principal de clarifier les raisons pour lesquelles les jeunes élèves ne voient pas les « figures » en mode mathématique, car pour eux c'est plutôt la perception et les mesures prises concrètement qui déterminent ce que représentent ces « figures ».

- **Ferdinando Arzarello**, dans son article ***Avec les élèves et les enseignants entre nombres, formules et problèmes,*** décrit les processus qui conduisent à la pensée algébrique et aux productions correspondantes des étudiants comme maturation d'un méta-discours sur l'arithmétique. Il souligne ainsi les formes de continuité (cognitive et didactique) qui doivent être ciblées en classe pour stimuler et soutenir la transition de l'arithmétique à l'algèbre.

- **Clara Bisso** et **François Jaquet,** dans l'article ***À propos de périmètre***, présentent un problème du RMT qui met en œuvre le concept de périmètre de carrés et rectangles chez de jeunes élèves. On y présente son histoire et son origine, issues des pratiques permanentes du RMT sur l'élaboration et l'analyse de problèmes. Puis on le décrit par son énoncé, son analyse a priori et les résultats obtenus par environ 2500 classes qui l'ont résolu ou tenté de le résoudre lors de la deuxième épreuve du 27e RMT, en 2019.

- L'article ***Réflexions sur l'évolution de la pensée algébrique chez les élèves à partir de l'analyse a posteriori d'un*** problème, de **Maria Felicia Andriani, Lucia Doretti** et **Lucia Salomone**, est inspiré du Laboratoire d'Algèbre, organisé par les auteures à l'occasion du premier cours de formation de la section de l'ARMT de Sienne, analyse en détail un grand nombre de copies relatives à un problème du RMT, ce qui représente un exemple sur lequel les élèves peuvent travailler dans la perspective d'un passage de l'arithmétique à l'algèbre.

Dans la **rubrique ÉTUDES**, qui accueille les études détaillées de fiches de la BP de nos problèmes, **Concetta Caggiano, Lucia Grugnetti et François Jaquet**, proposent une étude, en version bilingue, du problème *Une mosaïque du Maroc*, proposé par le **Groupe Zeroallazero**.
Les membres du sous-groupe « pour les grands » du Groupe Géométrie plane présentent l'analyse a posteriori du problème *Planche à clous* à partir des copies d'élèves des sections des membres du groupe, en version bilingue.

Dans la **rubrique dédiée aux posters présentés à la rencontre internationale d'Alghero** figurent Les *articles des Sections de Franche-Comté, de Puglia, de Siena et de Udine concernant leurs posters,* ainsi que *les images* des posters présentés par la Section de Sassari, par le Groupe Zeroallazero et par Clara Bisso et François Jaquet.

LE PREMIER SEUIL DANS L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMÉTRIE : « VOIR » LES « FIGURES »

Raymond Duval

Arrêtons-nous d'abord sur les deux mots du titre entre guillemets. Ils sont familiers et hors de toute discussion.

Le terme FIGURE est bien connu de tous les enseignants de Mathématiques. Il désigne non pas le dessin tracé sur un support papier ou apparaissant à l'écran, mais les propriétés géométriques que l'on se donne et que le dessin représente, c'est-à-dire le dessin *codé.* Cette opposition s'est développée avec les logiciels de construction de figures, et tout particulièrement avec Cabri géomètre (Laborde et Capponi, 1993). Elle vise à souligner la manière mathématique de voir et d'utiliser les figures «géométriques », c'est-à-dire les figures construites avec des instruments, les primitives de l'instrument utilisé produisant le tracé d'une propriété géométrique. *Voir, c'est regarder une figure construite instrumentalement avec les lunettes des hypothèses données.*

Le verbe VOIR désigne la modalité perceptive qui, cognitivement, est la plus riche et la plus complète. En ce qui concerne les représentations visuelles bidimensionnelles (croquis, schémas, esquisses, cartes, graphiques, images, photos, etc.) *voir, c'est reconnaître au premier coup d'œil l'objet qu'une représentation bidimensionnelle montre.* Cette reconnaissance immédiate vient de ce que le contour de la forme reconnue ressemble ou reproduit celui de l'objet matériel qu'un dessin, une image ou une photo montre. Et le mot employé pour désigner la forme tracée est le nom de l'objet dessiné plus ou moins schématiquement. Autrement dit, il n'y a pas besoin de mettre des lunettes conceptuelles pour reconnaître ce qu'un croquis, un schéma, une carte, ou une image montrent. Cette manière de voir est fondamentalement iconique. Elle est la manière spontanée, universelle de regarder et d'utiliser les représentations bidimensionnelles dans tous les domaines de la connaissance.

La manière mathématique de voir les figures instrumentalement construites, même les plus élémentaires, est donc aux antipodes de la manière spontanée et iconique de voir toutes les représentations bidimensionnelles. Et pour franchir l'écart considérable qui les sépare, il ne suffit pas de mettre des lunettes conceptuelles. Car, ici, les lunettes conceptuelles requièrent l'acquisition des propriétés géométriques de base ainsi que la coordination entre les termes géométriques et ce que la figure donne à voir. Comment les élèves du Primaire et ceux du Collège pourraient-ils soupçonner cet écart et opérer d'eux-mêmes les changements de regard nécessaires pour comprendre en géométrie et pouvoir résoudre des problèmes (Duval et Godin 2007, p.12, Fig. 4 et p.13, Fig.5) ?

§
§§

L'analyse sémio-cognitive du fonctionnement cognitif sous-jacent à toute activité mathématique fait apparaître que *la manière mathématique de « voir » les « figures» est* DOUBLEMENT CONTRE-PERCEPTIVE. Elle exige de :

(1) RE–CONNAÎTRE d'emblée dans une « figure » toutes les formes possibles, c'est-à-dire tous les contours fermés possibles que l'on peut observer en regardant la « figure », comme si toutes les formes étaient juxtaposées, puis comme si certaines se superposaient. (Cela peut être un bel exercice de gymnastique visuelle !)

(2) DÉ–CONSTRUIRE DIMENSIONNELLEMENT tous les contours fermés qui s'imposent perceptivement en premier regard en des tracés unidimensionnels (droites, segments de droites, arcs) et en points d'intersections de tracés unidimensionnels. Par exemple, les droites et les segments de droites sont des tracés unidimensionnels (de même une courbe ou un arc). Les sommets d'un polygone sont des points d'intersection sur le réseau des droites sous-jacentes aux côtés du polygone. Pour décrire cette déconstruction dimensionnelle, nous parlerons D'UNITÉS FIGURALES **2D**, pour les contours fermés, d' UNITÉS FIGURALES **1D**, pour les segments et les droites, et D'UNITÉS FIGURALES **0D**, pour tous les points d'intersection. Autrement dit, ce qu'on appelle une « figure » est en réalité une CONFIGURATION **2D** d'UNITÉS FIGURALES **1D** et **0D**. Par exemple un carré peut être vu comme une unité figurale **1D** ou comme une CONFIGURATION **2D** d'unités figurale **1D.**

Cette opération de déconstruction dimensionnelle des formes perceptivement reconnues est cruciale dans l'apprentissage de la géométrie élémentaire, parce que la coordination entre le vocabulaire géométrique et tout ce qu'une configuration **2D** donne à voir au regard est sans lunettes conceptuelles.

Il y a donc trois manières de « voir » une « figure » en géométrie, et non pas deux[1].

- Celle qui correspond à la ***face exposée du travail mathématique***. Elle consiste en l'utilisation de tous les résultats acquis en tant que « théorèmes », pour démontrer des conjectures et résoudre des problèmes mathématiques. Les concepts mathématiques condensent ces connaissances sous forme de propriétés, de

[1] Pour distinguer ces trois manières de voir, nous utiliserons un code couleur : rouge pour la face exposée de la manière mathématique de voir, bleue pour la face cachée de la manière mathématique de voir, et **noir** pour la manière perceptive universelle de voir.

formules, d'algorithmes de calcul qui sont aussi utilisables pour résoudre des problèmes non mathématiques.

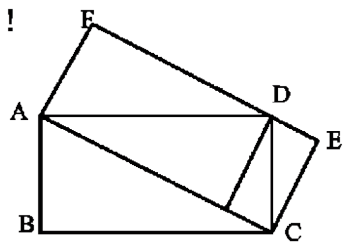
- Celle qui correspond à ***la face cachée de toute activité mathématique.*** Elle est indépendante des concepts utilisés. Car elle consiste dans la manière de voir, de raisonner et d'explorer qui se font exclusivement en transformant des représentations sémiotiques en d'autres représentations sémiotiques, soit en changeant de registre de représentation (de la langue aux figures ou aux écritures symboliques), soit en restant dans le même registre (calcul, utilisation heuristique des figures).
- Celle qui correspond à ***la manière perceptive universelle, et spontanément iconique,*** de regarder toutes les représentations visuelles bidimensionnelles, y compris les figures géométriques et les graphes cartésiens.

Autrement dit, ce n'est pas en partant de la face exposée des mathématiques et en s'appuyant sur la manière spontanément iconique et universelle de voir toutes les représentations visuelles **2D**, que l'enseignement de la géométrie peut faire franchir l'écart considérable qui les sépare. *Il faut développer la manière de voir propre à la face cachée de toute activité géométrique* pour que les jeunes élèves puissent comprendre en géométrie, et utiliser des connaissances géométriques pour résoudre des problèmes.

§
§§

Quand on consulte les enquêtes et des expérimentations qui ont été faites, depuis les années 1970, concernant la compréhension de la géométrie enseignée au Primaire et au Collège, leurs résultats aboutissent au même constat. Les élèves n'entrent pas dans la manière mathématique de voir les « figures ». Ce sont la perception et les mesures faites concrètement qui, pour eux, déterminent vraiment ce que les « figures » représentent. Ils en restent à la manière universelle de voir les représentations visuelles **2D**. Une très grande majorité soit ne sait comment utiliser la connaissance des propriétés géométriques de base qui ont été enseignées soit les confond. Cette situation n'a pas changé depuis une quarantaine d'années au moins, malgré toutes les Réformes et les innovations didactiques.

Voici un problème donné en Juin 1980 à des élèves de $6^{\text{ème}}$, $5^{\text{ème}}$ et $4^{\text{ème}}$ dans des collèges de Strasbourg (Jamm, 1981).



On donne un rectangle ABCD.

Est-ce que l'aire du rectangle FECA est *supérieure, égale ou inférieure* à l'aire du rectangle ABCD ?

Expliquez votre réponse.

Ce problème a été proposé à deux classes par niveau et les élèves avaient travaillé individuellement. Voici les types de réponses :

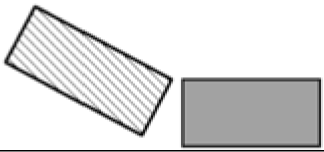
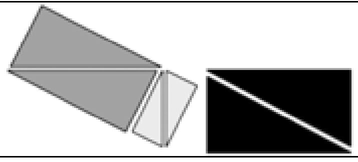
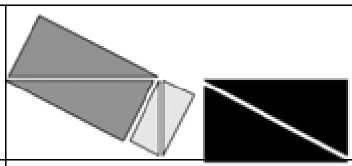
	$6^{\text{ème}}$ Catérgorie 6	$5^{\text{ème}}$ Catégorie 7	$4^{\text{ème}}$ Catégorie 8
Une diagonale divise un rectangle en deux triangles égaux	**5%**	**0**	**6%**
Mesure des côtés, *puis blocage*	**10%**	**30%**	**45%**
Invariance par compensations (Piaget)	**10%**	**10%**	**2%**
Calcul à partir des mesures des côtés sur le dessin **(2 ,5)** × **(5cm) (2,3)** × **(5,5cm)**	**10%**	**14%**	**10%**

Analysons maintenant ce problème du point de vue de ***la face cachée de l'activité géométrique.*** Les deux questions qu'il faut se poser sont les suivantes :

- Quelles **unités figurales 2D** reconnaît-on *au premier coup d'œil* ?

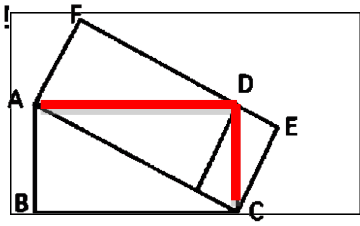
  Cette question est d'autant plus importante que les unités figurales **2D** que l'on a reconnues au premier coup d'œil excluent la reconnaissance de toutes les autres unités figurales possibles. Or, pour pouvoir utiliser heuristiquement une **configuration 2D,** il faut pouvoir *reconnaître très rapidement* (en moins de quelques dizaines de secondes) **toutes les unités figurales 2D** possibles.
- Parmi toutes les unités figurales 2D possibles, lesquelles font voir **la propriété géométrique à appliquer ?**

On remarquera que ces deux questions constituent l'utilisation heuristique de **la configuration 2D,** sans avoir à mettre des lunettes conceptuelles.

		
DEUX UNITES FIGURALES 2D SUPERPOSEES FECA et ABCD	Décompositions des deux unités figurales superposées en unités figurales **2D JUXTAPOSEES**	Équivalence des aires des deux unités figurales superposées

Ici, le travail purement visuel consiste à utiliser les unités figurales **2D** comme les pièces d'un puzzle.

La manière de voir correspondant à la ***face exposée des mathématiques*** est totalement différente :

	Deux unités figurales **1D** appartenant chacune à deux unités figurales **2D** **DIFFÉRENTES**

Ici le travail purement visuel est radicalement différent. Tout d'abord, il n'y a pas à reconnaître les unités visuelles **2D** pertinentes pour le problème, *puisqu'elles sont désignées sur la configuration* **2D** *par six lettres. Mais il faut identifier les unités figurales* **1D** *correspondant* ***aux deux diagonales.*** Cette identification visuelle est immédiate pour les mathématiciens et pour les enseignants de mathématiques. Mais elle va contre la reconnaissance perceptive qui impose des rectangles au premier coup d'œil, et qui est renforcée par les désignations verbales de l'énoncé. Le terme « rectangle » y est répété trois fois !

La déconstruction dimensionnelle de l'unité figurale **2D** en unités **1D** relève de la face exposée des mathématiques. Mais elle conduit à un cercle didactique vicieux dans l'enseignement de la géométrie élémentaire au Primaire et au Collège. Car, comme nous l'avons expliqué plus haut, elle dépend d'une appréhension discursive des Configurations d'unités figurales **2D** et présuppose donc l'acquisition des « concepts » géométriques de base que l'on veut faire découvrir ou acquérir.

§
§§

Cet exemple illustre les cinq lois du fonctionnement sémio-cognitif sous-jacent à l'activité géométrique, comme à toute résolution de problème en géométrie élémentaire.

L.1 Il y a une *prégnance perceptive* des unités figurales **2D** immédiatement reconnues *qui occulte la reconnaissance* de toutes autres unités figurales **2D** possibles.

L.2 Toute unité figurale **2D** peut être décomposée en unités figurales **2D**, et apparaître ainsi comme leur configuration. Ainsi un rectangle peut être reconfiguré en deux ou en quatre triangles, ou encore en deux ou en quatre rectangles, etc.

L.3 Les unités figurales d'une configuration **2D** peuvent être RE-configurées autrement par juxtaposition et former une configuration différente de celle de départ. Ainsi, selon l'exemple célèbre de la *Gestalttheorie*, un rectangle peut être reconfiguré en parallélogramme.

Ce travail visuel de décomposition d'unités figurales **2D** en d'autres unités figurales **2D**, et leur RE-configuration en une nouvelle configuration **2D** ignore les grandeurs et exclut toute mesure. *Car toute mesure ne peut se faire que sur des unités figurales* **1D**, *et ne peuvent être reportées que les unités figurales* **1D** *d'une configuration* **2D.** Autrement dit, il y a là *une recherche à faire sans calculer.*

L.4 *La déconstruction dimensionnelle des unités figurales **2D** est spécifique aux « figures géométriques ». Elle est contre-perceptive et contre-iconique.*

Cela veut dire que les figures géométriques ne sont pas la modélisation de situations physiques ou de situations concrètes. Il n'y a pas de tapis roulant qui permettrait d'aller directement d'une Figure géométrique à une situation réelle et inversement. Il faut élaborer une schématisation intermédiaire de la situation réelle. Et c'est la ressemblance de la Figure géométrique avec la schématisation réelle qui va permettre de reconnaître la propriété géométrique ou le théorème à appliquer.

L.5 La coordination entre le langage et la visualisation *se fait avec les unités figurales* **1D** et non pas *avec les unités figurales* **2D.** Cette coordination est cognitivement complexe**,** parce le langage recouvre, en géométrie élémentaire, à la fois les termes des propriétés géométriques de base et les différentes opérations discursives possible de désignation de la même unité figurale 1D ou 2D (Duval, 2015, p. 164, Fig.8) ;

Toute organisation de l'enseignement de la géométrie, de séquences d'activité et d'élaboration de problème qui s'en tient à la manière de voir correspondant à la ***face exposée des mathématiques*** est un cercle vicieux didactique et conduit la grande majorité des élèves en impasse.

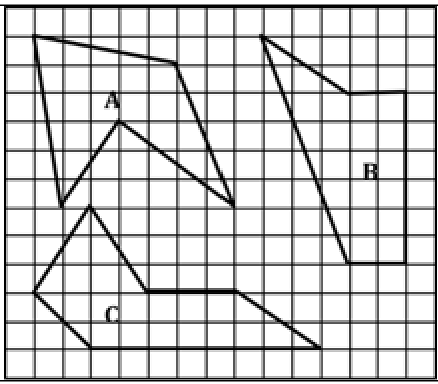
§
§§

Nous allons analyser maintenant quatre problèmes du RMT, choisis par François Jaquet en vue d'ouvrir des échanges. L'analyse sera évidemment faite par rapport à la manière de VOIR correspondant ***à la face cachée de l'activité géométrique.*** Pour cela, je vais les regrouper de la manière suivante :

- Ceux qui ont en commun l'utilisation d'un *quadrillage* : la comparaison d'aires de polygones (26ème RMT) et le découpage d'un heptagone en un minimum de triangles (28èmeRMT) ;
- Ceux qui ont en commun *un même bord pour deux unités figurales **2D** juxtaposées* (27ème RMT).

§
§§

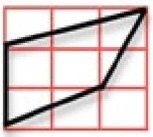
LE QUADRILLAGE : **aide** ou **obstacle** pour résoudre des problèmes de géométrie ?

	**Comparaison de figures** Patricia et Brigitte observent ces trois polygones et se demandent s'ils ont tous la même aire. Dites si *les aires de ces trois* polygones sont *les mêmes* ou sont *différentes.* Montrez comment vous êtes arrivés à vos réponses

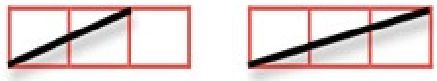
La réponse à la question change du tout au tout selon la manière dont on analyse le quadrillage.

Si on considère que les trois polygones sont les FIGURES et que le quadrillage est le FOND sur lequel elles se DÉTACHENT PERCEPTIVEMENT, alors *le quadrillage est une aide.* Car il permet de découper les polygones en carrés, c'est-à-dire en unité figurales **2D**, que l'on peut compter. La difficulté dans ce problème est qu'il y a des carrés qui sont coupés par certains côtés des polygones et que l'on n'a pas toujours des demi-carrés.

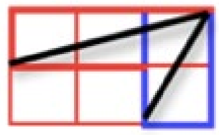
Si on considère, au contraire, que le quadrillage n'est un pas un fond ou un support extérieur aux figures, mais qu'il est *une partie intégrantes des trois configurations polygonales*, alors l'analyse est totalement différente. *Il y a une configuration 2D commune aux trois polygones,* et à d'autres possibles, quels que soient le nombre de côtés. Faisons un zoom sur cette configuration commune.



Tout le problème est dans ce zoom. Mais un jeu de regards sur toutes les unités figurales **2D** possibles de cette configurations permet de résoudre tous les problèmes de ce type. Il faut :

(1) VOIR chaque côté du polygone comme la diagonale (unité **1D**) d'un rectangle en **JUXTAPOSANT** au moins deux carrés unités figurales **2D** du quadrillage	

En d'autres termes, ce changement de regard mobilise les lois **L.2** et **L.3** du fonctionnement sémio-cognitif sous-jacent à toute activité géométrique.

(2) La **SUPERPOSITION** partielle de deux **JUXTAPOSITIONS** différentes respectivement de trois et deux carrés du quadrillage.	

Revenons maintenant à notre question : le quadrillage est-il une aide ou un obstacle pour la résolution de problèmes de géométrie ?

En réalité, ce qui est crucial dans l'introduction de la géométrie élémentaire au Primaire et au Collège, c'est *d'avoir pris conscience de* la manière de voir ***la face cachée de l'activité géométrique.*** Car la reconnaissance visuelle des unités figurales **2D** et **1D** pertinentes pour résoudre un problème *ne dépend pas de connaissances préalables, mais de cette prise de conscience*. Sans cette prise de conscience les élèves ne seront jamais capables de savoir quand et comment utiliser des propriétés géométriques et les formules correspondantes, dès qu'ils ne seront plus dans le cadre didactiquement encadré d'exercices d'apprentissage.

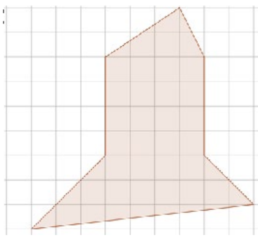
L'analyse a posteriori de 350 copies de ce problème, donné en 2017 dans 3265 classes de 6$^{\text{ème}}$, 5$^{\text{ème}}$ et 4$^{\text{ème}}$ (catégories 6, 7 et 8 du RMT) de 18 sections, a fait apparaître deux procédures de résolution :

- par comptage des carrés du quadrillage (majoritaires en catégorie 6) après compensations ou recompositions de morceaux de carrés,
- par décomposition des polygones en figures connues : rectangles et triangles et calcul de l'aire. Dans le cas où les élèves ont voulu calculer l'aire des triangles, les résultats sont très insuffisants (de 15 à 30 % selon les catégories) en raison de la difficulté à déterminer correctement la hauteur et la base pour appliquer correctement la formule $A = (b \times h) /2$.

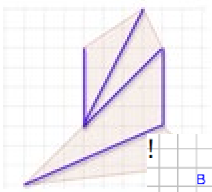
La comparaison de ces résultats avec ceux enregistrés, il y a presque quarante ans pour le même problème mathématiquement parlant, montre *qu'il n'y a pas de progrès pour la résolution des problèmes de géométrie, si on ne se contente pas seulement de demander directement de faire des calculs.*

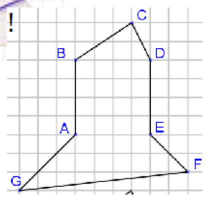
Comme le problème de la comparaison des aires de trois polygones, le problème intitulé « Triangles dans un polygone » utilise le support d'un quadrillage. *Les sommets de l'heptagone y coïncident avec les points d'intersection du quadrillage. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle les sommets ne sont pas, d'un point de vue sémio-cognitif, des unités figurales* **0D**, *mais* **2D.** Mais en est totalement différents sur deux points :

- **L.2** Ce problème demande explicitement le partage d'une *unité figurale* **2D** en d'autres *unités figurales* **2D**. Autrement dit, il demande que l'on trace les droites (*unités figurales* **1D)** qui joignent deux sommets non consécutifs, et que l'on ne retienne que les segments de ces droites qui avec un ou deux côtés du triangle forment un minimum de triangles.
- **L.4** Il demande seulement d'identifier tous les découpages possibles de l'heptagone en un minimum de triangles. Il y en a 12. Aussi la figure ci-dessous est donnée en douze exemplaires pour dessiner les douze DÉCOMPOSITIONS MÉRÉOLOGIQUES possibles d'un heptagone en triangles. *Il n'y a aucun calcul à faire impliquant une formule d'aire ou de périmètre à utiliser*. Les dessins demandés sont l'INVERSE DES TÂCHES DE CONSTRUCTION D'UN FIGURE. En utilisant un instrument ou un logiciel de construction. Tracer les différents partages possibles EST UNE TÂCHE DE DÉCONSTRUCTION DIMENSIONNELLE DES FORMES **2D** d'emblée reconnues à l'œil comme telles.

	Thitanga veut *partager cette figure en un minimum de triangles. Combien de façons* Thitanga a-t-elle *de découper cette figure ?* Dessinez-les *toutes.*[2]

Voici trois passages clés dans ce travail purement visuel de déconstruction dimensionnelle :



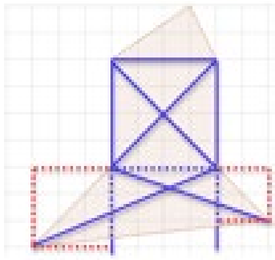


1. RECONNAÎTRE VISUELLEMENT *une manière de partager* en triangles en joignant deux sommets non consécutifs

Notation des sommets

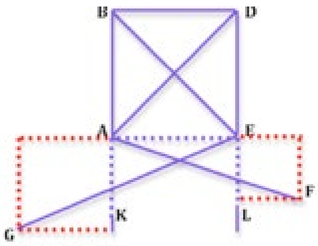
C, D, E, F, G, A, B

pour pouvoir désigner les unités figurales



2. RECONNAÎTRE VISUELLEMENT

les deux alignements diagonaux DAG et BEF (***les pointillés rouges*** tracent les deux carrés dont AG et EF sont les diagonales)



3. SORTIR DU CONTOUR FERMÉ DE L'HEPTAGONE

pour faire apparaître deux nouveaux sommets K et L

Les deux premiers passages clés sont des problèmes de reconnaissance visuelle des différentes unités figurales possibles. Nous avons pu mettre en évidence les facteurs facilitateurs et inhibiteurs de cette reconnaissance (Duval 1995, p. 150). Le troisième passage clé est bien connu de tous les enseignants. Il est lié à la prégnance cognitive de formes reconnues au premier coup d'œil. Elle empêche de sortir du contour fermé de la Figure, pour tracer la droite sous-jacente à l'un des côtés du contour fermé.

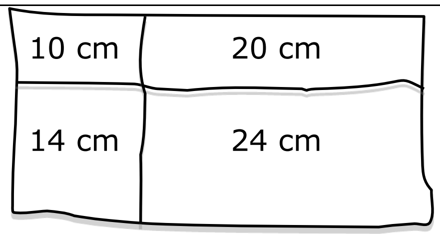
§

§§

[2] L'énoncé définitif a été légèrement modifié.

UN MÊME BORD pour deux unités figurales 2D JUXTAPOSÉES : combien d'unités figurales 2D dans la configuration superposée 2D ?

Le problème du «Périmètre du rectangle de Charly » est un problème de ce type. Nous avons, non pas un rectangle partagé en deux rectangles, mais quatre rectangles juxtaposés formant un grand rectangle superposé.

	Charly a *partagé un rectangle en 4 rectangles.* Il a fait un dessin très approximatif, à main levée, de son partage. Sur le dessin, il a indiqué *les périmètres des 4 rectangles* qu'il a obtenus. Il dit à Charlotte : « *À toi de trouver maintenant le périmètre du grand rectangle que j'ai partagé ».* Trouvez la réponse et expliquez comment vous l'avez trouvée.[3]

La difficulté du problème ne vient pas de la notion de périmètre

(**L** + ***l*** + **L**+ ***l*** = *le Périmètre de…*)

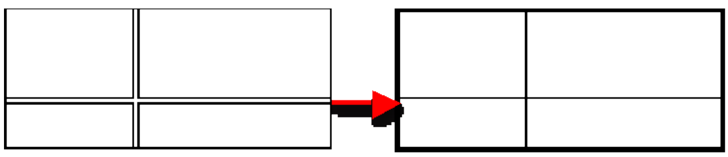
mais de deux obstacles liés aux lois **L.1, L.2** et **L.3** du fonctionnement sémio-cognitif sous-jacent aux différentes manières de voir les Figures en géométrie.

Le premier obstacle tient aux lois **L.3** et **L.1**.

- D'une part on ne peut reporter sur une configuration géométrique **2D** que les longueurs des unités figurales **1D** qui sont tracées ou dessinées. La coordination entre les nombres (ou les termes de propriétés) et la figure *se fait au niveau des unités figurales **1D*** et non pas à celui des *unités figurales* **2D** reconnues.
- D'autre part il y a ***une prégnance perceptive*** des quatre petits rectangles (unité figurales **2D**) juxtaposés en un rectangle sur lesquelles il se superpose. Le fait de mettre les données numériques de périmètres à l'intérieur de chaque petit rectangle, comme s'il s'agissait des aires vient renfoncer la prégnance perceptive.

Cela conduit à supprimer perceptivement le fait que pour calculer les périmètres de chaque petit rectangle *il a fallu prendre en compte 32 côtés* (unités figurales **1D**) et que pour calculer le périmètre du grand rectangle (**2D**) partagé en quatre petits rectangles, (**2D**) *il n'y a plus que 16 côtés* (**1D**) à prendre en compte. Autrement dit, quand on additionne les quatre périmètres des petits rectangles, *il y a 8 cotés (**1D**) qui sont comptés deux fois*.

Périmètre *du grand rectangle superposé* **=** (4 ***L*** + ***l*** + ***L*** + ***l***) **/2** = 68/2 = 34



Pour le « VOIR » rapidement et avant tout raisonnement, *il faut avoir pris conscience de* **L.2** *et que cela entraîne un réflexe dans la manière de regarder les figures dans un problème.*

Ce qui est donné à voir sur la figure dessinée, est une configuration de quatre petits rectangles juxtaposés. Mais on peut voir aussi *deux bandes verticales* ***par juxtaposition*** de deux petits rectangles et également de *deux bandes horizontales***.** Et ***par superposition*** *de ces bandes verticales et horizontales sur le grand rectangle, on peut voir les deux unités **1D*** du parage du grand rectangle*,*

Ces deux obstacles concernant la manière mathématique de « voir » les figures révèlent le premier seuil à faire faire franchir aux élèves dans l'apprentissage de la géométrie élémentaire.
Le problème des trois photos carrées collées sur une page est le même problème que celui du « périmètre du rectangle de Charly ». Il demande de partir du périmètre d'un carré pour trouver le périmètres de trois carrés *juxtaposés en un grand rectangle*.

[3] L'énoncé définitif a été légèrement modifié.

	Roberto a collé trois photos de forme carrée sur une page de son album La grande montre quelqu'un faisant du ski de fond avec ses deux bâtons. Et les deux autres, son chat et son chien Les trois photos recouvrent intégralement la page de l'album. Le contour de la grande photo mesure 48 centimètres Combien mesure le contour de la page sur laquelle les trois photos sont collées ? Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

En réalité, la « Figure » proposée ici est composite. C'est une figure géométrique construite instrumentalement, que nous avons surlignée en rouge. Et à l'intérieur on a mis trois images schématises ou trois icônes

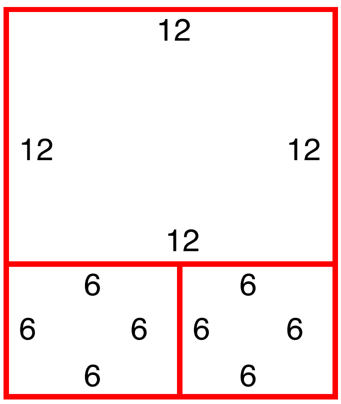
Ce problème est une variante beaucoup plus simple du problème précédent, pour trois raisons, dont deux concernent **L.2** et **L.3**

- **L.2** *Aucune superposition dans la manière de « voir »* les trois unités figurales **2D** n'est nécessaire, comme cela l'était pour voir les quatre rectangles juxtaposés (**L.2)**
- *La formule à utiliser ne demande qu'un seul pas de calcul, puisque **L** = **l** et ne demande qu'une seule opération*

Périmètre *du grand carré* = 4 ***L/4*** = **48/ 4** = **12**

- **L.3** les valeurs numériques peuvent être reportées sur les côtés des carrés (unités figurales **1D**). Et alors un autre pas de calcul peut être effectué, comme le montre la construction qui encadre les trois icônes.

Périmètre *de chaque petit carré* = 4 (**12/ 2**)



Les deux obstacles sémio-cognitifs que présente cette variante du problème « périmètre du rectangle de Charly » sont :

- l'inversion de l'utilisation courante de la formule du calcul d'un périmètre

Sens direct : procédure additive	**L** + ***l*** + **L** + ***l*** → le périmètre d'un …
Sens inverse : procédure multiplicative	nombre donné → 68 ou 48 / **2(L** + ***l*** + **L** + ***l*** **)**

Les difficultés liées à l'inversion du sens d'utilisation de la formule ont été mises en évidence par la célèbre question sur la longueur d'un pas, de PISA 2009 (Duval et Pluvinage, 2016, p. 120).

- Le caractère composite de la Figure. Elle est la superposition de trois images de silhouette familières sur une Figure géométrique instrumentalement construite. L'énoncé décrit la disposition des trois images, alors que *la conversion des données verbales de l'énoncé en une expression numérique* permettant le calcul à effectuer se fait à partir de la *Figure géométrique montrant le partage d'un rectangle en trois carrés juxtaposés.*

Le problème des trois photos collées sur un album et le problème du « périmètre du rectangle de Charly » ne sont que des variantes d'un même problème. Les seules variations importantes dans les problèmes qui portent sur l'utilisation d'une formule sont celles qui concernent les lettres que l'on va instancier comme « informations données » et celle que l'on va demander de trouver à partir des informations données.
Dans le problème des trois photos et dans celui du « rectangle de Charly », ce sont les mêmes lettres de la formule littérale du calcul d'un périmètre qui sont instanciées comme données.

§

§§

L'utilisation de maquettes (3D/3D) pour comprendre comment *les figures visualisent des objets et des propriétés géométriques* (nD/2D) ?

Cette question m'a été posée par le groupe de travail (Géométrie dans l'espace[4]). Elle porte sur l'utilisation des objets matériels conçus pour *être manipulés à loisir,* et qui doivent permettre d'explorer et comprendre comment les Figures visualisent des propriétés et des objets géométriques. Pour pouvoir distinguer ce que l'on fait et ce que l'on peut comprendre avec tous ces objets matériels et la manière dont les figures visualisent des objets et des propriétés mathématiques, nous devons utiliser une notation fractionnaire. Le dénominateur indique le nombre de dimensions des objets matériels utilisés : **3D** pour une maquette ou tout autre objet (Rubik's Cube ou des briques Lego, par exemple), **2D** pour un transparent que l'on peut retourner, etc. On ne confondra donc pas **3D/ 3D,** avec **3D/2D** (Géométrie dans l'espace) ou avec **2D/2D** (Géométrie plane).

Il y a un saut sémio-cognitif considérable à franchir pour passer des objets matériels utilisés pour explorer et observer au Figures qui visualisent en perspective parallèle ou à celles qui visualisent en perspective centrale (un ou plusieurs points de fuite). Pour franchir ce saut, *il faut prendre en compte la verbalisation spontanée et implicite qui scande les gestes successifs (le « langage intérieur ») que l'on fait*. Elle porte essentiellement sur les résultats obtenus à chaque essai. Mais pour que toutes les manipulations et observations ainsi faites se transfèrent sur les figures **2D/2D** ou **3D/2D** qui visualisent les propriétés géométriques, il faut revenir sur cette verbalisation privée en associant le résultat au geste qui l'a produite. Le saut de **3D/3D** ou de **2D/3D** à **2D/2D** ou **3D/2D** est **une déconstruction dimensionnelle**.

Par exemple, dans le cas de la symétrie axiale, on peut utiliser une feuille de papier et un transparent, sur lesquels on dessine une forme ou une figure. *En retournant le transparent* et le superposant sur la feuille de papier, si les deux contours coïncident, la figure est symétrique. Or ce geste se fait dans l'espace. Mais il n'est presque jamais remarqué des élèves, et cette manipulation n'est d'aucune aide pour les élèves. Un travail spécifique de verbalisation en parallèle avec les manipulations s'avère donc nécessaire (Duval, 2014, p. 238).

§

§§

La résolution de problèmes et les deux faces de l'activité mathématique

La résolution de problèmes en géométrie élémentaire dépend de *la manière de « voir » les figures qui relève de la face cachée* de l'activité mathématique et non pas de la *face exposée qui correspond à la manière mathématique de travailler.* ***La manière perceptive universelle, et spontanément iconique de « voir»*** toutes les représentations bidimensionnelles demeure un obstacle infranchissable, tant que l'on n'a pas pris conscience des lois du fonctionnement sémio-cognitif sous-jacentes à l'activité géométrique.

Il faut apprendre à *déconstruire* toutes les formes **2D** ou **3D** perceptivement reconnues au premier coup d'œil, et non pas à construire des figures. Il faut apprendre à *nommer des relations* entre deux unités figurales **1D**, ou entre une unité figurale **1D** et une unité figurale **0D**, et non pas associer des mots à des unités figurales **2D**, comme on le fait en botanique.

La manière de « voir » relevant de la face cachée de l'activité géométrique est totalement indépendante des hypothèses données dans l'énoncé du problème ou du codage de la figure construite *instrumentalement.* Cette manière de voir ne requiert aucune paire de lunettes conceptuelles. On peut en effet changer les hypothèses

[4] Ce groupe de travail, comme cinq autres groupes thématiques, ont travaillé lors de la 23e rencontre internationale de l'ARMT à Alghero en 2019.

données, et donc la question, pour la même Figure construite. Et réciproquement, pour un même énoncé, on peut construire des figures différentes. Les allers et retours entre énoncé et figure changent selon les choix faits pour la formulation de l'énoncé et pour le choix de la figure donnée.

L'apprentissage de la manière de « voir » relevant de la face cachée *requiert évidemment une approche didactique et pédagogique qui se situe aux antipodes de celle qui s'est développée à partir de la face exposée.*

Tout d'abord, c'est un apprentissage qui ne peut être que strictement individuel. D'une part il porte que sur ce qu'on reconnaît au premier coup d'œil, en moins d'une seconde. Et, d'autre part son objectif est que chacun puisse *reconnaître de lui-même en moins de quelques dizaines de secondes*, toutes les unités figurales à prendre en compte pour résoudre le problème posé. Autrement dit le temps de reconnaissance est un critère de réussite aussi important que la justesse mathématique de la réponse.

Ensuite, il ne se prêtre à aucune évaluation, ni à aucune analyse de progression dans l'apprentissage. Car son objectif est *une prise de conscience des lois du fonctionnement sémio-cognitif sous-jacentes aux trois manières de « voir ».* Et, là, c'est l'élève lui-même qui le vit comme une découverte et qui comprend comment on fait pour résoudre des problèmes en géométrie. La seule chose que les enseignants puissent vérifier porte sur le fait de savoir si les élèves ont pris conscience, ou n'ont pas encore pris conscience de ces trois manières de « voir ».

Enfin, il y a la redoutable question de l'interprétation des productions des élèves dans le cadre de la résolution de problème. Il faut rappeler le principe fondamental de l'interprétation. *On ne peut interpréter* les productions écrites dans une résolution de problème *que si l'on peut les comparer* avec les productions sur un autre problème, relevant du même champ mathématique de problèmes. L'apport des résultats de cette comparaison dépend des variations contrôlables mises en œuvre dans l'élaboration des deux problèmes.

§

§§

Références

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures : kinds of representation and specific processing. Dans R. Suttherland, J. Mason (dir.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Springer: Berlin.

Duval, R. Godin M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand*, *76*, 7-27.

Duval, R. (2014). Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire (oral) et rédiger des instructions. Histoire d'une séquence d'activités. Dans C. F. Brandt. et M.T .Moretti, (ORGS*), As contribuições da representações semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática*, 2014. pp. 227-251 (Texte français). Ijuí: Editora UNJUÍ.

Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique : «voir» en géométrie. Dans Lima, J. (Eds) *Du mot au concept. Figure*, 147-182. Grenoble : Presses Universitaires.

Duval R., Pluvinage F., 2016. Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. Annales de Didactique et de sciences cognitives, 21, p. 117-152.

Jaquet, F. (2018). Aires de polygones sur quadrillage/Aree di poligoni su una quadrettatura, La Gazette de Transalpie, n. 9. 101-124

Jamm, F. (1981). A propos de la notion d'aire. *Rapports pour le D.E.A. de Didactique des Mathématiques,* IREM (pp. 18-80). Université de Strasbourg.

IL PRIMO PASSO NELL'APPRENDIMENTO DELLA GEOMETRIA:

"VEDERE" LE "FIGURE"

Raymond Duval

Soffermiamoci dapprima sulle due parole tra virgolette del titolo. Sono familiari e fuori da ogni discussione.

Il termine FIGURA è ben noto a tutti gli insegnanti di Matematica. Esso non indica il disegno tracciato su un supporto di carta o che appare sullo schermo, bensì le proprietà geometriche che ci interessano e che il disegno rappresenta, cioè il disegno codificato. Tale opposizione è sviluppata con i programmi di costruzione di figure, e in particolare con Cabri géomètre (Laborde et Capponi, 1993) e intende sottolineare la maniera matematica di vedere e di utilizzare le figure "geometriche", cioè le figure costruite con degli strumenti, le primitive dello strumento utilizzato nel produrre la traccia di una proprietà geometrica. *Vedere, significa guardare una figura costruita con strumenti, con le lenti delle ipotesi date.*

Il verbo VEDERE designa la modalità percettiva che, cognitivamente, è la più ricca e la più completa. Per ciò che riguarda le rappresentazioni visive bidimensionali (schizzi, bozze, schemi, mappe, grafici, immagini, foto, etc.) *vedere significa riconoscere al primo colpo d'occhio l'oggetto che una rappresentazione bidimensionale mostra.* Questo riconoscimento immediato discende dal fatto secondo cui il contorno della forma riconosciuta assomiglia o riproduce quello dell'oggetto materiale che un disegno, un'immagine o una foto, mostrano. E il termine impiegato per designare la forma tracciata è il nome dell'oggetto disegnato più o meno schematicamente. In altre parole, non c'è bisogno di mettere degli occhiali concettuali per riconoscere ciò che uno schizzo, uno schema, una mappa, o un'immagine, mostrano. Questo maniera di vedere è fondamentalmente iconica. È la maniera spontanea, universale di guardare e di utilizzare le rappresentazioni bidimensionali in tutti gli ambiti della conoscenza.

La maniera matematica di vedere le figure costruite strumentalmente, anche le più elementari, è agli antipodi della maniera spontanea e iconica di vedere le rappresentazioni bidimensionali. Per superare lo scarto considerevole che le separa, non è sufficiente mettere degli occhiali concettuali, in quanto qui, tali occhiali richiedono l'acquisizione delle proprietà geometriche di base oltre alla coordinazione tra i termini geometrici e ciò che la figura consente di vedere. Gli allievi della primaria e della secondaria di primo grado, come potrebbero sospettare, l'esistenza di questo scarto e fare autonomamente i cambiamenti di sguardo necessario per capire la geometria e poter risolvere problemi (Duval et Godin 2007, p.12, Fig. 4 et p.13, Fig.5)?

§
§§

L'analisi semio-cognitiva del funzionamento cognitivo soggiacente a qualunque attività matematica mostra che *la maniera matematica di "vedere" le "figure" è* DOPPIAMENTE CONTRO-PERCETTIVA. Essa esige di :

(1) RI–CONOSCERE al primo colpo d'occhio in una "figura" tutte le forme possibili, cioè tutti i contorni chiusi che possibili guardando "la figura", come se tutte le forme fossero giustapposte, poi come se alcune si sovrapponessero. (E questo può essere un bell'esercizio di ginnastica visiva!)

(2) DE–COSTRUIRE DIMENSIONALEMENTE tutti i contorni chiusi che si impongono percettivamente al primo sguardo in tracce unidimensionali (rette, segmenti di rette, archi) e in punti di intersezione di tracce unidimensionali. Per esempio, le rette e i segmenti di retta sono tracce unidimensionali (così come una curva o un arco di curva). I vertici di un poligono sono punti d'intersezione sulla rete di rette soggiacenti ai lati del poligono. Per descrivere questa decostruzione dimensionale parleremo di UNITÁ FIGURALI **2D** per i contorni chiusi, di UNITÁ FIGURALI **1D**, per i segmenti e le rette, e di UNITÁ FIGURALI **0D**, per tutti i punti di intersezione. In altre parole, ciò che chiamiamo "figura" è in realtà una CONFIGURAZIONE **2D** DI UNITÁ FIGURALI **1D** e **0D**. Per esempio, un quadrato può essere visto come un'unità figurale **1D** o come una CONFIGURAZIONE **2D** di unità figurali **1D.**

Questa operazione di decostruzione dimensionale delle forme percettivamente riconosciute è cruciale nell'apprendimento della geometria elementare in quanto mostra la coordinazione tra il vocabolario geometrico e tutto ciò che una configurazione **2D** mostra allo sguardo è senza occhiali concettuali.

Ci sono dunque tre maniere di "vedere" una figura in geometria, e non solo due[1].

— Quella che corrisponde alla ***faccia esposta del lavoro matematico***. Che consiste nell'utilizzazione di tutti i risultati acquisiti in quanto "teoremi", per dimostrare congetture e risolvere problemi matematici. I concetti

[1] Per distinguere queste tre maniere di vedere utilizzeremo un codice in colore: rosso per la faccia esposta nella maniera matematica di vedere, blu per la faccia non esposta (nascosta) nella maniera matematica di vedere, e **nero** per la maniera percettiva universale di vedere.

matematici sintetizzano queste conoscenze sotto forma di proprietà, formule, algoritmi di calcolo che sono utilizzabili anche per la risoluzione dei problemi di matematica.

— Quella che corrisponde alla ***faccia nascosta di una qualunque attività matematica*** che è indipendente dai concetti utilizzati poiché consiste nella maniera di vedere, di ragionare ed esplorare che si attua esclusivamente nel trasformare rappresentazioni semiotiche in altre rappresentazioni semiotiche, sia cambiando di registro di rappresentazione (dalla lingua alle figure o alle scritture simboliche), sia restando nello stesso registro (calcolo, utilizzazione euristica delle figure).

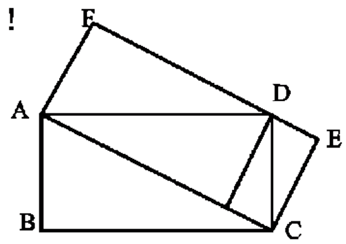
— Quella che corrisponde alla ***maniera percettiva universale e spontaneamente iconica*** di guardare tutte le rappresentazioni visive bidimensionali, comprese le figure geometriche e i grafici cartesiani.

In altre parole, non è partendo dalla faccia esposta della matematica e appoggiandosi sulla maniera spontaneamente iconica e universale di vedere tutte le rappresentazioni visive **2D** che l'insegnamento della geometria può far superare lo scarto considerevole che le separa. *Bisogna sviluppare la maniera di vedere della faccia nascosta di qualunque attività geometrica* perché i giovani allievi possano capire la geometria e utilizzare le conoscenze geometriche per risolvere i problemi.

§
§§

Quando si consultano le inchieste e le sperimentazioni che sono state condotte a partire dagli anni '70 e che riguardano la comprensione della geometria insegnata a livello di Primaria e Secondaria inferiore, i risultati conducono alla stessa constatazione. Gli allievi non entrano nella maniera matematica di vedere le "figure". Sono la percezione e le misure fatte concretamente che determinano veramente ciò che le "figure" rappresentano. Si fermano alla maniera universale di vedere le rappresentazioni visive **2D**. Una gran parte degli allievi o non sa come utilizzare le conoscenze relative alle proprietà geometriche di base che sono state insegnate loro, oppure le confondono. Questa situazione non è cambiata da almeno una quarantina di anni, malgrado tutte le Riforme e le innovazioni didattiche.

Qui di seguito un problema dato nel mese di giugno 1980 ad allievi di classi di Strasburgo corrispondenti alle nostre categorie 6, 7 e 8 Strasbourg (Jamm, 1981).



È dato un rettangolo ABCD.

L'area del rettangolo FECA è
Maggiore, uguale o minore
dell'area del rettangolo ABCD?

Spiegate la vostra risposta.

Questo problema è stato proposto a due classi per livello e gli allievi hanno lavorato individualmente.
Le risposte sono dei seguenti tipi:

	categoria 6	categoria 7	categoria 8
Una diagonale divide un rettangolo in due triangoli uguali	**5%**	**0**	**6%**
Misura dei lati, *poi blocco*	**10%**	**30%**	**45%**
Invarianza per compensazione (Piaget)	***10%***	***10%***	***2%***
Calcolo a partire dalle misure dei lati sul disegno **(2 ,5) × (5cm) (2,3) × (5,5cm)**	**10%**	**14%**	**10%**

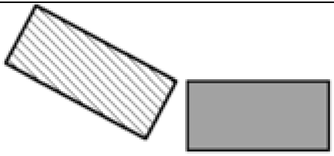
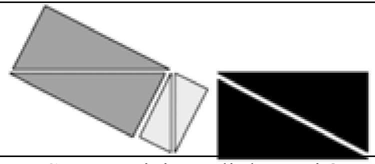
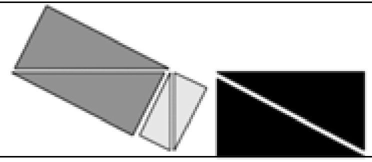
Analizziamo ora questo problema dal punto di vista della ***faccia nascosta dell'attività geometrica.*** Le due domande che bisogna porsi sono le seguenti:

— Quali **unità figurali 2D** si riconoscono *al primo colpo d'occhio*?

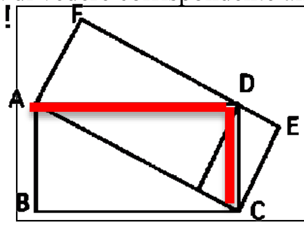
Questa domanda è particolarmente importante perché le unità figurali 2D che vengono riconosciute al primo colpo d'occhio, escludono il riconoscimento di tutte le altre unità figurali possibili. Per poter utilizzare euristicamente una **configurazione 2D,** bisogna poter *riconoscere molto rapidamente* in meno di qualche decina di secondi) **tutte le unità figurali 2D** possibili.

— tra tutte le unità figurali 2D possibili, quali permettono di vedere **la proprietà geometrica da applicare?**

Si osservi che queste due domande costituiscono l'utilizzazione euristica **della configurazione 2D,** senza dover mettere occhiali concettuali.

		
Due figurali 2D **SOVRAPPOSTE** FECA et ABCD	Scomposizione di due unità figurali sovrapposte in unità figurali 2D **GIUSTAPPOSTE**	Equivalenza delle aree delle due unità figurali sovrapposte

Qui, il lavoro puramente visivo consiste nell'utilizzare le unità figurali **2D** come pezzi di un puzzle.
La maniera di vedere corrispondente alla ***faccia esposta della matematica*** è totalmente diversa:

	Due unità figurali **1D** appartenenti ciascuna a due unità figurali **2D** **DIFFERENTI**

In questo caso il lavoro puramente visivo è radicalmente differente. Innanzitutto, non c'è da riconoscere le unità visive **2D** pertinenti per il problema *in quanto sono designate sulla la configurazione* 2D *da sei lettere. Bisogna però identificare le unità figurali* **1D** *corrispondenti* ***alle due diagonali.*** Questa identificazione visiva è immediata per i matematici e per gli insegnanti di matematica. Va però contro il riconoscimento percettivo che impone dei rettangoli al primo colpo d'occhio e che è rinforzato dalle designazioni verbali dell'enunciato. Il termine "rettangolo" è ripetuto tre volte!

La decostruzione dimensionale dell'unità figurale **2D** en unità **1D** dipende dalla faccia esposta della matematica e porta a un circolo didattico vizioso nel caso dell'insegnamento della geometria elementare alla scuola Primaria e Secondaria di primo grado. Come è stato spiegato più sopra, tale decostruzione dipende da una percezione discorsiva delle Configurazioni di unità figurale **2D** e presuppone dunque l'acquisizione dei "concetti" geometrici di base che vogliamo fare scoprire o acquisire.

§
§§

Questo esempio illustra le cinque leggi del funzionamento semio-cognitivo soggiacente all'attività geometrica, ma anche a una qualunque risoluzione di problemi in geometria elementare.

L.1 C'è una pregnanza percettiva delle unità figurali **2D** riconosciute immediatamente *che occulta il riconoscimento* di tutte le altre unità figurali **2D** possibili.

L.2 Una qualunque unità figurale **2D** può essere scomposta in unità figurali **2D** e apparire così come una loro configurazione. In tal modo un rettangolo può essere riconfigurato in due o in quattro triangoli, o ancora in due o quattro rettangoli, etc.

L.3 Le unità figurali di una configurazione **2D** possono essere ri-configurate in modo diverso per giustapposizione e formare una configurazione differente da quella di partenza. Così, secondo il celebre esempio della *Gestalttheorie*, un rettangolo può essere riconfigurato in un parallelogramma.

Questo lavoro visivo di decomposizione di unità figurali **2D** in altre unità figurali **2D** e della loro RIconfiguazione in una nuova configurazione **2D** ignora le grandezze e esclude le misure, in quanto *una qualunque misura può essere fatta solo su unità figurali* **1D**, *e non può essere riportata sulle unità figurali* **1D** *di una configurazione* **2D.** Detto in altro modo, c'è là *una ricerca da fare senza calcolare.*

L.4 *La decostruzione dimensionale delle unità figurali **2D** riguarda le "figure geometriche" ed è contro-percettiva e contro-iconica.*

Questo significa che le figure geometriche non sono la modellizzazione di situazioni fisiche o di situazioni concrete. Non c'è un nastro trasportatore che permetta di andare direttamente da una Figura geometrica a una situazione reale e viceversa. Bisogna elaborare una schematizzazione intermedia della situazione reale. Ed è la somiglianza della Figura geometrica con la schematizzazione reale che permetterà di riconoscere le proprietà geometriche o il teorema da applicare.

L.5 La coordinazione tra il linguaggio e la visualizzazione *si fa con le unità figurali* **1D** e non *con le unità* **2D.** Questa coordinazione è cognitivamente complessa perché il linguaggio, in geometria elementare, ricopre al contempo i termini delle proprietà geometriche di base e le diverse operazioni discorsive possibili di designazione della stessa unità figurale **1D** o **2D** (Duval, 2015, p. 164, Fig.8).

Una qualunque organizzazione dell'insegnamento della geometria, di sequenze di attività e elaborazione di problemi riguardanti la maniera di vedere che corrispondono alla ***faccia esposta della matematica*** è un circolo vizioso didattico e conduce la gran parte degli allievi a un blocco.

§
§§

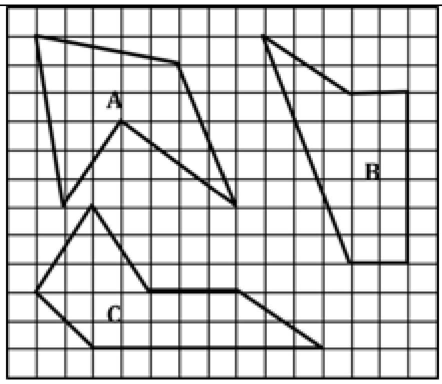
Analizzeremo ora quattro problemi del RMT scelti da François Jaquet per avviare degli scambi. L'analisi sarà evidentemente fatta in rapporto alla maniera di VEDERE corrispondente ***alla faccia nascosta dell'attività geometrica.*** Allo scopo li raggruppo nel modo seguente:

— Quelli che hanno in comune l'utilizzazione di una *quadrettatura***:** il confronto delle aree di poligoni (26° RMT) e il ritaglio di un ettagono in un numero minimo di triangoli (28° RMT).

— Quelli che hanno in comune *un medesimo bordo per due unità figurali **2D** affiancati* (27° RMT).

§
§§

LA QUADRETTATURA: **aiuto** o **ostacolo** per risolvere problemi di geometria?



Confronto di figure

Patrizia e Brunella osservano questi tre poligoni e si chiedono se hanno tutti la stessa area.

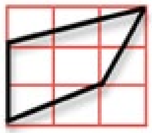
Dite se *le aree di questi tre poligoni sono le stesse o se sono diverse.*

Mostrate come siete arrivati alla vostra risposta.

La risposta alla domanda cambia del tutto a seconda della maniera nella quale si analizza la quadrettatura.

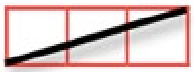
Se si considera che i tre poligoni sono le FIGURE e che la quadrettatura è lo SFONDO sul quale si EVIDENZIANO PERCETTIVAMENTE, allora *la quadrettatura è un aiuto* poiché permette di suddividere i poligoni in quadretti, cioè in unità figurali **2D** che è possibile contare. In questo problema la difficoltà è data dal fatto che ci sono quadretti tagliati da lati dei poligoni e che non si hanno sempre dei mezzi quadretti.

Se, al contrario, si considera che la quadrettatura non costituisca uno sfondo o un supporto esterno alle figure, ma che sia *una parte integrante delle tre configurazioni poligonali*, allora l'analisi è totalmente differente. *C'è una configurazione 2D comune ai tre poligoni,* e ad altre possibili, qualunque sia il numero di lati. Facciamo uno zoom su questa configurazione.

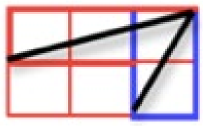


Tutto il problema è in questo zoom.

Un gioco di sguardi su tutte le unità figurali **2D** possibili di questa configurazione permette di risolvere tutti i problemi di questo tipo. Bisogna

(1**)** VEDERE ogni lato del poligono come la diagonale (unità **1D**) di un rettangolo **AFFIANCANDO** almeno due quadrati unità figurali **2D** della quadrettatura	 

In altri termini, questo cambiamento di sguardo mobilizza le leggi **L.2** e **L.3** del funzionamento semio-cognitivo soggiacente alle attività geometriche.

(2) La **SOVRAPPOSIZIONE** parziale di due **GIUSTAPPOSIZIONI** differenti rispettivamente de tre e due quadrati della quadrettatura.	

Torniamo ora alla **nostra** domanda: La quadrettatura è un aiuto o un ostacolo alla risoluzione di problemi di geometria?

In realtà, ciò che è cruciale nell'introduzione della geometria elementare a livello di scuola Primaria e di Scuola secondaria di primo grado, è *l'aver preso coscienza della* maniera di vedere ***la faccia nascosta dell'attività geometrica***, in quanto il riconoscimento visivo delle unità figurali **2D** e **1D** atte a risolvere un problema *non dipende dalle conoscenze pregresse, ma da tale presa di coscienza*. Senza quest'ultima gli allievi non saranno mai capaci di sapere quando e come utilizzare delle proprietà geometriche e le formule corrispondenti, nel momento in cui non saranno più nell'ambito didattico specifico di esercizi di apprendimento.

L'analisi a posteriori di 350 elaborati di questo problema, dato nel 2017 in classi di categoria 6, 7 e 8 di 18 sezioni, ha evidenziato due procedure di risoluzione:

- per conteggio dei quadretti della quadrettatura (in particolare in categoria 6) dopo compensazioni e ricomposizione di parti di quadretti,

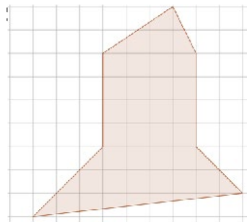
- per scomposizione di poligoni in figure note: rettangoli e triangoli e calcolo dell'area. Nel caso in cui gli allievi hanno voluto calcolare l'area dei triangoli, i risultati sono molto insufficienti (da 15 al 30% a seconda delle categorie) in ragione della difficoltà a determinare correttamente l'altezza e la base per applicare la formula $A = (b \times h)/2$.

Il confronto fra questi risultati e quelli registrati circa quarant'anni fa per il medesimo problema, dal punto di vista matematico, mostra *che non c'è un progresso per quel che riguarda la risoluzione dei problemi di geometria, laddove ci si accontenti solo di chiedere direttamente di fare dei calcoli.*

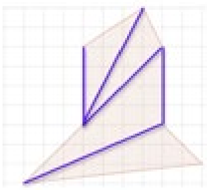
Al pari del problema del confronto delle aree di tre poligoni, anche il problema intitolato "Triangoli in un poligono", utilizza il supporto di una quadrettatura. I vertici del poligono coincidono con i punti di intersezione della quadrettatura*. È d'altronde questa la ragione per la quale i vertici non sono, da un punto di vista semio-cognitivo delle unità figurali* **0D***, ma* **2D.** Questi due problemi sono però totalmente differenti in merito a due punti.

— **L.2** Questo problema richiede esplicitamente la suddivisione di una *unità figurali* **2D** in altre *unità figurali* **2D**. In altre parole, richiede che si traccino le rette (*unità figurali* **1D)** che congiungono due vertici non consecutivi e che si mantengano solo i segmenti di queste rette che con uno o due lati del triangolo formino un numero minimo di triangoli.

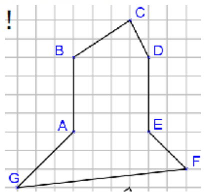
— **L.4** Il problema chiede solo di identificare tutti i ritagli possibili dell'ettagono in un numero minimo di triangoli Ve ne sono 12. La figura più sotto è data con dodici esemplari al fine di disegnare le dodici DECOMPOSIZIONI MEREOLOGICHE possibili di un ettagono in triangoli. *Non c'è da fare alcun calcolo che implichi una formula per l'area o per il perimetro che si debba utilizzare*. I disegni richiesti sono L'INVERSO DEI COMPITI DELLA COSTRUZIONE DI UNA FIGURA se si utilizza uno strumento o un software di costruzione. Tracciare le diverse possibili suddivisioni È UN COMPITO DI DECOSTRUZIONE DIMENSIONALE DELLE FORME **2D** riconosciute a colpo d'occhio come tali.

	Thitanga vuole *suddividere questa figura in un numero minimo di triangoli.* *Quanti modi* ha Thitanga *di suddividere questa figura?* Disegnateli *tutti.*[2]

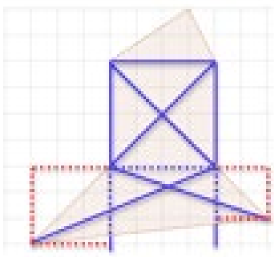
Ecco tre passaggi chiave in questo lavoro puramente visivo di decostruzione dimensionale:



1. RICONOSCERE VISIVAMENTE *una maniera di suddividere in triangoli* congiungendo due vertici non consecutivi

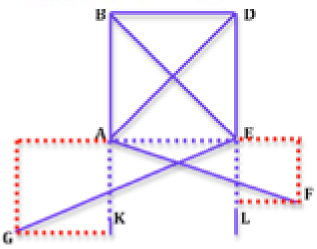


(Indicazione dei vertici
C, D, E, F, G, A, B)
per poter designare le unità



2. RICONOSCERE VISIVAMENTE *i due allineamenti in diagonale DAG et BEF* (***i segmenti con puntini rossi*** tracciano i due quadrati dei quali AG e EF sono le diagonali)

3. USCIRE DAL CONTORNO CHIUSO *dell'ettagono per fare apparire due nuovi vertici K e L*



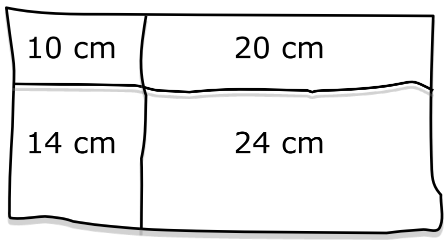
I primi due passaggi chiave sono problemi di riconoscimento visivo delle differenti unità figurali possibili. Abbiamo potuto mettere in evidenza i fattori facilitatori e inibitori di questo riconoscimento (Duval 1995, p. 150). Il terzo passaggio chiave è ben noto a tutti gli insegnanti. È legato alla pregnanza cognitiva di forme riconosciute al primo colpo d'occhio che impedisce di uscire dal contorno chiuso della Figura, per tracciare la retta soggiacente a uno dei lati del contorno chiuso.

§
§§

[2] L'enunciato definitivo è stato poi leggermente modificato.

UN MEDESIMO BORDO per due unità figurali 2D GIUSTAPPOSTE: quante unità figurali 2D nella configurazione sovrapposta 2D?

Il problema "I cinque rettangoli" è di questo tipo. E qui si ha, non un rettangolo da suddividere in due rettangoli, bensì in quattro rettangoli affiancati che formano un grande rettangolo sovrapposto.



Charly ha *suddiviso un rettangolo in 4 rettangoli.* Ha fatto un disegno della sua suddivisione, a mano libera.

Sul disegno ha indicato *i perimetri dei 4 rettangoli* che ha ottenuto.

Dice poi a Charlotte: "*Adesso tocca a te trovare il perimetro del rettangolo grande che ho suddiviso*".

Trovate la risposta e spiegate come avete fatto.[3]

La difficoltà del problema non viene dalla nozione di perimetro

(**L** +***l*** +**L**+ ***l*** = *il Perimetro di …*)

ma da due ostacoli legati alle leggi **L.1, L.2** e **L.3** del funzionamento semio-cognitivo relativo alle diverse maniere di vedere le Figure in geometria.

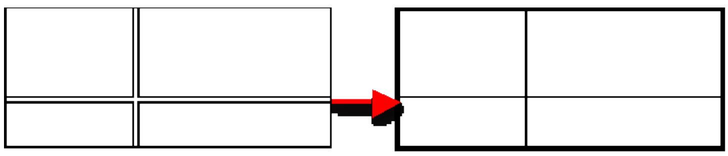
Il primo ostacolo proviene dalle leggi **L.3** e **L.1**.

— Da un lato possiamo riportare su una configurazione geometrica **2D** solo le lunghezze delle unità figurali **1D** che sono tracciate o disegnate. La coordinazione tra i numeri (o i termini di proprietà) e la figura *si attua a livello delle unità figurali **1D*** e non alle *unità figurali* **2D** riconosciute.

— D'altro lato c'è una ***una pregnanza percettiva*** dei quattro rettangoli piccoli (unità figurali **2D**) affiancati in un rettangolo sul quale si sovrappongono. Il fatto di mettere i dati numerici del perimetro all'interno di ciascun rettangolo piccolo, come se fossero delle aree, rinforza la pregnanza percettiva.

Questo porta a sopprimere percettivamente il fatto che per calcolare i perimetri di ciascun rettangolo piccolo *è stato necessario considerare 32 lati* (unità figurali **1D**) e che per calcolare il perimetro del rettangolo grande (**2D**) diviso in quattro rettangoli piccoli (**2D**) *si devono considerare solo più 16 lati* (**1D**). In altre parole, quando si addizionano i quattro perimetri dei rettangoli piccoli, *ci sono 8 lati (**1D**) che vanno contati due volte*.

Perimetro *del rettangolo grande sovrapposto* **=** (4 ***L* +*l* +*L*+ *l*) /2**= 68/2 = 34



!

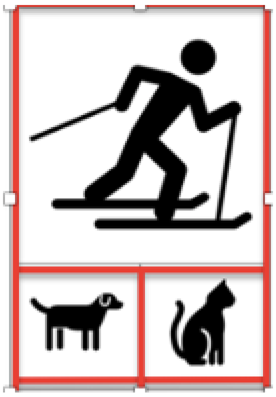
Per "VEDERLO" rapidamente e prima di un qualunque ragionamento, *bisogna aver preso coscienza di* **L.2** *e che ciò incide sulla maniera di guardare le figure in un problema.*

Ciò che è dato vedere sulla figura disegnata è una configurazione di quattro rettangoli piccoli affiancati. Possiamo però anche vedere *due strisce verticali **per giustapposizione*** di due rettangoli piccoli, oltre a *due strisce orizzontali**.*** E ***per sovrapposizione** di questa due strisce verticali e orizzontali sul rettangolo grande, è possibile vedere le due unità **1D*** della suddivisione del rettangolo grande*,*

Questi due ostacoli riguardanti la maniera matematica di "vedere" le figure evidenziano il primo gradino da far superare agli allievi nell'apprendimento della geometria elementare.

Il problema delle tre foto quadrate incollate su una pagina è lo stesso problema del precedente. Richiede di partire dal perimetro di un quadrato per trovare i perimetri di tre quadrati *affiancati in un rettangolo*.

[3] L'enunciato definitivo è stato poi leggermente modificato.

	Roberto ha incollato tre foto di forma quadrata su una pagina del suo album: una grande che lo ritrae mentre fa sci di fondo e due piccole, una del suo gatto e una del suo cane. Le tre foto ricoprono interamente la pagina dell'album. Il contorno della foto grande misura 48 centimetri. Quanto misura il contorno della pagina su cui sono incollate le tre foto? Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

In realtà, la "Figura" proposta qui è composita. È una figura geometrica costruita strumentalmente, che abbiamo sottolineata in rosso e all'interno sono state inserite tre immagini schematizzate o tre icone.

Questo problema è una variante molto più semplice del problema precedente, per tre ragioni, delle quali due riguardano **L.2** e **L.3.**

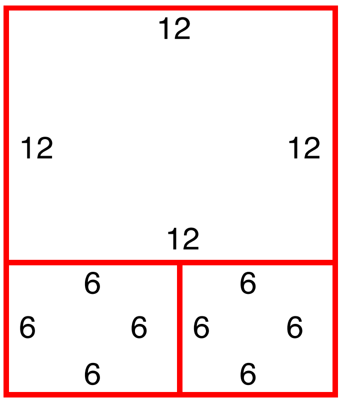
— **L.2** Non è necessaria *alcuna sovrapposizione nella maniera di "vedere"* le tre unità figurali **2D**, mentre lo era per vedere i quattro rettangoli affiancati (**L.2**)

— *La formula da utilizzare richiede un solo calcolo, in quanto* ***L***= ***l***
e richiede una sola operazione

Perimetro del quadrato grande = 4 ***L*/4** = **48/4** = **12**

— **L.3** I valori numerici possono essere riportati sui lati dei quadrati (unità figurali **1D**). E allora può essere effettuato un altro calcolo come mostra la costruzione che incornicia le tre icone.

Perimetro di *ciascun quadrato piccolo* = 4 (**12/ 2**)



I due ostacoli semio-cognitivi di questa variante del problema precedente, sono:
— l'inversione dell'utilizzazione corrente della formula del calcolo di un perimetro

Senso diretto: procedura additiva Senso inverso: procedura moltiplicativa	**L + *l* +L+ *l*** → il perimetro di un… numero dato → 68 o 48 / **2(L + *l* +L+ *l*)**

Le difficoltà legate all'inversione del senso di utilizzazione della formula sono state messe in evidenza dalla celebre questione sulla lunghezza di un passo di PISA 2009 (Duval et Pluvinage, 2016, p. 120).

— Il carattere composito della Figura, che è la sovrapposizione di tre immagini di figurine familiari su una Figura geometrica costruita strumentalmente. L'enunciato descrive la disposizione delle tre immagini, mentre *la conversione dei dati verbali dell'enunciato in un'espressione numerica* che permette il calcolo da effettuare, si fa a partire dalla *Figura geometrica che mostra la suddivisone di un rettangolo in tre quadrati affiancati.*

Il problema delle tre foto incollate sull'album e il problema dei cinque rettangoli sono varianti di un medesimo problema. Le sole variazioni importanti nei problemi che riguardano l'utilizzo di una formula sono quelle che riguardano le lettere che si vogliono caratterizzare come "informazioni date" e quella che domanda di "trovare" a partire dalle informazioni date.

Nel problema delle tre foto e in quello dei cinque rettangoli sono le stesse lettere della formula letterale del calcolo di un perimetro che sono caratterizzate come dati.

§

§§

L'utilizzo di modelli (**3D/3D**) per capire come *le figure visualizzano oggetti e proprietà geometriche* **(nD/2D)?**

Questa domanda mi era stata posta dal gruppo di lavoro Geometria dello spazio[4] e riguarda l'utilizzo di oggetti materiali concepiti per *essere manipolati a piacere* e che devono permettere di esplorare e capire in che modo le Figure "visualizzino" proprietà e oggetti geometrici. Per poter distinguere ciò che facciamo da ciò che possiamo comprendere con tutti questi oggetti materiali e la maniera con la quale le figure visualizzano oggetti e proprietà matematiche, dobbiamo utilizzare una notazione frazionaria. Il denominatore indica il numero di dimensioni degli oggetti materiali utilizzati: **3D** ***p***er un modello o un tutt'altro oggetto (Cubo di Rubik o mattoncini Lego, per esempio), **2D** per un foglio trasparente che si possa girare, ecc. Pertanto non si confonderà **3D/3D,** con **3D/2D** (Geometria nello spazio) o con **2D/2D** (Geometria piana).

C'è un salto semio-cognitivo da compiere per passare dagli oggetti materiali utilizzati per esplorare e osservare alle Figure che visualizzano in prospettiva parallela o a quelle che visualizzano in prospettiva centrale (uno o più punti di fuga). Per compiere questo salto *è necessario prendere in considerazione la verbalizzazione spontanea e implicita che scandisce i gesti successivi (il "linguaggio interiore") che si* fanno e che riguarda i risultati ottenuti ad ogni tentativo. Però, perché tutte le manipolazioni e osservazioni fatte in tal modo si trasferiscano sulle figure **2D/2D** o **3D /2D** che visualizzano le proprietà geometriche, bisogna tornare su questa verbalizzazione privata associando il risultato al gesto che l'ha prodotta. Il salto da **3D/3D** o da **2D/3D** a **2D/2D** o **3D/2D** è **una decostruzione dimensionale**.

Per esempio, nel caso della simmetria assiale, possiamo utilizzare un foglio di carta e un trasparente sui quali disegniamo una forma o una figura. *Girando il* trasparente e sovrapponendolo al foglio di carta, se i due contorni coincidono, la figura è simmetrica. Questo gesto, però, lo si fa nello spazio e non è quasi mai notato dagli allievi e tale manipolazione non è loro di alcun aiuto. Un lavoro specifico di verbalizzazione in parallelo con la manipolazione diventa dunque necessario (Duval, 2014, p. 238).

§

§§

La risoluzione di problemi e le due facce dell'attività matematica

La risoluzione di problemi in geometria elementare dipende *dalla maniera di "vedere" le figure che dipendono dalla faccia nascosta* dell'attività matematica e non dalla *faccia esposta che corrisponde alla maniera matematica di lavorare.* ***La maniera percettiva universale e spontaneamente iconica di "vedere"*** tutte le rappresentazioni bidimensionali rimane un ostacolo invalicabile finché non si prenda coscienza delle leggi del funzionamento semio-cognitivo soggiacente all'attività geometrica.

Bisogna imparare a *decostruire* tutte le forme **2D** o **3D** riconosciute percettivamente al primo colpo d'occhio e non a costruire figure. Bisogna imparare a *dare un nome a delle relazioni* tra due unità figurali **1D**, o tra un'unità figurale **1D** e un'unità figurale **0D**, e non ad associare delle parole a delle unità figurali **2D**, come si fa in botanica.

La maniera di "vedere" relativa alla faccia nascosta dell'attività geometrica è totalmente indipendente dalle ipotesi date nell'enunciato del problema o dalla codifica costruita *strumentalmente.* Questa maniera di vedere non richiede alcun paio di occhiali concettuali. Possiamo, in effetti, cambiare le ipotesi date, e quindi la domanda per la medesima Figura costruita. E reciprocamente, per un medesimo risultato, possiamo costruire Figure differenti. Le andate e i ritorni tra enunciato e figura cambiano secondo le scelte fatte per la formulazione dell'enunciato e per la scelta della figura data.

L'apprendimento della maniera di "vedere" relativa alla faccia nascosta *richiede evidentemente un approccio didattico e pedagogico che si situa agli antipodi di quello che si si è sviluppato a partire dalla faccia esposta.*

Innanzitutto si tratta di un apprendimento che non può essere che individuale. Da una parte riguarda solo ciò che riconosciamo al primo colpo d'occhio, in meno di un secondo e, dall'altra, il suo obiettivo è che ciascuno

---

[4] Tale gruppo di lavoro, così come altri cinque "tematici", hanno lavorato nell'ambito del 23° incontro internazionale dell'ARMT ad Alghero nel 2019.

possa *riconoscere da solo in meno di qualche decina di secondi*, tutte le unità figurali da tener presenti per risolvere il problema posto. In altre parole, il tempo per il riconoscimento è un criterio di riuscita importante quanto la correttezza matematica della risposta.

In secondo luogo, non si presta ad alcuna valutazione, né ad alcuna analisi di progressione nell'apprendimento in quanto il suo obiettivo è *una presa di coscienza delle leggi del funzionamento semio-cognitivo soggiacente alle tre maniere di "vedere"*. E qui è l'allievo stesso che lo vive come una scoperta e che capisce come si fa per risolvere problemi di geometria. La sola cosa che gli insegnanti possono verificare riguarda il fatto di sapere se gli allievi hanno preso coscienza, o non hanno ancora preso coscienza di queste tre maniere di "vedere".

Infine, c'è la difficile questione dell'interpretazione delle produzioni degli allievi nell'ambito della risoluzione di problemi. Bisogna ricordare il principio fondamentale dell'interpretazione. *Si possono interpretare* le produzioni scritte, nell'ambito di una risoluzione di un problema *solo se le si possono confrontare* con le produzioni su un altro problema dello stesso ambito matematico. L'apporto dei risultati di questo confronto dipende da variazioni controllabili messe in opera nell'elaborazione dei due problemi.

§

§§

Bibliografia

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures : kinds of representation and specific processing. Dans R. Suttherland, J. Mason (dir.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Springer: Berlin.

Duval, R. Godin M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand*, *76*, 7-27.

Duval, R. (2014). Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire (oral) et rédiger des instructions. Histoire d'une séquence d'activités. Dans C. F. Brandt. et M.T .Moretti, (ORGS*), As contribuições da representações semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática*, 2014. pp. 227-251 (Texte français). Ijuí: Editora UNJUÍ.

Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique : « voir » en géométrie. Dans Lima, J. (Eds) *Du mot au concept. Figure*, 147-182. Grenoble : Presses Universitaires.

Duval R., Pluvinage F., 2016. Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. Annales de Didactique et de sciences cognitives, 21, p. 117-152.

Jaquet, F. (2018). Aires de polygones sur quadrillage/Aree di poligoni su una quadrettatura, La Gazette de Transalpie, n. 9. 101-124

Jamm, F. (1981). A propos de la notion d'aire. *Rapports pour le D.E.A. de Didactique des Mathématiques,* IREM (pp. 18-80). Université de Strasbourg.

Traduzione di Lucia Grugnetti

CON GLI STUDENTI E GLI INSEGNANTI TRA NUMERI, FORMULE E PROBLEMI

Ferdinando Arzarello

Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Sunto. L'articolo descrive i processi che portano al pensiero algebrico e alle corrispondenti produzioni degli allievi come maturazione di un meta-discorso sull'aritmetica. Evidenzia così le forme di continuità (cognitiva e didattica) cui bisogna mirare in classe per stimolare e supportare il passaggio dall'Aritmetica all'Algebra. Illustra quindi gli strumenti teorici e operativi per l'analisi discorsiva delle produzioni scritte (ma anche orali) degli studenti, esemplificando con riferimento ai lavori dei partecipanti al *Rally Matematico Transalpino*. L'obiettivo è di fornire alle équipe RMT un nuovo strumento di analisi, sia teorica sia operativa.

1. Quando l'algebra mostra la punta del naso

François Jaquet mi ha posto in forma interrogativa la frase che è diventata il titolo di questa sezione in uno scambio di messaggi in cui mettevamo in comune le nostre idee sulle modalità con cui si può intravedere e descrivere il primo affacciarsi del pensiero algebrico nei processi e nei prodotti di giovani allievi di grado 5-7, che risolvono i problemi del *Rally matematico transalpino*.

Rispondere a questa domanda mi pare molto importante per l'équipe di RMT (e per gli insegnanti in genere).

Tre aspetti caratterizzano infatti il lavoro di RMT con i problemi:

- **la preparazione del testo**
- **l'analisi a priori**
- **l'analisi a posteriori**

L'équipe nella preparazione dei problemi effettua dapprima un'analisi a priori relativa alle possibili procedure che gli allievi metteranno in opera, agli ostacoli che incontreranno e alle immagini mentali che si faranno delle consegne. Successivamente passa alla redazione vera e propria dei testi dei problemi dopo una scelta accurata delle variabili didattiche in gioco. Dopo la gara, si ha la fase di correzione nell'ambito della quale le spiegazioni degli allievi (talvolta vere "perle") e il rigore di certe giustificazioni non potranno non sorprendere i correttori. Infine l'équipe passa all'analisi a posteriori, che permette di confermare o invalidare le ipotesi di partenza, di mettere in luce strategie o rappresentazioni non previste, di calcolare la frequenza di certi tipi di procedure, e di 'misurare' in modo il più possibile scientifico le difficoltà incontrate dagli allievi. Per questi motivi il RMT è un'occasione di incontro, di scambi tra la pratica in classe e la riflessione pedagogica e didattica: in sintesi è una splendida occasione per effettuare una forma di ricerca didattica sul campo.

Il mio articolo cercherà in qualche modo di contribuire a questa ricerca, entrando nell'analisi a posteriori; così si arricchirà anche quella a priori e forse si potrà valorizzare ulteriormente l'intero processo di lavoro di RMT.

Parto perciò da un esempio di problema RMT:

<u>Le Prugne</u> (Cat. 5, 6, 7, 8).

> *Carlo ha raccolto 117 prugne. Ne mette alcune in tre piatti portafrutta, uno piccolo, uno medio e uno grande. Il numero di prugne che ha messo nel piatto medio è il doppio del numero di quelle che ha messo nel piatto piccolo. Il numero di prugne che ha messo nel piatto grande è il doppio del numero di quelle che ha messo nel piatto medio. Dopo aver riempito i tre piatti, restano però delle prugne: il loro numero è esattamente la metà del numero di quelle che Carlo ha messo nel piatto grande.*
>
> ***Quante prugne ha messo Carlo in ogni piatto? Spiegate come avete trovato la vostra risposta.***

L'analisi a priori fatta dall'équipe RMT esprime il compito matematico di cui il problema è una trasposizione col seguente enunciato: *Ripartire il numero 117 in quattro numeri proporzionalmente a 1, 2, 4, e 2.*

Essa individua 4 possibili soluzioni:

- relazionale 1 (**doppio/metà**): cercare i numeri, per es. procedendo per tentativi;
- relazionale 2 (**divisibilità**): il numero cercato dei primi tre piatti è divisibile per 7 e minore di 117;
- ricorrere a un **modello con unità** = prugne nel piatto piccolo, con eventuale ricorso a rappresentazioni grafiche;
- **equazione**: $x + 2x + 4x + 2x = 117$.

L'analisi a posteriori, molto accurata, fatta su 240 soluzioni dalla Svizzera Romanda individua tre tipologie principali di soluzioni, alcune delle quali corrispondono a quelle dell'analisi a priori:

- **Algebrica**: equazione + rappresentazioni grafiche;
- **Retorica**: modello dell'unità comune, uso di parole, diagrammi, abbreviazioni per esprimerla;
- **Per tentativi**: scrittura delle possibili quartine di numeri a partire dal numero di quelle nel piatto piccolo.

Come tipico esempio di soluzione algebrica si veda il protocollo nella figura 1a (la figura 1b contiene la traduzione in italiano di quanto scritto dall'allievo).

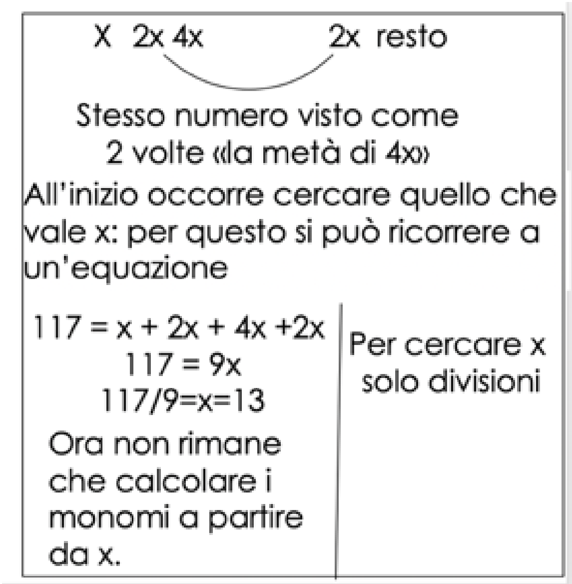
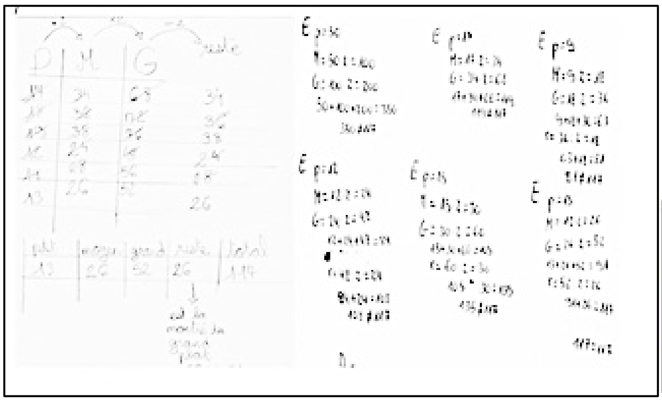


Figura 1a Figura 1b

Un esempio emblematico di tipo retorico è dato dal seguente protocollo.

Sommando tutte le ciotole, (9) quante ne puoi mettere di piccole.
• nel mezzo se ne possono mettere 2 × (volte)
• in quello grande puoi metterne 4 ×
• nel piccolo possiamo metterne 1 ×
• (il resto vale la metà) nel senso che possiamo metterci 2 ×
2 + 4 + 1 + 2 = 9 ciotole piccole in tutto
• Quante prugne ci sono nella ciotola piccola 119: 9 = 13 prugne
• Quante prugne ci sono nelle altre ciotole
piccola = 13 -> × 2 media = 26 -> × 2 grande = 52

Infine la figura 2 contiene due esempi di soluzione per tentativi.



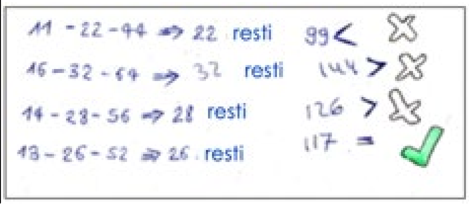


Figura 2a Figura 2b

Nella discussione con François sui protocolli relativi a questo problema sono emerse tre domande relative alle tre tipologie, cui ritenevamo importante rispondere approfondendone gli aspetti epistemologici e didattici. Eccole:

Soluzione algebrica: equazione + rappresentazioni grafiche.

Le tracce grafiche rappresentano uno stadio di rappresentazione della ***variabile*** *non ancora* ***disincarnata*** *(fr.désincarnée; ingl.disembodied)?*

Soluzione retorica: modello dell'unità comune, uso di parole, diagrammi, abbreviazioni per esprimerla.

*In quale momento si può stimare che gli allievi abbiano fatto un passo decisivo verso l'****algebrizzazione****?*

Soluzione per tentativi: a partire dal numero di prugne nel piatto piccolo, scrittura delle possibili quartine di numeri.

C'è l'idea di ***funzione****, inconsciamente o no? Ci sono le premesse per il concetto di* ***variabile****?*

In generale, domande come queste si concentrano su un problema epistemico, didattico e cognitivo cruciale:

i. qual è la natura del pensiero algebrico?
ii. è fondato pensarlo come un processo che si sviluppa nel tempo?
iii. come si configurano le eventuali tappe di questo sviluppo?

I protocolli degli allievi che partecipano al RMT (come altri in letteratura) e le discussioni delle analisi a posteriori possono aiutarci a rispondere a queste domande e rappresentano una banca dati significativa che può da un lato ricorrere alla ricerca didattica per la loro interpretazione, ma anche contribuire a sua volta a fornire risposte alla medesima relativamente a domande di ricerca come i, ii, iii.

Nell'articolo cercherò dapprima di fornire gli elementi teorici ed operativi per rispondere alle tre domande. Successivamente, ritornerò brevemente sugli esempi RMT per commentare alcune possibili risposte, basandomi sulla discussione teorica sviluppata.

2. L'algebra come generalizzazione e come ragionamento

Un primo filone di risposte è sintetizzato in Stephens et al.(2017), che presenta i risultati di molte recenti ricerche in varie parti del mondo sulla natura del pensiero algebrico e che ora sintetizzerò brevemente.

Secondo queste ricerche, il pensiero algebrico è composto da due aspetti fondamentali:

(1) La capacità di **generalizzare** e di **rappresentare** le generalizzazioni in **sistemi simbolici sempre più convenzionali**.

(2) La capacità di **ragionare** guidati dalla sintassi di tali sistemi e di **agire** sulle generalizzazioni rappresentate in questi.

Per quanto riguarda la generalizzazione, molte ricerche, di impronta socio-culturale e cognitiva, descrivono la generalizzazione come un costrutto in cui chi apprende lo fa in contesti socioculturali specifici, ove è impegnato in attività del seguente tipo:

(a) identificare caratteristiche comuni tra casi diversi;
(b) estendere il proprio ragionamento oltre l'ambito in cui ha avuto origine;
(c) derivare risultati più generali da casi particolari.

A sua volta, Kaput (2008) ha unificato i due aspetti fondamentali del pensiero algebrico (generalizzazione e ragionamento con/su sistemi simbolici) incorporandoli nei seguenti tre filoni di contenuti (contesti) in cui si verificano concretamente:

1. Algebra come studio di strutture e sistemi astratti da calcoli e relazioni, compresi quelli derivanti dall'aritmetica (algebra come aritmetica generalizzata) e dal ragionamento quantitativo.
2. Algebra come studio di funzioni, relazioni e delle variazioni da esse indotte.
3. Algebra come applicazione di una varietà di linguaggi di modellizzazione all'interno e all'esterno della matematica.

Altri ricercatori, in particolare A. Sfard, sempre in un filone socio-cognitivo di ricerca, si sono concentrati sulla natura eminentemente discorsiva dello sviluppo del pensiero algebrico e ne hanno individuato le fasi della sua maturazione nel corso degli anni, dalla scuola primaria alla secondaria, non tanto vedendo l'algebra come aritmetica generalizzata ma come evoluzione di un meta-discorso sull'aritmetica (algebra come meta-aritmetica).

Siccome il primo approccio (alla Kaput) mi pare più diffuso nella scuola, mi soffermerò di più sul secondo, in quanto offre un metodo meno noto ma molto efficace, sia di natura interpretativa (sullo sviluppo del linguaggio algebrico), sia didattica (sulle conseguenti proposte didattiche).

3. L'algebra come discorso

L'idea che l'algebra sia un **linguaggio**, in cui vengono praticate le scienze e gli altri rami della matematica, è stata con noi per secoli, e altrettanto è durata la controversia su questo punto. La definizione alternativa, in base alla quale l'algebra è un **discorso**, risponde ad alcune delle preoccupazioni espresse dagli obiettori dell'approccio algebrico come linguaggio. Pur preservando la centralità del motivo del linguaggio, questa definizione trasferisce l'algebra dalla categoria degli strumenti passivi a quella delle **attività umane**.

Anna Sfard (Caspi & Sfard, 2012) distingue accuratamente il linguaggio dal discorso. Discorso e linguaggio infatti appartengono a categorie ontologiche diverse, sebbene correlate: il primo indica un'attività umana mentre il secondo è un sistema simbolico. Come forma di attività umana, i discorsi sono molto più che vocabolari e regole grammaticali e possono differire l'uno dall'altro anche quando sono identici nelle parole che usano e nelle combinazioni lessicali che sostengono. I discorsi inoltre comprendono numerose forme di comunicazione, non solo verbale, e possono differire nei loro vocabolari come fanno per esempio l'inglese e l'italiano ma essere comunque considerati sostanzialmente gli stessi.

Per classificare i discorsi dovremmo seguire il consiglio dato da L. Wittgenstein (1953, p. 10) e cercare 'somiglianze di famiglia' piuttosto che elementi universali comuni. Queste somiglianze per il discorso algebrico (quale troviamo in molti protocolli del RMT) sono per esempio rilevabili considerando: l'uso delle parole, i mediatori visivi, i narrativi, le pratiche routinarie.

La definizione dell'algebra (e della matematica in generale) come discorso data da Sfard è un cambiamento ontologico che ha importanti implicazioni per come vediamo lo sviluppo del pensiero algebrico e come lo studiamo. Considerando gli esempi dei protocolli RMT e i commenti dell'analisi a posteriori si verifica che alcuni illustrano il discorso algebrico sotto forma di discorso informale spontaneo su processi e relazioni numeriche, mentre altri mostrano la sua successiva evoluzione come risultato dell'incontro scolastico degli studenti con il discorso algebrico formale.

Definisco quindi l'algebra elementare come una sottocategoria del discorso matematico che le persone sviluppano riflettendo su relazioni e processi aritmetici. Per dirla più semplicemente, l'**algebra elementare** (come quella vista nei nostri esempi e che gli analisti di RMT avranno visto in molti protocolli delle loro prove) è un **meta-discorso sull'aritmetica**.

Secondo la letteratura, tre tipi di compiti meta-aritmetici danno origine a questo speciale tipo di discorso: gli schemi numerici, le equazioni e i ragionamenti quantitativi; essi sono tutti e tre presenti negli esempi RMT.

<u>Schemi numerici</u>**.** Con l'aiuto dell'apparato simbolico questi schemi possono essere presentati sotto forma di uguaglianze, come in $a(b + c) = ab + ac$. Si noti che sebbene nulla in quest'ultima proposizione lo dica esplicitamente, questo è, in effetti, un pezzo di meta-aritmetica. Infatti l'affermazione simbolica $a\ (b + c) = ab + ac$ è un'abbreviazione della frase *per moltiplicare un numero per una somma di altri due numeri, è possibile prima moltiplicare ciascuno degli altri due numeri per il primo e quindi aggiungere i risultati*.

Questo tipo di narrativo meta-aritmetico può essere chiamato *generalizzazione*.

<u>Equazioni</u>. Il secondo tipo di attività che genera algebra consiste in domande su quantità sconosciute coinvolte nei calcoli i cui risultati sono stati forniti. Questo tipo di compito è descritto nel moderno linguaggio algebrico come risoluzione di equazioni. In effetti, le equazioni, diciamo $2x + 1 = 13$, sono meta-domande sui processi numerici; nella fattispecie la domanda è: *quale numero, se raddoppiato e aumentato di 1, produce 13?*

<u>Ragionamenti quantitativi</u>. Il terzo tipo di attività che genera algebra consiste in ragionamenti su sequenze numeriche (dirette o prodotte a partire da altre rappresentazioni, per esempio geometriche), in cui si scopra qualche schema. Questo tipo di compito è descritto nel linguaggio algebrico come una regola (funzione), in cui una variabile dipende da altre (una o più). Esempio: *<u>Quale sarà il 50° termine della successione 2, 4, 6,…?</u>* Esso quindi si collega alla concettualizzazione della nozione di funzione, che sarà discussa più avanti.

Secondo queste definizioni, il pensiero algebrico si sviluppa ogni volta che si esaminano relazioni e processi numerici nella ricerca della generalizzazione o nel tentativo di trovare un'incognita o di comprendere una regola.

Generalmente si ritiene segno distintivo dell'algebra l'uso di una speciale notazione simbolica. Eppure, i mezzi simbolici non sono una caratteristica necessaria delle narrazioni coinvolte in nessuna di queste attività meta-aritmetiche.

Se qualcuno pensa che solo i compiti algebrici più semplici e elementari possano essere gestiti senza simbolismo, ecco un esempio sorprendente di più di quindici secoli fa in cui si ha un enunciato algebrico pre-simbolico piuttosto avanzato: *Moltiplica la somma della progressione per otto volte la differenza comune, aggiungi il quadrato della differenza tra il doppio del primo termine e la differenza comune, prendi la radice quadrata di questo, sottrai il doppio del primo termine, dividi per la differenza comune, aggiungi uno, dividi per due. Il risultato sarà il numero di termini*. (tradotto dal testo sanscrito di Āryabhaṭ ya, 499 d.C., in Boyer e Mertzbach, 2010, p. 397; la traduzione in italiano è dell'autore).

È un bel scioglilingua! Per questo fornisco la spiegazione. Magari qualche insegnante può trarne spunto per una lezione in cui storia e matematica si incontrano, come omaggio a una cultura che nel proprio linguaggio aritmetico conteneva anche una parola per lo zero (śūnya), cosa ignota ai coevi occidentali ancora per molti secoli.

Anche se potrebbe non essere immediatamente ovvio, il testo del matematico indiano presenta la soluzione di un'equazione quadratica: è una prescrizione per trovare il numero di elementi in una progressione aritmetica, di cui vengono dati il primo termine, la differenza e la somma.

Infatti, traducendo nel linguaggio algebrico moderno, indicando con a il primo elemento, con S la somma della progressione, con d la differenza comune, la frase diventa perfettamente comprensibile anche per noi, come descritto nella figura 3. Pur considerando le carenze comunicative di questa intricata interpretazione verbale e confrontandola con la sua controparte simbolica, è facile capire perché la simbolizzazione del discorso sia stata una delle principali tendenze nell'ulteriore sviluppo dell'algebra. Però, sebbene la simbolizzazione possa essere l'aspetto più evidente dello sviluppo, essa è stata solo una parte del processo storico più generale di formalizzazione del discorso algebrico, della trasformazione globale e deliberatamente intrapresa, implementata dai matematici al fine di massimizzare l'efficacia della comunicazione meta-aritmetica.

Moltiplica la somma della progressione per otto volte la differenza comune: $8Sd$
aggiungi il quadrato della differenza tra il doppio del primo termine e la differenza comune: $+ (2a-d)^2$
prendi la radice quadrata di questo: $\sqrt{8Sd+(2a-d)^2}$
sottrai il doppio del primo termine: $\sqrt{8Sd+(2a-d)^2}-2a$
dividi per la differenza comune: $[\sqrt{8Sd+(2a-d)^2}-2a]/d$
aggiungi uno e dividi per due: $\{[\sqrt{8Sd+(2a-d)^2}-2a]/d+1\}/2$

Si ottiene: $[\sqrt{8Sd+(2a-d)^2}-2a+d\,]/2d$

Figura 3

L'obiettivo generale dell'efficacia si articola in tre obiettivi specifici, che rispondono ad altrettanti bisogni racchiusi nell'obiettivo generale: il *disambiguamento*, vale a dire la prevenzione della possibilità di interpretazioni diverse delle stesse espressioni (la polisemia è una ricchezza nel linguaggio naturale, ma diventa un difetto in quello matematico, in quanto fonte di fraintendimenti dannosissimi); la *compressione*, cioè la trasformazione di lunghe frasi come quella sopra citata, la cui comprensione richiede grossi sforzi, in espressioni concise e facilmente manipolabili; la *standardizzazione*, ovvero la possibilità di garantire che tutti gli interlocutori seguano le stesse regole comunicative, obiettivo raggiunto parzialmente e non sempre nel linguaggio naturale.

Questi tre obiettivi specifici sono realizzati attraverso alcuni processi e regole che sono entrati nel linguaggio algebrico quali risposte ai bisogni sopra elencati: vediamo quali. La risposta al bisogno di *disambiguamento* è la *regolamentazione*, cioè la costituzione di regole di condotta discorsiva esplicitamente introdotte, di leggi grammaticali rigorose e coerenti. La *compressione* si ottiene attraverso due processi: la cosiddetta *reificazione*, che permette di trasformare le narrazioni sui processi in azioni sugli oggetti e in oggetti veri e propri — per esempio da $\sqrt{2}$ = 1,414… come calcolo a $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ come estensione di $\mathbf{Q}$ in cui posso operare algebricamente, per esempio razionalizzando — e la *simbolizzazione*, cioè il cambiamento nella mediazione visiva che si ottiene sostituendo sostantivi, predicati e verbi con ideogrammi. La simbolizzazione a sua volta amplifica l'effetto sia della reificazione sia della regolamentazione. Per quanto riguarda la *standardizzazione*, sia le meta-regole del discorso algebrico sia il sistema simbolico proposto sono stati universalmente concordati all'interno della comunità matematica multilingue, rendendo così l'algebra indipendente dalle varie lingue. Si osserva che è proprio la natura ideografica dei simboli a renderli indipendenti dal linguaggio e a essere quindi uno strumento ideale per la standardizzazione. Si veda in tabella 1 il quadro sinottico di questi obiettivi e dei metodi per realizzarli.

OBIETTIVI	METODI		
	Regolazione	Reificazione	Simbolizzazione
Disambiguazione	X		
Standardizzazione	X		X
Compressione		X	X

Tabella 1. Obiettivi del discorso algebrico e metodi per conseguirli

La differenza principale tra le due forme di discorso algebrico, informale e formale, sta nella esplicita e rigorosa regolamentazione. Dei due tipi di discorso, solo il formale è accompagnato da un meta-discorso regolamentatore (grammatica) che afferma esplicitamente le sue meta-regole; e solo in quest'ultimo caso, le meta-regole sono il prodotto di una legislazione deliberata, che mira alla prevenzione dell'ambiguità, alla compressione (nel linguaggio naturale queste due spesso sono in conflitto), e alla standardizzazione.

La dicotomia informale / formale è parallela alla distinzione retorica / simbolica, introdotta dagli storici della matematica (Boyer & Merzbach, *op. cit.,* p. 342). È stato detto infatti che si possono riconoscere tre fasi dello sviluppo storico dell'algebra (Nesselmann, 1842): (i) la fase *retorica* ([1]) o precoce, in cui tutto è scritto completamente a parole (fino a Diofanto, c.a 250 d.C); (ii) uno stadio *sincopato* o intermedio, in cui sono adottate alcune abbreviazioni (Diofanto, *Aritmetica*); (iii) uno stadio *simbolico* (a partire da Viète, 1540-1603).

È importante prestare particolare attenzione alla questione su come questi due filoni, quello formale e quello informale, interagiscano l'uno con l'altro: essi infatti alimentano la crescita reciproca. Alcune ricerche — in particolare di A. Sfard e dei suoi collaboratori (*op. cit.*), ma si veda anche il citato capitolo 15 in Cai (*op. cit.*) — evidenziano una struttura gerarchica del discorso algebrico, tratteggiando un modello che può essere utile nelle analisi a posteriori ai fini di una classificazione dei protocolli.

4. Una gerarchia di livelli nei discorsi algebrici

Se è vero che il discorso matematico si sviluppa formalizzando e annettendo i propri meta-discorsi, deve essere possibile scomporre qualsiasi discorso matematico, inclusa l'algebra, in una gerarchia di livelli, ordinati in base alla relazione di vicinanza: ogni strato in tale la struttura, tranne la prima, è un discorso sul discorso che costituisce il livello precedente. In altre parole, questa gerarchia ha origine dall'analisi di ciò che si considera come una forma "canonica" di un determinato discorso in una sequenza di discorsi in cui ogni elemento è il meta-discorso del precedente.

Tale sequenza gerarchica segna un aumento rispetto alla complessità e al potere generalizzante dei suoi elementi: la gerarchia proposta potrebbe essere vista come uno schema dello sviluppo storico del discorso algebrico. Con una metafora, si può pensare che i discorsi, come gli alberi, portino registrazioni della propria crescita: gli strati discorsivi, come gli anelli nel tronco di un albero, sono prove facilmente decifrabili della loro crescita passata. L'argomentazione per questa affermazione è semplice: si può presumere che l'ordine degli strati rifletta in modo sicuro l'ordine dello sviluppo storico semplicemente perché è irragionevole pensare a un meta-discorso che emerga prima del discorso stesso: è come immaginare una casa costruita dal suo tetto all'ingiù.

Quanto allo sviluppo ontogenetico del discorso algebrico, vale a dire al suo sviluppo nella durata della vita di un individuo, troppo dipende dall'insegnamento per consentire generalizzazioni di vasta portata. Con questi limiti, però, il modello gerarchico può essere utile anche nella ricerca sull'apprendimento dell'algebra in almeno due modi.

In primo luogo come analisi a posteriori dei protocolli e per le ricadute sulla progettazione dei problemi RMT: i suoi strati inferiori possono essere visti come raffiguranti la crescita spontanea del discorso meta-aritmetico e possono essere anche usati come strumenti di diagnosi per individuare quanto è maturo il pensiero algebrico in un allievo. Questa modalità appare in alcuni commenti dell'analisi a posteriori RMT.

In secondo luogo per i suggerimenti didattici che se ne possono trarre. Il modello gerarchico sembra indicare la traiettoria che si dovrebbe seguire nell'insegnamento al fine di garantire un apprendimento significativo dell'algebra. Infatti, se ogni livello nella gerarchia è un discorso sul suo predecessore, un'introduzione di un nuovo livello prima che lo studente padroneggi il precedente comporta il rischio che lo studente semplicemente non sappia di che cosa parla il nuovo discorso.

Per illustrare questi due punti introduco un esempio in cui è possibile cogliere un primo aspetto del cammino verso l'algebra analizzando i livelli diversi di descrizione verbale per una semplice scrittura algebrica, per esempio $3 + 2(n\text{-}1)$:

- a un primo livello si ha la descrizione di un processo: *sottraggo 1 da n, moltiplico per 2 e sommo 3*.
- a un secondo livello si ha una descrizione intermedia, che Sfard chiama 'granulare': *moltiplico per 2 la differenza tra n e 1 e sommo 3.* Qui l'espressione 'la differenza fra *n* e 1' è espressa con un sostantivo e non più con un verbo; il cambiamento esprime un primo passo verso la reificazione; l'espressione è ancora immersa in una frase dove troviamo verbi che esprimono azioni: è un granello reificato con il ricorso ai sostantivi in mezzo a processi ancora espressi con verbi (di qui la metafora della granulazione).

[1] Il termine *algebra retorica* è anche usato nell'analisi a posteriori fatta in RMT.

- a un terzo livello troviamo: *la somma tra 3 e il prodotto di 2 per la differenza tra n e 1*. Qui la descrizione è completamente oggettificata: i verbi sono completamente scomparsi a vantaggio dei sostantivi.

Questo processo è generale: dopo i fenomeni di ‘granularizzazione’ delle espressioni *Sommo, Sottraggo, Moltiplico,…* subentrano infine *La somma, La differenza….* Siamo quasi alla completa algebrizzazione del discorso: i simboli permettono alla fine di sintetizzare questo sviluppo discorsivo con una formula che esprime in forma visiva e compressa quanto via via oggettificato. Si osservi che il passaggio dai verbi, che esprimono azioni del (o di un) soggetto, ai sostantivi costituisce un decentramento del soggetto, che Sfard chiama alienazione con una felice espressione di origine filosofica.

Noi possiamo trovare questi diversi livelli nei protocolli degli allievi: l’analisi permette così di situarli in tappe diverse di questo cammino ideale verso l’algebra.

Entriamo ora in modo più approfondito in questa gerarchia, descrivendo più in dettaglio le caratteristiche generali. Intanto distingueremo tra un’algebra a valori costanti, come quella della formula appena analizzata, e un’algebra a valori variabili, in cui le relazioni tra le variabili coinvolte sono espresse tramite il concetto di funzione. Per esempio, nel problema della fig.4 in cui si chiede di calcolare quante palline ci saranno al posto 100 e quante al posto *n*, gli allievi, essendo molto lungo il calcolo diretto, troveranno in modo più o meno esplicito la regola (funzione) che lega il numero del posto al numero di palline ($n \rightarrow n^2$): si tratta appunto di quella che si può chiamare algebra a valori variabili. Sia l’algebra a valori costanti sia quella a valori variabili possono essere espresse informalmente (col linguaggio naturale variamente articolato, come nell’esempio discusso sopra) oppure a livello formale (con l’utilizzo del linguaggio simbolico più o meno intrecciato con quello naturale: da ‘al posto *n* ci sono *n* per *n palline*’ a ‘n^2’). L’algebra a valori costanti (fissi) indica il fatto che, qualsiasi mezzo semiotico sia usato, i significanti che rappresentano oggetti vengono interpretati come riferimenti a numeri specifici, noti o sconosciuti, dati o ricercati. Invece l’algebra a valori variabili (funzionale) è costituita da discorsi che si sono sviluppati in risposta alla necessità di una descrizione dei processi di cambiamento, ad esempio il movimento.

palline	●	●● ●●	●●● ●●● ●●●	…		…	
n. posto	1	2	3		100		*n*
n. palline	1	4	9		?		?

Figura 4

Riassumendo, sia l’algebra informale sia quella formale si strutturano in due livelli discorsivi, a seconda che si abbiano valori costanti (a loro volta suddivisi in tre sotto-livelli, da 1 a 3) oppure valori variabili: si veda la fig. 5.

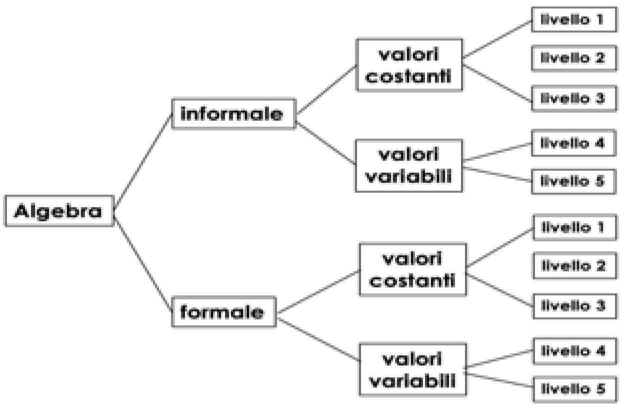


Figura 5

5. I diversi livelli nei discorsi algebrici

Discuto ora questa complessa gerarchia sperando che possa essere uno strumento utile all'équipe RMT sia per classificare i problemi algebrici nell'analisi a priori, sia per individuare i vari livelli a cui si situano i protocolli di soluzione degli allievi.

5.1. Il primo livello dell'algebra informale a valori costanti (procedurale)

Al primo livello processuale del discorso algebrico, in cui l'attenzione è focalizzata sui calcoli numerici, le descrizioni di questi calcoli seguono il loro ordine lineare: comunque sia presentato il calcolo, in parole o in simboli, le operazioni sono elencate nell'ordine della loro esecuzione. Qui, il simbolo di uguaglianza è spesso usato come se fosse un pulsante "ritorno" in una calcolatrice. La prima categoria di compiti caratteristici consiste in problemi che, risolti formalmente, riguardano equazioni della forma ax + b = c. Tale equazione può essere risolta con il semplice "annullamento", ovvero invertendo le operazioni applicate al numero sconosciuto per ottenere il risultato. Come mostrato da Filloy e Rojano (1989), i bambini sono in grado di trovare questo tipo di soluzione senza essere istruiti, a condizione che venga loro detto che un'espressione come 3*x* significa '3 volte *x*'.

Nel generalizzare le attività, le regole per il calcolo di un elemento di un modello sono anche presentate in modo sequenziale, abbinando le prestazioni effettive del calcolo.

Quando viene chiesto, ad esempio, "Come troveresti il 50° (*n*-mo) elemento nella sequenza 3, 5, 7, 9,. . .?" un allievo potrebbe dire: "Tolgo 1 dal numero del posto [indice], moltiplico [il risultato] per 2 e aggiungo 3 [al risultato]". Tale catena di operazioni è puramente lineare:

$$n \rightarrow -1 \rightarrow \text{per } 2 \rightarrow +3$$

Spesso i bambini tendono ad evitare di sottrarre 1: aggiungono un 1 iniziale e così la regola diventa 2 volte *n* più 1.

5.2. Il secondo livello dell'algebra informale a valori costanti (granulare)

Al secondo livello (granulare), l'attenzione è ancora sui calcoli numerici, ma le descrizioni di questi processi non sono più copie uno-uno della sequenza di operazioni eseguite nel corso dei calcoli effettivi. Siccome a volte la catena computazionale può essere lunga o discontinua (come quando è necessario memorizzare i risultati intermedi prima di usarli effettivamente), l'allievo può preferire le prescrizioni ricorsive della sequenza: per esempio nel caso della successione 3, 5, 7, 9,. . .? ogni elemento può essere ottenuto dal primo aggiungendo 2. In casi semplici, comuni nei curricula scolastici, il passaggio ricorsivo richiede di non menzionare più di un'operazione (nell'esempio: aggiungere 2).

Ma in altri casi il passaggio può essere più complicato. Come esempio 'estremo', consideriamo il testo di A ̄ryabhaṭ ya (fig. 3). Sebbene formulato come una descrizione di un processo (una sequenza di operazioni numeriche; nota i verbi *moltiplica*, *aggiungi*, ecc.), questo testo include clausole composte, come " *il quadrato della differenza tra due volte il primo termine e la comune differenza*". Queste clausole sono sostantivi: in esse verbi come addizionare, moltiplicare, ecc. sono stati sostituiti con sostantivi come somma o prodotto, o con aggettivi come moltiplicato, e l'effetto combinato di queste due sostituzioni sono:

- la **reificazione** = lo spostamento dell'attenzione dal processo al suo risultato;
- l'**alienazione** = la cancellazione dell'esecutore umano.

A causa di questi cambiamenti, le clausole risultanti sono lette come descrizioni di oggetti anziché di azioni. In questa fase dello sviluppo dell'algebra, nessuna prescrizione, verbale o simbolica, elenca le operazioni aritmetiche nell'ordine esatto della loro attuazione. Tali espressioni sono chiamate metaforicamente *granulari*, perché possono essere viste come risultato della scorciatoia della catena delle operazioni di base legando parti di questa catena in "nodi" o "grani". I grani devono essere interpretati come risultati di calcoli ausiliari piuttosto che come calcoli, cioè come oggetti piuttosto che processi (fig. 6).

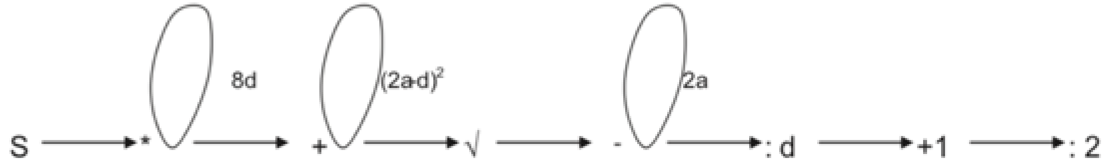


Figura 6

Questo "granulazione" è presentato nella figura 6. Si noti che l'aspetto superficiale di questa catena computazionale non è molto diverso rispetto al discorso algebrico di livello 1: il soggetto è ancora interessato alle prestazioni sequenziali delle operazioni computazionali, tranne per il fatto che aggira la necessità di interrompere la sequenza ogni volta che è necessario un calcolo ausiliario sostituendo questo calcolo con il suo prodotto.

È importante, tuttavia, sottolineare che a questo punto nello sviluppo del discorso algebrico, questi oggetti intermedi - i risultati intermedi oggettivi dei calcoli - hanno solo un'esistenza transitoria. Anche se espressi simbolicamente, possono apparire nel processo di calcolo, ma non sono visti come legittime risposte finali a problemi algebrici.

Questo potrebbe essere ciò che ha impedito a Diofanto, l'inventore del genere "ibrido" noto come algebra sincopata, di procedere verso una vera e propria algebra simbolica.

5.3. Il terzo livello dell’algebra informale a valori costanti (oggettificazione)

Il terzo livello (oggettificato) dell’algebra è quello praticato da coloro che partecipano in modo pienamente competente al discorso matematico. Qui, lo stato discorsivo di un'espressione algebrica composta non è diverso da quello di un numero: tale costrutto complesso può far parte di qualsiasi operazione numerica e può apparire come sostituto del numero in qualsiasi espressione sui numeri. In particolare, espressioni algebriche complesse, verbali o simboliche, saranno ora utilizzate nelle descrizioni alienate (spersonalizzate) delle relazioni tra oggetti.

Ecco un esempio di tale descrizione oggettiva: "Il prodotto di una somma di due numeri con la loro differenza è uguale alla differenza tra i quadrati di questi numeri"; questo va confrontato con la descrizione granulare in cui è presente l'attore umano: “Invece di moltiplicare la somma di due numeri per la loro differenza, si può (posso) sottrarre il quadrato del secondo numero dal quadrato del primo”.

È solo a questo livello più alto di algebra a valore costante che le espressioni algebriche contano come oggetti a pieno titolo. È quindi solo a questo punto nello sviluppo del discorso algebrico che lo studente può apprezzare appieno la logica di eseguire la stessa operazione su entrambi i lati di un'equazione come un modo per risolverla.

Infatti le proposizioni matematiche appaiono spesso come se fossero costituite da enunciati su cose materiali in cui i nomi degli oggetti materiali sono stati sostituiti con nomi matematici. Ma l'oggettivazione non è un'inevitabile qualità del discorso matematico: solo pochi segni di oggettivazione si trovano di solito nel discorso matematico (algebrico) dei principianti. Occorre fare evolvere il loro discorso verso l’oggettivazione in modo graduale e appropriato.

5.4. L’algebra a valori variabili: il pensiero funzionale

Si ha questo livello quando il discorso algebrico considera variazioni numeriche piuttosto che valori costanti. In questo caso, le espressioni algebriche che, a livello 3, sono intese come significanti un singolo elemento di un modello (l'implementazione della regola che definisce il modello per un input specifico) o un output specifico di un processo computazionale, sono ora usate di nuovo, ma questa volta sono interpretate come denotanti il modello o il processo nel suo insieme. I nuovi oggetti risultanti sono quindi variabili e funzioni. Questa trasformazione del discorso è segnalata, tra l'altro, dal fatto che il significante può ora essere realizzato sotto forma di un grafico o di una tabella. Soprattutto, tuttavia, questo cambiamento è indotto dalla natura di nuovi compiti algebrici, che estendono notevolmente la nozione di ciò che risulta come attività algebrica. Piuttosto che semplicemente risolvere equazioni o generalizzare relazioni numeriche statiche, l'algebrista si occupa ora di costruire modelli per processi di cambiamento e di investigare gli oggetti (funzioni) matematici risultanti in modo da comprendere meglio i fenomeni investigati.

Da un punto di vista didattico, sebbene i corsi formali di algebra tradizionalmente utilizzino un approccio trasformativo che enfatizza simboli, espressioni ed equazioni letterali (Kieran, 2007), la ricerca documenta idee sbagliate e mancanza di comprensione strutturale di questi oggetti matematici tra gli studenti a tutte la età. Questi risultati hanno portato alcuni a suggerire che un metodo basato sul concetto di funzione potrebbe servire come un migliore concetto organizzativo per insegnare e apprendere l'algebra.

Gli argomenti in favore di questo metodo includono:

- l'idea che le funzioni possano unire una vasta gamma di argomenti altrimenti isolati, come operazioni su numeri, frazioni, rapporti e proporzioni e formule relative alle quantità;
- l'osservazione che le funzioni possono servire come connessione tra le esperienze quotidiane degli studenti e la matematica;
- la scoperta che tale metodo incoraggia naturalmente l'atteggiamento di ricerca negli studenti.

Il pensiero funzionale fornisce infatti un ricco contesto per lo sviluppo delle pratiche di pensiero algebrico di generalizzare, rappresentare, giustificare e ragionare con le relazioni tra quantità. Inoltre la ricerca più recente prova che gli studenti di primaria e media possono ragionare con successo in forma algebrica sulle relazioni funzionali. Sembra che le difficoltà manifestate dagli studenti più grandi possano derivare da una mancanza di esperienze con il pensiero funzionale proprio nei gradi elementari.

Due prospettive sono generalmente adottate quando si affronti l'algebra elementare basandosi sul concetto di funzione:

- una prospettiva di corrispondenza
- una prospettiva di coordinamento / co-variazione.

Entrambi considerano le relazioni funzionali tra quantità, ma interpretandole in modo diverso. Matematicamente una funzione f tra un insieme A e un insieme B (eventualmente coincidente con A) è un sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB (cioè delle coppie ordinate $<a,b>$ con a ε A, b ε B), tale che per ogni a ε A esiste uno e un solo b ε B con $<a,b>$ ε f. Questa definizione è qui riportata solo come ripasso per il lettore, certo non perché debba essere usata in classi del primo ciclo d'istruzione, vista la sua complessità e astrazione. Però le due prospettive ne sono una conseguenza, e questo è bene che sia presente agli insegnanti.

Una prospettiva di corrispondenza è tradizionalmente il modo più comune per iniziare l'algebra: prevede lo sviluppo di una regola in forma chiusa per descrivere una relazione tra quantità che può essere utilizzata per analizzare e prevedere il comportamento di funzioni in fieri, per esempio: il numero al passo n è $3n$ +2. Tali regole sono utili anche perché consentono di determinare informazioni su un valore di funzione specifico senza conoscere gli altri valori della funzione. La prospettiva di covariazione prevede l'esame delle funzioni in termini di cambiamenti coordinati dei valori x, per esempio $x_1, x_2 \dots x_m$, e y, per esempio $y_1, y_2 \dots y_m$. Essa comprende la capacità di "muoversi operativamente" da y_m a y_{m+1} coordinandosi con il passaggio da x_m a x_{m+1}. Per una tabella in due colonne, questo implica il coordinamento della variazione in due colonne mentre ci si sposta verso il basso (o verso l'alto) della tabella.

Questo tipo di pensiero, covariazionale, risulta dai modi in cui gli studenti considerano le relazioni, specialmente quando la variabile indipendente è il tempo. L'attenzione del pensiero covariazionale sul coordinare il cambiamento in y con il cambiamento in x ha un significato crescente man mano che gli studenti avanzano verso una matematica più formale. Esso può aiutare gli studenti a sviluppare una comprensione delle funzioni in termini di variazioni: per esempio, le funzioni lineari implicano tassi di variazione costanti, le funzioni quadratiche coinvolgono tassi di variazione che cambiano costantemente. Sebbene gran parte di questo tipo di ricerche sia avvenuta nei gradi elementari superiori (3-5), ricerche recenti forniscono prove che gli studenti fin dalla prima elementare sono in grado di generalizzare e ragionare con relazioni funzionali in contesti numerici in modi sorprendentemente sofisticati. È quindi un errore rimandare ai gradi scolastici superiori l'insegnamento delle relazioni funzionali.

5.5. Analisi concreta del discorso algebrico con l'utilizzo dei vari livelli

È possibile usare tutta questa gerarchia (dal primo livello procedurale, al pensiero funzionale) per classificare gli elaborati del RMT. Io l'ho fatto per alcuni esempi in cui ho confrontato quelli di Va primaria con quelli di IIa media (in appendice riporterò un esempio di analisi puntuale dei protocolli di cui al §1).

La domanda principale che ci poniamo analizzando un protocollo risolutivo riguarda il grado di reificazione: le proposizioni parlano del fare (calcoli) o delle proprietà degli oggetti? In effetti, la reificazione è la mossa chiave verso la disambiguazione e la condensazione delle narrazioni meta-aritmetiche e può quindi essere vista come la caratteristica della "firma" delle frasi algebriche formali.

Nell'analisi ci possiamo chiedere se le regole degli studenti si riferiscono ad azioni, come nel caso in cui si dice "moltiplico a per b e aggiungo c", o si parla di oggetti, come nell'affermazione "la somma di c con il prodotto di a per b ". In altre parole, si cerca di comprendere il grado di granulazione nelle regole descritte dagli studenti.

Inoltre staremo ben attenti a classificare le componenti del discorso scritto dagli studenti, come illustrato nell'Appendice.

Il quadro generale che emerge dalle analisi sui protocolli RMT che ho esaminato è il seguente (con M indico i risultati della media, con P quelli della primaria):

- Le regole descritte da M sono più corte (più condensate) di quelle di P;
- M e P usano modalità simili per esprimere l'atto linguistico di 'identificazione'[2] (si tratta di metafore, metonimie dirette e inverse, deissi). A volte usano un numero generico invece di una variabile (come fa Diofanto);
- Ideogrammi: più frequenti in M (spesso gli studenti usano il segno □ in espressioni come 2□ + 5 = 11; in genere il significato di □ non è ancora quello di una variabile, ma si tratta solo di un segnaposto);
- M sono meno processuali: c'è assenza di verbi per azioni e minore presenza di verbi per operazioni; maggior uso di preposizioni come più, volte; minore uso di progressioni nel tempo.
- M presentano un maggiore uso di variabili per rappresentare risultati intermedi (con maggiore somiglianza con le rappresentazioni algebriche).

Con riferimento alle soluzioni del problema delle prugne, prima citate, si osserva in generale quanto segue (un'analisi dettagliata è in Appendice).

Nell'esempio algebrico (2) gli allievi oscillano tra il livello granulare (livello 2) soprattutto nella prima parte e quello di oggettificazione (livello 3) nella seconda parte: il registro ideografico li aiuta a collegare i due livelli. Arrivano anche a un certo grado di compressione. Nell'esempio retorico gli allievi oscillano tra la descrizione processuale (livello 1) e quella granulare, con qualche piccolo avvio a tracce di compressione.

Negli esempi per tentativi visti, si trovano germi di relazioni funzionali: si hanno infatti tracce di oggettivazione funzionale realizzata quasi esclusivamente con l'elemento ideografico *Tabella* (più strutturata nel primo esempio che nel secondo) e un elemento linguistico di genere[3] (*resto*): essi forniscono una componente granulare su cui possono operare concretamente. L'esempio conferma anche che l'avvio di un'interpretazione funzionale dipende sia dal contesto del problema, sia dalla strategia risolutiva usata. Per esempio, una strategia con equazioni difficilmente avvierà un'interpretazione funzionale in quanto è legata a un'interpretazione relazionale statica; al contrario una strategia per tentativi ed errori avvierà a volte più facilmente a una interpretazione funzionale.

6. Discussione

Con riferimento alle tre domande poste all'inizio, ho analizzato il pensiero algebrico come risultato dell'evoluzione di un discorso meta-aritmetico: esso si sviluppa nel tempo attraverso fasi successive di oggettificazione (processuale → granulare → reificato/compresso).

I filoni secondo cui questo sviluppo si effettua sono:

- la generalizzazione,
- le rappresentazioni,
- il ragionamento guidato dalla sintassi del discorso (che porta alle equazioni),
- il ragionamento quantitativo (che porta alle funzioni).

Non risulta ancora chiaro dalla ricerca come concretamente interagisca l'intreccio tra questi filoni, al di là del fatto che essi sembrano interagire, ma è opportuno coltivarli tutti quanti a partire dalla scuola primaria.

Una conclusione importante del nostro discorso è che esiste una meta-aritmetica spontanea, che inizia a svilupparsi anni prima dell'introduzione "ufficiale" dell'algebra a scuola. La meta-aritmetica del bambino può attraversare trasformazioni sostanziali, diventando abbastanza vicina nella sua sintassi all'algebra scolastica formale. Un risultato delle ricerche è che vi sono notevoli somiglianze strutturali tra la meta-aritmetica verbale degli studenti e l'algebra reificata formale. Una spiegazione per questo fenomeno è che le strutture delle formule algebriche non sono diverse da quelle delle espressioni aritmetiche, e quindi i nostri studenti potrebbero semplicemente basarsi

[2] Uso il termine 'identificazione', in mancanza di una parola migliore, per indicare quanto espresso in forma espressiva dal termine 'saming' (neologismo per un participio, che quindi indica un'azione, da same, stesso in inglese: quindi azione dell'identificare come uguali due termini od oggetti) con cui A. Sfard indica il processo linguistico con cui si dà un unico nome a un insieme di entità, per esempio la parola 'numero' oppure il segno 'n' per tutti i naturali 0, 1, 2, …. Questo cambiamento linguistico è l'essenza stessa del processo di generalizzazione. Grazie ad esso si è in grado di trasformare infinite espressioni aritmetiche strutturate in modo simile (per esempio, 'il quadrato di 3', 'il quadrato di 11', ecc.) in un'unica espressione meta-aritmetica ('il quadrato di un numero', oppure n^2). Il significante dell'identificazione ('un numero', n) è chiamato variabile. L'identificazione è un caso particolare dell'individuazione di un genere per un oggetto (si veda la nota 3).

[3] Si ha un'assegnazione di genere quando gli oggetti considerati si nominalizzano in una categoria più ampia del discorso (in questo caso il genere è la parola resto, che indica questa categoria con cui si parla del numero che resta). L'indicazione di genere nasce quindi in seguito a una scoperta di regolarità e costituisce il passaggio verso l'identificazione (saming) con termini matematici generali ma più specifici del genere (si veda la nota 2).

sulla loro competenza aritmetica in via di sviluppo e sulla loro conoscenza solidale di questi ultimi tipi di strutture per ragionare algebricamente. Questo non va però confuso con l'idea che l'algebra sia un'aritmetica generalizzata: è invece un meta-discorso sull'aritmetica, che si sviluppa a un altro livello.

Alla luce del modello di sviluppo dell'algebra qui illustrato è ragionevole supporre che una delle traiettorie più promettenti verso l'algebra formale non sia dissimile dal percorso collettivamente seguito dai matematici del passato: l'insegnante può provare a coinvolgere i bambini nella graduale formalizzazione della loro meta-aritmetica naturale sviluppando proprio i loro meta-discorsi spontanei. Dopo un po', può aiutare gli studenti a prendere coscienza di alcune imperfezioni delle loro soluzioni (sottolineandone però in positivo l'inventività e l'utilità). Questo può segnare l'inizio in classe di un cammino verso la reificazione, la simbolizzazione e la regolamentazione.

Il resto può essere fatto procedendo sistematicamente da entrambe le parti: coltivando la meta-aritmetica spontanea degli studenti e, allo stesso tempo, aumentando gradualmente la partecipazione degli studenti al discorso algebrico formale. Anche l'uso delle tecnologie può aiutare in questo processo.La scelta di far crescere l'algebra formale da quella informale è ampiamente supportata dalle teorie cosiddette acquisizioniste e partecipazioniste dell'apprendimento, e soprattutto dalle osservazioni di Vygotsky sui concetti "quotidiani" (informali, spontanei) e "scientifici" (formali) (Vygotsky, 1987) e la risultante affermazione che "se le due forme non si collegano, non si ha un vero sviluppo del concetto" (Daniels, 2007, p. 314).

Questo approccio didattico presenta almeno due chiari vantaggi.

- In primo luogo, se condotto in questo modo, l'intero processo ha buone probabilità di apparire razionale e motivato per gli studenti: dopo aver realizzato le debolezze della loro meta-aritmetica spontanea, è probabile che i bambini siano ben consapevoli di ciò che stanno facendo e perché.

- In secondo luogo, in questo processo l'algebra rimane vicina al discorso dei bambini per tutto il percorso. Questo approccio all'insegnamento sembra quindi più efficace di molti altri a garantire la continuità tra i discorsi con cui lo studente ha già familiarità e quelli che deve ancora padroneggiare.

Tutto ciò riduce al minimo il pericolo dell'apprendimento puramente ritualizzato, a seguito del quale lo studente rischia di vedere il discorso algebrico solo come un 'discorso per gli altri'.

7. Conclusione

S. Eilenberg (1969) scrisse che l'algebra è come il sorriso del gatto del Cheshire, sorriso che rimane anche dopo che il gatto è scomparso. Ma io sostengo che allevare gatti del Cheshire è facile se li si pratica fin da bambini e si impara a sorridere con loro, e che non si tratta di apprendere un linguaggio misterioso ma di costruire un discorso sensato.

Appendice 1. I livelli del discorso algebrico

Sono qui riportate le tabelle con l'analisi dettagliata del discorso algebrico (formale e informale, a valori costanti e non), con riferimento agli esempi riportati alle sezioni 4 e 5. Premetto una breve legenda che contiene le spiegazioni relative a termini non discussi precedentemente; la struttura delle tabelle è adatta sia ad esaminare protocolli scritti (come è il caso per RMT) sia produzioni orali degli allievi.

Legenda dei termini usati:

- RISPOSTA: è quanto scritto dagli allievi (nel caso si tratti di trascrizioni di attività osservate si potrebbe trattare di produzioni verbali orali degli allievi)
- EQUIVALENZA FUNZIONALE: indica il tipo di funzionalità della risposta tradotta nel linguaggio algebrico standard (di solito espresso con frasi, parole, rappresentazioni grafiche, ecc.)
- TIPO (indica la tipologia della produzione; a volte intervengono tipologie studiate in linguistica)

    verbale: frasi prodotte dagli allievi (scritte o pronunciate)

    misto: non solo verbale

    ideografico: quando si usano rappresentazioni non verbali

- ***RELAZIONE***

    metafora: stabilisce una collegamento tra un contesto sorgente e uno obiettivo che dà significato al primo (per. es. il tempo e lo spazio, come in 'Natale si avvicina')

    descrittore deittico: termine che indica qualcosa (per es. 'questo', 'il numero così ottenuto')

    metonimia: la parte per il tutto

    metonimia inversa: il tutto per la parte

segnaposto: tipicamente una rappresentazione ideografica per indicare il posto in cui sono da mettere numeri diversi che soddisfano una certa relazione (per es. 3 + □ = 5)

genere: vedi nota 3

obiettivo: la frase indica in modo esplicito che occorre per es. trovare un valore

regola: quando è usata in qualche modo una regola implicita o esplicita (non necessariamente corretta)

incognita: ovvio

equazione: ovvio

aritmetica: ovvio

funzionale

> ***particolare: concettualizza una sequenza di casi particolari in qualche forma unitaria (ad es. una tabella)***
>
> ***ricorsivo generale: Concettualizza una sequenza di casi particolari come regola generalizzata tra valori successivi arbitrari***

RISPOSTA	EQUIVALENZA FUNZIONALE	TIPO	RELAZIONE
Sommando tutte le **ciotole** (9) quante ne puoi mettere di **piccole.**	*S* *P*	*verbale* *verbale*	metafora
nel mezzo se ne possono mettere **2** × (volte) in **quello grande 4** × nel **piccolo 1** × 2 + 4 + 1 + 2 = **9 ciotole** **piccole** in tutto	*M=2p* *G=4p* *P=1p* *Σp=9p*	*misto* *(verbale +* *Ideografico)*	metafora + descrittore deittico
Quante prugne ci sono **nella ciotola piccola**	*1p=13p*	*verbale*	metonimia inversa
119: 9 = 13 prugne		*misto*	descrittore
Quante prugne ci sono nelle altre ciotole		*verbale*	
piccola = 13 -> × 2 **media = 26 -> × 2** **grande = 52**	*P= 13x2 prugne* *M= Px2 prugne* *P= Mx2 prugne*	*misto*	Metafora + descrittore deittico

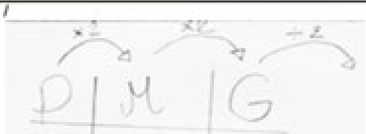
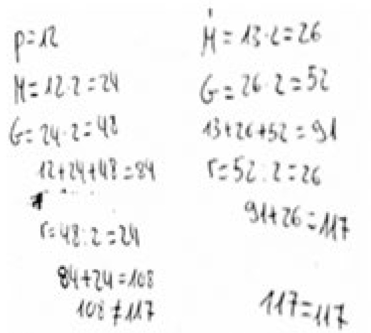
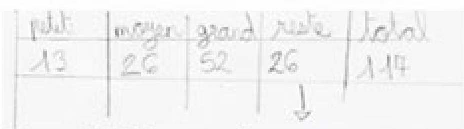
Tabella 2. Analisi discorsiva di soluzione retorica (protocollo del §1)

RISPOSTA	EQUIVALENZA	TIPO	RELAZIONE
	*x 2x 4x*	*ideografico*	*Segnaposto* *+ incognita*
Stesso numero visto le 2 volte come «la metà di 4x»	*2x = 4x/2*	*misto* *(verbale +* *ideografico)*	*metafora +* *descrittore* *deittico*
resto	*r = 2x*	*verbale*	*genere*
All'inizio occorre cercare quello che vale x:	*x=?*	*verbale*	*obiettivo*
per questo si può ricorrere a un'equazione	*E(x)=0*		*regola*

Tabella 3. Analisi discorsiva di soluzione algebrica, I parte (protocollo del §1)

<table>
<tr><th>RISPOSTA</th><th>EQUIVALENZA</th><th>TIPO</th><th>RELAZIONE</th></tr>
<tr><td>Per cercare x solo divisioni</td><td>x = Σ:</td><td>verbale</td><td>Regola</td></tr>
<tr><td>117 = x + 2x + 4x +2x
117 = 9x.
117/9=x=13</td><td>idem</td><td>ideogr.</td><td>Equazione</td></tr>
<tr><td>Ora non rimane che calcolare i monomi a partire da x.</td><td>ax</td><td>verbale</td><td>Regola</td></tr>
<tr><td>13+26+26+52 = 117</td><td>idem</td><td>ideogr.</td><td>Aritmetica</td></tr>
<tr><td>
</td><td>x 2x 4x</td><td>ideogr</td><td>Segnaposto + Valore trovato dell'incognita</td></tr>
</table>

Tabella 4. Analisi discorsiva di soluzione algebrica, II parte (protocollo del §1)

<table>
<tr><th>RISPOSTA</th><th>EQUIVALENZA</th><th>TIPO</th><th>RELAZIONE</th></tr>
<tr><td>
</td><td>P M G</td><td>misto</td><td>Metafora + descittivo deittico</td></tr>
<tr><td>Resto</td><td>r</td><td>verbale</td><td>genere</td></tr>
<tr><td></td><td>Tabella</td><td>ideografico</td><td>Relazione funzionale particolare</td></tr>
<tr><td>
</td><td>S = 117?</td><td>ideografico</td><td>Equazione aritmetica</td></tr>
<tr><td>

è la metà del piatto grande</td><td>26= ½ P</td><td>misto</td><td>Metafora + descrittivo deittico</td></tr>
</table>

Tabella 5. Analisi discorsiva di soluzione per tentativi (protocollo del §1)

RISPOSTA	EQUIVALENZA	TIPO	RELAZIONE
11 - 22 - 44 ⇒ 22 resti 16 - 32 - 64 ⇒ 32 resti 14 - 28 - 56 ⇒ 28 resti 13 - 26 - 52 ⇒ 26 resti	*Tabella*	*ideogr.*	*Relazione funzionale ricorsiva*
resti	*R*	*verbale*	*genere*
99 < ✗ 144 > ✗ 126 > ✗ 117 = ✓	*S =117?*	*ideogr.*	*Disuguaglianza aritmetica*

Tabella 6. Analisi discorsiva di soluzione per tentativi (protocollo del §1)

Riferimenti bibliografici

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. Journal for Research in Math- ematics Education, 46(1), 39–87.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2010). A history of mathematics (3rd ed.). New York: Wiley.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (International Reviews on Math- ematical Education), 40(1), 3–22.

Daniels, H. (2007). Pedagogy. In H. Daniels, M. Cole, & J. V. Wertsch (Eds.), The Cambridge Companion to Vygotsky (pp. 307–331). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Caspi, S. & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. International Journal of Educational Research (51–52), 45–65.

Eilenberg, S. (1969). The algebrization of mathematics. In National Research Council's Committtee on Support of Research in the Mathematical Sciences (Ed.). *The Mathematical Sciences: A collection of essays*. Cambridge, MA: MIT Press. 153-160.

Filloy e Rojano (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9. 19-25.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reason- ing? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 5–17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nesselmann, G. H. F. (1842). Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra, Nach den Quellen bearbeitet.

Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. Educational Studies in Mathematics, 66, 145–164.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. Journal of Mathematic Behavior, 14, 15–39.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Shai Caspi Anna Sfard, Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra (2012). International Journal of Educational Research, 51-52, pp. 45-55.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M., & Brizuela, B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.), Compendium for Research in Mathematics Education (pp. 386-420). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. In R. W. Rieber & A. C. Carton (Eds.), The collected works of L.S. Vygotsky (pp. 39–285). New York: Plenum Press.

Wittgenstein, L. (1953). Ricerche filosofiche. Torino: Einaudi.

AVEC LES ÉLÈVES ET LES ENSEIGNANTS ENTRE NOMBRES, FORMULES ET PROBLÈMES

Ferdinando Arzarello

Dipartimento di Matematica, Università di Torino

Résumé

L'article décrit les processus qui conduisent à la pensée algébrique et aux productions correspondantes des élèves comme maturation d'un méta-discours sur l'arithmétique. Il souligne ainsi les formes de continuité (cognitive et didactique) qui doivent être ciblées en classe pour stimuler et soutenir la transition de l'Arithmétique à l'Algèbre. Il illustre ainsi les outils théoriques et opérationnels pour l'analyse discursive des productions écrites (mais aussi orales) des élèves, avec des exemples en référence aux travaux des animateurs du *Rallye Mathématique Transalpin*. L'objectif est de fournir aux équipes du RMT un nouvel outil d'analyse, à la fois théorique et opérationnel.

1. Lorsque l'algèbre montre le bout du nez

François Jaquet m'a posé, sous forme interrogative, la phrase qui est devenue le titre de ce chapitre dans un échange de messages dans lesquels nous avons partagé nos idées sur la façon dont on peut entrevoir et décrire la première apparition de la pensée algébrique dans les processus et productions de jeunes élèves de la 5e à la 7e année, qui résolvent les problèmes du Rallye mathématique transalpin.

Répondre à cette question semble très important pour les équipes du RMT (et les enseignants en général).

Trois aspects caractérisent le travail du RMT avec des problèmes:

- **la préparation de l'énoncé**
- **l'analyse a priori**
- **l'analyse a posteriori**

Les équipes d'élaboration des problèmes réalisent d'abord une analyse a priori des procédures possibles que les élèves mettront en place, des obstacles qu'ils rencontreront et des images mentales qu'ils se feront des consignes. On passe ensuite à la rédaction proprement dite des énoncés après un choix minutieux des variables didactiques impliquées. Après le déroulement de l'épreuve, il y a la phase de correction au cours de laquelle les explications des élèves (parfois de véritables « perles ») et la rigueur de certaines justifications ne manqueront pas de surprendre les correcteurs. Enfin, l'équipe passe à une analyse a posteriori, qui permet de confirmer ou d'infirmer les hypothèses de départ, de mettre en évidence des stratégies ou représentations inattendues, de calculer la fréquence de certains types de procédures, et de « mesurer », de manière aussi scientifique que possible, les difficultés rencontrées par les élèves. Pour ces raisons, le RMT représente une opportunité de rencontre et d'échanges entre la pratique en classe et la réflexion pédagogique et didactique. En bref, c'est une magnifique occasion de mener une forme de recherche didactique sur le terrain.

Mon article tentera en quelque sorte de contribuer à cette recherche en entrant dans l'analyse a posteriori ; cela permettra également d'enrichir celle qui a été faite a priori et peut-être encore d'améliorer l'ensemble du processus de travail autour du RMT.

Je pars donc d'un exemple de problème du RMT :

Les Prunes (Cat. 5, 6, 7)

Charles a récolté 117 prunes. Il en met certaines dans trois plats à fruits, un petit, un moyen et un grand.

Les prunes qu'il a mises dans le plat moyen sont le double de celle qu'il a mises dans le petit plat et les prunes qu'il a mises dans le grand plat sont le double de celle qu'il a mises dans le plat moyen.

Après avoir rempli les trois plats, il lui reste des prunes, exactement la moitié de celles qu'il a mises dans le grand plat.

Combien de prunes Charles a-t-il mis dans chaque plat ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

L'analyse a priori effectuée par une équipe du RMT décrit ainsi la tâche mathématique dont le problème est une transposition : *Décomposer 117 en une somme de quatre nombres, proportionnellement à 1, 2, 4 et 2,*

Elle identifie 4 procédures possibles:

- relationnelle 1 (double / demi) : rechercher des nombres, par exemple procéder par essais ;

- relationnelle 2 (divisibilité) : le nombre recherché des 3 premiers plats est divisible par 7 et inférieur à 117 ;

- utiliser un **modèle avec unités** (= prunes dans le petit plat), avec possibilité d'utilisation de représentations graphiques ;

- équation: $x + 2x + 4x + 2x = 117$.

L'analyse a posteriori très précise réalisée sur 240 copies de Suisse romande identifie trois principaux types de procédures dont certaines correspondent à celles de l'analyse a priori :

• **algébrique** : équation + représentations graphiques ;
• **rhétorique** : modèle d'unité commune, utilisation de mots, de diagrammes, d'abréviations pour l'exprimer ;
• **par essais** : écrire les quadruplets possibles de nombres à partir du nombre de ceux dans le petit plat.

Comme exemple typique d'une solution algébrique, voir la copie de la *figure* 1.

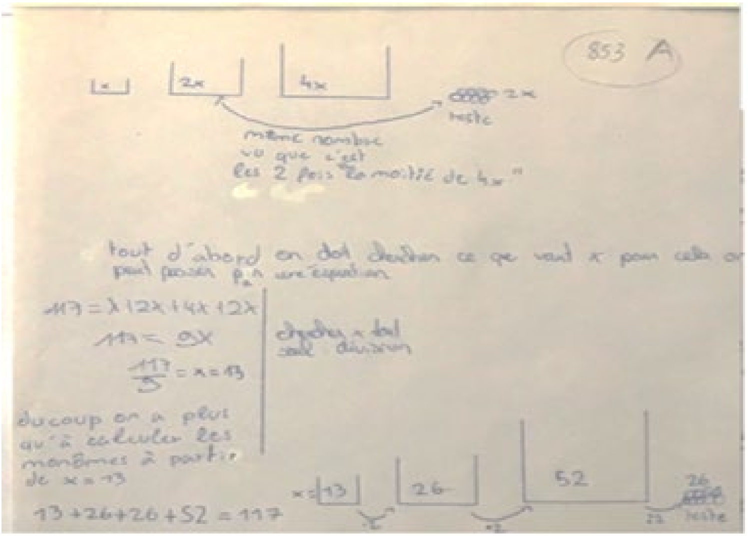


figure 1

Un exemple emblématique de type rhétorique est donné par la copie suivante :

En additionnant tous les plats, (9) combien peut-on mettre de petits plats.
• *dans le moyen on peut en mettre 2 × (fois)*
• *dans le grand on peut en mettre 4 ×*
• *dans le petit on peut en mettre 1 ×*
• *(le reste vaut la moitié) dans le moyen on peut le mettre 2 ×*
2 + 4 + 1 + 2 = 9 petits plats en tout
• *Combien y a-t-il de prunes dans le petit plat 119 : 9 = 13 prunes*
• *Combien y a-t-il de prunes dans les autres plats*
petit = 13 –> ×2 moyen = 26 –> ×2 grand = 52

Enfin, les *figures 2a* et *2b* sont deux exemples de solutions par essais.

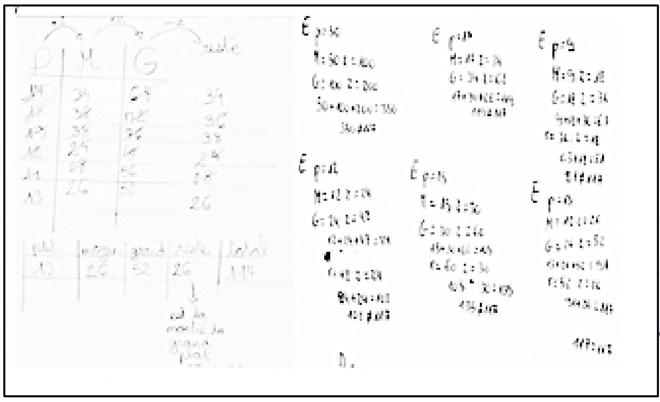


figure 2a

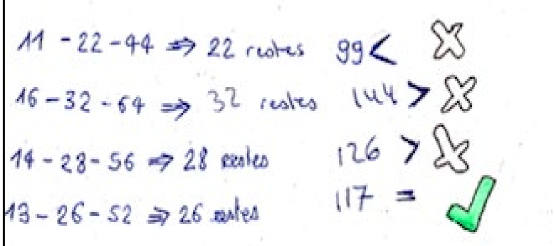


figure 2b

Dans la discussion avec François sur les copies traitant de ce problème, trois questions se sont posées concernant les trois typologies, auxquelles il nous a semblé important de répondre en approfondissant leurs aspects épistémologiques et didactiques. Les voici :

Solution algébrique : équation + représentations graphiques.

Les traces graphiques représentent-elles une étape de représentation de la variable non encore désincarnée ; (angais : disembodied) ?

Solution rhétorique : modèle d'unité commune, utilisation de mots, de diagrammes, d'abréviations pour l'exprimer.

À quel moment peut-on estimer que les élèves ont franchi une étape décisive vers l'algèbre ?

Solution par essais : à partir du nombre de prunes dans le petit plat, en écrivant les quadruplets possibles de nombres.

Y a-t-il l'idée de ***fonctio****n, inconsciemment ou non ? Y a-t-il des prémisses du concept de variable* ?

En général, des questions comme celles-ci se concentrent sur un problème épistémique, didactique et cognitif crucial:

i. quelle est la nature de la pensée algébrique ?
ii. est-il fondé de la considérer comme un processus qui évolue avec le temps ?
iii. comment sont configurées les étapes possibles de ce développement ?

Les copies des élèves participant au RMT (comme d'autres dans la littérature) et les discussions des analyses a posteriori peuvent nous aider à répondre à ces questions et représentent une base de données significative qui peut d'une part recourir à la recherche didactique pour leur interprétation, mais aussi contribuer à son tour à fournir des réponses aux mêmes questions de recherche telles que i, ii, iii.

Dans l'article, je vais d'abord essayer de fournir les éléments théoriques et opérationnels pour répondre aux trois questions. Ensuite, je reviendrai brièvement sur les exemples RMT pour commenter quelques réponses possibles, basées sur la discussion théorique développée.

2. L'algèbre comme généralisation et comme raisonnement

Un premier volet de réponses est résumé dans Stephens et al. (2017), qui présente les résultats de nombreuses recherches récentes dans diverses parties du monde sur la nature de la pensée algébrique et que je vais maintenant résumer brièvement.

Selon ces recherches, la pensée algébrique est composée de deux aspects fondamentaux :

(1) La capacité de **généraliser** et de **représenter** des généralisations dans des **systèmes symboliques de plus en plus conventionnels**.

(2) La capacité de **raisonner** guidée par la syntaxe de ces systèmes et **d'agir** sur les généralisations qui y sont représentées.

En ce qui concerne la généralisation, de nombreuses recherches, de nature socioculturelle et cognitive, décrivent la généralisation comme une construction dans laquelle l'apprenant la réalise dans des contextes socioculturels spécifiques, où il est engagé dans des activités du type suivant :

(a) identifier les caractéristiques communes à différents cas ;
(b) étendre son raisonnement au-delà du domaine d'origine ;
(c) tirer des résultats plus généraux de cas particuliers.

À son tour, Kaput (2008) a unifié les deux aspects fondamentaux de la pensée algébrique (généralisation et raisonnement avec / sur les systèmes symboliques) en les incorporant dans les trois volets de contenu (contextes) suivants dans lesquels ils se produisent concrètement :

1. L'algèbre en tant qu'étude de structures et de systèmes abstraits à partir de calculs et de relations, y compris ceux dérivant de l'arithmétique (l'algèbre comme arithmétique généralisée) et du raisonnement quantitatif.
2. L'algèbre comme étude des fonctions, relations et variations qu'elles induisent.
3. L'algèbre comme application d'une variété de langages de modélisation à l'intérieur et à l'extérieur des mathématiques.

D'autres chercheurs, en particulier A. Sfard, toujours dans une ligne de recherche socio-cognitive, se sont concentrés sur le caractère éminemment discursif du développement de la pensée algébrique et ont identifié les étapes de sa maturation au fil des années, du primaire au secondaire, ne considérant pas tant l'algèbre comme une arithmétique généralisée que comme l'évolution d'un méta-discours sur l'arithmétique (l'algèbre comme méta-arithmétique).

Étant donné que la première approche (selon Kaput) me semble plus répandue à l'école, je me concentrerai davantage sur la seconde car elle offre une méthode moins connue mais très efficace, à la fois de nature interprétative (sur le développement du langage algébrique) et didactique (sur les propositions didactiques qui en découlent).

3. L'algèbre comme discours

L'idée que l'algèbre est **un langage** dans lequel les sciences et d'autres branches des mathématiques sont pratiquées nous accompagne depuis des siècles, alors que la controverse sur ce point se poursuit. La définition alternative, selon laquelle l'algèbre est **un discours**, répond à certaines des préoccupations exprimées par les objecteurs de l'approche algébrique comme langage. Tout en préservant la centralité du langage, cette définition transfère l'algèbre de la catégorie des outils passifs à celle de **l'activité humaine**.

Anna Sfard (Caspi & Sfard, 2012) distingue soigneusement le langage du discours. Le discours et le langage appartiennent en fait à des catégories ontologiques différentes, bien que liées : le premier est caractéristique d'une activité humaine tandis que le second est un système symbolique. En tant que forme d'activité humaine, les discours vont bien au-delà du vocabulaire et des règles grammaticales ; ils peuvent différer les uns des autres même s'ils s'expriment avec les mêmes mots et combinaisons lexicales. Les discours comprennent également de nombreuses formes de communication, non seulement verbales, et peuvent différer par leur vocabulaire comme par exemple l'anglais et l'italien, tout en étant toujours considérés substantiellement comme les mêmes.

Pour classer les discours, nous devons suivre les conseils donnés par L. Wittgenstein (1953, p. 10) et rechercher des « similitudes de familles » plutôt que des éléments universels communs. Ces similitudes dans le discours algébrique (que l'on retrouve dans de nombreuses copies du RMT) sont par exemple détectables si l'on tient compte de l'utilisation des mots, des médiateurs visuels, des récits et des pratiques routinières.

La définition de l'algèbre (et des mathématiques en général) comme discours, donnée par Sfard, est un changement ontologique qui a des implications importantes sur la façon dont nous voyons le développement de la pensée algébrique et la façon dont nous l'étudions. En observant les exemples de copies RMT et les commentaires des analyses a posteriori, on remarque que certains illustrent le discours algébrique sous la forme d'un discours informel spontané sur les processus et les relations numériques, tandis que d'autres montrent son évolution ultérieure comme résultat de la rencontre scolaire des élèves avec le discours algébrique formel.

Je définis donc l'algèbre élémentaire comme une sous-catégorie du discours mathématique que les gens développent en réfléchissant sur les relations et les processus arithmétiques. Pour le dire plus simplement, **l'algèbre élémentaire** (comme celle qui apparaît dans nos exemples et que les analystes du RMT auront vue dans de nombreuses copies rendues après les épreuves) est un **méta-discours sur l'arithmétique**.

Selon la littérature, trois types de tâches méta-arithmétiques donnent naissance à ce type particulier de discours : schémas numériques, équations et raisonnement quantitatif ; ils sont tous les trois présents dans les exemples du RMT.

<u>Schémas numériques</u>. À l'aide de l'appareil symbolique, ces schémas peuvent être présentés sous forme d'égalité, comme dans $a (b + c) = ab + ac$. Il faut noter ici que, si rien dans cette dernière proposition ne le dit explicitement, il s'agit en fait d'un morceau de méta-arithmétique. En fait, l'énoncé symbolique $a (b + c) = ab + ac$ est une abréviation de la phrase *pour multiplier un nombre par une somme de deux autres nombres, il est possible de multiplier d'abord chacun des deux autres nombres par le premier puis d'additionner les résultats*.

Ce type de récit méta-arithmétique peut être appelé *généralisation*.

<u>Les équations.</u> Le deuxième type d'activité qui génère l'algèbre consiste en des questions sur des quantités inconnues impliquées dans les calculs dont les résultats sont donnés. Ce type de tâche est décrit dans le langage algébrique moderne comme la résolution d'équations. En effet, les équations, par exemple $2x + 1 = 13$, sont des méta-questions sur les processus numériques; dans ce cas, la question est : *quel nombre, doublé puis augmenté de 1, donne 13 ?*

<u>Raisonnement quantitatif.</u> Le troisième type d'activité qui génère l'algèbre consiste en un raisonnement sur des séquences numériques (directes ou produites à partir d'autres représentations, par exemple géométriques), dans lesquelles certaines relations sont découvertes. Ce type de tâche est décrit en langage algébrique comme une règle (fonction), dans laquelle une variable dépend d'une ou plusieurs autres. Exemple: *Quel sera le 50ème terme de la séquence 2, 4, 6, ...?* Elle concerne donc la conceptualisation de la notion de fonction, qui sera discutée plus loin.

Selon ces définitions, la pensée algébrique se développe chaque fois que nous examinons les relations et les processus numériques dans la recherche d'une généralisation ou dans une tentative de trouver une inconnue ou de comprendre une règle.

Généralement, l'utilisation d'une notation symbolique particulière est considérée comme un signe spécifique de l'algèbre. Pourtant, les moyens symboliques ne sont pas une caractéristique nécessaire des récits impliqués dans aucune de ces activités méta-arithmétiques.

Si quelqu'un pense que seules les tâches algébriques les plus simples et les plus élémentaires peuvent être gérées sans symbolisme, voici un exemple surprenant d'il y a plus de quinze siècles dans lequel on trouve un énoncé algébrique pré-symbolique assez poussé : *Multipliez la somme de la progression par huit fois la différence commune, ajoutez le carré de la différence entre le double du premier terme et la différence commune, prenez la racine carrée de cela, soustrayez le double du premier terme, divisez par la différence commune, ajoutez un, divisez par deux. Le résultat sera le nombre de termes.* (traduit du texte sanscrit d'A̅ryabhaṭ ya, 499 AD, dans Boyer et Mertzbach, 2010, p. 397; la traduction est de l'auteur).

C'est un bel « exercice de style »! J'en donne l'explication. Peut-être que certains enseignants pourront s'en inspirer pour une leçon dans laquelle l'histoire et les mathématiques se rencontrent, en hommage à une culture qui, dans son langage arithmétique, contenait également un mot pour zéro (śūnya), quelque chose d'inconnu dans notre culture occidentale, pour de nombreux siècles encore.

Bien qu'il ne soit pas immédiatement évident, le texte du mathématicien indien présente la solution d'une équation quadratique: il s'agit d'une méthode pour trouver le nombre d'éléments d'une progression arithmétique, dont le premier terme, la raison et la somme sont donnés.

En fait, traduite en langage algébrique moderne, indiquant par a le premier élément, par S la somme de la progression, par d la raison (différence entre deux termes successifs), la phrase devient parfaitement compréhensible pour nous aussi, comme le montre la *figure 3*. Tout en considérant les difficultés de communication de cette intrication verbale complexe comparée à son homologue symbolique, il est facile de comprendre pourquoi la symbolisation du discours était l'une des principales préoccupations pour le développement ultérieur de l'algèbre. Cependant, bien que la symbolisation puisse être l'aspect le plus évident du développement, elle n'a été qu'une partie du processus historique plus général de formalisation du discours algébrique, de la transformation globale et délibérément entreprise, mis en œuvre par les mathématiciens afin de maximiser l'efficacité de communication méta-arithmétique.

Multipliez la somme de la progression par huit fois la différence commune : $8Sd$
ajoutez le carré de la différence entre le double du premier terme et la différence commune : $8Sd + (2a - d)^2$
prenez la racine carrée de cette différence : $\sqrt{8Sd + (2a-d)^2}$
soustrayez le double du premier terme : $\sqrt{8Sd + (2a-d)^2} - 2a$
divisez par la différence commune : $[\sqrt{8Sd + (2a-d)^2} - 2a]/d$

ajoutez un, divisez par deux : $\{[\sqrt{8Sd + (2a-d)^2}]/d + 1\}/2$

On obtient : $\{[\sqrt{8Sd + (2a-d)^2}]/\mathrm{d} + 1\}/2d$

figure 3

L'objectif général de l'efficacité est divisé en trois objectifs spécifiques, qui répondent à autant de besoins contenus dans l'objectif général : la *désambiguïsation*, c'est-à-dire la prévention de la possibilité d'interprétations différentes des mêmes expressions (la polysémie est une richesse en langage naturel, mais devient un défaut en mathématiques, source de malentendus très dommageables) ; la *compression,* c'est-à-dire la transformation de phrases longues comme celle mentionnée ci-dessus, dont la compréhension demande de grands efforts, en expressions concises et facilement manipulables ; la *standardisation*, ou la possibilité de s'assurer que tous les interlocuteurs suivent les mêmes règles de communication, un objectif partiellement et pas toujours atteint en langage naturel.

Ces trois objectifs spécifiques sont atteints grâce à certains processus et règles qui sont entrés dans le langage algébrique comme réponses aux besoins énumérés ci-dessus : voyons lesquels. La réponse au besoin de *désambiguïsation* est la régulation, c'est-à-dire la constitution de règles de conduite discursive explicitement introduites, de lois grammaticales rigoureuses et cohérentes. La *compression* est obtenue à travers deux processus : celui que l'on appelle la *réification*, qui permet de transformer les récits sur les processus en actions sur les objets et en objets réels - par exemple de $\sqrt{2} = 1,414...$ comme calcul à $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ comme extension de $\mathbf{Q}$ dans lequel on peut opérer algébriquement, par exemple en rationalisant - et la *symbolisation*, c'est-à-dire le changement de médiation visuelle qui s'obtient en remplaçant les noms, les prédicats et les verbes par des idéogrammes. La symbolisation à son tour amplifie l'effet soit de la réification, soit de la régulation. Pour ce qui concerne la *standardisation*, les méta-règles du discours algébrique et le système symbolique proposé ont été universellement acceptés au sein de la communauté mathématique multilingue, rendant ainsi l'algèbre indépendante des différentes langues. On constate que c'est précisément la nature idéographique des symboles qui les rendent indépendants du langage et en font donc un outil idéal de standardisation. On voit dans le *tableau 1* le cadre synoptique de ces objectifs et les méthodes pour les atteindre.

OBJECTIFS		METHODES	
	Régulation	Réification	Symbolisation
Désambiguïsation	X		
Standardisation	X		X
Compression		X	X

tableau 1. Objectifs du discours algébrique et méthodes pour les atteindre

La principale différence entre les deux formes du discours algébrique, informelle et formelle, réside dans leur réglementation explicite et rigoureuse. Des deux types de discours, seul le formel s'accompagne d'un méta-discours régulateur (grammaire) qui affirme explicitement ses méta-règles ; et seulement dans ce dernier cas, les méta-règles sont le produit d'une législation délibérée, qui vise à prévenir l'ambiguïté, la compression (en langage naturel ces deux dernières sont souvent en conflit) et la normalisation.

La dichotomie informelle / formelle est parallèle à la distinction rhétorique / symbolique introduite par les historiens des mathématiques (Boyer et Merzbach, op. Cit., P. 342). En fait, il a été dit que trois phases du développement historique de l'algèbre peuvent être reconnues (Nesselmann, 1842): (i) la phase rhétorique[1] ou précoce, dans laquelle tout est écrit entièrement en mots (jusqu'à Diophante, environ 250 apr.J.-C.) ; (ii) un stade syncopé ou intermédiaire, dans lequel certaines abréviations sont adoptées (Diophante, Arithmétiques); (iii) une étape symbolique (à partir de Viète, 1540-1603).

Il est important de porter une attention particulière à la question de savoir comment ces deux volets, formel et informel, interagissent : en fait, ils alimentent leur croissance mutuelle. Certaines recherches - en particulier par A. Sfard et ses collaborateurs (op. Cit.), mais aussi voir le chapitre 15 précité dans Cai (op. Cit.) - mettent en évidence une structure hiérarchique du discours algébrique, esquissant un modèle qui peut être utile dans les analyses a posteriori pour la classification des copies.

4. Une hiérarchie de niveaux dans les discours algébriques

S'il est vrai que le discours mathématique se développe en formalisant et en annexant ses méta-discours, il doit être possible de décomposer tout discours mathématique, y compris l'algèbre, en une hiérarchie de niveaux, ordonnée selon la relation de proximité : chaque strate dont la structure, sauf la première, est un discours sur le discours qui constitue le niveau précédent. En d'autres termes, cette hiérarchie provient de l'analyse de ce qui est considéré comme une forme « canonique » d'un discours donné dans une séquence de discours où chaque élément est le méta-discours du précédent.

Cette séquence hiérarchique marque une progression par rapport à la complexité et au pouvoir généralisateur de ses éléments : la hiérarchie proposée pourrait être vue comme un schéma du développement historique du discours algébrique. Avec une métaphore, on peut penser que les discours, comme les arbres, apportent des enregistrements

[1] Le terme *algèbre rhétorique* est aussi utilisé dans les analyses a posteriori du RMT.

de leur propre croissance : les strates discursives, comme les cernes dans un tronc d'arbre, sont des preuves facilement déchiffrables de leur croissance passée. L'argument de cette affirmation est simple : on peut supposer que l'ordre des strates reflète en toute sécurité l'ordre du développement historique simplement parce qu'il est déraisonnable de penser à un méta-discours qui émerge avant le discours lui-même : ce serait comme imaginer une maison construite de son toit vers le bas.

Quant au développement ontogénétique du discours algébrique, c'est-à-dire son développement au cours de la vie d'un individu, il dépend trop de l'enseignement pour permettre des généralisations de grande envergure. Avec ces limites, cependant, le modèle hiérarchique peut également être utile dans la recherche sur l'apprentissage de l'algèbre d'au moins deux façons.

Tout d'abord lors d'une analyse a posteriori des copies et de ses retombées sur la conception des problèmes du RMT : les strates inférieures peuvent être vues comme décrivant la croissance spontanée du discours méta-arithmétique et peuvent également être utilisées comme outils de diagnostic pour identifier le degré de maturité de la pensée algébrique chez un élève. Cette modalité apparaît dans certains commentaires des analyses a posteriori du RMT.

Deuxièmement pour les suggestions didactiques qui peuvent en être tirées : le modèle hiérarchique semble indiquer la trajectoire à suivre dans l'enseignement afin d'assurer un apprentissage significatif de l'algèbre. En fait, si chaque niveau de la hiérarchie est un discours sur son prédécesseur, l'introduction d'un nouveau niveau avant que l'élève ne maîtrise le précédent comporte le risque que l'élève ne sache tout simplement pas de quoi parle le nouveau discours.

Pour illustrer ces deux points, j'introduis un exemple dans lequel il est possible de saisir un premier aspect du chemin vers l'algèbre en analysant les différents niveaux de description verbale d'une écriture algébrique simple, par exemple 3 + 2 (n-1) :

- au premier niveau on a la description d'un processus : *soustraire 1 de n, multiplier par 2 et ajouter 3.*
- au deuxième niveau il y a une description intermédiaire, que Sfard appelle «granulaire»: *je multiplie par 2 la différence entre n et 1 et j'ajoute 3.* Ici l'expression « *la différence entre n et 1* » s'exprime avec un nom et non plus avec un verbe ; le changement exprime un premier pas vers la réification ; l'expression est encore plongée dans une phrase où l'on retrouve des verbes qui expriment des actions : c'est un grain réifié avec l'utilisation de noms au sein de processus encore exprimés avec des verbes (d'où la métaphore de la granulation).
- à un troisième niveau on trouve: *la somme de 3 et du produit de 2 par la différence entre n et 1.* Ici la description est complètement objectivée : les verbes ont complètement disparu au profit des noms.

Ce processus est général : après les phénomènes de « granularisation » des expressions *j'additionne*, *je soustrais*, *je multiplie*, ... *la somme*, *la différence* ... prennent enfin le dessus. Nous sommes presque à l'algébrisation totale du discours : les symboles permettent à la fin de synthétiser ce développement discursif avec une formule qui exprime sous forme visuelle et compressée ce qui s'objective progressivement. À noter que le passage des verbes, qui expriment des actions de (ou d'un) sujets, aux noms constitue une décentralisation du sujet, que Sfard appelle aliénation avec une expression heureuse d'origine philosophique.

On retrouve ces différents niveaux dans les copies des élèves : l'analyse nous permet ainsi de les situer aux différentes étapes de ce chemin idéal vers l'algèbre.

Entrons maintenant dans cette hiérarchie de manière plus approfondie, en décrivant les caractéristiques générales plus en détail. Entre-temps, nous distinguerons une algèbre à valeur constante, comme celle de la formule qui vient d'être analysée, et une algèbre à valeurs variables, dans laquelle les relations entre les variables impliquées s'expriment à travers le concept de fonction. Par exemple, dans le problème de la *figure 4* où l'on demande de calculer combien de balles il y aura dans la case de rang 100 et combien dans celle de rang *n*, les élèves, comme le calcul direct est très long, trouveront la règle (fonction) de manière plus ou moins explicite qui relie le rang de la case au nombre de boules $n \rightarrow n^2$: c'est précisément ce que l'on peut appeler l'algèbre à valeurs variables. L'algèbre à valeurs constantes et l'algèbre à valeurs variables peuvent être exprimées de manière informelle (avec le langage naturel diversement articulé, comme dans l'exemple discuté ci-dessus) ou à un niveau formel (avec l'utilisation d'un langage symbolique plus ou moins entrelacé avec le naturel : de « dans la case *n*, il y a *n* fois *n* balles » à « n^2 »). L'algèbre à valeur constante (fixe) indique le fait que, quel que soit le support sémiotique utilisé, les signifiants représentant les objets sont interprétés comme des références à des nombres spécifiques, connus ou inconnus, donnés ou recherchés. Au lieu de cela, l'algèbre à valeurs variables (fonctionnelle) se compose de discours qui se sont développés en réponse au besoin d'une description des processus de changement, tels que le mouvement.

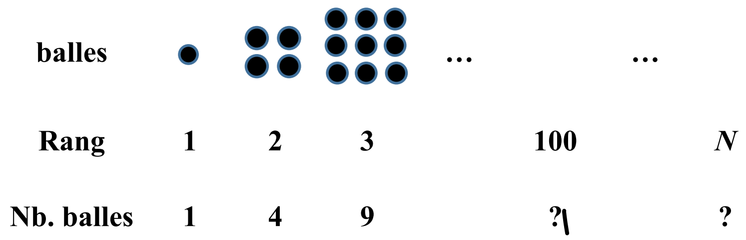


figure 4

En résumé, l'algèbre informelle et formelle sont structurées en deux niveaux discursifs, selon qu'il existe des valeurs constantes (à leur tour divisées en trois sous-niveaux, de 1 à 3) ou des valeurs variables: voir *figure 5*.

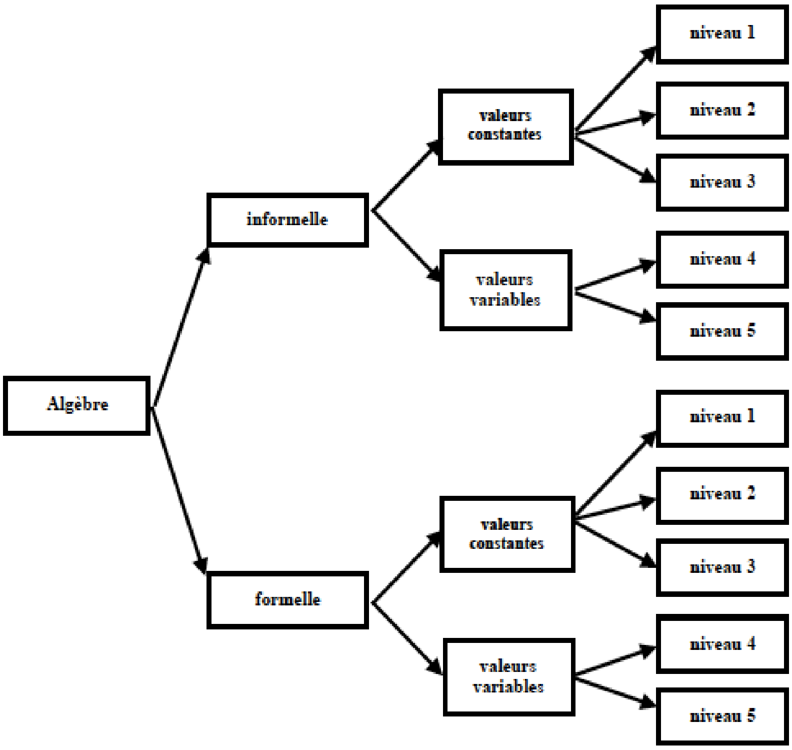


figure 5

5. Les différents niveaux dans les discours algébriques

Je développe maintenant cette hiérarchie complexe en espérant qu'elle peut être un outil utile pour l'équipe RMT, soit pour classer les problèmes algébriques dans une analyse a priori, soit pour identifier les différents niveaux auxquels les copies des élèves se situent.

5.1. Le premier niveau d'algèbre informelle à valeurs constantes (procédural)

Au premier niveau procédural du discours algébrique, où l'attention est focalisée sur les calculs numériques, les descriptions de ces calculs suivent leur ordre linéaire : cependant le calcul est présenté, en mots ou en symboles, les opérations sont listées dans l'ordre de leur exécution. Ici, le symbole d'égalité est souvent utilisé comme s'il s'agissait d'un bouton « retour » d'une calculatrice. La première catégorie de tâches caractéristiques consiste en problèmes qui, résolus formellement, concernent des équations de la forme $ax + b = c$. Cette équation peut être résolue simplement en « annulant », c'est-à-dire en inversant les opérations appliquées au nombre inconnu pour obtenir le résultat. Comme le montrent Filloy et Rojano (1989), les enfants sont souvent capables de trouver ce type de solution sans y être instruits, à condition qu'on leur dise qu'une expression comme $3x$ signifie « 3 fois x ».

Dans la généralisation des activités, les règles pour le calcul d'un élément d'un modèle sont également présentées de manière séquentielle, correspondant aux prestations réelles du calcul.

Quand, par exemple, on demande « *Comment trouverais-tu le 50^e^ élément (n^e^) de la séquence 3, 5, 7, 9, … ?* », un élève pourrait répondre : « *Je retire 1 du numéro (rang) demandé, je multiplie ce résultat par 2 et j'ajoute 3* ». Cette chaîne d'opérations est purement linéaire:

$$n \rightarrow -1 \rightarrow \times 2 \rightarrow +3$$

Souvent, les enfants ont tendance à éviter de soustraire 1: ils ajoutent un 1 et donc la règle devient 2 fois *n* plus 1.

5.2. Le deuxième niveau d'algèbre informelle à valeurs constantes (granulaire)

Au deuxième niveau (granulaire), l'accent est toujours mis sur les calculs numériques, mais les descriptions de ces processus ne sont plus des copies une à une de la séquence des opérations effectuées pendant les calculs réels. Étant donné que parfois la chaîne de calculs peut être longue ou discontinue (comme lorsque c'est nécessaire de mémoriser les résultats intermédiaires avant de les utiliser réellement), l'élève peut préférer les conditions récursives de la séquence : par exemple dans le cas d'une succession 3, 5, 7, 9, … , chaque élément peut être obtenu à partir du premier en ajoutant 2. Dans les cas simples, courants dans les programmes scolaires, l'étape récursive nécessite de ne pas mentionner plus d'une opération (dans l'exemple : ajouter 2).

Mais dans d'autres cas, la transition peut être plus compliquée. Comme exemple «extrême», considérons le texte de Āryabhaṭ ya (fig. 3). Bien que formulé comme une description d'un processus (une séquence d'opérations numériques ; en particulier *multiplier*, *ajouter*, etc.), ce texte comprend des clauses composées, telles que : *le carré de la différence entre deux fois le premier terme et la différence commune*. Ces clauses sont des substantifs, dans lesquels des verbes comme additionner, multiplier, etc. ont été remplacés par des substantifs comme somme ou produit, ou par des adjectifs comme multipliés, et l'effet combiné de ces deux substitutions sont :

- la **réification** = le déplacement de l'attention du processus vers son résultat ;
- l'**aliénation** = l'annulation de l'exécuteur humain.

En raison de ces modifications, les clauses résultantes sont lues comme des descriptions d'objets au lieu d'actions. À ce stade du développement de l'algèbre, aucune prescription, verbale ou symbolique, n'énumère les opérations arithmétiques dans l'ordre exact de leur mise en œuvre. De telles expressions sont appelées métaphoriquement *granulaires* car elles peuvent être considérées comme le résultat du raccourci de la chaîne des opérations de base en liant des parties de cette chaîne en *nœuds* ou *grains*. Les grains doivent être interprétés comme les résultats de calculs auxiliaires plutôt que comme des calculs, c'est-à-dire comme des objets plutôt que comme des processus.

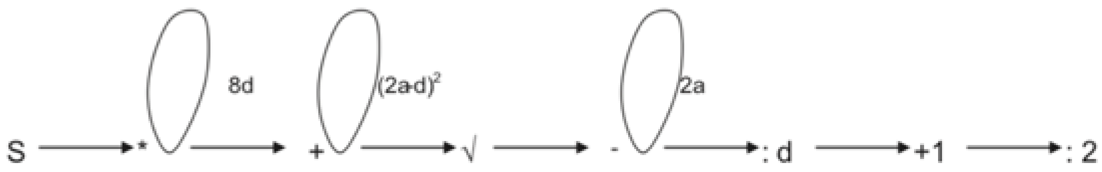


figure. 6

Cette "granulation" est présentée dans la *figure 6*. À noter que l'aspect superficiel de cette chaîne de calcul n'est pas très différent du discours algébrique de niveau 1 : le sujet est toujours intéressé par la performance séquentielle des opérations de calcul, sauf pour le fait de contourner la nécessité d'interrompre la séquence chaque fois qu'un calcul auxiliaire est nécessaire en remplaçant ce calcul par son produit.

Il est cependant important de souligner qu'à ce stade du développement du discours algébrique, ces objets intermédiaires - les résultats provisoires des calculs - n'ont qu'une existence transitoire. Bien qu'exprimés symboliquement, ils peuvent apparaître dans le processus de calcul, mais ne sont pas considérées comme des réponses finales légitimes aux problèmes algébriques.

C'est peut-être ce qui a empêché Diophante, l'inventeur du genre « hybride » connu sous le nom d'algèbre syncopée, de se diriger vers une véritable algèbre symbolique.

5.3. Le troisième niveau d'algèbre informelle à valeurs constantes (objectivation)

Le troisième niveau (objectivé) de l'algèbre est celui pratiqué par ceux qui participent pleinement au discours mathématique. Ici, l'état discursif d'une expression algébrique composée n'est pas différent de celui d'un nombre : cette construction complexe peut faire partie de toute opération numérique et peut apparaître comme un substitut du nombre dans n'importe quelle expression numérique. En particulier, des expressions algébriques complexes, verbales ou symboliques, seront désormais utilisées dans les descriptions aliénées (dépersonnalisées) des relations entre les objets.

Voici un exemple de cette description objective : « Le produit de la somme de deux nombres et de leur différence est égal à la différence entre les carrés de ces nombres ». Ceci doit être comparé à la description granulaire dans laquelle l'acteur humain est présent : « Au lieu de multiplier la somme des deux nombres par leur différence, vous pouvez (tu peux) soustraire le carré du deuxième nombre du carré du premier ».

Ce n'est qu'à ce niveau supérieur d'algèbre à valeur constante que les expressions algébriques comptent comme des objets à part entière. Ce n'est donc qu'à ce stade du développement du discours algébrique que l'élève peut pleinement apprécier la logique de réaliser la même opération des deux côtés d'une équation comme moyen de la résoudre.

En fait, les propositions mathématiques apparaissent souvent comme si elles étaient constituées de déclarations sur des choses matérielles dans lesquelles les noms des objets matériels ont été remplacés par des noms mathématiques. Mais l'objectivation n'est pas une qualité inévitable du discours mathématique : seuls quelques signes d'objectivation se retrouvent généralement dans le discours mathématique (algébrique) des débutants. Leur discours vers l'objectivation doit être développé progressivement et de manière appropriée.

5.4. Algèbre à valeur variable : pensée fonctionnelle

Ce niveau est obtenu lorsque le discours algébrique prend en compte les variations numériques plutôt que les valeurs constantes. Dans ce cas, des expressions algébriques qui, au troisième niveau, sont comprises comme désignant un seul élément d'un modèle (la mise en œuvre de la règle qui définit le modèle pour un « input » spécifique) ou un « output » spécifique d'un processus de calcul, sont désormais utilisées encore une fois, mais cette fois, ils sont interprétés comme désignant le modèle ou le processus dans son ensemble. Les nouveaux objets qui en résultent sont donc des variables et des fonctions. Cette transformation du discours est signalée, notamment, par le fait que le signifiant peut maintenant être réalisé sous la forme d'un graphique ou d'un tableau. Mais surtout, ce changement est motivé par la nature des nouvelles tâches algébriques, qui élargissent considérablement la notion de ce qui en résulte comme activité algébrique. Plutôt que de simplement résoudre des équations ou de généraliser des relations numériques statiques, l'algébriste s'occupe maintenant de construire des modèles pour les processus de changement et d'étudier les objets (fonctions) mathématiques résultants afin de mieux comprendre les phénomènes étudiés.

D'un point de vue didactique, bien que les cours d'algèbre formels utilisent traditionnellement une approche transformatrice qui met l'accent sur les symboles, les expressions et les équations littérales (Kieran, 2007), la recherche documente des idées fausses et le manque de compréhension structurelle de ces objets mathématiques chez les étudiants de tous les âges. Ces résultats ont conduit certains à suggérer qu'une méthode basée sur les fonctions pourrait servir de meilleur concept organisationnel pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre.

Les arguments en faveur de cette méthode comprennent :

- l'idée que les fonctions peuvent combiner un large éventail de sujets, qui resteraient autrement isolés, tels que les opérations sur les nombres, les fractions, les rapports et les proportions et les formules relatives aux quantités ;
- l'observation que les fonctions peuvent servir de lien entre les expériences quotidiennes des élèves et les mathématiques ;
- la découverte que cette méthode encourage naturellement l'attitude de recherche des étudiants.

La pensée fonctionnelle fournit un contexte riche pour le développement de pratiques de la pensée algébrique pour généraliser, représenter, justifier et raisonner à propos des relations entre les quantités. De plus, les recherches les plus récentes montrent que les élèves des écoles primaires et moyennes peuvent réussir à raisonner algébriquement sur les relations fonctionnelles. Il semble que les difficultés manifestées par les élèves plus âgés puissent provenir d'un manque d'expérience de la pensée fonctionnelle au primaire.

Deux perspectives sont généralement adoptées lorsqu'il s'agit de l'algèbre élémentaire basée sur le concept de fonction :

- une perspective de correspondance
- une perspective de coordination / co-variation.

Les deux considèrent les relations fonctionnelles entre les quantités, mais les interprètent différemment.

Mathématiquement, une fonction f entre un ensemble A et un ensemble B (pouvant coïncider avec A) est un sous-ensemble du produit cartésien A×B (c'est-à-dire des paires ordonnées $<a, b>$ avec $a \in A$, $b \in B$), de sorte que pour chaque $a \in$ A il y a un et seulement un $b \in$ B avec $<a, b> \in f$. Cette définition n'est présentée ici qu'à titre de révision pour le lecteur et certainement pas parce qu'elle devrait être utilisée dans les classes du premier cycle d'enseignement, compte tenu de sa complexité et de son abstraction. Mais les deux perspectives en sont une conséquence, et c'est bien qu'elle soit connue des enseignants.

Une perspective de correspondance est traditionnellement la façon la plus courante d'aborder l'algèbre : elle implique le développement d'une règle en forme fermée pour décrire une relation entre quantités qui peut être utilisée pour analyser et prédire le comportement des fonctions en jeu. Par exemple : le nombre de rang n est $3n + 2$. De telles règles sont utiles aussi car elles permettent de déterminer des informations sur une valeur d'une fonction spécifique sans en connaître les autres valeurs. La perspective de co-variation consiste à examiner les fonctions en termes de changements coordonnés des valeurs de x, par exemple x_1, x_2, ... x_m, et de y, par exemple y_1, y_2, ... y_m. Elle inclut la possibilité de « se déplacer opérationnellement » de y_m à y_{m+1} en coordonnant la transition de x_m à x_{m+1}. Pour un tableau à deux colonnes, cela implique de coordonner la variation dans deux colonnes lorsqu'on se déplace vers la bas (ou vers le haut) du tableau.

Ce type de pensée « covariant » résulte de la façon dont les élèves perçoivent les relations, en particulier lorsque la variable indépendante est le temps. L'accent de la pensée covariante sur la coordination du changement de y avec le changement de x prend une importance croissante à mesure que les élèves progressent vers des mathématiques plus formelles. Il peut aider les élèves à développer une compréhension des fonctions en termes de variations : par exemple, les fonctions linéaires impliquent des taux de variation constants, les fonctions quadratiques impliquent des taux de variation qui changent de manière constante. Bien qu'une grande partie de ces types de recherche aient eu lieu dans les classes des dernières années d'école primaire (3 – 5), des recherches récentes montrent que les élèves, dès la première année d'école primaire, sont capables de généraliser et de raisonner avec des relations fonctionnelles dans des contextes numériques de manière étonnamment sophistiquée. C'est donc une erreur de reporter l'enseignement des relations fonctionnelles aux classes supérieures.

5.5. Analyse concrète du discours algébrique à l'aide de différents niveaux

Il est possible d'utiliser toute cette hiérarchie (du premier niveau procédural à la pensée fonctionnelle) pour classer les copies du RMT. Je l'ai fait pour quelques exemples dans lesquels j'ai comparé ceux de 5e primaire (cat. 5) avec ceux de la 2e année du Collège (cat 7). (On trouvera en annexe un exemple d'analyse détaillée de copies mentionnées au §1).

La principale question que nous nous posons lors de l'analyse d'une copie d'élève concerne le degré de réification : les descriptions des élèves parlent-elles de « faire » (calculs) ou de propriétés des objets ? En effet, la réification est le passage-clé vers la désambiguïsation et la condensation des récits méta-arithmétiques, elle peut donc être considérée comme caractéristique de la « signature » des phrases algébriques formelles.

Dans l'analyse on peut se demander si les règles des élèves se réfèrent à des actions, comme dans le cas où l'on dit « multiplier *a* par *b* et ajouter *c* », ou à des objets, comme dans le cas « la somme de *c* et du produit de *a* par *b* ». En d'autres termes, nous essayons de comprendre le degré de granulation dans les règles décrites par les élèves.

De plus, il faut faire très attention au classement des composantes du discours écrit par les élèves, comme illustré en annexe.

Le tableau général qui se dégage des analyses des copies du RMT que j'ai examinées est le suivant (par M j'indique les résultats produits par les élèves du Collège, par P ceux du Primaire) :

- Les règles décrites en M sont plus courtes (plus condensées) que celles de P ;
- M et P utilisent des méthodes similaires pour exprimer l'acte linguistique « d 'identification »[2] (ce sont des métaphores, des métonymies directes et inverses, deixis). Parfois, ils utilisent un nombre générique au lieu d'une variable (comme Diophante le fait);
- Idéogrammes : ils sont plus fréquents en M (les élèves utilisent souvent le signe □ dans des expressions telles que $2\,\square + 5 = 11$; en général, la signification de □ n'est pas encore celle d'une variable, ce n'est qu'une marque);

[2] J'utilise le terme « identification », en l'absence d'un meilleur mot, pour indiquer ce qui est exprimé sous forme expressive par le terme « saming » en anglais (néologisme pour un participe, qui indique donc une action, de « same », « même » en anglais: donc action d'identifier deux termes ou objets comme égaux) par lequel A. Sfard désigne le processus linguistique suivant lequel un ensemble d'entités reçoit un nom unique, par exemple le mot «nombre» ou le signe «*n*» pour tout naturel 0, 1, 2, … . Ce changement linguistique est l'essence même du processus de généralisation. Grâce à lui, vous pouvez transformer des expressions arithmétiques infinies structurées de manière similaire (par exemple, « le carré de 3 », « le carré de 11 », etc.) en une seule expression méta-arithmétique (« le carré d'un nombre » ou n^2). Le signifiant de l'identification (« un nombre », n) est appelé variable. L'identification est un cas particulier d'identification d'un genre pour un objet (voir note 3).

- En M, on trouve moins de productions procédurales : il n'y a pas de verbes pour les actions et moins de verbes pour les opérations ; une plus grande utilisation des prépositions comme : plus, fois ; une moindre utilisation des progressions dans le temps.
- En M on utilise davantage les variables pour représenter les résultats intermédiaires (avec une plus grande similitude avec les représentations algébriques).

En ce qui concerne les solutions au problème *Les prunes*, présenté en §1, on observe en général ce qui suit (les analyses plus détaillées figurent en Annexe).

Dans l'exemple algébrique (*tableaux 3 et 4*) les élèves oscillent entre le niveau granulaire (niveau 2) surtout dans la première partie et celui d'objectivation (niveau 3) dans la deuxième partie : le registre idéographique les aide à relier les deux niveaux. Ils arrivent également à un certain degré de compression. Dans l'exemple rhétorique (*tableau 2*), les élèves oscillent entre la description procédurale (niveau 1) et la description granulaire, avec quelques petites traces de compression.

Dans les exemples observés de procédures par essais (*tableaux 5 et 6*), on trouve des germes de relations fonctionnelles : en effet il y a des traces d'objectivation fonctionnelle réalisées presque exclusivement avec l'élément idéographique *Tableau* (plus structuré dans le premier exemple que dans le second) et un élément linguistique de genre[3] (*reste*) : ils fournissent un composant granulaire sur lequel ils peuvent fonctionner concrètement. L'exemple confirme également que le début d'une interprétation fonctionnelle dépend à la fois du contexte du problème et de la stratégie de solution utilisée.

Par exemple, une stratégie par équations entraînera difficilement une interprétation fonctionnelle car elle est liée à une interprétation relationnelle statique ; au contraire, une stratégie d'essais et d'erreurs conduira parfois plus facilement à une interprétation fonctionnelle.

6. Discussion

En référence aux trois questions posées au début, j'ai analysé la pensée algébrique comme résultat de l'évolution d'un discours méta-arithmétique : il se développe au fil du temps à travers des étapes successives d'objectivation (processuelle → granulaire → réifiée / compressée).

Les volets selon lesquels cette évolution se déroule sont :

• généralisation,

• les représentations,

• le raisonnement guidé par la syntaxe du discours (conduisant à des équations),

• le raisonnement quantitatif (qui conduit aux fonctions).

Il n'est pas encore clair, d'après la recherche, comment l'entrelacement entre ces volets interagit réellement, au-delà du fait que des interactions semblent exister mais qu'il convient de les cultiver toutes à partir de l'école primaire.

Une conclusion importante de notre discussion est qu'il existe une méta-arithmétique spontanée, qui commence à se développer des années avant l'introduction « officielle » de l'algèbre à l'école. La méta-arithmétique de l'enfant peut subir des transformations importantes, devenant assez proche dans sa syntaxe de l'algèbre scolaire formelle. Un résultat de la recherche est qu'il existe des similitudes structurelles importantes entre la méta-arithmétique verbale des élèves et l'algèbre réifiée formelle. Une explication de ce phénomène est que les structures des formules algébriques ne sont pas différentes de celles des expressions arithmétiques, et donc nos élèves pourraient simplement s'appuyer sur leurs compétences arithmétiques en développement et leurs connaissances solidaires de ces derniers types de structures pour raisonner algébriquement. Cependant, il faut éviter la confusion avec l'idée que l'algèbre est une arithmétique généralisée : c'est plutôt un méta-discours sur l'arithmétique, qui se développe à un autre niveau.

À la lumière du modèle de développement de l'algèbre illustré ici, il est raisonnable de supposer que l'une des trajectoires les plus prometteuses vers l'algèbre formelle n'est pas différente de la voie suivie collectivement par les mathématiciens du passé : l'enseignant peut essayer d'impliquer les enfants dans la formalisation progressive de leur méta-arithmétique naturelle en développant leurs méta-discours spontanés. Après un certain temps, il peut

[3] Une affectation de genre se produit lorsque les objets considérés sont nominalisés dans une catégorie de discours plus large (dans ce cas, le genre est le mot reste, qui indique cette catégorie avec laquelle nous parlons du nombre qui reste). L'indication de genre apparaît donc à la suite d'une découverte de régularité et constitue la transition vers l'identification (saming) avec des termes mathématiques généraux mais plus spécifiques du genre (voir note 2).

aider les élèves à prendre conscience de certaines imperfections de leurs solutions (mais en soulignant positivement l'inventivité et l'utilité de leur démarche). Cela peut constituer, en classe, le début d'un chemin vers la réification, la symbolisation et la régulation.

Le reste peut être fait en procédant systématiquement selon deux voies : en cultivant la méta-arithmétique spontanée des élèves et, simultanément, en augmentant progressivement leur participation dans le discours algébrique formel. L'utilisation de technologies peut également favoriser ce processus.

Le choix de faire croître l'algèbre formelle à partir de l'informel est largement soutenu par les théories dites acquisitionnistes et participatives de l'apprentissage, et surtout par les observations de Vygotsky sur les concepts « quotidiens » (informels, spontanés) et « scientifiques » (formels) (Vygotsky, 1987) et l'énoncé qui en résulte que « si les deux formes ne se connectent pas, il n'y a pas de véritable développement du concept » (Daniels, 2007, p. 314).

Cette approche didactique présente au moins deux avantages évidents.

- Premièrement, s'il est mené de cette manière, l'ensemble du processus a de bonnes chances d'apparaître rationnel et motivé pour les élèves : après avoir réalisé les faiblesses de leur méta-arithmétique spontanée, les enfants sont susceptibles d'être bien conscients de ce qu'ils font et pourquoi.

- Deuxièmement, dans ce processus, l'algèbre reste proche du discours des enfants dans tout le parcours. Cette approche de l'enseignement semble donc plus efficace que beaucoup d'autres pour garantir la continuité entre les discours que l'élève connaît déjà et ceux qu'il doit encore maîtriser.

Tout cela minimise le danger d'un apprentissage purement ritualisé, selon lequel l'élève risque de ne voir le discours algébrique que comme un « discours pour les autres ».

7. Conclusion

S. Eilenberg (1969) a écrit que l'algèbre est comme le sourire du chat du Cheshire, un sourire qui demeure même après la disparition du chat. Mais je soutiens qu'élever des chats du Cheshire est facile si on le fait dès le plus jeune âge et apprend à sourire avec eux. Il ne s'agit pas d'apprendre une langue mystérieuse mais de construire un discours sensé.

Annexe : Les niveaux du discours algébrique

Voici les tableaux avec une analyse détaillée du discours algébrique (formel et informel, à des valeurs constantes et non constantes), en référence aux exemples présentés dans les sections 4 et 5. J'énonce une courte légende qui contient des explications relatives à des termes non discutés précédemment ; la structure des tableaux convient à la fois à l'examen des protocoles écrits (comme c'est le cas pour le RMT) et aux productions orales des élèves.

Légende des termes utilisés :

- **Réponse** : c'est ce que les élèves ont écrit (dans le cas des relevés de notes des activités observées, il peut s'agir de productions orales verbales des élèves)
- **Équivalence fonctionnelle** : indique le type de fonctionnalité de la réponse traduite en langage algébrique standard (généralement exprimé avec des phrases, des mots, des représentations graphiques, etc.)
- **Type** : (indique le type de production; parfois interviennent des typologies étudiées en linguistique)
- verbal : phrases produites par les élèves (écrites ou prononcées)
- mixte : pas seulement verbal
- idéographique : lors de l'utilisation de représentations non verbales
- **Relations :**

  métaphore : établit une connexion entre un contexte source et un objectif qui donne un sens au premier (par exemple le temps et l'espace, comme dans « Noël approche »)

  descripteur déictique : terme indiquant quelque chose (par exemple « ceci », « le nombre ainsi obtenu »)

  métonymie : la partie pour l'ensemble

  métonymie inverse : l'ensemble pour la partie

  marque : typiquement une représentation idéographique pour indiquer l'endroit où doivent être placé les nombres qui satisfont une certaine relation (par exemple $3 + \square = 5$)

  genre : voir note 3

  objectif: la phrase indique explicitement qu'il est nécessaire par exemple trouver une valeur

  règle: lorsqu'une règle implicite ou explicite (pas nécessairement correcte) est utilisée d'une manière ou d'une autre

  fonctionnel

- **particulier :** conceptualise une séquence de cas particuliers sous une forme unitaire (par exemple un tableau)
- **récursif général** : conceptualise une séquence de cas particuliers en tant que règle généralisée entre des valeurs arbitraires successives

Réponse	Équivalence fonctionnelle	Type	Relation
En additionnant tous les **plats**	S	*verbal*	*métaphore*
combien peut-on mettre de **petits**	P	*verbal*	
dans le **moyen** on peut en mettre **2** × dans le **grand 4** × dans le **petit 1** × 2 + 4 + 1 + 2 = **9 petite plats** en tout	$M = 2p$ $G = 4p$ $P = 1p$ $\Sigma p = 9p$	*mixte (verbal + idéographique)*	*métaphore + descripteur déictique*
Combien de prunes y a-t-il **dans le petit panier ?**		*verbal*	*métonymie inverse*
119 : 9 = 13 prunes	$1p = 13$ *prunes*	*mixte*	
Combien de prunes y a-t-il dans les autres paniers ?		*verbal*	
petit = 13 → ×2 **moyen = 26 → ×2** **grand = 52**	$P = 13$ *prunes* $M = P\times2$ *prunes* $G = M\times2$ *prunes*	*mixte*	*métaphore + descripteur déictique*

Tableau 2. Analyse discursive de solution rhétorique (copie du §1)

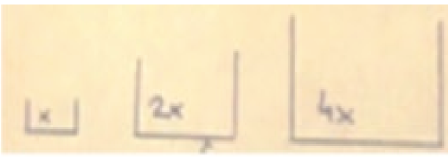
Réponse	Équivalence fonctionnelle	*Type*	Relation
	$x \quad 2x \quad 4x$	*idéographique*	*marque + inconnue*
Même nombre vu les deux fois comme « la moitié de **4** ×	$2x = 4x/2$	*mixte (verbal + idéographique)*	*métaphore + descripteur déictique*
reste	$r = 2x$	*verbal*	*genre*
au début il faut chercher ce que vaut x	$x = ?$	*verbal*	*objectif*
pour ceci on peut recourir à une équation	$E(x) = 0$		*règle*

Tableau 3. Analyse discursive de solution algébrique, partie I (copie du §1)

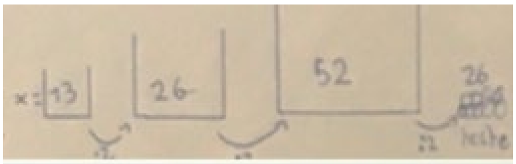
Réponse	Équivalence fonctionnelle	*Type*	Relation
Pour chercher x, *seulement par division*	$x = \Sigma:$	*verbal*	*règle*
$117 = x + 2x + 4x + 2x$ $117 = 9x$ $117 / 9 = x = 13$	*idem*	*idéogramme*	*équation*
maintenant il ne reste qu'à calculer les monimes à partir de x	ax	*verbal*	*règle*
13 + 26 + 26 + 52 = 117	*idem*	*idéogramme*	*arithmétique*
	$x \quad 2x \quad 4x$	*idéogramme*	*marque + valeur trouvée de l'inconnue*

Tableau 4. Analyse discursive de solution algébrique, partie II (copie du §1)

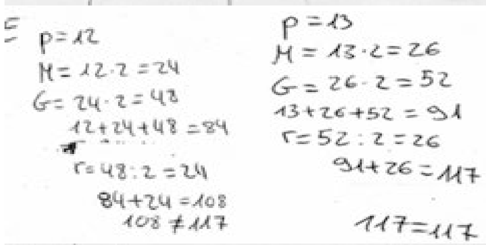
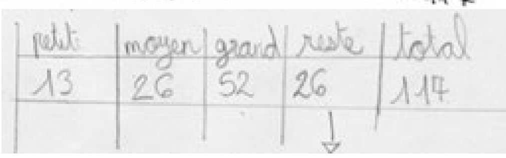
Réponse	Équivalence fonctionnelle	Type	Relation
	*P M G*	*mixte*	*métaphore + descriptif déictique*
reste	*r*	*verbal*	*genre*
	*tableau*	*ideographique*	*relation fonctionnelle particulière*
	*S = 117*	*idéographique*	*équation arithmétique*
 est la moitié du grand plat	*26 = 1/2 p*	*Mixte*	*métaphore + descriptif déictique*

Tableau 5. Analyse discursive de solution par essais (copie du § 1)

Réponse	Équivalence fonctionnelle	Type	Relation
11 - 22 - 44 ⇒ 22 restes 16 − 32 - 64 ⇒ 32 restes 14 - 28 - 56 ⇒ 28 restes 13 - 26 - 52 ⇒ 26 restes	*Tableau*	*idéogramme*	*relation fonctionnelle récursive*
restes	*R*	*verbal*	*genre*
99 < ✗ 144 > ✗ 126 > ✗ 117 = ✓	*S = 117 ?*	*idéogramme*	*inégalité arithmétique*

Tableau 6. Analyse discursive de solution par essais (copie du §1)

Références bibliographiques

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. Journal for Research in Math- ematics Education, 46(1), 39–87.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2010). A history of mathematics (3rd ed.). New York: Wiley.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (International Reviews on Math- ematical Education), 40(1), 3–22.

Daniels, H. (2007). Pedagogy. In H. Daniels, M. Cole, & J. V. Wertsch (Eds.), The Cambridge Companion to Vygotsky (pp. 307–331). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Caspi, S. & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. International Journal of Educational Research (51–52), 45–65.

Eilenberg, S. (1969). The algebrization of mathematics. In National Research Council's Committtee on Support of Research in the Mathematical Sciences (Ed.). *The Mathematical Sciences: A collection of essays*. Cambridge, MA: MIT Press. 153-160.

Filloy e Rojano (1989). Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9. 19-25.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reason- ing? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 5–17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nesselmann, G. H. F. (1842). Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra, Nach den Quellen bearbeitet.

Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. Educational Studies in Mathematics, 66, 145–164.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. Journal of Mathematic Behavior, 14, 15–39.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Shai Caspi Anna Sfard, Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra (2012). International Journal of Educational Research, 51-52, pp. 45-55.

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M., & Brizuela, B. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. In J. Cai (Ed.), Compendium for Research in Mathematics Education (pp. 386-420). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. In R. W. Rieber & A. C. Carton (Eds.), The collected works of L.S. Vygotsky (pp. 39–285). New York: Plenum Press.

Wittgenstein, L. (1953). Ricerche filosofiche. Torino: Einaudi. (Traduction française: Recherches philosophiques, Éditions Gallimard, 2005)

Traduction de François Jaquet

À PROPOS DE PÉRIMÈTRE

Clara Bisso, François Jaquet

Résumé

Cet article présente un problème du RMT qui met en œuvre le concept de périmètre de carrés et rectangles chez de jeunes élèves. On y présente son histoire et son origine, issues des pratiques permanentes du RMT sur l'élaboration et l'analyse de problèmes. Puis on le décrit par son énoncé, son analyse a priori et les résultats obtenus par environ 2500 classes qui l'ont résolu ou tenté de le résoudre lors de la deuxième épreuve du 27e RMT, en 2019. Vient ensuite l'analyse a posteriori fondée sur l'examen approfondi de plusieurs centaines de copies et sur une première lecture d'un millier d'autres copies. On y découvre plusieurs procédures de résolution dont certaines conduisent à la réponse dite « correcte » et d'autres à des réponses différentes, caractéristiques d'une construction encore non achevée du concept de périmètre.
Ces observations nous invitent à tenter de mieux comprendre les obstacles rencontrés par les élèves, à propos de leur manière de « voir » les figures et d'opérer sur les grandeurs perçues, et nous permettent une analyse plus fine de leur tâche de résolution.
Enfin, au-delà de ces constats, nous envisageons ce qu'on peut en tirer pour l'enseignement : exploitations didactiques et poursuite des investigations sur le concept de périmètre.

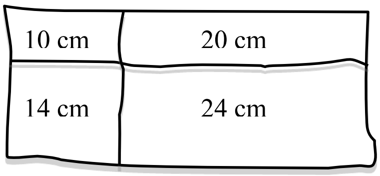
1. Une démarche pragmatique

Les sujets d'études et de réflexion du RMT ne sont pas programmés selon un plan de recherche structuré. Ils apparaissent au fil des propositions de problèmes et des analyses a posteriori de certains d'entre eux, lorsqu'on observe, dans les copies d'élèves, des procédures remarquables, obstacles, erreurs récurrentes … Certains animateurs, et en particulier nos groupes de travail permanents, les choisissent et les approfondissent selon leurs intérêts et disponibilités.

Dans le domaine de la géométrie plane, de nombreux problèmes du RMT font intervenir la notion de périmètre sans toutefois qu'on y ait consacré une attention particulière. Une des premières analyses a posteriori d'un problème du RMT a fait apparaître un « conflit » ente aire et périmètre. à propos de *Le jardin de Monsieur Tordu* (08.I.06 ; cat. 3-4) où il s'agissait de comparer l'aire de deux parties d'un carré[1]. Mais même si ce « conflit » a souvent été observé dans les problèmes successifs, l'intérêt s'est développé sur les comparaisons d'aires (qui constituent une famille de notre Banque de problèmes) sans que la construction du concept de périmètre ne soit approfondie.
Les problèmes qui s'y rapportent se situent dans la famille plus générale « Rechercher ou utiliser des dimensions » du domaine « Grandeurs et mesures » de la Banque de problèmes, dans la sous-famille RD/AP : Déterminer des aires et/ou périmètres, dont voici quelques sujets :
Les deux rectangles (ral. 13.F.06 ; cat. 4-6) : Juxtaposer deux rectangles quadrillés (dimensions 3 × 5 et 5 × 8) en respectant l'alignement des quadrillages de manière à ce que le périmètre de la figure obtenue soit minimal ou maximal.
D'un enclos à l'autre (ral. 14.F.14 ; cat. 7-10) : Calculer les dimensions a × b (a et b entiers) d'un rectangle de 60 m de périmètre sachant qu'un rectangle de périmètre 66 m et de dimension (a+6) x (b-3) a une aire supérieure de 90 m^2.
La boucle (ral. 15.F.07 ; cat. 4-5) : Construire, sur un quadrillage, un rectangle de même périmètre (22 unités) qu'un rectangle donné et dont l'aire est maximale.
Les terrains de jeu (ral. 19.II.04 ; cat. 3-4): Calculer le périmètre d'un rectangle formé de la juxtaposition d'un carré et d'un rectangle dont on connaît le périmètre de chacun d'eux.
C'est à propos de ce dernier sujet qu'apparaît une ébauche d'intention spécifique d'entreprendre une étude plus approfondie sur le concept de périmètre, lors du 19e RMT. Mais là encore, la démarche pragmatique de nos réflexions a dû se développer en fonction des disponibilités et des intérêts des personnes intéressées. Les copies, après l'attribution des points, sont restées dans les archives de nos différentes sections.
Il a fallu attendre une proposition de nouveau problème pour le 27e RMT pour relancer l'intérêt et la curiosité sur le concept de périmètre :

[1] Voir aussi en bibliographie, F. Jaquet.

Charly a partagé un rectangle en 4 rectangles. Il a fait un dessin très approximatif, à main levée, de son partage.
Sur le dessin, il a indiqué les périmètres des 4 rectangles qu'il a obtenus.



Il dit à Charlotte : « A toi de trouver maintenant le périmètre du grand rectangle que j'ai partagé. »

Trouvez la réponse et expliquez comment vous avez trouvé.

Ce problème proposé pour les catégories 4 et 5 a suscité de nombreux doutes lors de son analyse a priori et les questions suivantes :
Les élèves seront-ils capables de percevoir les quatre « familles » de rectangles, de 10, 14, 20 ou 24 cm de périmètre, toutes constituées d'une infinité de rectangles ?
Pourront-ils gérer les contraintes issues du choix des dimensions d'un premier rectangle (par exemple, si on choisit 2 et 3 cm pour celui de 10 cm de périmètre) pourront-ils déterminer les côtés des autres rectangles ?
Le choix de 10, 14, 20 et 24 est-il aléatoire ou le quatrième est-il déterminé par les trois premiers ? (Il y a une relation additive entre les périmètres des deux lignes : « + 4 » et ceux des deux colonnes : « + 10 » qui contraint à attribuer 24 au périmètre du rectangle de droite en bas.).
Comment les élèves vont-ils « voir » les quatre petits rectangles et le grand ?[2]
Finalement, l'intérêt du problème, comme « théorème » sur l'additivité des périmètres[3] a cédé la priorité aux arguments didactiques imposés par la prise en compte des capacités et compétences des élèves. Les ambitions ont été revues à la baisse : sur le même schéma, on a inventé un contexte où l'on propose explicitement aux élèves de commencer par construire un premier rectangle de 10 cm de périmètre, puis de recommencer avec un rectangle de 10 cm de périmètre mais de dimensions différentes. Le problème étant proposé aux catégories 6 et 7 au lieu de 4 et 5. Dans cette version plus « guidée » les élèves plus grands éprouvent encore des difficultés importantes, en particulier en catégorie 6 où la moyenne des points attribués n'est que 1,2. (Voir *Les cinq rectangles (I)* (ral. 27.II.10 ; cat. 6-7).
Selon le même schéma, un autre problème a été inventé pour les catégorie 8 à 10, avec, en plus, la recherche du grand rectangle dont l'aire est la plus grande. (Voir *Les cinq rectangles* (II) (ral. 27.II.17 ; cat. 8-10) : Former des rectangles composés chacun de quatre rectangles de périmètres 10, 14, 20 et 24 cm, et déterminer leur périmètre et trouver lequel de ces rectangles a une aire maximale) Là encore, si les élèves plus âgés ont trouvé que le périmètre du grand rectangle est 34, peu d'entre eux ont perçu la « classe » de ces rectangles « isopérimétriques » et n'ont donc pas pu trouver que celui d'entre eux qui a l'aire la plus grande est le carré.
Il fallait donc inventer un problème pour les petits (cat. 3 à 5) et on est revenu à l'ancien problème *Les terrains de jeu* (ral. 19.II.04 ; cat. 3-4) dont l'analyse a posteriori n'était pas encore faite.
On en revient ici au « pragmatisme » de nombreuses démarches du RMT : puisque, selon notre dispositif, les copies des anciens problèmes sont conservées dans les archives des sections, pourquoi ne pas demander aux membres du groupe « Géométrie plane » d'aller les rechercher (parfois les exhumer) ? D'une pierre deux coups : les réponses de 7 sections nous sont parvenues et ont permis de rédiger la rubrique « Procédures, obstacles et erreurs relevés » de la fiche du problème dans notre banque. La lecture des résultats (moyennes très faibles) et de la variété d'erreurs (voir référence ci-dessus) nous ont convaincu de l'opportunité et de l'intérêt d'en savoir plus sur la manière dont les jeunes élèves perçoivent la notion de périmètre. C'est l'objet du problème suivant.
En conclusion de cette introduction sur l'origine de cette recherche sur les périmètres on peut souligner la démarche typique du dispositif du RMT : on propose des problèmes, les élèves les résolvent et nous expliquent leur démarche, on relève les résultats, on analyse les copies et découvre des choses souvent inattendues, puis on approfondit avec de nouveaux problèmes, de manière cyclique, pour en savoir plus et aboutir à des exploitations

[2] C'est l'objet de la conférence de Raymond Duval lors la 20e rencontre internationale de l'ARMT à Alghero (2019) *Le premier seuil dans l'apprentis sage de la géométrie : « voir » les « figures »*. Il y analyse en particulier ce projet de problème. Voir aussi bibliographie.

[3] « Si quatre rectangles sont juxtaposés en une grille de 2 × 2 pour former un grand rectangle, le périmètre de ce dernier est la moitié de la somme des périmètres des quatre premiers ».

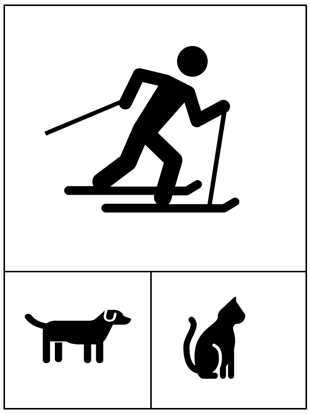
didactiques. L'ambition première n'est pas de conduire une recherche théorique ou académique mais simplement, de permettre à l'enseignant qui en a envie, d'en savoir plus sur un thème qu'il rencontrera fréquemment avec ses élèves et, pourquoi pas, d'en tenir compte pour la construction de ses parcours didactiques.

2. Le problème *Trois photos sur une page* : énoncé, analyse a priori et résultats

2.1. L'énoncé

Le problème a été proposé aux élèves de catégories 3, 4 et 5 lors de la 2e épreuve du 27e RMT:

Roberto a collé 3 photos carrées sur une page de son album : une grande où il fait du ski de fond et deux petites, l'une de son chat et l'autre de son chien.



Les trois photos carrées recouvrent entièrement la page de l'album.
Le pourtour de la grande photo mesure 48 cm.
Combien mesure le pourtour de la page sur laquelle sont collées les trois photos ?
Montrer comment vous avez trouvé votre réponse.

Lorsque, dans le cadre du RMT, on élabore un nouveau problème pour entreprendre une première investigation sur un concept apparu lors de l'analyse d'un problème « précédent », on cherche à s'en inspirer et de limiter les modifications à propos des variables de type didactique ou contextuelle. Le problème « précédent » est *Les terrains de jeu* déjà mentionné au chapitre précédent, dont le contenu mathématique ou résumé dans la banque de problèmes est *Calculer le périmètre d'un rectangle formé de la juxtaposition d'un carré de 20 m de périmètre et d'un rectangle de 40 m de périmètre***.**
Le « nouveau » a un contenu très proche : *Déterminer le périmètre d'un assemblage rectangulaire composé d'un grand carré de 48 cm de périmètre et de deux petits carrés égaux.* La variation du contexte nous a semblé peu significative car le passage de terrains de jeux à celui de la page d'un album est, dans les deux cas, représenté par des carrés et rectangles donnés sur la feuille de l'énoncé. La variable didactique se limite au passage de deux figures (un carré et un rectangle juxtaposés dans le premier cas) à trois figures (deux carrés et un carré juxtaposés dans le second) et à l'adjonction d'un partage en deux parties nécessaire pour trouver le côté d'un des petits carrés du second.

2.2. Analyse de la tâche a priori

Cette analyse était rédigée ainsi :

a *Observer la position des trois carrés, remarquer que les deux petits carrés doivent être égaux, que leur côté est la moitié du grand et que les trois carrés forment un rectangle, qui est la page de l'album.*

b *Se rappeler que le périmètre ou pourtour est une longueur, égale à la somme des longueurs de tous les côtés de la figure : dans le cas du carré, la relation est « le périmètre est égal à la somme des quatre côtés » et dans le cas du grand rectangle « le périmètre est égal à la somme des quatre côtés du grand carré et de deux côtés des petits carrés ». Comprendre qu'il sera nécessaire de calculer les mesures des côtés des carrés.*

c *Déduire des données que le pourtour du grand carré, composé de quatre segments (côtés) égaux permet de calculer la mesure d'un de ses côtés par une division par 4. 48 ÷ 4 = 12 (cm). En tirer ensuite la longueur d'un côté des petits carrés : 6 cm.*

d *Calculer la mesure du pourtour du grand rectangle par additions et/ou multiplications : 12 × 3 + 6 × 4 = 60.*

e *Ou, comprendre, en observant le dessin, que le grand carré est équivalent à quatre petits carrés et que, par conséquent, son pourtour est équivalent à huit côtés des petits carrés. Calculer alors la longueur de ses côtés : 6 cm (48 : 8).*

f *Observer que le pourtour de la feuille est constitué de dix segments de 6 cm puis calculer le périmètre : 60 cm (6 × 10).*

g *Ou, faire un dessin en vraie grandeur et mesurer les côtés du grand rectangle.*

Cette analyse a priori tient compte évidemment de l'analyse a posteriori du problème précédent mais elle n'envisage pas vraiment la perception de la situation par l'élève. (À ce propos, elle était rédigée avant la rencontre d'Alghero dont le thème était précisément *L'élève devant un problème, l'analyse a priori de ses tâches : réfléchir sur son point de vue.*) Ses deux premiers paragraphes (a et b) représentent déjà un pas timide vers une description de « l'appropriation » de la situation par l'élève, mais les suivants ne décrivent que la manière dont l'adulte – qui maîtrise les concepts liés au périmètre – imagine que les élèves vont procéder ou pense à la manière dont il expliquerait (« enseignerait ») la solution aux élèves. Par exemple le troisième paragraphe (c) postule, comme une évidence, que le « 12 » de la division par 4 est une mesure de longueur et s'exprime en cm, qui permettra de calculer la longueur d'un côté des petits carrés par une division par 2, puis que, tout naturellement, ces « 6 cm » pourront être utilisés pour trouver la réponse en quelques étape élémentaires

Il n'y a aucune référence aux obstacles que rencontrera l'élève, pourtant déjà mis en évidence par l'examen des copies du problème précédent.

Ces quelques réflexions sur l'analyse a priori ne doivent pas être considérées comme une critique, mais comme un constat : il est très difficile de, non seulement se mettre à la place de l'élève en imaginant a priori sa tâche de résolution, mais aussi de décrire en termes concis et précis un processus de recherche d'instruments efficaces pour aboutir à une solution, qu'il faut parfois inventer de toutes pièces.

2.3. Résultats

Points attribués, sur 2431 classes de 19 sections:

points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 3	341	120	40	66	142	709	1,4
Cat. 4	375	139	53	83	214	864	1,6
Cat. 5	248	126	62	105	374	915	2,3
tot	**964**	**385**	**155**	**254**	**730**	**2488**	1,8

en %					
Cat. 3	48%	17%	6%	9%	20%
Cat. 4	43%	16%	6%	10%	25%
Cat. 5	27%	14%	7%	11%	41%
tot	39%	15%	6%	10%	29%

Selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

4 Réponse correcte (60 cm ou 60) avec description claire et complète de la procédure (par exemple dessin avec les mesures portées dessus et indication de la somme de ces mesures ou la suite des calculs effectués rendant compte du raisonnement suivi.)

3 Réponse correcte avec explication incomplète ou peu claire (par exemple dessin avec mesures, mais sans l'écriture du calcul du périmètre du rectangle ou absence des calculs correspondant à une étape du raisonnement suivi : longueurs des côtés des carrés ou comment ils ont été trouvés...)

2 Réponse correcte sans explication

ou une seule erreur dans la détermination du périmètre ou des côtés des petits carrés

1 Les côtés des petits carrés sont trouvés (6 cm) mais le périmètre n'est pas déterminé correctement (par exemple 96 = 48 + 24 + 24)

ou plus d'une erreur dans la détermination du périmètre ou des côtés du petit carré

0 Incompréhension du problème

La première constatation selon l'observation du tableau ci-dessus est la progression des moyennes de points des catégorie 3 et 4 (1,4 et 1,6) à la catégorie 5 (2,3). Ils justifient le fait d'avoir proposé aussi le problème en catégorie

5. *Les terrains de jeu* ne l'étaient qu'en catégories 3 et 4, avec des moyennes de points comparables à celles-ci (1,2 et 1,7).

La seconde est la fréquence de la réponse correcte que l'on peut estimer – en regroupant celles qui sont clairement décrites (4 points), avec explication incomplète (3 points) ou même sans explication (2 points) – qui varie d'environ 35 % en catégorie 3, 40% en catégorie 4 et 45% en catégorie 5. Ceci signifie qu'une minorité des groupes ont trouvé la réponse 60 ou 60 cm pour le pourtour de la page.

3. L'analyse a posteriori

Le tableau des résultats ne donne que des indices sur la réussite du problème qu'on peut estimer en observant la colonne de droite des moyennes de points et les fréquences des répartitions des points. On en tire les premières constatations « statistiques » du genre de celles qui précèdent.

Mais il faut se rappeler que les points attribués dépendent des critères choisis, qui dépendent eux-mêmes des attentes des maîtres, des programmes, des pratiques et habitudes, de la politique scolaire en général. Il faut ajouter encore que bien qu'on cherche à définir les critères avec la plus grande rigueur possible, ils sont toujours sujets à des interprétations différentes de la part de ceux qui attribuent les points. Finalement, il faut encore ajouter que ces critères sont imposés par la nature même du Rallye, qui est une confrontation entre classes, qui exige un classement des participants.

Ces considérations sont là pour dire que, du point de vue didactique ou de la construction des connaissances mathématiques par les élèves, ce n'est qu'au moment de la lecture des copies des élèves qu'on entre dans le sujet qui nous intéresse : on a élaboré un problème avec beaucoup de soin et de bonnes intentions, on l'a proposé à des milliers de classes – ou plus précisément de groupes d'élèves - en leur demandant de nous dire comment ils s'y sont pris pour trouver la solution ou tenter de le résoudre, il est donc normal qu'on lise attentivement leurs textes, par respect pour leur travail de résolution et aussi pour celui de tous ceux qui ont élaboré le problème, l'ont relu, commenté et amélioré.

3.1. Procédures, obstacles et erreurs relevés

Les observations qui suivent découlent de l'analyse a posteriori de plus 200 copies des sections de Sassari, Parma et de Suisse romande et des observations reçues des sections de Perugia, Puglia, Rozzano, Siena et Udine, ce qui représente en tout plus de 1 000 copies.

La **réponse correcte**, 60 cm (ou 60), a été trouvée dans 45% des copies examinées (tous les « 4 points », « 3 points », « 2 points » attribués, avec les mêmes fréquences que celle des 2 488 copies de l'ensemble relevées dans le tableau des résultats ci-dessus). Ce pourcentage augmente sensiblement d'une catégorie à l'autre, 35 % en catégorie 3, 45 «% en catégorie 4 et 55 % en catégorie 5, comme les moyennes de points déjà mentionnées précédemment.

Dans tous ces cas, la solution repose sur la division 48 : 4 = 12, permettant de déterminer ainsi la mesure du côté du grand carré, puis, généralement, le côté d'un petit carré est déterminé par la division12 : 2 = 6.

Il arrive certaines fois que les écritures 48 : 4 = 12 ou 12 : 2 = 6 ne figurent pas explicitement mais les résultats 12 et 6 sont toujours présents.

Il y a de nombreuses manières de justifier la réponse 60. Par exemple : 10 × 6 ; 12 × 5 ; 18 + 18 + 12 + 12 ; 12 × 3 + 6 × 4, 12 + 12 + 12 + 12 + 6 + 6 ; … correspondant en général aux longueurs des côtés notées sur la figure par les élèves : 12 ; 6 et/ou 18.

Deux copies examinées seulement présentent un dessin en vraie grandeur.

Toutes ces réussites témoignent d'une perception correcte du terme « pourtour » utilisé par l'énoncé.

Lorsque les élèves décrivent verbalement leur première opération on trouve des phrases comme :

- Puisque le pourtour de la grand image mesure 48 cm cela veut dire que chaque côté mesure 12 cm (12 × 4 = 48). …

- Nous avons divisé le pourtour de la grande photo par 4 ce qui nous a fait 12 cm. Ensuite …

Lorsque les élèves n'écrivent que les opérations, on trouve une majorité de 48 : 4 = 12 ou lorsqu'ils n'indiquent pas les opérations le « 12 » est noté sur au moins deux côtés du grand carré.

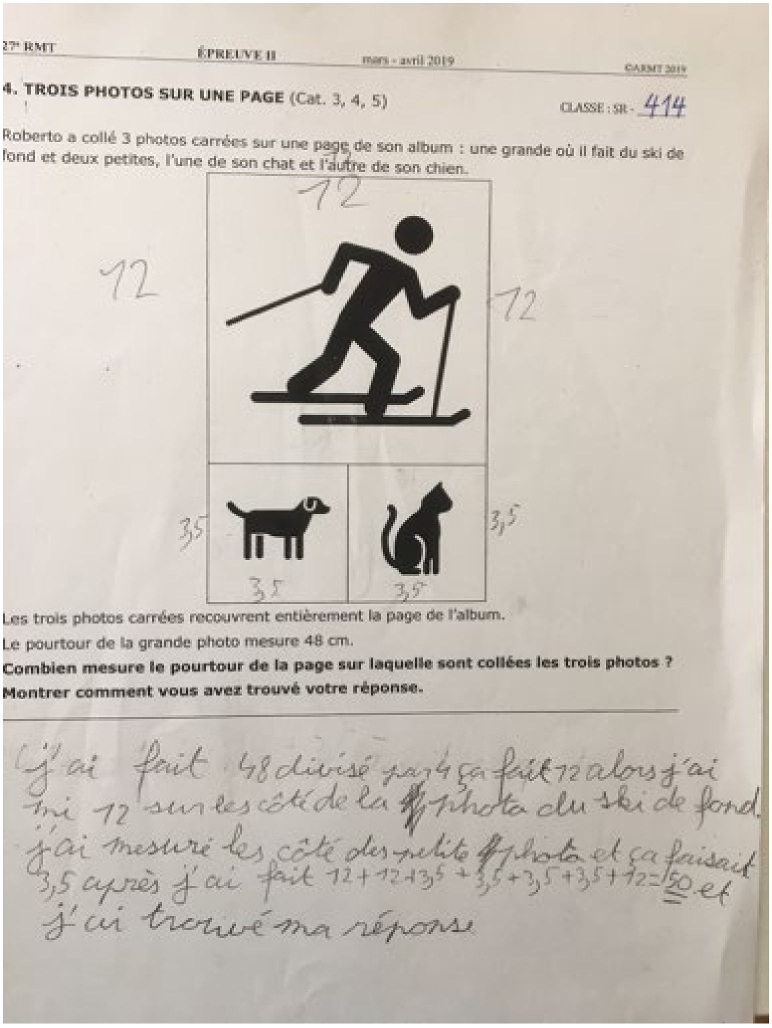
On peut en conclure que ces élèves considèrent le périmètre ou « pourtour » de la figure « carré » comme la somme des longueurs égales des quatre côtés, puis ils continuent à considérer les côtés (segments) des autres figures pour les diviser par deux puis les additionner. Ils distinguent donc parfaitement les carrés (figures à deux dimensions) de leurs côtés (segments) et travaillent dans le domaine des longueurs, à une dimension.

Mesures prises sur la figure de l'énoncé

Dans une vingtaine de cas, (près de 10%), les élèves ont mesuré les côtés des figures à la règle graduée en cm sans tenir compte de la donnée « 48 cm pour le pourtour du grand carré », ce qui aurait dû les conduire à une réponse proche de 36 ou 37 cm (par exemple (11,0 + 7,3) × 2 = 36,6). Mais les variation vont au-delà des imprécisions des mesures et on trouve des réponses s'étalant de 35 à 40. Comme les précédents, ces élèves ont aussi travaillé dans le domaine des longueurs de segments, à une dimension.

Une autre manière de prendre les mesures se découvre dans une trentaine de copies examinées (15 %) où deux unités différentes sont combinées : 12 cm (en grandeur « réelle » au lieu de 7 « à l'échelle du dessin ») pour chacun des trois côtés du grand carré et 3,5 cm (grandeur mesurée sur le dessin) pour les côtés des petits carrés :

- <u>Exemple 1</u> (cat 4) *J'ai fait 48 : 4 ça fait 12 alors j'ai mis 12 sur les côtés de la photo du ski de fond. J'ai mesuré les côtés des petites photos et ça faisait 3,5 après j'ai fait 12 + 12 + 12 + 3,5 + 3,5 + 3,5 + 3,5 = 50 et j'ai trouvé la réponse.* (Les trois « 12 » et les quatre « 3,5 » sont placés correctement sur la figure.


27e RMT ÉPREUVE II mars - avril 2019 ©ARMT 2019

4. TROIS PHOTOS SUR UNE PAGE (Cat. 3, 4, 5) CLASSE : SR - 414

Roberto a collé 3 photos carrées sur une page de son album : une grande où il fait du ski de fond et deux petites, l'une de son chat et l'autre de son chien.

Les trois photos carrées recouvrent entièrement la page de l'album.

Le pourtour de la grande photo mesure 48 cm.

Combien mesure le pourtour de la page sur laquelle sont collées les trois photos ?

Montrer comment vous avez trouvé votre réponse.

J'ai fait 48 divisé par 4 ça fait 12 alors j'ai mi 12 sur les côté de la photo du ski de fond. j'ai mesuré les côté des petite photo et ça faisait 3,5 après j'ai fait 12+12+3,5+3,5+3,5+3,5+12=50 et j'ai trouvé ma réponse

En voici encore quelques variantes :

- <u>Exemple 2</u> (cat 4) Le pourtour du grand carré est en rouge : 48 cm ; le rectangle des deux petits carrés a trois côtés en bleu : 15 cm (3,7 les largeurs, 3,8 la longueur) avec les explications : *48 + 15 = 63, 63 – 7.5 = 55,5 Le pourtour de la page sur laquelle sont collées les photos est de 55,5 cm.*
- <u>Exemple 3</u> (cat 3) Le pourtour du grand carré est en rouge : 48 cm ; les pourtours des deux petits carrés en bleu, avec « 3,5 cm » sur les côtés et « 14 » au centre : *14 + 14 = 28, ; 48 + 14 = 76. Il y a 76 cm sur la page.*
- <u>Exemple 4</u> (cat 5) Les trois carrés sont indiqués par une flèche à partir des nombres 48, 19 et 19. *Le pourtour de l'album fait 86 cm. <u>Explication</u> : D'abord nous avons calculé* (mesuré) *le pourtour de la grande photo. Elle fait 28 cm, puis nous avons calculé la différence entre le trait réel et le trait qui est ci-dessus. Nous avons trouvé 20 cm de différence. Donc nous avons divisé la grande image par 4 pour trouver la taille du chien et du chat. Nous avons additionné 48 + 19 + 19 = 86 car le pourtour du chien fait 19 cm.*

Comme précédemment, les élèves ont aussi travaillé dans le domaine des longueurs de segments, à une dimension, mais avec deux unités : les « cm » dont parle l'énoncé (qui ne dit pas que la figure qui suit est une réduction de la page réelle de l'album et ne sont que des « cm réduits ») et les vrais « cm » mesurés à la règle sur les petits carrés (qui sont des « cm en vraie grandeur ». Pourquoi faudrait-il mesurer les côtés du grand carré puisqu'on les connaît déjà par la division 48 : 4 = 12 (en cm) ?

La réponse 72 = 48 + 24 est l'erreur la plus fréquente et la plus typique, on la rencontre dans un quart des copies examinées. Ce serait la réponse correcte si on avait demandé l'aire de la page en donnant 48 cm^2 pour l'aire de la grande photo.

Les élèves qui ont donné cette réponse ont semble-t-il perçu les espaces occupés plutôt que les segments qui les délimitent. Pour eux, la page est constituée d'un grand carré et de l'assemblage des deux petits, considérés comme une « bande » occupant la moitié de l'espace réservé au grand carré correspondant à la donnée « 48 ». Le mot « pourtour » ou l'unité « cm » n'ont vraisemblablement pas été « lus » de manière réfléchie. Par conséquent, ces élèves ont commencé par l'opération 48 : 2 = 24 qui leur donne une valeur liée à la « bande » des deux carrés, puis poursuivi par la division 24 : 2 = 12 qui leur donne une valeur attribuée à chacun des deux petits carrés.

- Exemple 5 (cat 5) : *48 cm che sono i cm della foto grande, le foto piccole che sono la meta, quindi abbiamo fatto 48 : 2 che ci ha dato 24 e quindi abbiamo sommato 48 + 24 = 72 che era il contormo dell'album.*

  [Trad. Les 48 cm sont ceux de la grande photo, les petites photos sont la moitié donc nous avons fait 48 : 2 qui nous a donné 24 e donc nous avons additionné 48 + 24 = 72 qui est le pourtour de l'album.]
- Exemple 6 (cat 4) : *Abbiamo scoperto che la misura del contorno della pagina e di 72 perche si vedeva che le due piccole foto erano la meta della meta della foto più grande quindi abbiamo fatto 48 :2 poi 24 (risultato) :2 che da 12 × 2 perche le foto piccole erano2 …*

  [Trad. Nous avons découvert que la mesure du pourtour de la page est 72 parce qu'on voyait que les deux petites photos étaient la moitié de la photo plus grande donc nous avons fait 48 : 2 puis 24 (résultat) :2 = 12 qui donne 12 × 2 parce qu'il y avait deux petites photos.]

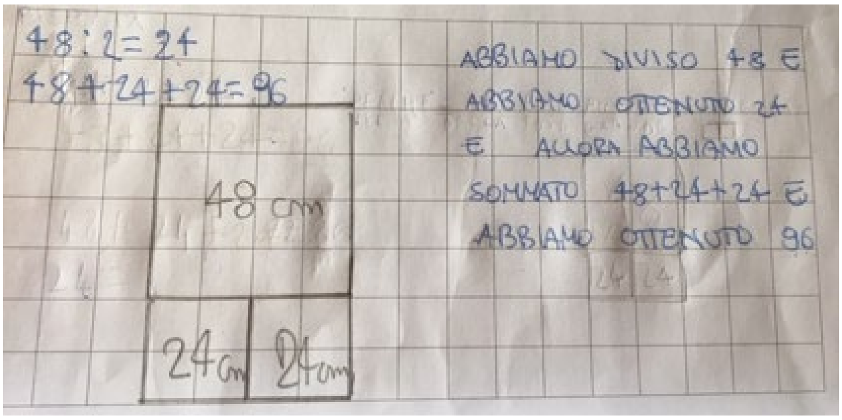
  Exemple 7 (cat 3) *Les deux photos font la moitié de la grande photo donc la moitié de 48 fait 24 donc ensemble les 3 photos font 72.*

  Exemple 8 (cat 5) *J'ai trouvé ma réponse comme ça : vu que les petites photos font la moitié de la grande elles font 48 ces deux photos font la moitié de la grande photo donc elles font la moitié de 48cm, cela fait 24 cm dont 24 + 48 = 72 cm.*

Contrairement aux raisonnements qui ont conduit à la réponse correcte, il y a dans ces réponses « 72 » une addition de deux mesures associées aux figures à deux dimensions, comparable à ce qui se passe dans le domaine des aires (à deux dimensions).

La réponse 96 = 48 + 24 + 24 a été relevée dans 6 copies, dont certaines sont de type « longueur » par le calcul des périmètres des deux petits carrés : 24 ou 6 + 6 + 6 + 6 et l'addition des trois périmètres et d'autres par l'addition des trois aires, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 9



[Trad. Nous avons divisé 48 et nous avons obtenu 24 et alors nous avons additionné 48 + 24 + 24 et avons obtenu 96]

On trouve encore de nombreuses autres procédures erronées dans les copies examinées, en particulier

- 5 réponses 240 avec la somme de 48 × 2 = 96 et de 72 × 2 = 144
- 5 réponses 120 obtenues par 48 : 2 = 24 puis 48 + 24 = 96 et 96 + 24 = 120

Exemple 10 (Cat 5) *Risposta : il contorno della pagina misura 120 cm. Abbiamo letto che la misura della foto grande è 48 cm. Perciò abbiamo pensato di prendere la figura piccola e abbiamo scoperto che era la metà abbiamo calcolato "48 : 2" che da 24, cioè la metà della figura grande. Per calcolare la lunghezza di tutta la pagina abbiamo fatto « 48 + 24 », che da 72 poi abbiamo fatto 72 + 24 che da 96 cioe la lunghezza di tutta la pagina poi 96 + 24 = 120.*

[Trad. Réponse : le pourtour de la page mesure 120 cm. Nous avons lu que la mesure de la grande photo est 48 cm. Pour cela nous avons pensé de prendre la petite figure et nous avons découvert que c'était la moitié nous avons calculé « 48 : 2 » qui donne 24, c'est-à-dire la moitié de la grande figure. Pour calculer la longueur de toute la page nous avons fait 48 + 24 qui donne 72 puis nous avons fait 72 + 24 qui donne 96 , c'est-à-dire la longueur de toute la page puis 96 + 24 = 120]

3.2. Pourquoi les erreurs et obstacles ?

Les observations précédentes nous posent évidemment des questions, sur les erreurs et leurs causes, mais aussi sur les procédures correctes. En voici quelques-unes :

La division 48 : 4 = 12 est présente explicitement dans une majorité de copies, dont celles qui conduisent à la réponse 60. On peut en être satisfait et se dire : « ils ont au moins compris qu'il fallait effectuer une division ». On peut aussi suspecter que, les élèves sachant que le carré a 4 côtés et 4 angles égaux et aussi 4 sommets, ils divisent par 4 mécaniquement.

Ceux qui ont écrit explicitement « 12 cm » ont peut-être conscience qu'il s'agit de la longueur d'un côté, mais ils ont aussi pu simplement ajouter « cm » parce qu'il figurait à côté de 48 dans la donnée, ou ont ajouté cm^2 parce qu'il s'agit d'un « carré ».

Quelle est la signification de « la moitié » dans ces exemples ?

Nous insistons sur les différentes significations du terme « la moitié », sans conséquence sur la rigueur de la procédure dans ces cas de réussite, (Exemples 10 à 13) mais qui sont souvent à la source de confusions dans la majorité des réponses erronées.

Exemple 11 La copie fait apparaître 6 petits carrés, chaque dimension de la page est notée clairement : 18 cm, et 18 cm verticalement, 12 cm et 12 cm horizontalement), avec le texte suivant. *Puisque le pourtour de la grande image mesure 48 cm cela veut dire que chaque côté mesure 12 cm (12 × 4 = 48). Après nous avons tracé deux traits un à la verticale, l'autre à l'horizontale (pile au milieu du grand carré). Nous avons remarqué qu'une petite image entre dans un carré.* ***Cela veut dire que c'est la moitié*** *(la moitié de 12 = 6). Comme le côté du grand carré mesure 12 cm et que la petite image mesure 6. 6 + 12 = 18. Les deux longueurs de la page mesurent 18 cm et les largeurs mesurent 12 cm (6 + 6 = 12. Calculs : 18 + 18 + 12 + 12 = 60. Réponse : le pourtour de la page mesure 60 cm.*

Exemple 12 *On a regardé si les deux petites photos étaient la moitié de la grande. Et c'était le cas. Donc notre réponse est 60 cm. 6 + 6 + 12 + 6 + 6 + 12 + 12 = 60* (Sur le pourtour de la page sont notés précisément les trois « 12 » et les quatre « 6 » . Il semble ici que c'est la « bande » inférieure (les deux petites photos) qui est la moitié de la grande. Ce qui n'a aucune incidence sur la suite où les nombres indiqués sont des mesures de longueur.

Exemple 13. *Nous avons divisé le pourtour de la grande photo par 4 ce qui nous a fait 12 cm. Ensuite on a divisé les pourtours des deux petites photos qui font la moitié de la grande par 4, ce qui nous a fait 6. Il y a 4 côtés des petites photos sur le pourtour de la grande page et trois côtés de la grande. 6 x 4 = 24 et 3 x 12 = 36 et 36 + 24 = 60.* Il semble que ce sont les pourtours qui sont la moitié de la grande (du pourtour de la grande).

Un autre sens de la même expression « la moitié » se trouve dans les exemples 5 à 8 de la réponse « 72 » et aussi pour d'autres réponses comme celle de l'exemple 10.

A propos de « la moitié », on peut rappeler ici une découverte surprenante lors de l'analyse a posteriori du problème *La traversée du quadrillage* (ral. 08.II.08 ; cat. 5-7) où il s'agissait de comparer la longueur de 7 parcours qui « traversent » un quadrillage suivant des côtés ou des diagonales des carrés du quadrillage. On lit ceci dans la rubrique de sa fiche dans la banque de problèmes « Procédures, obstacles et erreurs relevés » *Une erreur assez répandue, présente dans toutes les catégories, dans chaque pays et région, consiste à évaluer la diagonale à la moitié d'un côté de carré.*

Une ligne verticale vaut un carré et une ligne oblique vaut la moitié d'un carré.

On fait l'hypothèse que l'attention est portée sur le carré et le demi carré plutôt que sur le côté et la diagonale. On retrouverait ainsi le conflit aire / longueur non encore surmonté.[4]

[4] Voir bibliographie Crociani, Salomone et Crociani et al.

L'addition

L'opération d'addition est mobilisée et donne des résultats corrects lorsqu'il s'agit de réunir des ensembles d'objets, de composer un nouveau segment en mettant bout à bout deux segments plus courts, de trouver l'aire d'une figure composée de plusieurs parties dont on connaît les aires. Pourquoi cette opération ne fonctionnerait-elle pas avec des périmètres ? Et pourquoi le périmètre de la moitié de la grande photo ne serait-il pas la moitié de 48 ?
« 48 » et « 24 » figurent dans beaucoup de commentaires accompagnant les réponses « 72 ». Que représente l'opération « 48 + 24 » ? Une addition d'aires, une addition de périmètres, une regroupement de parties de la figure, … ?
On met ici le doigt sur un obstacle réel ! Et ce ne sont vraisemblablement pas les « explications », injonctions ou mises en garde de l'enseignant qui permettront à l'élève de le surmonter, mais un travail de construction et reconstruction, de remise en cause, accompagné de manipulations, dessin géométrique, comptages de carrés ou de côtés de carrés sur un quadrillage.
Il n'y a pas seulement des « additions » des périmètres « 48 », « 24 » et « 24 » qui sont parfois interprétés comme des aires, dans ces catégories de réponses erronées (96, 120,) On trouve par exemple des périmètres « détaillés » avec la somme des segments notés sur les côtés des trois photos ; 12, 12, 12, 12 ; 6, 6, 6, 6 et 6, 6, 6, 6 .
A ce propos, il faut se rappeler que l'addition – ou le « plus » – est encore étroitement liée à ses premières représentations chez les jeunes élèves. Il y a l'addition de « nombres de … » lorsqu'ils regroupent des ensembles d'objets ; il y l'addition de « hauteurs » lorsqu'ils placent une tour sur une autre ; il y a l'addition de « masses » sur les plateaux d'une balance ; il y a aussi, pour ce qui nous intéresse directement, l'addition de « longueurs » dans le cas où il faut ajouter un petit bâtonnet à un autre pour égaler un plus long. Dans le cas du périmètre, l'addition n'aboutit pas à un segment quadruple de ses constituants, mais à une figure fermée composée elle aussi des quatre petits segments. Nous avions aussi découvert cet obstacle dans le problème cité précédemment (*La traversée du quadrillage*) et dans d'autres où il s'agit de déterminer la longueur d'une diagonale d'un carré de quadrillage : autre que la réponse 1/2, on relève souvent la réponse 2, résultat de l'addition des longueurs de deux côtés de longueur unité.

Prendre les mesures

Nous avons déjà décrit les erreurs dans le cas des « Mesures prises sur la figure de l'énoncé ».
On peut y ajouter les difficultés de compréhension des expressions « en vraie grandeur » ou « à l'échelle » lorsqu'on passe d'un objet à sa représentation par une figure géométrique.
Dans le cas des trois photos recouvrant une page de l'album, l'adulte sait que la figure de l'énoncé n'est en principe pas en vraie grandeur mais qu'il s'agit d'une réduction à l'échelle (ou une photographie des trois photos). L'élève n'en est pas conscient.
A cela s'ajoute l'obstacle de l'interprétation des « mesures » lues sur la règle graduée. L'adulte sait que ce ne sont pas des nombres mais des intervalles sur la droite des nombres réels et que, et que, comme on ne peut pas définir l'addition d'intervalles, il faut les remplacer par des approximations. L'élève ne le sait souvent pas encore. Pour lui, s'il a lu 3,7 (en cm) sur un côté du petit carré et 3,8 sur un autre côté de ce même carré, on ne discute plus : « le carré a des côtés de 3,7 et 3,8 cm ». Il préfère faire confiance aux mesures données par l'instrument utilisé plutôt qu'à ses connaissances sur le carré.

3.3. Retour sur l'analyse de la tâche

L'observation des copies et leur lecture ont montré que les élèves sont bien loin de maîtriser le concept de périmètre et, par conséquent de pouvoir trouver la mesure du pourtour de la page de l'album. Il ne faut pas le prendre comme une fatalité mais faire un bout de chemin dans la compréhension de leur tâche.
Le premier paragraphe de l'analyse a priori (a) parle de l'observation des trois carrés.
Il faut retenir à ce propos ce que R. Duval[5] nous a dit dans son exposé sur *Le premier seuil dans l'apprentissage de la géométrie : « voir » les « figures ».* Nous, adultes, ne « voyons » plus les trois carrés de la page de l'album comme nous les « voyions » lorsque nous étions enfants et comme les « voient » nos élèves. Nous n'avons plus à effectuer le travail de reconnaissance des carrés et du rectangle, leur décomposition en segments ; la distinction des « unités figurales à deux dimensions » caractérisées par une aire et « les unités figurales à une dimension » caractérisées par une longueur est devenue un automatisme pour nous. Nous ne nous préoccupons plus de rechercher les relations mathématiques entre, d'une part, des mesures de longueurs et leur addition pour le périmètre, qui s'exprime toujours par une mesure de longueur et, d'autre part, des mesures de longueur et une « multiplication » pour les aires, qui ne s'expriment plus par des mesures de longueurs mais par des mesures d'aires, de nature tout à fait différente.

[5] Voir R. Duval (déjà cité) dans la bibliographie

Par métaphore, on pourrait dire que celui qui sait nager ne se souvient plus des différentes phases de ses leçons de natation, ou celui qui sait aller à bicyclette a oublié les mouvements désordonnés de ses apprentissages.
Le second paragraphe (b) propose de se rappeler les relations mathématiques entre côtés et périmètre du carré. Mais là encore il faut savoir que, si l'enfant à qui on demande de trouver le périmètre à partir de la donnée d'un côté dit : *il faut faire un « fois » ou « fois 4 ,* rien ne garantit qu'il ne se limite pas à l'application d'une formule, ce qui n'assure pas une bonne compréhension de la notion de périmètre. Au niveau des nombres (sans dimension) la relation est évidemment $p = 4 \times c$, mais elle peut être aussi $p = c + c + c + c$.
Les paragraphes suivants (c à f) se situent à un autre niveau, celui des différentes manières d'organiser la suite des opérations arithmétiques. Il n'y aura pas lieu de les changer.
Le dernier paragraphe (g) « faire un dessin en vraie grandeur » mériterait un long commentaire, en complément de ce qui a été décrit précédemment à propos des copies avec prises de mesure. Beaucoup d'élèves ne se rendent pas compte que l'image imprimée sur leur énoncé n'est pas « en vraie grandeur », et nous ne savons pas non plus ce qu'elle représente pour eux : l'objet album ou page de l'album, un dessin ou une photo de l'objet, une figure géométrique au sens où l'entend l'adulte ?
On se rend compte alors que, pour beaucoup de nos élèves, il ne suffit pas « d'observer les figures » (voir a) ou de « se rappeler que le périmètre est … » (voir b). C'est beaucoup plus complexe, peut-être même impossible à décrire, mais il est bon de la savoir.
Alors, écrire une analyse de la tâche est difficile, et l'écrire a priori l'est encore beaucoup plus et, paradoxalement on ne peut le faire qu'a posteriori avec quelque garantie de pertinence !

4. Que faire de tout ceci ?

Nous avons vu précédemment comment nos réflexions documentées sur la notion de périmètre nous ont permis d'élaborer, à la suite d'autres, le problème « *Trois photos sur une page* », sa présentation, ses résultats et son analyse a posteriori et également de mettre en évidence des représentations des élèves, que l'on pourrait juger inadéquates ou insuffisantes.
Mais le jugement du point de vue de la « bonne réponse » n'est pas celui qui nous intéresse.
Ce qui importe est de savoir que ces représentations existent, de les comprendre et d'en déterminer la nature et leur statut de « connaissances en construction ».
Les règles du jeu du RMT imposent une attribution de points, mais ce n'est pas elle qui va nous permettre d'avancer vers nos finalités qu'il est bon de rappeler ici :
a) promouvoir la résolution de problèmes pour améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques par une confrontation entre classes,
b) contribuer à la formation des enseignants et à la recherche en didactique des mathématiques, par ses analyses et ses données recueillies dans le domaine de la résolution de problèmes.

4.1. Le périmètre dans les programmes, le manuels et les pratiques scolaires

Le calcul du périmètre d'un rectangle appartient à la tradition scolaire de l'école primaire dans les pays où se déroule le RMT. On en parle dans tous nos programmes. Par exemple :

- En Italie, dans les *Indications nationales pour le curriculum…* une introduction recommande le « laboratoire » *(laboratorio) dans lequel l'élève est actif, formule ses propres hypothèses et en contrôle les conséquences, projette et expérimente, discute et argumente, apprend à recueillir des données, négocie et construit et donne du sens à ce qu'il fait* et l'usage des problèmes *qui doivent être compris comme des questions authentiques et significatives liées à la vie quotidienne et non seulement des exercices répétitifs ou des questions auxquelles on répond simplement en se rappelant une règle.* On trouve ensuite, parmi les objectifs à atteindre à la fin de la troisième et cinquième années, à des niveaux différents : la construction de *modèles matériels* de figures géométriques soit *dans l'espace ou dans le plan comme support à une première capacité de visualisation.* Parmi les objectifs pour la cinquième on trouve : *Déterminer le périmètre d'une figure en utilisant les formules les plus courantes ou par d'autres procédures …*
- En France, selon le Bulletin officiel de l'éducation nationale[6], au chapitre « Mathématiques » dans l'introduction : *… le cycle 3* (cat 4, 5, 6) *assure la poursuite du développement des six compétences majeures des mathématiques : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer. La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens.*
  … Dans les attendus en fin de cycle pour « Longueur et périmètre » : …

[6] Extrait BOF 25 (France) cycle 3 21.06.2018)

Calculer le périmètre d'un carré et d'un rectangle, la longueur d'un cercle, en utilisant une formule :
- formule du périmètre d'un carré, d'un rectangle

- En Suisse, dans le Plan d'études romand (PER) [7] au chapitre MSN 21 — Poser et résoudre des problèmes pour structurer le plan et l'espace…
  Reconnaissance, description et dénomination de figures planes (triangle, carré, rectangle, losange, cercle) selon leurs propriétés (symétrie-s interne-s, parallélisme, isométrie,…)
  …
  Dessin *de carrés et de rectangles à l'aide de la règle graduée.*

On ne peut cependant pas considérer, à la lecture de ces programmes, que les compétences à propos du périmètre du rectangle, soient considérées comme prioritaires. On peut aussi se réjouir, en tant qu'animateurs du RMT, que la résolution de problèmes soit évoquée, parfois en termes lyriques et avec insistance, tout en sachant bien qu'il est plus facile d'écrire ces recommandations que de les appliquer !
Dans les manuels, qui influencent plus directement les pratiques de classe, les exercices sur le calcul du périmètre de carrés et rectangles sont fréquents et, le plus souvent répétitifs comme si l'important était de connaître la formule et de l'appliquer. C'est simple à exprimer, c'est facile à mémoriser, puis à contrôler, mais revenons aux résultats de notre problème des *Trois photos sur une page* : pourquoi une majorité de nos élèves, même en catégorie 5, montrent qu'ils sont loin de la maîtriser ?
Une autre question se pose à propos des manuels ou des pratiques scolaires : si un éditeur de manuels proposait une approche des concepts évoqués par les programmes, dont celui de périmètre, en s'inspirant d'analyses de la tâche comme celle décrite précédemment (3.3), son ouvrage figurerait-il dans la catégorie des « best-seller »?

4.2. Pour les élèves

Le problème *Trois photos sur une page* semble avoir plu aux élèves d'après ce qu'en disent les copies où l'on perçoit leur engagement (pas de « feuilles blanches », pas de copies bâclées, des explications détaillées en général …) . Ils ont pu s'approprier la situation, même si beaucoup ne sont pas partis dans la bonne direction.
On peut imaginer une répartition en trois catégories :
- ceux qui « savaient déjà » comment se débrouiller avec les périmètres et qui ont appliqué des procédures déjà plus ou moins maîtrisées (pour eux, le problème, au sens restrictif du terme de « situation nouvelle » n'en était plus un ; c'était plutôt une tâche d'application ; mais il en est ainsi pour tous les concours qui s'adressent à la large gamme des niveaux de développement des participants)
- ceux qui ont progressé dans leur maîtrise des concepts nécessaires, ont perçu la décomposition du périmètre des photos et de la page en segments, qui ont découvert ou redécouvert les longueurs à additionner ;
- ceux qui n'ont pas distingué les figures « carrés » et « rectangle » comme surfaces (à deux dimensions) des figures composées des segments qui constituent leur pourtour ou « bord ».

Pour les deux premières catégories, il y a la satisfaction d'être arrivé à une réponse qu'ils peuvent juger correcte.
Pour la troisième, il y a aussi de la satisfaction (les copies l'attestent), même si la réponse devra être modifiée par la suite. Ont-ils « fait » des mathématiques ? Chacun en jugera. Nous disons « oui » dans la mesure où ils ont suivi un raisonnement, effectué des opérations – même si elles étaient inappropriées. Comme tous ceux qui ont construit l'édifice des mathématiques, ils ont cherché, essayé, et progresseront à leur rythme vers la compréhension de la notion visée, à condition qu'on leur offre l'occasion de remettre en cause leurs idées initiales.
Il faut rappeler à ce propos que lors de la participation aux épreuves du concours, tous les élèves d'une même classe ne résolvent pas tous les problèmes, mais que chaque problème n'est résolu que par un ou deux groupes et par conséquent, le problème *Trois photos sur une page* ne pourra être considéré effectivement abordé par l'ensemble des élèves que lorsqu'il sera repris en commun après l'épreuve ou présenté dans un parcours didactique pour la classe.

4.3 Exploitations didactiques

Comme c'est souvent le cas dans notre pratique du RMT, l'examen des copies, suscite une multitude d'idées pour une exploitation dans un parcours didactique pour la classe car chaque catégorie d'erreurs observées fait naître automatiquement des pistes de remédiation.
Pour notre problème, les données recueillies nous assurent que les procédures correctes et les obstacles rencontrés sur 2 500 groupes d'élèves vont vraisemblablement se retrouver au niveau de chaque classe où les élèves résoudront le problème par groupes sans aucune aide ou intervention du maître (dans les mêmes conditions que celles des épreuves du RMT).

[7] PER (Plan d'études romand) Neuchâtel, 2010-2016 © CIIP, Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin https://www.plandetudes.ch

Les diverses procédures et réponses feront alors l'objet d'une mise en commun et d'un débat où l'enseignant aura la tâche délicate d'orienter les échanges et faire préciser les représentations de chacun.
Mais, au vu de la richesse des observations relevées, il semble judicieux de ne pas se contenter d'un débat sur les procédures de résolution mais de poursuivre le travail par un « parcours didactique » à partir du problème.

Voici quelques suggestions d'activités pour susciter une progression dans la construction du concept de périmètre, proposées lors de l'analyse a posteriori, par des membres du Groupe Géométrie plane.

La manipulation

On reprend l'énoncé et on se contente de remplacer « 48 cm » par « 24 allumettes » (ou cure-dents pour éliminer le danger d'incendie et le remplacer par celui de blessure ; la diminution de 48 à 24 ou à un autre multiple de 8 est proposés par souci d'économie et par modification de la variable didactique). La question reste la même, mais il est bien entendu que chacun ou chaque petit groupe doit construire la figure avec ses allumettes, et même y coller les image du skieur, du chat et du chien à l'intérieur.
Certes, l'activité va prendre du temps et certains objecteront que les élèves auraient le temps de faire beaucoup d'exercices de leur manuel pour entraîner l'algorithme du calcul du périmètre durant la même période. Mais le fait de manipuler les allumettes « unités figurales à une dimension »[8] et de découper et déposer les photos « unités figurales à deux dimensions » pour emplir les carrés va permettre de distinguer explicitement ces deux types de figures.

Les dessins et découpages

On peut aussi imaginer des activités de dessin en vraie grandeur ou de découpage de carrés. Par exemple les élèves doivent dessiner les trois carrés en vraie grandeur, les découper et les déplacer, en les disposant côte à côte (de manière que les côtés des petits carrés coïncident entièrement avec un côté d'un autre petit carré ou avec une partie d'un côté du grand carré) pour former différentes figures. ils peuvent alors découvrir que la dispositions qui a le pourtour le plus court est celle du rectangle (60 cm) et que toutes les autres, qui respectent les coïncidences données, peuvent être de forme différente (polygones de 8 à 12 côtés mais toutes de même pourtour (144 cm)

Variation du nombre de petits carrés

Avec trois petits carrés (au lieu de deux) sur l'un des côtés du grand carré de 48 cm de périmètre, le pourtour de la page de l'album ne mesurera plus 60 cm. Sera-t-il plus grand ou plus petit ?
Cette variante permet d'éviter les ambiguïtés relevées à propos de « la moitié » dans le problème d'origine et de vérifier si la mise en commun et les échanges à propos du périmètre de la première version ont porté des fruits.

Variation du périmètre du grand carré

En remplaçant « 48 centimètres » par exemple par 50, ou 47, ou encore 44,5 … (selon les catégories), d'autres nombres que les naturels apparaissent, afin de vérifier les compétences numériques des élèves dans l'ensemble des décimaux et de travailler sur les approximations en cas de mesure sur la figure.

Passage aux aires

Le passage aux aires est évidemment le bienvenu sur ce thème, vu l'importance de surmonter le conflit « aire-périmètre » ou la distinction entre « unités figurales » à deux dimensions (surfaces) et une dimension (segments). Par exemple, les élèves doivent découvrir que l'aire de la figure composée des carrés est la somme des aires de ses composants, alors que cette relation n'est pas valable pour les périmètres.

Pour poursuivre le travail

Pour poursuivre le travail suggéré par « La manipulation » on peut imaginer un système de couleurs pour sensibiliser les élèves à la distinction des aires de chaque figure, 36, 36, 144 et 216 en cm^2 et les longueurs de côtés 6, 12, et 18, en cm, permettant de déterminer les périmètres de chaque figure.
D'une couleur, les mesures d'aire peuvent s'additionner $36 + 36 + 144 = 216$, …
de l'autre couleur l'addition des mesures de longueur permet de définir les périmètres $6 + 6 + 6 + 6 = 24 = 4 \times 6$ …,

[8] Voir article cité Duval 2020

et la combinaison des deux couleurs permet une multiplication qui n'est pas l'addition répétée précédente, par exemple l'aire des petits carrés est : 6 × 6 = 36 en cm^2; celle de la page 12 × 18 = 216 en cm^2.
Ce n'est bien sûr qu'un petit jeu de couleurs, mais qui permettra peut-être à quelques élèves d'entrevoir l'étrangeté de cette « nouvelle multiplication » où le « fois » (ou signe ×) n'a plus le sens « d'addition répétée ».

5. En guise de synthèse

Le problème *Trois photos sur une page* est une création du Rallye mathématique transalpin, qui fait suite à d'autres créations et qui en annonce encore de nouvelles.

On ne se pose pas la question de savoir si c'est un « bon » problème, meilleur ou moins bon que d'autres. On se contente de penser qu'il est « potentiellement riche » pour l'enfant qui le résout et surtout pour l'enseignant qui a envie de l'exploiter au niveau didactique.

En soi, ce problème, comme tous les autres, n'a aucun « pouvoir magique » sur les apprentissages liés au concept de périmètre ou sur la formation des enseignants. Toute sa potentialité réside dans ce que va en faire l'enseignant.

Or cet enseignant sera peut-être tiraillé entre :

- le respect d'un programme qui mentionne le périmètre mais n'en décrit pas les composantes didactiques ;
- certains manuels qui fourmillent d'exercices d'entraînement de la règle « pour calculer le périmètre d'un rectangle il faut additionner les longueurs de ses quatre côtés » ;
- son devoir social « d'enseigner » cet algorithme ou de « montrer comment faire », même s'il sait d'expérience que ce savoir ne sera pas transférable dans des situations non conventionnelles comme celles des problèmes du RMT ;
- ses contraintes de temps, sa gestion de la classe et des tâches institutionnelles, … ;
- ce qu'on lui a enseigné au cours de sa formation ;
- son envie de se lancer avec sa classe dans la résolution de problèmes mais, simultanément, ses doutes sur la possibilité de prendre en compte la diversité des niveaux de ses élèves dans un souci d'individualisation.

C'est à lui de se situer dans cet entrelacement de forces d'attraction, malheureusement non convergentes.

Du point du vue du RMT, il n'est pas question d'imposer un choix, mais seulement d'informer largement les enseignants des données recueillies, issues de l'examen de milliers de copies, dans un dispositif d'expérimentation et de réflexion d'une large communauté.

« Informer largement », est-ce suffisant pour aller dans le sens des finalités du RMT rappelées précédemment : *améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques* ? L'analyse de ce que nous disent les élèves à propos de *Trois photos sur une page* révèle le risque de passer à côté de lacunes sans y prendre garde. Dans notre cas, par exemple, la moitié des élèves de catégorie 5 ne distinguent pas les dimensions des « unités figurales » alors qu'on pense qu'ils maîtrisent la notion de périmètre puisqu'ils sont capables de le calculer avec la formule et de résoudre facilement les problèmes de leur manuel. Car l'adage chinois s'adapte aussi au périmètre : *Si tu donnes un poisson a un affamé, tu l'aides pour une journée, mais si tu lui apprends à pêcher, tu l'aides pour toute sa vie.*

Bibliographie

Crociani C., Salomone L.: 2001, 'Un problema di tipo geometrico: Attraverso la quadrettatura? / 'Un problème de type géométrique : la traversée du quadrillage', in Grugnetti, Jaquet, Crociani, Doretti, Salomone (Eds.) RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici / évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino, Siena 1999 - Neuchâtel 2000, Università di Siena, IRDP di Neuchâtel, 118-128.

Crociani C:, Doretti L., Grugnetti L., 2012, 'Difficoltà nel confronto di lunghezze'/ Difficultés dans la comparaison de longueurs', *Gazette de Transalpie* No 2, 71-98.

Duval R., 2020, 'Le premier seuil dans l'apprentissage de la géométrie : « voir » les « figures »' / Il primo passo nell'apprendimento della geometria: "vedere" le "figure" ', *Gazette de Transalpie* No 10, 7-26.

Jaquet F., 2000, 'Le conflit aire-périmètre' / Il conflitto area perimetro' (prima e seconda parte), *L'educazione Matematica,* n. 2 e n. 3.

Sitographie

www.armtint.eu / banque de problèmes

A PROPOSITO DI PERIMETRO

Clara Bisso, François Jaquet

Sunto

Questo articolo presenta un problema del RMT che porta i giovani allievi a confrontarsi con il concetto di perimetro di quadrati e rettangoli e di tale problema vengono tracciate la storia e l'origine, derivanti dalle pratiche permanenti del RMT sull'elaborazione e l'analisi dei problemi. Quindi lo si descrive attraverso il suo enunciato, la sua analisi a priori e i risultati ottenuti da circa 2 500 classi che l'hanno risolto o hanno tentato di risolverlo durante la seconda prova del 27° RMT, nel 2019.
Segue un'analisi a posteriori fondata su un esame accurato di diverse centinaia di elaborati e su una prima lettura di altri mille. Emergono diverse procedure risolutive, alcune delle quali conducono alla cosiddetta risposta "corretta" e altre a risposte diverse, caratteristiche di una costruzione ancora incompiuta del concetto di perimetro.
Queste osservazioni ci invitano a cercare di comprendere meglio gli ostacoli incontrati dagli allievi, riguardo al loro modo di "vedere" le figure e di operare sulle grandezze percepite, e ci consentono un'analisi più dettagliata del loro compito di risoluzione.
Infine, al di là di queste constatazioni, consideriamo ciò che si può trarre per l'insegnamento: indicazioni didattiche e prosecuzione delle indagini sul concetto di perimetro.

1. Una procedura pragmatica

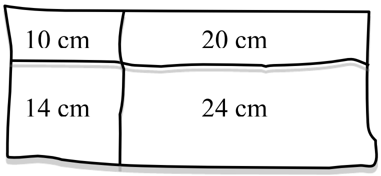
I temi di studio e riflessione del RMT non sono programmati secondo un piano di ricerca strutturato. Emergono nel corso delle proposte di problemi e delle analisi a posteriori di alcuni di essi, nel momento in cui si osservano negli elaborati degli allievi, procedure rilevanti, ostacoli, errori ricorrenti ... . Alcuni animatori e in particolare i nostri gruppi di lavoro permanenti li scelgono e li approfondiscono in relazione ai loro interessi e disponibilità.
Nell'ambito della geometria piana, molti problemi del RMT coinvolgono la nozione di perimetro senza però dedicarle particolare attenzione. Una delle prime analisi a posteriori di un problema del RMT ha rivelato un "conflitto" tra area e perimetro in merito a Il giardino del signor Torquato (ral. 08.I.06; cat. 3-4; 08rmti_it-6) dove si trattava di confrontare l'area di due parti di un quadrato[1]. Ma anche se questo "conflitto" è stato spesso osservato in problemi successivi, l'interesse si è sviluppato sui confronti di aree (una famiglia della nostra banca dei problemi) senza che la costruzione del concetto di perimetro sia stata approfondita.
I problemi relativi si trovano nella famiglia più generale "Ricercare o utilizzare dimensioni" dell'ambito "Grandezze e misure" della Banca di problemi, nella sottofamiglia RD/AP: Determinare aree e / o perimetri, di cui ecco alcuni esempi:
I due rettangoli (ral. 13.F.06; cat. 4-6; 13rmtf_it-6)**:** accostare due rettangoli quadrettati (dimensioni 3 x 5 e 5 x 8) rispettando l'allineamento della quadrettatura in modo che il perimetro della figura ottenuta sia il minimo o il massimo possibili.
Da un recinto all'altro (ral. 14.F.14; cat. 7-10; 14rmtf_it-14): calcolare le dimensioni axb (con a e b numeri interi) di un rettangolo di perimetro di 60 m, sapendo che un rettangolo con il perimetro di 66 m e di dimensioni (a+6)x(b-3) ha l'area maggiore di 90 m^2.
La cordicella (ral. 15.F.07; cat. 4-5; 15rmtf_it-7): costruire, su una griglia, un rettangolo con lo stesso perimetro (22 unità) di un rettangolo dato e con la massima area.
Campi da gioco (ral. 19.II.04; cat. 3-4; 19rmtii_it-4)**:** calcolare il perimetro di un rettangolo formato dall'unione di un quadrato e di un rettangolo. Di queste due figure si conosce il perimetro.

È su quest'ultimo argomento che comincia a delinearsi l'idea di intraprendere uno studio più approfondito del concetto di perimetro, nel corso del 19° RMT. Ma anche qui, l'approccio pragmatico delle nostre riflessioni ha dovuto svilupparsi in funzione della disponibilità e degli interessi delle persone implicate. Gli elaborati, una volta assegnati i punteggi, sono rimasti negli archivi delle nostre diverse sezioni.
Abbiamo dovuto attendere una proposta di nuovo problema per il 27° RMT per riaccendere l'interesse e la curiosità sul concetto di perimetro:

[1] Cfr. Bibliografia F. Jaquet

Charly ha suddiviso un rettangolo in 4 rettangoli. Ha fatto un disegno molto approssimativo, a mano libera, della sua suddivisione.

Sul disegno, ha indicato i perimetri dei 4 rettangoli che ha ottenuto.



Dice a Charlotte: “Adesso tocca a te trovare il perimetro del rettangolo grande che ho suddiviso”.

Trovate la risposta e spiegate come l’avete trovata.

Questo problema, proposto per le categorie 4 e 5, ha sollevato molti dubbi durante la sua analisi a priori espresse con le seguenti domande:

- gli allievi saranno in grado di percepire le quattro "famiglie" di rettangoli, di 10, 14, 20 o 24 cm di perimetro, tutte costituite da un numero infinito di rettangoli?
- Riusciranno a gestire i vincoli derivanti dalla scelta delle dimensioni di un primo rettangolo (per esempio scegliendo 2 e 3 cm per quello con 10 cm di perimetro) e determinare i lati degli altri rettangoli?
- La scelta di 10, 14, 20 e 24 è casuale o la quarta è determinata dai primi tre? (Esiste una relazione additiva tra i perimetri delle due righe: “+ 4” e quelli delle due colonne: “+ 10” che obbliga ad assegnare 24 al perimetro del rettangolo in basso a destra).
- Come “vedranno” gli alunni i quattro rettangoli piccoli e quello grande?[2]

Infine, l'interesse del problema, come "teorema" sull'additività dei perimetri[3] ha perduto la sua priorità a fronte degli argomenti didattici imposti dalle considerazioni relative alle capacità e competenze degli alunni. Le ambizioni sono state riviste al ribasso: sullo stesso schema è stato ideato un contesto nel quale viene proposto esplicitamente agli allievi di iniziare costruendo un primo rettangolo di 10 cm di perimetro, poi di ricominciare con un rettangolo di dimensioni diverse. Il problema è stato somministrato alle categorie 6 e 7 invece che 4 e 5. In questa versione più “guidata”, gli alunni più grandi incontrano ancora notevoli difficoltà, in particolare nella categoria 6 dove la media dei punteggi assegnati è solo 1, 2. (Cfr. I cinque rettangoli (I) (ral. 27.II.10; cat. 6-7; 27rmtii_it-10)

Secondo il medesimo schema, è stato ideato un altro problema per le categorie da 8 a 10, con l’aggiunta della ricerca del rettangolo grande di area maggiore. (Cfr. I cinque rettangoli (II) (ral. 27.II.17; cat. 8-10; 27rmtii_it-17) (Formare rettangoli ognuno dei quali è composto da quattro rettangoli di perimetro dato (10, 14, 20 e 24 cm), trovare il perimetro e individuare quello con l’area maggiore). Anche in questo caso, se gli allievi più grandi hanno trovato che il perimetro del rettangolo grande è 34 cm, pochi fra loro hanno percepito la "classe" di questi rettangoli "isoperimetrici" e quindi non sono riusciti a scoprire che quello con l’area maggiore è il quadrato.
Occorreva quindi inventare un problema per i più piccoli (cat. da 3 a 5) e siamo tornati al vecchio problema Campi da gioco (ral. 19.II.04; cat. 3-4; 19rmtii_it-4) del quale non era stata ancora effettuata l’analisi a posteriori.
Qui torniamo al “pragmatismo” di molte procedure del RMT: visto che, secondo il nostro sistema, gli elaborati dei vecchi problemi sono conservati negli archivi delle sezioni, perché non chiedere ai membri del gruppo “Geometria piana” di andare a ricercarle (talvolta a riesumarle)? Due piccioni con una fava: ci sono arrivate le risposte di sette sezioni e ci hanno permesso di redigere la rubrica "Procedure, ostacoli ed errori rilevati" per la scheda del problema da inserire nella nostra banca. La lettura dei risultati (medie molto basse) e la varietà di errori (si veda l’ultima domanda formulata più sopra) ci hanno persuasi di quanto fosse opportuno e interessante conoscere meglio come i giovani allievi percepiscano la nozione di perimetro. Questo è l'oggetto del problema che segue.

---

[2] È l’oggetto della conferenza di Raymond Duval al 20° Incontro Internazionale dell’ARMT ad Alghero (2019), presente anche come articolo in questo numero della Gazzetta con il titolo *Il primo passo nell’apprendimento della geometria: “vedere” le “figure”*, pp. 17-26.

[3] “Se quattro rettangoli sono giustapposti in una griglia 2 × 2 per formare un grande rettangolo, il perimetro di quest'ultimo è la metà della somma dei perimetri dei primi quattro.”

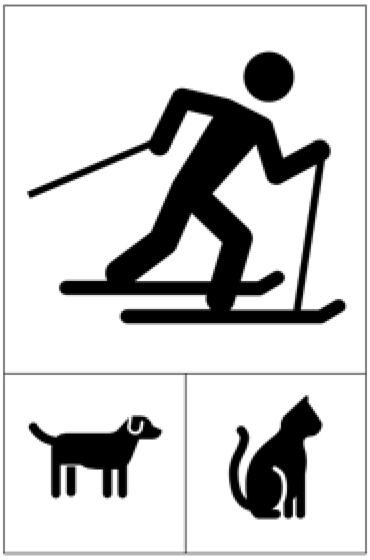
A conclusione di questa introduzione sull'origine della nostra ricerca sui perimetri possiamo evidenziare il percorso tipico del sistema RMT: proponiamo problemi, gli allievi li risolvono e ci spiegano il loro procedimento, raccogliamo i risultati, analizziamo gli elaborati e scopriamo cose spesso inaspettate, quindi approfondiamo ciclicamente attraverso nuovi problemi, per saperne di più e pervenire a delle indicazioni didattiche. L'ambizione primaria non è condurre ricerche teoriche o accademiche ma semplicemente permettere all'insegnante che lo desidera, di approfondire un argomento che incontrerà frequentemente con i suoi allievi e, perché no, tenerne conto nella costruzione dei suoi percorsi didattici.

2. Il problema *Tre foto su una pagina*: enunciato, analisi a priori e risultati

2.1. L'enunciato

Il problema è stato proposto agli alunni delle categorie 3, 4 e 5 durante la 2ª prova del 27° RMT

Roberto ha incollato tre foto di forma quadrata su una pagina del suo album: una grande che lo ritrae mentre fa sci di fondo e due piccole, una del suo gatto e una del suo cane.



Le tre foto ricoprono interamente la pagina dell'album.

Il contorno della foto grande misura 48 centimetri.

Quanto misura il contorno della pagina su cui sono incollate le tre foto?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

Quando, nell'ambito del RMT, si elabora un nuovo problema per intraprendere una prima indagine su un concetto emerso durante l'analisi di un problema "precedente", si cerca di trarne ispirazione e di limitare le modifiche relative alle variabili didattiche o al contesto. Il problema "precedente" è il già citato *Campi da gioco*, il cui contenuto matematico o sunto nella banca di problemi è: *Calcolare il perimetro di un rettangolo formato dall'accostamento di un quadrato di perimetro 20 m e un rettangolo di perimetro 40 m.*
Il "nuovo" ha un contenuto molto simile: *Determinare il perimetro di un rettangolo composto da un quadrato grande di cui si conosce il perimetro (48 cm) e da due quadrati piccoli congruenti tra loro*. La variazione del contesto non ci è sembrata significativa perché il passaggio dal terreno di gioco a quello della pagina di un album è, in entrambi i casi, rappresentato da quadrati e rettangoli riportati sul foglio dell'enunciato. La variabile didattica è limitata al passaggio da due figure (un quadrato e un rettangolo giustapposti, nel primo caso) a tre figure (due quadrati e un rettangolo giustapposti, nel secondo) e all'aggiunta di una divisione in due parti necessaria per trovare il lato di uno dei quadratini del secondo.

2.2. Analisi del compito a priori

Questa analisi è stata formulata come segue:

a *Osservare la posizione dei tre quadrati, notare che i due quadrati piccoli devono essere uguali, che il loro lato è la metà di quello grande e che i tre quadrati formano un rettangolo, che è la pagina dell'album.*

b *Ricordare che il perimetro o contorno è una lunghezza, uguale alla somma delle lunghezze di tutti i lati della figura: che, nel caso del quadrato, la relazione è "il perimetro è uguale alla somma dei quattro lati" e nel caso del rettangolo grande "il perimetro è uguale alla somma dei quattro lati del quadrato grande e di due lati dei quadrati piccoli". Comprendere che sarà necessario calcolare le misure dei lati dei quadrati.*

c *Dedurre dai dati che il contorno del quadrato grande, composto da quattro segmenti (lati) uguali, consente di calcolare la misura di uno dei suoi lati con una divisione per 4. 48 ÷ 4 = 12 (cm). Quindi ricavare la lunghezza di un lato dei quadratini: 6 cm.*

d *Calcolare la misura del contorno del rettangolo grande per addizione e / o moltiplicazione: 12 × 3 + 6 × 4 = 60.*

e *Oppure comprendere, osservando il disegno, che il quadrato grande è equivalente a quattro quadrati piccoli e, di*
conseguenza, il suo contorno è equivalente a otto lati dei quadrati piccoli. Quindi calcolare la lunghezza dei suoi lati: 6 cm (48: 8).

f *Osservare che il contorno del foglio è composto da dieci segmenti da 6 cm quindi calcolare il perimetro: 60 cm (6 × 10).*

g *Oppure, fare un disegno a grandezza naturale e misurare i lati del rettangolo grande.*

L'analisi a priori tiene ovviamente conto dell'analisi a posteriori del problema precedente ma non considera realmente la percezione della situazione da parte dell'allievo. (A questo proposito, l'analisi è stata redatta prima dell'incontro di Alghero, il cui tema, come da nota 2, era proprio *L'allievo di fronte a un problema*, *l'analisi a priori del suo compito*: *riflettere sul suo punto di vista.*) I suoi primi due paragrafi (a e b) rappresentano già un timido passo verso una descrizione della "appropriazione" della situazione da parte dell'allievo, ma i seguenti descrivono solo il modo in cui l'adulto - che padroneggia i concetti legati al perimetro - immagina come gli alunni procederanno o pensa a come spiegherebbe ("insegnerebbe") la soluzione agli allievi. Per esempio, il terzo paragrafo (c) presuppone, come un'evidenza, che il "12" della divisione per 4 sia una misura di lunghezza e si esprima in cm, che permetterà di calcolare la lunghezza di un lato dei quadrati piccoli attraverso una divisione per 2, e quindi che, del tutto naturalmente, questi "6 cm" potranno essere usati per trovare la risposta in pochi elementari passaggi. Non vi è alcun riferimento agli ostacoli che l'allievo incontrerà, ma già evidenziati dalla disamina degli elaborati del problema precedente. Queste iniziali riflessioni sull'analisi a priori non devono essere considerate come una critica, ma come una constatazione: è molto difficile, non solo mettersi nei panni dell'allievo immaginando a priori il suo compito di risoluzione, ma anche descrivere in termini concisi e precisi un processo di ricerca di strumenti efficaci per arrivare a una soluzione, che a volte deve essere inventato di sana pianta.

2.3 Risultati

Punteggi attribuiti, su 2431 classi di 19 sezioni:

punteggi	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Totale	m
Cat. 3	341	120	40	66	142	709	1,4
Cat. 4	375	139	53	83	214	864	1,6
Cat. 5	248	126	62	105	374	915	2,3
tot	**964**	**385**	**155**	**254**	**730**	**2488**	1,8

in %					
Cat. 3	48%	17%	6%	9%	20%
Cat. 4	43%	16%	6%	10%	25%
Cat. 5	27%	14%	7%	11%	41%
tot	39%	15%	6%	10%	29%

Secondo i criteri determinati durante l'analisi a priori

4 Risposta corretta (60 cm o 60) con descrizione chiara e completa del procedimento seguito (per esempio il disegno con le misure riportate e il calcolo fatto in base al ragionamento seguito)

3 Risposta corretta con descrizione incompleta o poco chiara (per esempio il disegno con le misure, ma senza indicare il calcolo per il perimetro del rettangolo oppure la mancanza di qualche tappa del ragionamento seguito: indicazione della lunghezza dei lati dei quadrati o di come sono stati trovati, …)

2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure un solo errore di calcolo nel determinare il perimetro o la misura dei lati dei quadrati

1 Le misure dei lati dei quadrati piccoli sono state trovate (6 cm), ma il perimetro non è stato calcolato correttamente (per esempio 96 = 48 + 24 + 24)
oppure più di un errore di calcolo nel determinare il perimetro o la misura dei lati dei quadrati

0 Incomprensione del problema

La prima constatazione secondo l'osservazione della tabella suindicata è la progressione delle medie dei punteggi dalle categorie 3 e 4 (1.4 e 1.6) alla categoria 5 (2.3). Esse giustificano il fatto di aver proposto il problema anche in categoria 5. Campi da gioco era stato proposto solo nelle categorie 3 e 4, con medie di punteggi paragonabili a queste (1,2 e 1,7).

La seconda è la frequenza della risposta corretta stimabile - raggruppando le risposte chiaramente descritte (4 punti), con quelle a spiegazione incompleta (3 punti) o addirittura senza spiegazione (2 punti) - che varia da circa il 35 % nella categoria 3, al 40% nella categoria 4 fino al 45% nella categoria 5. Ciò significa che una minoranza dei gruppi ha trovato la risposta 60 o 60 cm per il contorno della pagina.

3. L'analisi a posteriori

La tabella dei risultati fornisce solo indizi sulla riuscita del problema che possono essere stimati osservando la colonna di destra delle medie dei punteggi e le frequenze della loro distribuzione. Si possono trarre le prime considerazioni "statistiche" simili alle precedenti.

Va però ricordato che i punti assegnati dipendono dai criteri scelti, che a loro volta dipendono dalle aspettative degli insegnanti, dai programmi, dalle pratiche e dalle abitudini, dalla politica scolastica in generale. Va aggiunto che, sebbene si cerchi di definire i criteri con il massimo rigore possibile, questi sono sempre soggetti a interpretazioni diverse da parte di coloro che attribuiscono i punteggi. Infine, bisogna anche tener presente che questi criteri sono imposti dalla natura stessa del Rally che è un confronto tra classi ed esige una classificazione dei partecipanti.

Queste considerazioni sono utili per rimarcare come, dal punto di vista didattico o della costruzione delle conoscenze matematiche da parte degli alunni, sia solo leggendo gli elaborati degli allievi che entriamo nell'argomento che ci interessa: abbiamo sviluppato un problema con grande cura e buone intenzioni, lo abbiamo proposto a migliaia di classi - o più precisamente di gruppi di alunni - chiedendo loro di raccontarci come hanno fatto per trovare la soluzione o per tentare di risolverlo, è quindi normale che leggiamo i loro testi con attenzione, nel rispetto del loro lavoro di risoluzione e di quello di tutti coloro che hanno elaborato il problema, lo hanno riletto, commentato e migliorato.

3.1. Procedure, ostacoli e errori rilevati

Le seguenti osservazioni derivano dall'analisi a posteriori di più di 200 elaborati delle sezioni Sassari, Parma e Svizzera romanda e dalle osservazioni ricevute dalle sezioni di Perugia, Puglia, Rozzano, Siena e Udine, che rappresentano in tutto più di 1000 elaborati.

La **risposta corretta**, 60 cm (o 60) è stata trovata nel 45% degli elaborati esaminati (tutti i "4 punti", "3 punti", "2 punti" assegnati, con le stesse frequenze di quelle dei 2488 elaborati annotati nella tabella dei risultati sopra indicata). Questa percentuale aumenta notevolmente da una categoria all'altra, 35% nella categoria 3,45% nella categoria 4 e 55% nella categoria 5, come le medie dei punteggi già menzionate sopra.

In tutti questi casi, la soluzione si fonda sulla divisione 48 : 4 = 12, rendendo così possibile determinare anche la misura del lato del quadrato grande, poi, solitamente, il lato di un quadrato piccolo viene determinato dalla divisione12 : 2 = 6.

Accade talvolta che le scritture 48 : 4 = 12 o 12 : 2 = 6 non siano esplicitamente elencate, ma i risultati 12 e 6 siano sempre presenti.

Esistono molti modi per giustificare la risposta 60. Ad esempio: 10 × 6; 12 × 5; 18 + 18 + 12 + 12; 12 × 3 + 6 × 4; 12 + 12 + 12 + 12 + 6 + 6; ... corrispondenti in generale alle lunghezze dei lati indicati dagli alunni sulla figura: 12, 6 e/o 18.

Solo due elaborati esaminati presentano un disegno a grandezza naturale.

Tutti questi successi attestano una corretta percezione del termine "contorno" utilizzato nell'enunciato.

Quando gli allievi descrivono verbalmente la loro prima operazione, troviamo frasi come:

- Poiché il contorno dell'immagine grande misura 48 cm significa che ogni lato misura 12 cm (12 × 4 = 48). ...

- Abbiamo diviso il contorno della foto grande per 4 che fa 12 cm. Poi ...

Quando gli allievi scrivono solo operazioni, c'è una maggioranza di 48 : 4 = 12 o quando non indicano le operazioni, il "12" è annotato su almeno due lati del quadrato grande.

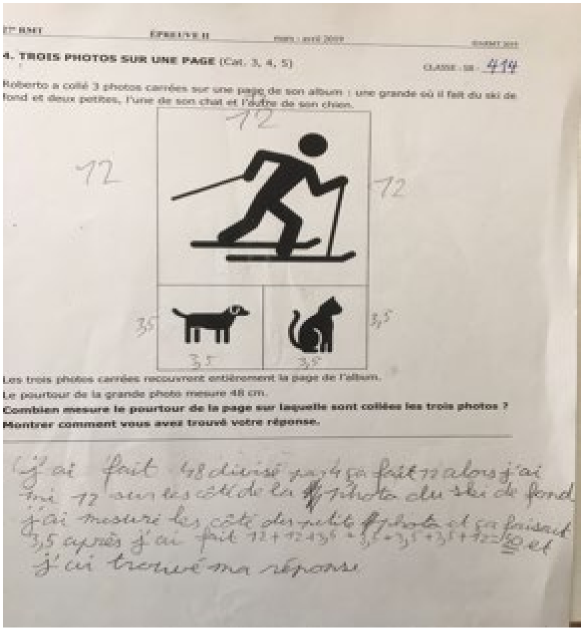
Possiamo dedurne che questi allievi considerano il perimetro o il "contorno" della figura "quadrato" come la somma delle uguali lunghezze dei quattro lati, quindi continuano a considerare i lati (segmenti) delle altre figure per dividerli per due e poi addizionarli. Quindi distinguono perfettamente i quadrati (figure a due dimensioni) dai loro lati (segmenti) e lavorano nell'ambito delle lunghezze, in una dimensione.

Misure prese sulla figura dell'enunciato

In una ventina di casi (circa il 10%), gli allievi hanno misurato i lati delle figure con un righello graduato, in cm, senza tener conto del dato "48 cm per il contorno del quadrato grande ", che avrebbe dovuto condurli ad una risposta vicina a 36 o 37 cm (ad esempio (11,0 + 7,3) × 2 = 36,6. Ma le variazioni vanno oltre le inesattezze delle misure e troviamo risposte che vanno da 35 a 40. Come i precedenti, anche questi allievi hanno lavorato nell'ambito delle lunghezze dei segmenti, in una dimensione.

Un altro modo di prendere le misure si scopre in una trentina di elaborati esaminati (15%) dove vengono combinate due diverse unità: 12 cm (dimensione "reale" invece di 7 " secondo la scala del disegno " per ciascuno dei tre lati del quadrato grande e 3,5 cm (misura presa sul disegno) per i lati dei quadrati piccoli:

- <u>Esempio 1</u> (cat 4) *Ho fatto 48: 4 che fa 12 quindi ho messo 12 sui lati della foto dello sci di fondo. Ho misurato i lati delle foto piccole ed era 3.5 dopo ho fatto 12 + 12 + 12 + 3.5 + 3.5 + 3.5 + 3.5 = 50 e ho trovato la risposta.* (I tre "12" e i quattro "3,5" sono posizionati correttamente sulla figura).



Ecco alcune altre varianti:

- <u>Esempio 2</u> (cat.4) Il contorno del quadrato grande è in rosso: 48 cm; il rettangolo di due quadratini ha tre lati in blu: 15 cm (3,7 le larghezze, 3,8 la lunghezza) con le spiegazioni*: 48 + 15 = 63, 63 - 7,5 = 55,5 Il contorno della pagina su in cui sono incollate le foto è di 55,5 cm.*
- <u>Esempio 3</u> (cat 3) (Il contorno del quadrato grande è in rosso: 48 cm; i bordi dei due quadratini blu, con "3,5 cm" sui lati e "14" al centro)*: 14 + 14 = 28 ; 48 + 14 = 76. Ci sono 76 cm sulla pagina.*

- Esempio 4 (cat 5) I tre quadrati sono indicati da una freccia utilizzando i numeri 48, 19 e 19. *Il contorno dell'album è di 86 cm.* Spiegazione*: Innanzitutto abbiamo calcolato (misurato) il contorno della foto grande. Sono 28 cm, quindi abbiamo calcolato la differenza tra la linea reale e la linea che è sopra. Abbiamo trovato una differenza di 20 cm. Quindi abbiamo diviso il quadrato grande per 4 per trovare le dimensioni del cane e del gatto. Abbiamo aggiunto 48 + 19 + 19 = 86 perché il contorno del cane è di 19 cm.*

Come in precedenza, gli allievi hanno lavorato nel campo delle lunghezze dei segmenti, in una dimensione, ma con due unità: il "cm" menzionato nell'enunciato (dove non è detto che la figura presentata è una riduzione della pagina reale dell'album e che i centimetri sono dei "cm ridotti") e i "cm" reali misurati con il righello sui quadratini (che sono "cm a grandezza naturale"). Perché mai si dovrebbero misurare i lati del quadrato grande, visto che si conoscono già dalla divisione 48: 4 = 12 (in cm)?

La risposta 72 = 48 + 24 è l'errore il più frequente e tipico, si incontra in un quarto degli elaborati esaminati. Questa sarebbe la risposta giusta se fosse stata richiesta l'area della pagina dando 48 cm^2 come area della foto grande.

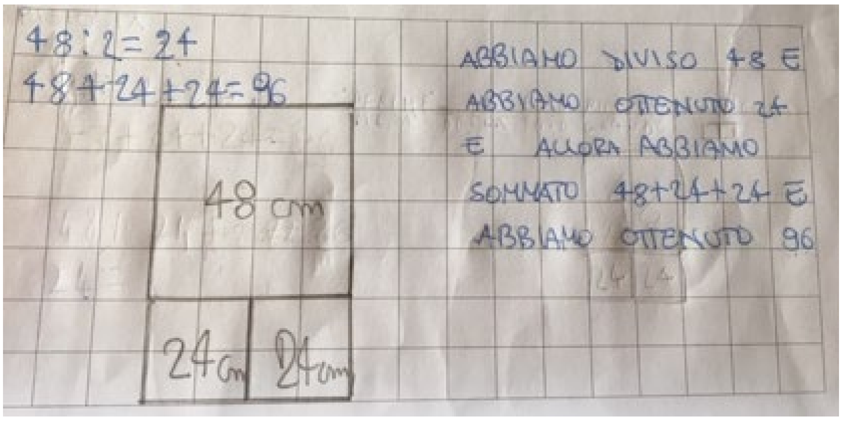
Gli allievi che hanno dato questa risposta sembrano aver percepito gli spazi occupati piuttosto che i segmenti che li delimitano. Per loro, la pagina è composta da un grande quadrato e dall'insieme dei due piccoli, considerati come una "striscia" che occupa metà dello spazio riservato al grande quadrato corrispondente al dato "48". La parola "contorno" o l'unità "cm" probabilmente non sono state "lette" in modo ponderato. Di conseguenza, questi allievi hanno iniziato con l'operazione 48 : 2 = 24 che fornisce loro un valore legato alla "striscia" dei due quadrati, quindi hanno proseguito con la divisione 24 : 2 = 12 che dà loro un valore attribuito a ciascuno dei due quadratini:

- Esempio 5 (cat 5): *48 cm che sono i cm della foto grande, le foto piccole che sono la metà, quindi abbiamo fatto 48 : 2 che ci ha dato 24 e quindi abbiamo sommato 48 + 24 = 72 che era il contorno dell'album.*
- Esempio 6 (cat 4): *Abbiamo scoperto che la misura del contorno della pagina è 72 perché si vedeva che le due foto piccole erano la metà della foto più grande quindi abbiamo fatto 48 :2 poi 24 (risultato) :2 che da 12 × 2 perché le foto piccole erano 2 …*
- Esempio 7 (cat 3): *Le due foto fanno la metà della foto grande quindi la metà di 48 fa 24 perciò insieme le 3 foto fanno 72.*
- Esempio 8 (cat 5): *Ho trovato la risposta cosi: poiché le foto piccole sono la metà di quella grande, che è 48, queste due foto sono metà della foto grande, quindi sono la metà di 48 cm, cioè 24 cm, questo fa 24 + 48 = 72 cm.*

Contrariamente al ragionamento che ha portato alla risposta corretta, c'è, in queste risposte "72" un'addizione di due misure associate a figure bidimensionali, paragonabili a ciò che accade nell'ambito delle aree (a due dimensioni).

La risposta 96 = 48 + 24 + 24 è stata rilevata in 6 elaborati, alcune dei quali di tipo "lunghezza" dal calcolo dei perimetri dei due quadrati piccoli: 24 o 6 + 6 + 6 + 6 e l'addizione dei tre perimetri e altri per addizione delle tre aree, come mostra il seguente esempio:

Esempio 9



Si trovano ancora molte altre procedure errate negli elaborati esaminati, in particolare:

- 5 risposte 240 con la somma di 48 × 2 = 96 e di 72 × 2 = 144
- 5 risposte 120 ottenute a partire da 48 : 2 = 24 poi 48 + 24 = 96 et 96 + 24 = 120

Esempio 10 (Cat 5) *Risposta : il contorno della pagina misura 120 cm. Abbiamo letto che la misura della foto grande è 48 cm. Perciò abbiamo pensato di prendere la figura piccola e abbiamo scoperto che era la metà abbiamo calcolato "48 : 2" che dà 24, cioè la metà della figura grande. Per calcolare la lunghezza di tutta la pagina abbiamo fatto « 48 + 24 », che da 72 poi abbiamo fatto 72 + 24 che dà 96 cioè la lunghezza di tutta la pagina poi 96 + 24 = 120.*

3.2. Perché gli errori e gli ostacoli?

Le osservazioni precedenti ci pongono ovviamente delle domande sugli errori e le loro cause, ma anche sulle procedure corrette. Eccone alcune:

La divisione 48 : 4 = 12 è presente esplicitamente nella maggioranza degli elaborati, compresi quelli che portano alla risposta 60. Ci si può accontentare di questo e dirsi: "almeno hanno capito che bisognava fare una divisione". Si può anche supporre che, sapendo che il quadrato ha 4 lati e 4 angoli uguali e anche 4 vertici, gli alunni dividano meccanicamente per 4.

Coloro che hanno scritto esplicitamente "12 cm" potrebbero essere consapevoli che si tratta della lunghezza di un lato, ma potrebbero anche semplicemente aver aggiunto "cm" perché nei dati appariva accanto a 48, o aggiunto cm^2 perché è un "quadrato".

Qual è il significato di "metà" in questi esempi?

Ribadiamo che i diversi significati del termine "metà", senza conseguenze per il rigore della procedura nei casi di riuscita, (esempi da 11 a 14) sono spesso fonte di confusione nella maggior parte delle risposte errate.
Esempio 11 L'elaborato mostra 6 quadratini, ogni dimensione della pagina è chiaramente indicata: 18 cm e 18 cm verticalmente, 12 cm e 12 cm orizzontalmente), con il seguente testo. *Poiché il contorno dell'immagine grande misura 48 cm questo significa che ogni lato misura 12 cm (12 × 4 = 48). Dopo abbiamo tracciato due linee, una in verticale, l'altra in orizzontale (proprio al centro del quadrato grande). Abbiamo notato che una piccola immagine si inserisce in un quadrato.* ***Ciò significa che è la metà*** *(metà di 12 = 6). Poiché il lato del quadrato grande è di 12 cm e l'immagine piccola è 6. 6 + 12 = 18. Entrambe le lunghezze delle pagine sono 18 cm e le larghezze sono 12 cm (6 + 6 = 12. Calcoli: 18 + 18 + 12 + 12 = 60. Risposta: il perimetro della pagina misura 60 cm.*
Esempio 12 *Abbiamo cercato di vedere se le due foto piccole erano la metà di quella grande. Era cosi. Quindi la nostra risposta è 60 cm. 6 + 6 + 12 + 6 + 6 + 12 + 12 = 60* (Sul perimetro della pagina sono precisamente annotati i tre "12" e i quattro "6". Sembra qui che sia la "banda" inferiore (le due foto piccole) ad essere la metà di quella grande, il che non pregiudica il seguito dove i numeri indicati sono misure di lunghezza.
Esempio 13. *Abbiamo diviso il perimetro della foto grande per 4 che fa 12 cm. Quindi abbiamo diviso i contorni delle due foto piccole che formano la metà di quella grande per 4, il che ci ha dato 6. Ci sono 4 lati delle foto piccole sul contorno della pagina grande e tre lati di quella grande. 6 x 4 = 24 e 3 x 12 = 36 e 36 + 24 = 60.* Sembra che siano i contorni ad essere la metà della grande (il contorno della grande).
Un altro significato dello stesso termine "metà" si trova negli esempi da 4 a 7 della risposta 72 e anche per altre risposte come la seguente:
Esempio 14. *Risposta: il contorno della pagina misura 120 cm. Abbiamo letto che la misura della foto grande è 48 cm. Perciò abbiamo pensato di prendere la figura piccola e abbiamo scoperto che era la metà, abbiamo calcolato "48: 2" che da 24, cioè la metà della figura grande. Per calcolare la lunghezza di tutta la pagina abbiamo fatto "48 + 24", che da 72 poi abbiamo fatto 72 + 24 che da 96 cioè la lunghezza di tutta la pagina poi 96 + 24 = 120.*
Per quanto riguarda la "metà", possiamo qui ricordare una scoperta sorprendente durante l'analisi a posteriori del problema Attraverso la quadrettatura (ral. 08.II.08;cat. 5-7; 08rmtii_it-8) dove si trattava di confrontare la lunghezza di 7 percorsi che "attraversano" una griglia lungo i lati o le diagonali dei quadrati della griglia. Nella relativa scheda inserita nella banca di problemi, alla rubrica "Procedure, ostacoli ed errori rilevati "si legge: *Un errore abbastanza diffuso, presente in tutte le categorie, in ogni paese e regione consiste nel valutare la diagonale come la metà di un lato del quadrato.*
Una linea verticale vale un quadretto e una linea obliqua vale la metà di un quadretto.
Si ipotizza che l'attenzione sia stata posta sul quadretto e sul mezzo quadretto invece che sul lato e sulla diagonale Troveremmo così il conflitto area / lunghezza non ancora superato[4].

L'addizione

L'operazione di addizione è mobilitata e dà risultati corretti quando si tratta di riunire insiemi di oggetti, di comporre un nuovo segmento congiungendo le estremità di due segmenti più corti, di trovare l'area di una figura composta da più parti le cui aree sono note. Perché questa operazione non dovrebbe funzionare con i perimetri? E perché il perimetro della metà della foto grande non dovrebbe essere la metà di 48?
"48" e "24" compaiono in molti commenti che accompagnano le risposte "72". Cosa rappresenta l'operazione "48 + 24"? Un'addizione di aree, un'addizione di perimetri, un raggruppamento di parti della figura, ...?

4 Si veda in bibliografia Crociani, Salomone e Crociani et al.

Qui inciampiamo in un vero ostacolo! E probabilmente non sono le "spiegazioni", le istruzioni o gli avvertimenti del docente che permetteranno all'allievo di superarlo, ma un lavoro di costruzione e ricostruzione, di messa in discussione, accompagnato da manipolazioni, disegno geometrico, conteggio di quadrati o lati di quadrati su una quadrettatura. Non ci sono solo "addizioni" di perimetri "48", "24" e "24" che a volte vengono interpretati come aree, in queste categorie di risposte errate (96, 120,). Si trovano per esempio dei perimetri "dettagliati" con la somma dei segmenti annotati sui lati delle tre foto; 12, 12, 12, 12; 6, 6, 6, 6 e 6, 6, 6, 6.
A tal proposito, va ricordato che l'addizione - o il "più" - è ancora strettamente legata alle sue prime rappresentazioni nei giovani allievi. C'è l'addizione di "numeri di ..." quando si raggruppano insiemi di oggetti; c'è l'addizione di "altezze" quando si posiziona una torre sopra l'altra; c'è l'addizione di "masse" sui piatti di una bilancia; c'è anche, per quello che ci interessa direttamente, l'addizione di "lunghezze" nel caso in cui sia necessario aggiungere un bastoncino all'altro per eguagliarne uno più lungo. Nel caso del perimetro, l'addizione non conduce a un segmento quadruplo dei suoi componenti, ma a una figura chiusa composta anch'essa di quattro piccoli segmenti. Abbiamo scoperto questo ostacolo anche nel problema citato in precedenza (Attraverso la quadrettatura) e in altri dove si tratta di determinare la lunghezza di una diagonale di un quadrato della quadrettatura: oltre alla risposta 1/2, sovente si trova la risposta 2, risultato dell'addizione delle lunghezze di due lati di lunghezza unità.

Prendere le misure

Abbiamo già descritto gli errori nel caso di "Misure prese sulla figura dell'enunciato".
A ciò possono aggiungersi le difficoltà di comprensione delle espressioni "a grandezza naturale" o "in scala" quando si passa da un oggetto alla sua rappresentazione mediante una figura geometrica.
Nel caso delle tre foto che coprono una pagina dell'album, l'adulto sa che la figura dell'enunciato non è di solito a grandezza naturale ma che si tratta di una riduzione in scala (o una fotografia delle tre foto). L'allievo non ne è consapevole.
A questo si somma l'ostacolo dell'interpretazione delle "misure" lette sul righello graduato. L'adulto sa che questi non sono numeri ma intervalli sulla retta dei numeri reali e che, poiché l'addizione d'intervalli non può essere definita, devono essere sostituiti da approssimazioni. L'allievo non lo sa ancora. Per lui, se ha letto 3,7 (in cm) su un lato del quadrato piccolo e 3,8 su un altro lato dello stesso quadrato, non si discute più. Il quadrato ha dei lati di 3,7 e 3,8 cm. Ha più fiducia nelle misure prese con lo strumento utilizzato piuttosto che nelle sue conoscenze sul quadrato.

3.3. Ritorno sull'analisi del compito

Osservare gli elaborati e leggerli ha mostrato che gli allievi sono lontani dal padroneggiare il concetto di perimetro e, quindi, dal poter trovare la misura del contorno della pagina dell'album. Non dovremmo considerarlo inevitabile, ma "percorrere un po'di strada" nella comprensione del loro compito.
Il primo paragrafo dell'analisi a priori (a) parla dell'osservazione dei tre quadrati.
A questo proposito, dobbiamo ricordare quanto ci ha detto R. Duval[5] nella sua conferenza. Noi adulti non "vediamo" più i tre quadrati sulla pagina dell'album come li "vedevamo" quando eravamo bambini e come "li vedono" i nostri allievi. Non dobbiamo più fare il lavoro di riconoscimento dei quadrati e del rettangolo, la loro scomposizione in segmenti; la distinzione tra "unità figurali a due dimensioni" caratterizzate da un'area e "unità figurali a una dimensione" caratterizzate da una lunghezza è diventata per noi un processo automatico. Non ci preoccupiamo più di cercare le relazioni matematiche tra, da un lato, misure di lunghezze e loro addizioni per il perimetro, che si esprime sempre con una misura di lunghezza, e, dall'altro, tra misure di lunghezza e una "moltiplicazione" per le aree che non si esprimono più con misure di lunghezze, ma con misure di aree, di natura completamente diversa.
Con una metafora si potrebbe dire che chi sa nuotare non ricorda più le diverse fasi delle sue lezioni di nuoto, o chi sa andare in bicicletta non ricorda più i movimenti disordinati di quando cercava di imparare.
Il secondo paragrafo (b) si propone di ricordare le relazioni matematiche tra lati e perimetro del quadrato. Ma anche qui è necessario sapere che, se il bambino a cui si chiede di trovare il perimetro dal lato dato dice: è necessario fare una "volta" o "4 volte" nulla garantisce che abbia solo usato pedissequamente una formula, cosa che non garantisce una buona comprensione della nozione di perimetro. A livello di numeri (senza dimensione) la relazione è ovviamente $p = 4 \times c$, ma può anche essere $p = c + c + c + c$.
I paragrafi seguenti (da c a f) si situano su un altro livello, quello dei diversi modi di organizzare la sequenza delle operazioni aritmetiche. Non sarà necessario cambiarli.

L'ultimo paragrafo (g) "fare un disegno a grandezza naturale" meriterebbe un lungo commento, oltre a quanto descritto in precedenza riguardo agli elaborati che mostrano misure prese sulla figura dell'enunciato. Molti allievi non si rendono conto che l'immagine stampata sull'enunciato non è "a grandezza naturale" e neppure noi sappiamo

5 Si veda R. Duval (già citato) in bibliografia.

che cosa significhi per loro: l'oggetto album o la pagina dell'album, un disegno o una foto dell'oggetto, una figura geometrica come viene intesa dagli adulti?
Ci rendiamo quindi conto che, per molti nostri allievi, non è sufficiente "osservare le figure" (si veda a) o "ricordarsi che il perimetro è …" (si veda b). È molto più complesso, forse addirittura impossibile da descrivere, ma è bene saperlo.
Quindi redigere un'analisi del compito è difficile, e redigerla a priori lo è ancora molto di più e, paradossalmente, possiamo farlo solo a posteriori con qualche garanzia di adeguatezza!

4. Che cosa fare di tutto questo?

Abbiamo visto precedentemente come le nostre riflessioni documentate sulla nozione di perimetro ci abbia permesso di elaborare, alla luce di altri, il problema "*Tre foto su una pagina*", la sua presentazione, i suoi risultati e la sua analisi a posteriori e anche di mettere in evidenza delle rappresentazioni degli alunni, che si potrebbero giudicare inadeguate o insufficienti.
Ma il giudizio dal punto di vista della "buona risposta" non è quello che ci interessa.
L'importante è sapere che queste rappresentazioni esistono, comprenderle e determinarne la natura e il loro status di "conoscenze in costruzione".
Le regole del gioco del RMT impongono un'attribuzione di punteggi, ma non è questo che ci permetterà di avanzare verso i nostri obiettivi che vale la pena ricordare qui:
a) promuovere la risoluzione dei problemi per migliorare l'apprendimento e l'insegnamento della matematica attraverso il confronto fra classi,
b) contribuire alla formazione dei docenti e alla ricerca in didattica della matematica, attraverso le sue analisi e i suoi dati raccolti nell'ambito della risoluzione dei problemi.

4.1. Il perimetro nei curricula/programmi, nei libri di testo e nelle pratiche scolastiche

Il calcolo del perimetro di un rettangolo appartiene alla tradizione scolastica della scuola primaria nei paesi in cui si svolge il RMT. Se ne parla in tutti i nostri programmi. Per esempio:
- In Italia, le vigenti *Indicazioni nazionali per il curricolo...* dopo un'introduzione che raccomanda l'uso del laboratorio *in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati* e l'uso di problemi *che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola,* indica fra gli obiettivi da raggiungere al termine delle classi terza e quinta, a livelli diversi, *la costruzione di modelli materiali di figure geometriche, nello spazio e nel piano, come supporto a una prima capacità di visualizzazione. Il perimetro compare fra gli obiettivi della classe quinta: Determinare il perimetro di una figura utilizzando le più comuni formule o altri procedimenti...*

  - In Francia, secondo il Bulletin officiel de l'éducation nationale[6], al capitolo "Matematica" nell'introduzione: b... il ciclo 3 (cat 4, 5, 6) *prevede la prosecuzione dello sviluppo delle sei principali competenze matematiche: ricercare, modellizzare, rappresentare, calcolare, ragionare e comunicare. La risoluzione dei problemi costituisce il criterio principale per la padronanza delle conoscenze in tutti gli ambiti matematici, ma è anche il mezzo per assicurarne un'appropriazione che ne garantisca il significato.*

  ... Fra gli obiettivi previsti alla fine del ciclo circa "Lunghezza e perimetro": ...

  Calcolare il perimetro di un quadrato e un rettangolo, la lunghezza di una circonferenza, utilizzando una formula:

  - formula del perimetro di un quadrato, di un rettangolo

  - In Svizzera, nel Plan d'études romand (PER)[7] nel capitolo MSN 21 – Formulare e risolvere problemi per strutturare il piano e lo spazio...

  Riconoscimento, descrizione e denominazione di figure piane (triangolo, quadrato, rettangolo, rombo, cerchio) in base alle loro proprietà (simmetria-e interna-e, parallelismo, isometria, ...)

  ...

  Disegno di quadrati e rettangoli mediante l'uso del righello graduato.

Tuttavia, dopo la lettura di questi programmi, non si può ritenere che le competenze relative al perimetro del rettangolo siano considerate prioritarie. Possiamo anche rallegrarci, in quanto animatori del RMT, del fatto che la

6 Extrait BOF 25 (France) cycle 3 21.06.2018)
7 PER (Plan d'études romand) Neuchâtel, 2010-2016 © CIIP, Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin https://www.plandetudes.ch

risoluzione dei problemi sia menzionata, a volte in termini lirici e con enfasi, sapendo benissimo che è più facile scrivere queste raccomandazioni che applicarle!
Nei libri di testo, che influenzano più direttamente le pratiche di classe, gli esercizi sul calcolo dei perimetri di quadrati e rettangoli sono frequenti e, il più delle volte ripetitivi, come se l'importante fosse conoscere la formula e applicarla. È semplice da esprimere, è facile da ricordare, quindi da controllare, ma torniamo ai risultati del nostro problema "Tre foto su una pagina": perché la maggior parte dei nostri allievi, anche in categoria 5, mostra di non averne la padronanza?
Un'altra domanda sorge in relazione ai libri di testo o alle pratiche scolastiche: se un editore di libri di testo proponesse un approccio ai concetti citati dai programmi, compreso quello di perimetro, traendo ispirazione da analisi del compito come quella sopra descritta (3.3), il suo volume apparirebbe nella categoria dei "best seller"?

4.2. Per gli allievi

Sembra che agli allievi sia piaciuto il problema *Tre foto su una pagina*, alla luce dei loro elaborati nei quali si può percepire il loro impegno (nessun foglio bianco, nessun elaborato buttato giù a caso, spiegazioni in generale dettagliate…). Sono stati in grado di appropriarsi della situazione, anche se molti non sono andati nella giusta direzione.
Possiamo immaginare una suddivisione in tre categorie:
- coloro che "già sapevano" destreggiarsi con i perimetri e che hanno applicato procedure già più o meno padroneggiate (per loro il problema, non costituiva una "nuova situazione" nel senso stretto del termine; era piuttosto un'attività applicativa); ma lo è anche per tutte le competizioni che si rivolgono a un'ampia gamma di livelli dei partecipanti;
- coloro che hanno progredito nella padronanza dei concetti necessari, hanno percepito la scomposizione del perimetro delle foto e della pagina in segmenti, hanno scoperto o riscoperto le lunghezze da aggiungere;
- coloro che non hanno distinto le figure "quadrato" e "rettangolo" come superfici (a due dimensioni) di figure composte dai segmenti che costituiscono il loro contorno o "bordo".

Per le prime due categorie c'è la soddisfazione di essere arrivati ad una risposta che possono ritenere corretta.
Per la terza c'è soddisfazione ugualmente (gli elaborati lo attestano), anche se la risposta dovrà essere modificata successivamente. Hanno "fatto" matematica? Ciascuno giudicherà. Diciamo "sì" nella misura in cui hanno seguito un ragionamento, effettuato delle operazioni, anche se erano inappropriate. Come tutti coloro che hanno costruito l'edificio della matematica, gli allievi hanno cercato, provato e progrediranno al loro ritmo verso la comprensione della nozione in gioco a condizione che venga loro offerta l'occasione di mettere in dubbio le loro idee iniziali.
Va ricordato a tal proposito che durante le prove della gara, tutti gli allievi della stessa classe non risolvono tutti i problemi. Si suddividono il lavoro e ciascun problema è preso in esame da uno o due gruppi, quindi il problema "Tre foto su una pagina" non potrà essere considerato come effettivamente affrontato da tutti gli alunni se non quando verrà ripreso in comune dopo la prova o presentato in un percorso didattico per la classe.

4.3. Indicazioni didattiche

Come spesso accade nell'ambito del RMT, l'esame degli elaborati dà luogo a una moltitudine di idee da utilizzare in un percorso didattico per la classe poiché ogni categoria di errore osservata fa nascere automaticamente piste per un recupero.
In merito al nostro problema, i dati raccolti ci assicurano che le procedure corrette e gli ostacoli incontrati su 2 500 gruppi di alunni si ritroveranno probabilmente a livello di ogni classe nella quale gli alunni risolveranno il problema in gruppi senza alcun aiuto o intervento da parte dell'insegnante (nelle stesse condizioni delle prove del RMT).
Le varie procedure e risposte saranno poi oggetto di una messa in comune e di un dibattito in cui l'insegnante avrà il delicato compito di guidare gli scambi e far precisare le rappresentazioni di ciascuno.
Ma, vista la ricchezza delle osservazioni riscontrate, sembra opportuno non accontentarsi di un dibattito sulle procedure risolutive ma proseguire il lavoro con un "percorso didattico" partendo dal problema.
Di seguito sono riportate alcuni suggerimenti di attività per incoraggiare una progressione nella costruzione del concetto di perimetro, proposte durante l'analisi a posteriori, da membri del Gruppo Geometria piana.
La manipolazione
Si riprende l'enunciato e si sostituisce semplicemente "48 cm" con "24 fiammiferi" (o stuzzicadenti per eliminare il pericolo di incendio e sostituirlo con quello di ferita; la riduzione da 48 a 24 o ad altro multiplo di 8 si propone per ragioni di economia e per modifica della variabile didattica). La domanda rimane la stessa, ma resta inteso che ognuno o ogni piccolo gruppo deve costruire la figura con i propri fiammiferi, e anche incollare all'interno le immagini dello sciatore, del gatto e del cane.
Naturalmente, l'attività richiederà tempo e alcuni obietteranno che gli allievi, con lo stesso dispendio di tempo, potrebbero eseguire molti esercizi dal loro libro di testo per allenarsi con l'algoritmo del calcolo del perimetro. Ma

il fatto di manipolare i fiammiferi "unità figurali a una dimensione"[8] e di ritagliare e posizionare le foto "unità figurali a due dimensioni" per riempire i quadrati renderà possibile distinguere esplicitamente questi due tipi di figure.

2. Il disegno e il ritaglio

Si possono anche immaginare attività di disegno in grandezza reale o del ritaglio di quadrati. Ad esempio, gli allievi devono disegnare i tre quadrati a grandezza naturale, ritagliarli e spostarli, affiancandoli (in modo che i lati dei quadratini coincidano completamente con un lato di un altro quadrato piccolo o con una parte di un lato del quadrato grande) per formare figure diverse. Possono allora scoprire che la disposizione che ha il contorno più corto è quella del rettangolo (60 cm) e che tutte le altre, che rispettano le coincidenze date, possono essere di forma diversa (poligoni da 8 a 12 lati ma tutti dello stesso perimetro (144 cm).

3. Variazione del numero di quadratini

Con tre quadrati piccoli (invece di due) su uno dei lati del quadrato grande di 48 cm di perimetro, il contorno della pagina dell'album non misurerà più 60 cm. Sarà più grande o più piccolo?
Questa variante aiuta a evitare le ambiguità riscontrate sulla "metà" nel problema d'origine e a controllare se la messa in comune e le discussioni a proposito del perimetro della prima versione abbiamo portato dei frutti.

4. Variazione del perimetro del quadrato grande

Sostituendo "48 centimetri" per esempio con 50, o 47, o 44,5 ... (a seconda delle categorie), compaiono numeri diversi da quelli naturali, al fine di verificare le competenze numeriche degli alunni nell'insieme dei decimali e di lavorare sulle approssimazioni in caso di misura sulla figura.

5. Il passaggio alle aree

Il passaggio alle aree è ovviamente il benvenuto su questo tema, vista l'importanza di superare il conflitto "area-perimetro" o la distinzione tra "unità figurali" a due dimensioni (superficie) e una dimensione (segmenti). Per esempio, gli allievi dovrebbero scoprire che l'area di una figura composta da quadrati è la somma delle aree dei suoi componenti, mentre questa relazione non vale per i perimetri.

6. Per continuare il lavoro

Per continuare il lavoro suggerito in "1. Manipolazione" si può immaginare un sistema di colori per rendere gli allievi consapevoli della distinzione tra le aree di ciascuna figura, 36, 36, 144 e 216 in cm^2 e le lunghezze dei lati 6, 12 e 18, in cm, che consentono di determinare i perimetri di ciascuna figura.
Di un colore, le misure dell'area si possono addizionare $36 + 36 + 144 = 216$, ...
nell'altro colore, l'addizione delle misure di lunghezza permette di definire i perimetri $6 + 6 + 6 + 6 = 24 = 4 \times 6$ ...,
e la combinazione dei due colori consente una moltiplicazione che non è la precedente addizione ripetuta, per esempio l'area dei quadrati piccoli è: $6 \times 6 = 36$ in cm^2; quello della pagina $12 \times 18 = 216$ in cm^2.
Questo è ovviamente solo un piccolo gioco di colori, ma che forse permetterà ad alcuni alunni di intravedere la stranezza di questa "nuova moltiplicazione" dove il "volte" (o segno ×) non ha più il senso "addizione ripetuta".

5. A titolo di sintesi?

Il problema *Tre foto su una pagina* è una creazione del Rally matematico transalpino, che segue altre creazioni e ne annuncia di nuove.
Non ci si chiede se questo sia un "buon" problema migliore o peggiore di altri. Ci si limita a pensare che sia "potenzialmente ricco" per il bambino che lo risolve e soprattutto per l'insegnante che desidera utilizzarlo a livello didattico.
Di per sé questo problema, come tutti gli altri, non ha alcun "potere magico" sull'apprendimento legato al concetto di perimetro o sulla formazione degli insegnanti. Il suo pieno potenziale risiede in ciò che l'insegnante ne farà.
Questo insegnante, però, potrebbe essere combattuto tra:
- il rispetto di un programma che cita il perimetro ma non ne analizza le componenti didattiche;
- certi libri di testo che abbondano di esercizi di addestramento sulla regola "per calcolare il perimetro di un rettangolo bisogna sommare le lunghezze dei suoi quattro lati";
- il suo dovere sociale di "insegnare" questo algoritmo o "mostrare come farlo", anche se sa, per esperienza, che questa conoscenza non sarà trasferibile in situazioni non convenzionali come quelle dei problemi del RMT;
- i suoi limiti di tempo, la gestione della classe e i compiti istituzionali, ...;
- quanto gli è stato insegnato nel corso della sua formazione;
- il desiderio di lanciarsi con la propria classe nella risoluzione di problemi ma, allo stesso tempo, i suoi dubbi circa la possibilità di considerare attentamente i diversi livelli dei suoi allievi nel quadro dell'individualizzazione degli insegnamenti.

8 Articolo cit. di Duval.

Sta a lui collocarsi in questo intreccio di forze di attrazione, sfortunatamente non convergenti.

"Informare ampiamente", è sufficiente per perseguire le finalità del RMT ricordate precedentemente al fine di migliorare l'apprendimento e l'insegnamento della matematica? L'analisi di ciò che ci dicono gli allievi su *Tre foto su una pagina* rivela il rischio di passare accanto a certe lacune senza porvi attenzione. Nel nostro caso, per esempio, metà degli alunni della categoria 5 non distingue le dimensioni delle "unità figurali" anche se si pensa abbiano padronanza del concetto di perimetro poiché sono in grado di calcolarlo con la formula e risolvere facilmente i problemi del loro libro di testo. Infatti l'adagio cinese si adatta anche al perimetro: *Se dai un pesce a un affamato, lo aiuti per un giorno, ma se gli insegni a pescare, lo aiuti per tutta la vita.*

Bibliografia

Crociani C., Salomone L.: 2001, 'Un problema di tipo geometrico: Attraverso la quadrettatura? / 'Un problème de type géométrique : la traversée du quadrillage', in Grugnetti, Jaquet, Crociani, Doretti, Salomone (Eds.) RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici / évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino, Siena 1999 - Neuchâtel 2000, Università di Siena, IRDP di Neuchâtel, 118-128.

Crociani C:, Doretti L., Grugnetti L., 2012, 'Difficoltà nel confronto di lunghezze'/ Difficultés dans la comparaison de longueurs', *Gazette de Transsalpie* No 2, 71-98.

Duval R., 2020, 'Le premier seuil dans l'apprentissage de la géométrie : « voir » les « figures »' / Il primo passo nell'apprendimento della geometria: "vedere" le "figure" ', *Gazette de Transalpie* No 10, 7-26.

Jaquet F., 2000, 'Le conflit aire-périmètre' / Il conflitto area perimetro' (prima e seconda parte), *L'educazione Matematica,* n. 2 e n. 3.

Sitografia

www.armtint.eu

RIFLESSIONI SULLO SVILUPPO DEL PENSIERO ALGEBRICO NEGLI ALLIEVI A PARTIRE DALL'ANALISI A POSTERIORI DI UN PROBLEMA

Maria Felicia Andriani[1], Lucia Doretti, Lucia Salomone[2]

Introduzione

La lunga esperienza che ci accomuna nel RMT, ci consente di avere ben chiare le potenzialità che offrono i problemi preparati per la gara e la relativa metodologia di lavoro, sia in ambito di formazione degli insegnanti che di ricaduta nella pratica didattica. Si tratta in genere di situazioni non standard di fronte alle quali gli allievi sono chiamati ad attivare le loro conoscenze o a sperimentare percorsi nuovi, dovendo però sempre argomentare le scelte fatte. Del resto *problem solving* ed *argomentazione* sono da considerare tra gli aspetti irrinunciabili nell'insegnamento della matematica: ovviamente la richiesta di argomentare ha senso quando gli allievi sono chiamati a fare delle scelte e ad assumersi delle responsabilità nell'attivazione dei loro processi di pensiero, quindi riguarda processi produttivi (risoluzione di problemi) e non semplicemente processi riproduttivi/esecutivi (risoluzioni di esercizi).

Nelle Indicazioni Nazionali (per ciò che riguarda l'Italia) per il primo ciclo di istruzione (MIUR 2012) è definita in modo esplicito l'idea di matematica e di educazione matematica che occorre promuovere fin dalla scuola primaria: "*Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo".* Viene quindi suggerito un insegnamento della matematica che dia importanza alle attività di problem solving e problem posing, e allo stesso tempo, educhi a cogliere relazioni e proprietà, attività questa che è riconosciuta come basilare per lo *sviluppo del pensiero algebrico.* Questa visione della matematica si ritrova espressa nei seguenti Obiettivi di Apprendimento, appartenenti all'ambito "Relazioni, dati e previsioni", previsti al termine della scuola primaria: "*Rappresentare problemi con tabelle e grafici che ne esprimono la struttura*" e "*Riconoscere e descrivere regolarità in una sequenza di numeri e figure"*. A loro volta, tali obiettivi sono strettamente legati ad altri due della scuola secondaria di primo grado (per il RMT, categorie 6, 7 e 8): "*Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà*" ed "*Esplorare e risolvere problemi utilizzando equazioni di primo grado*".

La messa in pratica di queste indicazioni dovrebbe portare ad un atteggiamento rinnovato verso l'educazione matematica fin dalla scuola primaria, orientato anche allo sviluppo del *pensiero algebrico* negli alunni, modificando le tradizionali pratiche didattiche. Non sempre però questo è riscontrabile…
In Italia lo studio dell'aritmetica e quello dell'algebra vengono ancora affrontati in tempi diversi: nella scuola primaria e nei primi due anni della scuola secondaria di primo grado ci si muove essenzialmente in ambito aritmetico, poi a partire dal terzo anno di scuola secondaria di primo grado si "inizia" lo studio dell'algebra che continua per tutta la secondaria di secondo grado. Ciò genera negli allievi, ma spesso anche negli insegnanti, la convinzione che aritmetica e algebra siano due ambiti della matematica completamente diversi.
Molte ricerche fanno risalire la maggior parte delle difficoltà riscontrate in ambito algebrico dagli studenti di scuola secondaria proprio a questa separazione tra aritmetica e algebra, ed in particolare *alla scarsa attenzione riservata agli aspetti strutturali e relazionali dell'aritmetica* che costituiscono invece le basi dell'algebra elementare (senza la consapevolezza delle procedure in aritmetica e del modo in cui esse nascono, gli studenti saranno privati di una base concettuale sulla quale costruire le loro conoscenze algebriche).

In risposta a questa situazione, a partire dalla metà degli anni Ottanta è stato portato avanti a livello internazionale il filone di ricerche noto come *Early Algebra* in cui è avanzata l'ipotesi che si possano prevenire gli ostacoli che gli studenti incontrano nello studio dell'algebra, promuovendo, sin dalla scuola primaria, uno sviluppo simultaneo di pensiero aritmetico e pensiero algebrico. Si tratta cioè di guardare all'aritmetica con prospettiva algebrica, cercando di guidare i bambini ad osservare relazioni tra numeri alla ricerca di una generalizzazione, nelle più diverse situazioni: nella risoluzione di problemi, in attività che coinvolgono ripetizioni di una determinata sequenza all'interno di un insieme di dati, nel percepire regolarità nello spazio o nel tempo; nello studio del mondo reale e o dei fenomeni fisici, dove grandezze diverse sono collegate tra loro. All'interno della cornice teorica dell'*Early Algebra* da citare, in particolare, *Il Progetto ArAl* (www.progettoaral.it), dedicato al rinnovamento dell'insegnamento dell'area aritmetico-algebrica nella scuola dell'obbligo (Malara, Navarra, 2003), (Navarra, 2008).

---

[1] Coordinatrice Internazionale ARMT e Presidente ARMT Italia.

[2] Coordinatrici Sezione Siena ARMT e Gruppo Algebra.

Il contenuto del presente articolo prende spunto dal Laboratorio di Algebra, al quale hanno partecipato 38 docenti, di cui 5 di scuola primaria, 25 di secondaria di primo grado e 8 di secondaria di secondo grado, organizzato dalle autrici in occasione del Primo corso di formazione dell'ARMT Siena "*Un ponte tra teoria e pratica: quale matematica oggi in classe?",* Siena 22 - 24 novembre 2019[3].
Nell'attività che abbiamo condotto con gli insegnanti si è scelto di lavorare su Gara di pesca[4], un problema della seconda prova del 24° RMT, di ambito algebrico che, per le categorie a cui si rivolge (dalla 5 alla 8, ma potrebbe essere utilizzato anche in categorie superiori, ad es. negli Istituti Professionali), e per il compito matematico che lo caratterizza ("Trovare tre numeri interi, sapendo che il secondo numero supera di 7 unità il primo e che il terzo è sia il doppio del secondo che il triplo del primo") può essere considerato un esempio di problema su cui far lavorare gli allievi nella prospettiva di un passaggio dall'aritmetica all'algebra[5]. Possiamo in effetti dire che si tratta di un problema che richiede la percezione di relazioni tra quantità incognite che dovrebbero essere capite e gestite correttamente (aspetto che permette di far lavorare gli allievi nella prospettiva dell'aritmetica all'algebra).

Il primo paragrafo contiene "il punto di vista" degli insegnanti partecipanti al Laboratorio che hanno effettuato un'*analisi a priori* del problema sulla base di alcune domande che avevamo preparato; il secondo paragrafo, più corposo, è dedicato al "punto di vista" degli allievi che hanno affrontato il problema durante la gara, ottenuto analizzando circa 600 elaborati della sezione di Siena, insieme a nostre riflessioni sul livello di sviluppo del pensiero algebrico mostrato nelle diverse tipologie di elaborati e considerazioni di carattere didattico sull'utilizzo in classe del problema; il terzo paragrafo è dedicato alle conclusioni.
In Appendice, per sottolineare l'importanza che deve avere la fase di appropriazione del problema ("capire" prima di "risolvere") riportiamo il "diario" della prima lezione tenuta da M. F. Andriani in un corso di recupero per allievi di categoria 10 di un Istituto Professionale. In quell'occasione era stata proposta una scheda per la comprensione e l'analisi del testo del problema "Gara di pesca", con l'invito a discuterne insieme. L'attività che ne era seguita, in cui l'insegnante fungeva da semplice moderatore e osservatore, aveva visto il coinvolgimento e la partecipazione di tutti. Questa esperienza era stata poi presentata, valorizzandola nei suoi aspetti didattici, durante il Laboratorio con gli insegnanti. Alcuni docenti hanno poi riproposto nelle proprie classi un'attività simile, ottenendo una risposta molto positiva da parte degli allievi, anche di coloro che di solito mostravano difficoltà e distacco nei confronti della matematica.

1. L'analisi a priori del problema effettuata dagli insegnanti

Come primo compito nell'attività laboratoriale, abbiamo richiesto agli insegnanti dei diversi ordini di scuola, divisi in gruppi liberamente costituiti, di effettuare un'analisi a priori del problema del quale era stato fornito solo il testo, seguendo come traccia le sei domande riportate nella scheda seguente.

Lo scopo dell'attività non era solo di presentare e far risolvere il problema agli insegnanti, ma soprattutto quello di invitarli a riflettere su come avrebbero potuto lavorare gli allievi delle classi nelle quali ritenevano possibile proporre il problema, cercando di immedesimarsi in loro. Riteniamo che questa sia comunque una buona pratica che il docente dovrebbe seguire nella scelta di un problema (o altro tipo di attività) da proporre in classe, in particolare per avviare un percorso di costruzione di un nuovo sapere o per testare il livello raggiunto dagli allievi in un determinato ambito.

[3] La sezione di Siena dell'ARMT è attiva (anche con corsi di formazioni per insegnanti) sin dai primi anni della costituzione dell'ARMT. Il Primo corso di formazione dell'ARMT Siena è in riferimento al nuovo Statuto, che contempla anche la costituzione dell'ARMT Italia, nata nel 2019.

[4] Il problema, era stato analizzato anche nel sottogruppo del Gruppo Algebra coordinato da Daniela Medici e M. Gabriella Rinaldi, al Convegno di Le Locle del 2016 e le riflessioni emerse erano state sintetizzate nel relativo verbale, presente nel Rapporto di Attività 2016-1017.

[5] Nella Banca Problemi del RMT, "Gara di pesca" rientra nella sotto-famiglia MEQ/EQ1(*Impostare e risolvere un'equazione di primo grado*), nella quale sono classificati tutti quei problemi che, tradotti algebricamente, danno luogo ad un'equazione di primo grado in un'incognita. Gli allievi, soprattutto delle prime categorie, non essendo ancora padroni di questo strumento, per risolvere il problema dovranno per lo più ricorrere ad altri tipi di strumenti.

Scheda per Analisi a priori

GARA DI PESCA

Aldo, Carlo e Biagio partecipano ad una gara di pesca. Al termine della gara scoprono che:

- Biagio ha pescato 7 trote in più di Aldo;
- Carlo ha pescato il doppio delle trote pescate da Biagio che è anche il triplo di quelle pescate da Aldo.

Quante trote ha pescato ciascuno dei tre amici? Spiegate il vostro ragionamento.

1) Come risolvereste voi questo problema?
2) Quali concetti matematici sono coinvolti?
3) Agli allievi di quali classi lo proporreste?
4) Come pensate che possano risolverlo gli allievi di queste classi?
5) Quali difficoltà ed ostacoli gli allievi possono incontrare nell'appropriazione del problema o nella sua risoluzione?
6) Quali errori ne potrebbero derivare?

Di seguito riportiamo la sintesi delle risposte date dai sette gruppi di insegnanti.

1) ***Come risolvereste voi questo problema?***

Tutti i gruppi hanno risolto il problema o con un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite (che nasce direttamente dalla traduzione nel linguaggio matematico delle condizioni espresse nel testo) o con una sola equazione, scegliendo come incognita il numero di trote pescate da Aldo.

2) ***Quali concetti matematici sono coinvolti?***

C'è stata concordanza sul fatto che i concetti coinvolti nel problema siano: operazioni e proprietà in N (in particolare è citata la proprietà distributiva), relazioni numeriche tra quantità, l'uguaglianza come relazione di equivalenza, equazioni, sistemi e principi di equivalenza. Tre gruppi hanno citato la traduzione dal linguaggio naturale al simbolico ed un gruppo ha indicato la rappresentazione grafica.

3) ***Agli allievi di quali classi lo proporreste?***

C'è stata più variabilità per quanto riguarda l'individuazione delle categorie a cui proporre il problema: un gruppo ha indicato da cat. 5 a cat. 8, due gruppi da cat. 6 a cat. 8, un gruppo a cat. 7 (fine anno) e cat. 8, "*a seconda che si sia lavorato o no con le bilance*", un gruppo da cat. 6 a cat. 10, un gruppo da cat. 8 a cat.10 (e "*con un po' di forzatura*" anche in cat. 6 e 7), ed infine un gruppo a categorie 9 e 10.

4) ***Come pensate che possano risolverlo gli allievi di queste classi?***

Dall'esame delle risposte fornite dai gruppi, si rilevano tre tipi di strategie: *per tentativi* (in un caso, con l'indicazione di lavorare sul numero di trote di Carlo, considerando che deve essere un multiplo di 6); *mediante rappresentazione grafica* (con segmenti o altri simboli) oppure tramite "bilancia"; in *modo algebrico*, con equazione o sistema. In riferimento alle categorie di appartenenza degli allievi, la previsione degli insegnanti è stata la seguente: in cat. 5 con rappresentazione tramite "bilancia"[6] (il solo metodo citato dal gruppo che ha indicato questa categoria per il problema); nelle cat. 6 e 7 sono previsti i primi due metodi, con leggera prevalenza della rappresentazione grafica rispetto al metodo per tentativi; in cat. 8 sono citate, con la stessa frequenza, tutte le strategie. Infine per cat. 9 e 10 è indicata la sola via algebrica, con la specificazione del ricorso ad un'equazione in cat. 9 e ad un sistema in cat. 10.

5) ***Quali difficoltà/ostacoli gli allievi possono incontrare nella risoluzione?***

Sono state segnalate le seguenti difficoltà: interpretazione del testo, in particolare riguardo alla seconda frase, che esprime contemporaneamente due condizioni relazionali; individuazione della strategia da utilizzare; spiegazione del ragionamento (in un caso). Il gruppo che aveva indicato come unica strategia risolutiva il ricorso alla "rappresentazione con la bilancia" ha segnalato come ostacolo la non conoscenza del metodo. In cinque su sette schede le ulteriori difficoltà indicate riguardano solo la strategia algebrica e specificamente: scelta dell'incognita e impostazione dell'equazione (in particolare se l'incognita non è il numero di trote di Aldo), risoluzione di equazione (o sistema) con i principi di equivalenza.

---

[6] Il *metodo della bilancia* è uno strumento didattico spesso utilizzato e proposto anche in vari libri di testo. L'idea fondamentale è di assimilare l'uguaglianza dei due membri di un'equazione alla condizione di equilibrio di una bilancia a due piatti. I termini dell'equazione sono i "pesi" sui due piatti della bilancia che, in una bilancia in equilibrio, sono uguali. Questa immagine risulta molto utile dal punto di vista didattico sia ai fini della costruzione del concetto di equazione che per la scoperta e la comprensione dei principi di equivalenza.

6) Quali errori ne potrebbero derivare?

Gli errori previsti dagli insegnanti sono stati quelli dovuti soprattutto alla difficoltà di interpretazione delle condizioni indicate nel testo. In particolare: la frase "Biagio ha pescato 7 trote in più di Aldo" potrebbe essere tradotta simbolicamente come B = A – 7; inoltre nella frase "Carlo ha pescato il doppio delle trote pescate da Biagio che è anche il triplo di quelle pescate da Aldo" l'espressione "che è anche il triplo…" potrebbe essere riferita a Biagio (e non a Carlo) e dare luogo alla scrittura B = 3A che, unita a B = A + 7, porterebbe all'equazione 3A = A + 7 con soluzione A = 7/2, che oltretutto dovrebbe essere scartata (trattandosi di numero di trote pescate). Sono stati anche indicati come possibili errori il confondere "doppio" con quadrato e "triplo" con cubo e ipotizzati errori nell'impostazione dell'equazione (o sistema) e nella gestione del calcolo algebrico.

Una prima osservazione sulle risposte degli insegnanti è relativa alla scelta delle categorie alle quali proporre il problema: è risultata perfettamente in linea con la visione tradizionale dell'insegnamento secondo la quale lo studio dell'algebra si fa iniziare dall'ultimo anno di scuola secondaria di primo grado (tre gruppi su sette hanno infatti ritenuto che il problema fosse da proporre a partire da cat. 8). Inoltre il fatto che solo un gruppo su sette abbia segnalato la cat. 5, fa pensare che la maggior parte degli insegnanti partecipanti al Laboratorio fosse convinta che, trattandosi di un problema di tipo algebrico, non potesse essere proposto nella scuola primaria.
Altra osservazione: le difficoltà segnalate sembrano riguardare in particolare la strategia algebrica già istituzionalizzata, in cui la scelta dell'incognita deve essere la più conveniente in modo da rendere più agevole l'impostazione dell'equazione, la quale non si risolve se non si conoscono i principi di equivalenza. Non sono invece previste difficoltà nell'applicazione di altri tipi di strategie.

2. L'analisi a posteriori: tipologie diverse di elaborati e differenti livelli raggiunti nell'elaborazione del discorso algebrico

In questo paragrafo si riportano riflessioni e commenti sul lavoro degli allievi, ricavati dall'*analisi a posteriori* di 600 elaborati della sezione di Siena. Tale analisi, che è stata oggetto di discussione anche con gli insegnanti del Laboratorio, ci ha permesso di individuare gli ostacoli che gli allievi hanno effettivamente incontrato, se e come hanno cercato di superarli, le conoscenze che hanno mobilizzato.
Dall'esame delle diverse procedure, dal modo di rappresentarle e di spiegare i ragionamenti, in alcuni casi abbiamo avanzato ipotesi sul livello raggiunto dagli allievi riguardo all'elaborazione del discorso algebrico. A tale scopo abbiamo fatto riferimento a quanto riportato in (Arzarello, 2020), dove l'autore, riprendendo la posizione di A. Sfard, definisce l'*algebra elementare* come "una sottocategoria del discorso matematico che gli individui sviluppano riflettendo su relazioni e processi aritmetici" (più semplicemente, si può considerare "un meta-discorso sull'aritmetica"). Nello stesso articolo è presentato un modello gerarchico per i discorsi algebrici basato sull'aumento di complessità e del potere generalizzante dei suoi elementi[7].
In particolare, nell'analisi degli elaborati, abbiamo rivolto la nostra attenzione al *grado di reificazione* delle proposizioni usate dagli allievi, cioè al progressivo spostamento di attenzione dal processo al suo risultato, dal parlare di fare calcoli alle proprietà degli oggetti e quindi alla possibilità di collocarle al livello 1 (procedurale), o al livello 2 (procedurale con elementi di oggettificazione), o al livello 3 (oggettificazione completa) del discorso algebrico.

2.1. Procedure per tentativi: un trampolino per la nascita del pensiero funzionale

La strategia più frequentemente applicata in tutte le categorie è quella per tentativi (51% in cat. 5, 30% in cat. 6, 43% in cat. 7, 28% in cat. 8).
La Fig. 1 ne mostra un esempio presente in un elaborato di cat. 6, in cui compare una tabella con tre colonne che riportano i tentativi fatti ed i relativi calcoli e dalla quale risulta evidente una completa appropriazione di tutte le relazioni indicate nel testo del problema. Nella prima colonna si leggono ogni volta due informazioni: il numero di trote ipotizzate per Aldo e il suo triplo (che è uno dei modi per esprimere il numero di trote di Carlo); nella colonna 2 si legge il numero di trote di Biagio, mentre nella colonna 3 figura il doppio di quest'ultimo numero (che è anche l'altro modo di esprimere la quantità di trote di Carlo).

---

[7] In sintesi, tale modello prevede una prima distinzione tra *algebra informale* (espressa nel linguaggio naturale, variamente articolato) e *algebra formale* (con utilizzo di linguaggio simbolico più o meno intrecciato con quello naturale), ciascuna delle quali si struttura in due livelli discorsivi diversi, a seconda che si abbiano *valori costanti* oppure *valori variabili* (funzionali). A loro volta, sia il *discorso algebrico informale a valori costanti*, che il *discorso algebrico formale a valori costanti* si strutturano entrambi in tre sotto-livelli. Il livello 1 è quello ***procedurale***: l'attenzione è focalizzata sui calcoli numerici e la loro descrizione segue l'ordine di esecuzione ed è espressa tramite azioni (addiziono, moltiplico, divido, …) e l'uguaglianza è qui spesso usata come se fosse il pulsante di una calcolatrice; al livello 2, detto ***granulare***, l'attenzione è ancora sui calcoli numerici, ma la descrizione del processo non è più in corrispondenza perfetta con la sequenza di operazioni eseguite: quando i calcoli sono lunghi si possono sostituire parti di essi con i loro "prodotti" (somma, prodotto, quoziente,…), visti come *oggetti* ("grani") invece che processi; il livello 3 è quello dell'***oggettificazione*** che si ottiene attraverso lo spostamento dell'attenzione dal processo al suo "prodotto" (*reificazione*) e con la cancellazione di colui che esegue (*alienazione*). Solo a questo livello le espressioni algebriche contano come "oggetti" a pieno titolo.

La tabella mostra, passo dopo passo, tutti i tentativi fatti e permette di tenere sotto controllo i risultati trovati. La spiegazione descrive in modo generale, ma sempre a *livello procedurale*, come sono stati utilizzati i risultati ottenuti per arrivare alla soluzione.

Fig. 1

[TABELLA]

L'ho risolto grazie a questa tabella: quando vedevo il risultato di un numero della colonna 1, che "combaciava" con uno della colonna 3, ed era il triplo di esso, ho capito.
RISULTATI:
Aldo 14 / Biagio 21 / Carlo 42

Un aspetto interessante da osservare è che gli allievi, liberi di esprimersi, sono in grado di trovare sistemi originali per rappresentare la procedura per tentativi, che può essere lunga e ripetitiva nelle "azioni" da eseguire. I due elaborati seguenti di cat. 7 (cfr. Fig. 2 e Fig. 3) mettono chiaramente in evidenza questo fatto.
L'elaborato di Fig. 2 è particolarmente interessante per due aspetti: il primo è la scelta del valore incognito da determinare per risolvere il problema, che è il numero di trote pescate da Biagio e non il numero delle trote pescate da Aldo, come sembrerebbe più naturale per il risolutore "esperto"; il secondo è l'uso di un particolare schema, che potremmo chiamare *"a croce"*, utilizzato per riportare, di volta in volta, i risultati numerici ricavati dalle relazioni indicate nel testo, fino ad ottenere la soluzione quando compare lo stesso valore nella parte inferiore dello schema. In questo caso la spiegazione si appoggia sullo schema a croce, mentre nelle frasi utilizzate *compaiono azioni che descrivono la procedura*, anche se per i numeri che occupano la parte superiore si dice che "la loro *differenza* deve essere sempre 7").

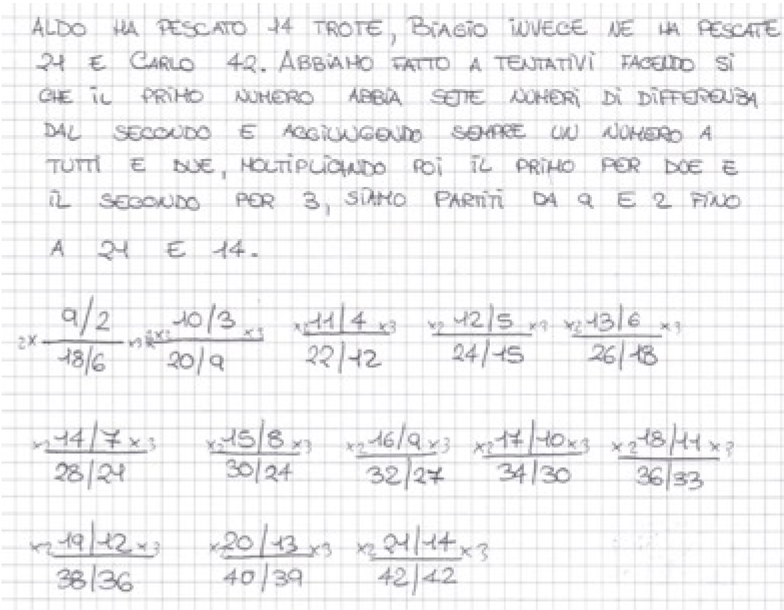


Fig. 2

Aldo ha pescato 14 trote, Biagio invece ne ha pescate 21 e Carlo 42. Abbiamo fatto a tentativi facendo sì che <u>il primo numero abbia 7 numeri di differenza dal secondo</u> e aggiungendo sempre un numero a tutti e due, moltiplicando poi il primo per due ed il secondo per 3, siamo partiti da 9 e 2 fino a 21 e 14.

Nell'elaborato di Fig. 3 è da notare la rappresentazione chiara ed efficace utilizzata per la ricerca del numero di trote pescate da Aldo, costituito da un *diagramma sagittale* di tipo ciclico che, per ogni numero ipotizzato per Aldo, permette di stabilire se è quello corretto o no (i vertici del diagramma sono contrassegnati con i nomi dei personaggi della storia, mentre le frecce indicano gli operatori aritmetici che permettono di spostarsi lungo il diagramma, partendo da Aldo, rispettando le relazioni tra Aldo e Biagio e tra Biagio e Carlo e ritornando ad Aldo con l'applicazione della relazione inversa tra Carlo e Aldo ("Aldo ha un terzo delle trote di Carlo"). Nell'elaborato viene fatta la narrazione di quali numeri sono stati provati, ma la spiegazione della procedura è di fatto illustrata dal diagramma che è auto-esplicativo.

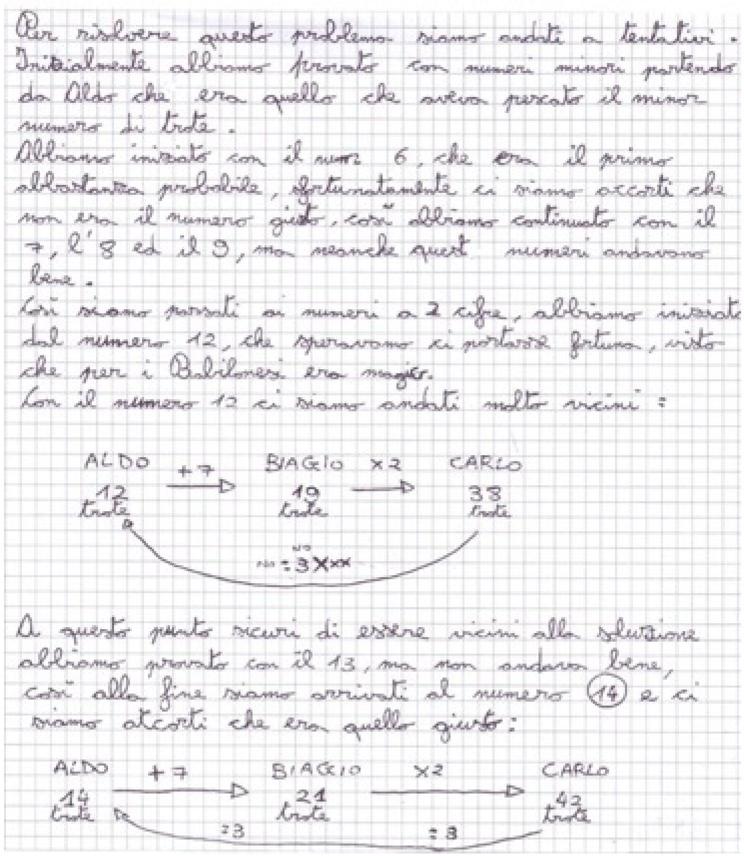


Fig. 3

Per risolvere questo problema siamo andati a tentativi. Inizialmente abbiamo provato con numeri minori partendo da Aldo che era quello che aveva pescato il minor numero di trote. Abbiamo iniziato con il numero 6, che era il primo abbastanza probabile, sfortunatamente ci siamo accorti che non era il numero giusto, così abbiamo continuato con il 7, l'8 ed il 9, ma neanche questi numeri andavano bene. Così siamo passati ai numeri a 2 cifre, abbiamo iniziato dal numero 12, che <u>speravamo ci portasse fortuna, visto che per i Babilonesi era magico</u>. Con il numero 12 ci siamo andati molto vicini:

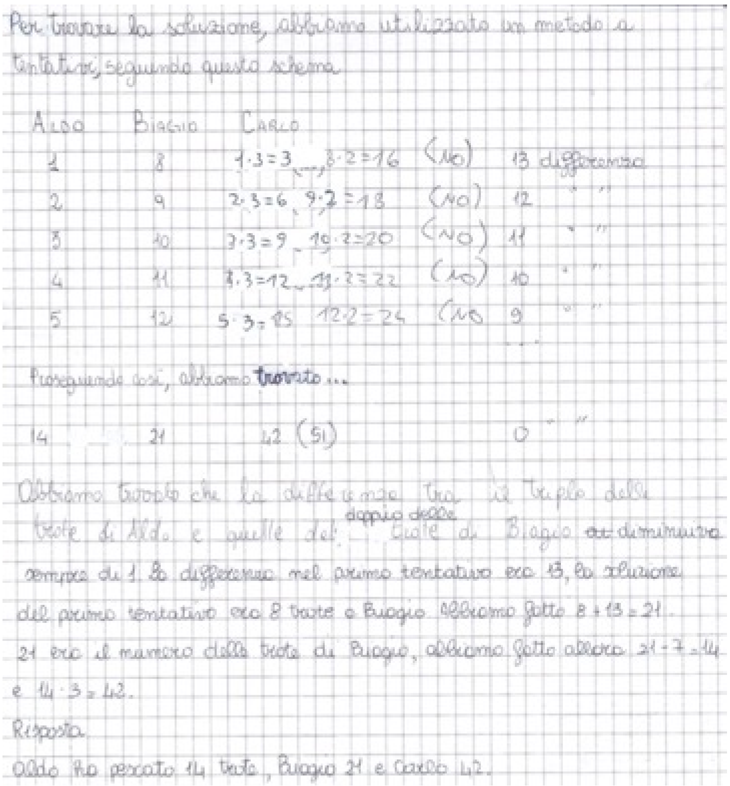
[1° DIAGRAMMA]

A questo punto sicuri di essere vicino alla soluzione abbiamo provato con il 13, ma non andava bene, così alla fine siamo arrivati al numero 14 e ci siamo accorti che era quello giusto:

[2° DIAGRAMMA]

Altri elaborati mostrano che gli allievi si sono appropriati perfettamente del compito matematico, hanno trovato la soluzione corretta ed hanno spiegato in "forma retorica", cioè completamente a parole, il loro procedimento. Per esempio, in un elaborato di cat. 6 si trova scritto così: “*Abbiamo trovato la soluzione andando per tentativi. Il meccanismo che abbiamo capito è stato trovare un numero che aggiungendo 7 dava un numero che moltiplicato per due aveva lo stesso risultato del numero iniziale per tre*”. Dal punto di vista del discorso algebrico, siamo al primo livello, quello *procedurale*, dell’algebra informale (espressa cioè nel linguaggio naturale), in quanto l’attenzione è rivolta ai calcoli numerici e le operazioni sono elencate nell’ordine in cui sono eseguite.

Si osserva che le tabelle costruite procedendo in modo sistematico consentono spesso la *scoperta di regolarità*, utili per ridurre il numero dei tentativi. Riteniamo che la ricerca di regolarità sia sempre didatticamente interessante e formativa e quindi da incoraggiare in ogni ambito. In Fig. 4 è riportato, a titolo di esempio, un elaborato di cat. 7 in cui gli allievi osservano sulla tabella che aumentando di una unità il numero delle trote di Aldo “*la differenza tra il triplo delle trote di Aldo ed il doppio di quelle di Biagio diminuisce sempre di 1*” e sfruttano questo fatto per giungere più velocemente alla soluzione. Da notare che questa frase scritta dagli allievi è un esempio di “*descrizione oggettiva*”, dal momento che si parla di proprietà di numeri, gli oggetti a cui ci si riferisce, e non di azioni su di essi.



Per trovare la soluzione, abbiamo utilizzato un metodo a tentativi, seguendo questo schema

Aldo	Biagio	Carlo		
1	8	1·3=3 8·2=16	(NO)	13 differenza
2	9	2·3=6 9·2=18	(NO)	12 " "
3	10	3·3=9 10·2=20	(NO)	11 " "
4	11	4·3=12 11·2=22	(NO)	10 " "
5	12	5·3=15 12·2=24	(NO)	9 " "

Proseguendo così, abbiamo trovato...

14	21	42 (SI)	0 " "

Abbiamo trovato che la differenza tra il triplo delle trote di Aldo e quelle del doppio delle trote di Biagio diminuisce sempre di 1. La differenza nel primo tentativo era 13, la soluzione del primo tentativo era 8 trote a Biagio. Abbiamo fatto 8+13=21. 21 era il numero delle trote di Biagio, abbiamo fatto allora 21-7=14 e 14·3=42.
Risposta
Aldo ha pescato 14 trote, Biagio 21 e Carlo 42.

Fig. 4

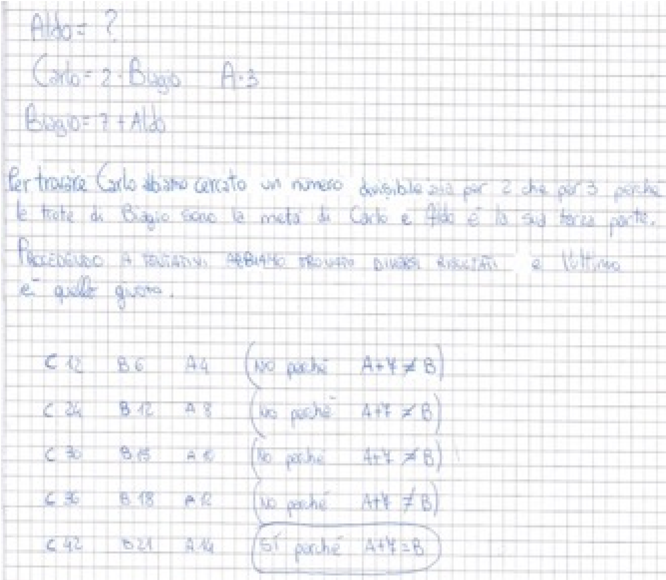
Per trovare la soluzione abbiamo utilizzato un metodo a tentativi, seguendo questo schema:

[TABELLA]

Proseguendo così abbiamo trovato:
14 21 42 (SI)

Abbiamo trovato che la differenza tra il triplo delle trote di Aldo e quelle del doppio delle trote di Biagio diminuisce sempre di 1. La differenza nel primo tentativo era 13, la soluzione del primo tentativo era 8 trote a Biagio. Abbiamo fatto 8 + 13 = 21.
21 era il numero di trote di Biagio, abbiamo fatto allora 21 – 7 = 14 e
14· 3 = 42.
Risposta:
Aldo ha pescato 14 trote, Biagio 21 e Carlo 42.

In altri casi, la riduzione del numero di tentativi è agevolata dall’osservazione che il numero di trote di Carlo, preso come incognita, è un multiplo di 6 “*perché doppio del numero di trote di Biagio e triplo del numero di trote di Aldo”* (si indica quindi una proprietà di tali numeri) come mostrato nell’elaborato di cat. 8 di Fig. 5.
In questo caso il controllo è fatto sulla verifica della relazione tra il numero di trote di Aldo e quello di Biagio, espressa correttamente nel linguaggio simbolico.



Aldo = ?
Carlo = 2 · Biagio   A · 3
Biagio = 7 + Aldo

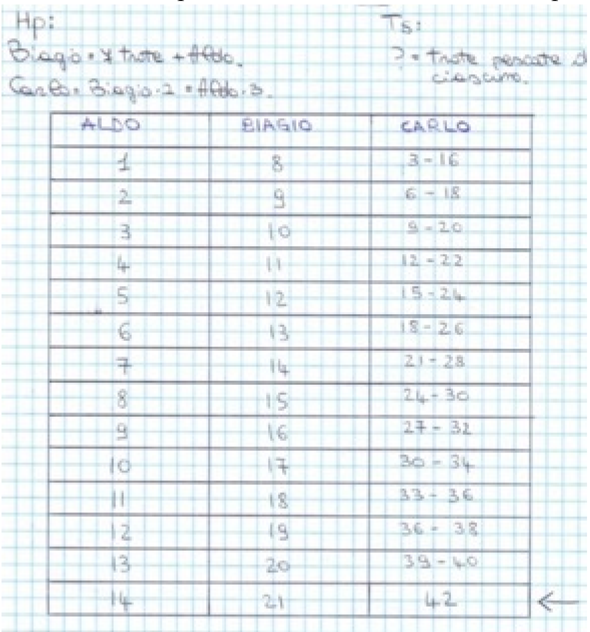
Per trovare Carlo abbiamo cercato un numero divisibile sia per 2 che per 3 perché le trote di Biagio sono la metà di Carlo e Aldo è la sua terza parte.
Procedendo a tentativi abbiamo trovato diversi risultati e l'ultimo è quello giusto.

C 12	B 6	A 4	(No perché A+7≠B)
C 24	B 12	A 8	(No perché A+7≠B)
C 30	B 15	A 10	(No perché A+7≠B)
C 36	B 18	A 12	(No perché A+7≠B)
C 42	B 21	A 14	(Sì perché A+7=B)

Fig. 5
Per trovare Carlo abbiamo cercato un numero divisibile sia per 2 che per 3 perché le trote di Biagio sono la metà di Carlo e Aldo è la sua terza parte. Procedendo a tentativi abbiamo trovato diversi risultati e l'ultimo è quello giusto:

C 12	B 6	A 4	No, A+7≠B
C 24	B 12	A 8	No, A+7≠B
C 30	B 15	A 10	No, A+7≠B
C 36	B 18	A 12	No A+7≠B
C 42	**B 21**	**A 14**	**Sì, A+7=B**

Ci sembra importante sottolineare che, sebbene la procedura per tentativi resti sostanzialmente una *procedura di tipo aritmetico*, anche nella varietà di forme in cui gli allievi spontaneamente la utilizzano, dal punto di vista dell'evoluzione del discorso algebrico essa offre spunti didatticamente interessanti da riprendere e sviluppare in classe: la procedura per tentativi, in particolare se organizzati, può essere infatti l'occasione per avvicinare gli allievi all'*uso delle lettere per esprimere in forma generale quantità e relazioni tra di esse*, all'*idea di funzione*[8] e al *concetto di equazione.*
Prendiamo ad esempio in considerazione l'elaborato riportato in Fig. 6, prodotto da allievi di cat. 7.



Hp:
Biagio = 7 trote + Aldo.
Carlo = Biagio · 2 = Aldo · 3.
Ts:
? = trote pescate da ciascuno.

ALDO	BIAGIO	CARLO
1	8	3 - 16
2	9	6 - 18
3	10	9 - 20
4	11	12 - 22
5	12	15 - 24
6	13	18 - 26
7	14	21 - 28
8	15	24 - 30
9	16	27 - 32
10	17	30 - 34
11	18	33 - 36
12	19	36 - 38
13	20	39 - 40
14	21	42

Fig. 6
<u>Spiegazione degli allievi</u> - *Per risolvere questo problema abbiamo utilizzato una tabella a tentativi. Siamo partiti da Aldo il quale è l'uomo che ha pescato meno trote. Per Aldo abbiamo quindi utilizzato una numerazione naturale da 1 in poi. Per Biagio abbiamo sempre aggiunto 7 trote a quelle di Aldo. Per Carlo, invece, bisognava trovare un numero di trote che fosse il doppio di quelle di Biagio e il triplo di quelle di Aldo. Dovevamo quindi trovare un numero che equivalesse al doppio delle trote di Biagio e il triplo di quelle di Aldo. Così facendo siamo giunti al seguente risultato: Aldo = 14 trote, Biagio = 21 trote, Carlo = 42 trote.*

La tabella riporta nella prima colonna, a partire da 1, tutti i tentativi effettuati in modo sistematico per il numero di trote di Aldo fino alla soluzione (14), nella seconda colonna sono indicati i corrispondenti valori per il numero di trote di Biagio e nella terza colonna si trovano, di volta in volta, due valori per il numero di trote di Carlo che sono, rispettivamente, il triplo delle trote di Aldo e il doppio di quelle di Biagio.
Dal punto di vista didattico, una situazione di questo tipo può essere utilizzata in classe per cominciare a costruire alcune conoscenze che saranno fondamentali per l'approccio ai concetti di *funzione di una variabile*, di *equazione* e al *calcolo letterale*.

---

[8] Come riportato in Arzarello (articolo citato), "*ricerche recenti provano che gli studenti di primaria e secondaria di primo grado possono ragionare con successo algebricamente sulle relazioni funzionali e quindi che le funzioni possono servire come migliore concetto organizzativo per insegnare ed apprendere l'algebra. Sembra anche che le difficoltà manifestate dagli studenti più grandi possano derivare da una mancanza di esperienze con il pensiero funzionale nei gradi elementari*".

Per esempio, una volta trovato il valore “42”, l’insegnante potrà invitare gli allievi ad andare avanti con i valori numerici perché verifichino che non ci sono altri valori accettabili, oltre al 42. Può diventare così abbastanza naturale passare al caso generale di un qualunque numero intero positivo n di trote per Aldo ed alla scoperta della legge generale per Biagio, $n + 7$, e delle due leggi per Carlo, $3 \times n$ e $2 \times (n + 7)$. Risolvere il problema significa allora andare a vedere per quale valore di n queste due espressioni danno lo stesso risultato. In questo modo è naturale uguagliare le due scritture ed ottenere $3 \times n = 2 \times (n + 7)$, cioè l’equazione in n che traduce algebricamente il problema. Questa procedura, mantenendo costantemente il riferimento al contesto del problema, permette agli allievi di tenere sotto controllo ciò che si fa di volta in volta e dargli “senso”.
Situazioni di questo tipo possono, da un lato, portare ad ulteriori sviluppi anche sul piano del *calcolo letterale* (per esempio uso delle parentesi, soppressione del segno di moltiplicazione, pluralità di scritture di una stessa espressione algebrica (per es., $2(n + 7)$, $2n + 14$, $n + n + 14$); dall’altro, mettono gli allievi in condizioni di fare esperienza con *leggi di tipo funzionale* (la variazione del numero di trote di Biagio, così come quella del numero di trote di Carlo, dipendono dalla variazione del numero di trote di Aldo) e con l’idea che esse intervengono nella costruzione di un’*equazione*[9].

2.2. Strategia a partire da una rappresentazione grafica: aiuto o difficoltà aggiuntiva?

Questa strategia si ritrova nel 17% degli elaborati sia in cat. 6 che in cat. 7, mentre scende al 10% negli elaborati di cat. 8. La rappresentazione grafica utilizzata in tutti gli elaborati, salvo pochissimi casi, è quella che fa riferimento al cosiddetto “*metodo grafico con i segmenti*”, nato in ambito geometrico e da questo mutuato ed applicato alla rappresentazione di relazioni tra quantità, anche discrete. Tale metodo viene presentato, in genere, in cat. 6 ed è ampiamente utilizzato in tutto l’arco della scuola secondaria di primo grado. Gli stessi libri di testo per questo livello scolare hanno solitamente un capitolo dedicato ai “Problemi risolubili con metodo grafico”[10], in cui sono mostrati esempi di problemi risolti con tale metodo e se ne propongono poi altri simili (di fatto esercizi) che si chiede agli allievi di risolvere “utilizzando i segmenti”.
Nonostante questo, dall’esame degli elaborati emerge che l’utilizzo del “metodo grafico” è risultato spesso difficoltoso e di scarso aiuto alla risoluzione del problema, se non addirittura di ostacolo. A volte si ha la netta percezione che gli allievi lo utilizzino per necessità di rispondere al *contratto didattico*[11], senza averne compreso funzionamento ed utilità. In Fig.7 e in Fig. 8 ne sono riportati due esempi, entrambi di cat. 6: nel primo, gli allievi disegnano i segmenti per rappresentare quelli che secondo loro sono i risultati (un segmento corrisponde praticamente all’unità), scrivono di “*aver risolto il problema con i segmenti*”, ma è evidente che tale rappresentazione non ha nessun legame con i dati relazionali del problema; nel secondo, la rappresentazione con i segmenti è fatta in modo del tutto errato, ma è comunque stata utilizzata per eseguire i calcoli, i cui risultati sono visibilmente in contraddizione con la rappresentazione stessa.

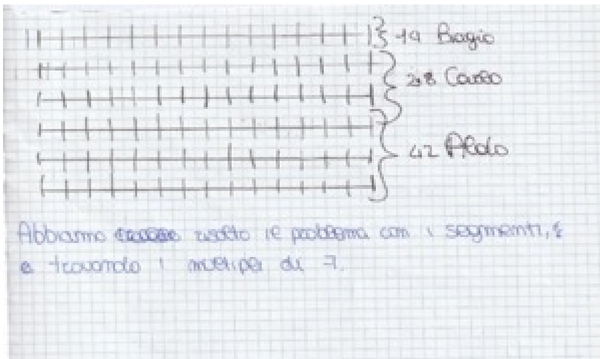


Fig. 7

Abbiamo risolto i problemi con i segmenti, trovando multipli di 7

---

[9] Cfr. *Risoluzione di Problemi per un’attivazione delle Competenze* (a cura di L. Grugnetti e F. Jaquet, Lattes 2014): nel capitolo Algebra, partendo dal terreno dell’allievo e delle sue procedure naturali utilizzate nella risoluzione di alcuni problemi del RMT, sono descritti “*i momenti decisivi nei quali l’allievo dovrà osservare delle regolarità, fare delle scelte più economiche ed avvicinarsi progressivamente alle procedure algebriche*".

[10] Si tratta di problemi risolubili, in modalità esperta, con equazioni o sistemi di equazioni.

[11] *L’ensemble des comportements (Spécifique) du maître qui sont attendus de l’élève et l’ensemble des comportements de l’élève qui sont attendus du maître* [L’insieme dei comportamenti (Specifici) dell’insegnante attesi dall’allievo e l’insieme dei comportamenti dell’allievo attesi dall’insegnante] (Cfr. Brousseau G., 1980 - *Les échecs électifs dans l’enseignement des mathématiques à l’école élémentaire* – Revue de laryngologie, otologie, rhinologie, vol. 101, 3-4, 107-131, p. 127).

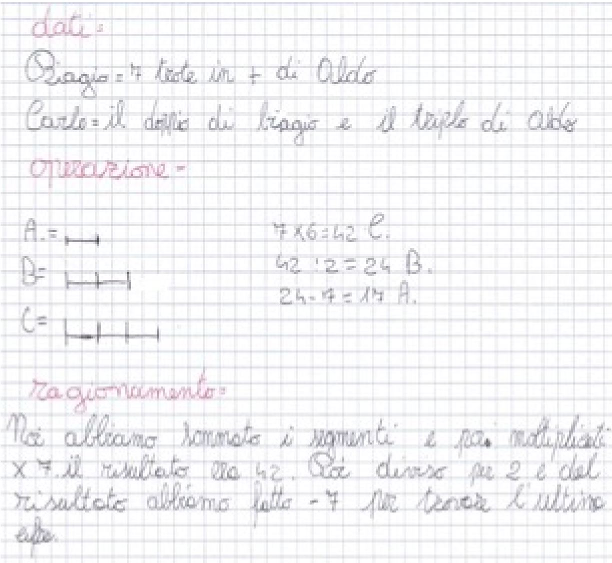


Fig. 8

<u>Dati</u>:
Biagio = 7 trote in + di Aldo
Carlo = il doppio di Biagio e il triplo di Aldo

[RAPPRESENTAZIONE CON SEGMENTI]

<u>Operazioni</u>

7 × 6 = 42 C
42 : 2 = 24 B
24 − 7 = 17 A

<u>Ragionamento</u>: noi abbiamo sommato i segmenti e poi moltiplicati × 7, il risultato era 42. Poi diviso per 2 e dal risultato abbiamo fatto - 7 per trovare l'ultima cifra.

Una domanda che è opportuno porsi è la seguente: *perché quello che si pensa possa essere un metodo utile per rappresentare e risolvere il problema diventa spesso un ostacolo e fonte di errori?* Interessanti riflessioni a questo proposito sono riportate, per esempio, in (Castellini A., 2016). L'autrice rifacendosi alla sua esperienza di docente di scuola secondaria di primo grado, sottolinea la forte astrazione che questo tipo di procedura comporta per gli allievi e le conseguenti difficoltà di comprensione, che possono essere così riassunte: non riuscire ad identificare nel "segmento" una quantità incognita, specialmente se discreta, anzi spesso questa quantità viene confusa con la lunghezza in centimetri del segmento o in lati di quadretto del quaderno. La difficoltà di gestione di questo tipo di rappresentazione aumenta quando si devono esprimere dati relazionali del tipo "Biagio ha pescato 7 trote in più di Aldo", dove al segmento uguale a quello utilizzato per rappresentare il numero incognito di trote di Aldo si deve aggiungere 7 che non è chiaro come debba essere rappresentato (con un altro segmento? quanto "lungo"?). Inoltre spesso alla rappresentazione con i segmenti non viene associata una scrittura che tenga traccia, con abbreviazioni e simboli per numeri ed operazioni, di quanto espresso nel linguaggio naturale, con l'effetto che tutto quello che viene rappresentato appare artificioso e slegato dal testo del problema. Queste difficoltà, come mostrato nell'articolo, possono essere superate a partire da un lavoro, discusso e condiviso in classe con gli allievi, sui testi dei problemi, senza preoccuparsi della loro risoluzione, ma cercando di riconoscere i dati relazionali, provando a descriverli in modo più "sintetico", quindi anche utilizzando simboli proposti dagli allievi stessi, per arrivare a rappresentazioni che rendano più visibili e comprensibili le relazioni, anche quando intervengono quantità discrete, e che soprattutto che abbiano "senso" per gli allievi.

Abbiamo comunque trovato elaborati, come quelli mostrati in Fig. 9 e in Fig. 10 (il primo di cat. 5 ed il secondo di cat. 8), in cui una corretta applicazione della rappresentazione grafica "con segmenti" per esprimere i dati relazionali è stata un effettivo aiuto per la risoluzione del problema.

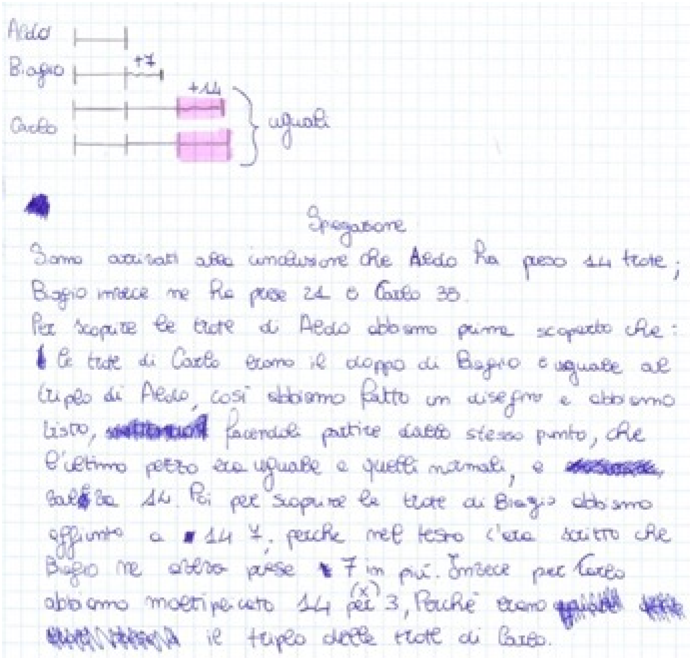


Fig. 9

[RAPPRESENTAZIONE GRAFICA]

<u>Spiegazione</u> – *Siamo arrivati alla conclusione che Aldo ha preso 14 trote, Biagio invece ne ha prese 21 e Carlo 42.*
Per scoprire le trote di Aldo abbiamo prima scoperto che: le trote di Carlo erano il doppio di Biagio e uguale al triplo di Aldo, così abbiamo fatto un disegno e abbiamo visto, facendoli partire dallo stesso punto, che l'ultimo pezzo era uguale a quelli normali, e valeva 14. Poi per scoprire le trote di Biagio abbiamo aggiunto a 14 il 7, perché nel testo c'era scritto che Biagio ne aveva prese 7 in più. Invece per Carlo abbiamo moltiplicato 14 per 3 perché erano il triplo delle trote di Aldo.

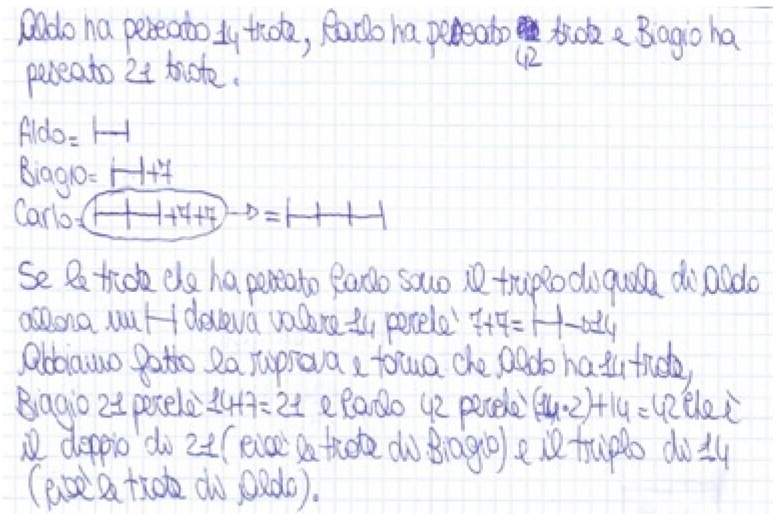


Fig. 10

Aldo ha pescato 14 trote, Carlo ha pescato 42 trote e Biagio ha pescato 21 trote

[RAPPRESENTAZIONE GRAFICA]

Se le trote che ha pescato Carlo sono il triplo di quelle di Aldo allora un "segmento" doveva valere 14 perché 7 + 7 = "segmento" = 14. Abbiamo fatto la riprova e torna che Aldo ha 14 trote, Biagio 21 perché 14 + 7 = 21 e Carlo 42 perché
(14· 2) + 14 = 42 che è il doppio di 21 (cioè le trote di Biagio) e il triplo di 14, cioè le trote di Aldo).

I due elaborati di Fig. 11 e Fig. 12, il primo di cat. 6 e il secondo di cat. 7, sono analoghi ai precedenti, anche se, invece dei segmenti, si utilizzano "pallini": gli allievi mostrano di essersi perfettamente appropriati del problema, avendo chiare le relazioni tra le grandezze in gioco e sapendole correttamente esprimere utilizzando più registri di rappresentazione, in particolare simbolico e grafico e passando dall'uno all'altro.

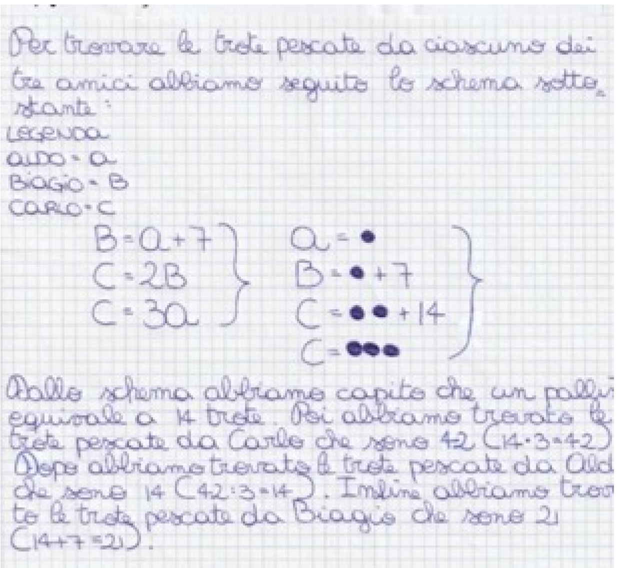


Fig. 11

Per trovare le trote pescate da ciascuno dei tre amici abbiamo seguito o schema sottostante:
Legenda
Aldo = A
Biagio= B
Carlo = C

[RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

Dallo schema abbiamo capito che un pallino equivale a 14 trote. Poi abbiamo trovato le trote pescate da Carlo che sono 42 (14·3 = 42). Dopo abbiamo trovato le trote pescate da Biagio che sono 21 (14 + 7 = 21).

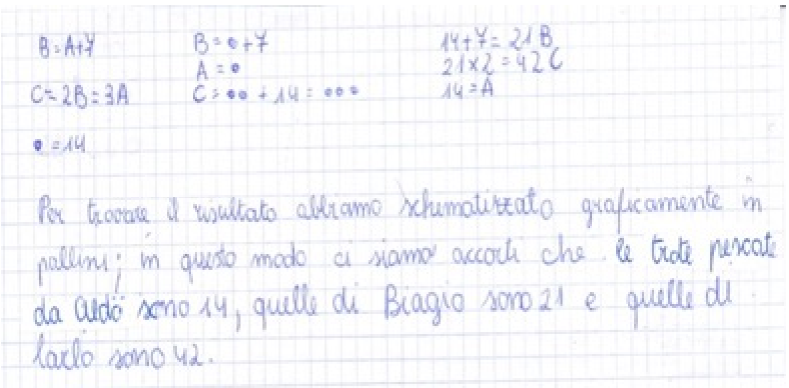


Fig. 12

[RAPPRESENTAZIONE GRAFICA]

Per trovare il risultato abbiamo schematizzato graficamente in pallini; in questo modo ci siamo accorti che le trote pescate da Aldo sono 14, quelle di Biagio sono 21 e quelle di Carlo sono 42.

In particolare, nell'elaborato di cat. 6, colpisce la scrittura in linguaggio formale dei dati e nell'elaborato di cat.7, la scrittura spontanea dell'equazione risolvente, anche se ancora non formalizzata.

2.3. Dall'algebra informale all'algebra formale: i diversi, spesso coesistenti, registri di rappresentazione utilizzati dagli allievi per giungere all'equazione risolvente

In termini algebrici, il problema "Gara di pesca" si riconduce ad impostare e risolvere l'equazione $3x = 2x + 14$, dove x è il numero di trote pescate da Aldo. La strategia di tipo algebrico fa la sua comparsa in qualche elaborato di cat. 5, nel 5% degli elaborati di cat. 6, nel 9% di quelli di cat. 7 e nel 22% di quelli di cat. 8 (non sono però corretti 1/3 degli elaborati che hanno applicato la strategia algebrica in cat. 6, ed 1/5 di quelli che l'hanno applicata in cat. 7 e in cat. 8).
Gli elaborati che abbiamo selezionato sono esemplificativi di diversi livelli di maturazione del discorso algebrico negli allievi.

In tutte le categorie, compresa la cat. 5, si trovano elaborati in cui si può riconoscere di fatto il riferimento ad un'equazione per risolvere il problema, ma la forma del discorso utilizzato per illustrare e spiegare la procedura si trova espressa in vari modi, da quello "informale", cioè con il solo linguaggio naturale, e successivamente integrato da tabelle, schemi, rappresentazioni, qualche simbolo specifico, fino ad arrivare ad un livello "formale", con utilizzo del linguaggio simbolico più o meno intrecciato al linguaggio naturale[12].

In Fig. 13 si ha un esempio di elaborato, di cat. 8, in cui tutto è espresso in *forma retorica* a partire dall'individuazione di "un'unità comune" (il numero di trote di Aldo) che gioca il ruolo del "valore incognito" da determinare.

[12] "Si può affermare che la distinzione informale / formale sia parallela alla distinzione algebra retorica / algebra simbolica, introdotta dagli storici della matematica. Nello sviluppo storico dell'algebra si possono infatti riconoscere tre fasi: la fase *retorica* o precoce, in cui tutto è scritto completamente a parole (fino a Diofanto, c.a 250 d.C.); (ii) uno stadio *sincopato* o intermedio, in cui sono adottate alcune abbreviazioni (Diofanto, *Aritmetica*); (iii) uno stadio *simbolico* (a partire da Viète, 1540-1603)" [cfr. anche Arzarello, articolo cit.]

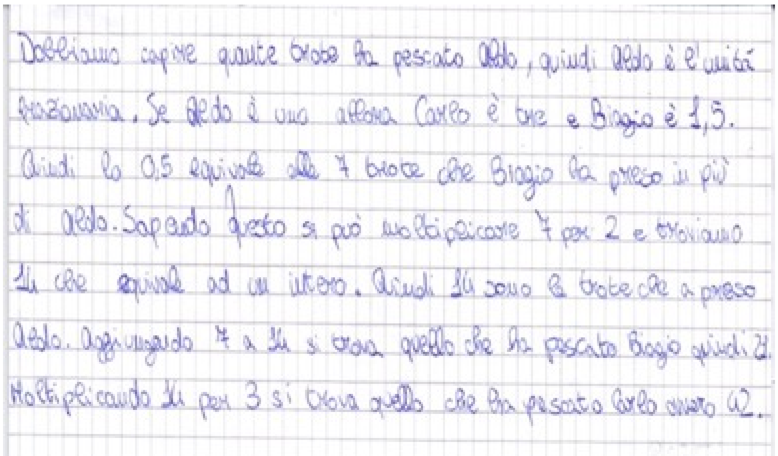


Fig. 13

Dobbiamo capire quante trote ha pescato Aldo, quindi Aldo è l'unità frazionaria. Se Aldo è uno, allora Carlo è tre e Biagio è 1,5. Quindi lo 0,5 equivale a 7 trote che Biagio ha preso in più di Aldo. Sapendo questo, si può moltiplicare 7 per 2 e troviamo 14 che equivale ad un intero. Quindi 14 sono le trote che ha preso Aldo. Aggiungendo 7 a 14 si trova quello che ha pescato Biagio, quindi 21. Moltiplicando 14 per 3 si trova quello che ha pescato Carlo, ovvero 42.

Il modo in cui sono presentati gli elaborati in Fig. 14, Fig. 15 e Fig. 16 può far invece pensare più ad una *forma sincopata*, che in due casi utilizza anche rappresentazioni grafiche, ma che non ha ancora raggiunto uno stadio puramente simbolico.

Nell'elaborato in Fig. 14 (cat. 7) compare una rappresentazione grafica corretta (di fatto una "equazione), e la spiegazione del ragionamento fa ricorso ad <u>una forma mista</u> in cui i dati incogniti, numero di trote di ciascun personaggio, sono identificati con il nome dei personaggi della storia e su essi si "opera" matematicante. Tutta la procedura di risoluzione è descritta tramite le azioni che progressivamente sono state fatte su A e su 7.

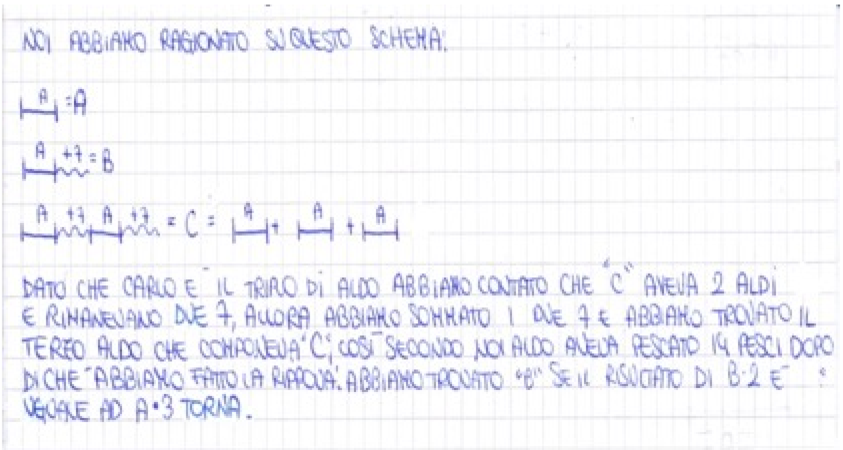


Fig. 14

Noi abbiamo ragionato su questo schema

[RAPPRESENTAZIONE GRAFICA]

Dato che Carlo è il triplo di Aldo, abbiamo contato che "C" aveva due Aldi e rimanevano due 7, allora abbiamo sommato i due 7 ed abbiamo trovato il terzo Aldo che componeva "C"; così secondo noi Aldo aveva pescato 14 pesci, dopodiché abbiamo fatto la riprova: abbiamo trovato "B". Se il risultato di B·2 è uguale ad A·3 torna.

In Fig. 15 (cat. 7), la scrittura non è certamente rigorosa, ma "ha senso" per gli allievi, ed appare più vicina ad una formalizzazione rispetto al caso precedente. Da notare che anche qui l'incognita è indicata con il nome del personaggio seguito dal punto interrogativo: "*Aldo =?* " , e che tale nome viene utilizzato a tutti gli effetti come se fosse un numero. Gli allievi sanno inoltre gestire la risoluzione dell' "equazione" che si ottiene e trovano la soluzione corretta (da notare che, nel penultimo passaggio, scrivono "**–** *2 Aldo*" solo a destra nell'uguaglianza, ma intendono che "*deve essere tolto da entrambe le parti il doppio delle trote di Aldo*", come mostrato nel passaggio successivo).

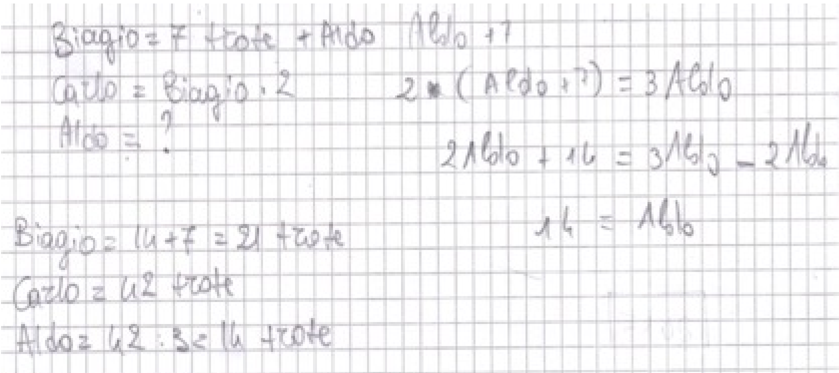


Fig. 15

Biagio = 7 trote + Aldo

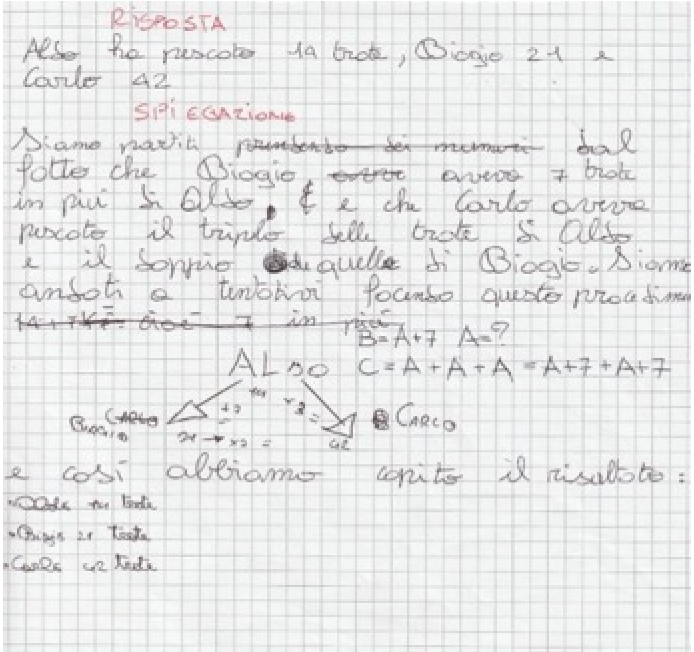
Carlo = Biagio·2; Aldo = ?

Biagio = Aldo + 7
2 · (Aldo + 7) = 3 Aldo
2 Aldo + 14 = 3Aldo – 2Aldo
14 = Aldo

Biagio = 14+7 = 21 trote; Carlo = 42 trote; Aldo 42:3 = 14 trote

L'elaborato in Fig. 16, di cat. 5, è molto interessante. Sembra essere un buon esempio di come il passaggio spontaneo, quindi inconsapevole, ad un'equazione possa avvenire precocemente proprio come evoluzione di un discorso meta-aritmetico. L'elaborato mostra infatti che gli allievi non solo hanno ben lavorato a livello aritmetico comprendendo chiaramente le relazioni numeriche in gioco, "doppio di", "triplo di", "7 in più di", ma che le sanno gestire anche operando su una quantità incognita, quella indicata con A, che rappresenta la quantità sconosciuta di trote di Aldo (hanno scritto infatti A = ?). La soluzione è trovata per tentativi sul valore attribuito ad A.

Fig. 16



<u>Risposta</u> – *Aldo ha pescato 14 trote, Biagio 21 e Carlo 42.*

<u>Spiegazione</u> - *Siamo partiti dal fatto che Biagio aveva 7 trote in più di Aldo e che Carlo aveva pescato il triplo delle trote di Aldo ed il doppio di quelle di Biagio. Siamo andati a tentativi facendo questo procedimento.*

$B = A + 7 \quad A = ?$
$C = A + A + A = A + 7 + A + 7$
[DIAGRAMMA SAGITTALE]

e così abbiamo capito il risultato:
Aldo 14 trote, Biagio 21 trote, Carlo 42 trote.

L'evoluzione verso il linguaggio simbolico continua. In Fig. 17 (cat. 8), gli allievi impostano in modo corretto l'equazione utilizzando il linguaggio simbolico, ma non ancora esperti nel calcolo algebrico e nell'uso dei principi di equivalenza, impostano l'equazione e la risolvono procedendo per tentativi.

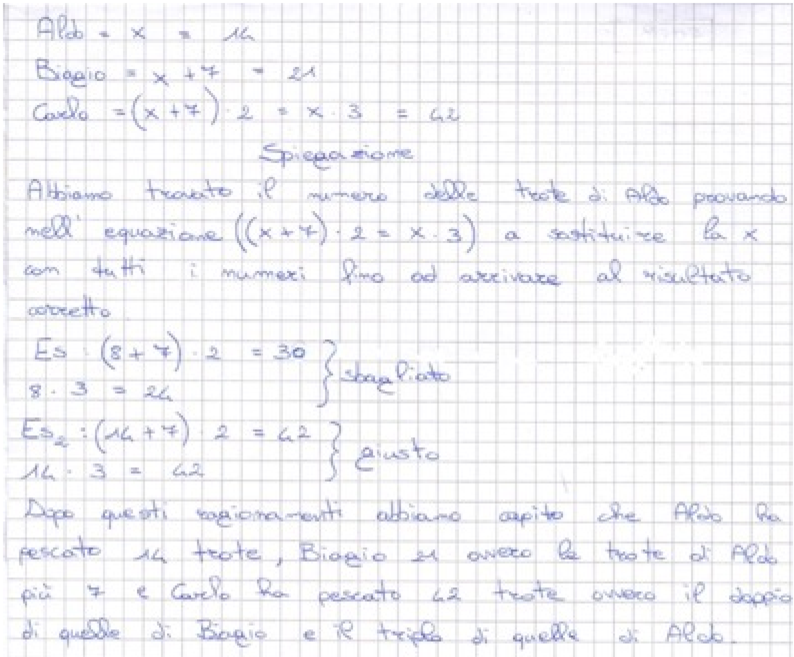


Fig. 17

Aldo = x = 14
Biagio = $x + 7 = 21$
Carlo= $(x+7) \cdot 2 = x \cdot 3 = 42$

<u>*Spiegazione*</u>- *Abbiamo trovato il numero delle trote di Aldo provando nell'equazione ($(x+7) \cdot 2 = x \cdot 3$) a sostituire la x con tutti i numeri fino ad arrivare al risultato corretto.*

Es: $(8+7) \cdot 2 = 30 \quad 8 \cdot 3 = 24$ sbagliato
Es_2: $(14+7) \cdot 2 = 42 \quad 14 \cdot 3 = 42$ giusto

Dopo questi ragionamenti abbiamo capito che Aldo ha pescato 14 trote, Biagio 21 ovvero le trote di Ado più 7 e Carlo ha pescato 42 trote ovvero il doppio di quelle di Biagio e il triplo di quelle di Aldo.

Infine negli ultimi due elaborati di Fig. 18 (cat. 7) e Fig. 19 (cat. 8) gli allievi arrivano ad una completa formalizzazione algebrica del discorso e mostrano di dominare il calcolo algebrico per risolvere l'equazione che traduce matematicamente il problema.

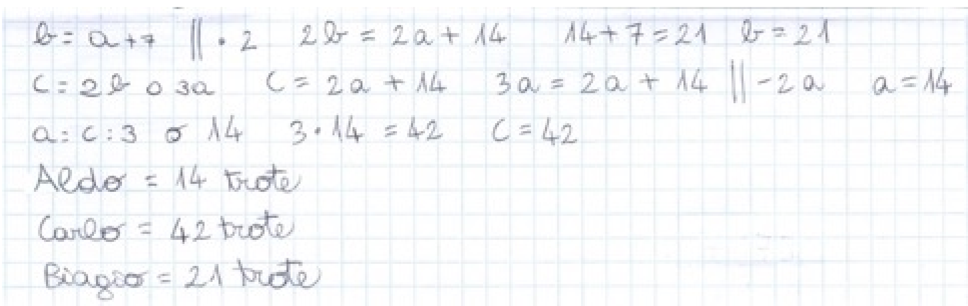

b = a+7 || · 2   2b = 2a + 14   14+7 = 21   b = 21
c = 2b o 3a   c = 2a + 14   3a = 2a + 14 || −2a   a = 14
a : c : 3 o 14   3 · 14 = 42   c = 42
Aldo = 14 trote
Carlo = 42 trote
Biagio = 21 trote

Fig. 18

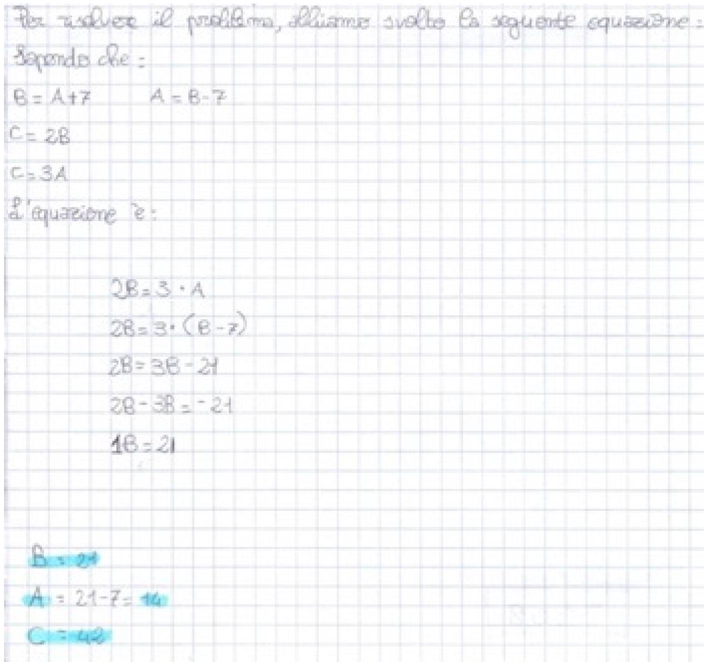

Per risolvere il problema, abbiamo svolto la seguente equazione:
Sapendo che:
B = A+7   A = B−7
C = 2B
C = 3A
L'equazione è:
2B = 3 · A
2B = 3 · (B−7)
2B = 3B − 21
2B − 3B = − 21
1B = 21
B = 21
A = 21−7 = 14
C = 42

Fig.19

Per risolvere il problema abbiamo svolto la seguente equazione.
Sapendo che:
$B = A + 7 \quad A = B - 7 \quad C = 2B$
$C = 3A$
L'equazione è: $2B = 3 \cdot A$
$2B = 3 \cdot (B - 7)$
$2B = 3B - 21$
$2B - 3B = - 21$
$1B = 21$
$B = 21 \quad A = 21 - 7 = 14 \quad C = 42$

Da notare la scelta non "canonica" per l'incognita, ovvero il *numero delle trote di Biagio*, indicato con B.

Nei due elaborati precedenti, si può affermare che sia stato raggiunto il *livello di oggettificazione*: qui le espressioni algebriche utilizzate sono considerate come oggetti a pieno titolo (*il loro stato discorsivo non è diverso da quello di un numero*). Si percepisce che gli allievi hanno la padronanza dell'uguaglianza come relazione di equivalenza e comprendono la logica di eseguire la stessa operazione su entrambi i membri dell'equazione come un modo per risolverla.

2.4. Ostacoli, difficoltà ed errori

Le percentuali degli elaborati con punteggio 0 sono state le seguenti: 37% in cat. 5 e in cat. 6, 18% in cat. 7 e 22% in cat. 8.

Un'indubbia difficoltà per gli allievi è stata quella legata alla struttura matematica del problema, che non è classificabile come problema di "tipo aritmetico" anche se diversi allievi potrebbero con una procedura di tipo aritmetico (per tentativi …): l'unico numero presente nel testo esprime un operatore "+ 7" e non una quantità, ed inoltre la quantità su cui opera è incognita, poi si parla di doppio e triplo, ma sempre di quantità incognite. Le informazioni presenti nel testo sono quindi tutte di tipo *relazionale*.

Mentre nei problemi aritmetici, lo schema di lavoro nella risoluzione consiste nel "*partire dal noto per giungere all'ignoto"* con opportune operazioni sui valori dati, nei problemi algebrici si procede nel verso opposto "*dall'ignoto al noto*". Per chi è esperto, si richiede di partire da un valore incognito (indicato in genere con un simbolo) e di esprimere tramite esso le altre grandezze in gioco utilizzando le relazioni fornite nel testo del problema, fino a legarle tutte, in genere, sotto forma di equazione; lavorando poi con il calcolo algebrico sulla quantità incognita se ne ricava il suo valore. Per tutti coloro che non hanno dimestichezza con le equazioni, c'è la necessità di individuare procedure alternative. Il non trovarle, spinge gli allievi a consegnare in bianco, oppure spesso ad utilizzare l'unico numero indicato nel testo, "7", come se fosse quello delle trote di Aldo e poi farne il doppio ed il triplo per trovare rispettivamente la quantità di trote di Biagio e di Carlo.

Per quanto riguarda il testo, in genere gli allievi hanno mostrato di comprendere le condizioni indicate tramite le relazioni "è il doppio di", "è il triplo di", anche se in alcuni elaborati di cat. 5 ha creato difficoltà il fatto che le due condizioni siano state espresse nella stessa frase "*Carlo ha pescato il doppio delle trote di Biagio che è anche il triplo di quelle pescate da Aldo*" (la conseguenza è stata il tener conto solo di una di esse, spesso la prima!). Gli allievi hanno invece trovato più difficoltà nell'interpretazione della frase "*Biagio ha pescato 7 trote in più di Aldo*", che in qualche caso si riscontra anche in cat. 8, come nell'elaborato di Fig. 20, con inevitabile influenza negativa sulla risoluzione del problema.

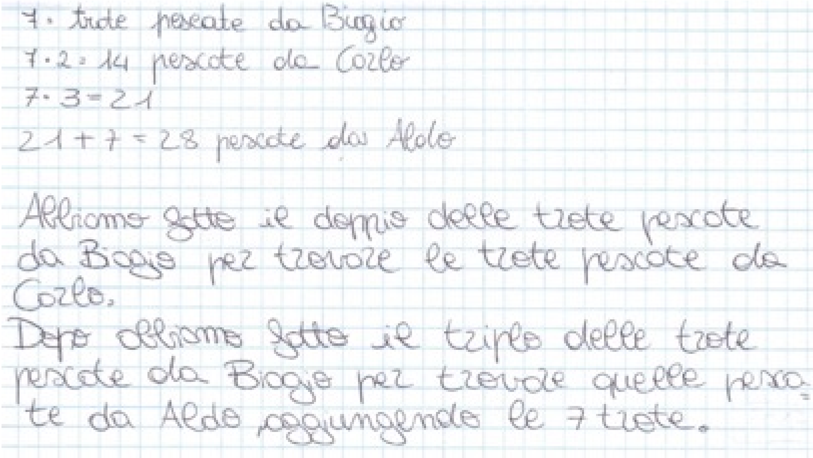

7 · trote pescate da Biagio
7·2 = 14 pescate da Carlo
7·3 = 21
21 + 7 = 28 pescate da Aldo
Abbiamo fatto il doppio delle trote pescate da Biagio per trovare le trote pescate da Carlo.
Dopo abbiamo fatto il triplo delle trote pescate da Biagio per trovare quelle pesca-te da Aldo aggiungendo le 7 trote.

Fig. 20

7 = trote pescate da Biagio
7·2 = 14 trote pescate da Carlo
7·3 = 21
21+7 = 28 pescate da Aldo

Abbiamo fatto il doppio delle trote pescate da Biagio per trovare le trote pescate da Carlo. Dopo abbiamo fatto il triplo delle trote pescate da Biagio per trovare quelle pescate da Aldo aggiungendo le 7 trote.

In alcuni casi, interferisce la non conoscenza che ancora permane sul *ruolo dello 0* (questione quindi non risolta in ambito aritmetico), come mostrato nell'elaborato di cat. 8 di Fig. 21.

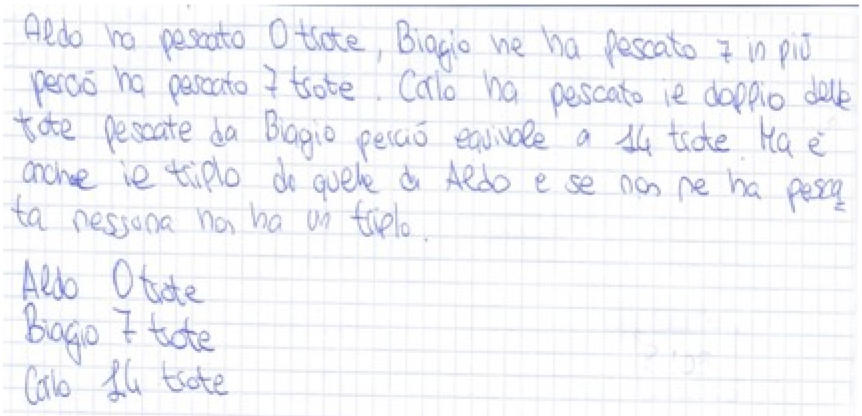

Aldo ha pescato 0 trote, Biagio ne ha pescato 7 in più perciò ha pescato 7 trote. Carlo ha pescato il doppio delle trote pescate da Biagio perciò equivale a 14 trote Ma è anche il triplo di quelle di Aldo e se non ne ha pescata nessuna non ha un triplo.
Aldo 0 trote
Biagio 7 trote
Carlo 14 trote

Fig. 21

Aldo ha pescato 0 trote, Biagio ne ha pescate 7 in più perciò ha pescato 7 trote. Carlo ha pescato il doppio delle trote di Biagio perciò equivale a 14 trote. Ma è anche il triplo di quelle di Aldo e se non ne ha pescata nessuna non ha un triplo.

Aldo 0 trote
Biagio 7 trote
Carlo 14 trote

Un'altra osservazione da fare riguarda il fatto che in tutte le categorie si trovano molti elaborati in cui i tentativi si fanno sui multipli di 7, in genere senza dare alcuna spiegazione, come mostrato nell'elaborato di cat. 6 in Fig. 22, oppure si scrive "*perché 7 è l'unico dato numerico presente*". Così facendo, si trova facilmente la soluzione corretta perché questo fatto è vero (e vale in generale qualunque sia il valore *n* della differenza tra il numero di trote di Biagio e quelle di Aldo[13]), ma occorre provarlo! Pensiamo che possa essere didatticamente importante riflettere in classe su questo aspetto, in particolare con gli allievi di cat. 8[14].
Non sempre però si arriva alla soluzione corretta, per esempio in tutte le categorie sono presenti elaborati in cui non si comprende la situazione problematica e si fornisce come soluzione "Aldo 7 trote, Biagio 14 trote, Carlo 21 trote", cioè si procede per via aritmetica moltiplicandolo sia per 2 (ricavato da "doppio") che per 3 (ricavato da "triplo") l'unico numero presente nel testo, cioè 7.

---

[13] Indicate con A, B, C rispettivamente il numero di trote di Aldo, Biagio e Carlo, dalle relazioni C = 2B = 3A e da B = A + n, si ottiene 2A + 2n = 3A, da cui **A = 2n**, di conseguenza **B** = A + n = **3n** e **C** = 3A = **6n**.

[14] Tenuto presente quanto emerso dalle analisi a posteriori del problema, il sottogruppo del Gruppo Algebra coordinato da Daniela Medici e M. Gabriella Rinaldi, al Convegno di Le Locle del 2016, ha costruito due nuovi problemi "appartenenti alla stessa famiglia", la cui soluzione non possa essere indotta in modo casuale. I problemi sono "*Le tre formiche*" (Cat. 5, 6, 7) 27° RMT.II.9 e "*I dolcetti di nonna Pina*" (Cat. 5, 6, 7) 27° RMT.F.9.

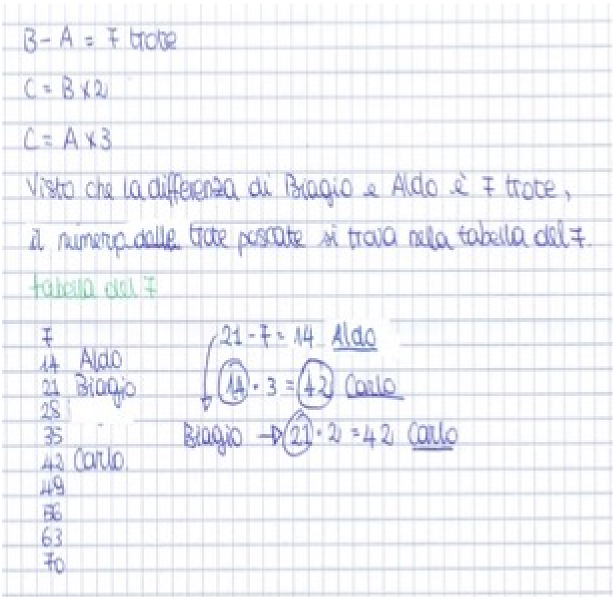


Fig. 22

B — A = 7 trote   *C = B × 2*   *C = A × 3*

Visto che la differenza di Biagio e Aldo è 7 trote, il numero delle trote pescate si trova nella Tabella del 7.

Tabella del 7

7
14 Aldo   *21 — 7 = 14 Aldo*
21 Biagio
28   *14·3 = 42 Carlo*
35
42 Carlo   *Biagio 21·2 = 42 Carlo*
49
…
70

La decisione degli allievi di procedere per tentativi sui multipli di 7 (peraltro riscontrata anche negli elaborati di altre sezioni), non poteva essere prevista a priori. Si potrebbe evitare questa situazione modificando opportunamente le "variabili didattiche" del problema, per esempio considerare che *Biagio abbia pescato 9 trote in più di Aldo* e che *Carlo ne abbia pescate sia il doppio di Biagio che il quintuplo di Aldo*. In tal caso si avrebbe A = 6, B = 15, C = 30.

In altri elaborati si determina il numero delle trote di Carlo calcolando il minimo comune multiplo tra 7, 3, 2 (ancora perché 7 figura nel testo e 3 e 2 sono ricavati dai termini "doppio" e "triplo"…), e si ottiene così il valore corretto 42!
In questo caso la questione è più delicata, perché la procedura è scorretta [e basta un controesempio, con cambio dei dati relazionali a provarlo: *se Biagio ha pescato 5 trote più di Aldo e Carlo ha pescato il quadruplo delle trote di Biagio e nove volte le trote di Aldo*, traducendo in linguaggio simbolico si avrebbe B = A + 5, C = 4B = 9A, da cui si otterrebbe A = 4, B = 9 e C = 36, numero quest'ultimo diverso da 180 = m.c.m. (5, 4, 9)]. È didatticamente importante far riflettere gli allievi sul fatto che la soluzione è stata trovata per "pura fortuna" e che non si tratta di una procedura valida in generale perché basta cambiare i dati e non funziona più!

Infine, in Fig. 23 e in Fig. 24, sono mostrati due esempi di elaborati di cat. 8 (ma se ne trovano anche in cat. 7), in cui si può ancora una volta riconoscere l'effetto del *contratto didattico*: gli allievi, si sentono obbligati ad utilizzare lo strumento "equazioni", ma appare evidente che quello che manca del tutto è il "senso" di ciò che si fa!

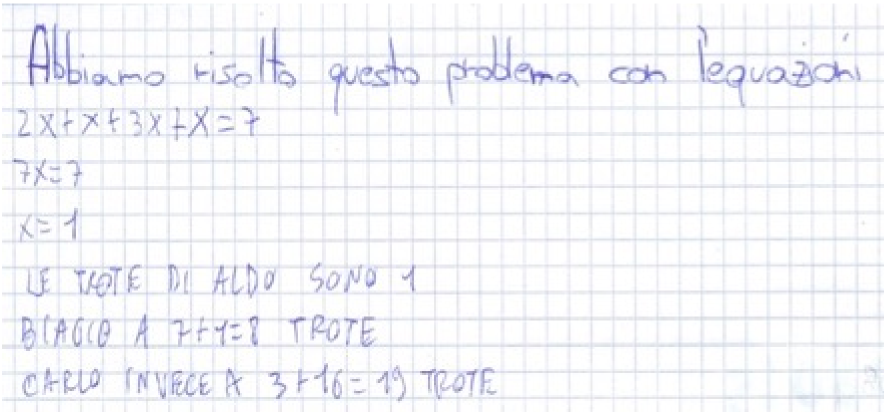


Fig. 23
Abbiamo risolto questo problema con le equazioni

2x + x + 3x + x = 7
7x = 7
x = 1

Le trote di Aldo sono 1
Biagio ha 7+1 = 8 trote
Carlo ha invece ha 3+16 = 19 trote

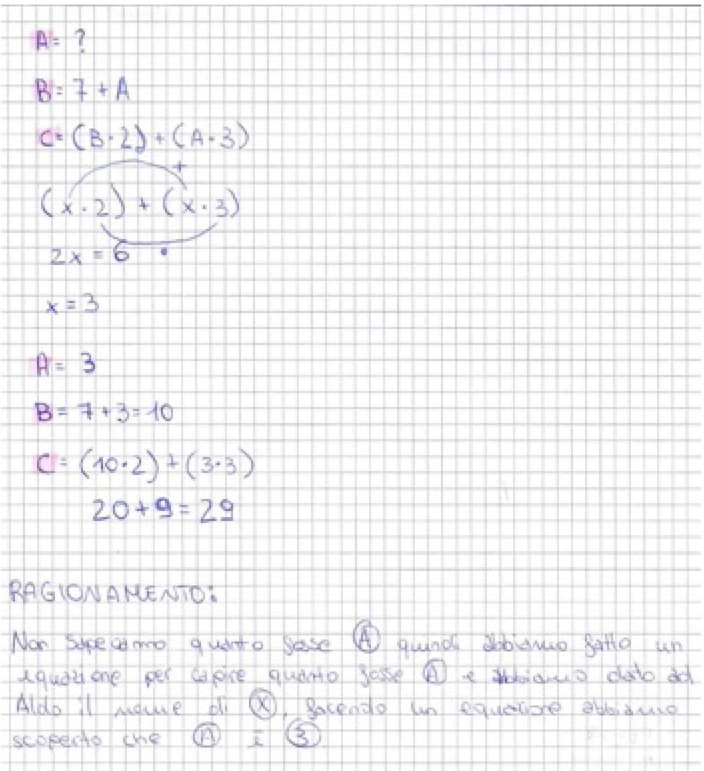


Fig. 24

A = ?
B = 7 + A
C = (B·2) + (A·3)

(x·2) + (x·3) [si indica di sommare le due x]

2x = 6 [si indica di moltiplicare 2 e 3]

x = 3

A = 3

B = 7 + 3 = 10

C = (10·2) + (3·3)

20 + 9 = 29

RAGIONAMENTO
Non sapevamo quanto fosse A, quindi abbiamo fatto un'equazione per capire quanto fosse A ed abbiamo dato ad Aldo il nome di x; facendo un'equazione abbiamo scoperto che A è 3.

L'unico fatto chiaro agli allievi è la necessità di determinare il numero di trote di Aldo e che devono farlo con un'equazione nella quale il valore incognito deve essere indicato con "*x*". Cosa però sia un'equazione e perché la si usi rimane un mistero… È evidente in entrambi i casi che gli allievi hanno "saltato" tappe importanti nel loro percorso algebrico che occorre necessariamente recuperare!

2.5 Qualche riflessione ulteriore sull'analisi a posteriori

Le procedure utilizzate dagli allievi sono state sostanzialmente quelle previste nell'Analisi a priori ufficiale (ed indicate nel loro complesso anche dagli insegnanti del Laboratorio). In generale si è riscontrato un miglioramento della media *m* dei punteggi passando da cat. 5 e 6 (*m* = 1,46 e *m* = 1,43) a cat. 7 e 8 (*m* = 2,06 e *m* = 2,16).

L'analisi a posteriori ha mostrato che permangono difficoltà di comprensione dei dati relazionali presenti nel testo anche in cat 7 ed in alcuni casi di cat.8, con l'ovvia conseguenza di impedire una corretta appropriazione del problema e quindi della sua risoluzione. Ciò porta ancora una volta a sottolineare l'importanza nella pratica didattica di riservare tempo alla comprensione del testo, prima ancora di pensare ai calcoli e alle procedure risolutive, lavorando *sugli aspetti relazionali* (per es., sollecitare l'utilizzo del linguaggio naturale per trovare altre forme equivalenti ad esprimerli, rappresentarli graficamente o utilizzando il linguaggio simbolico, sperimentando il passaggio da un registro rappresentativo all'altro…). È infatti ampiamente riconosciuto dalla ricerca che un grosso ostacolo per lo sviluppo del pensiero algebrico sia dovuto alla non comprensione e al non saper lavorare con i dati relazionali.

Particolarmente interessanti, come abbiamo già avuto modo di sottolineare si sono rivelati alcuni elaborati di categorie 5-7 in cui gli allievi mostrano un dominio dei dati relazionali che li portano ad impostare di fatto un'equazione (prima ancora di una sua "istituzionalizzazione") e a risolverla per tentativi o per "bilanciamento", applicando in modo naturale i principi di equivalenza. Quest'ultima modalità di risoluzione comporta in particolare di riconoscere nel simbolo di "uguale" un valore relazionale (relazione di equivalenza), mentre per moltissimi allievi di scuola secondaria di primo grado (ma non solo…) rimane un indicatore procedurale (a sinistra si scrivono i calcoli e a destra si scrive il risultato).

Per quanto riguarda la strategia che fa uso del metodo grafico con i segmenti, è importante che gli allievi non la percepiscano come "calata dall'alto", cioè senza che siano messi in grado di attivare le conoscenze indispensabili per superare gli ostacoli che possono incontrare. Altro aspetto rilevante è quello di non presentare questa procedura come il "metodo risolutivo" per tutti quei problemi traducibili di fatto con un'equazione lineare, ma come una delle possibili strategie per affrontare e risolvere questo tipo di situazioni. Una didattica per problemi, e in particolare non standard, ha il vantaggio di non rivelare a priori l'ambito concettuale del problema stesso. Solo lavorando opportunamente sui saperi pregressi degli allievi, l'insegnante potrà attivare nuove conoscenze indispensabili per superare gli ostacoli. È solo dopo le diverse fasi che l'allievo avrà modo di utilizzare un *"nuovo metodo"* in quanto quest'ultimo sarà diventato patrimonio del suo sapere.

Infine, vorremmo sottolineare che l'analisi a posteriori può dare spunti per un'attività di *problem posing*[15] orientata alla dimostrazione. Un esempio l'abbiamo già proposto riguardo alla strategia che potremmo definire "dei multipli di 7". L'insegnante che si trovi di fronte ad una procedura del genere, potrà in modo naturale invitare gli allievi a porsi domande sulla sua validità e, se di cat. 8 o eventualmente 9 e 10, guidarli verso una dimostrazione.

3. Conclusioni

In questo nostro lavoro abbiamo scelto un problema di "tipo algebrico" proposto in classi da cat. 5 a cat. 8, quindi ad allievi che, fatta eccezione per quelli di classi di cat. 8, ancora "acerbi" in ambito algebrico. Abbiamo rivolto la nostra attenzione all'analisi delle procedure e dei ragionamenti presenti nei loro elaborati per poterne cogliere elementi "indicatori" dello sviluppo del discorso algebrico.

Il nostro scopo è stato quello di offrire agli insegnanti un repertorio di esempi che, in analoghe situazioni, consenta loro di interpretare, dal punto di vista dello sviluppo del pensiero algebrico, le produzioni dei propri allievi. Saranno in particolare interessanti quelle "non standard", cioè corrette da un punto di vista matematico, ma che differiscono da ciò che gli insegnanti stessi si aspettano, o quelle contenenti errori che non dovranno essere condannati, ma considerati come indicatori di ostacoli da rimuovere.

Rimanendo in ambito di *problem solving*, l'insegnante dovrà sostenere gli allievi nel percorso algebrico, proponendo loro situazioni problematiche significative in cui siano liberi di esprimersi nelle procedure e nelle spiegazioni dei loro ragionamenti. L'insegnante, come sempre, dovrà essere il "regista" della discussione in classe e "attore" nella fase di istituzionalizzazione delle conoscenze. Ricordiamo che sollecitare la discussione collettiva, porta gli allievi a riflettere su saperi, processi e linguaggi usati per descriverli, a confrontarsi con il punto di vista dei compagni, a valutare le proprie convinzioni ed operare consapevolmente delle scelte. In altre parole questa attività porta a privilegiare aspetti metacognitivi e metalinguistici.

Sottolineiamo infine l'importanza di prestare attenzione al linguaggio spontaneo usato dagli allievi sia nelle produzioni scritte che orali, per poter cogliere e valorizzare quegli aspetti che potranno essere importanti per avviare sensatamente al linguaggio simbolico e alla sua padronanza, che sta alla base dello studio dell'algebra. Attraverso un'attività di interpretazione e traduzione tra espressioni in linguaggio naturale e formale, gli allievi potranno essere progressivamente condotti ad avere consapevolezza del significato dei segni che si usano, della semplificazione apportata nello sviluppo del discorso matematico dall'uso dei simboli rispetto al linguaggio naturale, di come attraverso i processi di modellizzazione si possa giungere alla nascita di oggetti matematici (come espressioni, equazioni, funzioni), e dare quindi significato al loro studio.

Bibliografia

Arzarello F.: 2020, 'Con gli studenti e gli insegnanti tra numeri, formule e problemi'/'Avec les élèves entre nombres, formules et problèmes', La Gazzetta di transalpino, n° 10, 28-58.

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G.: 1994, 'L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche', Quaderno n° 6 del CNR, Progetto strategico Tecnologie e Innovazioni Didattiche, Pavia

Castellini A.: 2016, 'Against problem solving by segment method', *Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology*, Vol. 2, n. 2, 287-302, (http://www.edimast.it/journals/index.php/edimast/article/view/32/29) [con PDF scaricabile in italiano]

MIUR 2012, *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione.*

MIUR. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. Disponibile in http://www.pianodistudio.ch/ (consultato il 28.03.2019).

Malara N. A., Navarra, G.: 2003, '*Quadro Teorico di Riferimento e Glossario, Progetto ArAl*', Ed. Pitagora Bologna.

Navarra G.: 2008, 'L'early algebra: una prospettiva per una didattica dell'aritmetica e dell'algebra che favorisca il superamento delle difficoltà nell'insegnamento/apprendimento delle due discipline', *Atti del Convegno Nazionale 'Il piacere di insegnare, il piacere di imparare la matematica',* Ed. Pitagora Bologna.

[15] Il *problem posing*, insieme al *problem solving*, occupa una posizione di centrale importanza in matematica. L'attività di *problem posing*, stimola la capacità di porsi domande. L'allievo, in modo assolutamente libero e a partire dalle proprie conoscenze, è invogliato ad affrontare una nuova situazione-problema, ottenuta da quella iniziale, modificandone per esempio alcuni dati.

APPENDICE - ***ATTIVITA' IN AULA CON 11 ALUNNI DI CAT.10 PROVENIENTI DA CLASSI DIVERSE E INDICATI DAI LORO INSEGNANTI IN QUANTO PRESENTANO MOLTE DIFFICOLTA' IN MATEMATICA***

(Istituto Professionale dell'Industria e Artigianato: meccanico, elettrico, moda e ottico)

Domande

Leggendo il testo del problema conosciamo il numero delle trote pescate da Biagio?
Leggendo il testo del problema conosciamo il numero delle trote pescate da Aldo?
Leggendo il testo del problema conosciamo il numero delle trote pescate da Carlo?
C'è qualcuno tra Aldo, Biagio e Carlo che può non aver pescato niente?
É corretto dire che Carlo ha pescato più trote di tutti e tre?
É corretto dire che Aldo ha pescato meno trote rispetto a Biagio e Carlo?
É corretto dire che Aldo ha pescato 1/3 delle trote di Carlo?
É corretto dire che Aldo ha pescato 1/3 delle trote di Biagio?
É corretto dire che Biagio ha pescato la metà delle trote di Carlo?
É possibile affermare che Biagio ha pescato esattamente 7 trote?
Se conosci il numero esatto delle trote pescate da Aldo, puoi ricavare il numero delle trote pescate da Biagio? E quelle pescate da Carlo?
Se conosci il numero esatto delle trote pescate da Carlo, puoi ricavare il numero delle trote pescate da Biagio? E quelle pescate da Aldo?
Se conosci il numero esatto delle trote pescate da Biagio, puoi ricavare il numero delle trote pescate da Aldo? E quelle pescate da Carlo?

Confronto e discussione

Sono allievi difficili da gestire che rifiutano in genere ogni tipo di impegno scolastico e anche il rispetto del regolamento d'istituto. SONO DISPOSTI A SEMICERCHIO.

Dopo una presentazione iniziale dell'esperto (M. F. Andriani), che non conoscono, si dichiarano incompetenti in matematica e soprattutto che non la capiscono.

Sfoglio qualche quaderno che utilizzano durante le loro ore di lezione di matematica. I quaderni sono ricchi di esercizi standard sulle disequazioni, molto ordinati. Al mio stupore nel vedere esercizi ben svolti e non certo semplici per allievi in difficoltà rispondono: *... "copiato dalla lavagna" ... "non so cosa sono, ma li so fare" ... boh!*

Sanno a priori che durante il nostro corso sarò disponibile per eventuali chiarimenti, ma che durante le lezioni del corso eviterò il classico "doposcuola" per dedicarmi con loro ad altri tipi di attività tese a migliorare soprattutto le loro emozioni con questa disciplina tanto odiata e rifiutata.

Consegno a ciascuno la scheda di "GARA DI PESCA" con le domande per la lettura e interpretazione del testo.

Li invito a leggere attentamente e a rispondere alle domande presenti nella scheda. Sono liberi anche di collaborare tra loro.

Qualcuno legge, altri sono inizialmente distratti ed è necessario ripetere più volte l'invito alla lettura.

Rifiuto ogni richiesta di aiuto.

- Angelo interviene dopo qualche minuto e afferma: *"Biagio ha 7 trote per forza".*
- Anche Ciro è convinto che Angelo abbia ragione.
- Subentra… con violenza Giada… (aveva da poco detto) … *"non mi piace la matematica".*
- *"Non è possibile… non si sa".*

Blocco la discussione, perché lo scopo dell'attività non è quella di risolvere subito il problema, ma di leggere e cercare di rispondere.

I più coinvolti continuano tuttavia a cercare una soluzione e un'altra voce afferma "*Il problema è impossibile"… "non si può fare"* e poi continua a distrarsi.

Intanto Giuseppe è ancora molto distratto, Valentina ha dichiarato che non capirà perché non ha mai capito la matematica, Ruggiero sembra assorto nei suoi pensieri, Antonio e Carlo ridono tra loro, Andrea e Michele ascoltano chi interviene ma non dicono nulla.

Riprendono a leggere…

- 7 - 14 - 21 *Aldo 7, Biagio 14 perché coincide con il doppio e 21 Carlo perché il triplo…* afferma Angelo
- Valentina, sempre con forza, sbraita... *Non può essere… c'è scritto che Biagio ne ha 7 in più di Aldo e Aldo non si sa!*

Una cosa è certa… l'invito alla lettura non è stato ancora recepito e si cerca una risposta al problema, da trovare in fretta e il 7 salta all'occhio e Angelo e Ciro sono convinti ancora che Aldo ne abbia pescate 7 di trote.

In questa prima discussione si percepisce intanto che non hanno problemi nel determinare il doppio o il triplo di un numero e anche che, se conoscono il doppio, possono determinare la metà o ½ nel primo caso, o 1/3 nel secondo caso.

Ad un certo punto Michele dice… *Non sono 7 ma come dice Valentina se Aldo ne avesse 3… Biagio ne avrebbe pescate 10.*

Invito ancora a leggere senza confermare o meno le loro convinzioni.

Leggo io la prima domanda e chiedo se da una prima lettura del testo si evince quante trote hanno i tre protagonisti.
Per qualche altro minuto Angelo e Ciro continuano a dire: *Sì, 7!...* dopo un po' si ricredono e dicono quasi insieme *No, ma se so uno, trovo gli altri.*

Si passa alla domanda: *C'è qualcuno tra Aldo, Biagio e Carlo che può non aver pescato niente?*
Risposta secca iniziale: *Sì!*
Subito dopo Antonio si risveglia dal suo torpore e afferma *No, altrimenti non ti trovi perché se Aldo non pesca non c'è il triplo.*

Divago un po' perché pretendo un'argomentazione appropriata sul ruolo dello zero nella moltiplicazione… dopo un po' sono quasi rimproverata da Ciro che vuole scoprire il numero delle trote pescate dai tre.
Chiedo scusa e ritorniamo a leggere…
Guardo Valentina, sempre convinta di non capire… la invito a rispondere alle domande successive.
È corretto dire che Carlo ha pescato più di tutti e tre? Timidamente, ma immediatamente, afferma di *Sì* e ci spiega anche il perché… e continua a rispondere correttamente. E quando altri approvano e, per darle fiducia, mi sono permessa di dire… "*Allora hai letto?"...* è comparso il sorriso sul suo volto (Finalmente!)
Alla domanda successiva, si ripresenta la tanto attesa risposta (per la quale avevo ripetutamente richiesto di leggere le domande iniziali) *"È possibile affermare che Biagio ha esattamente pescato 7 trote?"…* un coro quasi unanime risponde: *Noooo…e se non si sanno quelle di Aldo!*

A questo punto ho chiesto a Michele di riproporre il suo pensiero…
Michele: *Se Aldo avesse 3 trote allora Biagio avrebbe pescato 10 (Miracolo!!...* non parla in dialetto e usa bene i verbi! E dire che avevo evitato il condizionale per evitare maggiori difficoltà). Sono contentissima… dopo tante domande e tante richieste di andata e ritorno senza dare conferme e smentite, sono passate quasi due ore e non mi hanno ancora boicottata!... e non sappiamo ancora quante trote sono state pescate!!!
Intervengo e dico: *"Allora quadra tutto, adesso?"*
A questo punto sono "più caldi".
Ciro: *No, non va bene con 3 perché poi, Carlo 20 e…e il triplo, no, non può essere.*
Angelo: *No, non va.*
In coro…*Allora cinque?*
Mi sbilancio (in realtà ho ancora poco tempo) … *Controllate (*dico)
Ciro: *Multiplo di 3*
E (io) Ruggiero: *di 2* *E allora?* (io) Coro: *Di 5* Coro: *No, non va*
Attenti! (io) Coro: *12, 18… No, no è 24… Uffa!!! Allora non c'è!!!*
Siete sicuri? (io)
Angelo: *Multiplo di 6…ma non so la tabellina!*
Il tempo sta scadendo e qualcuno vuole andare, ma ad un certo punto Sandro che per tutto il tempo non ero riuscita a farlo parlare… *È 42 per Carlo!*
Un attimo di silenzio.
Poi Ciro controlla…e dice: *il doppio, il triplo, 7 più…va bene è 42!*

Per oggi il tempo a disposizione è concluso…
Ringrazio.

RÉFLEXIONS SUR L'ÉVOLUTION DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE CHEZ LES ÉLÈVES À PARTIR DE L'ANALYSE A POSTERIORI D'UN PROBLÈME

Maria Felicia Andriani[1], Lucia Doretti, Lucia Salomone[2]

Introduction

La longue expérience qui nous unit au sein du RMT nous permet d'avoir une compréhension claire du potentiel qu'offrent les problèmes préparés pour le rallye et la méthodologie de travail qui s'y rapporte, tant dans le domaine de la formation des enseignants que dans celui des retombées pour la pratique de l'enseignement. Ce sont généralement des situations atypiques, durant lesquelles les élèves sont appelés à activer leurs connaissances ou à expérimenter de nouvelles voies, en ayant toujours à argumenter les choix effectués. Le *problem solving* et l'argumentation doivent être considérés comme des aspects auxquels l'enseignement des mathématiques ne peut renoncer en aucune manière : la demande d'argumentation n'ayant évidemment du sens que lorsque les élèves sont appelés à faire des choix et à s'engager dans un processus de pensée. Cette demande concerne donc les processus de production (résolution de problèmes) et pas simplement les processus reproductifs / exécutifs (résolution d'exercices).

Dans les indications nationales[3] pour le premier cycle (MIUR 2012), l'idée des mathématiques et de l'enseignement des mathématiques qui doivent être promues à partir de l'école primaire est explicitement définie : « *Le développement d'une vision adéquate des mathématiques, non réduite à un ensemble de règles à mémoriser et à appliquer, mais reconnue et appréciée comme un contexte pour affronter et poser des problèmes significatifs et pour explorer et percevoir les relations et les structures qui se retrouvent et se reproduisent dans la nature et dans les créations de l'homme, est de la plus haute importance* ». Ceci suggère donc un enseignement des mathématiques qui donne de l'importance aux activités de *problem solving* et de *problem posing*, et en même temps apprend à saisir les relations et les propriétés, c'est-à-dire une activité reconnue comme fondamentale pour le *développement de la pensée algébrique*. Cette vision des mathématiques se retrouve exprimée dans les objectifs d'apprentissage suivants, appartenant au domaine « Relations, données et prévisions », prévu en fin de l'école primaire (catégories 4 et 5 du RMT) : « *Représenter des problèmes avec des tableaux et des graphiques qui expriment sa structure* » et « *Reconnaître et décrire des régularités dans une suite de nombres et de figures* ». À leur tour, ces objectifs sont étroitement liés aux deux suivants de l'école secondaire du premier degré (catégories 6 à 8) : « *Interpréter, construire et transformer des formules contenant des lettres pour exprimer des relations et des propriétés en général* et *Explorer et résoudre des problèmes à l'aide d'équations du premier degré* ».

La mise en œuvre de ces indications devrait conduire à une attitude renouvelée à l'égard de l'enseignement des mathématiques dès l'école primaire, orientée notamment vers le développement de la pensée algébrique chez les élèves, modifiant les pratiques pédagogiques traditionnelles. Cependant, ce n'est pas toujours le cas ...

En Italie (et plus généralement dans le monde occidental), l'étude de l'arithmétique et celle de l'algèbre sont encore traitées à des périodes différentes : à l'école primaire et dans les deux premières années du collège on évolue essentiellement dans le domaine de l'arithmétique, puis à partir de la troisième année du secondaire du premier degré, l'étude de l'algèbre commence et se poursuit tout au long du secondaire du second degré (lycée). Cela génère chez les élèves, mais souvent aussi chez les enseignants, la conviction que l'arithmétique et l'algèbre sont deux matières complètement différentes.

De nombreuses recherches font remonter la plupart des difficultés rencontrées en milieu algébrique par les élèves du secondaire précisément à cette séparation entre arithmétique et algèbre, et en particulier « *à la faible attention portée aux aspects structurels et relationnels de l'arithmétique* » qui constituent la base de l'algèbre élémentaire (sans avoir conscience des procédures arithmétiques et de la façon dont elles sont nées, les élèves seront privés d'une base conceptuelle sur laquelle construire leurs connaissances algébriques).

En réponse à cette situation, depuis le milieu des années quatre-vingt, se développe à une échelle internationale une ligne de recherche, connue sous le nom de *Early Algebra* qui part de l'hypothèse que les obstacles que les élèves rencontrent dans l'étude de l'algèbre peuvent être évités en proposant, depuis l'école primaire, un développement simultané de la pensée arithmétique et algébrique. Il s'agit alors de regarder l'arithmétique avec une perspective algébrique, en essayant de guider les enfants à observer les relations entre les nombres à la recherche d'une généralisation, dans les situations les plus diverses : dans la résolution de problèmes, dans des

[1] Coordinatrice internationale de l'ARMT et présidente de l'ARMT Italia

[2] Coordonnatrice de la section ARMT de Sienne et du groupe d'algèbre

[3] Italie

activités qui impliquent des répétitions d'une certaine séquence à l'intérieur d'un ensemble de données, dans la perception de régularités dans l'espace ou dans le temps, dans l'étude du monde réel et des phénomènes physiques, où différentes quantités sont liées entre elles. Dans le cadre théorique de *Early Algebra* on mentionnera, en particulier, le projet *ArAl* (www.progettoaral.it) dédié au renouvellement de l'enseignement dans le domaine arithmético-algébrique à l'école obligatoire (Malara, Navarra, 2003), (Navarra, 2008).

Le contenu de cet article est inspiré du *Laboratoire d'Algèbre*, qui a réuni 38 enseignants, dont 5 du primaire, 25 du secondaire du premier degré (Collège) et 8 du secondaire du second degré (Lycée), organisé par les auteures à l'occasion du premier cours de formation de la section de Sienne de l'ARMT « *Un pont entre théorie et pratique : quelles mathématiques en classe aujourd'hui ? »* Siena 22 - 24 novembre 2019[4].

Dans l'activité que nous avons conduite avec les enseignants, nous avons choisi de travailler *sur Concours de pêche*[5], un problème de la deuxième épreuve du 24^{e} RMT, dans le domaine algébrique pour les catégories auxquelles il s'adresse (de 5 à 8, mais pourrait également être utilisé dans les catégories supérieures, par exemple dans les instituts professionnels) et pour la tâche mathématique qui le caractérise («Trouver trois nombres entiers, sachant que le deuxième nombre vaut 7 de plus que le premier et que le troisième est à la fois le double du second et le triple du premier ») peut être considéré comme un exemple de problème sur lequel faire travailler les élèves dans la perspective du passage de l'arithmétique à l'algèbre[6]. On peut dire, en fait, qu'il s'agit d'un problème nécessitant la perception de relations entre des quantités inconnues qui doivent être comprises et correctement gérées (ce qui permet de faire travailler les élèves dans la perspective du passage de l'arithmétique à l'algèbre).

Le premier chapitre de l'article présente « le point de vue » des enseignants participant au Laboratoire qui ont effectué une *analyse a priori* du problème sur la base de quelques questions que nous avions préparées ; le deuxième chapitre, plus consistant, est dédié au « point de vue » des élèves qui ont résolu le problème pendant l'épreuve, reposant sur l'analyse d'environ 600 copies de la section de Sienne, ainsi que sur nos réflexions à propos du niveau de développement de la pensée algébrique révélé par les différentes typologies de copies et par nos considérations didactiques sur l'utilisation du problème en classe ; le troisième chapitre est consacré aux conclusions.

En Annexe, pour souligner l'importance que doit avoir la phase d'appropriation du problème (« comprendre » avant de « résoudre »), nous reportons le « journal » de la première leçon donnée par M. F. Andriani dans un cours d'appui pour des élèves de catégorie 10 d'un institut professionnel. À cette occasion, une série de questions a été proposée aux élèves sur la manière dont ils comprennent et analysent l'énoncé du problème « Concours de pêche » avec une invitation à en discuter ensemble. Tous ont participé activement et se sont impliqués dans la discussion qui a suivi, où l'enseignante a agi en simple modératrice et observatrice. Cette expérience a ensuite été présentée, en valorisant ses aspects didactiques, lors de l'atelier avec les enseignants. Certains enseignants ont alors proposé une activité similaire dans leurs classes, obtenant une réponse très positive de la part des élèves, même de ceux qui montraient généralement des difficultés et un détachement par rapport aux mathématiques.

1. L'analyse a priori du problème faite par les enseignants

Comme première tâche de l'activité de laboratoire, nous avons demandé aux enseignants des différents ordres scolaires, répartis en groupes librement constitués, de procéder à une analyse a priori du problème dont seul l'énoncé avait été fourni, en suivant les six questions rapportées dans la fiche qui suit.
Le but de l'activité n'était pas seulement de présenter et de faire résoudre le problème par les enseignants, mais surtout de les inviter à réfléchir sur la manière dont les élèves, des classes dans lesquelles ils pensaient pouvoir proposer le problème, pourraient travailler, en essayant de se mettre à leur place. Nous sommes d'avis que c'est de toute manière une pratique que l'enseignant devrait adopter pour son choix d'un problème (ou d'un autre type d'activité) à proposer en classe, notamment pour entamer un chemin de construction de nouvelles connaissances ou pour tester le niveau atteint par les élèves dans un certain domaine.

---

[4] La section de Sienne de l'ARMT est active (aussi par des cours de formation pour enseignants) depuis les premières années de la constitution de l'ARMT. Le premier cours de formation de l'ARMT Sienne entre dans le cadre des statuts de la nouvelle association ARMT Italia née en 2019.

[5] Le problème a également été analysé dans le sous-groupe du Groupe d'Algèbre coordonné par Daniela Medici et Maria-Gabriella Rinaldi, lors de la rencontre internationale du Locle (2016) et les réflexions qui ont émergé ont été résumées dans le compte rendu associé, publié dans le rapport d'activité 2016-1017 de l'ARMT.

[6] Dans la banque de problèmes du RMT, « Le concours de pêche » figure dans la sous-famille MEQ / EQ1 (Définition et résolution d'une équation du premier degré), dans laquelle sont classés tous ces problèmes qui, traduits algébriquement, donnent lieu à une équation du premier degré à une inconnue. Les élèves, notamment ceux des premières catégories, qui ne maîtrisent pas encore cette notion devront recourir à d'autres types d'outils pour résoudre le problème.

Fiche pour l'analyse a priori

CONCOURS DE PÊCHE

Aldo, Carlo et Biagio participent à un concours de pêche. À la fin, ils constatent que :

- Biagio a pêché 7 truites de plus qu'Aldo,
- Carlo a pêché le double des truites pêchées par Biagio, c'est aussi le triple de celles pêchées par Aldo.

Combien chacun des trois amis a-t-il pêché de truites ? Expliquez votre raisonnement.

1) Comment résoudriez-vous ce problème ?

2) Quels concepts mathématiques sont impliqués ?

3) Aux élèves de quelles classes le proposeriez-vous ?

4) Comment pensez-vous que les élèves de ces classes peuvent le résoudre ?

5) Quelles difficultés et quels obstacles les élèves peuvent-ils rencontrer pour s'approprier le problème ou le résoudre ?

6) Quelles erreurs pourraient en découler ?

Voici la synthèse des réponses données par les sept groupes d'enseignants.

1) Comment résoudriez-vous ce problème ?

Tous les groupes ont résolu le problème soit avec un système linéaire de trois équations à trois inconnues (qui découle directement de la traduction en langage mathématique des conditions exprimées dans l'énoncé) soit avec une seule équation, en choisissant comme inconnue le nombre de truites capturées par Aldo.

2) Quels concepts mathématiques sont impliqués ?

Les avis concordent sur les concepts impliqués dans le problème qui sont : les opérations et propriétés dans N (distributivité en particulier), les relations numériques entre les quantités, l'égalité comme relation d'équivalence, les équations, les systèmes et les principes d'équivalence. Trois groupes ont cité la traduction du langage naturel en langage symbolique et un groupe a indiqué la représentation graphique.

3) Aux élèves de quelles classes le proposeriez-vous ?

Il y a eu plus de variabilité en ce qui concerne l'identification des catégories auxquelles proposer le problème : un groupe l'a proposé pour les catégories de 5 à 8, deux groupes de 6 à 8, un groupe pour la catégorie 7 (en fin d'année) et la catégorie 8, *« selon que vous ayez travaillé ou non avec des balances »*, un groupe pour les catégories de 6 à 10, un groupe de 8 à 10 (*et « en forçant un peu » également pour les catégories 6 et 7*), et enfin un groupe pour les catégories 9 et 10.

4) Comment pensez-vous que les élèves de ces classes peuvent le résoudre ?

Au travers des réponses apportées par les groupes, trois types de stratégies apparaissent : *par essais* (dans un cas, avec une suggestion de travailler sur le nombre de truites de Carlo, considérant qu'il doit être un multiple de 6) ; par *représentation graphique* (avec des segments ou d'autres symboles) ou au moyen d'une « balance » ; *par l'algèbre*, avec une équation ou un système d'équations. En ce qui concerne les catégories d'élèves, la prévision des enseignants était la suivante : en catégorie 5 avec représentation par une « balance »[7] (la seule stratégie mentionnée par le groupe qui a indiqué cette catégorie pour le problème) ; pour les catégories 6 et 7 les deux premières stratégies sont proposées, avec une légère prévalence de la représentation graphique sur les essais ; pour la catégorie 8 toutes les stratégies sont mentionnées avec la même fréquence. Enfin, pour les catégories 9 et 10 seule la voie algébrique est indiquée, avec la spécification de l'utilisation d'une équation en catégorie 9 et un système en catégorie 10.

[7] La méthode de la balance est un outil pédagogique souvent utilisé et également proposé dans divers manuels. L'idée de base est d'assimiler l'égalité des deux membres d'une équation à la condition d'équilibre d'une balance à deux plateaux. Les termes de l'équation sont les « poids » sur les deux plateaux de la balance qui, dans une balance équilibrée, sont égaux. Cette image est très utile du point de vue didactique tant pour la construction du concept d'équation que pour la découverte et la compréhension des principes d'équivalence.

5) Quelles difficultés / obstacles les élèves peuvent-ils rencontrer dans la résolution ?

Les difficultés suivantes ont été relevées : interprétation de l'énoncé, en particulier en ce qui concerne la deuxième phrase, qui exprime simultanément deux conditions relationnelles ; identification de la stratégie à utiliser ; explication du raisonnement (dans un cas). Le groupe qui avait indiqué l'utilisation de la « représentation avec les balances » comme seule stratégie de résolution a indiqué que la méconnaissance de cette stratégie était un obstacle. Dans cinq groupes sur sept, les difficultés supplémentaires indiquées ne concernent que la stratégie algébrique et plus précisément : le choix de l'inconnue et la mise en équation (en particulier si l'inconnue n'est pas le nombre de truites d'Aldo), la résolution de l'équation (ou du système) avec les principes d'équivalence.

6) Quelles erreurs pourraient en découler ?

Les erreurs prévues par les enseignants sont principalement dues à la difficulté d'interprétation des conditions indiquées dans l'énoncé. En particulier : l'expression « Biagio a capturé 7 truites de plus qu'Aldo » pourrait être symboliquement traduite par B = A – 7 ; et en plus, dans la phrase « Carlo a pêché le double des truites pêchées par Biagio, c'est aussi le triple de celles pêchées par Aldo. » l'expression « qui est aussi le triple ... » pourrait renvoyer à Biagio (et non à Carlo) et donner lieu à l'écriture B = 3A qui, combinée avec B = A + 7, conduirait à l'équation 3A = A + 7 avec la solution A = 7/2, qu'il faudrait d'ailleurs rejeter (puisqu'il s'agit d'un nombre de truites pêchées). La confusion du double avec le carré et du triple avec le cube a également été indiquée comme une erreur possible. Des erreurs ont aussi été prévues dans la pose de l'équation (ou du système) et dans la gestion du calcul algébrique.

Une première observation à propos des réponses des participants porte sur le choix des catégories auxquelles proposer le problème : elle s'inscrit parfaitement dans la vision traditionnelle de l'enseignement selon laquelle l'étude de l'algèbre commence dès la dernière année du premier degré du secondaire (Collège). (Trois groupes sur sept ont en effet considéré que le problème devait être proposé à partir de la catégorie 8). De plus, le fait qu'un seul groupe sur sept a signalé la catégorie 5, suggère que la plupart des enseignants participant au laboratoire étaient convaincus que, étant un problème algébrique, il ne pouvait pas être proposé à l'école primaire.
Autre observation : les difficultés reportées semblent concerner en particulier la stratégie algébrique déjà institutionnalisée, dans laquelle le choix de l'inconnue doit être le plus commode afin de faciliter la pose de l'équation, qui ne peut pas être résolue si l'on ne connaît pas les principes d'équivalence. En revanche, il n'y a aucune difficulté prévue pour l'application d'autres types de stratégies.

2. L'analyse a posteriori : les différentes typologies des copies et les différents niveaux atteints dans l'élaboration du discours algébrique

Ce chapitre contient des réflexions et des commentaires sur le travail des élèves, obtenus à partir de l'analyse a posteriori de 600 copies de la section de Sienne. Cette analyse nous a permis d'identifier les obstacles que les élèves ont réellement rencontrés, si et comment ils ont tenté de les surmonter, les connaissances qu'ils ont mobilisées. Elle a également été discutée avec les enseignants du Laboratoire.
A partir de l'examen des différentes procédures, de la manière de les représenter et d'expliquer le raisonnement, dans certains cas, nous avons émis des hypothèses sur le niveau atteint par les élèves concernant l'élaboration du discours algébrique. À cette fin, nous nous sommes référés à ce qui est rapporté dans (Arzarello, 2020), où l'auteur, reprenant la position de A. Sfard, définit l'algèbre élémentaire comme « une sous-catégorie du discours mathématique que les individus développent en réfléchissant sur les relations et les processus arithmétiques » (plus simplement, elle peut être considérée comme « un méta-discours sur l'arithmétique »). Le même article présente un modèle hiérarchique des discours algébriques basé sur la croissance de la complexité et sur le pouvoir généralisant de ses éléments.[8]
En particulier, dans l'analyse des copies, nous avons porté notre attention sur le *degré de réification* des propositions utilisées par les élèves, c'est-à-dire sur le déplacement progressif de l'attention accordée, du processus vers son résultat, de la description des calculs aux propriétés des objets et donc à la possibilité de les placer au

[8] En résumé, ce modèle propose une première distinction entre *l'algèbre informelle* (exprimée en langage naturel, articulé de diverses manières) et *l'algèbre formelle* (avec l'utilisation du langage symbolique plus ou moins entrelacé avec le langage naturel), chacun étant structuré en deux niveaux discursifs différents, selon que nous avons des valeurs constantes ou des valeurs variables (fonctionnelles). À leur tour, tant le *discours algébrique informel à valeurs constantes* que *le discours algébrique formel à valeurs constantes* sont tous deux structurés en trois sous-niveaux. Le niveau 1 est **procédural** : l'attention est portée sur les calculs numériques et leur description suit l'ordre d'exécution et s'exprime par des actions (additionner, multiplier, diviser, ...) et l'égalité est souvent utilisée ici comme si elle était la touche d'une calculatrice. Au niveau 2, dit **granulaire**, l'accent est toujours mis sur les calculs numériques, mais la description du processus n'est plus en parfaite adéquation avec la séquence des opérations effectuées : lorsque les calculs sont longs, certaines parties peuvent être remplacées par leurs « produits » (somme, produit, quotient, ...), considérés comme des objets (« grains ») plutôt que comme des processus. Le niveau 3 est celui de l'**objectivation** qui s'obtient en déplaçant l'attention du processus vers son « produit » (*réification*) et avec l'annulation de celui qui l'accomplit (*aliénation*). Ce n'est qu'à ce niveau que les expressions algébriques sont considérées comme des objets à part entière.

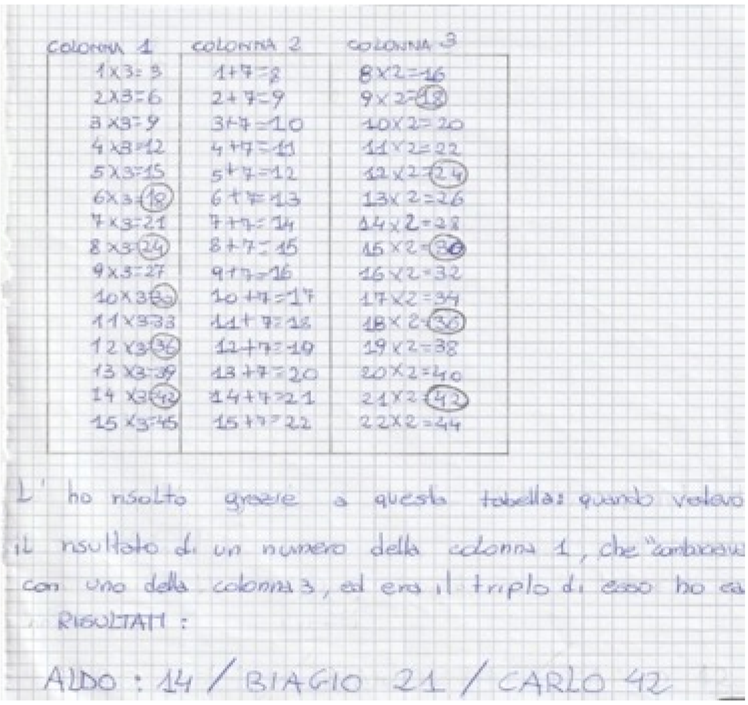
niveau 1 (procédural), ou au niveau 2 (procédural avec éléments d'objectivation), ou au niveau 3 (objectivation complète) du discours algébrique.

2.1. Procédure par essais : un tremplin pour la naissance de la pensée fonctionnelle

La stratégie la plus fréquemment appliquée dans toutes les catégories est celle par essais (51% en cat. 5, 30% en cat. 6, 43% en cat. 7, 28% en cat. 8).

La *figure* 1 en montre un exemple tiré d'une copie de catégorie 6, dans lequel apparaît un tableau à trois colonnes où sont reportés les essais effectués et les calculs relatifs et à partir duquel une appropriation complète de toutes les relations indiquées dans le texte du problème est évidente. Dans la première colonne on lit à chaque fois deux informations : (le nombre de truites supposé pour Aldo et son triple, qui est l'un des moyens d'exprimer le nombre de truites de Carlo ; dans la deuxième colonne, on lit le nombre de truites de Biagio, tandis que dans la troisième colonne figure le double de ce dernier nombre (qui est aussi l'autre manière d'exprimer la quantité de truites de Carlo).

Le tableau présente, étape par étape, tous les essais effectués et permet de garder sous contrôle les résultats trouvés.



COLONNA 1	COLONNA 2	COLONNA 3
1X3=3	1+7=8	8X2=16
2X3=6	2+7=9	9X2=18
3X3=9	3+7=10	10X2=20
4X3=12	4+7=11	11X2=22
5X3=15	5+7=12	12X2=24
6X3=18	6+7=13	13X2=26
7X3=21	7+7=14	14X2=28
8X3=24	8+7=15	15X2=30
9X3=27	9+7=16	16X2=32
10X3=30	10+7=17	17X2=34
11X3=33	11+7=18	18X2=36
12X3=36	12+7=19	19X2=38
13X3=39	13+7=20	20X2=40
14X3=42	14+7=21	21X2=42
15X3=45	15+7=22	22X2=44

L' ho risolto grazie a questa tabella: quando vedevo il risultato di un numero della colonna 1, che "combaciava" con uno della colonna 3, ed era il triplo di esso ho ca

RISULTATI :

ALDO : 14 / BIAGIO 21 / CARLO 42

L'explication décrit de manière générale, mais toujours au niveau procédural, comment les résultats obtenus ont été utilisés pour arriver à la solution.

Fig. 1

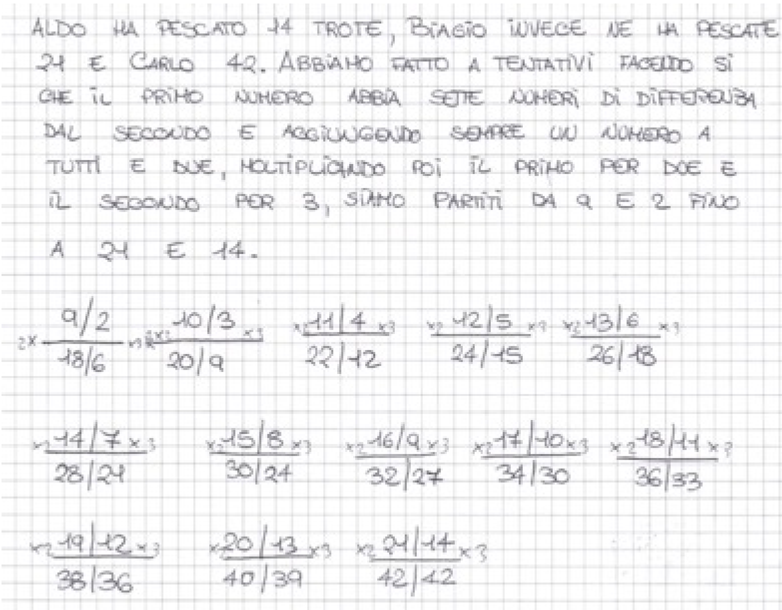
[Tableau]

(*Je l'ai résolu grâce à ce tableau : c'est quand je voyais le résultat d'un nombre dans la colonne 1, qui "correspondait" à l'un de la colonne 3, et c'était trois fois, que j'ai compris.*

Résultats: ALDO 14 / BIAGIO 21 / CARLO 42).

Un aspect intéressant à observer est que les élèves, libres de s'exprimer, sont capables de trouver des systèmes originaux pour représenter la procédure par essais, qui peut être longue et répétitive dans les « actions » à réaliser. Les deux copies suivantes de catégorie 7 (voir Fig. 2 et Fig. 3) soulignent clairement ce fait.

L'élaboration de la *figure* 2 est particulièrement intéressante pour deux aspects : le premier est le choix de la valeur inconnue à déterminer pour résoudre le problème, qui est le nombre de truites capturées par Biagio et non le nombre de truites capturées par Aldo, comme il semblerait plus naturel pour celui qui résout de manière « experte » ; le second est l'utilisation d'un schéma particulier, que l'on pourrait appeler « en croix » utilisé pour reporter, de temps en temps, les résultats numériques obtenus à partir des relations indiquées dans l'énoncé, jusqu'à l'obtention de la solution lorsque la même valeur apparaît dans le bas du diagramme. Dans ce cas, l'explication est basée sur le schéma croisé, tandis que dans les phrases utilisées apparaissent des actions qui décrivent la procédure, même si pour les nombres qui occupent la partie supérieure on dit que « leur différence doit toujours être 7 »).



ALDO HA PESCATO 14 TROTE, BIAGIO INVECE NE HA PESCATE 21 E CARLO 42. ABBIAMO FATTO A TENTATIVI FACENDO SÌ CHE IL PRIMO NUMERO ABBIA SETTE NUMERI DI DIFFERENZA DAL SECONDO E AGGIUNGENDO SEMPRE UN NUMERO A TUTTI E DUE, MOLTIPLICANDO POI IL PRIMO PER DUE E IL SECONDO PER 3, SIAMO PARTITI DA 9 E 2 FINO A 21 E 14.

2× 9/2 ×3 → 18/6; ×2 10/3 ×3 → 20/9; ×2 11/4 ×3 → 22/12; ×2 12/5 ×3 → 24/15; ×2 13/6 ×3 → 26/18

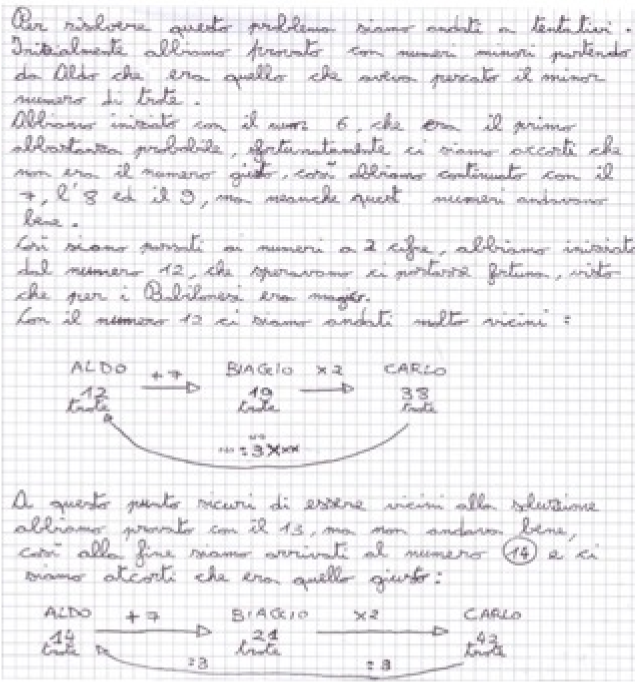
×2 14/7 ×3 → 28/21; ×2 15/8 ×3 → 30/24; ×2 16/9 ×3 → 32/27; ×2 17/10 ×3 → 34/30; ×2 18/11 ×3 → 36/33

×2 19/12 ×3 → 38/36; ×2 20/13 ×3 → 40/39; ×2 21/14 ×3 → 42/42

Fig. 2

(*Aldo a pêché 14 truites, Biagio en revanche en a pêché 21 et Carlo 42. Nous avons fait des essais en faisant en sorte que le premier nombre ait 7 nombres de différence par rapport au second et en ajoutant toujours un nombre aux deux, puis en multipliant le premier par deux et le second par 3, nous sommes partis de 9 et 2 jusqu'à 21 et 14)*

Dans la copie de la *figure* 3, il convient de noter la représentation claire et efficace utilisée pour la recherche du nombre de truites capturées par Aldo, consistant en un diagramme sagittal cyclique qui, pour chaque nombre supposé pour Aldo, permet d'établir si c'est le bon ou non (les sommets du diagramme sont marqués des noms des personnages de l'histoire, tandis que les flèches indiquent les opérateurs arithmétiques qui permettent de se déplacer le long du diagramme, en partant d'Aldo, en respectant les relations entre Aldo et Biagio et entre Biagio et Carlo et en revenant à Aldo appliquant la relation inverse entre Carlo et Aldo (« Aldo a un tiers des truites de Carlo »). Dans la copie, on trouve la narration des nombres testés, mais l'explication de la procédure est en fait illustrée par le diagramme qui est en soi auto-explicatif.



Per risolvere questo problema siamo andati a tentativi. Inizialmente abbiamo provato con numeri minori partendo da Aldo che era quello che aveva pescato il minor numero di trote.
Abbiamo iniziato con il num. 6, che era il primo abbastanza probabile, sfortunatamente ci siamo accorti che non era il numero giusto, così abbiamo continuato con il 7, l'8 ed il 9, ma neanche quest numeri andavano bene.
Così siamo passati ai numeri a 2 cifre, abbiamo iniziato dal numero 12, che speravamo ci portasse fortuna, visto che per i Babilonesi era magico.
Con il numero 12 ci siamo andati molto vicini:

A questo punto sicuri di essere vicini alla soluzione abbiamo provato con il 13, ma non andava bene, così alla fine siamo arrivati al numero 14 e ci siamo accorti che era quello giusto:

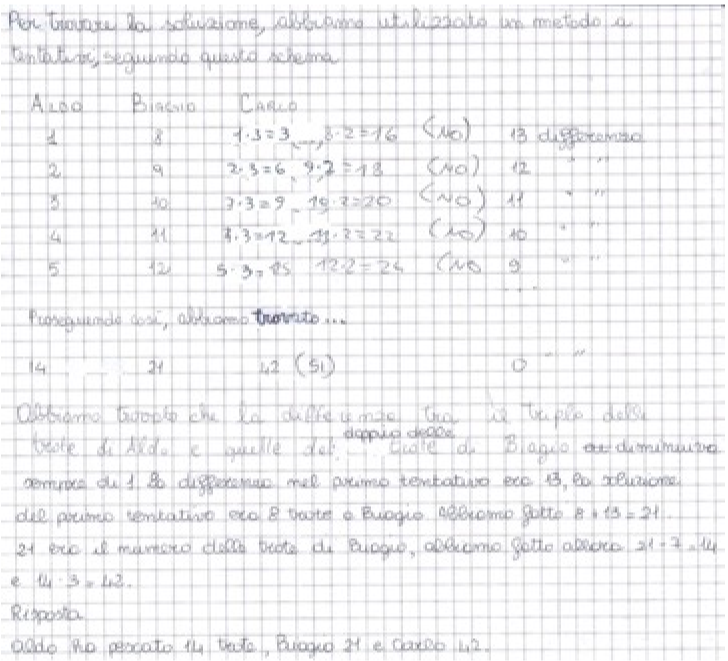
Fig. 3

(*Pour résoudre ce problème, nous avons fait des essais. Au départ, nous avons essayé avec des petits nombres en commençant par Aldo qui était celui qui avait pêché le moins de truites. Nous avons commencé avec le nombre 6, qui était le premier assez probable, malheureusement nous nous sommes rendu compte que ce n'était pas le bon nombre, nous avons donc continué avec le 7, le 8 et le 9, mais ces nombres n'étaient pas bons non plus. Nous sommes donc passés aux nombres à 2 chiffres, en commençant avec le nombre 12, dont nous espérions qu'il nous porterait chance, car pour les Babyloniens c'était magique. Avec le nombre 12, nous sommes arrivés très près : [1er diagramme].*

À ce point, sûrs que nous étions proches de la solution, nous avons essayé avec 13, mais cela ne s'est pas bien passé, donc à la fin nous sommes arrivés au nombre 14 et nous avons réalisé que c'était le bon: [2^{e} diagramme]

D'autres copies montrent que les élèves se sont parfaitement approprié la tâche mathématique, ont trouvé la bonne solution et ont expliqué leur procédure sous « forme rhétorique », c'est-à-dire complètement par des mots. Par exemple, dans une copie de catégorie 6 : « *Nous avons trouvé la solution en procédant par essais. Le mécanisme que nous avons compris était de trouver un nombre qui, en ajoutant 7, donnait un nombre qui multiplié par deux avait le même résultat que le nombre initial par trois* ». Du point de vue du discours algébrique, nous sommes au premier niveau, *procédural,* de l'algèbre informelle (c'est-à-dire exprimée en langage naturelle), car l'attention porte sur les calculs numériques et les opérations sont énumérées dans l'ordre dans lequel elles sont effectuées.

On constate que les tables construites en procédant de manière systématique permettent souvent la découverte de régularités, utiles pour réduire le nombre d'essais. Nous pensons que la recherche de régularités est toujours didactiquement intéressante et formatrice et donc à encourager dans tous les domaines. La *figure* 4 montre, à titre d'exemple, une copie de catégorie 7 dans laquelle les élèves observent sur la table qu'en augmentant le nombre de truites d'Aldo d'une unité, « *la différence entre trois fois la truite d'Aldo et le double de celle de Biagio diminue toujours de 1* » et ils exploitent ce fait pour atteindre la solution. Il est à noter que cette phrase écrite par les élèves est un exemple de « description objective », puisque l'on parle des propriétés des nombres, des objets auxquels on se réfère, et non des actions sur eux.


Per trovare la soluzione, abbiamo utilizzato un metodo a tentativi, seguendo questo schema

Aldo	Biagio	Carlo			
1	8	1·3=3 8·2=16	(NO)	13 differenza
2	9	2·3=6 9·2=18	(NO)	12	" "
3	10	3·3=9 10·2=20	(NO)	11	" "
4	11	4·3=12 11·2=22	(NO)	10	" "
5	12	5·3=15 12·2=24	(NO)	9	" "

Proseguendo così, abbiamo trovato...

14	21	42	(SI)	0

Abbiamo trovato che la differenza tra il triplo delle trote di Aldo e quelle del doppio delle trote di Biagio diminuiva sempre di 1. La differenza nel primo tentativo era 13, la soluzione del primo tentativo era 8 trote a Biagio. Abbiamo fatto 8+13=21. 21 era il numero delle trote di Biagio, abbiamo fatto allora 21-7=14 e 14·3=42.

Risposta

Aldo ha pescato 14 trote, Biagio 21 e Carlo 42.

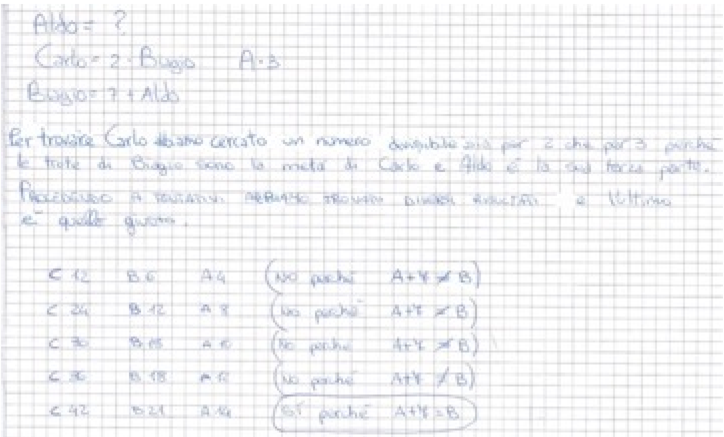
Fig. 4

(*Pour trouver la solution, nous avons utilisé une méthode par essais, en suivant ce schéma:*

[Tableau]

En procédant ainsi nous avons trouvé :
14 21 42 (SI)
Nous avons trouvé <u>que la différence entre le triple des truites d'Aldo et le double des truites de Biagio diminuait toujours de 1</u>. La différence lors du premier essai était de 13, la solution du premier essai était de 8 truites à Biagio. Nous avons fait 8 + 13 = 21.
21 était le nombre de truites de Biagio, donc nous avons fait 21 - 7 = 14 et 14· 3 = 42.
Réponse: Aldo a pêché 14 truites, Biagio 21 et Carlo 42)

Dans d'autres cas, la réduction du nombre d'essais est facilitée par le constat que le nombre de truites de Carlo, pris comme inconnue, est un multiple de 6 « *parce que le double du nombre de truites de Biagio est le triple du nombre de truites d'Aldo* » (qui indique une propriété de ces nombres) comme le montre la copie de catégorie 8 de la *figure* 5. Dans ce cas, le contrôle est effectué sur la vérification de la relation entre les nombres de truites d'Aldo et de Biagio, correctement exprimés dans le langage symbolique.


Aldo = ?
Carlo = 2·Biagio A·3
Biagio = 7 + Aldo

Per trovare Carlo abbiamo cercato un numero divisibile sia per 2 che per 3 perché le trote di Biagio sono la metà di Carlo e Aldo è la sua terza parte. Procedendo a tentativi abbiamo trovato diversi risultati e l'ultimo è quello giusto.

C 12 B 6 A 4 (NO perché A+7≠B)
C 24 B 12 A 8 (NO perché A+7≠B)
C 30 B 15 A 10 (NO perché A+7≠B)
C 36 B 18 A 12 (NO perché A+7≠B)
C 42 B 21 A 14 (SI perché A+7=B)

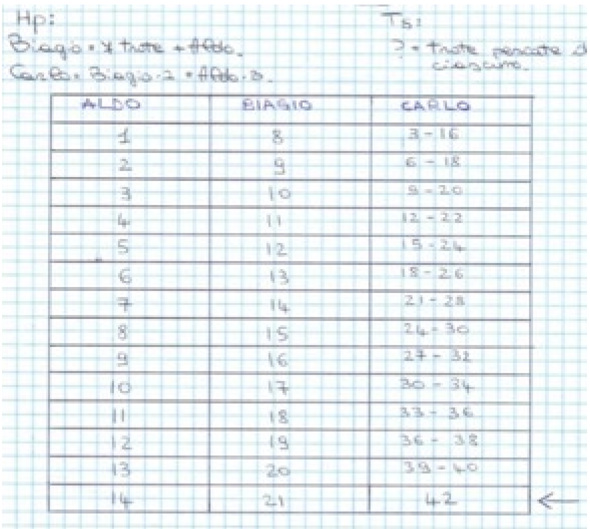
Fig. 5

Pour trouver Carlo, nous avons cherché un nombre divisible par 2 et 3 car les truites de Biagio sont la moitié de Carlo et Aldo est son tiers. En faisant des essais, nous avons trouvé plusieurs résultats et le dernier est le bon:

C 12	B 6	A 4	Non parce que A+7≠B
C 24	B 12	A 8	Non parce que A+7≠B
C 30	B 15	A 10	Non parce que A+7≠B
C 36	B 18	A 12	Non parce que A+7≠B
C 42	**B 21**	**A 14**	**Oui parce que A+7=B**

Il semble important de souligner que, si la procédure par essais reste essentiellement une *procédure de type arithmétique*, même dans la variété des formes sous lesquelles les élèves l'utilisent spontanément, du point de vue de l'évolution du discours algébrique, elle offre des idées didactiquement intéressantes à reprendre et à développer en classe : la procédure par essais, en particulier s'ils sont organisés, peut en fait être l'occasion d'initier les élèves *à l'utilisation des lettres pour exprimer les quantités et les relations entre elles sous une forme générale, à l'idée de fonction*[9] *et au concept d'équation.*

Par exemple, prenons en considération la copie de la figure 6, produite par des élèves de catégorie 7.



Hp:
Biagio = 7 trote + Aldo.
Carlo = Biagio · 2 = Aldo · 3.

Ts:
? = trote pescate di ciascuno.

ALDO	BIAGIO	CARLO
1	8	3 - 16
2	9	6 - 18
3	10	9 - 20
4	11	12 - 22
5	12	15 - 24
6	13	18 - 26
7	14	21 - 28
8	15	24 - 30
9	16	27 - 32
10	17	30 - 34
11	18	33 - 36
12	19	36 - 38
13	20	39 - 40
14	21	42

Fig. 6
[Tableau]
(<u>Explication des élèves</u> - Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé une table d'essais. Nous sommes partis d'Aldo qui est l'homme qui a pêché le moins de truites. Pour Aldo, nous avons donc utilisé une numérotation naturelle à partir de 1. Pour Biagio, nous avons toujours ajouté 7 truites à Aldo. Pour Carlo, il fallait cependant trouver un nombre de truites qui était le double de celui de Biagio et le triple de celui d'Aldo. Il a donc fallu trouver un nombre équivalent à deux fois le nombre de truites de Biagio et le triple de celui d'Aldo. Ce faisant, nous avons atteint le résultat suivant: Aldo = 14 truites, Biagio = 21 truites, Carlo = 42 truites

Le tableau montre dans la première colonne, à partir de 1, toutes les tentatives effectuées systématiquement pour le nombre de truites d'Aldo jusqu'à la solution (14), dans la deuxième colonne les valeurs correspondantes pour le nombre de truites de Biagio et dans le dans la troisième colonne, il y a, de temps en temps, deux valeurs pour le nombre de truites de Carlo qui sont respectivement le triple des truites d'Aldo et le double de celles de Biagio.
Du point de vue didactique, une situation de ce type peut être utilisée en classe pour commencer à construire des connaissances qui seront fondamentales pour l'approche des concepts de *fonction d'une variable*, d'*équation* et de *calcul littéral*.
Par exemple, une fois la valeur « 42 » trouvée, l'enseignant pourra inviter les élèves à continuer avec les valeurs numériques afin qu'ils vérifient qu'il n'y a pas d'autres valeurs acceptables, à part 42. Il devient ainsi tout à fait naturel de passer au cas général pour tout entier positif n de truites pour Aldo et découvrir la loi générale pour Biagio, $n + 7$, et les deux lois pour Carlo, $3 \times n$ et $2 \times (n + 7)$. Résoudre le problème signifie alors aller voir pour quelle valeur de n ces deux expressions donnent le même résultat. De cette manière, il est naturel d'égaliser les deux écritures et d'obtenir $3 \times n = 2 \times (n + 7)$, c'est-à-dire l'équation en n qui traduit algébriquement le problème. Cette procédure, en gardant constamment la référence au contexte du problème, permet aux élèves de garder le contrôle sur ce qui se fait de cas en cas et de lui donner un « sens ».
Les situations de ce type peuvent, d'une part, conduire à des développements ultérieurs également au niveau du *calcul littéral* (par exemple utilisation de parenthèses, suppression du signe de multiplication, pluralité d'écritures d'une même expression algébrique (par exemple, $2 (n + 7)$, $2n + 14$, $n + n +14$) ; d'autre part, elles permettent aux élèves de faire l'expérience de *lois de type fonctionnel* (la variation du nombre de truites de Biagio, ainsi que celle du nombre de truites de Carlo, dépendent de la variation du nombre de truites d'Aldo) avec l'idée qu'elles interviennent dans la construction d'une *équation*.[10]

2.2. Stratégie à partir d'une représentation graphique : aide ou difficulté supplémentaire ?

Cette stratégie se retrouve dans 17% des copies tant chez en catégories 6 que 7, alors qu'elle tombe à 10% en catégorie 8. La représentation graphique utilisée dans toutes les copies, à l'exception de très rares cas, est celle qui fait référence à la « *méthode graphique par segments* », née dans le champ géométrique et empruntée à celui-ci et appliquée à la représentation des relations entre grandeurs, même discrètes. Cette méthode est généralement présentée en catégorie 6 et est largement utilisée dans le premier cycle du secondaire. Les manuels de ce niveau

---

[9] Comme le rapporte Arzarello (article cité), « des recherches récentes prouvent que les élèves du primaire et du premier cycle du secondaire peuvent réussir à raisonner algébriquement sur les relations fonctionnelles et donc que les fonctions peuvent servir de meilleur concept organisationnel pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre. Il apparaît également que les difficultés rencontrées par les élèves plus âgés peuvent provenir d'un manque d'expérience de la pensée fonctionnelle au primaire ».

[10] Voir Résolution de problèmes pour une activation des connaissances (par L. Grugnetti et F. Jaquet, Lattes 2014) : dans le chapitre Algèbre, en partant du terrain de l'élève et de ses procédures naturelles utilisées pour résoudre certains problèmes du RMT, sont décrits *« les moments décisifs dans lesquels l'élève devra observer des régularités, faire des choix plus économiques et aborder progressivement des procédures algébriques »*.

scolaire ont généralement un chapitre dédié aux « *Problèmes qui peuvent être résolus par une méthode graphique* »[11] dans lesquels des exemples de problèmes résolus avec cette méthode sont présentés et d'autres, semblables (en fait des exercices), sont proposés invitant les élèves à les résoudre « *en utilisant des segments* ».
Malgré cela, l'examen des documents a montré que l'utilisation de la « méthode graphique » était souvent difficile et peu utile pour résoudre le problème, voire un obstacle. Certaines fois on perçoit clairement que les élèves l'utilisent en réponse à un « *contrat didactique* »[12] sans en avoir compris le fonctionnement et l'utilité. Sur les *figures* 7 et 8, deux exemples sont présentés : dans le premier, les élèves dessinent les segments pour représenter ce qu'ils pensent être les résultats (un segment correspond pratiquement à l'unité), ils écrivent qu'ils ont *résolu le problème avec segments*, mais il est évident que cette représentation n'a aucun lien avec les données relationnelles du problème ; dans le second, la représentation avec les segments est faite d'une manière complètement erronée, mais elle a néanmoins été utilisée pour effectuer les calculs dont les résultats contredisent visiblement la représentation elle-même.

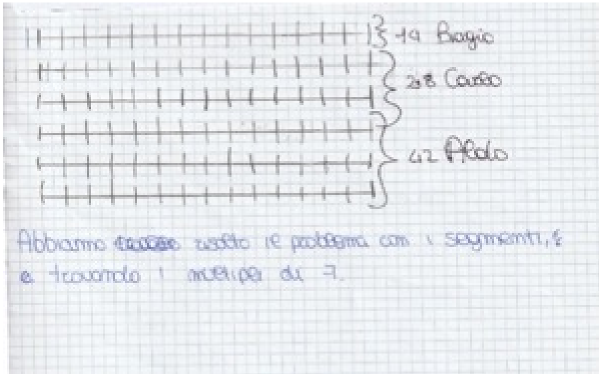


Fig. 7

(Nous avons résolu le problème avec les segments, en trouvant les multiples de 7)

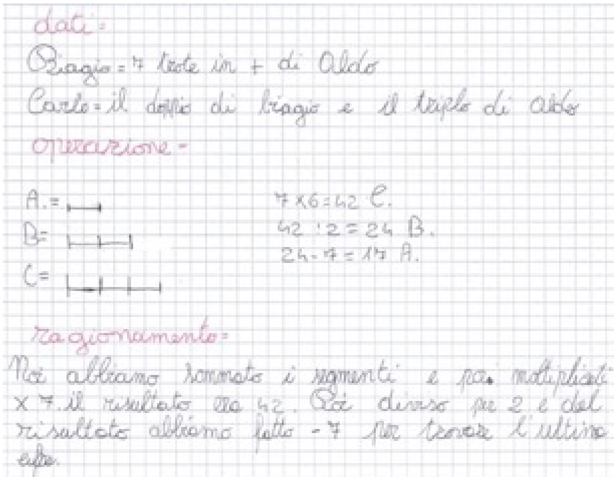


Fig.8

(<u>Raisonnement</u>: nous avons additionné les segments et puis multiplié par 7, le résultat était 42. Puis divisé par 2 et nous avons fait le résultat - 7 pour trouver le dernier chiffre.)

Une question qu'il faut se poser est la suivante : *pourquoi ce que l'on pense être une méthode utile pour représenter et résoudre le problème devient souvent un obstacle et une source d'erreurs ?* Des réflexions intéressantes à cet égard sont rapportées par exemple dans (Castellini A., 2016). L'auteure, évoquant son expérience d'enseignante du secondaire, souligne la forte abstraction que ce type de procédure implique pour les élèves et les difficultés de compréhension qui en découlent, que l'on peut résumer ainsi : ne pas pouvoir identifier dans le « segment » une quantité inconnue, surtout si elle est discrète, entraîne que cette quantité est souvent confondue avec la longueur en centimètres du segment ou en côtés de carrés du quadrillage du cahier. La difficulté de gérer ce type de représentation augmente lorsque des données relationnelles interviennent telles que « Biagio a pêché 7 truites de plus qu'Aldo », où il faudrait ajouter 7 au segment utilisé pour représenter le nombre inconnu de truites d'Aldo ; la manière de le représenter cet ajout n'étant pas claire (par un autre segment ? de quelle longueur ?). De plus, souvent la représentation par segments n'est pas associée à une écriture qui en garde une trace, avec des abréviations et des symboles pour les nombres et les opérations, de ce qui est exprimé en langage naturel, avec pour effet que tout ce qui est représenté apparaît artificiel et sans rapport avec l'énoncé du problème. Ces difficultés, comme le montre l'article de Castellini peuvent être surmontées à partir d'un discussion partagée en classe avec les élèves, sur les énoncés des problèmes, sans se soucier de leur résolution, mais en essayant de reconnaître les données relationnelles, en cherchant à les décrire de manière plus « synthétique », c'est-à-dire aussi à l'aide de symboles

---

[11] Il s'agit de problèmes résolubles, en mode « expert », par des équations ou des systèmes d'équations

[12] *L'ensemble des comportements (spécifiques) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître* (Voir. Brousseau G.-1980- Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire – Revue de laryngologie, otologie, rhinologie, vol. 101, 3-4, 107-131, p. 127.).

proposés par les élèves eux-mêmes, pour arriver à des représentations qui rendent les relations plus visibles et compréhensibles, aussi lorsqu'il s'agit de quantités discrètes, et surtout, qui ont du « sens » pour les élèves.

Cependant, nous avons trouvé des copies, telles que celles des *figures* 9 et 10 (la première de catégorie 5 et la seconde du catégorie 8), dans lesquelles une application correcte de la représentation graphique « par segments » pour exprimer des données relationnelles s'est révélée une réelle aide pour résoudre le problème.

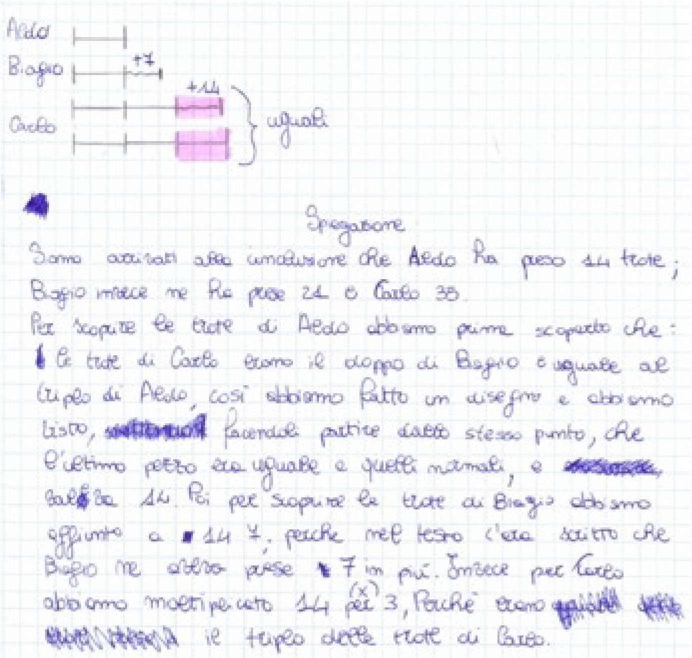


Fig. 9

[Schéma]

(*Explication - Nous sommes arrivés à la conclusion qu'Aldo avait pris 14 truites, Biagio en avait pris 21 et Carlo 42.*
Pour découvrir les truites d'Aldo, nous avons d'abord découvert que : les truites de Carlo étaient le double de celles de Biagio et égales au triple d'Aldo, nous avons donc fait un dessin et avons vu, à partir du même point, que le dernier morceau était égal au normal, et que ça valait 14. Puis pour découvrir les truites de Biagio, nous en avons ajouté 7 à 14, car dans le texte il était écrit que Biagio en avait pris 7 de plus. Au lieu de cela pour Carlo, nous avons multiplié 14 par 3 car il s'agissait du triple des truites d'Aldo)

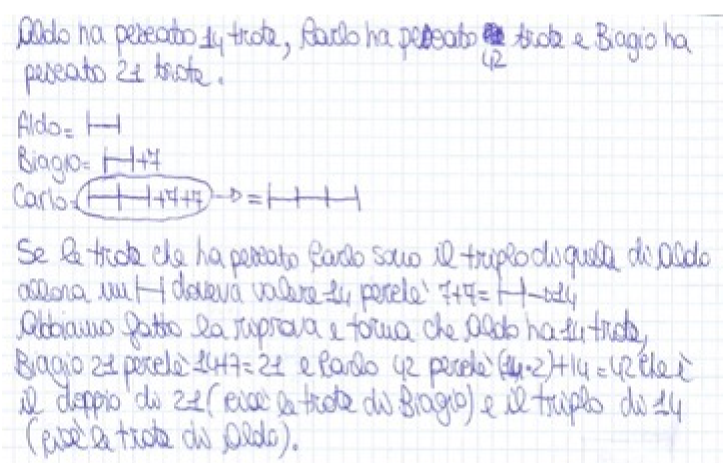


Fig. 10

(*Aldo a pêché 14 truites, Carlo a pêché 42 truites et Biagio a pêché 21 truites.*

[Schéma]

Si les truites pêchées par Carlo sont le triple de celles d'Aldo alors un « segment » devait valoir 14 parce que 7+7 = « |—| » = 14. Nous avons refait l'essai et vérifié que Aldo a 14 truites, Biagio 21 parce que 14+7 = 21 et Carlo 42 parce que (14·2) + 14 = 42 qui est le double de 21 (les truites de Biagio) et le triple de 14, (les truites d'Aldo)

Les deux copies des *figures* 11 et 12, la première de catégorie 6 et la deuxième de catégorie 7, sont semblables aux précédentes, même si, à la place des segments, on utilise des « points » : les élèves montrent qu'ils se sont parfaitement approprié le problème, percevant clairement les relations entre les quantités impliquées et sachant comment les exprimer correctement selon différents registres de représentation, en particulier symbolique et graphique, en passant de l'un à l'autre.

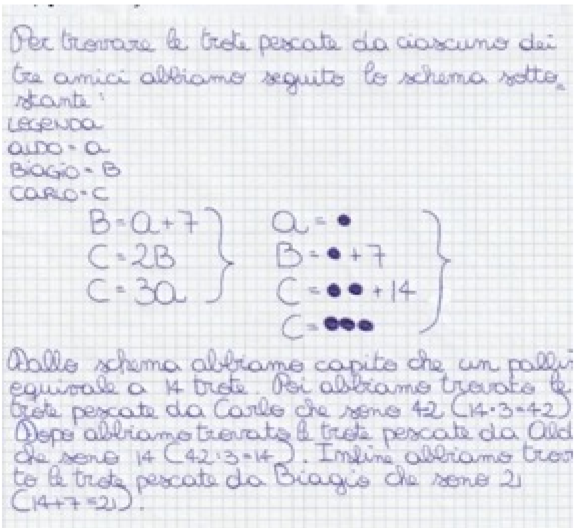


Fig. 11

Pour trouver les truites pêchées par chacun des trois amis nous avons suivi ce schéma :

[Schéma]

Du schéma nous avons compris qu'un point équivaut à 14 truites. Puis nous avons trouvé les truites pêchées par Carlo qui sont 42 (14·3 = 42). Ensuite nous avons trouvé les truites pêchées par Biagio qui sont 21 (14+7=21)

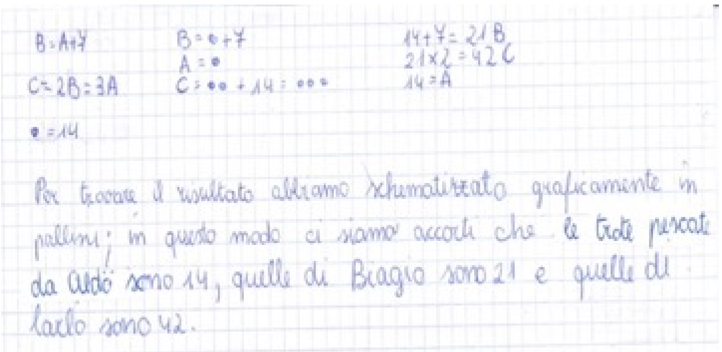


Fig. 12

[Schéma]

Pour trouver le résultat nous avons schématisé graphiquement par des point ; de cette manière nous nous sommes rendu compte que les truites pêchées par Aldo sont 14, celles de Biagio sont 21 et celles de Carlo sont 42.

En particulier, dans la copie de catégorie 6, l'écriture en langage formel des données est frappante et dans celle de catégorie 7, l'écriture spontanée de l'équation l'est aussi, même si elle n'est pas encore formalisée.

2.3. De l'algèbre informelle à l'algèbre formelle : les différents registres, souvent co-existants, de représentation utilisés par les élèves pour aboutir à l'équation

En termes algébriques, le problème « Concours de pêche » revient à poser et résoudre l'équation $3x = 2x + 14$, où x est le nombre de truites pêchées par Aldo. La stratégie algébrique fait son apparition dans certaines copies de catégorie 5, dans 5% de cat. 6, dans 9% de cat. 7 et dans 22% de cat. 8 (les copies avec réponses erronées représentent 1/3 du total en catégories 5 et 6, alors qu'elles sont 1/5 du total en catégorie 8).
Les copies que nous avons sélectionnées sont des exemples de différents niveaux de maturation du discours algébrique chez les élèves.

Dans toutes les catégories, y compris la catégorie 5, on trouve des copies dans lesquelles on peut reconnaître, en fait, une référence à une équation pour résoudre le problème, mais le discours utilisé pour illustrer et expliquer la procédure est exprimé de façons diverses, sur un mode « *informel* », c'est-à-dire en langage naturel, auquel s'intègrent successivement des tableaux, des schémas, des représentations, des symboles spécifiques, jusqu'à un niveau « *formel* », avec l'utilisation d'un langage symbolique plus ou moins imbriqué avec le langage naturel[13].
Dans la *figure* 13, il y a un exemple de rapport dans lequel tout est exprimé sous forme rhétorique à partir de l'identification d'une « unité commune » (nombre de truites d'Aldo) qui joue le rôle de « valeur inconnue » à déterminer.

[13] « On peut affirmer que la distinction informel / formel correspond à la distinction algèbre rhétorique / algèbre symbolique, introduite par les historiens des mathématiques. En fait, trois phases peuvent être reconnues dans le développement historique de l'algèbre : (i) la phase rhétorique ou précoce, dans laquelle tout est entièrement écrit en mots (jusqu'à Diophante, environ 250 après JC); (ii) un stade syncopé ou intermédiaire, dans lequel certaines abréviations sont adoptées (Diophante, *Arithmétique*); (iii) une étape symbolique (à partir de Viète, 1540-1603) "[cf. aussi Arzarello, article cité].

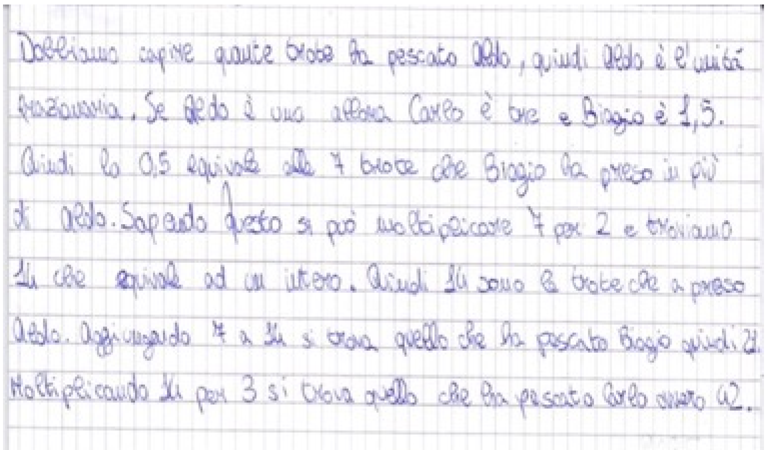
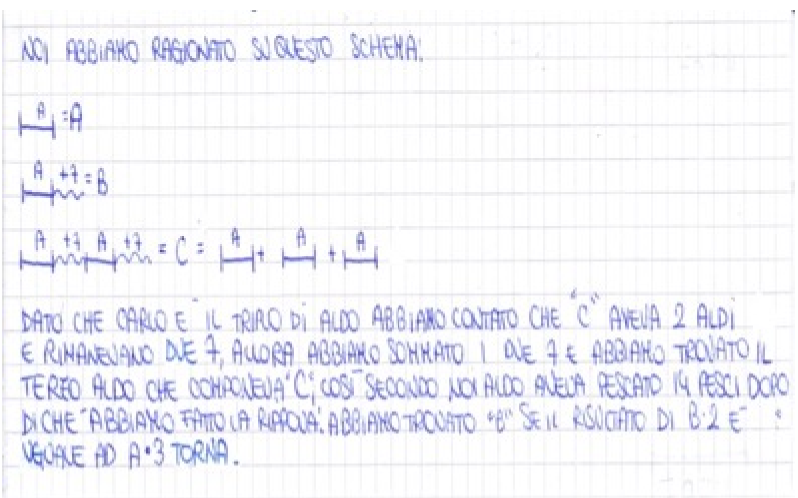

Dobbiamo capire quante trote ha pescato Aldo, quindi Aldo è l'unità frazionaria. Se Aldo è uno allora Carlo è tre e Biagio è 1,5. Quindi lo 0,5 equivale alle 7 trote che Biagio ha preso in più di Aldo. Sapendo questo si può moltiplicare 7 per 2 e troviamo 14 che equivale ad un intero. Quindi 14 sono le trote che a preso Aldo. Aggiungendo 7 a 14 si trova quello che ha pescato Biagio quindi 21. Moltiplicando 14 per 3 si trova quello che ha pescato Carlo ovvero 42.

Fig. 13

(Nous devons comprendre combien de truites Aldo a pêché, donc Aldo est l'unité fractionnaire. Si Aldo est un, alors Carlo est trois et Biagio est 1,5. Donc 0,5 équivaut à 7 truites que Biagio a pêchées en plus d'Aldo. Sachant cela, nous pouvons multiplier 7 par 2 et nous trouvons 14 qui équivaut à un entier. Donc 14 sont les truites qu'Aldo a pêchées. En ajoutant 7 à 14 nous trouvons ce que Biagio a pêché, donc 21. En multipliant 14 par 3 nous trouvons ce que Carlo a pêché, donc 42.)

La manière dont les dessins sont présentés sur la *figure* 14, la *figure* 15, la *figure* 16, par contre, peut conduire à penser davantage à une forme syncopée, qui dans deux cas utilise également des représentations graphiques, mais qui n'a pas encore atteint un stade purement symbolique.

Dans la *figure* 14, une représentation graphique correcte apparaît (en fait une « équation »), et l'explication du raisonnement utilise une <u>forme mixte</u> dans laquelle les données inconnues, le nombre de truites de chaque personnage, sont identifiées avec le nom de la personne citée, sur lesquels s'effectue le « travail » mathématique. L'ensemble de la procédure de résolution est décrit à travers les actions qui ont été progressivement réalisées sur A et sur 7.


NOI ABBIAMO RAGIONATO SU QUESTO SCHEMA:

A = A

A +7 = B

A +7 A +7 = C = A + A + A

DATO CHE CARLO È IL TRIPLO DI ALDO ABBIAMO CONTATO CHE "C" AVEVA 2 ALDI E RIMANEVANO DUE 7, ALLORA ABBIAMO SOMMATO I DUE 7 E ABBIAMO TROVATO IL TERZO ALDO CHE COMPONEVA "C", COSÌ SECONDO NOI ALDO AVEVA PESCATO 14 PESCI DOPO DI CHE ABBIAMO FATTO LA RIPROVA: ABBIAMO TROVATO "B" SE IL RISULTATO DI B·2 È UGUALE AD A·3 TORNA.

Fig. 14

(Nous avons raisonné sur ce schéma
[schéma]
Puisque Carlo est le triple d'Aldo, nous avons compté que « C » valait deux Aldo et qu'il restait 7, nous avons donc ajouté les deux 7 et avons trouvé le tiers d'Aldo qui constituait « C » ; nous pensons donc qu'Aldo avait pêché 14 poissons, alors nous avons essayé à nouveau : nous avons trouvé « B ». Si le résultat de B·2 est égal à A·3 ç'est bon.)

Dans la *figure* 15, l'écriture n'est certes pas rigoureuse, mais « fait sens » pour les élèves, et apparaît plus proche d'une formalisation que dans le cas précédent. Il faut noter qu'ici aussi l'inconnue est indiqué par le nom du personnage suivi du point d'interrogation: « *Aldo = ?* », et que ce nom est utilisé à toutes fins utiles comme s'il s'agissait d'un nombre. Les élèves savent également gérer la résolution de l ' « équation » obtenue et trouver la bonne solution (à noter que, dans l'avant-dernier passage, ils écrivent « *- 2 Aldo* » uniquement à droite dans l'égalité, mais ils entendent qu' « *il faut enlever de chaque membre le double des truites d'Aldo* », comme indiqué à l'étape suivante).

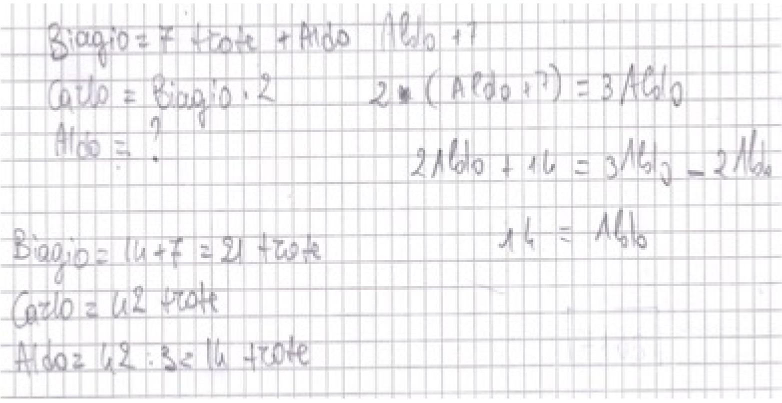

Biagio = 7 trote + Aldo   Aldo + 7
Carlo = Biagio · 2   2 * (Aldo + 7) = 3 Aldo
Aldo = ?
2 Aldo + 14 = 3 Aldo − 2 Aldo
14 = Aldo
Biagio = 14 + 7 = 21 trote
Carlo = 42 trote
Aldo = 42 : 3 = 14 trote

Fig. 15

Biagio = 7 truites + Aldo
Carlo = Biagio·2
Aldo = ?

Aldo + 7
2·(Aldo + 7) = 3 Aldo
2 Aldo + 14 = 3Aldo – 2 Aldo
14 = Aldo

La copie de la *figure* 16, de catégorie 5, est très intéressante. Cela semble être un bon exemple de la façon dont la transition spontanée, et donc inconsciente, vers une équation peut se produire tôt, tout comme l'évolution d'un discours méta-arithmétique. En fait, la copie montre que les élèves ont non seulement bien travaillé au niveau arithmétique, comprenant clairement les relations numériques impliquées, « double de », «triple de », « 7 de plus que », mais qu'ils savent aussi les gérer en opérant sur un quantité inconnue, celle indiquée par A, qui représente la quantité inconnue de truite d'Aldo (en fait ils ont écrit A = ?). La solution est trouvée par essais et erreurs sur la valeur attribuée à A.

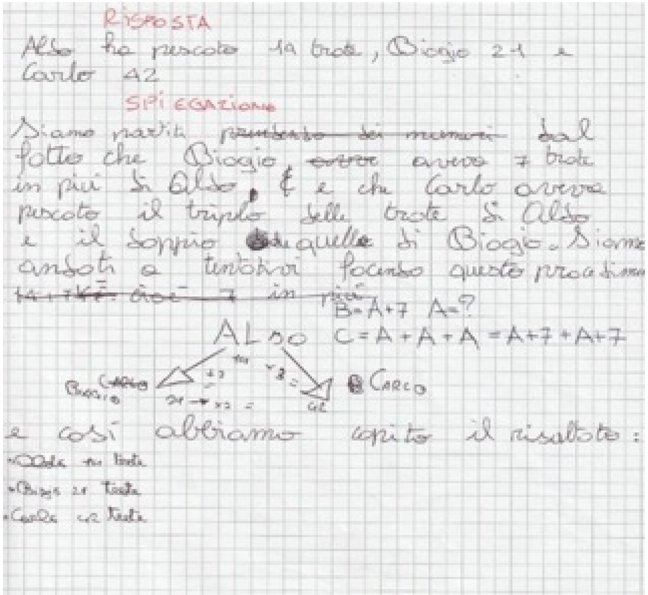

RISPOSTA
Aldo ha pescato 14 trote, Biagio 21 e Carlo 42
SPIEGAZIONE
Siamo partiti ~~partendo dai numeri~~ dal fatto che Biagio ~~aveva~~ aveva 7 trote in più di Aldo, e che Carlo aveva pescato il triplo delle trote di Aldo e il doppio di quelle di Biagio. Siamo andati a tentativi facendo questo procedimento ~~14+7 cioè 7 in più~~
B=A+7 A=?
ALDO C=A+A+A=A+7+A+7
e così abbiamo capito il risultato:
-Aldo 14 trote
-Biagio 21 trote
-Carlo 42 trote

Fig. 16
<u>(Explication</u> - *Nous sommes partis du fait que Biagio avait 7 truites de plus qu'Aldo et que Carlo avait pêché le triple des truites d'Aldo et le double de celles de Biagio. Nous y sommes allés par essais en suivant cette procédure :*

B = A + 7   A = ?
C = A + A + A = A + 7 + A + 7

[diagramme sagittal]

Et ainsi nous avons compris le résultat : Aldo 14 truites, Biagio 21 truites, Carlo 42 truites).

L'évolution vers le langage symbolique se poursuit. Sur la *figure* 17, les élèves définissent l'équation correctement en utilisant le langage symbolique, mais ils ne sont pas encore experts en calcul algébrique et en utilisation des principes d'équivalence, ils mettent en place l'équation et la résolvent par essais et erreurs.

Aldo = x = 14
Biagio = $x+7$ = 21
Carlo = $(x+7) \cdot 2 = x \cdot 3 = 42$

Spiegazione

Abbiamo trovato il numero delle trote di Aldo provando nell' equazione $((x+7) \cdot 2 = x \cdot 3)$ a sostituire la x con tutti i numeri fino ad arrivare al risultato corretto

Es: $(8+7) \cdot 2 = 30$
$8 \cdot 3 = 24$ } sbagliato

Es$_2$: $(14+7) \cdot 2 = 42$
$14 \cdot 3 = 42$ } giusto

Dopo questi ragionamenti abbiamo capito che Aldo ha pescato 14 trote, Biagio 21 ovvero le trote di Aldo più 7 e Carlo ha pescato 42 trote ovvero il doppio di quelle di Biagio e il triplo di quelle di Aldo.

Fig. 17
(Aldo = x = 14
Biagio = x+7 = 21
Carlo = (x+7)·2 = x·3 = 42

(Explication- Nous avons trouvé le nombre de truites d'Aldo en essayant dans l'équation ((x+7) · 2 = x · 3) de substituer le x avec tous les nombres jusqu'au résultat correct.

Ex: (8+7)·2 = 30   8·3 = 24
faux
Ex$_2$: (14+7)·2 = 42   14·3= 42
juste

Après ces raisonnements, nous avons compris que Aldo a pêché 14 truites, Biagio 21, les truites d'Aldo plus 7, et Carlo a pêché 42 truites le double de celles de Biagio et le triple de celles d'Aldo)

Enfin dans les deux dernières copies, *figure* 18 (catégorie 7) et *figure* 19 (catégorie 8) les élèves arrivent à une formalisation algébrique du discours et montrent une maîtrise du calcul algébrique pour résoudre l'équation qui traduit mathématiquement le problème.

$b = a+7 \;\|\cdot 2 \quad 2b = 2a + 14 \quad 14+7=21 \quad b = 21$
$c = 2b$ o $3a \quad c = 2a + 14 \quad 3a = 2a + 14 \;\|-2a \quad a = 14$
$a: c:3$ o $14 \quad 3 \cdot 14 = 42 \quad c = 42$
Aldo = 14 trote
Carlo = 42 trote
Biagio = 21 trote

Fig. 18

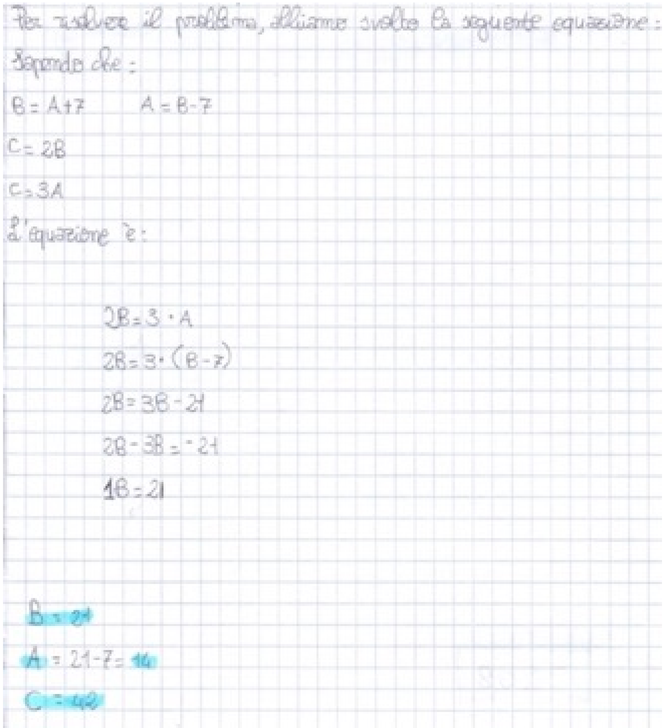

Per risolvere il problema, abbiamo svolto la seguente equazione:
Sapendo che:
B=A+7 A=B-7
C=2B
C=3A
L'equazione è:
2B=3·A
2B=3·(B-7)
2B=3B-21
2B-3B=-21
1B=21
B=21
A=21-7=14
C=42

Fig.19
(Pour résoudre le problème nous avons posé l'équation suivante :
Sachant que :
B = A + 7   A = B − 7   C = 2B   C = 3A
L'équation est :   2B = 3·A
2B = 3· (B − 7)
2B = 3B - 21
2B − 3B = − 21
1B = 21
B = 21   A = 21 7= 14   C = 42)

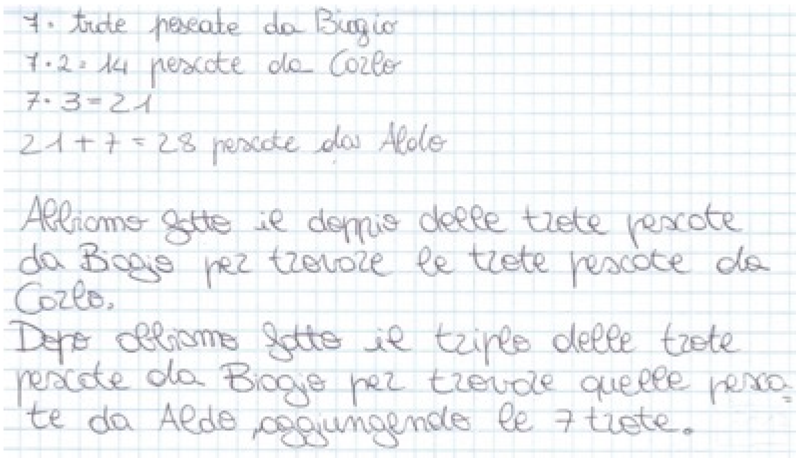
À noter le choix non « canonique » pour l'inconnue, c'est-à-dire le *nombre de truites de Biagio, indiqué par* B.

Dans les deux copies précédentes, on peut dire que le *niveau d'objectivation* est atteint : ici les expressions algébriques utilisées sont considérées comme des objets à part entière (*leur état discursif n'est pas différent de celui d'un nombre*). On s'aperçoit que les élèves maîtrisent l'égalité en tant que relation d'équivalence et comprennent la logique consistant à effectuer la même opération dans les deux membres de l'équation comme moyen de la résoudre.

2.4. Obstacles, difficultés et erreurs

Les pourcentages des copies auxquelles ont été attribué « 0 point » sont les suivants: 37% en catégories 5 et 6, 18% en catégorie 7 et 22% en catégorie 8.
Une difficulté incontestable pour les élèves était celle liée à la structure mathématique du problème, qui ne peut pas être classé comme un problème de « type arithmétique » bien que certains élèves peuvent s'engager dans une procédure de type arithmétique (par essais ...).
 : le seul nombre dans le texte représente un <u>opérateur</u> « + 7 » et <u>non une quantité</u>, et de plus la quantité sur laquelle il opère est <u>inconnue</u>, et on parle du double et du triple, mais toujours de quantités inconnues. Les informations présentes dans l'énoncé sont donc toutes de type *relationnel*.
Alors que dans les problèmes d'arithmétique, le schéma de travail de la résolution consiste à « *partir du connu pour atteindre l'inconnu* » selon des opérations appropriées sur les valeurs données, dans les problèmes d'algèbre on procède en sens inverse « *de l'inconnu au connu* ». Pour l'expert, il faut partir d'une valeur inconnue (généralement indiquée par un symbole) et exprimer à travers elle les autres grandeurs impliquées en utilisant les relations fournies dans l'énoncé, jusqu'à ce que toutes soient reliées, généralement sous la forme d'une équation ; puis en opérant par calcul algébrique sur l'inconnue, on en trouve la valeur. Pour tous ceux qui ne sont pas familiers avec les équations, il est nécessaire de découvrir des procédures alternatives. Ne pas les trouver incite les élèves à rendre une copie blanche, ou, souvent à utiliser le seul nombre figurant dans l'énoncé, « 7 », comme s'il s'agissait de celui des truites d'Aldo, puis de le doubler et tripler pour trouver les quantités respectives des truites de Biagio et Carlo.

En ce qui concerne l'énoncé, les élèves ont montré en général une bonne compréhension des conditions exprimées par les relations « c'est le double de », « c'est le triple de » ; selon certaines copies de catégorie 5 le fait que les deux conditions étaient exprimées dans la même phrase « *Carlo a pêché le double des truites pêchées par Biagio, c'est aussi le triple de celles pêchées par Aldo* » a créé quelques difficultés (la conséquence était de ne prendre en compte qu'une seule des deux, souvent la première !). Les élèves, en revanche, ont eu plus de mal à interpréter l'expression « Biagio a pêché 7 truites de plus qu'Aldo », difficulté que l'on retrouve dans certains cas également en catégorie 8, avec une influence négative inévitable sur la résolution du problème (voir *figure* 20).



7 · trote pescate da Biagio
7·2 = 14 pescate da Carlo
7·3 = 21
21 + 7 = 28 pescate da Aldo

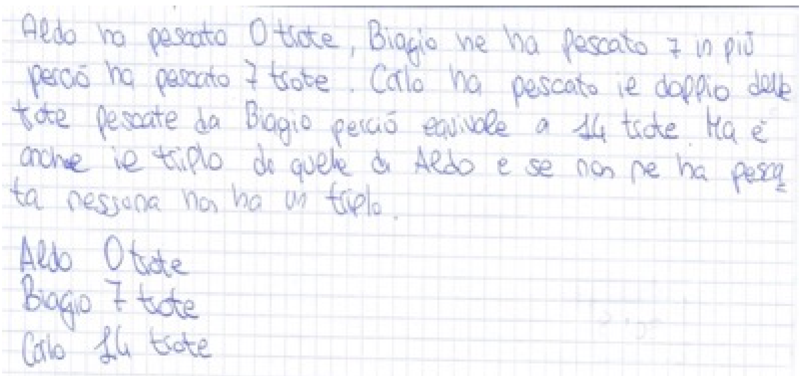
Abbiamo fatto il doppio delle trote pescate da Biagio per trovare le trote pescate da Carlo.
Dopo abbiamo fatto il triplo delle trote pescate da Biagio per trovare quelle pescate da Aldo, aggiungendo le 7 trote.

Fig. 20

(7 = truites pêchées par Biagio
7·2 = 14 truites pêchées par Carlo
7·3 = 21
21+7 = 28 pêchées par Aldo

(*Nous avons fait le double des truites pêchées par Biagio pour trouver les truites pêchées par Carlo.*
Après nous avons fait le triple des truites pêchées par Biagio pour trouver celles pêchées par Aldo, en ajoutant les 7 truites

Dans certains cas, la méconnaissance qui subsiste encore sur le *rôle de 0* (une question donc non résolue dans le domaine arithmétique) crée une interférence.



Aldo ha pescato 0 trote, Biagio ne ha pescato 7 in più perciò ha pescato 7 trote. Carlo ha pescato il doppio delle trote pescate da Biagio perciò equivale a 14 trote. Ma è anche il triplo di quele di Aldo e se non ne ha pescata nessuna non ha un triplo.
Aldo 0 trote
Biagio 7 trote
Carlo 14 trote

Fig. 21

(Aldo a pêché 0 truite, Biagio en a pêché 7 de plus parce qu'il a pêché 7 truites. Carlo a pêché le double des truites de Biagio ce qui équivaut à 14 truites. Mais c'est aussi le triple de celles d'Aldo et puisqu'il n'en a pêché aucune, il n'a pas de triple.
Aldo 0 truite
Biagio 7 truites
Carlo 14 truites)

Une autre observation concerne le fait que dans toutes les catégories, il existe de nombreuses copies dans lesquelles les essais sont conduits sur des multiples de 7, généralement sans donner aucune explication, comme le montre la *figure* 22, ou il est écrit « *parce que 7 est la seule donnée numérique présente* ». En procédant ainsi, la solution correcte s'obtient facilement car cette constatation est vraie (et est généralement valable quelle que soit la valeur *n* de la différence entre le nombre de truites de Biagio et d'Aldo[14]), mais il faut le prouver ! Nous pensons qu'il peut être didactiquement important de réfléchir à cet aspect en classe, en particulier avec les élèves de catégorie. 8.[15]

Cependant, la solution correcte n'est pas toujours trouvée. Par exemple, dans toutes les catégories, on trouve des copies dans lesquelles la situation problématique n'est pas comprise et la solution donnée est « Aldo, 7 truites, Biagio, 14 truites, Carlo 21 truites », c'est-à-dire que, selon une procédure arithmétique on multiplie à la fois par 2 (suggéré par « le double ») et par 3 (suggéré par « le triple ») le seul nombre présent dans le texte, étant 7.

---

[14] Si A, B, C sont respectivement les nombres de truites d'Aldo, Biagio et Carlo, des relations C = 2B = 3A et B = A + n, on obtient 2A + 2n = 3A, pui **A = 2n**, et par conséquent **B** = A + n = **3n** et **C** =3A = **6n**.

[15] En prenant en compte ce qui a été mis en évidence lors de l'analyse a posteriori du problème, le sous-groupe du Groupe Algèbre, coordonné par Daniela Medici et M. Gabriella Rinaldi, lors de la rencontre du Locle en 2016 a construit deux nouveaux problèmes de la « même famille », dont la solution ne peut pas être trouvée par hasard : *Les trois fourmis* (Cat, 5, 6, 7, 27.II.09) et Les *friandises de grand-mère Paulette* (Cat, 5, 6, 7. 27.F.09)

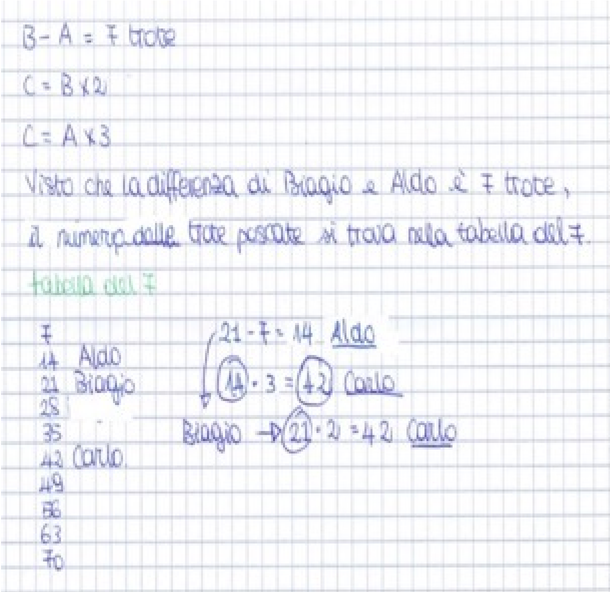


Fig. 22

B — A = 7 truites   C = B × 2   C = A × 3

Vu que la différence entre Biagio et Aldo est 7 truites, le nombre des truites pêchées se trouve dans le livret du 7.

Livret du 7
7
14 Aldo 21 — 7 = 14 Aldo
21 Biagio
28 14·3 = 42 Carlo
35
42 Carlo Biagio 21·2 = 42 Carlo
49
...
70

La procédure des élèves de procéder par essais sur des multiples de 7 (qui se retrouve également dans les copies d'autres sections), ne pouvait pas être prévue a priori. Cette situation pourrait être évitée en modifiant convenablement les « variables didactiques » du problème, par exemple en considérant que *Biagio a pêché 9 truites de plus qu'Aldo et que Carlo en a pêché soit le double de Biagio et le quintuple d'Aldo*. Dans ce cas, on trouverait A = 6, B = 15, C = 30.
Dans d'autres travaux, le nombre de truites de Carlo est déterminé en calculant le plus petit commun multiple de 7 ; 3 et 2 (peut-être parce que 7 apparaît dans le texte et que 3 et 2 sont dérivés des termes « double » et « triple » ...), et on obtient donc la valeur correcte 42 !

Dans ce cas la question est plus délicate, car la procédure est incorrecte [et un contre-exemple suffit, avec changement de données relationnelles pour le prouver : *si Biagio a pêché 5 truites de plus qu'Aldo et Carlo a pêché le quadruple des truites de Biagio et neuf fois le nombre des truites d'Aldo,* traduit en langage symbolique par B = A + 5, C = 4B = 9A, on obtiendrait A = 4, B = 9 et C = 36 qui est différente de la valeur 180 = ppcm (5, 4, 9)]. Il est didactiquement important de faire réfléchir les élèves sur le fait que la solution a été trouvée par « pure chance » et que ce n'est pas une procédure valable en général puisqu'il suffit de modifier les données pour constater que « ça ne marche plus ! ».

Enfin, sur la *figure* 23 et sur la *figure* 24, deux exemples de dessins de catégorie 8 (qu'on retrouve aussi en catégorie 7), dans lesquels on peut à nouveau reconnaître l'effet du contrat didactique : les élèves se sentent obligés d'utiliser l'outil « équations », mais il est évident que ce qui manque est le « sens » de ce qui est fait !

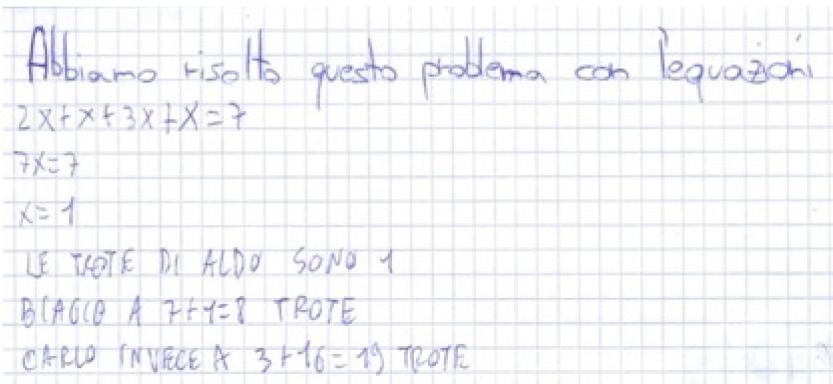


Fig. 23
(Nous avons résolu ce problème par équations

2x+x+3x+x=7
7x=7
x=1

Aldo a 1 truite
Biagio a 7+1 = 8 truites
Carlo a en revanche
3+16 = 19 truites

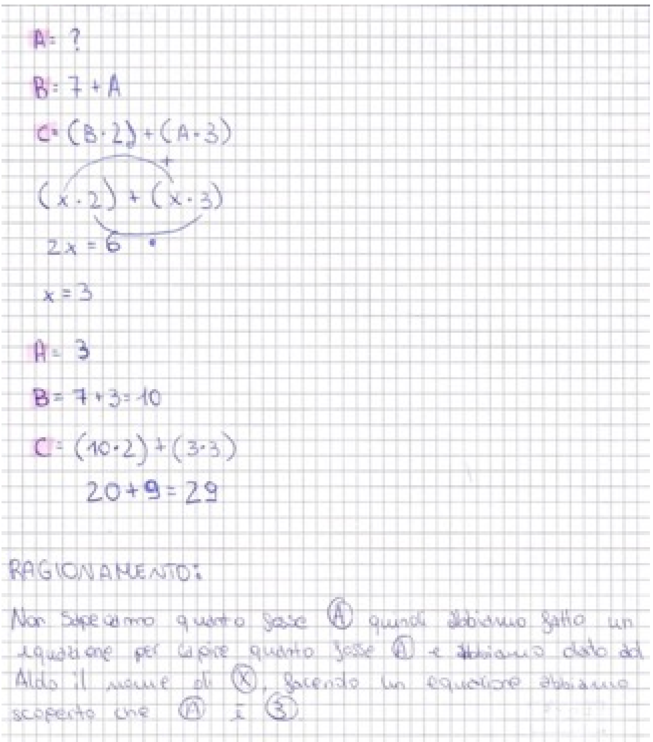


Fig. 24

A = ?
B = 7 + A
C = (B·2)+ (A·3)

(x · 2) + (x · 3) [indique la somme des deux x]

2x = 6 [indique la multiplication de 2 et 3]

x = 3

A = 3

B = 7 + 3 = 10

C = (10·2) + (3·3)
20+9 = 29
Raisonnement
On ne savait pas combien valait A, alors nous avons fait une équation pour comprendre combien valait A et nous avons donné à Aldo le nom de x ; par une équation nous avons trouvé que A est 3

Le seul fait qui est clair pour les élèves est la nécessité de déterminer le nombre de truites d'Aldo et qu'ils doivent le faire avec une équation dans laquelle la valeur inconnue doit être indiquée par « *x* ». Mais ce qu'est une équation et pourquoi elle est utilisée reste un mystère ... Il est clair que, dans les deux cas, les élèves ont « manqué » des étapes importantes de leur chemin algébrique qu'il faut nécessairement retrouver.

2.5. Quelques réflexions ultérieures sur l'analyse a posteriori

Les procédures utilisées par les élèves étaient essentiellement celles prévues dans l'analyse a priori (et indiquées dans leur ensemble également par les enseignants du Laboratoire). En général, il y a eu une amélioration de la moyenne m des scores passant des catégorie 5 et 6 (m = 1,46 et m = 1,43) à celles de 7 et 8 (m = 2,06 et m = 2,16).

L'analyse a posteriori a montré qu'il existe encore des difficultés à comprendre les données relationnelles présentes dans l'énoncé, même en catégorie 7 et dans certains cas en catégorie 8, avec pour conséquence évidente d'empêcher une appropriation correcte du problème et donc d'arriver à la solution. Ceci conduit une fois de plus à souligner l'importance dans la pratique pédagogique de réserver du temps à la compréhension du texte, avant même de réfléchir aux calculs et aux procédures de résolution, en travaillant sur les aspects relationnels (par exemple : solliciter l'utilisation du langage naturel pour trouver d'autres manières de les exprimer, de les représenter graphiquement ou utiliser un langage symbolique, d'expérimenter le passage d'un registre représentatif à un autre ...). Il est en fait largement reconnu par la recherche qu'un gros obstacle au développement de la pensée algébrique est dû au manque de compréhension et à l'incapacité de travailler avec des données relationnelles.

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le souligner, certaines copies des catégories 5 à 7 se sont révélées particulièrement intéressantes, dans lesquelles les élèves attestent d'une maîtrise des données relationnelles qui leur permet de poser une équation (avant même son « institutionnalisation») et de la résoudre par essais et erreurs ou par « équilibration », en appliquant les principes d'équivalence de manière naturelle. Cette méthode de résolution consiste notamment à reconnaître une valeur relationnelle dans le symbole de « l'égalité » (relation d'équivalence), alors que pour de nombreux élèves du premier cycle du secondaire (mais pas seulement ...) elle reste un indicateur procédural (à gauche on écrit les calculs et à droite le résultat).

Quant à la stratégie qui fait appel à la représentation graphique par segments, il est important que les élèves ne la perçoivent pas comme « tombée du ciel », c'est-à-dire sans qu'ils soient en mesure d'activer les connaissances nécessaires pour surmonter les obstacles qu'ils peuvent rencontrer. Il ne faut pas non plus présenter cette procédure comme une « méthode de résolution » de tous les problèmes qui peuvent être transcrits en une équation linéaire, mais comme l'une des stratégies possibles pour traiter et résoudre ce type de situation. Une didactique par problèmes, en particulier ceux de type « inédit », a l'avantage de ne pas révéler a priori le domaine conceptuel du problème lui-même. Ce n'est qu'en travaillant correctement sur les connaissances antérieures des élèves que l'enseignant pourra activer de nouvelles connaissances essentielles pour surmonter les obstacles. Ce n'est qu'après les différentes phases de ses recherches et découvertes que l'élève pourra utiliser une « *nouvelle méthode* » car elle appartiendra au patrimoine de ses connaissances.

Enfin, nous tenons à souligner que l'analyse a posteriori peut donner des indices pour une activité de résolution de problème orientée vers la démonstration. Nous avons déjà proposé un exemple de stratégie que nous pourrions définir comme celle « des multiples de 7 ». L'enseignant qui est confronté à une telle procédure, pourra naturellement inviter les élèves à se poser des questions sur sa validité et, en catégorie 8 ou éventuellement 9 et 10, les guider vers une démonstration.

3. Conclusions

Dans notre travail nous avons choisi un problème de « type algébrique » proposé dans les classes de catégories 5 à 8, donc aux élèves qui, à l'exception de ceux des classes de catégorie 8, sont encore « peu mûrs » dans le domaine algébrique. Nous nous sommes tournés vers l'analyse des procédures et des raisonnements présents dans les documents afin de pouvoir saisir les éléments « indicateurs » du développement du discours algébrique des élèves. Notre objectif était de proposer aux enseignants un répertoire d'exemples qui, dans des situations similaires, leur permettent d'interpréter, du point de vue du développement de la pensée algébrique, les productions de leurs élèves. Particulièrement intéressantes seront celles « non standard», c'est-à-dire correctes d'un point de vue mathématique, mais qui diffèrent de ce que les enseignants eux-mêmes attendent, ou celles contenant des erreurs qu'il ne faut pas condamner, mais considérées comme des indicateurs d'obstacles à lever.

En restant dans le domaine de la résolution de problèmes, l'enseignant devra accompagner les élèves dans le chemin algébrique, en proposant des situations problématiques significatives dans lesquelles ils sont libres de s'exprimer dans les procédures et les explications de leur raisonnement. L'enseignant, comme toujours, doit être le « metteur en scène » de la discussion en classe et « l'acteur » de la phase d'institutionnalisation des connaissances. Nous rappelons qu'encourager la discussion collective amène les élèves à réfléchir sur les connaissances, les processus et les langages utilisés pour les décrire, à se confronter aux points de vue de leurs camarades, à évaluer leurs propres convictions et à faire des choix conscients. En d'autres termes, cette activité conduit à privilégier les aspects métacognitifs et métalinguistiques.

Enfin, nous soulignons l'importance de prêter attention au langage spontané des élèves tant dans leurs productions écrites qu'orales, afin de pouvoir saisir et valoriser les aspects qui peuvent être importants pour aborder raisonnablement le langage symbolique et sa maîtrise, qui est à la base de l'étude de l'algèbre.

Par une activité d'interprétation et de traduction entre expressions en langage naturel et formel, l'élève sera progressivement amené à prendre conscience du sens des signes utilisés, de la simplification apportée dans le développement du discours mathématique par l'utilisation de symboles relativement au langage naturel, de la manière d'arriver à la création d'objets mathématiques (tels que des expressions, des équations, des fonctions) par des processus de modélisation et donc de donner un sens à son étude.

Bibliographie

Arzarello F.: 2020, 'Con gli allievi e gli insegnanti tra numeri, formule e problemi', La Gazzetta di transalpino, n° 10 … ajouter les pages ?

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G.: 1994, 'L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche', Quaderno n° 6 del CNR, Progetto strategico Tecnologie e Innovazioni Didattiche, Pavia

Castellini A.: 2016,'Against problem solving by segment method', *Experiences of Teaching with Mathematics, Sciences and Technology*, Vol. 2, n. 2, 287-302, (http://www.edimast.it/journals/index.php/edimast/article/view/32/29) [con PDF scaricabile in italiano]

MIUR 2012, *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* MIUR. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. Disponibile in http://www.pianodistudio.ch/ (consultato il 28.03.2019).

Malara N. A., Navarra, G.: 2003, '*Quadro Teorico di Riferimento e Glossario, Progetto ArAl'*, Ed. Pitagora Bologna

Navarra G.: 2008, 'L'early algebra: una prospettiva per una didattica dell'aritmetica e dell'algebra che favorisca il superamento delle difficoltà nell'insegnamento/apprendimento delle due discipline, *Atti del Convegno Nazionale "Il piacere di insegnare, il piacere di imparare la matematica',* Ed. Pitagora Bologna

APPENDICE – ***ACTIVITÉ EN CLASSE AVEC 11 ÉLÈVES DE CATÉGORIE 10 PROVENANT DE DIFFÉRENTES CLASSES ET DÉSIGNÉS PAR LEURS ENSEIGNANTS EN RAISON DES NOMBREUSES DIFFICULTÉS QU'ILS RENCONTRENT EN MATHÉMATIQUE***

(Istituto professionale dell'industria e artigianato: meccanico, elettrico, moda e ottico)

Questions

En lisant l'énoncé du problème, connaissons-nous le nombre de truites pêchées par Biagio ?
En lisant l'énoncé du problème, connaissons-nous le nombre de truites capturées par Aldo ?
En lisant l'énoncé du problème, connaissons-nous le nombre de truites pêchées par Carlo ?
Y a-t-il quelqu'un parmi Aldo, Biagio et Carlo qui n'a peut-être rien pêché ?
Est-il juste de dire que c'est Carlo qui a pêché le plus de truites des trois ?
Est-il juste de dire qu'Aldo a pêché moins de truites que Biagio et Carlo ?
Est-il juste de dire qu'Aldo a pêché 1/3 du nombre de truites de Carlo ?
Est-il juste de dire qu'Aldo a pêché 1/3 du nombre de truites de Carlo ?
Est-il possible d'affirmer que Biagio a pêché exactement 7 truites ?
Si vous connaissez le nombre exact de truites pêchées par Aldo, pouvez-vous déterminer le nombre de truites pêchées par Biagio ? Et celles que Carlo a pêchées?
Si vous connaissez le nombre exact de truites pêchées par Carlo, pouvez-vous déterminer le nombre de truites pêchées par Biagio ? Et qu'en est-il de celles d'Aldo ?
Si vous connaissez le nombre exact de truites pêchées par Biagio, pouvez-vous déterminer le nombre de truites pêchées par Aldo ? Et celles que Carlo a pêchées?

Confrontation et discussion

Ce sont des élèves difficiles à gérer qui refusent généralement tout engagement scolaire et aussi le respect du règlement scolaire. Ils sont disposés en demi-cercle.

Après une première présentation par l'expert (M. F. Andriani) qu'ils ne connaissent pas, ils se déclarent incompétents en mathématiques et surtout disent qu'ils n'y comprennent rien.

Je feuillette quelques cahiers qu'ils utilisent pendant leurs cours de mathématiques. Les cahiers regorgent d'exercices standards sur des inéquations, très ordonnés. A ma stupéfaction de voir des exercices bien faits et certainement pas simples pour des élèves en difficulté ils répondent: ... « *ils sont copiés du tableau noir* » ... « *Je ne sais pas ce que c'est mais je peux les faire* » ... « *boh*! »

Ils savent que, pendant notre cours, je serai disponible pour tout éclaircissement mais que pendant les leçons j'éviterai de les aider comme cela se fait souvent dans les périodes « d'aide pour les devoirs » pour me consacrer avec eux à d'autres types d'activités visant à dissiper leurs ressentiments concernant cette discipline tant détestée et rejetée.

Je donne à chacun l'énoncé du problème « Concours de pêche» avec le questionnaire de lecture et d'interprétation du texte.

Je les invite à lire attentivement l'énoncé et à répondre aux questions sur le questionnaire. Ils sont également libres de collaborer les uns avec les autres.

Certains lisent, d'autres sont d'abord distraits et je dois répéter plusieurs fois l'invitation à lire.

Je refuse toute demande d'aide.

- Angelo intervient au bout de quelques minutes et dit : « *Biagio a forcément 7 truites* ».
- Ciro est aussi convaincu qu'Angelo a raison.
- Giada prend le relais ... avec véhémence ... (elle venait de dire) « *Je n'aime pas les maths* » … « *Ce n'est pas possible ... on ne sait pas*. »

Je bloque la discussion, car le but de l'activité n'est pas de résoudre le problème immédiatement mais de lire et d'essayer de répondre.

Cependant, les plus impliqués continuent de chercher une solution et une autre voix dit « *le problème est impossible* » ... « *on ne peut pas le faire* » et continue à se désintéresser.

Pendant ce temps, Giuseppe est encore très distrait, Valentina déclare qu'elle ne comprendra pas car elle n'a jamais compris les mathématiques, Ruggiero semble absorbé dans ses pensées, Antonio et Carlo rient entre eux, Andrea et Michele écoutent ceux qui interviennent mais ne disent rien.

Ils reprennent la lecture ...

- *7 - 14 - 21 Aldo 7, Biagio 14 parce c'est le double et 21 Carlo parce que c'est le triple* ... dit Angelo
- Valentina, toujours bruyamment, hurle… *Ça ne va pas… c'est écrit que Biagio en a 7 de plus qu'Aldo et Aldo on ne sait pas !*

Une chose est sûre ... l'invitation à lecture n'a pas encore été reçue et on cherche une réponse rapide au problème.

Le 7 focalise l'attention et Angelo et Ciro sont toujours convaincus qu'Aldo a pêché 7 truites.

De cette première discussion, on perçoit qu'ils n'ont aucune difficulté à déterminer le double ou le triple d'un nombre et aussi que s'ils connaissent le double ou le triple, ils peuvent déterminer la moitié dans le premier cas ou le tiers dans le second cas.

A un moment donné Michele dit ... *Il n'y en a pas 7 mais comme l'a dit Valentina si Aldo en avait 3 ... Biagio en aurait pêché 10.*
Je les invite toujours à lire sans confirmer ou non leurs convictions.
Je lis moi-même la première question et je demande si une première lecture de l'énoncé permet de savoir combien les trois personnages ont pêché de truites.
Pendant quelques minutes, Angelo et Ciro continuent à dire: *Oui 7 !* ... après un moment, ils changent d'avis et disent presque ensemble *Non mais si j'en connais un, je trouve les autres.*
Nous passons à la question : Y a-t-il quelqu'un parmi Aldo, Biagio et Carlo qui n'a peut-être rien pêché ?
Réponse sèche au début : *oui*
Immédiatement après, Antonio sort de sa torpeur et dit : *non*, *autrement on ne s'en sort pas car si Aldo ne pêche rien, il n'y a pas de triple.*
Je m'écarte un peu du sujet en exigeant un argument approprié sur le rôle du zéro dans la multiplication ... mais au bout d'un moment je me fais presque remettre à l'ordre par Ciro qui veut connaître le nombre de truites pêchées par les trois. Je m'excuse et nous revenons à la lecture ...
Je regarde Valentina, toujours convaincue qu'elle ne comprend pas … Je l'invite à répondre aux questions suivantes *Est-il juste de dire que c'est Carlo qui a pêché le plus de truites des trois ?*
Timidement mais aussitôt, elle dit *oui* et explique aussi pourquoi ... et continue de répondre correctement. Et quand les autres approuvent et que, pour lui donner confiance, je me permets de dire ... « *Alors tu as lu ?* » ... un sourire apparaît sur son visage (enfin !).
A la question suivante, revient la réponse tant attendue (pour laquelle j'avais demandé à plusieurs reprises de lire les questions initiales) « *Est-il possible d'affirmer que Biagio a pêché exactement 7 truites ? »*
... un chœur quasi unanime répond : *noooon ... si on ne sait pas celles d'Aldo !*
À ce stade, je demande à Michele de repréciser sa pensée …
Michele : *Si Aldo avait 3 truites alors Biagio en aurait pêché 10* (Miracle !! ... il ne parle plus en dialecte et utilise les verbes correctement ! Et dire que j'avais évité le conditionnel pour éviter de plus grandes difficultés) ; (Je suis très contente ... après tant de questions et de demandes aller-retour sans donner de confirmations et de refus. Presque deux heures se sont écoulées et ils ne m'ont pas encore boycottée ! ... et on ne sait toujours pas combien de truites ont été pêchées !!!
J'interviens et dis: « *Alors tout va bien, maintenant* ».
À ce stade, ils sont "plus chauds".
Ciro : *non, ça ne va pas avec 3 parce qu'alors, Carlo 20 et… et le triple, non ça ne peut pas être cela.*
Angelo : *non, ça ne marche pas*
En chœur ... *alors cinq ?*
Je suis hésitante (en fait il me reste peu de temps) ... *Contrôlez* (dis-je)
Ciro : *multiple de 3*
Et … (moi). Ruggiero : *de 2. Et alors?* (moi). En chœur : *de 5*. En chœur : *non, ça ne marche pas.*
Il faut se méfier ! (moi). En chœur : *12, 18 ... non non c'est 24. Zut !!! Alors ce n'est pas ça !!!*
Êtes-vous sûr ? (moi)
Angelo: *multiple de 6… mais je ne connais pas le livret.*
Le temps presse et quelqu'un veut y aller mais à un moment Sandro que je n'avais pas encore réussi à faire parler … *C'est 42 pour Carlo !*
Un moment de silence
Puis Ciro vérifie ... et dit : *double, triple, 7 plus ... c'est bien, c'est 42!*

Pour aujourd'hui, le temps disponible est écoulé ...
Je remercie

Traduction de François Jaquet

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

UN MOSAICO DEL MAROCCO / UNE MOSAÏQUE DU MAROC

Concetta Caggiano, Lucia Grugnetti, François Jaquet

La maniera matematica di vedere le figure costruite strumentalmente, anche le più elementari, è agli antipodi della maniera spontanea e iconica di vedere le rappresentazioni bidimensionali.

La manière mathématique de voir les figures instrumentalement construites, même les plus élémentaires, est aux antipodes de la manière spontanée et iconique de voir toutes les représentations bidimensionnelles.

(Duval, 2020[1])

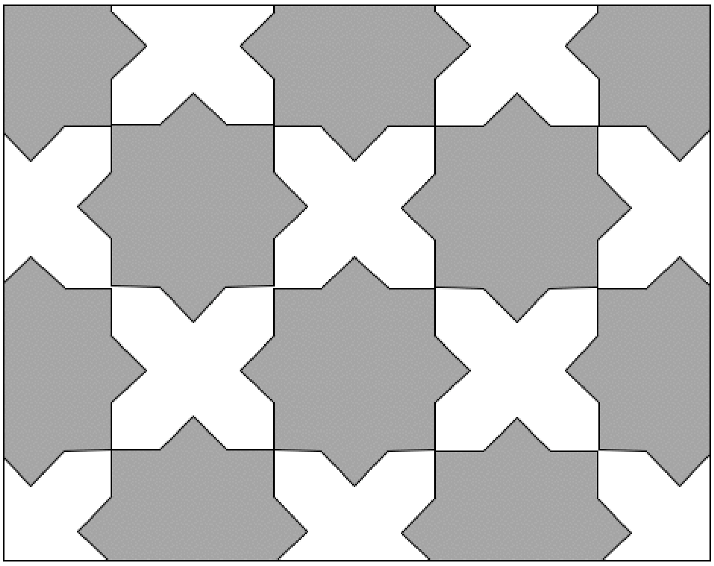
UN MOSAICO DEL MAROCCO (Cat. 8, 9, 10)

L'arte islamica è molto ricca di mosaici che affascinano i turisti.

Nel disegno che segue è rappresentato un frammento del mosaico che ricopre una grande parete di una sala per i ricevimenti di un palazzo di Marrakech, costituito da migliaia di piastrelle grigie e di piastrelle bianche.

Ogni piastrella ha 16 lati, tutti uguali, ciascuno di lunghezza 5 cm.

Nel disegno si vede come sono disposte le piastrelle grigie e bianche.



Un turista, nell'osservare la parete, ha stimato che la superficie di colore bianco possa forse essere i 3/4 della superficie di colore grigio.

Suo figlio gli ha fatto osservare che se si scompone ogni piastrella, sia bianca sia grigia, in triangoli (le "punte" delle piastrelle) e rettangoli si può calcolare con più certezza il rapporto o con una approssimazione migliore di 3/4.

Calcolate il rapporto tra le aree in bianco e le aree in grigio della parete.

Motivate la vostra risposta con i dettagli della procedura che avete seguito.

---

[1] Raymond Duval: Le premier seuil dans l'apprentissage de la géométrie : « voir » les « figures »' ; Il primo passo nell'apprendimento della geometria: "vedere" le "figure". La Gazzetta di Transalpino n. 10, 2020, 7-26.

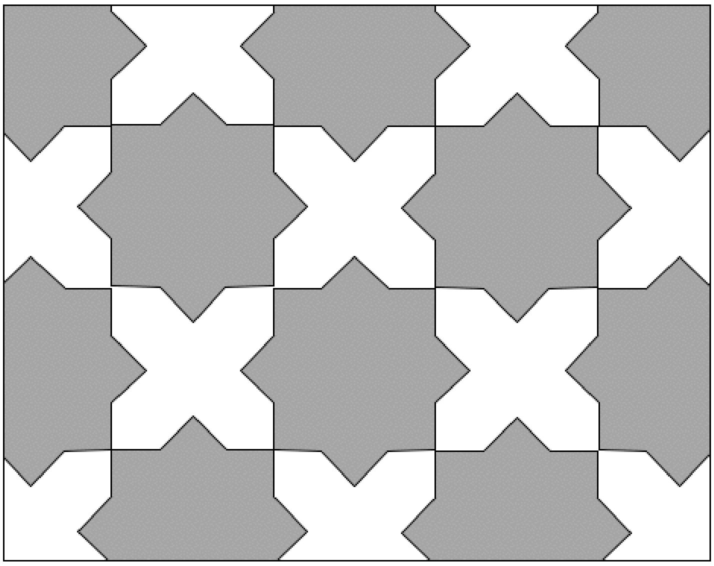
UNE MOSAÏQUE DU MAROC (Cat. 8, 9, 10)

L'art islamique est d'une grande richesse en mosaïques qui émerveillent les touristes.

Le dessin qui suit représente un fragment de l'une d'elles, qui recouvre une grande paroi d'une salle de réception d'un palais de Marrakech, constituée de milliers de carreaux gris et de carreaux blancs.

Chaque carreau a 16 côtés, tous de même longueur : 5 cm.

Dans cette figure on peut voir comment sont disposés les carreaux gris et blancs.



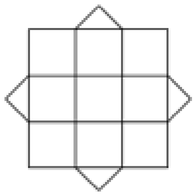
Une touriste, en observant la paroi, a estimé que sa surface en blanc est les 3/4 de sa surface en gris.

Son fils lui fait observer qu'un carreau blanc ou un carreaux gris, peut se décomposer en triangles (les « pointes » des carreaux) et rectangles et qu'on peut calculer ce rapport avec certitude ou avec une meilleure approximation que 3/4.

Calculez le rapport entre les aires en blanc et en gris de la paroi.

Justifiez votre réponse avec le détail de la procédure que vous avez suivie.

Questo problema, della seconda prova del 27° RMT, ha avuto bisogno di un'iniziale e provvidenziale analisi a posteriori al fine di intervenire, ancora in tempo utile, sull'attribuzione dei punteggi.
Infatti, solo dopo aver analizzato gli elaborati della sezione della Svizzera romanda (la prima ad aver svolto la prova), Lucia Grugnetti e François Jaquet, si sono resi conto degli errori di percezione nei quali diversi gruppi di allievi si sono imbattuti quando si sono fidati, per l'appunto, della loro percezione visiva dei contorni delle piastrelle o dei lati dei "quadrati della griglia" senza un'analisi "metrica" dei segmenti che li compongono. E ciò è dovuto presumibilmente alle misura piuttosto ridotte del disegno di un quadrato singolo.
Ce problème, de la deuxième épreuve du 27e RMT, a eu besoin d'une analyse a posteriori initiale et providentielle afin d'intervenir, en temps utile, sur l'attribution des points.
En effet, ce n'est qu'après avoir analysé les copies de la section de Suisse romande (la première à avoir passé l'épreuve), que Lucia Grugnetti et François Jaquet, ont pris conscience des erreurs de perception rencontrées par différents groupes d'élèves faisant confiance à leur perception visuelle des pourtours des carreaux ou des côtés des « carrés de la grille » sans analyse « métrique » des segments qui les composent. Cela est probablement dû à la taille plutôt réduite des dessin d'un petit carré:



Come si evince dall'enunciato, il compito matematico del problema implica il calcolo del rapporto fra le aree di due tipi di figure di un mosaico, per scomposizione in quadrati, semi-quadrati triangolari e rettangoli di cui un lato è quello di un quadrato e l'altro quello della sua diagonale.
E proprio la "questione diagonale di un quadrato", che porta a errori frequenti e ricorrenti, anche in questo caso non si è smentita! Avremmo dovuto, tutti noi che abbiamo costruito, poi analizzato in vari momenti, il problema, tenerne conto. nell'originale stesura dell'attribuzione dei punteggi.

Con la nuova attribuzione dei punteggi si è tenuto pertanto conto dell'errore di percezione che ha portato alcuni gruppi di allievi a "vedere" il triangolino sopra il quadrato come un triangolo equilatero e non come metà di un quadratino, con la base coincidente con la diagonale del quadratino stesso.

Comme le montre l'énoncé, la tâche mathématique du problème consiste à calculer le rapport des aires de deux types de figures d'une mosaïque, par décompositions en demi-carrés triangulaires et rectangles dont un côté est celui d'un carré et l'autre celui de sa diagonale.
C'est précisément la problématique « de la diagonale d'un carré », qui conduit à des erreurs fréquentes et récurrentes, non démenties dans ce cas! Nous tous, qui avons construit, puis analysé à différents moments le problème, aurions dû en tenir compte, dans la rédaction originale de l'attribution des points.
Avec la nouvelle attribution des points, on a tenu compte de l'erreur de perception qui a conduit certains groupes d'élèves à « voir » le petit triangle au-dessus du carré comme un triangle équilatéral et non pas comme la moitié d'un carré, la base coïncidant avec la diagonale du carré même.

Compito per la risoluzione e saperi mobilizzati / Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Immaginare la parte a partire dalla figura data e capire, vista la disposizione delle piastrelle, che il numero di quelle grigie e di quelle bianche è approssimativamente il medesimo su una parete costituita da migliaia di piastrelle e che è pertanto sufficiente calcolare l'area di una sola piastrella per colore per determinare il rapporto tra le parti in bianco e in grigio della parete.
- Osservare con attenzione i due poligoni, verificare che ciascuno abbia 16 lati disposti su una trama quadrata. Le piastrelle grigie occupano un quadrato della trama e quattro triangolini, "presi in prestito" dalle piastrelle bianche (si veda la figura 1). Osservare poi che le piastrelle grigie possono essere considerate come la sovrapposizione di due quadrati i cui lati rispettivi formano angoli di 45 gradi (o che si possa passare dall'uno all'altro con una rotazione di 45 gradi). Di conseguenza si può essere certi che tutti gli angoli acuti del poligono grigio sono retti.
- Passare all'analisi del contorno delle piastrelle e osservare che ogni lato di un quadrato della trama è composto da due dei 16 lati del poligono, di 5 cm di lunghezza e da una diagonale che è il terzo lato di un triangolo rettangolo due lati del quale misurano 5 cm.
- A seguito di questa osservazioni, si può pensare alle aree delle piastrelle come quelle dell'area del quadrato della trama aggiungendovi o togliendo, rispettivamente per la piastrella grigia e per quella bianca, quelle dei quattro triangoli.
- Passare al calcolo delle aree delle due piastrelle:

  en cm: diagonale di un triangolo, $5\sqrt{2}$ o $\sqrt{50} \approx 7{,}07$; lato di un quadrato della trama: $10 + 5\sqrt{2} \approx 17{,}07$ d'un

  in cm^2: area di quattro triangoli $4(25/2) = 50$; area di un quadrato della trama $(10 + 5\sqrt{2})^2 = 291{,}42\ldots \approx 290$

  area di una piastrella grigia o bianca $(10 + 5\sqrt{2})^2 + 50 \approx 340$ oppure $(10 + 5\sqrt{2})^2 - 50 \approx 240$

- Imaginer la paroi à partir de la figure donnée et comprendre, vu la disposition des carreaux, que le nombre des gris et des blancs est approximativement le même sur une paroi constituée de milliers de carreaux et qu'il suffit donc de calculer l'aire d'un seul carreau gris et d'un seul carreau blanc pour déterminer le rapport entre les parties en blanc et en gris de la paroi.
- Observer attentivement les deux polygones, vérifier qu'ils ont chacun 16 côtés, disposés sur une trame carrée. Les carreaux gris occupent un carré de la trame et quatre petits triangles, empruntés aux carreaux blancs. (voir figure 1). Observer encore que les carreaux gris peuvent être considérés comme la superposition de deux carrés dont les côtés respectifs forment des angles de 45 degrés (ou qu'on peut passer de l'un à l'autre par une

rotation de 45 degrés). Par conséquent on peut être certains que tous les angles aigus du polygone gris sont droits.

- Passer à l'analyse du pourtour des carreaux et noter que chaque côté d'un carré de la trame est composé de deux des 16 côtés du polygone, de 5 cm de longueur et d'une diagonale d'un triangle isocèle rectangle dont deux côtés mesurent aussi 5 cm.
- A la suite de ces observations, on peut envisager les aires des carreaux comme celles de l'aire du carré de la trame en y ajoutant ou y retranchant respectivement pour le carreau gris et pour le carreau blanc, celles des quatre triangles.
- Passer au calculs des aires des deux carreaux :

  en cm : diagonale d'un triangle, $5\sqrt{2}$ ou $\sqrt{50} \approx 7{,}07$; côté d'un carré de la trame : $10 + 5\sqrt{2} \approx 17{,}07$

  en cm^2 : aire de quatre triangle $4(25/2) = 50$; aire d'un carré de la trame $(10 + 5\sqrt{2})^2 = 291{,}42\ldots \approx 290$

  aire d'un carreau gris ou blanc $(10 + 5\sqrt{2})^2 + 50 \approx 340$ ou $(10 + 5\sqrt{2})^2 - 50 \approx 240$

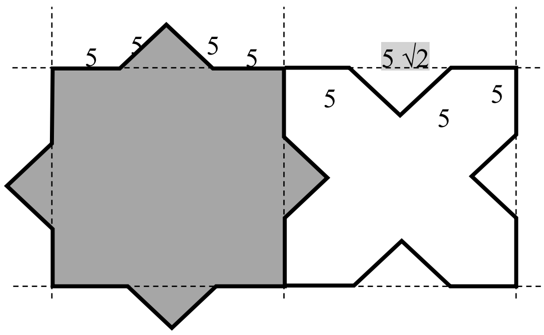


Fig. 1

- Calcolare infine il rapporto delle aree in bianco e in grigio; cioè "area di una piastrella bianca"/"area di una piastrella grigia ": $[(10 + 5\sqrt{2})^2 – 50\ ]/\ [(10 + 5\sqrt{2})^2 + 50] \approx 240/340 \approx 0{,}7$ (La risposta esatta sarebbe $\sqrt{2}/2$ per coloro che sono capaci di effettuare le semplificazioni necessarie).

Oppure cercare di scomporre ciascuna piastrella con quadrati, rettangoli e triangolini ed effettuare i calcoli delle aree corrispondenti.

Ecco qualche esempio di queste piastrelle dove si tratta di riconoscere i lati di lunghezza 5 e quelle di lunghezza $5\sqrt{2}$ o $\sqrt{50}$. :

- Calculer finalement le rapport des aires en blanc et en gris ; c'est-à-dire « aire d'un carreau blanc »/ « aire d'un carreau gris » : $[(10 + 5\sqrt{2})^2 – 50\ ]/\ [(10 + 5\sqrt{2})^2 + 50] \approx 240/340 \approx 0{,}7$ (La réponse exacte serait $\sqrt{2}/2$ pour ceux qui sont capables d'effectuer les simplifications nécessaires)

Ou chercher à décomposer chacun des carreaux par des carrés, rectangles et petits triangles, et effectuer les calculs des aires correspondantes

Voici quelques exemples de ces pavages où il s'agit de reconnaître les côtés de longueur 5 et ceux de longueur $5\sqrt{2}$ ou $\sqrt{50}$. :

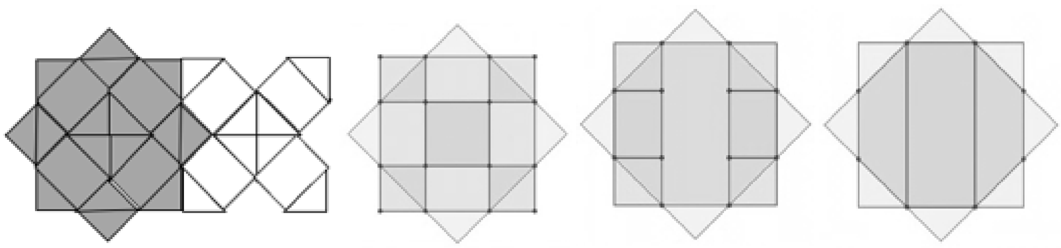


Fig. 2

Nel primo esempio (figure 2) il quadrato grigio si scompone in 16 triangoli 8 rettangoli isosceli) e 4 rettangoli, il quadrato bianco in 8 triangoli e 4 rettangoli. Le aree dei triangoli misurano $12{,}5 = 25/2$ cm^2. I rettangoli hanno una larghezza di 5 cm, mentre la lunghezza è quella dell'ipotenusa di un triangolo che può essere calcolata con il teorema di Pitagora o come lato del quadrato centrale: $\sqrt{50}$ cm che possiamo arrotondare a 7,0 o 7,1. L'area di un rettangolo è pertanto $5 \times \sqrt{50} \approx 35 \approx 35{,}5$.

Dans le premier exemple (figure 2) le carreau gris se décompose en 16 triangles (isocèles rectangles) et 4 rectangles, le carreau blanc en 8 triangles et 4 rectangles. Les aires des triangles sont égales à $12{,}5 = 25/2$ cm^2. Les rectangles ont 5 cm de largeur, leur longueur est celle de l'hypoténuse d'un triangle qui peut se calculer par Pythagore ou comme le côté du carré central : √50 cm qu'on peut arrondir à 7,0 ou 7,1. L'aire d'un rectangle est donc 5 × √50 ≈ 35 ≈ 35,5.

Risultati / Résultats

Punteggi Points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Tot.	m
Cat. 8	436	201	79	44	49	809	0,8
Cat. 9	93	50	18	19	27	207	1,2
Cat. 10	63	41	28	24	37	193	1,6
tot	**592**	**292**	**125**	**87**	**113**	**1209**	**1,0**

in / en %

Cat. 8	54%	25%	10%	5%	6%
Cat. 9	45%	24%	9%	9%	13%
Cat. 10	33%	21%	15%	12%	19%
tot	49%	24%	10%	7%	9%

Secondo la nuova attribuzione dei punteggi (in rosso rispetto alla vecchia e rivista dopo l'analisi dei primi elaborati degli allievi).

Selon la nouvelle attribution des points (en rouge par rapport à l'ancienne et corrigée après l'analyse des premières copies des élèves) :

4 Risposta corretta (0,7 o 0,71 o un'altra approssimazione o 1/√2 o √2/2…) con descrizione chiara e completa della procedura (disegno della scomposizione con dettagli dei calcoli, anche eventualmente a partire dalla misura 7 cm per l'ipotenusa di una "punta", triangolo rettangolo isoscele 5 ; 5 ; √2).

3 Risposta corretta con solo alcuni dettagli della procedura

oppure ricerca corretta delle due aree, ma senza la ricerca del rapporto

oppure risposta errata dovuta a un errore di calcolo: area corretta di uno dei poligoni, la stella (≈ 341 o ≈ 340) oppure la croce (≈ 241 o ≈ 240) con dettagli

2 Risposta corretta senza dettagli

oppure risposta errata 175/275 = 7/11 ≈ 0,636 dovuta a un'interpretazione visiva approssimativa delle piastrelle come un quadrato 15 × 15 (oppure 3 × 3 quadrati di 5 cm di lato) su quali si incollano o si tagliano quattro triangoli isosceli rettangoli (Si veda figura)

1 Area corretta di uno dei poligoni senza alcun dettaglio

o calcolo errato delle aree, dovuto a un'interpretazione visiva approssimativa (Si veda la figura) (area della piastrella grigia: $15^2 + 50 = 275$ e area della piastrella bianca: $15^2 - 50 = 175$, senza il rapporto

oppure area di una "punta" con i dettagli

oppure inizio di ricerca coerente (suddivisione corretta dei due poligoni; tentativo di misure su disegno in scala…).

0 Incomprensione del problema

4 Réponse correcte (0,7 ou 0,71 ou une autre approximation, ou 1/√2 ou √2/2…) avec description claire et complète de la procédure (dessins des décompositions, avec détails des calculs, ou à partir d'une mesure approchée à 7 cm de l'hypoténuse d'une « pointe », triangle isocèle rectangle 5 ; 5 ; 5√2,).

3 Réponse correcte avec seulement quelques détails de la procédure, ou recherche correcte des deux aires sans le calcul du rapport.

ou réponse erronée avec une seule faute de calcul : l'aire d'un des polygones est correcte, l'étoile (≈ 341 ou ≈ 340) ou la croix (≈ 241 ou ≈ 240) avec détails.

2 Réponse correcte sans détails

ou réponse erronée 175/275 = 7/11 ≈ 0,636 due à une interprétation visuelle approximative des carreaux comme un carré de 15 × 15 (ou 3 × 3 carrés de 5 cm de côté) sur lequel se greffent ou se découpent quatre triangles isocèles rectangles. (Voir figure)

1 Aire correcte d'un des polygones sans détails, ou aire d'une « pointe » avec détails ou début de recherche cohérent (subdivision correcte des deux polygones, tentatives de mesures sur un dessin à l'échelle…)

ou calcul erroné des aires, dû à une interprétation visuelle approximative (Voir figure) (aire du carreau gris : $15^2 + 50 = 275$ et aire du carreau blanc : $15^2 - 50 = 175$, sans le rapport

0 Incompréhension du problème

Procedure, ostacoli ed errori rilevati / Procédures, obstacles et erreurs relevés

Le osservazioni che seguono sono state fatte a partire dall'analisi a posteriori degli elaborati delle sezioni di Franche-Compté, della Puglia e delle Svizzera romanda a cura di Concetta Caggiano, Lucia Grugnetti e François Jaquet.

Les observations suivantes ont été faites à partir de l'analyse a posteriori des travaux des sections de Franche-Comté, des Pouilles et de la Suisse romande, par Concetta Caggiano, Lucia Grugnetti et François Jaquet.

1.1 Percezione della trama delle piastrelle / Perception de la trame des carreaux

Nella maggior parte dei casi il mosaico è percepito su una trama quadrata. Le piastrelle grigie occupano un quadrato della trama e quattro triangolini, presi in prestito dalle piastrelle bianche (si veda figura 3). Ogni lato di questo quadrato è composto da due dei 16 lati del poligono, la cui lunghezza misura 5 cm e dall'ipotenusa di un triangolo.

È allora sufficiente determinare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolino ($\sqrt{50} \approx 7{,}07$) poi il lato di un quadrato della griglia ($10 + \sqrt{50}) \approx 17{,}07$ (en cm) per calcolare l'area di questo quadrato $(10 + \sqrt{50})^2 \approx 291{,}42$ (in cm²).

Dans la majorité des cas la mosaïque est perçue sur une trame carrée. Les carreaux gris occupent un carré de la trame et quatre petits triangles, empruntés aux carreaux blancs. (voir figure 3). Chaque côté de ce carré est composé de deux des 16 côtés du polygone, dont la longueur mesure 5 cm et de l'hypoténuse d'un triangle.

Il suffit alors de déterminer la longueur de l'hypoténuse d'un petit triangle ($\sqrt{50} \approx 7{,}07$) puis le côté d'un carré de la grille $(10 + \sqrt{50}) \approx 17{,}07$ (en cm) pour calculer l'aire de ce carré $(10 + \sqrt{50})^2 \approx 291{,}42$ (en cm²).

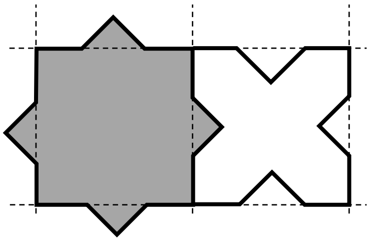
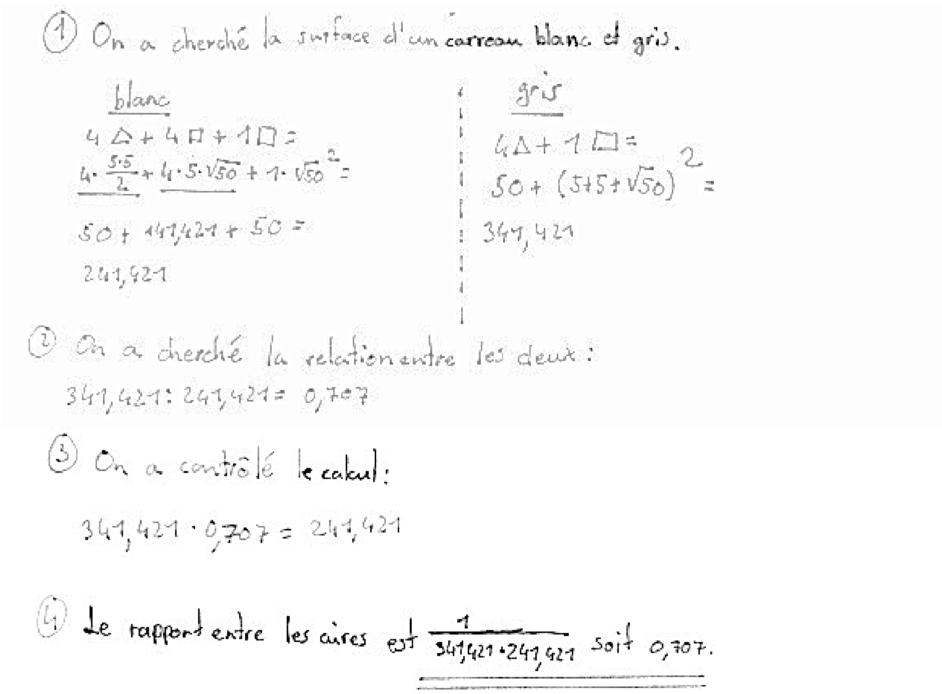


Fig. 3

Cat. 8



① On a cherché la surface d'un carreau blanc et gris.

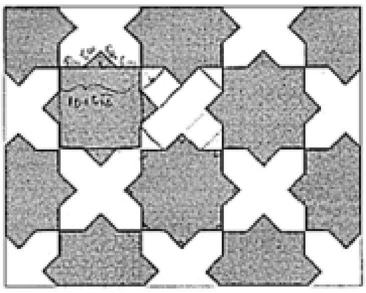
blanc	gris
$4\triangle + 4▭ + 1\square =$	$4\triangle + 1\square =$
$4 \cdot \frac{5 \cdot 5}{2} + 4 \cdot 5 \cdot \sqrt{50} + 1 \cdot \sqrt{50}^2 =$	$50 + (5+5+\sqrt{50})^2 =$
$50 + 141{,}421 + 50 =$	$341{,}421$
$241{,}421$	

② On a cherché la relation entre les deux :
$341{,}421 : 241{,}421 = 0{,}707$

③ On a contrôlé le calcul :
$341{,}421 \cdot 0{,}707 = 241{,}421$

④ Le rapport entre les aires est $\frac{1}{341{,}421 \cdot 241{,}421}$ soit 0,707.

Cat. 10



Un turista, nell'osservare la parete, ha stimato che la superficie di colore bianco possa forse essere i ¾ della superficie di colore grigio.

Suo figlio gli ha fatto osservare che se si scompone ogni piastrella, sia bianca sia grigia, in triangoli (le "punte" delle piastrelle) e rettangoli si può calcolare con più certezza il rapporto o con una approssimazione migliore di ¾.

Calcolate il rapporto tra le aree in bianco e le aree in grigio della parete.

Motivate la vostra risposta con i dettagli della procedura che avete seguito.

Abbiamo iniziato pensando che le due figure (bianche e grigie) fossero formate nel caso di quella grigia da un quadrato sommato a 4 triangoli mentre l'altra figura bianca formata dallo stesso quadrato sottraendo a questo 4 triangoli. Sapendo che ogni piastrella è formata da 16 lati di 5 cm e che questi sono perpendicolari fra loro perché vertici di due quadrati sovrapposti ma ruotati, abbiamo calcolato l'ipotenusa di questi con il teorema di Pitagora.

Ipotenusa $(i) = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

~~Quindi l'area dei 4 triangoli è uguale a~~ $\cancel{5\sqrt{2}\cdot 2}$

L'area dei 4 triangoli è $\frac{5 \cdot 5}{2} = 12{,}5\ cm^2$ la somma sarà $50\ cm^2$ (area totali)

Ora calcoliamo l'area del quadrato centrale e successivamente per la figura grigia sommiamo l'area dei 4 triangoli e per la figura bianca sottraiamo l'area dei 4 triangoli.

$$A(\text{quadrato}) = (5+5+5\sqrt{2})^2 = (10+5\sqrt{2})^2 = 100+25\cdot 2+20\cdot 5\sqrt{2} =$$
$$= 100+50+100\sqrt{2} =$$
$$= 150+100\sqrt{2} =$$
$$= 50(3+2\sqrt{2})\ cm^2$$

Area bianca $= 50(3+2\sqrt{2}) - 50\ cm^2$

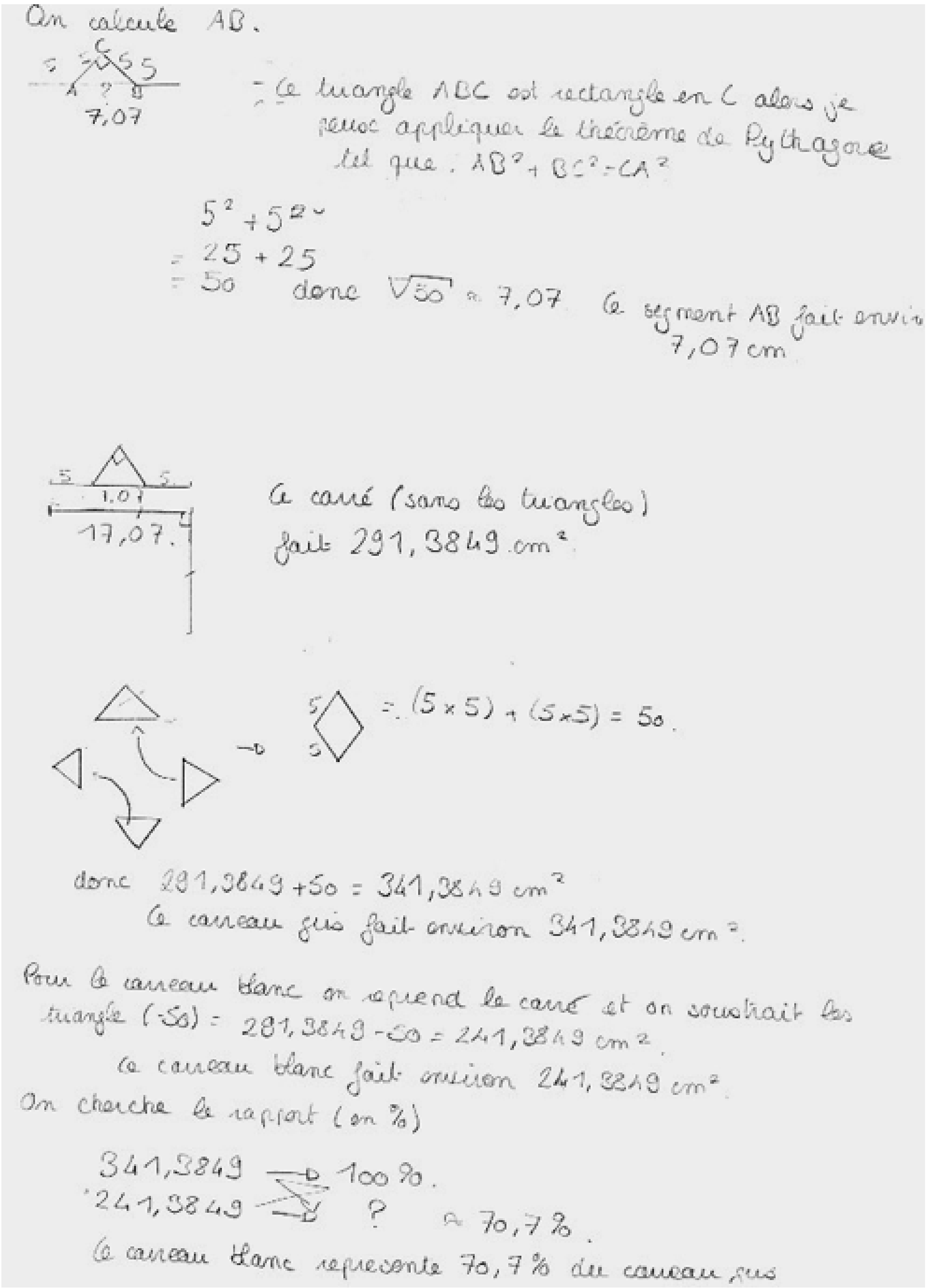
Area grigia $= 50(3+2\sqrt{2}) + 50\ cm^2$

Ora calcoliamo il rapporto tra le due aree

$$\frac{A(b)}{A(g)} = \frac{50(3+2\sqrt{2})-50}{50(3+2\sqrt{2})+50} =$$
$$= \frac{\cancel{50}(3+2\sqrt{2}-1)}{\cancel{50}(3+2\sqrt{2}+1)} =$$
$$= \frac{3+2\sqrt{2}-1}{3+2\sqrt{2}+1}$$
$$= \frac{2+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}(1+\sqrt{2})}{\cancel{2}(2+\sqrt{2})} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\cancel{2}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\cancel{2}}{4-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cat. 8



1.2. Gli errori di percezione dei "quadrati della griglia" o delle scomposizioni / Les erreurs de perception des « carrés de la grille » ou des décompositions

Numerosi gruppi si fidano della loro percezione visiva dei contorni delle piastrelle o dei lati dei "quadrati della griglia" senza un'analisi "metrica" dei segmenti che li compongono. La maggioranza percepisce una suddivisione in 9 parti isometriche (3× 3), (figura 4), altri in 16 parti (4× 4) (figura 5).
Nel caso della figura 4, il quadrato della griglia ha 15 cm di lato e la sua area è di 225 (in cm^2).
Un gruppo ha scelto 6 cm come parte centrale del lato del quadrato della griglia, facendo apparire dei triangoli isosceli considerati come semi-quadrati di lati 5 e 5 e 6 cm, di area 9 cm^2.
De nombreux groupes font confiance à leur perception visuelle des pourtours des carreaux ou des côtés des « carrés de la grille » sans analyse « métrique » des segments qui les composent. La majorité perçoivent un partage en 9 parties isométriques (3 × 3), (figure 4) d'autres en 16 parties (4× 4) (figure 5).
Dans le cas de la figure 4, le carré de la grille a 15 cm de côté et son aire est de 225 (en cm^2).

Une copie a choisi 6 cm comme partie centrale du côté du carré de la grille, faisant apparaître des triangles isocèles considérés comme des demi-carrés de côtés 5 et 5 et 6 cm, d'aire 9 cm².

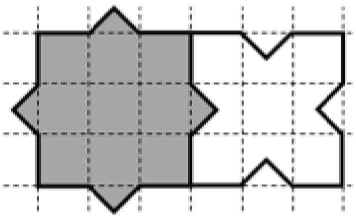


Fig. 4

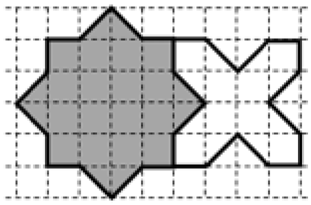
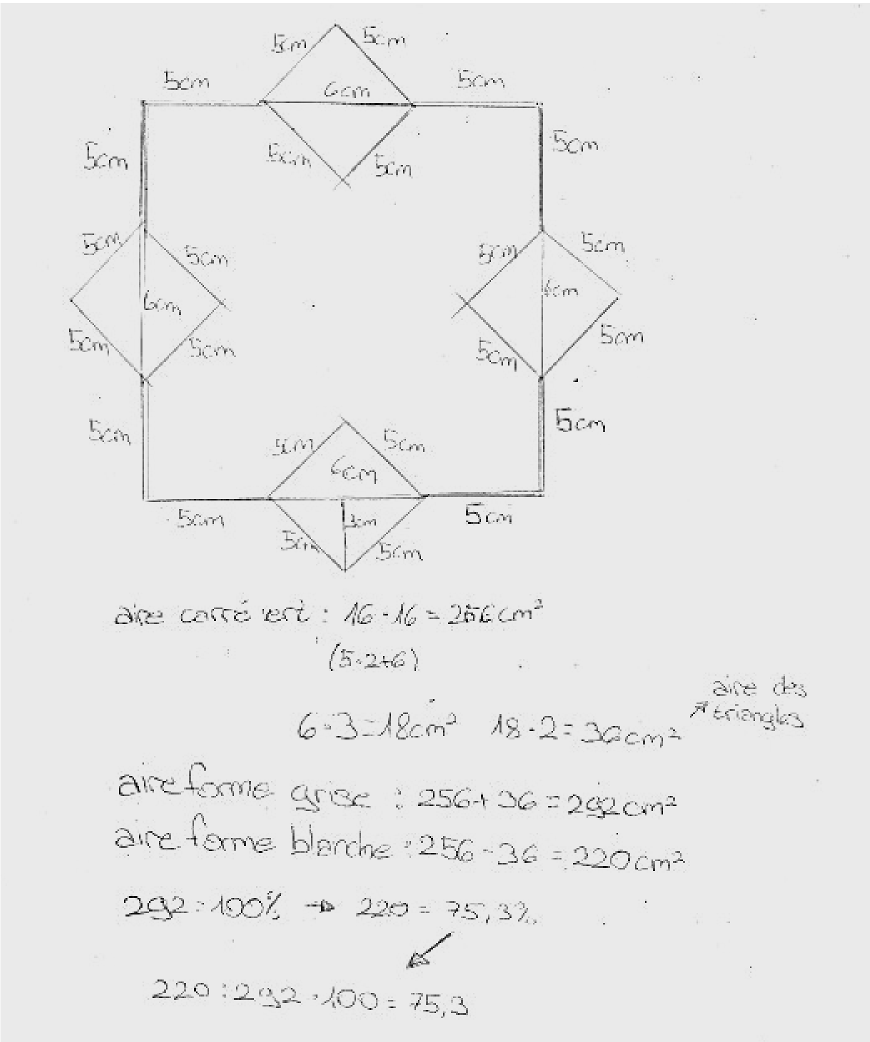
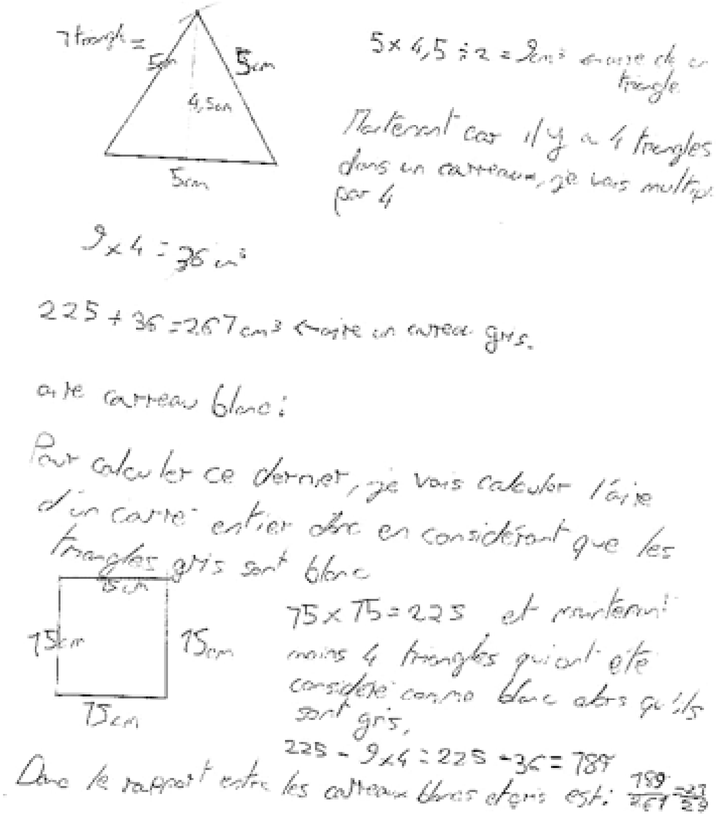


fig. 5

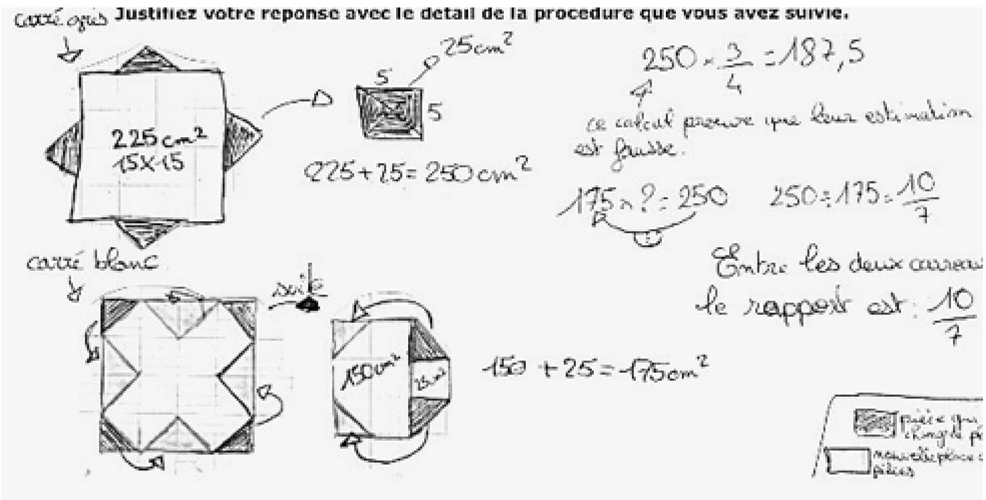
Cat. 8



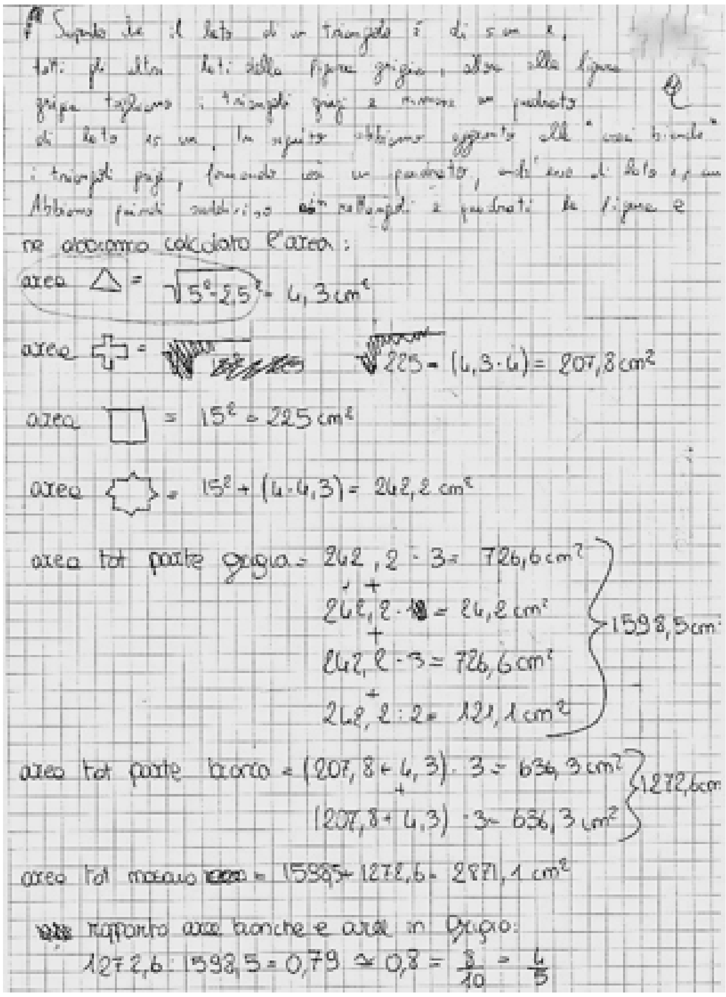
Cat. 8


5cm
5cm
4,5cm
5cm
5×4,5 ÷ 2 = 9cm² aire de ce triangle
Maintenant car il y a 4 triangles dans un carreau, je vais multip. par 4
9×4 = 36 cm²
225 + 36 = 261 cm² aire un carreau gris.
aire carreau blanc :
Pour calculer ce dernier, je vais calculer l'aire d'un carré entier donc en considérant que les triangles gris sont blanc
15cm
15×15 = 225 et maintenant moins 4 triangles qui ont été considéré comme blanc alors qu'ils sont gris,
225 − 9×4 = 225 − 36 = 189
Donc le rapport entre les carreaux blancs et gris est : 189/261 = 21/29

Cat. 8


carré gris
Justifiez votre reponse avec le detail de la procedure que vous avez suivie.
225cm²
15X15
25cm²
5
5
225+25= 250cm²
250 × 3/4 = 187,5
ce calcul prouve que leur estimation est fausse.
175 × ? = 250
250 ÷ 175 = 10/7
Entre les deux carreaux le rapport est : 10/7
carré blanc
suite
150cm²
25cm²
150 + 25 = 175cm²

Cat. 9


Sapendo che il lato di un triangolo è di 5 cm e, tutti gli altri lati della figura grigia, allora alla figura grigia togliamo i triangoli grigi e rimane un quadrato di lato 15 cm, in seguito abbiamo aggiunto alle "case bianche" i triangoli grigi, formando così un quadrato, anch'esso di lato 15 cm. Abbiamo quindi suddiviso in rettangoli e quadrati le figure e ne abbiamo calcolato l'area:

area △ = $\sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}3\ cm^2$

area ✚ = $\sqrt{225} - (4{,}3 \cdot 4) = 207{,}8\ cm^2$

area □ = $15^2 = 225\ cm^2$

area ✡ = $15^2 + (4 \cdot 4{,}3) = 242{,}2\ cm^2$

area tot parte grigia = $242{,}2 \cdot 3 = 726{,}6\ cm^2$
\+ $242{,}2 \cdot 1 = 242{,}2\ cm^2$
\+ $242{,}2 \cdot 3 = 726{,}6\ cm^2$
\+ $242{,}2 : 2 = 121{,}1\ cm^2$
$= 1598{,}5\ cm^2$

area tot parte bianca = $(207{,}8 + 4{,}3) \cdot 3 = 636{,}3\ cm^2$
\+ $(207{,}8 + 4{,}3) \cdot 3 = 636{,}3\ cm^2$
$= 1272{,}6\ cm^2$

area tot mosaico = $1598{,}5 + 1272{,}6 = 2871{,}1\ cm^2$

rapporto aree bianche e aree in grigio:
$1272{,}6 : 1598{,}5 = 0{,}79 \simeq 0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

1.3. Scomposizione in triangoli e rettangoli / Décomposition en triangles et rectangles

Nei rari casi di scomposizione in 8 triangoli e 4 rettangoli per il quadrato bianco, 16 triangoli per il quadrato grigio, si trova il rapporto visivo errato "un rettangolo vale due triangoli" per arrivare, dopo la sostituzione, a 16 triangoli bianchi e 24 triangoli grigi e a un rapporto delle aree 16/24 = 2/3

O si arriva a contare 22 triangoli per la piastrella grigia e 14 per quella bianca. Si arriva poi al rapporto 7/11

Dans les rares cas de décomposition en 8 triangles et 4 rectangles pour le carreau blanc, 16 triangles et 4 rectangles pour le carreau gris, on trouve le rapport visuel erroné « un rectangle vaut deux triangles » pour aboutir, après substitution à 16 triangles blancs et 24 triangles gris et à un rapport des aires 16/24 = 2/3.

Ou on arrive à conter 22 triangles pour le carreau gris et 14 pour le carreau blanc. On arrive ensuite au rapport 7/11.

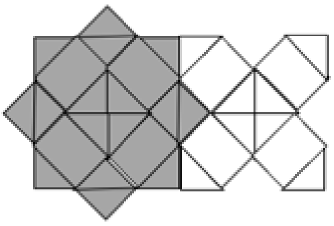
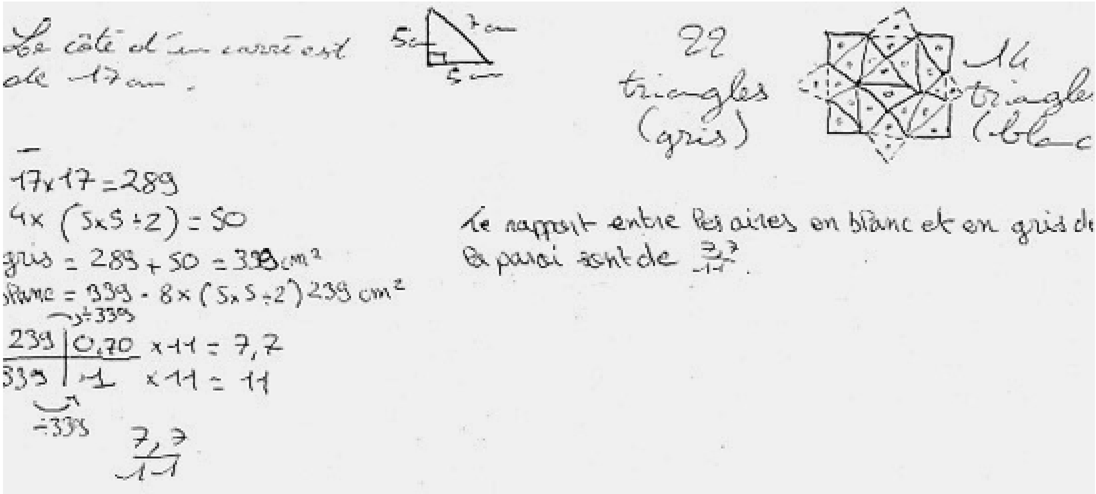
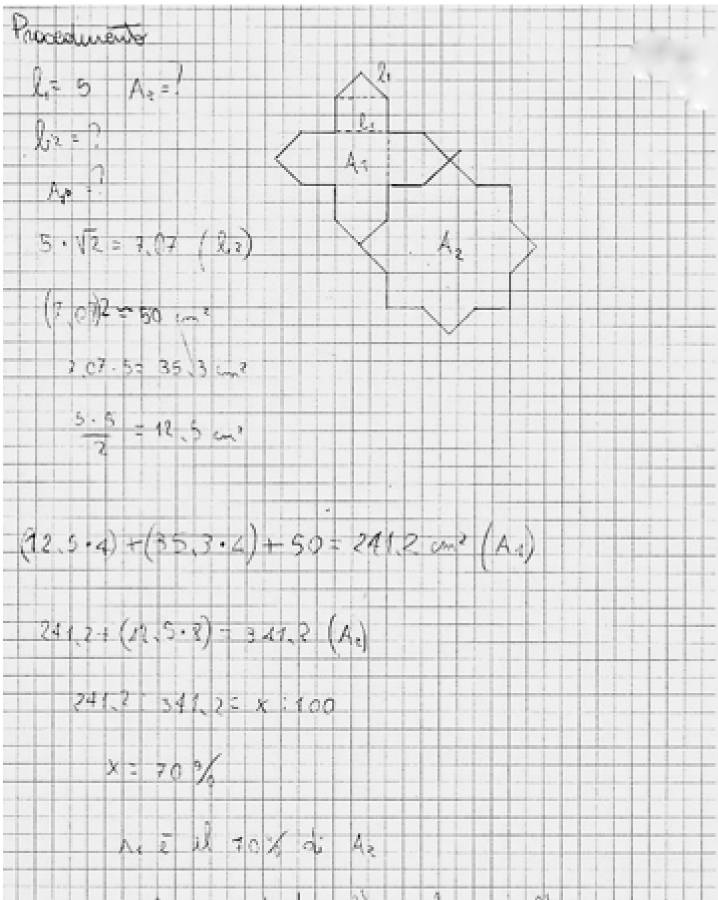


Fig. 6





2. Difficoltà nel calcolo di lunghezze e aree / Difficultés dans les calculs des longueur et aires

In alcuni elaborati del tipo analizzato nel paragrafo 1.1, gli allievi arrivano a aree rispettive di ≈ 241 e ≈ 341 cm^2 per le piastrelle bianche e grigie. Altri presentano confusioni, dimenticanze o errori nel calcolo della diagonale o dell'area dei triangoli piccoli.

Per esempio: *aire du carreau blanc 241,42 aire du gris 291,42* (l'area dei 4 triangoli non è stata aggiunta per la piastrella).

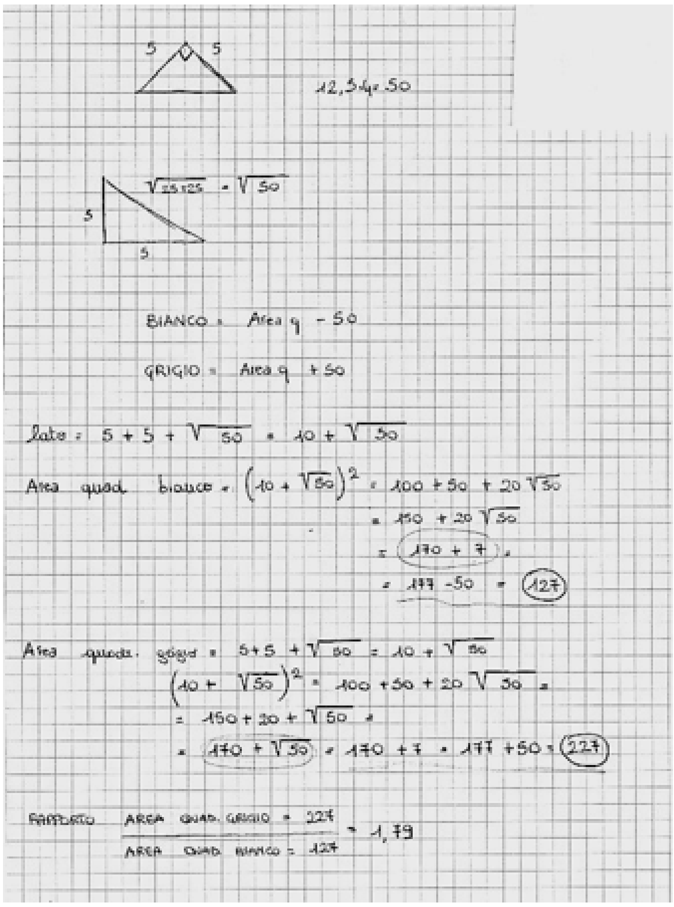
Per quanto riguarda gli elaborati del tipo 1.2, una parte degli allievi arriva a aree rispettive di 175 e 275 cm^2 per i quadrati bianchi e grigi, calcolati a partire da quella del quadrato $15^2 = 225$. Gli altri presentano delle incoerenze; vi si trovano i 225 cm^2 del quadrato della griglia, ma le aree dei quattro triangoli da aggiungere o togliere non appaiono. C'è infatti una difficoltà supplementare dovuta alla percezione erronea della griglia (3× 3): le ipotenuse di 5 cm non si accordano con i lati di 5 cm degli altri lati. In un caso questi triangoli sono considerati come equilateri.

Dans quelques copies de la catégorie 1.1 ci-dessus, les élèves aboutissent à des aires respectives de ≈ 241 et ≈ 341 cm^2 pour les carreaux blancs et gris. D'autres présentent des confusions des oublis ou des erreurs dans le calcul de la diagonale ou de l'aire des petits triangles.

Par exemple : *aire du carreau blanc 241,42 aire du gris 291,42* (l'aire des 4 triangles n'a pas été ajoutée pour le carreau gris).

En ce qui concerne les copies de la catégorie 1.2 ci-dessus, une partie des élèves aboutissent à des aires respectives de 175 et 275 cm^2 pour les carreaux blancs et gris, calculées à partir de celle du carré de la grille $15^2 = 225$. Les autres présentent des incohérences ; on y trouve bien les 225 cm^2 du carré de la grille mais les aires des quatre triangles à ajouter ou retrancher n'apparaissent pas. Il y a en effet une difficulté supplémentaire due à la perception erronée de la grille (3× 3) : les hypoténuses de 5 cm ne s'accordent pas avec les côtés de 5 cm des autres côtés. Dans un cas, ces triangles sont considérés comme équilatéraux.

Cat. 10



3. Difficoltà nel calcolo del rapporto / Difficultés dans le calcul du rapport

Le due aree delle piastrelle sono state trovate da alcuni gruppi correttamente (1.1) o con l'errore della percezione visiva (1.2); ma la risposta alla richiesta "Calcolate il rapporto tra le aree in bianco e le aree in grigio della parete.", non è stata sempre corretta,

In alcuni casi il calcolo delle aree è stato esteso a quelle della ventina di piastrelle, complete o incomplete, della figura dell'enunciato, senza prestare attenzione alla "parte intera" né aver capito che è sufficiente confrontare le aree di una sola piastrella grigia con quella di una sola piastrella bianca.

Figurano anche diversi rapporti inversi o non giustificati.

Les deux aires des carreaux ont été trouvées par une partie des groupes, correctement (1.1) ou avec l'erreur de perception visuelle (1.2) ; mais la réponse à la question « Calculez le rapport entre les aires en blanc et en gris de la paroi. » n'est pas toujours correcte.

Dans certains cas, le calcul des aires est étendu à celles de la vingtaine de carreaux, complets ou incomplets, de la figure de l'énoncé, sans prêter attention à la « paroi entière » ni avoir compris qu'il suffit de comparer les aires d'un seul carreau gris et d'un seul carreau blanc.

On trouve aussi plusieurs rapports inverses ou non justifiés.

Risposte molto parziali / Réponses très partielles

In questi elaborati figurano tentativi di scomposizione delle piastrelle tutti differenti e incompleti, difficili da classificare.

Dans ces copies, il y a des tentatives de décomposition des carreaux toutes différentes et incomplètes, difficiles à relier aux autres catégories.

Osservazioni / Observations

La media generale di «0,8» punteggi attribuiti può sembrare bassa, ma è necessario ricordare qui che la risposta del problema è la sintesi di tutti i compiti di risoluzione e bisogna pertanto interessarsi a ciascuno di essi piuttosto che a un compito "globale".

Il primo compito menzionato della rubrica "Compito per la risoluzione e saperi mobilizzati", laddove si limiti al confronto delle aree di una sola piastrella grigia e di una sola piastrella bianca, presenta una difficoltà per circa un terzo dei gruppi di allievi. Consideriamo questo compito come "evidente" e lo è per un adulto, ma non dobbiamo dimenticare che questo rapporto è solo un'approssimazione che dipende dal numero stimato di piastrelle intere della parete, nell'enunciato del problema tramite migliaia di piastrelle grigie e di piastrelle bianche.

Il secondo compito è quello di analizzare e scomporre le due piastrelle, confrontando le lunghezze dei segmenti della separazione (lati del poligono di 5 cm e altri lati dei triangoli, dei quadrati, dei rettangoli) indipendentemente dalle percezioni visive.

È qui che appare un ostacolo che dovremmo cercare di definire meglio.

Il terzo compito, è quello dei calcoli d'area con, prima, la determinazione della lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele 5, ?, 5. La grande maggioranza dei gruppi che l'hanno a calcolata sono arrivati "7,07" con il teorema di Pitagora ma ci possiamo porre delle domande sulla natura della scrittura "7,07". In alcuni casi è preceduta da $\sqrt{50}$, altre volte da $\sqrt{(25 + 25)}$ o ancora da $\sqrt{(5^2 + 5^2)}$, ma molto raramente seguito da un simbolo di approssimazione « $\approx$ ». In alcuni casi in cui questa diagonale ha permesso di determinare l'area del quadrato centrale della scomposizione (figure 6), il risultato è $7{,}07^2 = 49{,}98$ al posto di 50.

L'applicazione del teorema di Pitagora sembra ancora di tipo algoritmico e si svolge in successione: 5^2 seguito da $+ 5^2$ e da $5^2 + 5^2$ prima di passare alla menzione della $\sqrt{\ }$. Non abbiamo trovato la scrittura 2×5^2 che potrebbe esprimere il fatto che l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è il doppio dell'area dei quadrati costruiti sui cateti; e neppure la scrittura $5\sqrt{2}$.

È a livello della categoria 10 che troviamo qualche caso di calcoli tutti con $\sqrt{2}$ compreso il rapporto.

Il quarto compito, del calcolo del rapporto, dipende evidentemente dalla riuscita nei calcoli che lo precedono. Le risposte differenti da quelle che si aspetta l'adulto sono verosimilmente dovute all'interpretazione del termine "rapporto" e dall'ordine delle due grandezze che lo determinano.

La moyenne de « 0,8 » points attribués peut sembler faible, mais il faut rappeler ici que la réponse du problème est la synthèse de toutes les tâches de résolution et il faut donc s'intéresser à chacune d'entre elles plutôt qu'à une tâche « globale ».

La première tâche mentionnée dans la rubrique « Tâche de résolution et savoirs mobilisés » consistant à se limiter à la comparaison des aires d'un seul carreau gris et d'un seul carreau blanc, présente une difficulté pour un tiers des élèves environ. On la considère comme « allant de soi » pour un adulte mais il ne faut pas oublier que ce rapport n'est qu'une approximation dépendant du nombre de carreaux de la paroi entière estimé, dans l'énoncé du problème, par « des milliers de carreaux gris et de carreaux blancs ».

La deuxième tâche est d'analyser et décomposer les deux carreaux, en comparant les longueurs des segments du partage (côtés du polygone de 5 cm et autres côtés des triangles, carrés et rectangles) indépendamment des perceptions visuelles. C'est là qu'apparaît un obstacle que nous devrons chercher à mieux définir.

La troisième tâche est celle des calculs d'aire, avec, en préambule la détermination de la longueur de l'hypoténuse du triangle isocèle rectangle 5, ?, 5. La grande majorité des groupes qui l'ont calculée sont arrivés à « 7,07 » par le théorème de Pythagore mais on peut se poser des questions sur la nature de cette écriture « 7,07 ». Dans certains cas, elle est précédée de $\sqrt{50}$, d'autres fois de $\sqrt{(25 + 25)}$ ou encore de $\sqrt{(5^2 + 5^2)}$ mais très rarement suivie d'un signe d'approximation « $\approx$ ». Dans deux cas où cette diagonale a permis de déterminer l'aire d'un carré central de la décomposition (figure 6), le résultat est $7{,}07^2 = 49{,}98$ au lieu de 50.

L'application du théorème de Pythagore semble encore algorithmique et se déroule dans le temps : 5^2 suivie de $+ 5^2$ et de $5^2 + 5^2$ avant de passer à la mention de la $\sqrt{\ }$. On ne relève jamais l'écriture 2×5^2 qui pourrait exprimer que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est le double de l'aire des carrés construits sur les côtés de l'angle droit ; comme on ne relève jamais l'écriture $5\sqrt{2}$.

C'est au niveau de la catégorie 10 qu'on trouve quelques cas de calculs avec partout $\sqrt{2}$, aussi pour le rapport.

La quatrième tâche, du calcul du rapport, dépend évidemment de la réussite des précédentes. Les réponses différentes de celles que l'adulte attend sont vraisemblablement dues à l'interprétation du mot « rapport » et de l'ordre des deux grandeurs qui le déterminent.

Indicazioni didattiche / Exploitation didactique

Questo "ricco" problema si presta a sviluppare in classe tematiche che vanno da approfondimenti sul triangolo rettangolo isoscele che porta con sé il teorema di Pitagora, ai numeri irrazionali, all'approssimazione, al rapporto, ma anche al confronto di aree.
A proposito del triangolo rettangolo isoscele, la configurazione "particolare" del mosaico in oggetto ha condotto, come visto in precedenza, un certo numero di gruppi di allievi a "fidarsi" del primo colpo d'occhio e di conseguenza a non collegare ciò che vedevano nella figura alle proprietà del triangolo rettangolo isoscele, considerando che tutti i tre lati misurassero 5 cm.
In classe potrebbe essere interessante riprendere il problema, per esempio con un ingrandimento della figura, e avviare un dibattito proprio a proposito del triangolo, con riferimento al punto 1.2., descritto più sopra.
Ce problème plutôt « riche » se prête à développer en classe des sujets allant de l'analyse approfondie du triangle rectangle isocèle, qui entraine Pythagore, aux nombres irrationnels, à l'approximation, mais aussi à la comparaison des aires.
En ce qui concerne le triangle rectangle isocèle, la configuration « particulière » de la mosaïque en question a conduit, comme on l'a vu, un certain nombre de groupes d'élèves à « faire confiance » au premier regard et par conséquent à ne pas relier ce qu'ils ont vu sur la figure aux propriétés du triangle rectangle isocèle, en considérant que les trois côtés mesuraient 5 cm.
En classe, il pourrait être intéressant d'aborder le problème, par exemple avec un agrandissement de la figure, et d'engager un débat sur le triangle, en référence au point 1.2., décrit ci-dessus.

DES TRIANGLES SUR UNE PLANCHE À CLOUS / TRIANGOLI SUL GEOPIANO

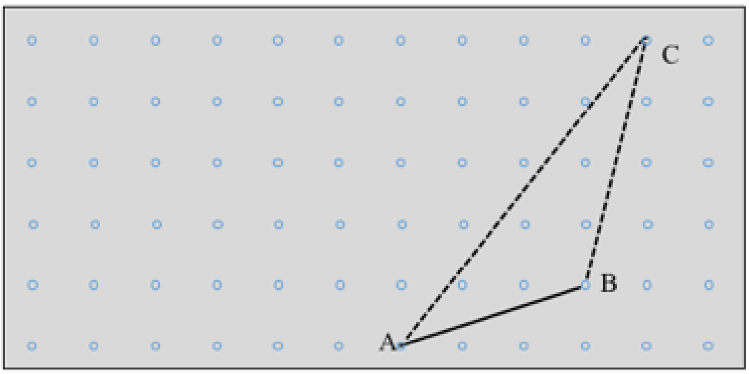
Gruppo Geometria piana "per i grandi"[1]

L'étude suivante propose une analyse a posteriori du problème « Des triangles sur une planche à clous », basée sur l'examen des copies des sections auxquelles appartiennent les membres du sous-groupe « pour les grands » du Groupe géométrie plane.

L'approfondimento proposto qui, sul problema "Triangoli sul geopiano", riporta l'analisi a posteriori degli elaborati delle sezioni alle quali afferiscono alcuni dei membri del sottogruppo "per i grandi" del Gruppo geometria piana.

DES TRIANGLES SUR UNE PLANCHE À CLOUS (Cat. 8, 9, 10)

Mathias a tendu un élastique entre les trois clous A, B, C de sa planche à clous pour former le triangle de la figure suivante :



Il maintient l'élastique sur les clous A et B et le soulève du clou C pour le fixer sur un autre clou, en cherchant à obtenir un nouveau triangle, de même aire que le triangle ABC.

Mathias se demande quels peuvent être les clous, autres que C, sur lesquels il pourrait fixer l'élastique pour obtenir d'autres triangles de même aire que le triangle ABC, dont A et B sont toujours deux des sommets.

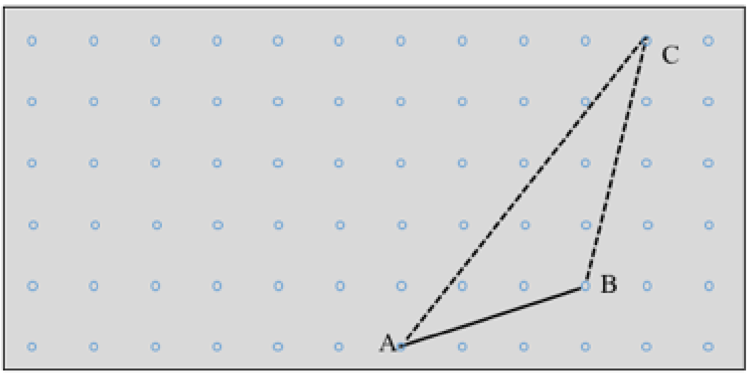
Marquez tous ces clous sur la planche.

Expliquez comment vous les avez trouvés.

[1] Membri attuali del Gruppo: Bernard Anselmo, Maddalena Asara, Paola Bajorko, Brunella Brogi, Fabio Brunelli, Concetta Caggiano, Federica Curreli, Speranza Dettori, Florence Falguères, Gloria Giacomelli, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Elisabetta Mari, Francesca Michienzi, Sofia Montrasio, Lucia Palmas, Elsa Renna, Patrizia Sabatini, Rosanna Sanna, M. Agostina Satta, Cinzia Utzeri.

TRIANGOLI SUL GEOPIANO (Cat. 8, 9, 10)

Mattia ha teso un elastico fra i tre chiodi A, B, C del suo geopiano per formare il triangolo della figura seguente:



Mantiene l'elastico sui chiodi A e B e lo solleva dal chiodo C per fissarlo su un altro chiodo, cercando di ottenere un nuovo triangolo, con la stessa area del triangolo ABC.

Mattia si chiede quali possano essere i chiodi, oltre a C, sui quali poter fissare l'elastico per ottenere altri triangoli della medesima area del triangolo ABC, di cui A e B siano sempre due dei vertici.

Segnate tutti questi chiodi sul geopiano e spiegate come avete fatto a trovarli.

Compito matematico / Tâche mathématique

Un triangolo è determinato da tre vertici che si trovano sulle intersezioni di una griglia a maglia quadrata (geopiano); nessuno dei suoi lati è posizionato su una linea della quadrettatura. Trovare tutti gli altri triangoli della stessa area nei quali due vertici dati rimangono immutati e il terzo vertice è un altro nodo della griglia.

Un triangle est déterminé par trois sommets se situant sur les intersections d'un réseau de points à maille carrée (planche à clous), aucun de ses côtés n'est situé sur une ligne du réseau. Trouver tous les autres triangles de même aire dont deux sommets donnés sont inchangés et dont le troisième sommet est un autre point du réseau.

Nozioni matematiche / Notion mathématique

triangolo, vertice, base, altezza, inventario, quadrettatura, perpendicolare, area. equivalenza, luogo geometrico, formula
triangle, sommet, base, hauteur, inventaire, quadrillage, perpendiculaire, aire. équivalence, lieu géométrique, formule

Sintesi delle procedure dell'analisi a priori osservate anche a posteriori (si veda più avanti) / Synthèse des procédures de l'analyse a priori, observées aussi a posteriori (voir plus loin)

1.1) Misura costante dell'altezza relativa ad AB e disegno della retta parallela
1.2) Con misura dell'altezza relativa ad AB e disegno della retta parallela
1.3) Con misura altezza relativa ad AB, calcolo dell'area del triangolo e disegno della retta parallela
2) Misura dell'altezza e ricerca dei chiodi giusti
3) Pavimentazione
4) formula di Pick

1.1) Longueur constante de la hauteur relative à [AB] et tracé de la parallèle
1.2) Avec mesure de la hauteur relative à [AB] et tracé de la parallèle
1.3) Avec mesure de la hauteur relative à [AB], calcul de l'aire du triangle et tracé de la parallèle
2) Mesure de la hauteur et recherche des bons clous

3) Pavage
4) Formule de Pick

Risultati / Résultats

Sur 1254 classes de 20 sections/Su circa 1254 classi di 20 sezioni

points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 8	391 (46%)	220 (26%)	101 (12%)	40 (5%)	101 (12%)	853	1,1
Cat. 9	66(32%)	61 (29%)	30 (14%)	13 (6%)	38 (18%)	208	1,5
Cat. 10	69 (36%)	31 (16%)	29 (15%)	13 (7%)	51 (26%)	193	1,7
tot	**526 (42%)**	**312 (25%)**	**160 (13%)**	**66 (5%)**	**190 (15%)**	**1254**	**1,3**

Selon les critères suivants de l'attribution des points :

- **4 points** : Réponse correcte avec les trois points (clous) C1, C2 et C3 (sans points incorrects) et explications claires (procédure par la parallèle ou hauteur constante ou calcul des trois aires, …)
- **3 points** : Réponse correcte avec les trois points (clous) C1, C2 et C3 (sans points incorrects), sans explications **ou** oubli d'une ou de deux des positions, mais avec une démarche correcte bien expliquée (voir explication précédente) **ou** 4 points « C » donnés dont 3 corrects et une 4e position erronée due à des calculs pas suffisamment précis
- **2 points** : Une ou deux positions trouvées mais sans explication **ou** calcul correct de l'aire du triangle ABC et au moins une tentative décrite de recherche d'autres positions possibles de « C » avec des calculs d'aires détaillés
- **1 point** : Calcul de l'aire du triangle ABC à partir de mesurages **ou** tentative de détermination de l'aire du triangle ABC par pavage sans arriver au résultat correct **ou** d'autres débuts cohérents de recherche (par exemple affirmation que les triangles ayant tous la même base [AB] et la même aire, ils doivent avoir la même hauteur) **ou** dessin du triangle symétrique du triangle ABC par rapport à l'axe du côté [AB], ce triangle ayant la même aire que ABC, mais le troisième sommet n'est pas sur un clou
- **0 point** : Incompréhension du problème

Secondo i criteri seguenti dell'attribuzione dei punteggi:

- **4 punti**: Risposta corretta con i tre punti (chiodi) C1, C2 e C3 (senza punti errati) e spiegazioni chiare (procedura tramite la parallela o altezza costante o calcolo delle tre aree, ...)
- **3 punti**: Risposta corretta con i tre punti (chiodi) C1, C2 e C3 (senza punti errati) ma senza spiegazioni **oppure** dimenticanza di una o due posizioni, ma con una procedura corretta e ben spiegata (vedi spiegazione precedente) **oppure** trovati quattro punti "C" di cui tre corretti e la 4a posizione errata a causa di calcoli non sufficientemente precisi
- **2 punti**: Una o due posizioni trovate ma senza spiegazione **oppure** calcolo corretto dell'area del triangolo ABC e almeno un tentativo di ricerca di altre possibili posizioni di "C" con calcoli di area dettagliati
- **1 punto**: Calcolo dell'area del triangolo ABC mediante misurazioni **oppure** tentativo di determinazione dell'area del triangolo ABC senza arrivare al risultato corretto **oppure** altri inizi di ricerca coerenti (per esempio affermazione che tutti i triangoli aventi la stessa base AB e la stessa area, devono avere la stessa altezza) **oppure** disegno del triangolo simmetrico del triangolo ABC rispetto all'asse del lato AB, questo triangolo ha la stessa area di ABC, ma il terzo vertice non è su un chiodo
- **0 punto**: Incomprensione del problema

Osservazioni a posteriori / Observations a posteriori

L'analisi a posteriori è stata svolta sugli elaborati di sezioni cui afferiscono i membri del gruppo: Bernard Anselmo (Bourg en Bresse), Paola Bajiorko (Romagna), Federica Curreli-Cinzia Utzeri (Cagliari), Florence Falguère (Franche-Comté), Francesca Michienzi-Elisabetta Mari (Parma), Concetta Caggiano (Puglia), Elsa Renna (Rozzano), M. Maddalena Asara-Speranza Dettori-Rosanna Sanna-M. Agostina Satta (Sassari), Brunella Brogi-Fabio Brunelli-Gloria Gaicomelli (Siena). Gli elaborati della Svizzera romanda sono stati analizzati a posteriori da Lucia Grugnetti e François Jaquet.

L'analyse a posteriori a été réalisée sur les copies des sections des membres du groupe : Bernard Anselmo (Bourg en Bresse), Paola Bajiorko (Romagna), Federica Curreli-Cinzia Utzeri (Cagliari), Florence Falguère (Franche-Comté), Francesca Michienzi-Elisabetta Mari (Parma), Concetta Caggiano (Puglia), Elsa Renna (Rozzano), Sassari (M. maddalena Asara-Speranza Dettori-Rosanna Sanna-M. Agostina Satta), Brunella Brogi-Fabio Brunelli-Gloria Gaicomelli (Siena). Le copies de Suisse romande ont été analysées par Lucia Grugnetti et François Jaquet.

Sui 511 elaborati esaminati di categoria 8 e 244 delle categorie 9 e 10, delle sezioni BB, CA, FC, PR, PU, RZ, SI, SR e SS, solo una parte delle classi ha trovato con procedura corretta almeno un chiodo con ragionamento corretto.

Sur les 511 copies examinées en catégorie 8 et 244 copies en catégories 9 et 10, des sections BB, CA, FC, PR, PU, RZ, SI, SR et SS, seule une partie des classes a trouvé au moins un clou en suivant une procédure et un raisonnement corrects.

L'analisi a posteriori degli elaborati ha evidenziato che le procedure previste nell'analisi a priori, sintetizzate più sopra, sono state seguite, in particolare, da coloro che hanno risolto correttamente il problema.

L'analyse a posteriori des copies a montré que les procédures prévues dans l'analyse a priori, et reprises plus haut, ont été mises en œuvre en particulier, par ceux qui avaient correctement résolu le problème.

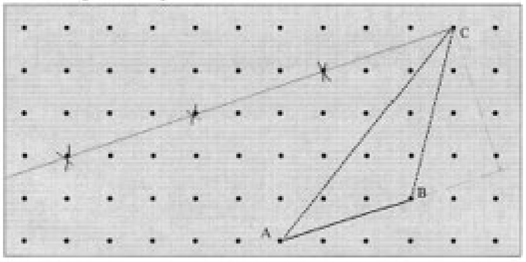
Esempio (cat. 8) di procedura corretta prevista nell'analisi a priori, che si trova, oltre tra gli elaborati di BB, anche tra quelli delle altre sezioni e che testimonia l'uso di un ragionamento deduttivo elaborato, come sottolinea Bernard Anselmo nella sua analisi.

Exemple (cat. 8) de production correcte prévue dans l'analyse a priori, qu'on trouve, parmi des copies de BB mais aussi dans les autres sections et qui témoigne de la mise en œuvre d'un raisonnement déductif élaborée, comme le souligne Bernard Anselmo dans son analyse

(Per conoscere l'area di un triangolo è sufficiente conoscere solo due valori su questo triangolo. La base e l'altezza. È sufficiente non cambiare mai questi due valori perché il triangolo mantenga la medesima area. Non possiamo cambiare [AB] dunque abbiamo tracciato una retta parallela ad [AB] passante per C che è il vertice dell'altezza e così per tutti i chiodi su questa parallela dove potrebbe essere fissato l'elastico per ottenere altri triangoli con la medesima area del triangolo ABC, sapendo che A e B sono sempre due vertici.)

18. DES TRIANGLES SUR UNE PLANCHE À CLOUS (Cat. 8, 9, 10)

Mathias a tendu un élastique entre les trois clous A, B, C de sa planche à clous pour former le triangle de la figure suivante :



Il maintient l'élastique sur les clous A et B et le soulève du clou C pour le fixer sur un autre clou, en cherchant à obtenir un nouveau triangle, de même aire que le triangle ABC.

Mathias se demande quels peuvent être les clous, autres que C, sur lesquels il pourrait fixer l'élastique pour obtenir d'autres triangles de même aire que le triangle ABC, dont A et B sont toujours deux des sommets.

Marquez tous ces clous sur la planche.

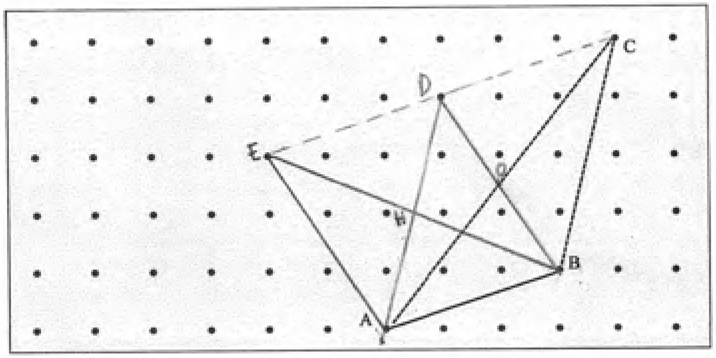
Expliquez comment vous les avez trouvés.

Pour connaître l'aire d'un triangle, il suffit de conna
~~Sele~~ seulement 2 valeurs sur ce triangle: la base et s
hauteur. Il suffit de ne jamais changer ces 2 valeur
pour que le triangle garde la même ~~X~~ aire. L'on ne
peut pas changer [AB], donc l'on a tracér une droit
~~passe~~ parallèle à [AB] passant par C qui est le somm
concerné par la hauteur. Ainsi tous les ~~point~~ clous sur cette
parallèle ~~on~~ pourraient être fixer à l'élastique po
obtenir d'autre triangles de même aire que le triangle
ABC, sachant que A et B sont toujours deux sommets.

In alcuni casi, gli allievi hanno risolto correttamente (talvolta parzialmente) ricorrendo a procedure non contemplate nell'analisi a priori:

- costruzione di un parallelogramma "doppio" del triangolo ABC e calcolo dell'area.

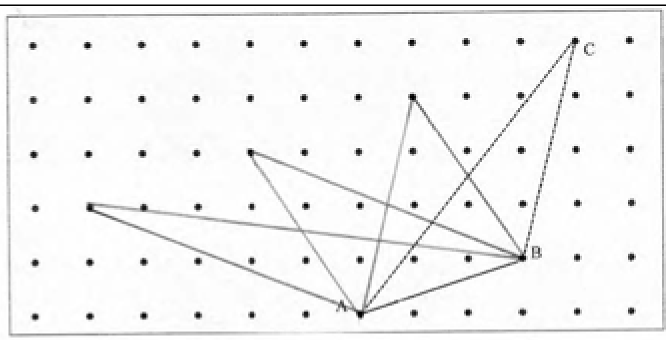
Dans certains cas, les élèves ont résolu correctement (parfois partiellement) le problème en utilisant des procédures non présentes dans l'analyse a priori :
- construction d'un « double » parallélogramme du triangle ABC et calcul d'aire



o ancora con le procedure seguenti, alle quali l'attribuzione dei punteggi assegnava 1 punto:
- ritaglio del triangolo ABC;
- conteggio dei chiodi (senza ricorrere alla formula di Pick);
- disegno del triangolo "simmetrico";
- diversi tentativi;

ou encore avec les procédures suivantes, auxquelles l'attribution des points a octroyé 1 point :
- découpage du triangle ABC ;
- comptage des clous (sans recourir à la formule de Pick) ;
- dessin du triangle que les élèves imaginent « symétrique » ;
- autres tentatives.

Cat. 9 (conteggio dei chiodi, senza ricorrere alla formula di Pick / (comptage des clous - sans recourir à la formule de Pick)

Elaborato corretto, nel quale il conteggio dei chiodi al quale sono ricorsi gli alunni, ha permesso loro di spostare il vertice C lungo una retta parallela alla base AB. Tale retta non compare graficamente, si intuisce che gli alunni ne possiedono una immagine mentale (Brogi, Giacomelli). Copie correcte, dans laquelle le comptage des clous utilisé par les élèves, leur a permis de déplacer le sommet C le long d'une ligne droite parallèle à la base AB. Cette ligne droite n'apparaît pas graphiquement; on peut penser que les élèves en ont une image mentale (Brogi, Giacomelli). *(Puisque la formule pour le calcul de l'aire du triangle est b·h/2, et sa base ne change pas (côté AB), il faut trouver un triangle de même hauteur. Puisque la base est inclinée de 4 points vers la gauche et 1 point vers le bas, le sommet supérieur doit se déplacer de 4 points vers la gauche et 1 point vers le bas*)	 Dato che la formula per calcolare l'area del triangolo è $\frac{b \cdot h}{2}$ e la base non cambia (lato AB) dobbiamo trovare un triangolo che abbia la stessa altezza. Dato che la base è inclinata di 4 punti verso sinistra e 1 ~~verso~~ verso il basso, il vertice in alto dovrà spostarsi di 4 punti verso sinistra e 1 verso il basso

Nel complesso, la maggior parte degli alunni ha compreso il compito matematico, quello di costruire con un filo elastico altri triangoli equivalenti di quello dato; tuttavia, nella ricerca dei triangoli equivalenti, in molti elaborati, emergono diversi errori dovuti a misconcezioni relative al calcolo dell'area (formula errata) e al concetto di altezza di un triangolo come sottolineato, in particolare, da Brunella Brogi e Gloria Giacomelli che sottolineano poi che anche quando la formula dell'area è corretta, la misura dell'altezza è presa su un segmento che è disegnato in posizione verticale, passante per il vertice C, ma non perpendicolare alla base AB, La misura di tale "altezza"

viene espressa o in cm o in numero di chiodi. È emerso anche il misconcetto secondo il quale il “piede” dell’altezza si trova sempre nel punto medio della base.
In altri casi gli allievi sono andati alla ricerca di strategie non previste e in altri casi non adeguate alla risoluzione del problema.
Si è rilevata una differenza “cognitiva” tra gruppi che:

- risolvono con la procedura similare a quella dell’analisi a priori del tipo misura dell’altezza relativa ad AB, calcolo dell’area del triangolo e retta parallela e che utilizzano un linguaggio già ben strutturato, oppure con una procedura che mette in gioco l’altezza rispetto al lato AB e la sua successiva traslazione;
- gruppi che mostrano ancora confusione fra area e perimetro;
- altri per i quali l’area di un triangolo si ottiene calcolando il semiprodotto fra due lati.

Tra questi “estremi”, oltre ai già citati gruppi che hanno trovato con procedura corretta almeno un chiodo corretto, ci sono stati diversi gruppi che non hanno trovato i chiodi corretti, ma che hanno comunque mostrato di essersi in qualche modo appropriati del problema, senza però rendersi conto che, ad esempio, utilizzare il ritaglio del triangolo dato o disegnare una sorta di simmetria assiale non soddisfaceva i due vincoli posti dal problema: stessa area e terzo vertice su un chiodo contemporaneamente.
In alcuni casi, gli alunni non sono riusciti a mantenere il controllo su tutte le condizioni poste dal problema e, nel tentativo di risolverlo, hanno proposto figure sbagliate perché, ad esempio, ottenute sollevando l’elastico da tutti i vertici, non solo da C, o perché non hanno compreso che il geopiano su cui individuare i triangoli equivalenti corrispondeva a quello raffigurato nel disegno.

Dans l'ensemble, la plupart des élèves ont compris la tâche mathématique, celle de construire avec un fil élastique d'autres triangles équivalents à celui donné ; cependant, dans la recherche de triangles de mêmes aires, plusieurs erreurs émergent en raison d'idées fausses liées au calcul de l'aire (formule incorrecte) et au concept de hauteur d'un triangle, comme l’ont soulignée, en particulier, Brunella Brogi et Gloria Giacomelli, qui disent que même lorsque la formule de l'aire est correcte, la mesure de la hauteur est prise sur un segment qui est dessiné en position verticale, passant par le sommet C, mais non perpendiculaire à la base (AB), la mesure de cette "hauteur" est exprimée soit en cm soit en nombre de clous. L'idée fausse selon laquelle le « pied » de la hauteur est toujours au milieu de la base est également apparue.

Dans d'autres cas, les élèves ont mis en œuvre des procédures non prévues et dans certains cas, inadaptées pour résoudre le problème.

Il y a une différence « cognitive » entre les groupes d’élèves :

- ceux qui résolvent le problème en utilisant une procédure proche de celles prévues par l'analyse a priori, soit avec mesure de la hauteur relative à (AB), calcul de l'aire du triangle et tracé de la droite parallèle à (AB) passant par C, dans une démarche déjà bien structurée, soit avec une procédure qui met en jeu la hauteur relative au côté [AB] et sa translation ;
- ceux qui confondent encore l'aire et le périmètre ;
- ceux qui calculent l'aire d'un triangle en effectuant le demi produit des mesures de deux des côtés.

Parmi ces « extrêmes », en dehors des groupes mentionnés qui ont trouvé au moins un clou correct en utilisant une procédure correcte, il y a eu plusieurs groupes qui n’y sont pas parvenus. Néanmoins certains d’entre eux se sont en partie approprié le problème, sans cependant, se rendre compte qu’utiliser par exemple la découpe du triangle donné ou que dessiner une sorte de symétrie axiale ne satisfaisait pas aux deux contraintes posées par le problème : même base et troisième sommet sur un clou.

Dans certains cas, les élèves n’ont pas assimilé toutes les conditions posées par le problème et ont proposé en réponse des figures fausses, car ils les ont par exemple obtenues en soulevant l'élastique de tous les sommets et pas seulement du point C, ou parce qu'ils n’ont pas compris que la planche à clous sur laquelle on leur demandait d’identifier les triangles de même aire correspondait à celle présentée sur le dessin.

Gli **ostacoli** principali evidenziati sono stati i seguenti:

1. La mancata identificazione dell’altezza relativa al lato AB: gli allievi non si sono resi conto che il piede dell’altezza (H), intersezione delle due rette (base e altezza), non cade sulla base, ma sul suo prolungamento. In effetti, la definizione di altezza come: “segmento che parte da un vertice e cade perpendicolarmente sul lato opposto” potrebbe condurre gli allievi a considerare che l’altezza debba per forza di cose cadere sul lato, non riconoscendo perciò quelle che cadono sul suo prolungamento.
2. La mancata identificazione della posizione in cui potrebbero essere posti i vertici diversi da C quando l'altra estremità H si sposta sulla retta AB; questi punti costituiscono il luogo geometrico dell’estremità del "segmento altezza", di misura costante, che è la retta parallela alla base passante per C.
3. La non appropriazione del concetto di altezza, spesso considerata corrispondente ad uno dei lati del triangolo.
4. La difficoltà nel tracciare l’altezza, soprattutto quando le figure geometriche “non allineate” con l’orizzontale e la verticale e in particolare nel caso in cui l’altezza cada sul prolungamento del lato.

Gli **errori** principali emersi sono stati i seguenti:

1. Nel calcolo dell'area:
   a. calcolo del semiprodotto della misura di due lati del triangolo;
   b. calcolo del semiprodotto 4 × 5 /2 corrispondente ai lati del triangolo rettangolo la cui ipotenusa è AC e i cui lati sono orizzontali e verticali;
   c. calcolo del semiprodotto della base e dell'altezza con misura errata di quest'ultima.
2. Disegno di una "sorta" di triangolo simmetrico del triangolo ABC facendo coincidere il vertice C1 con uno dei chiodi.
3. Applicazione errata della formula di Pick: gli allievi hanno considerato triangoli equivalenti quelli che avevano lo stesso numero di chiodi interni o lo stesso numero di quelli esterni.

Les principaux **obstacles** mis en évidence sont les suivants :

1. Difficulté à identifier la hauteur relative au côté [AB]. Les élèves n'ont pas réalisé que H, le pied de la hauteur, intersection de deux droites (base et hauteur), n'appartient pas au côté, mais à la droite qui le porte. En fait, la définition de la hauteur comme : « segment issu d'un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet » pourrait amener les élèves à considérer que la hauteur doit nécessairement « tomber » sur le côté.
2. Difficulté à identifier les positions possibles des sommets pour lesquelles l'aire du triangle de base [AB] reste constante ; ces points constituent le lieu géométrique de l'ensemble des points (sur le dessin fourni) situés à une distance donnée de la droite (AB) et qui se trouvent sur une parallèle à cette base.
3. La non appropriation du concept de hauteur souvent identifiée par les élèves à l'un des côtés du triangle.
4. La difficulté de tracer la hauteur, surtout lorsque les figures géométriques ne sont pas en position prototypique et si de plus le pied de la hauteur n'appartient pas au côté mais à la droite qui le porte.

Les principales erreurs qui sont apparues sont les suivantes :

1. Dans le calcul de l'aire :
   a. calcul du demi-produit des mesures de deux des côtés du triangle ;
   b. calcul du demi-produit 4 × 5 /2 correspondant aux mesures des côtés du triangle rectangle dont l'hypoténuse est AC et les côtés sont horizontaux et verticaux
   c. calcul du demi-produit de la base par la hauteur avec mesure incorrecte de cette dernière.
2. Dessin d'une « sorte » de triangle ABC1 symétrique du triangle ABC en cherchant à faire coïncider le sommet C1 avec l'un des clous.
3. Mauvaise application de la formule de Pick : des élèves ont considéré comme étant équivalents des triangles qui avaient le même nombre de clous internes ou le même nombre de clous externes.

In merito ad ostacoli ed errori rilevati dall'analisi degli elaborati, riportiamo qui, come esemplificazione, una parte dell'analisi svolta da Brunella Brogi e Gloria Giacomelli sugli elaborati delle categorie 8, 9 e 10 della sezione di Siena.

En ce qui concerne les obstacles et les erreurs détectés par l'analyse des copies, nous rapportons ici, à titre d'exemple, une partie de l'analyse réalisée par Brunella Brogi et Gloria Giacomelli sur les copies des catégories 8, 9 et 10 de la section de Sienne.

La classificazione degli errori non è sempre facile, poiché lo stesso elaborato ne riporta, non di rado, più di uno di tipologia diversa.

La classification des erreurs n'est pas toujours facile, car dans une même copie il peut y avoir plusieurs types d'erreur.

Difficoltà relative al calcolo dell'area e al concetto di altezza

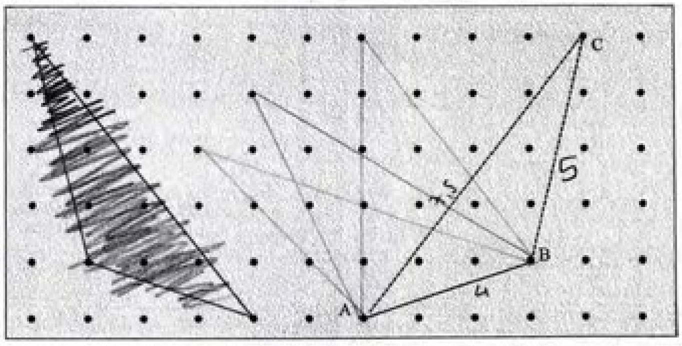
In ciascuna categoria, alcuni elaborati evidenziano la difficoltà degli alunni relativamente al concetto di area e alla conoscenza di strategie corrette per determinarla. Soprattutto in categoria 8 è frequente il ricorso alla misurazione dei lati del triangolo dato, o di altri disegnati dagli alunni, e delle altezze, tracciate in modo non sempre corretto.

Spesso gli alunni riferiscono di aver determinato l'area, ma senza riportare alcuna indicazione in merito alla procedura utilizzata e di aver individuato (in modo non sempre corretto) i chiodi diversi da C, affinché i triangoli siano equivalenti a quello dato: *"Abbiamo calcolato l'area del triangolo ABC e abbiamo messo il punto C_1 nel modo opportuno in cui dovrebbe tornare la stessa area con il punto C."* (Cat. 8).

Plusieurs copies, dans chaque catégorie, montrent les difficultés des élèves par rapport au concept d'aire et plus précisément celles liées aux connaissances des stratégies qui permettent de déterminer celle d'un triangle. En particulier, dans la catégorie 8, l'utilisation de la mesure des côtés du triangle donné, ou d'autres tracés par les élèves, et des hauteurs tracées de manière incorrecte, est fréquente.

Souvent, les élèves déclarent avoir déterminé l'aire, mais sans donner aucune indication sur la procédure utilisée, et avoir identifié (d'une manière pas toujours correcte) les clous autres que C pour que les triangles formés soient équivalents à celui donné : *« Nous avons calculé l'aire du triangle ABC et nous plaçons le point C_1 de façon à ce qu'il ait la même aire qu'avec le point C. »* (Cat. 8).

Vengono utilizzate formule sbagliate come, per esempio, la semisomma dei lati diversi dalla base AB.
Des formules incorrectes sont utilisées telles que, par exemple, la demi-somme de côtés autres que la base AB.

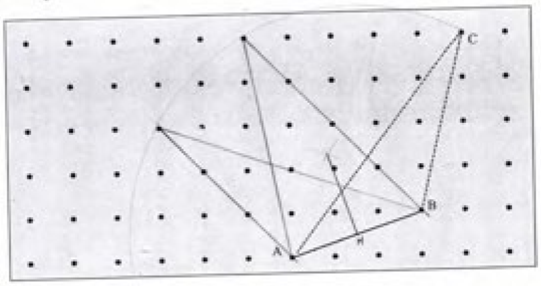


ABBIAMO CALCOLATO L'AREA DEL TRIANGOLO ABC ED È DI 6,25 cm² CON IL RIGHELLO ABBIAMO MISURATO ALTRI LATI LA CUI SOMMA DOVEVA ESSERE DI 12,5 cm PER OTTENERE UN AREA DI 6,25 cm²

In alcuni casi si ritiene che i triangoli inscritti in una semicirconferenza siano tutti equivalenti tra loro, come nell'esempio di cat. 9.
Dans certains cas, on pense que les triangles inscrits dans un demi-cercle sont tous équivalents entre eux, comme dans l'exemple de cat. 9.

(Abbiamo trovato il punto medio di AB e abbiamo tracciato l'arco di circonferenza con centro in M e lunghezza MC. I punti del geopiano che incontra sono i vertici dei triangoli con area equivalente all'area del triangolo ABC.)

(*Nous avons trouvé le milieu de AB et tracé l'arc de cercle avec le centre en M et la longueur MC. Les points de la planche à clous qu'il rencontre sont les sommets des triangles avec une aire équivalente à l'aire du triangle ABC.)*



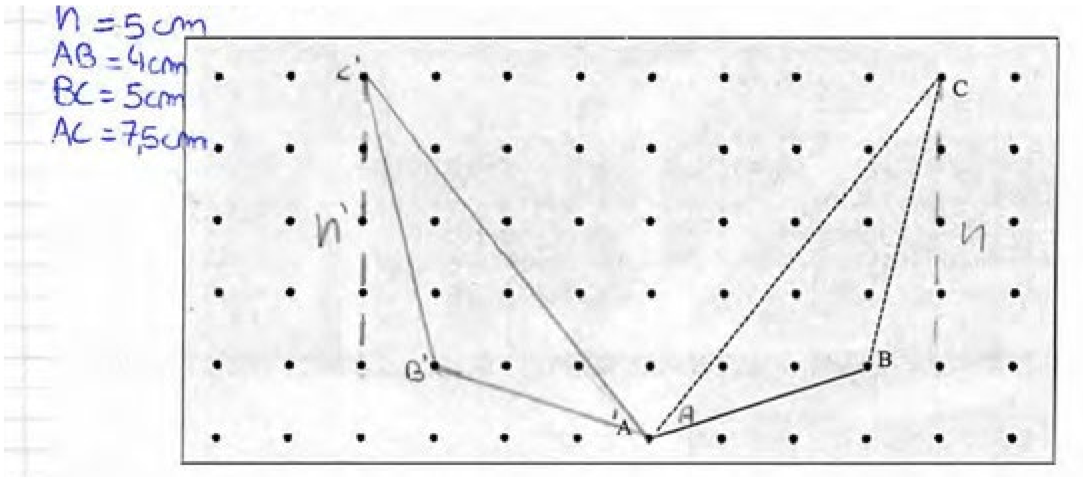
Mantiene l'elastico sui chiodi A e B e lo solleva dal chiodo C per fissarlo su un altro chiodo, cercando di ottenere un nuovo triangolo, con la stessa area del triangolo ABC.

Mattia si chiede quali possono essere i chiodi, oltre a C, sui quali poter fissare l'elastico per ottenere altri triangoli della medesima area del triangolo ABC, di cui A e B siano sempre due dei vertici.

Segnate tutti questi chiodi sul geopiano e spiegate come avete fatto a trovarli.

Abbiamo trovato il punto medio di AB e abbiamo tracciato l'arco di circonferenza con centro in M e lunghezza MC. I punti del geopiano che incontra sono i vertici dei triangoli con area equivalente all'area del triangolo ABC.

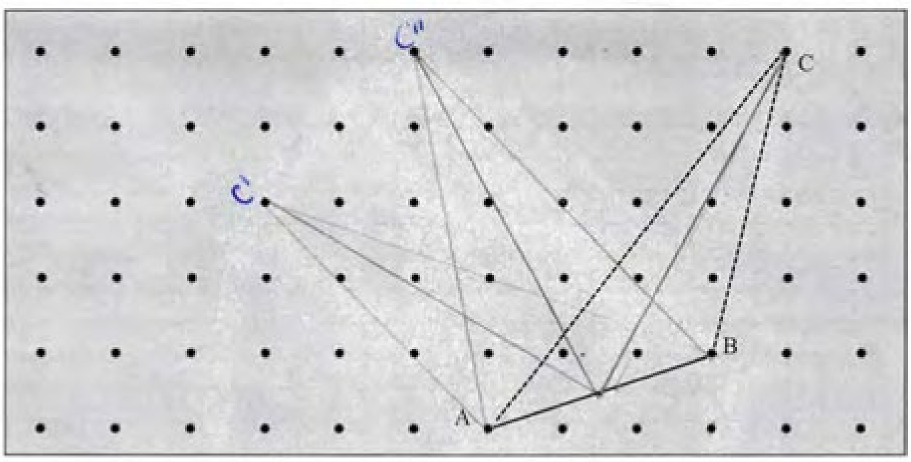
Anche quando la formula corretta è nota, la misura dell'altezza è presa su un segmento che non è perpendicolare alla base AB, ma è disegnato in posizione verticale rispetto al geopiano, come mostra la figura seguente (cat. 8)
Même lorsque la formule correcte est connue, la mesure de la hauteur est prise sur un segment qui n'est pas perpendiculaire à la base AB, mais dessiné en position verticale sur la planche à clous, comme le montre la figure suivante (cat. 8)



In alcuni casi, è stato scelto di considerare un'altezza "interna", ma prevale il misconcetto secondo cui il "piede" dell'altezza si trova sempre nel punto medio della base, senza verificare l'esistenza della perpendicolarità tra i due segmenti.

Dans certains cas, les élèves ont choisi une hauteur « interne », mais avec l'idée fausse selon laquelle le « pied » de la hauteur est toujours au milieu de la base, sans vérifier l'existence d'une perpendicularité entre les deux segments.

Cat. 8



Abbiamo trovato l'altezza ~~dividendo o AB~~ facendo $\overline{AB}:2$ (la metà di $\overline{AB}$), l'abbiamo collegato al vertice $A\hat{C}B$ e poi, con la misura dell'altezza, abbiamo tracciato un arco con il compasso ~~un arco~~, e poi abbiamo calcolato
*aperto a 6 cm

Le aree che tornavano, quindi i triangoli ABC, ABC' e ABC'' ~~sono~~ hanno la stessa area

L'area è 11,1 cm^2

I chiodi ~~sono~~ trovati sono indicati con le lettere $\hat{C}'$ e $\hat{C}''$

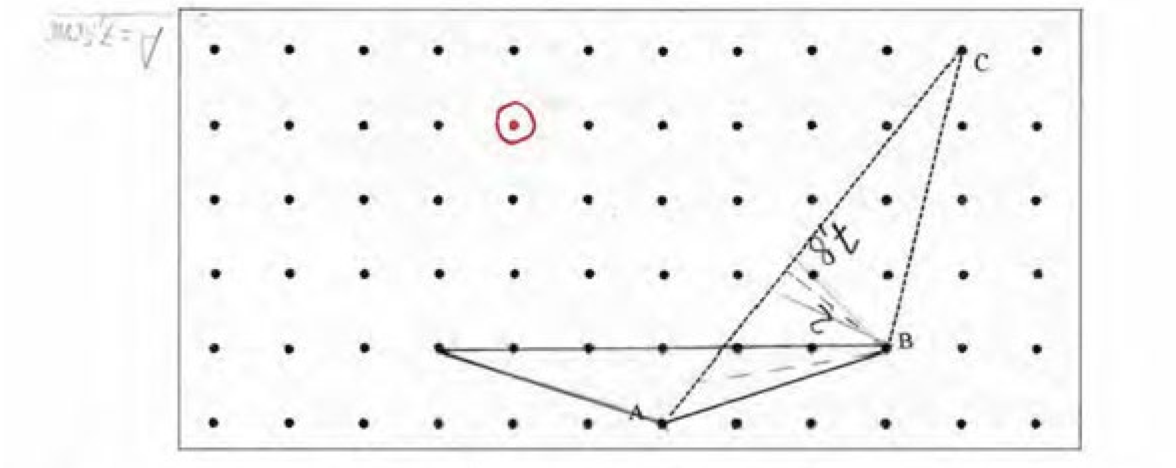
In effetti, le difficoltà relative al concetto di altezza di un triangolo appare in elaborati di tutte e tre le categorie.

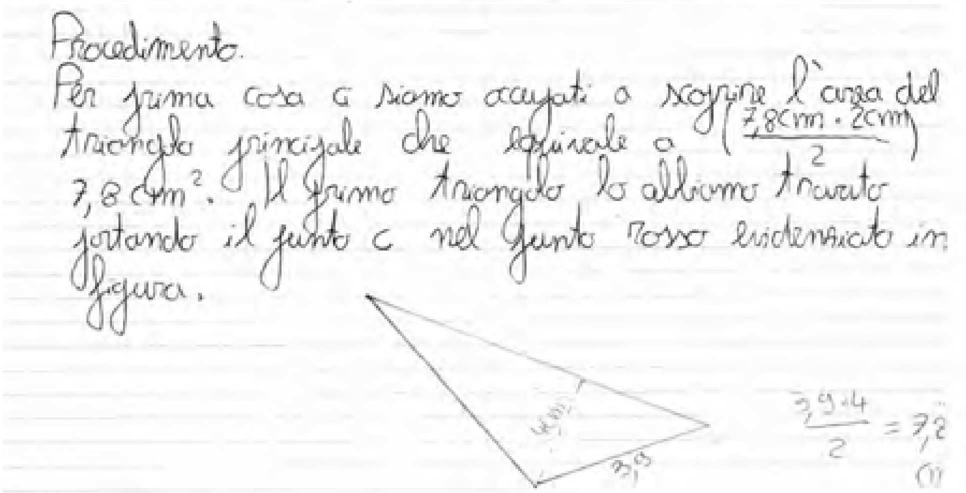
En fait, les difficultés liées au concept de hauteur d'un triangle apparaissent dans les copies des trois catégories.

Per determinare l'area del triangolo ABC, quando si ricorre alla misurazione e all'applicazione della formula A = bxh/2, numerosi elaborati evidenziano la preferenza del ricorso a un'altezza "interna" al triangolo. Per tale motivo, si intuisce che il foglio sia stato girato, affinché il lato maggiore AC possa trovarsi in posizione orizzontale per essere assunto come base, rispetto alla quale disegnare l'altezza, che in tale modo risulta essere interna al triangolo, come, ad esempio nei casi che seguono.

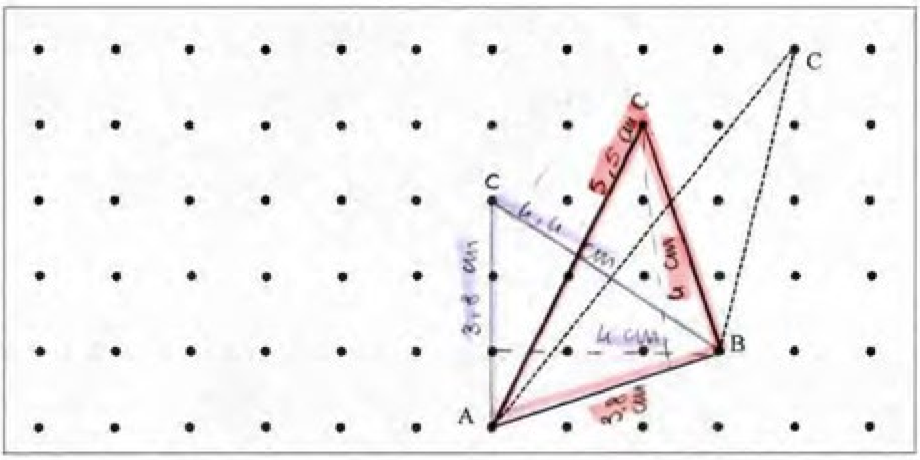
Pour déterminer l'aire du triangle ABC par le recours à la mesure et de la formule A = bxh / 2, de nombreuses copies mettent en évidence que les élèves préfèrent utiliser une hauteur située « à l'intérieur » du triangle. Dans cette optique, ils tournent la feuille de façon à ce que le côté plus long AC se trouve dans une position horizontale et le considèrent comme une base permettant de tracer la hauteur à l'intérieur du triangle, comme dans les exemples qui suivent :

Cat. 9:





Cat. 10



Per trovare il triangolo ABC_2, abbiamo inizialmente trovato e misurato i lati del triangolo iniziale, già fornito dal problema e ne abbiamo calcolato l'AREA.

$\overline{AB} = 3,8$ cm $\overline{AC} = 7,6$ cm $\overline{BC} = 5$ cm $h = 2$ cm $A_{ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{7,6 \cdot 2}{2} = 7,6\ cm^2$. Dopo di chi abbiamo cercato dei triangoli che avessero i lati multipli di $7,6\ cm^2$.

Perciò, siamo giunti alla conclusione, trovando il triangolo ABC_2 (che abbiamo disegnato sopra)

Successivamente ne abbiamo cercati altri con la stessa altezza e la stessa base

$A_{ABC_3} = \cancel{3,8}\ \frac{3,8 \cdot 4}{2} = 7,6\ cm^2$

$A_{ABC_3} = \frac{3,8 \cdot 4}{2} = 7,6\ cm^2$

Indicazioni didattiche / Indications didactiques

Alla luce dell'analisi a posteriori condotta dai membri del gruppo, Rosanna Sanna e Maria Agostina Satta, della sezione di Sassari, hanno svolto diverse attività in classe a partire dal problema in oggetto (si veda anche la descrizione del loro poster, illustrato al Convegno di Alghero), per arrivare poi a proporre alcune indicazioni didattiche.

Questo problema, come altri del RMT ha messo ben in evidenza le difficoltà incontrate dagli allievi laddove hanno a che fare con le altezze di figure geometriche "non allineate" con l'orizzontale e la verticale (spesso poco prese in considerazione in manuali scolastici, benché non in tutti e che diventano figure "standard", come si vedrà più avanti) o in presenza di triangoli ottusangoli, o ancora laddove venga loro proposta solo la definizione di altezza come "segmento che parte da un vertice e cade perpendicolarmente sul lato opposto". Da tali constatazioni scaturite dall'analisi anche di questo problema potrebbe essere utile:

1. Considerare come definizione di altezza di un triangolo "la distanza fra un lato, scelto come base, e il suo vertice opposto".
2. Discriminare tra "altezza come segmento" o parte di retta e "altezza come misura".
3. Superare la misconcezione dell'altezza intesa solo come verticalità.
4. Presentare figure geometriche rappresentate con orientazione diversa da quella orizzontale e verticale (B. Brogi, 2019).
5. Superare la misconcezione che il "piede" dell'altezza si trova sempre nel punto medio della base.
6. Riconoscere altezze in figure in cui il piede dell'altezza si trova sulla retta a cui appartiene la base.
7. Sviluppare il concetto di luogo geometrico determinato dalla traslazione dell'estremità del segmento altezza (di misura costante) quando questa si sposta su una retta. Ciò consentirà di acquisire che triangoli che hanno la stessa base e la stessa altezza sono equivalenti.
8. Proporre problemi in cui l'altezza non viene esplicitata, tratti ad esempio dalla Banca dei problemi dell'ARMT.
9. Progettare percorsi d'apprendimento utilizzando problemi tratti dalla Banca dell'ARMT, limitando il ricorso agli esercizi ripetitivi di calcolo delle aree presenti nei libri di testo.

Il problema ***Il ritaglio di triangoli*** (ral. 19.II.13 ; cat. 6-8) può concorrere ad abituare gli allievi a svincolarsi dal disegnare triangoli in posizione standard. La risoluzione di questo problema condurrà all'osservazione di quelle che con Raymond Duval (2020) vengono indicate come "unità figurali 1D" che permetterà di individuare i lati di uguale lunghezza del triangolo isoscele come diagonale del rettangolo 4x2. Un problema come "Il ritaglio di triangoli" permette di far venire alla luce ostacoli caratteristici a proposito di nozioni che sembrerebbero acquisite, come il triangolo isoscele, la sua posizione e la congruenza di segmenti. Si osserva chiaramente che l'immagine di triangolo isoscele che hanno gli allievi è quella di una figura con tre lati di cui uno è orizzontale e gli altri due, congruenti, sono obliqui. Si tratta di una figura simmetrica con asse verticale (nel senso di Lismont & Rouche, 2001), dove l'oggetto di riferimento è "il tetto" (es. Marchini et al., 2002). Il termine "base" fa sì che quel lato non solo sia orizzontale ma anche "in basso". Il modello "bandiera", (ancora nel già citato Marchini et al.), è molto meno frequente.

Nella Banca di problemi si trovano diversi problemi che affrontano problematiche discusse in precedenza.

À la lumière de l'analyse a posteriori réalisée par les membres du groupe, Rosanna Sanna et Maria Agostina Satta, de la section Sassari, ont proposé diverses activités en classe à partir du problème en question (voir aussi la description de leur « poster », affiché lors de la rencontre d'Alghero), pour ensuite en tirer quelques indications didactiques.

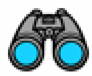
Ce problème, comme d'autres du RMT, a clairement mis en évidence les difficultés rencontrées par les élèves concernant les hauteurs des figures géométriques dont les côtés ne sont ni horizontaux et ni verticaux (souvent peu présentes dans les manuels scolaires, voire pas du tout) ou en présence de triangles possédant un angle obtus, ou encore face à la définition de la hauteur comme étant « une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au **côté** opposé à ce sommet ».

À partir de ces constats résultant de l'analyse a posteriori de ce problème, il pourrait être utile de :

1. Privilégier la définition de la hauteur d'un triangle en tant que « distance entre un côté, choisi comme base, et son sommet opposé ».
2. Différencier « hauteur en tant que segment » ou « droite » et « hauteur en tant que mesure ».
3. Combattre l'idée fausse selon laquelle la hauteur est liée à la verticalité.
4. Présenter des figures géométriques dans une orientation différente de l'horizontale et de la verticale (B. Brogi, 2019).
5. Combattre l'idée fausse selon laquelle le « pied » de la hauteur est toujours au milieu de la base.
6. Identifier les hauteurs sur les figures où le pied de hauteur est sur la droite à laquelle la base appartient.
7. Développer le concept de lieu géométrique de l'extrémité du segment ~~de~~ hauteur (de mesure constante) lorsqu'il se déplace par translation dans la direction de sa base. Cela permettra d'acquérir que les triangles qui ont la même base et la même hauteur ont la même aire.
8. Proposer des problèmes dans lesquels la hauteur est à déterminer, par exemple tirés de la banque de problèmes de l'ARMT.
9. Concevoir des parcours d'apprentissage en utilisant des problèmes tirés de la banque de l'ARMT, en limitant l'utilisation d'exercices répétitifs pour calculer les surfaces dans les manuels.

Le problème ***Découpages de triangles*** (ral. 19.II.13 ; cat. 6-8) peut aider les élèves à se libérer du dessin des triangles dans une position prototypique. La résolution de ce problème conduira à l'observation de ce que Raymond Duval (2020) a appelé « unités figurales 1D », ce qui permettra d'identifier les côtés de longueur égale du triangle isocèle comme la diagonale du rectangle 4 × 2. Un problème tel que *Découpages de triangles* permet de mettre en évidence des obstacles caractéristiques sur des notions qui sembleraient avoir été acquises, comme le triangle isocèle, sa position et l'égalité des mesures des côtés. Il est clairement observé que l'image du triangle isocèle que les élèves ont, est celle d'une figure à trois côtés, dont l'un est horizontal et les deux autres, de mesures égales, sont obliques. Il s'agit d'une figure symétrique à axe vertical (au sens de Lismont & Rouche, 2001), où l'objet de référence est « le toit » (ex. Marchini et al., 2002). Le terme « base » signifie que ce côté est non seulement horizontal mais aussi « en bas ». Le modèle du « drapeau », (toujours dans Marchini et al. Susmentionné), est beaucoup moins fréquent.

Dans la banque de problèmes, plusieurs problèmes permettent de confronter les élèves aux difficultés évoquées ci-dessus.

Alla ricerca delle figure "perdute" / À la recherche de figures « perdues » 

Le figure geometriche "non allineate" con l'orizzontale e la verticale sembra non abbiano diritto di cittadinanza in gran parte del cosiddetto insegnamento della geometria!

I nostri problemi del RMT di argomento geometrico sono purtroppo nel complesso mal risolti.

Si tratta spesso di problemi con figure non aventi i lati orizzontali e verticali e un'ipotesi è che troppo spesso l'insegnamento della geometria si basi su figure aventi invece i lati orizzontali e verticali. Forse, inoltre, è disattesa l'attività di costruzione di figure.

Il Gruppo di geometria ha pensato di svolgere una piccola ricerca sui libri di testo per vedere se e in quale misura anche le figure che possiamo chiamare "non allineate" (non convenzionali) vi appaiano, così come attività di costruzione di figure. Abbiamo inoltre pensato fosse interessante vedere se si dia spazio anche a triangoli ottusangoli con la ricerca delle altezze. E tutto ciò sia nella parte "teorica" e sia nei problemi e negli esercizi.

Les figures géométriques « non alignées » avec l'horizontale et la verticale semblent n'avoir aucun droit de cité dans une grande partie du soi-disant enseignement de la géométrie !

Nos problèmes géométriques du RMT sont malheureusement globalement mal résolus.
Ce sont souvent des problèmes avec des figures n'ayant pas de côtés horizontaux et verticaux et une hypothèse est que, trop souvent, l'enseignement de la géométrie est basé sur des figures avec des côtés horizontaux et verticaux. Peut-être, que par ailleurs, l'activité de construction de figures est négligée.

Le Groupe géométrie a décidé d'effectuer une petite recherche concernant les manuels pour voir dans quelle mesure les figures que nous pouvons appeler « non alignées » (non conventionnelles) apparaissent, et les activités de construction de figures sont proposées. Nous avons également jugé intéressant de regarder si l'identification de hauteurs dans des triangles avec un angle obtus est ou non proposée. Tout cela à la fois dans la partie "théorique" des manuels et dans les problèmes et exercices.

Sono stati presi in esame, in particolare, alcuni libri di testi della scuola secondaria di primo grado in Italia, oltre al manuale in uso nella Svizzera romanda.
Come si è detto, si tratta di una piccola ricerca e come tale non ha alcuna pretesa di completezza scientifica.
Salta comunque agli occhi il fatto che, per quanto riguarda l'Italia, le percentuali di adozioni a livello nazionale, dei libri di testo di matematica, per la scuola secondaria di primo grado, sono purtroppo inversamente proporzionali alla presentazione di figure geometriche non convenzionali! Ci sono, è vero, testi nei quali, ad esempio, nelle pagine dedicate alla teoria e in quelle dedicate agli esercizi i segmenti, le rette, le rette parallele e perpendicolari, i poligoni sono disegnati spesso non allineati con il bordo della pagina, o ancora, i triangoli ottusangoli non sono disegnati con il lato maggiore orizzontale, con la richiesta di disegnare l'altezza relativa a ciascun lato, ma sono fra quelli percentualmente meno adottati.
Il manuale della Svizzera romanda, al contrario, propone numerose attività a partire da figure in posizione "non convenzionale", comprese attività con triangoli ottusangoli ancora in posizione "non convenzionale".

Si sarebbe portati a dire che tali aspetti legati ai libri di testo sono quelli che spiegano come in linea generale, i risultati delle classi della sezione della Svizzera romanda, per ciò che riguarda i problemi di geometria, sono migliori di quelli delle altre sezioni, almeno nelle categorie 7 e 8. Ovviamente i parametri in gioco sono tanti e siamo molto cauti su conclusioni di questo tipo. Certamente, però, pensiamo che la non abitudine a lavorare con figure "non convenzionali", non agevola il riconoscimento, ad esempio, di un quadrato, come tale, laddove sia disegnato ruotato di un angolo di 45° rispetto all'orizzontale e la verticale. Il gruppo di geometria aveva peraltro già condotto una ricerca sperimentale su queste problematiche (Cfr. B. Anselmo, C, Bisso, L, Grugnetti, 2011), a partire da problemi del RMT. Potremmo ribadire, a nove anni di distanza, ciò che scrivemmo allora: *Come accade sovente, attraverso le prove del RMT, appaiono errori caratteristici inattesi o che non si era previsto che potessero manifestarsi in maniera tanto evidente a posteriori. Questi errori ricorrenti sono evidentemente rivelatori di costruzioni incompiute, di difficoltà od ostacoli.*

Nous avons analysé en particulier un certain nombre de manuels scolaires italiens du secondaire (cat., 6, 7, 8) et le manuel utilisé en Suisse romande.
Comme mentionné, il s'agit d'une petite recherche qui n'a aucune prétention à l'exhaustivité scientifique.
Cependant, elle montre qu'en ce qui concerne l'Italie, les pourcentages d'adoptions au niveau national, de manuels de mathématiques pour le secondaire, sont malheureusement inversement proportionnels à la présence de figures géométriques non conventionnelles ! Il existe, il est vrai, des manuels dans lesquels, aussi bien les pages dédiées à la théorie que dans celles dédiées aux exercices, les segments, les lignes droites, les lignes parallèles et perpendiculaires, les polygones, sont souvent tracés non alignés avec le bord de la page, ou dans lesquels, les triangles avec un angle obtus ne sont pas dessinés avec le côté le plus long à horizontale, et où l'on demande de dessiner la hauteur relative à chaque côté, mais ces manuels-là sont parmi les moins adoptés.
Le manuel de la Suisse romande, en revanche, propose de nombreuses activités à partir de figures en position « non conventionnelle », y compris des activités avec des triangles avec angle obtus toujours en position « non conventionnelle ».
On pourrait dire que ces aspects liés aux manuels expliquent pourquoi, dans les problèmes de géométrie,–les résultats des classes de la section de Suisse romande, sont en général meilleurs que ceux des autres sections, du moins dans les catégories 7 et 8. De toute évidence, de nombreux paramètres interviennent et nous sommes très prudents quant aux conclusions de ce type. Nous pensons cependant que la non-habitude de travailler avec des figures « non conventionnelles » ne facilite pas la reconnaissance, par exemple d'un carré, en tant que tel, quand il est dessiné tourné d'un angle de 45 ° par rapport à l'horizontale et à la verticale. Par le passé, le groupe de géométrie avait déjà mené une recherche expérimentale autour de ces questions (Cfr. B. Anselmo, C, Bisso, L, Grugnetti, 2011), à partir des problèmes de RMT. Nous pourrions réitérer, neuf ans plus tard, ce que nous écrivions alors : *Comme souvent, au travers des épreuves du RMT, apparaissent des erreurs caractéristiques inattendues ou dont on n'avait pas prévu qu'elles se manifestent de manière aussi évidentes a posteriori. Ces erreurs récurrentes sont évidemment révélatrices de constructions inachevées, de difficultés ou d'obstacles.*

Bibliografia / Bibliographie

B. Anselmo, C. Bisso, L. Grugnetti : 2011, Il rettangolo… non così evidente / Le rectangle… pas si évident, Gazzetta di Transalpinon. 1,7-42

Brogi, B.: 2019, Matematica in classe con il Rally Matematico Transalpino, “un’insegnante racconta”/Mathématiques en classe avec le Rallye Mathématique Transalpin, « le témoignage d’une enseignante’, Gazzetta di Transalpino . 9, 117-123.
Duval, R.: Le premier seuil dans l’apprentissage de la géométrie : « VOIR » les « Figures »/Il primo passo nell’apprendimento: “VEDERE” le figure, Gazzetta di Transalpino n. 10, 7-26.
Lismont, L, Rouche, N. (a cura di), 2001, Forme et mouvements, CREM.
Marchini C., Rinaldi M.G., Bedulli M., Grugnetti L.: 2002, Tetti e bandiere, Processi didattici innovativi per la Matematica nella scuola dell'obbligo, Pitagora (Bo), 223-236.

POSTER INCONTRO/POSTERS RENCONTRE

ALGHERO

Section de Franche-Comté

UTILISER L'ANALYSE A PRIORI

Dans le cadre du RMT, un intérêt particulier est porté à l'analyse *a priori* des problèmes créés par les membres des sections et groupes de travail de l'Association Internationale. Ces analyses *a priori*, transmises au moment des épreuves aux enseignants qui ont inscrit leurs classes à la compétition et disponibles sur la banque de problèmes, n'ont pas pour unique intérêt de présenter les solutions des problèmes. Leur minutieuse rédaction, qui s'ajoute aux nombreuses autres tâches que les sections réalisent (gestion des inscriptions des classes, évaluations des copies, remise des prix….), pourraient se montrer bien plus utiles encore si les enseignants exploitaient pleinement ces analyses pour proposer les problèmes du RMT à leurs classes en dehors du cadre des épreuves.

La section de Franche-Comté, à l'occasion de la 23e rencontre internationale de l'ARMT à Alghero a donc réalisé un poster dont le titre est : **L'analyse *a priori* : Quèsaco, un outil pour l'enseignant, …… fait par qui, pour quoi faire ?**
La réalisation de ce poster a été l'occasion de prendre le temps de se questionner sur cet outil et de clarifier ses objectifs et finalités à travers les regards de didacticiens, d'enseignants, de formateurs et de futurs enseignants. Ce poster ne se contente pas de présenter des apports théoriques et des témoignages pratiques mais il aborde aussi l'existence d'interactions possibles entre les expériences de tous ces acteurs de l'enseignement.

1. L'analyse *a priori* : Quèsaco…. Un outil pour l'enseignant

En 2010, Jean-Luc Dorier présente l'analyse *a priori* comme une aide pour préparer les situations de classe. En se plaçant du point de vue de l'enseignant, il précise : *« Avec tout ce que mes élèves savent et ce qu'ils ont à leur disposition (...) comment la question que je leur pose ou le problème que je leur soumets peuvent-ils prendre du sens (...) et que doivent-ils apprendre de nouveau pour arriver à le résoudre ? » (Dorier, 2010)*

En effet, la préparation d'une séance de résolution de problème amène l'enseignant à anticiper et à faire des choix qui s'appuient en partie sur sa propre expérience mais qui peuvent aussi se baser sur l'analyse *a priori* des problèmes qu'il souhaite soumettre à ses élèves lorsqu'elle existe.

Nous proposons un acrostiche du mot « *a priori* » qui tente de synthétiser les rôles de l'analyse du même nom :

Cette illustration de l'analyse *a priori* sous la forme d'un acrostiche s'appuie sur une citation de Mercier et Salin qui tentent de préciser ses objectifs : *« Une analyse* a priori *vise à produire une description pertinente des formes* *de vie scolaire d'un savoir mathématique donné, en recherchant les caractères de la situation qui influent sur la forme et la signification des comportements manifestes vis-à-vis de ce savoir* ». (Mercier & Salin, 1988, p3)

Même si l'utilisation de l'analyse *a priori* reste peut-être peu habituelle dans les pratiques des enseignants, nombre de didacticiens se sont penchés sur cette notion et l'ARMT en avait déjà fait le thème de la sixième rencontre de l'ARMT en 2002.
À cette occasion, une conférence avait été présentée par Michel Henry pour lequel cette notion englobe trois types d'analyses :

L'analyse *a priori* ou théorique d'une situation didactique est l'ensemble des études qui concourent à :

I - La connaissance du savoir en jeu

(analyse épistémologique).

II - La description de son fonctionnement dans l'évolution de la situation

(analyse didactique)

III – Les comportements possibles des élèves et leur gestion

(analyse pédagogiq

ue)

(Henry, 2002)

Au regard des recherches en didactique l'analyse *a priori* apparaît comme un outil précieux au service des enseignants. La question qu'on peut alors se poser est l'usage que les enseignants en font. Encore faut-il qu'elle soit fournie et que ceux-ci en perçoivent toute la portée….

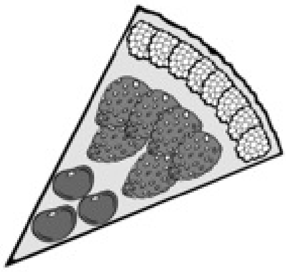
2. Utiliser l'analyse a priori

De nombreuses sections proposent une épreuve d'entraînement avant la première épreuve. Elle permet aux élèves de se familiariser avec les principes du RMT, mais c'est aussi l'occasion pour les enseignants d'observer leurs élèves en situation de recherche et d'échanger avec eux sur les difficultés rencontrées.
Suite à l'épreuve d'entraînement proposée par la section de Franche-Comté en décembre 2018, nous avons pu recueillir deux témoignages autour du même problème « La tarte aux fruits » : celui de Sam qui n'avait pas pris connaissance de l'analyse *a priori* du problème et celui de Christine, membre de la section RMT de Franche-Comté, habituée à l'utilisation des analyses *a priori.*

LA TARTE AUX FRUITS *(Cat. 4, 5, 6, 7) d'après RMT 24.II.06* [1]

Pauline a invité ses amis pour fêter son anniversaire.
Son papa a confectionné une excellente tarte aux fruits et, pour contenter tout le monde, il l'a découpée en parts de mêmes dimensions et avec le même nombre de fruits sur chaque part de tarte.
La fête est finie, Pauline constate qu'il reste une seule part de tarte. Sur cette part elle compte 17 fruits et elle s'exclame : « Tu as vraiment utilisé beaucoup de fruits pour faire la tarte, papa ! »
Ce dessin représente la part de tarte posée sur la table, vue du dessus :

[1] 24e rallye mathématique transalpin, 2e épreuve, problème n°6



Combien de fruits le papa de Pauline a-t-il utilisés en tout pour décorer la tarte entière ?
Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

- Du côté de Sam

Bonsoir,

Désolé de vous importuner mais les élèves et moi ne voyons pas la subtilité dans cet ex (La tarte aux fruits).

Angle de 40°, donc 9 parts (9x40°=360°) ? ou autre chose qui nous échappe...

Ou manque-t-il une info ?

D'avance merci,

Sam

Bonjour Sam,

Vous ne m'importunez pas et je trouve votre réaction très intéressante. Il est vrai que pour les élèves qui maîtrisent le concept d'angle, ce problème n'est plus un problème : c'est peut-être le cas pour des élèves de catégorie 7 c'est à dire de 5e, et je vous rejoins alors, (ce problème permet simplement de vérifier la solidité des acquis de 6e).

Cependant il est proposé à partir du niveau CM1 (catégorie 4) et là, avec ces élèves qui ne connaissent pas l'utilisation du rapporteur, qui le maîtrisent mal, ou qui n'ont pas encore bien compris les propriétés d'un angle (mesure qui ne change pas dans le cas d'un agrandissement ou d'une réduction), ou comment les reproduire...., la difficulté est tout de suite importante.

J'ai moi-même constaté que les élèves de 6e qui me sont confiés cette année avaient pu développer des stratégies très diverses et plus ou moins rigoureuses pour reconstituer la tarte et ainsi trouver le nombre de parts. Dans l'analyse *a priori* du problème que vous pouvez trouver sur le site d'inscription du rallye dans l'onglet "épreuve" "entraînement" vous avez les procédures les plus courantes qui ont été répertoriées lors de la création du problème.

Dans tous les cas, félicitez vos élèves car si le "problème" leur est apparu évident c'est qu'ils ont bien compris et assimilé le concept d'angle et qu'ils peuvent s'attaquer à d'autres problèmes mieux adaptés à leurs compétences et connaissances !!!!

Bien cordialement

Bonsoir. Et merci de votre réponse. J'avais craint un oubli dans l'énoncé. C'est donc bien juste un pb d'angle. Finalement soit mes 5° ont été trop bons et ont cherché autre chose. Soit ils ont été sans doute moins bons car ils ont réussi à faire six parts plutôt que neuf de mémoire. Merci donc pour ces précisions. J'irai voir les corrections proposées sur le site. J'avais bien cherché mais pas trouvé. Bonne soirée. Et encore merci

Suite à cet échange on constate qu'un enseignant même très expérimenté et compétent comme peut l'être Sam n'a pas forcément le réflexe et l'habitude d'utiliser l'analyse *a priori* de problèmes. Sans cette aide, il est tenté d'attendre alors de ses élèves une procédure dite « experte » qui pourtant n'est pas encore disponible pour eux (même si elle a déjà été travaillée en classe). Il n'envisage pas que ses élèves s'engagent dans des procédures plus « expérimentales » et ne semble pas cerner à quel point le choix des procédures peut être un indicateur du niveau de la compréhension et de la maîtrise du savoir en jeu. Il dit ne pas comprendre pourquoi ses élèves n'ont pas obtenu le résultat attendu.

De plus, alors que le terme « analyse *a priori* » est utilisé, Sam entend correction du problème. Il n'a pas encore mesuré toute la richesse des informations transmises dans l'analyse et l'intérêt que cela peut présenter pour intégrer une séance de résolution de problème dans sa progression.

- Du côté de Christine

Contrairement à lui, Christine, après avoir bien observé ses élèves pendant l'épreuve d'entraînement a décidé de prendre connaissance de son analyse *a priori*, et de proposer le problème en séance de résolution de problème à sa classe entière de 6^e à un moment précis de sa progression. Elle a d'ailleurs profité de cette expérience pour rédiger un article dans la brochure *Au fil des maths* n° 535 proposée par l'APMEP (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public) :

Voici quelques extraits de ce retour d'expérience :

Lors de l'épreuve d'entrainement, le groupe qui a cherché le problème « La tarte aux fruits » dans ma classe de 6^e y a passé très peu de temps et a répondu :

« 8 × 17 = 136 donc il y a 136 fruits. » Cette réponse est fausse car il faut 9 parts pour recontituer la tarte entière.

Quand j'ai fait le bilan de l'épreuve d'entraînement, j'ai évoqué très rapidement qu'ils n'avaient pas trouvé la bonne réponse à ce problème mais sans le corriger, car je voulais le réutiliser plus tard dans l'année au moment de travailler sur les angles.

J'ai alors consulté l'analyse *a priori* de ce problème.

L'analyse de la tâche m'a permis de constater que les procédures possibles étaient nombreuses (cinq différentes citées) et qu'elles correspondaient bien aux attendus du programmme.

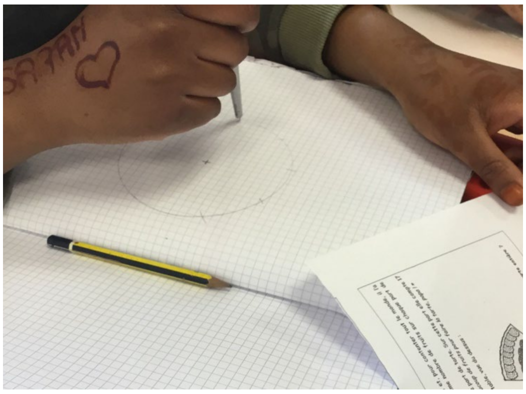
Le moment venu, j'ai donc proposé ce problème à toute la classe. Nous n'avions pas encore évoqué la notion d'angle, c'était donc pour moi l'occasion de constater quelles étaient leurs connaissances disponibles sur cette notion.

Comme d'habitude lorsque nous travaillons sur la recherche de problèmes, les élèves s'installent en groupe. Je leur explique qu'ils ont droit à tous les outils à leur disposition (cahier de leçons, livre, dictionnaire, calculatrice, matériel de géométrie) et qu'ils peuvent découper, dessiner et écrire sur l'énoncé. Je leur fournis aussi des feuilles de brouillon, du papier calque et d'autres énoncés.

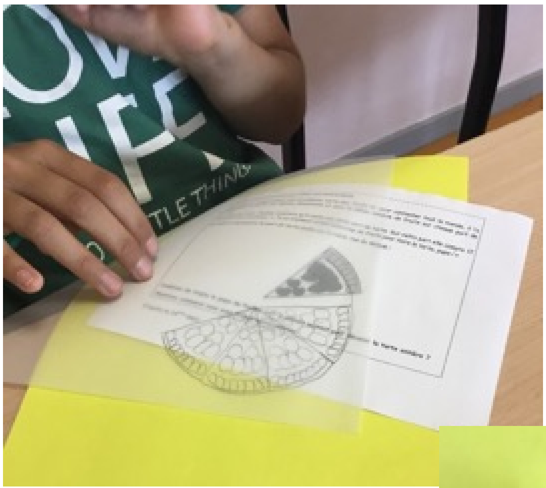
J'ai alors pu observer différentes stratégies :

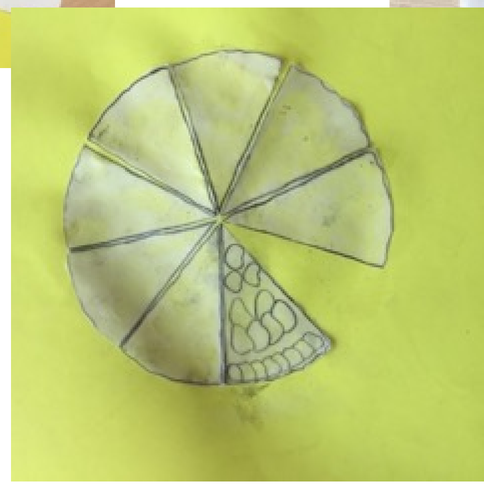
- Un groupe a évalué « à l'œil » 8 parts (stratégie 5), mais quand je lui ai demandé de vérifier sa réponse, il s'est alors impliqué dans une reproduction des parts pour obtenir la tarte entière et s'est rendu compte de son erreur.

Stratégie 3 avec report de l'arc :



- La plupart des groupes ont utilisé la stratégie 1, avec dessin ou non des fruits.





Mais ils se sont rendu compte qu'avec la précision de leurs découpages et collages, la dernière part était souvent trop petite. Pourtant aucun élève n'a eu l'idée de mesurer la part de tarte (stratégie 4) ; la notion abstraite d'angle n'était pas une connaissance disponible pour eux. Nous l'avons donc travaillée par la suite, ce qui a permis de valider la réponse du problème : 9 parts et 153 fruits.
Ce problème utilisé comme découverte d'une notion était très intéressant car atypique. De premier abord il avait plutôt l'air d'un problème de proportionnalité, et il s'est révélé être un très bon support pour introduire la nécessité de mesurer des angles.

Extrait de *Au fil des maths* n° 535.

Pour conclure :

L'analyse *a priori* aide les enseignants dans le choix des problèmes qu'ils souhaitent proposer à leurs classes.

3) Regards croisés enseignants-formateurs-didacticiens sur l' analyse *a priori* de ce problème.
Après ces témoignages,
Francine Athias, membre de la section RMT de Franche-Comté et formatrice à l'INSPE propose une relecture de l'analyse *a priori* de ce problème selon l'approche de deux didacticiens (Assude et Mercier, 2007)

Analyse *a priori* du savoir *(Assude et Mercier, 2007)*	**Pour le problème « La tarte aux fruits »**
Analyser le savoir en jeu (enjeux mathématique et institutionnel).	*Par exemple* : Travailler sur la notion d'angles
Voir les techniques possibles que les élèves peuvent mettre en œuvre.	*Par exemple* : les élèves peuvent découper la part et la reporter autant de fois que nécessaire
Voir certains problèmes didactiques auxquels les professeurs peuvent être confrontés.	*Par exemple* : les élèves vont faire des parts de tarte qui manquent de précisions. Une réponse juste (9) grâce à un dessin faux (trous ou chevauchements) devra faire l'objet d'un débat en classe.

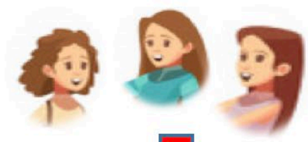
De plus elle relève que ce problème « La tarte aux fruits », intéressant pour amener les élèves au concept d'angle ou pour en mesurer le niveau de maîtrise, est toutefois une situation particulière de représentation d'un angle car les côtés de la part de tarte sont de même mesure. Elle propose alors d'ajouter cette remarque dans l'analyse *a priori*.
En effet si l'enseignant va pouvoir s'appuyer sur l'analyse *a priori* pour construire sa séance, cette dernière n'est pas figée.
En 2002, Michel Henry précise :

« L'analyse *a priori* peut être affinée après l'enseignement, dès lors que les faits observés amènent à revoir la copie, parce qu'ils ont révélé des insuffisances dans l'analyse théorique. C'est sûrement le cas […] quand l'observation de la classe permet un retour réflexif sur celle-ci » *Henry 2002*

4) Construire l'analyse *a priori*
Dans le cadre du RMT, ce sont des enseignants, des chercheurs et des formateurs qui construisent les analyses *a priori* en concertation les uns avec les autres, ce n'est pas une tâche facile et sa réalisation nécessite de nombreux allers-retours et discussions entre ces personnes.
Dans la perspective d'améliorer la formation initiale des enseignants, il nous a semblé intéressant de mettre des étudiants, qui se destinent au métier d'enseignant, en situation d'écrire une analyse *a priori.* En février 2019 trois étudiantes ont donc préparé l'analyse *a priori* d'un problème de la deuxième épreuve qui se déroulait à cette même période dans les classes : « Le collage ».

Le collage (RMT-*27. I. 14 cat 7, 8, 9, 10)*
André et Béatrice doivent réaliser ensemble un collage. Pour cela, les deux enfants achètent des feuilles de couleur. André en achète le double de Béatrice. Mais, avant que les deux enfants se mettent au travail, Béatrice s'aperçoit que pour terminer sa partie du collage, elle n'aura pas assez de feuilles. André lui en donne alors 7 des siennes. Béatrice se met au travail, mais abime une feuille qu'elle décide de jeter. A ce moment, les deux enfants ont le même nombre de feuilles.
Combien de feuilles ont acheté en tout André et Béatrice pour réaliser le collage ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Voici les procédures proposées :



Les procédures les plus expertes précèdent les autres dans cette proposition des étudiantes

1re procédure possible : mettre le problème en équation en posant une inconnue (soit le nombre initial de feuilles d'André, soit le nombre initial de feuilles de Béatrice) et traduire les transformations mathématiquement en agissant sur l'inconnue fixée au départ.

2e procédure possible : résoudre le système de deux équations à deux inconnues… où x est le nombre initial de feuilles d'André et y est le nombre initial de feuilles de Béatrice.

3e procédure possible : raisonner par essais-erreurs :

Tester avec différentes valeurs de feuilles au départ et arriver à ce que les deux enfants en aient le même nombre à la fin.

Comprendre que le nombre minimal de feuilles d'André au départ est de 7 car il en donne 7 à Béatrice lors du premier échange.

Comprendre que le nombre initial de feuilles d'André est un nombre pair car c'est un multiple de deux (dans l'énoncé, on sait qu'André en a le double de Béatrice)

Pour poursuivre l'expérience, il nous a semblé
de niveaux différents. Elles ont donc été conv
copies de ce problème leur ont été confiées.
Les étudiantes ont pu constater que :

Faire le problème avec des **méthodes exp**
important de **réfléchir aux différentes straté**
précis dans l'année dans la perspec

Cette expérience a été l'occasion pour l'enser
recherche des élèves. Beaucoup de copies ont
intentions des élèves et les obstacles qu'ils ren
aussi été l'occasion pour les formateurs de disc
construction de cette analyse *a priori* et des cor

Conclusion

Ces expériences avec les étudiants ou notre vécu au moment de la constitution des épreuves, nous font prendre conscience que l'analyse *a priori* d'un problème est difficile à construire. Ce sont les échanges entre enseignants, formateurs et chercheurs qui pourront enrichir sa rédaction.

Aussi, si nous sommes tous convaincus que les problèmes du RMT développent les compétences des élèves et leur permettent d'acquérir des connaissances, il faut souligner que l'ARMT ne met pas seulement à disposition des enseignants les énoncés mais aussi leur analyse.
Mais vient alors la question de la formation pour utiliser cet outil précieux, elle aurait besoin d'être développée. Des stages (formation continue et initiale) doivent permettre d'accompagner les enseignants et les étudiants dans l'utilisation des analyses *a priori* et leurs élaborations. Cela aidera les enseignants dans la mise en œuvre des problèmes.

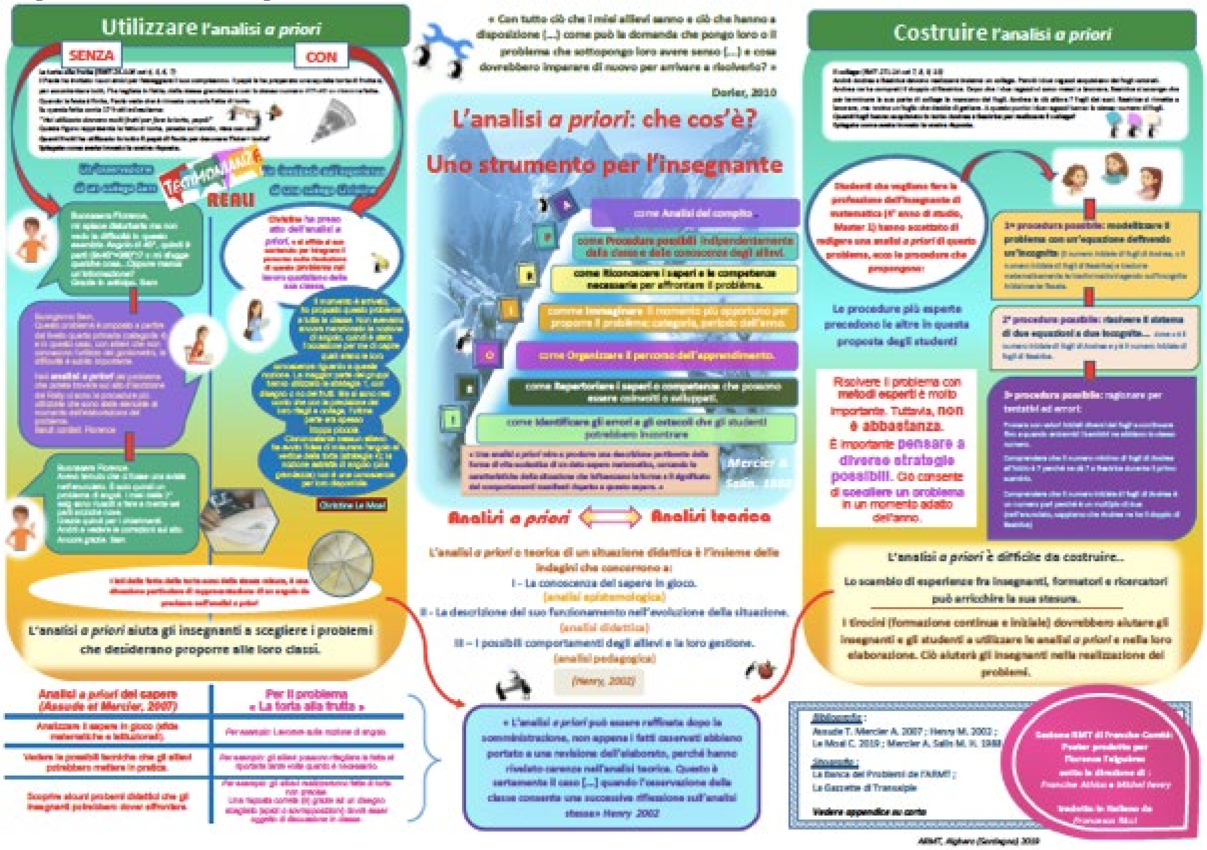
Bibliographie :
Assude T. Mercier A. 2007 ; Henry M. 2002 ;

Le Moal C. « Le Rallye Mathématique Transalpin » in *Au fil des maths* (APMEP). N° 535. Janvier, février, mars 2020.

Mercier A. Salin M. H. 1988

Sitographie :
La Banque de Problèmes de l'ARMT http://www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/bp-rmt-acces-fr.html ;
La Gazette de Transalpie http://www.armtint.org/

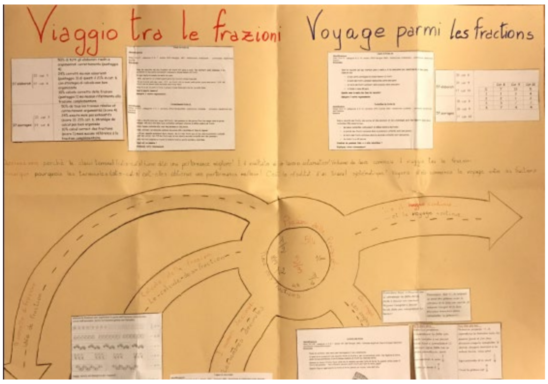
Le poster en italien / Il poster in italiano

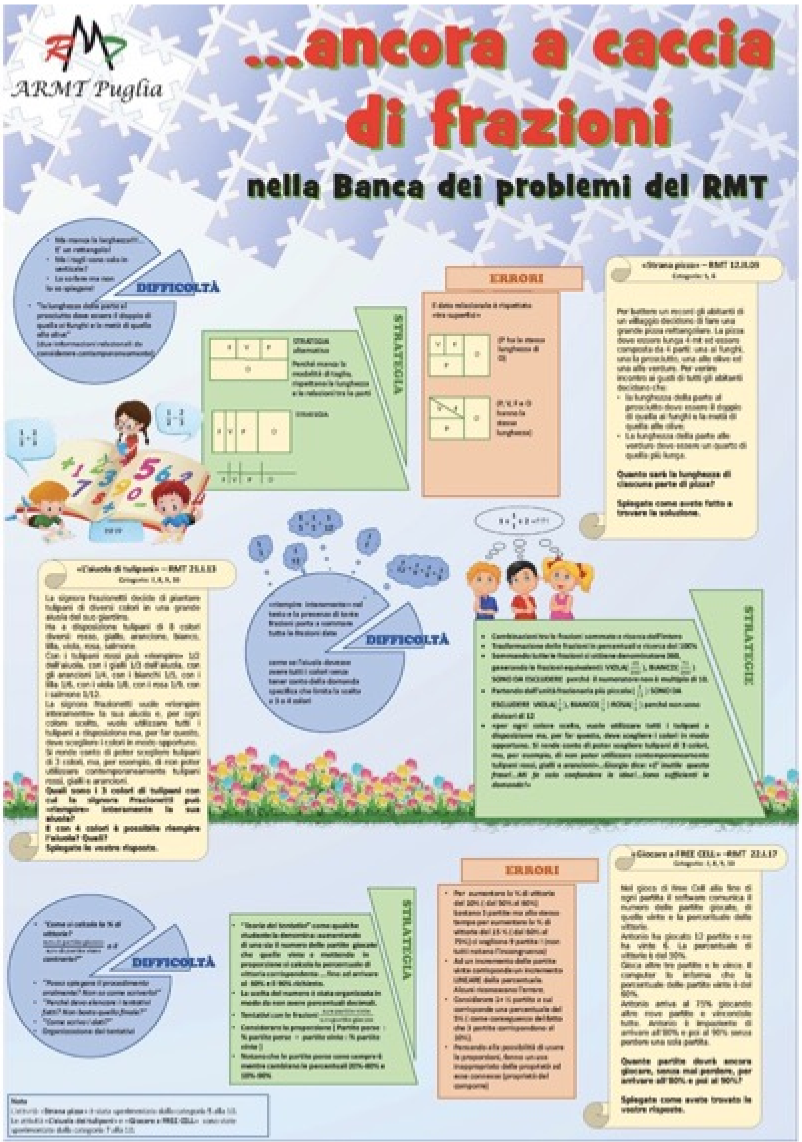


Sezione Puglia

A CACCIA DI FRAZIONI NELLA BANCA DEI PROBLEMI DEL RMT

A cura della coordinatrice Maria Felicia Andriani con la collaborazione di A. Alicino, A. Canestro, C. Caggiano, L. De Nicolo, R. Di Liddo, C. Leone, A. Pierno, A. Quacquarelli, V. Raso, A. Santoniccolo, L. Trentadue.





Introduzione

L'interesse per un percorso legato alle frazioni nasce dalla constatazione che nell'usuale attività didattica, gli allievi mostrano non poche difficoltà sia nel calcolare le operazioni sia nell'affrontare problemi che le coinvolgono. L'ostacolo è al contempo epistemologico, ontologico e didattico per la grande diversità dei concetti insiti nel termine "frazione", per le sue molteplici rappresentazioni e difficoltà, sia per l'allievo e sia per l'insegnamento, di poterli distinguere e costruire gradualmente e simultaneamente.
La prima rappresentazione della "frazione" è una parte di un tutto, come risultato di una spartizione (con le sue rappresentazioni grafiche specifiche) o di una divisione, poi vi si aggiunge una riproduzione (moltiplicazione) che permette di andare oltre il "tutto" originale; vi si assimila più avanti il modello di due operazioni successive delle quale sarà necessario tener conto della commutatività (:5 x 7 = x7 :5) e bisogna ancora capire che le frazioni si organizzano in classi di equivalenza, che si devono anche considerare come quozienti e accettare che la loro scrittura conservi la coppia di numeri e che non può sempre essere scritta in forma decimale limitata, per arrivare finalmente al concetto di numero razionale. Questi nuovi numeri si integreranno negli altri insiemi di numeri, con le operazioni aritmetiche già incontrate, ma con gli algoritmi di calcolo specifici dovuti alla loro complessa scrittura. E questi numeri razionali possono esprimere percentuali e rapporti in generale, misure, punti sull'asse dei numeri reali.

Un "VIAGGIO" con destinazione "FRAZIONE" può essere vissuto attraverso diversi percorsi quando ci si inoltra nella Banca dei problemi dell'ARMT.
Davanti alla schermata:

la nostra ricerca è partita dall'Ambito per poi addentrarsi nella Famiglia e scegliere tra i problemi presenti quelli più adatti ai nostri obiettivi.
I primi problemi scelti sono stati: "Ceste di frutta (I)" (Rally: 24.II.07 categorie: 5, 6, 7;) e "Ceste di frutta (II)" (Rally: 24.II.13 categorie: 5, 6, 7) Ambito OPQ (Operazioni in Q), Famiglia AMQ - Addizionare, moltiplicare…confrontare, trasformare frazioni. Seguiti, poi, da: "I sigari di cioccolato" (Rally: 14.I.08 categorie: 5, 6, 7 ; Ambito: OPD, Famiglia: AMD - Addizionare e moltiplicare numeri decimali), "Strana pizza" (Rally: 12.II.09 categorie: 5,6; Ambito: PR, Famiglie: SP – gestire successioni proporzionali e SP/RIP – Effettuare ripartizioni proporzionali), "l'Aiuola di tulipani" (Rally: 21.I.13 categorie: 7, 8, 9, 10; Ambito: OPQ, Famiglie: MAC – operare con macchine, MAC/FR -operare con frazioni), Giocare a FREE CELL (Rally: 27.I.17 categorie 8, 9, 10; ambiti: PR, AL, Famiglie: 4P – quarta proporzionale, 4P/PC - percentuali).

Partenza… via!

Durante la tavola rotonda e nella sessione poster del 22° Incontro Internazionale a Pont Saint Martin e successivamente durante il 23° Incontro Internazionale ad Alghero, la sezione Puglia ha illustrato un ipotetico viaggio nella Banca dei Problemi dell'ARMT, alla ricerca di situazioni problematiche sulle frazioni. Entrati nella Banca, la scelta è ricaduta inizialmente su "Ceste di frutta (I)" (RMT 24.II.07 cat. 5, 6, 7) e "Ceste di frutta (II)" (RMT 24.II.13 cat. 8-9-10) per diverse ragioni:

- dapprima, ci si è messi nella condizione di un insegnante, anche non molto addentro al RMT, che volendo affrontare un percorso sulle frazioni, abbia necessità di avere più informazioni possibili sui problemi da somministrare ai propri allievi. In questo senso le schede di questi due problemi presenti nella banca, sono quasi complete (Identificazione – sunto – enunciato - compito per la risoluzione e saperi mobilizzati - risultati e statistiche secondo la griglia dei punteggi);
- la mancanza nelle schede dell'analisi a posteriori (procedure, strategie e ostacoli) e delle indicazioni didattiche, ci avrebbe invece portato a riguardare gli elaborati della gara della nostra sezione al fine di sviluppare una nostra analisi a posteriori ed eventualmente ad organizzare delle attività nelle classi.
- I due problemi consentono di lavorare in *verticale* su un tema, le frazioni, che presenta ostacoli e misconcetti, difficili da eliminare, anche negli allievi più grandi. Si può operare quindi su due fronti: l'acquisizione del concetto per le categorie più basse e il consolidamento dello stesso per le categorie superiori.

- Infine, il confronto con i dati presenti nella Banca in riferimento alla gara, in un primo momento può consentire di *pre-vedere* e *pre-venire* gli errori, successivamente può permettere un *controllo* sull'efficacia o meno della strategia didattica utilizzata.

Si riportano i testi dei due problemi, le statistiche dei punteggi ottenuti nella prima prova del 24° RMT e le analisi a posteriori sugli elaborati della sezione Puglia.

Ceste di frutta (I) (Cat. 5, 6, 7) (RMT 24.II.07)

Ines ha raccolto nel suo frutteto 60 frutti fra pere e mele. Per metterli nella dispensa, li ha sistemati in due ceste contenenti ciascuna lo stesso numero di frutti.

In ogni cesta ha messo sia mele che pere.

Aldo, suo marito, le chiede quante pere ha raccolto e Ines risponde:

"Io mi ricordo solo due cose: i 2/3 dei frutti che ho messo nella prima cesta sono pere; i 2/5 dei frutti che ho messo nella seconda cesta sono mele".

Aldo fa un po' di conti e trova il numero totale delle pere che ha raccolto Ines.

Qual è questo numero?

Spiegate il vostro ragionamento.

I punteggi attribuiti al problema "Ceste di frutta I" su 2937 classi di 20 sezioni sono:

Categoria	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Nm. classi**	**Media**
Cat 5	170 (22%)	60 (8%)	69 (9%)	85 (11%)	389 (50%)	773	2.6
Cat 6	262 (22%)	87 (7%)	99 (8%)	147 (12%)	602 (50%)	1197	2.62
Cat 7	123 (13%)	48 (5%)	62 (6%)	102 (11%)	632 (65%)	967	3.11
Total	555 (19%)	195 (7%)	230 (8%)	334 (11%)	1623 (55%)	2937	2.77

Analisi a posteriori su "Ceste di frutta I" (totale 130 elaborati; 43 di cat. 5; 35 di cat. 6; 52 di cat. 7) – sezione Puglia:

Corretti	**Incompleti**	**Errori**	**Strategie**
Conferma dei dati sulla scheda. • Nelle tre cat 5, 6 il 60% o più • In cat. 7 più del 70%	In tutte e tre le cat. 5, 6, e 7 • 11% non somma le pere delle due ceste • In cat. 6 anche il 12% • 10% di cat. 5 calcolo solo delle parti frazionarie indicate nel testo	• di calcolo/ calcolatrice • Es: 2/3 di 30 , 30 x3 =90, 90:2=45 • 2/3 di 60 • Calcolo non corretto della frazione complementare • Confusione tra metà e doppio 60x2 al posto di 60:2 • 2 in cat. 7 usano tutti i numeri presenti in qualsiasi modo • Si divide per due volte consecutive: 60:2=30 e 30:2=15	In tutte e tre le categorie la strategia è quella aritmetica 1. 2/3 di 30 2. 2/5 di 30 3. 30 -12 =18 4. 20 + 18= 38 oppure 1) 2/3 di 30 2) 3/5 di 30 3) 20 +18=38

Si evidenzia che nella scuola primaria nel 24% degli elaborati, ai quali è stato attribuito punteggio 3, il numero delle pere risulta distinto per cesta, senza la determinazione del numero totale richiesto.
L'errore non ha età: in tutte e tre le categorie la tipologia degli errori è la stessa!
Laddove si calcolano i *2/3* di 60 frutti e non di 30 è molto probabile che gli allievi vedano *"i numeri"* che sono nel testo senza porre attenzione a *due ceste* influenzando la corretta appropriazione del problema stesso, o ancora moltiplicare per 2 al posto di dividere, potrebbe essere legato ad una errata *trasmissione didattica* purtroppo frequente, che è quella di associare a una '*parola chiave'*, un'operazione ben specifica senza che sia analizzato il significato della frase in questione.

Ceste di frutta (II) (Cat. 8, 9, 10) (RMT 24.II.13)

Ines ha raccolto nel suo frutteto pere e mele e le ha mescolate per suddividerle in due ceste.
Osserva che:

- le due ceste contengono lo stesso numero di frutti;
- la metà dei frutti contenuti nella prima cesta sono pere;
- un terzo dei frutti contenuti nella seconda cesta sono pere;
- in totale ci sono 60 pere.

Quante sono le mele che Ines ha raccolto?

Spiegate il vostro ragionamento.

I punteggi attribuiti a "Ceste di frutta II" su 1069 classi di 15 sezioni:

Categoria	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Num. classi**	**Media**
Cat 8	247 (33%)	76 (10%)	55 (7%)	90 (12%)	273 (37%)	741	2.09
Cat 9	38 (22%)	21 (12%)	10 (6%)	12 (7%)	89 (52%)	170	2.55
Cat 10	32 (20%)	10 (6%)	10 (6%)	16 (10%)	90 (57%)	158	2.77
Total	317 (30%)	107 (10%)	75 (7%)	118 (11%)	452 (42%)	1069	2.26

Analisi a posteriori su "Ceste di frutta II" (totale 58: 20 cat. 8; 21 cat. 9, 17 cat. 10) – sezione Puglia
Molti, in percentuale (41%), risultano non svolti e soprattutto in categoria 9. Sempre nella stessa categoria il numero dei corretti è pari allo 0,07 % rispetto al totale degli elaborati, nella categoria 10 il 10%, nella categoria 8 la percentuale dei corretti aumenta e raggiunge quasi il 20%.

Categorie	Numero totale	Corretti	Errati	Non svolti
Cat. 8	20	10	3	7
Cat. 9	21	4	4	13
Cat. 10	17	6	6	5

Dall'analisi di "Ceste di frutta II" emerge che la strategia maggiormente usata è quella per tentativi non sempre ben argomentata. Poco usata è la strategia algebrica eccezion fatta per due elaborati rispettivamente in cat. 8 e 9.
Errore più frequente quello di far riferimento a 60, il numero totale delle sole pere e non al numero di frutti contenuti in ciascuna cesta, che era a sua volta incognito.
A parte il numero esiguo degli elaborati analizzati, si precisa che almeno il 39% del totale delle categorie più alte non ha svolto il problema. Si tenga presente però che nella sezione Puglia le classi della cat. 9 e 10 sono quasi tutte di istituti professionali che compaiono in questa raccolta insieme alle pochissime classi liceali iscritte alla gara.
Ci siamo poste diversi quesiti osservando questi risultati: si tratta di vera incomprensione del problema? In queste classi le dinamiche di gruppo non sono ancora mature? Il numero degli allievi per classe è troppo basso e ciò fa sì che nei 50 minuti a disposizione della prova siano stati risolti altri problemi?
In realtà non è molto difficile rispondere, dal momento che qualcuna di noi lavora in questi istituti e conosce le dinamiche in gioco.

Come è noto tra gli allievi che si iscrivono agli istituti professionali, la maggior parte soffre di *mal di scuola* e ha alle spalle un altrettanto percorso molto travagliato. All'epoca della prima prova della gara, soprattutto gli allievi della categoria 9 sono in fase di adattamento e non hanno ancora interiorizzato, a volte, le semplici regole scolastiche e la metodologia di lavoro. Spesso, come docenti, siamo soddisfatti anche solo se partecipano alla discussione di un problema o se incominciano ad organizzarsi in gruppi e ad affrontare, quasi sempre per tentativi, un qualsiasi problema proposto. Viste le problematiche, il numero degli alunni per classe è esiguo e durante le attività in modalità Rally Matematico Transalpino anche i gruppi che formano sono al massimo tre o quattro perché gli allievi, tendono anche a non suddividersi ulteriormente e non colgono l'opportunità di poter affrontare nei 50 minuti più problemi. Riteniamo quindi che i risultati non siano solo legati al problema specifico ma a tutto il contesto esposto precedentemente.

Andiamo in classe… con Ceste di frutta I e II

Il nostro obiettivo è cercare di capire, se possibile, attraverso un lavoro in verticale, i momenti salienti del percorso scolastico, nei quali gli allievi incontrano maggiori difficoltà. A tal proposito ci organizziamo in modo da somministrare:

- agli allievi dalla quinta primaria (cat. 5) alla seconda superiore di primo grado (cat. 7), Ceste di frutta I;
- agli allievi di terza superiore di primo grado (cat. 8) e prima superiore di secondo grado (cat. 9), "Ceste di frutta (I)" e "Ceste di frutta (II)";
- agli allievi di seconda superiore di secondo grado (cat. 10), "Ceste di frutta (II)",

concordando di mantenere, tra gli allievi di cat. 8 e cat. 9, gli stessi componenti dei gruppi che devono essere di massimo tre, per poter operare il confronto tra il prima e il dopo.

Pensiamo che tale modo di operare consenta anche di sperimentare se la gradualità nella somministrazione di un problema possa favorire l'apprendimento di un concetto. I testi dei problemi "Ceste di frutta (I)" e "Ceste di frutta (II)", sebbene proposti in un contesto simile e pressappoco con lo stesso contenuto, contengono un crescendo dello stesso, e accompagnano gli allievi verso una maggiore astrazione e un linguaggio formale.

Inoltre, la raccolta dei dati provenienti dai precedenti elaborati e il confronto con i dati presenti nella Banca (in riferimento alla tipologia degli errori e strategie adoperate) permette di pre-vedere e possibilmente pre-venire gli errori intervenendo sulla spiegazione e sull'argomentazione.

Categorie	**N. elaborati Cesti di frutta I**	**Corretti**	**Errati**
Cat. 5	9	4 (44%)	5 (56%)
Cat. 6	38	16 (42%)	22 (58%)
Cat. 7	33	15 (45%)	18 (55%)
Cat. 8	34	25 (74%)	9 (26%)
Cat. 9 Prof.	19	4 (21%)	15 (79%)
Cat. 9 Licei	5	3 (60%)	2 (40%)

A parte la categoria 8 che evidenzia una percentuale più alta di elaborati corretti, si ripresentano difficoltà diffuse in tutte le categorie e soprattutto in quelle più alte. Il 40% di elaborati errati nei licei, se pur non significativa, per il numero esiguo di elaborati, mostra che le incomprensioni e gli ostacoli nell'appropriazione del problema, tra l'altro pensato dagli autori dell'ARMT per le categorie 5, 6 e 7, sono presenti a tutti i livelli e con la stessa tipologia di errori:

- Calcolati i 2/3 di 60 e i 2/5 di 60 come previsto nella scheda;
- Dopo aver diviso 60 per 2 si calcolano i 2/3 di 60 e i 2/5 di 60;
- Per rappresentare i 2/3 e i 2/5 si disegnano due rettangoli <u>diversi;</u>
- Tendenza a concentrare l'attenzione sui numeri presenti nel testo;
- Risposta 32 dovuta alla confusione tra mele e pere.

Nella messa in comune dei risultati è possibile ascoltare gli allievi. L'insegnate a questo punto può percepire più a fondo il pensiero dell'allievo e laddove l'allievo, convinto, ripercorre i calcoli come: "*considerati i 2/3 e i 2/5 segue 2 x 3 = 6 e 2 x5 = 10 e poi ancora 10 x 6 = 60, 60:2 = 30 concludo*

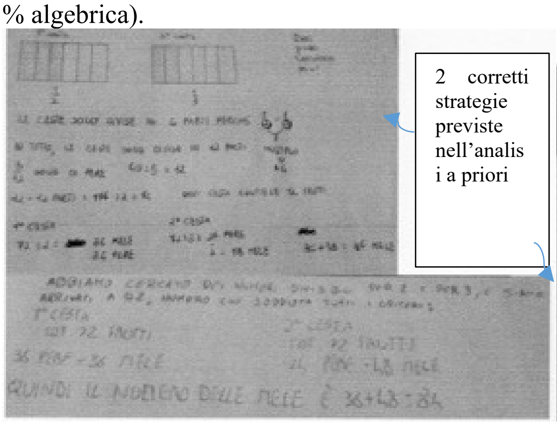
"*In ogni cesta ci sono 15 pere e 15 mele" (Perché?…perché questi sono i numeri del problema!!!)* si può solo pensare che, per esempio, in questo caso non si ha per niente il significato di frazione, che come dice l'allievo stesso *"si fa così"*…si manipolano i numeri e dopo aver svolto una serie di operazioni con questi numeri, si ottiene un 60 che diviso per il numero delle due ceste è 30, che ancora diviso per i due tipi di frutti è 15 e 15 per ciascuno. E ancora… 2/3 di 60 è calcolato facendo 60 x 3 = 180 poi 180 : 2 = 90. Anche dall'espressione del viso si coglie, anche in questo caso, il voler ricordare come gli era stato detto di calcolare 2/3 di 60 senza pensare al significato (sempre il "*si fa cosi*"). La messa in comune ha permesso comunque di constatare che un procedimento 'così fatto' porterebbe ad una situazione impossibile del problema considerato.
E sempre per ricadere nelle abitudini errate o meno della prassi scolastica, si riscontra la necessità di ricorrere alle frazioni equivalenti: 2/3 = 10/15 pere 3/5 = 9/15 mele 10/15 + 9/15 = 19/15 = 19/30 x2 = …
Qui si sommano mele e pere come *a* e *b* che diventano un tutt'uno. Tutto materiale per un attento riesame didattico!

Andrà meglio in classe… con Cesti di frutta (II)?

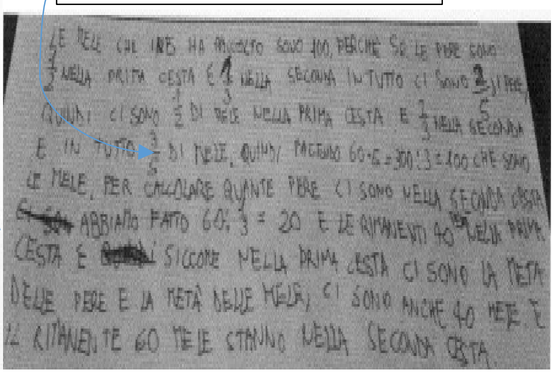
Categorie	Numero di elaborati	Corretti	Errati
Cat. 7	22	4 (18%)	18 (82%)
Cat. 8	30	8 (27%)	22 (73%)
Cat 9 Prof.	8	0	8 (100%)
Cat. 10 Prof.	14	1 (7%)	13 (93%)
Cat. 9 Licei e Tecn. Ind.	28	4 (14%)	24 (86%)
Cat.10 Licei e Tecn. Ind.	26	9 (35%)	17 (65%)

Si riportano gli errori più frequenti e alcune delle frasi degli allievi durante la messa in comune
"*Sono 60 mele perché è la metà dei frutti come 60 pere"* (traduzione possibile ma confermata nella messa in comune: i frutti sono solo mele e pere, dal momento che le pere sono 60 anche le mele sono 60. In realtà in questo caso non c'è tanto la superficialità nel leggere il testo ma la convinzione da parte di alcuni allievi che quando si elencano più relazioni, tra quelle date ci deve essere quella che porta al risultato esatto e in questo caso si propende per la prima con il supporto dell'ultima!).
"Non possono essere 60 mele perché non conosciamo il numero" (risposta all'intervento precedente)
"*In entrambi cesti ci sono 60 pere, 40 nella prima e 20 nella seconda, 40 mele nella prima e 60 nella seconda…60 pere e 100 mele*" (senza alcun controllo!)
Oppure si guarda un altro aspetto ma almeno si riflette su qualcosa che non quadra… "*40 mele e 40 pere nella prima e 20 pere e 40 mele nella seconda…ma non viene uguale"*
Dall'appropriazione subentra l'ostacolo dell'operazione: "*se nel primo cesto ½ sono pere e nel secondo cesto 1/3 sono pere, vuol dire sono 2/5 di pere"*.
E ancora… "*quindi nel primo cesto ½ sono mele e nel secondo cesto 2/3 sono mele cioè 3/5 mele. 60 x 5 = 300, 300 : 3 = 100 mele. Pere seconda cesta 60 : 1/3 = 20*".
L'unico corretto nei professionali: "*Abbiamo lavorato per tentativi prendendo un numero divisibile per 3"*
Tra tutte le categorie (7, 8, 9, 10) su 128 elaborati solo il 20% corretto (14% procedura aritmetica; 3% grafica; 3 % algebrica).

Sembra facile addizionare le frazioni!!!



2 corretti strategie previste nell'analisi a priori



1. Tappa alla stazione…

I SIGARI DI CIOCCOLATO (Cat. 5, 6, 7) (RMT 14.I.08)

Massimo e Andrea hanno comprato ciascuno una scatola contenente 25 sigari di cioccolato. La scatola di Massimo costa 40 euro e contiene solamente sigari grandi. la scatola di Andrea costa 30 euro e contiene solo sigari piccoli. Per avere sigari di entrambi i tipi, Massimo dà 12 sigari grandi ad Andrea, che ricambia con 12 piccoli.
Massimo, però, non è soddisfatto e pensa che Andrea gli debba ancora dare qualche cosa.

Quanti sigari di cioccolato deve ancora dare Andrea a Massimo perché il conto sia giusto?
Spiegate il vostro ragionamento.

I punteggi attribuiti su 628 classi di 9 sezioni, sono:

Categoria	0	1	2	3	4	Num. classi	Media
Cat 5	84 (58%)	6 (4%)	14 (10%)	18 (12%)	24 (16%)	146	1,26
Cat 6	115 (41%)	27 (10%)	31 (11%)	41 (15%)	65 (23%)	279	1,69
Cat 7	49 (24%)	18 (9%)	17 (8%)	19 (10%)	100 (49%)	203	2.51
Total	248 (40%)	51 (8%)	62(10%)	78(12%)	189(30%)	628	1,96

L'analisi a posteriori degli elaborati della sezione Puglia (6 per la cat. 5, 14 per la cat. 6 e 14 per la cat. 7) ha visto, per gli elaborati che riportano una risposta corretta, la medesima strategia aritmetica in tutte e tre le categorie, tranne qualche lieve differenza nella conclusione.
40 : 25 = 1,6 euro (costo di un sigaro grande)
30 : 25 = 1,2 euro (costo di un sigaro piccolo)

1,6 x 12 = 19,2 euro (costo di 12 sigari grandi)
1,2 x 12 = 14,4 euro (costo di 12 sigari piccoli)

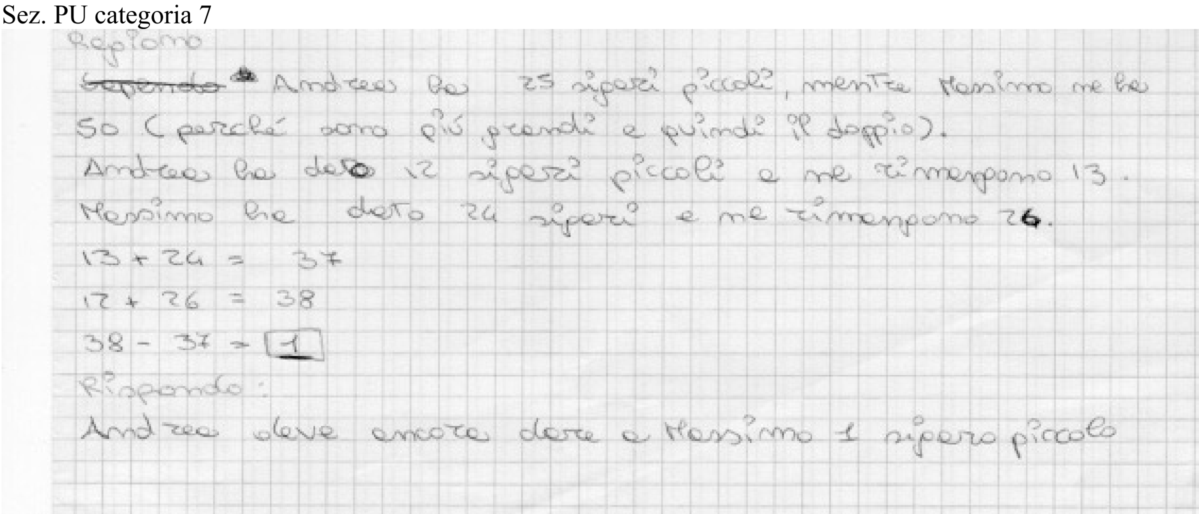
19,2 – 14,4 = 4,8 euro (differenza di valore fra i 12 sigari scambiati)

4,8 : 1,2 = 4 sigari (sigari che Andrea deve ancora dare a Massimo)

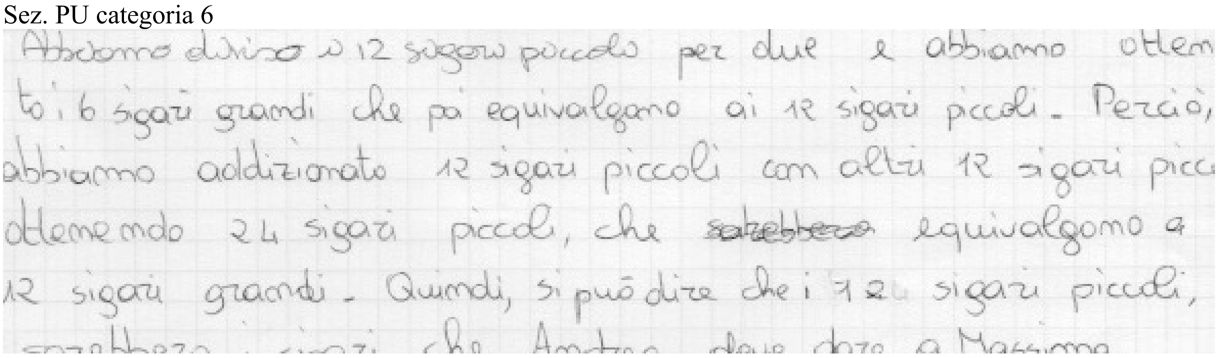
Le differenze sono sostanzialmente legate a come esprimere la divisione per determinare il costo unitario ritroviamo per esempio 40:25 oppure $\frac{40}{25}$ oppure 40|25 ma anche in questo caso, non si può evidenziare un comportamento diverso nel passaggio da una categoria all'altra.
È possibile anche non ritrovare alcun calcolo ma solo il 'racconto' dei vari passaggi (cat. 5): "*I sigari che deve Andrea a Massimo sono 4. Abbiamo cercato il costo di un sigaro della scatola di Massimo e il costo di un sigaro di Andrea. I risultati sono stati moltiplicati per 12. Poi abbiamo sottratto i due risultati ed è uscito 4,80. Abbiamo poi moltiplicato 1,20x4 ed è uscito 4,80; adesso sappiamo che Andrea deve 4 sigari a Massimo*".

È curioso constatare che ben quasi il 60% in cat. 6, più del 30% in cat. 5 e il 20% in cat.7 concentrano lo sviluppo del problema sulla relazione tra *sigari grandi e sigari piccoli*, pensando che ogni sigaro grande sia il doppio di uno piccolo, ovviamente giungendo ad una risposta errata.
Questa convinzione è molto forte sin dall'inizio della lettura del testo, come si può vedere in questo elaborato:

Sez. PU categoria 7

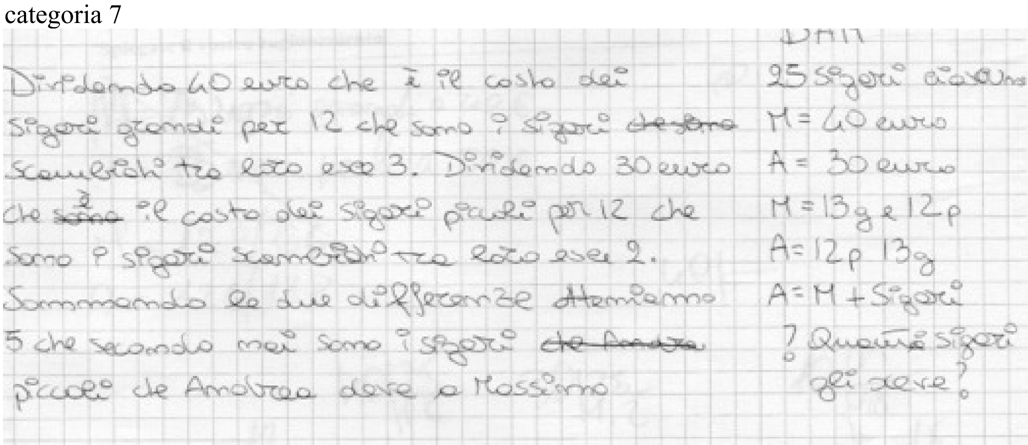

Ragiono
~~Sapendo~~ Andrea ha 25 sigari piccoli, mentre Massimo ne ha
50 (perché sono più grandi e quindi il doppio).
Andrea ha dato 12 sigari piccoli e ne rimangono 13.
Massimo ha dato 24 sigari e ne rimangono 26.
13 + 24 = 37
12 + 26 = 38
38 − 37 = $\boxed{1}$
Rispondo:
Andrea deve ancora dare a Massimo 1 sigaro piccolo

Sez. PU categoria 6


Abbiamo diviso i 12 sigari piccoli per due e abbiamo otten-
to i 6 sigari grandi che poi equivalgono ai 12 sigari piccoli. Perciò,
abbiamo addizionato 12 sigari piccoli con altri 12 sigari picc
ottenendo 24 sigari piccoli, che ~~sarebbero~~ equivalgono a
12 sigari grandi. Quindi, si può dire che i 12 sigari piccoli,
sarebbero i sigari che Andrea deve dare a Massimo

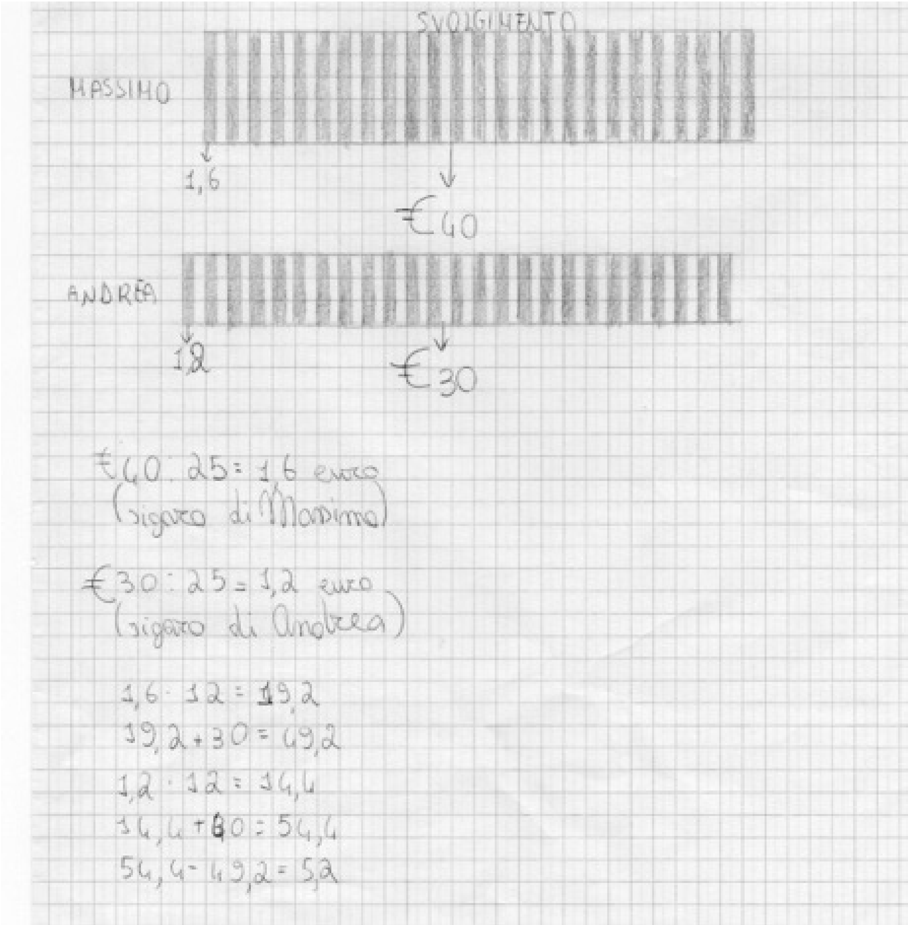
È sorprendente, inoltre, come nella categoria più alta, il 40% degli elaborati presenti una tipologia di errori più disparata:

Sez. PU categoria 7


Dividendo 40 euro che è il costo dei
sigari grandi per 12 che sono i sigari ~~che sono~~
scambiati tra loro esce 3. Dividendo 30 euro
che è il costo dei sigari piccoli per 12 che
sono i sigari scambiati tra loro esce 2.
Sommando le due differenze ottenniamo
5 che secondo noi sono i sigari ~~che Andrea~~
piccoli che Andrea deve a Massimo

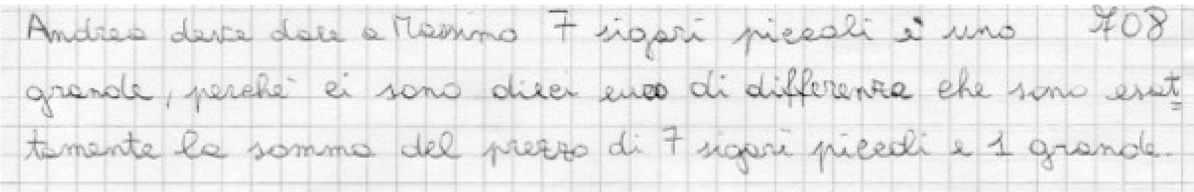
DATI
25 sigari ciascuno
M = 40 euro
A = 30 euro
M = 13 g e 12 p
A = 12 p 13 g
A = M + sigari
? Quanti sigari gli deve?

Sez. PU categoria 7 (aiuto con una rappresentazione grafica per il calcolo del pezzo singolo)



Dopo aver calcolato il prezzo unitario in entrambi i casi, si perde l'appropriazione del problema. L'elaborato in questione presenta la somma tra il costo della scatola più costosa con il costo di 12 sigari piccoli e la somma dell'altra scatola con il costo dei 12 sigari grandi. Segue la differenza tra questi due risultati: praticamente più che uno scambio di sigari, c'è un'aggiunta di elementi con il relativo costo.

O ancora… Sez. PU categoria 7



In questo elaborato anche se non sono presenti calcoli è evidente dalla risposta data che sono stati inizialmente ricavati i prezzi unitari. Successivamente avendo constatato che la differenza del costo tra le due scatole è di 10 euro la risposta data è: "*Andrea deve dare a Massimo 7 sigari piccoli e uno grande, perché ci sono dieci euro di differenza che sono esattamente la somma di 7 sigari piccoli e 1 grande*", risposta che denota una completa mancanza di controllo e di verifica in quanto si avrebbero due situazioni finali completamente diverse!

Si ha la sensazione che ci sia un passaggio dalla fase standard del problema (determinare il costo unitario) che non crea molte difficoltà anche a quegli allievi che riportano una conclusione errata, alla fase non standard (scambio di sigari) dove avviene la reale appropriazione del problema in questione.

2. Dopo tredici anni… Sigari di cioccolato

Antonella Pierno per sua abitudine, quando deve affrontare o approfondire un argomento, sceglie dalla banca del RMT, problemi dello stesso ambito concettuale da somministrare in classe. È giunto il turno di *Sigari di cioccolato,* dal momento che i suoi allievi della quinta primaria sono alle prese con le frazioni.
Somministra il problema a 17 allievi, divisi in sette gruppi formati da tre o due allievi ciascuno. Tra questi sono presenti tre o quattro particolarmente intuitivi, dice l'insegnante, distribuiti in gruppi diversi.
Gli allievi non hanno a disposizione molto tempo. Antonella percepisce che, dopo una prima lettura del testo, essi hanno posto maggiore attenzione al costo totale di ciascuna delle due scatole più che al costo unitario di ciascun sigaro e nota che Antonio, caparbio e assetato di successo, così lo definisce, lavorando in modo quasi febbrile, si impone sui compagni del gruppo e dice convinto: "*troviamo il costo di ciascun sigaro! 40 euro diviso 25 fa 1,60; 30 euro diviso 25 fa 1,20. Adesso facciamo la differenza: da 1,60 togliamo 1,20 che fa 0,40. Fra un sigaro e l'altro ci sono 0,40 centesimi di differenza e la scatola di Massimo vale 12 volte di più di quella di Andrea e cioè Andrea dovrà dare 4 sigari piccoli in più a Massimo perché 12 x 0,40 =4,80 di euro cioè il valore di 4 sigari piccoli".*
Gli allievi degli altri gruppi seguono la proposta di Antonio, che hanno sentito, convinti anche della bravura del loro compagno. Solo un gruppo si dissocia, sempre nella scia che se la maestra ha somministrato questo problema si devono utilizzare le frazioni, perché è l'argomento che stanno trattando.

Partono da 30 e 40 non più come differenza, ma come valore frazionario: "*uno piccolo vale 3 e uno grande vale 4, perché faccio la frazione 30/40! Se il numero della scatola è lo stesso ma il costo è diverso…vuol dire così che 3 grandi valgono 4 piccoli e che 12 grandi valgono 16 piccoli ... quindi 4 piccoli in più !".* Solo in questo caso ci si avvicina all'analisi a priori degli autori del RMT: calcolare la differenza dopo lo scambio direttamente in "sigari grandi" o in "piccoli", senza determinare il loro valore in euro: dal rapporto 30/40 si può dedurre che uno "piccolo" vale i 3/4 di uno "grande" o che 3 "grandi" valgono 4 "piccoli" ... e che 12 "grandi" valgono 16 "piccoli".

Facciamo un salto e Nunzia Dibenedetto, somministra lo stesso problema in tre classi di un biennio professionale. Anche se è stato pensato per categorie inferiori, viste le problematiche in questa tipologia d'istituti è spesso consigliabile, anche in gara, scegliere opportunamente i problemi che gli allievi possano affrontare al fine di evitare un ulteriore rifiuto per la disciplina.

Nell'analisi a posteriori dell'insegnante si ritrova in quasi tutti gli elaborati la strategia corretta già evidenziata precedentemente. Solo in due casi c'è una variante:

1,6 -1,2 = 0,4 euro (differenza di costo unitario)

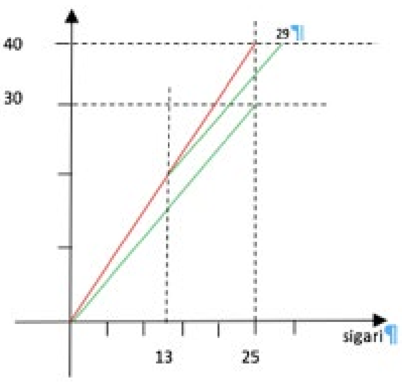
0,4 x 12 = 4,8 euro (differenza di valore fra i 12 sigari scambiati)

4,8 : 1,2 = 4 sigari (sigari che Andrea deve ancora dare a Massimo)

Oppure in altri 2 elaborati

1,2 : 1,6 = 12 : x   x = 16 (sigari piccoli da scambiare con 12 grandi)

16 – 12 = 4 (sigari che Andrea deve dare a Massimo)
E un altro ancora… Massimo dopo lo scambio avrà 13 sigari grandi e 12 piccoli del valore complessivo di (13 x 1,6 + 12 x 1,2 = 35,2 euro) perdendo un valore di (40 – 35, 2 = 4, 8 euro) pari a 4 sigari piccoli (4,8 : 1,2 = 4).
Nella sua relazione l'insegnante riporta: "*La stragrande maggioranza degli elaborati era priva di commenti, qualcuno ha aggiunto qualche semplice commento su esortazione del docente. I commenti indicati nelle strategie su esposti sono stati perfezionati e/o aggiunti dalla docente allo scopo di rendere chiaro il ragionamento che gli allievi hanno descritto a voce durante la successiva discussione in classe".*
… A partire da questo problema, nelle lezioni successive ho approfondito le operazioni in Q, ho ripreso il concetto di proporzione e quindi la relazione lineare tra due grandezze.



3. Altra tappa a…

Strana pizza (Cat. 5, 6) (RMT 12.II.09)

> Per battere un record gli abitanti di un villaggio decidono di fare una grande pizza rettangolare. La pizza deve essere lunga 4 m ed essere composta da quattro parti: una ai funghi, una al prosciutto, una alle olive e una alle verdure. Per venire incontro ai gusti di tutti, gli abitanti decidono che:
>
> - la lunghezza della parte al prosciutto deve essere il doppio di quella ai funghi e la metà di quella alle olive;
> - la lunghezza della parte alle verdure deve essere un quarto di quella più lunga.
>
> **Quale sarà la lunghezza di ciascuna parte di pizza?**
> **Spiegate come avete fatto a trovare la soluzione.**

Antonella Canestro e Vanessa Raso somministrano il problema in una classe di prima e una di seconda superiore di primo grado. Osservano i gruppi mentre lavorano e dopo la messa in comune e l'analisi degli elaborati riportano le seguenti considerazioni:

- gli alunni sono rimasti spiazzati dal fatto che venisse fornita solo una delle due dimensioni del rettangolo. All'inizio qualcuno ha ritenuto questa informazione necessaria alla risoluzione del problema;
- tutti e sei i gruppi hanno capito quali erano le relazioni tra i 4 gusti (cioè che la pizza alle olive fosse quella più grande, quella col prosciutto metà delle olive, le altre 2 uguali tra loro e metà del prosciutto);
- diversi gruppi sono arrivati alla soluzione utilizzando una strategia per tentativi: hanno attribuito un valore alla pizza al prosciutto, hanno calcolato gli altri e hanno verificato che la somma desse i 4 metri indicati nel testo;
- l'allievo rappresentante di un gruppo dichiara: "*abbiamo tentato di utilizzare le percentuali ma non ci sono riusciti;*
- un gruppo ha rispettato i rapporti ma è partito attribuendo alle "olive" la lunghezza di 4 metri, e gli alunni, quindi, hanno ottenuto tutte misure doppie e non si sono resi conto che la soluzione non era accettabile;
- altri gruppi hanno provato a rappresentare graficamente la situazione ma hanno avuto evidenti difficoltà:

fig. 1

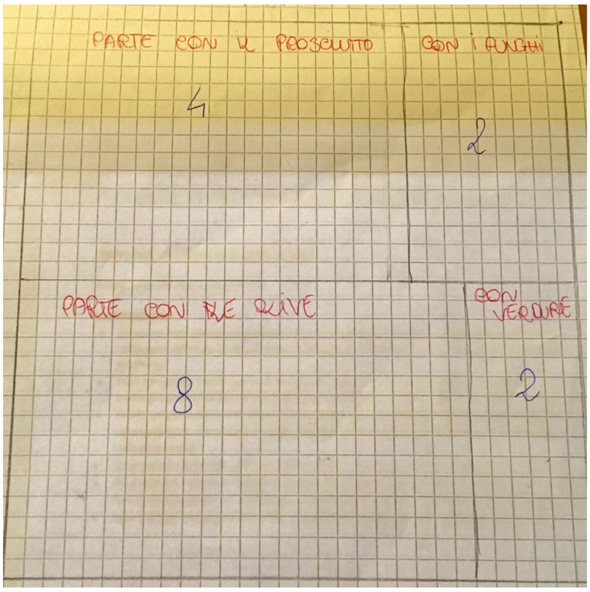
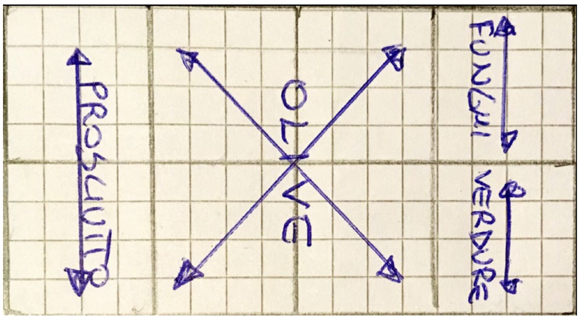


fig.2



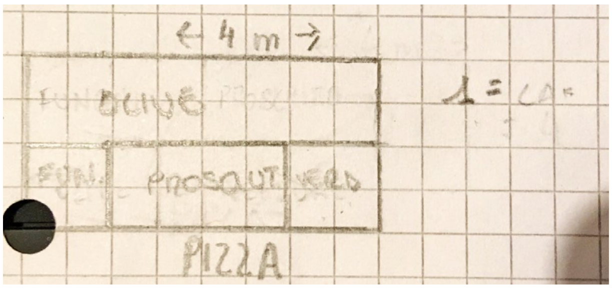


fig.3

- un gruppo ha proceduto con la strategia per tentativi ma scegliendo un valore iniziale poco conveniente (prosciutto 75 cm), in questo modo hanno speso molto tempo nei calcoli e, una volta appurato che questa misura non funzionava con i dati, non hanno capito come andare avanti;
- la maggior parte ha inizialmente attribuito un "*valore al prosciutto*" per poi ricavare gli altri.

Si osservi quanto nella fig.1 sia predominante il fatto di voler visualizzare la situazione legata alla realtà vissuta dagli allievi. Si cerca di rispettare le relazioni senza tener conto della lunghezza assegnata e che le informazioni sono relative a tale grandezza. In questa rappresentazione dove confluiscono molti errori radicati e dove sarebbe il caso di indagare con altri problemi riguardanti il conflitto di area e perimetro, si giunge ad una situazione che darebbe luogo ad infinite soluzioni.

In fig.2, la pizza risulta divisa in quattro parti, come richiesto, dove la lunghezza della parte alle olive risulta il doppio della lunghezza di quella al prosciutto ma, in modo errato, le lunghezze delle parti ai funghi e alle verdure coincidono con quella al prosciutto, senza rendersene conto gli allievi passano *dalla misura di una grandezza lineare alla misura di una superficie.*

In fig.3 come dar torto agli allievi? Osservando la rappresentazione grafica si ha: la pizza è rettangolare, è lunga 4 m e composta da quattro parti (la lunghezza della pizza o la pizza stessa?); la lunghezza della parte al prosciutto è la metà di quella alle olive e contemporaneamente il doppio della lunghezza di quella ai funghi; la lunghezza della parte alle verdure è un quarto della lunghezza di quella alle olive che è quella più lunga! Ciò condurrebbe ad un'altra risposta non considerata a priori: dividendo la pizza rettangolare come in fig.3, la parte alle olive è lunga 4 m, la parte al prosciutto 2 m, le parti della pizza dedicate ai funghi e alle verdure sono entrambe di 1 m ciascuna.

Nella classe seconda, gli allievi hanno già esperienza con i problemi del RMT. I tempi necessari alla risoluzione sono stati molto più brevi rispetto a quelli della prima, dopo solo 15 minuti si passa alla messa in comune durante la quale sembra che i gruppi abbiano ben interpretato correttamente il testo, ma poi controllando gli elaborati è facile osservare che persistono le stesse difficoltà riscontrate nella classe prima.

Nella fig.4 sottostante, confluiscono due rappresentazioni che non corrispondono ma dove la più 'realistica' è corretta.

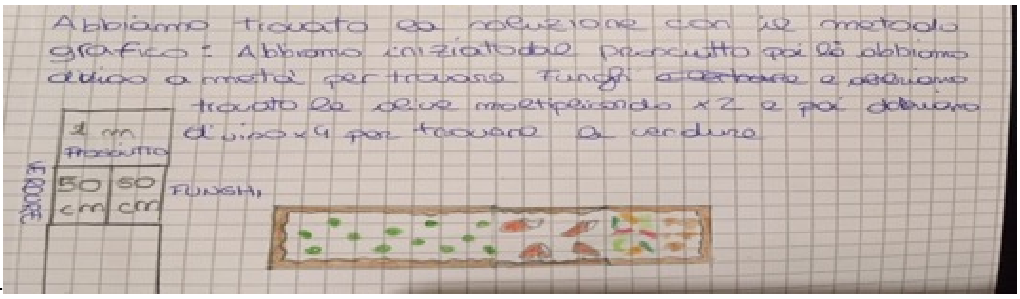
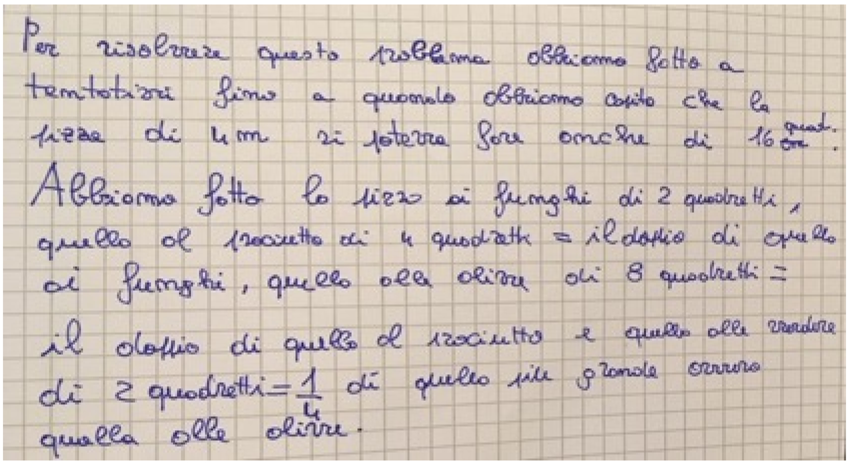
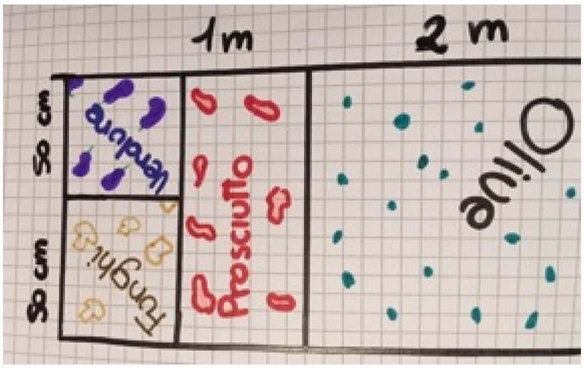
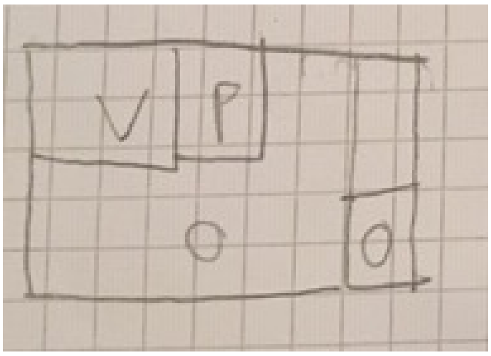


fig.4



- Anche qui, alcune rappresentazioni grafiche che non hanno rispettato la descrizione della pizza del problema (anche se in alcuni di questi casi il gruppo è poi pervenuto alla soluzione corretta).





4. Facciamo sosta a…

L'aiuola di tulipani (Cat. 7, 8, 9, 10) (RMT 21.I.13)

> La signora Frazionetti decide di piantare tulipani di diversi colori in una grande aiuola del suo giardino. Ha a disposizione tulipani di 8 colori diversi: rosso, giallo, arancione, bianco, lilla, viola, rosa, salmone. Con i tulipani rossi può «riempire» 1/2 dell'aiuola, con i gialli 1/3 dell'aiuola, con gli arancioni 1/4, con i bianchi 1/5, con i lilla 1/6, con i viola 1/8, con i rosa 1/9, con i salmone 1/12.
> La signora Frazionetti vuole «riempire interamente» la sua aiuola e, per ogni colore scelto, vuole utilizzare tutti i tulipani a disposizione ma, per far questo, deve scegliere i colori in modo opportuno.
> Si rende conto di poter scegliere tulipani di 3 colori, ma, per esempio, di non poter utilizzare contemporaneamente tulipani rossi, gialli e arancioni.
> **Quali sono i 3 colori di tulipani con cui la signora Frazionetti può «riempire» interamente la sua aiuola?**
> **E con 4 colori è possibile riempire l'aiuola? Quali?**
> **Spiegate le vostre risposte.**

Il problema è caratterizzato da un testo piuttosto lungo. Nella messa in comune, la voce del lettore si percepisce stanca man mano che procede e anche l'espressione del volto cambia al ripetersi di frazioni (di solito poco simpatiche). Il "*riempire interamente*" è considerata quindi una chiave, si potrebbe osare, un suggerimento per poter affrontare il problema portando molti a sommare tutte le frazioni presenti nel testo, tralasciando tutto il resto. Le domande e la situazione presentata diventa inutile, per questi allievi, è come se l'aiuola dovesse avere tutti i

colori senza tener conto del limite per esempio a tre o quattro colori e soprattutto alla possibilità di realizzare o meno una determinata situazione.
Non c'è da meravigliarsi se l'attenzione degli allievi sia stata solo sulle frazioni presenti nel testo e sull'avverbio '*interamente*'. Questa osservazione ci fa riflettere su un atteggiamento non poco usuale di *lettura-non lettura* che porta l'allievo ad estrapolare da un testo scritto i 'dati evidenti' senza percepire le *'condizioni al contorno'*.
La sintesi che è scaturita dal confronto delle insegnanti si è concentrata su difficoltà, errori e strategie osservate e ascoltate (come nel poster presentato) dagli allievi.
Le frasi dette e le difficoltà incontrate o ancora le strategie osservate non sono diverse da una categoria all'altra. Ciò dipende anche dal fatto che per la cat. 9 e la cat. 10, l'esperienza è solo stata affrontata negli istituti professionali.
In una classe di cat. 7 di Arcangela Quacquarelli, gli allievi mostrano anche graficamente, come hanno combinato tre o quattro frazioni, tra quelle date, e siano giunti alla conclusione che utilizzando tulipani rossi, gialli e lilla (1/2 + 1/3 + 1/6 = 1) è possibile ricoprire esattamente l'aiuola. Come anche considerando tulipani rossi, arancioni, lilla e salmone in quanto 1/2 + 1/4 + 1/6+ 1/12 = 1.(fig.5)

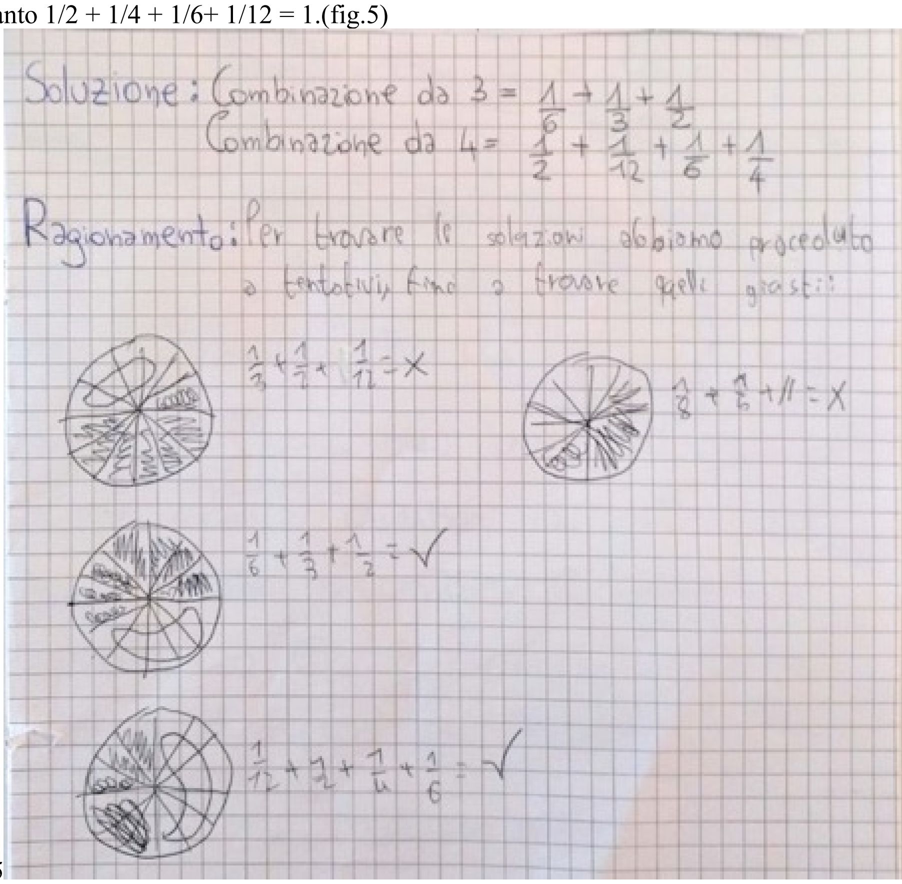
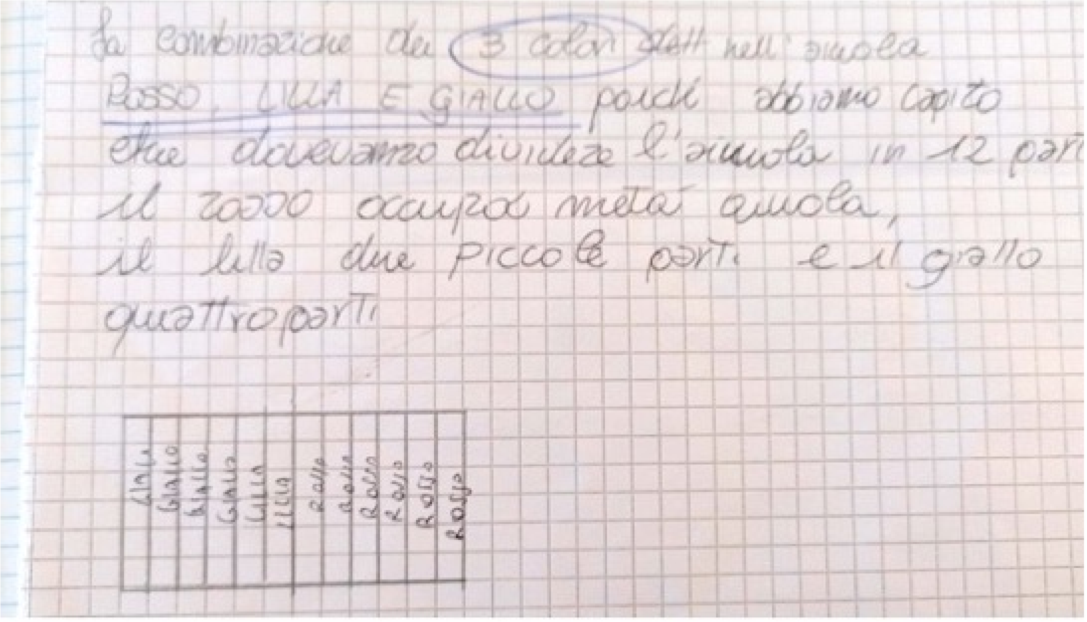


fig.5

Durante la messa in comune gli allievi dichiarano: "*abbiamo iniziato a procedere sommando tutte le frazioni però poi abbiamo pensato che l'aiuola si può rappresentare con un cerchio e abbiamo operato graficamente dividendo in 12 parti perché abbiamo visto che la frazione 1/12 è la più piccola quindi 1/12 è la parte singola dell'aiuola. Abbiamo diviso i cerchi in 12 parti uguali. Poi abbiamo visto che 1/5, 1/9 e 1/8 non avevano i denominatori divisori di 12 e le abbiamo scartate e abbiamo operato con le restanti frazioni procedendo per tentativi*".

E ancora… fig.6



Così argomentato oralmente: "*ho visto che 1/12 (salmone) equivale a 1m*^{2}*. Ho considerato l'aiuola fosse di 12 m*^{2}*, ho visto la corrispondenza tra l'aiuola e i metri quadri, ho scartato i colori bianco, viola e rosa perché dividendo 12 per i rispettivi denominatori avevo numeri decimali e non sarei arrivato all'intero e per esclusione ho lavorato sugli altri numeri*".

Altri parlano di frazioni equivalenti per ottenere lo stesso denominatore 360 e poi procedere con la ricerca dei tre o quattro numeratori la cui somma è 360 come previsto nell'analisi a priori.

Mentre Giorgio per darci conferma sulla lettura lunga del testo, dice: '*la parte*… per ogni colore scelto, vuole utilizzare tutti i tulipani a disposizione ma, per far questo, deve scegliere i colori in modo opportuno.
Si rende conto di poter scegliere tulipani di 3 colori, ma, per esempio, di non poter utilizzare contemporaneamente tulipani rossi, gialli e arancioni… *E' inutile questa frase! Mi fa solo confondere le idee! Sono sufficienti le domande'*.

5. Il nostro percorso si conclude con …

Giocare a FREE CELL (Cat. 8, 9, 10) (RMT 22.I.17)

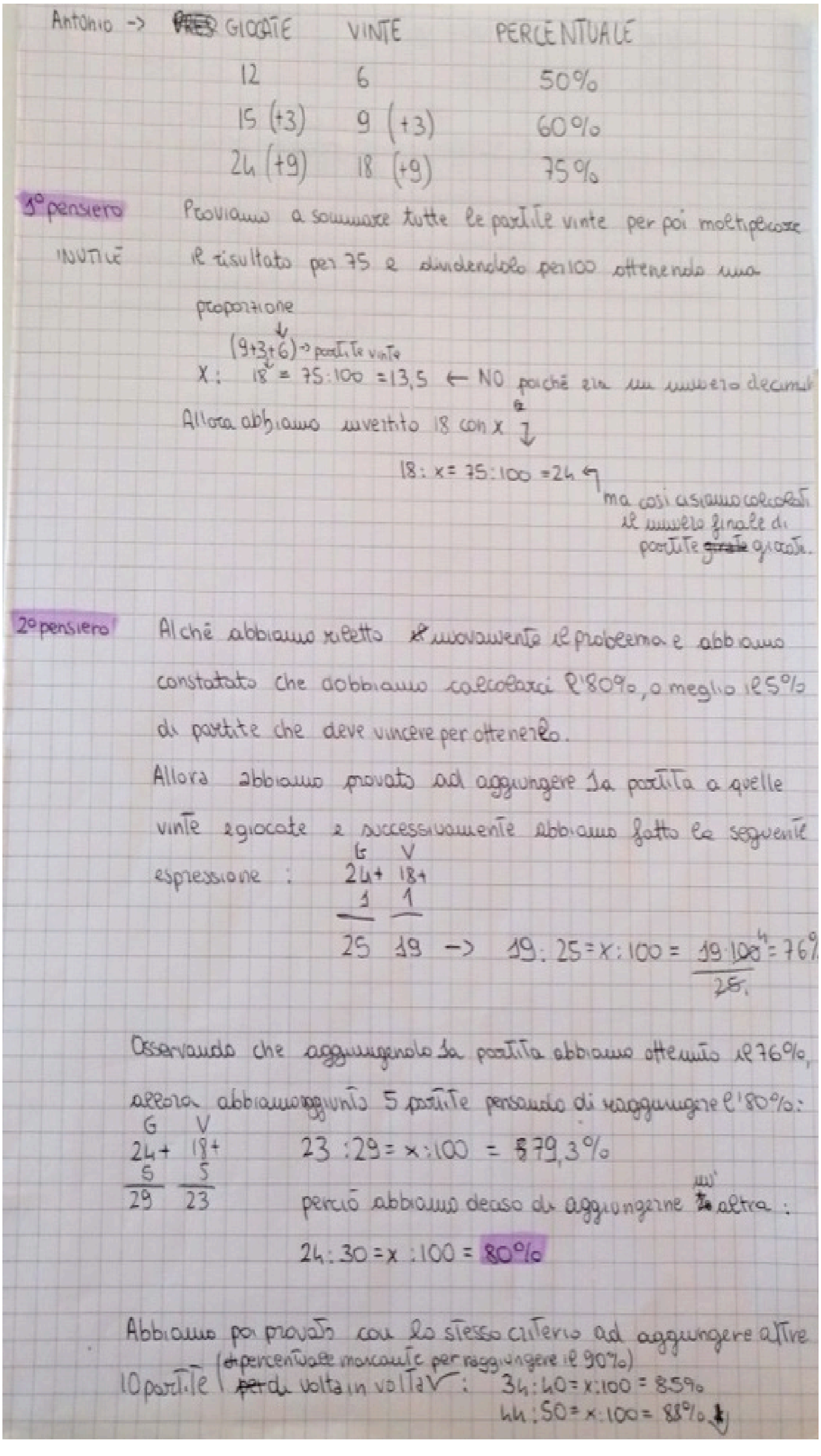
Nel gioco di Free Cell alla fine di ogni partita il software comunica il numero delle partite giocate, di quelle vinte e la percentuale delle vittorie. Antonio ha giocato 12 partite e ne ha vinte 6. La percentuale di vittorie è del 50%. Gioca altre tre partite e le vince. Il computer lo informa che la percentuale delle partite vinte è del 60%. Antonio arriva al 75% giocando altre nove partite e vincendole tutte. Antonio è impaziente di arrivare all'80% e poi al 90% senza perdere una sola partita.

Quante partite dovrà ancora giocare, senza mai perdere, per arrivare all'80% e poi al 90%?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

Nella banca dei problemi del RMT le statistiche dei punteggi attribuiti su 923 elaborati di 20 sezioni non sono molto confortanti. La media totale è 1,69 con una percentuale del punteggio zero al 37% variando di poco o niente da una categoria all'altra.

Come negli elaborati della Svizzera Romanda anche nelle nostre attività prevale la *"teoria dei tentativi"*, così detta dagli allievi, che aumenta di uno sia il numero delle partite vinte sia il numero delle partite giocate e poi, considerata la proporzione, calcola la percentuale di vittoria corrispondente…fino ad arrivare all'80% e poi al 90%. (fig.7)



Antonio -> GIOCATE VINTE PERCENTUALE

GIOCATE	VINTE	PERCENTUALE
12	6	50%
15 (+3)	9 (+3)	60%
24 (+9)	18 (+9)	75%

1° pensiero

INUTILE

Proviamo a sommare tutte le partite vinte per poi moltiplicare il risultato per 75 e dividendolo per 100 ottenendo una proporzione

(9+3+6) -> partite vinte

X : 18 = 75 : 100 = 13,5 ← NO poiché era un numero decimale

Allora abbiamo invertito 18 con x

18 : x = 75 : 100 = 24

ma così abbiamo calcolato il numero finale di partite ~~giocate~~ giocate.

2° pensiero

Al ché abbiamo riletto ~~il~~ nuovamente il problema e abbiamo constatato che dobbiamo calcolarci l'80%, o meglio il 5% di partite che deve vincere per ottenerlo.

Allora abbiamo provato ad aggiungere 1a partita a quelle vinte e giocate e successivamente abbiamo fatto la seguente espressione:

G: 24 + 1 = 25; V: 18 + 1 = 19 -> 19 : 25 = x : 100 = 19·100 / 25 = 76%

Osservando che aggiungendo 1a partita abbiamo ottenuto il 76%, allora abbiamo aggiunto 5 partite pensando di raggiungere l'80%:

G: 24 + 5 = 29; V: 18 + 5 = 23

23 : 29 = x : 100 = 79,3%

perciò abbiamo deciso di aggiungerne un'altra:

24 : 30 = x : 100 = 80%

Abbiamo poi provato con lo stesso criterio ad aggiungere altre 10 partite (percentuale mancante per raggiungere il 90%) di volta in volta:

34 : 40 = x : 100 = 85%

44 : 50 = x : 100 = 88%

fig.7

Altri allievi notano che le partite perse sono sempre 6 mentre variano le percentuali 20% se le vinte sono l'80% mentre 10% se le vinte sono il 90% e quindi considerano la proporzione:

partite perse : % partite perse = partite vinte : % partite vinte.

C'è chi dichiara durante la messa in comune: "*abbiamo visto che le sconfitte erano 6 e le vittorie 6, quindi il 50%. Dopo aver determinato il 75% attraverso le indicazioni della traccia, abbiamo usato il 6 per i tentativi. Abbiamo capito che avendo perso le 6 partite iniziali, le partite che dovrà vincere dovrà essere un multiplo di 6".* Tale premessa continua come in fig.8:

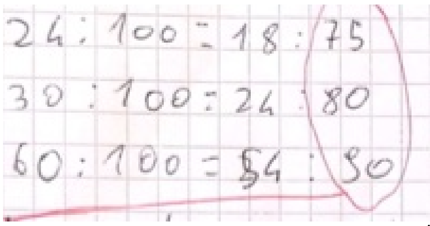


fig.8

Abbiamo ragionato per tentativi usando i rapporti e aumentando il totale delle partite e il totale delle vittorie aggiungendo lo stesso valore al valore precedente e calcolando la percentuale fino ad ottenere le percentuali richieste. Abbiamo aggiunto ogni volta 6. Se la percentuale era maggiore di quella cercata, si diminuiva il numero delle partite aggiunte. Poi abbiamo calcolato la differenza per ottenere il numero delle partite.

Come dalle statistiche generali c'è una buona percentuale di allievi che non hanno compreso o che si trovano, come abbiamo constatato ascoltandoli, ancora nella condizione di chiedere "*come si trova la percentuale delle vittorie?* $\frac{nr.delle\ partite\ giocate}{nr.partite\ vinte}$ *o il contrario?"* oppure che dichiarano molte difficoltà ad argomentare, soprattutto scrivendo il loro pensiero.
Molto diffusa la convinzione…*per aumentare la percentuale delle vittorie del 10% e cioè dal 50% al 60% bastano 3 partite, quindi ogni 10% in più consideriamo 3 partite vinte!*
Nel passaggio poi dal 60% al 75% si ritrovano erroneamente a considerare 1+ ½ partita a cui corrisponde una percentuale del 5% (come conseguenza del fatto che 3 partite corrispondono al 10%). Ne consegue che ad un incremento delle partite vinte corrisponde un incremento LINEARE della percentuale.
Si può ben constatare che manca un'attenta lettura del testo, prima dell'appropriazione stessa del problema. Ci si ferma sempre alle prime battute e non ci rende conto che nello stesso testo è scritto che Antonio arriva al 75% giocando altre nove partite e vincendole tutte che contraddice già in partenza ciò che affermano molti allievi!

Riflessioni

Il viaggio non è concluso, c'è ancora molto da visitare e da esplorare. Queste tappe nel mondo delle '*frazioni'* possono solo aiutarci a comprendere, ancora una volta, quanto sia necessario modificare il nostro usuale atteggiamento di docente sempre preoccupato nel dover *correre dietro al programma* invece di fermarsi a guardare, a riflettere e a far riflettere. A volte bisogna fermarsi per scoprire che è necessario e indispensabile tornare indietro e aspettare che i frutti siano maturi. Troppo spesso anche gli allievi corrono nella lettura e cercano i dati, o le operazioni da applicare e seguono frettolosamente le parole del testo. *Si fa così* oppure *devo fare… quello per quello, diviso quello* oppure… *quello diviso quello e poi per quello.* Nel riprendere questo viaggio nella banca dei problemi del RMT, ogni insegnante potrà organizzare le proprie tappe secondo gli obiettivi condizionati dalle precedenti esperienze e saranno i suoi allievi con i loro pensieri e le loro produzioni ad indicare la strada da percorrere.

Sezione di Siena

L'ALLIEVO DI FRONTE A UN PROBLEMA, L'ANALISI A PRIORI DEL SUO COMPITO: RIFLETTERE SUL SUO PUNTO DI VISTA

A cura delle coordinatrici[64] e di docenti afferenti alla Sezione

Introduzione

Fin dall'inizio del "cammino" del RMT, è stata data particolare importanza all'*analisi a priori,* che accompagna ogni suo problema, perché si è compreso fin da subito che essa è rilevante, non solo per la gara (basti pensare, ad esempio, alla possibilità di disporre di criteri generali per l'attribuzione dei punteggi), ma anche, e soprattutto, per la didattica e per la formazione degli insegnanti.
Nel corso degli anni, l'*analisi a priori* si è via via evoluta ed arricchita, sostenuta dall'*analisi a posteriori* di un gran numero di elaborati prodotti nella gara. È proprio quest'ultima, infatti, che ha mostrato, nel tempo, l'importanza di individuare con sempre maggiore precisione quale sia il compito matematico che la risoluzione del problema comporta e la necessità di calarsi sempre più "nei panni degli allievi" per descrivere come si potrebbero porre di fronte al problema dal momento dell'appropriazione fino all'individuazione delle varie strategie risolutive.
Tutto ciò ha contribuito ad incrementare anche il numero degli insegnanti che hanno fatta propria questa metodologia di lavoro e che la applicano nella loro pratica didattica per scegliere problemi "stimolanti" sui quali far lavorare i propri allievi.

Il poster presentato dalla sezione di Siena raccoglie quattro contributi di docenti che hanno interpretato, in modi diversi e attraverso le loro personali esperienze, il tema del convegno.

Qui di seguito riportiamo una breve presentazione di ciascuno di essi.

- <u>Damiana Sforzi</u> racconta un'esperienza fatta nelle sue classi di cat. 6 e cat. 7.
  All'inizio dell'anno scolastico, l'insegnante ha proposto agli allievi di cat. 6 il problema ***La stella magica (Cat. 4, 5, 6)*** 20.F.06 sia per facilitarli nel lavoro di gruppo su problemi del RMT, sia per testare l'acquisizione di alcuni concetti di ambito aritmetico. Il problema era stato da lei selezionato dopo un'attenta analisi a priori, fatta mettendosi proprio nei panni di allievi di questa fascia di età. I risultati molto negativi conseguiti in cat. 6 l'hanno spinta a presentare il problema nella sua classe di cat. 7. È stato proprio osservando come lavoravano gli allievi di questa classe che le è venuta l'idea di organizzare un'attività laboratoriale dove il problema stesso si è trasformato in un "gioco" con la costruzione di un opportuno materiale da usare come supporto nella ricerca della soluzione. L'insegnante ha così nuovamente coinvolto gli allievi di cat. 6 che, questa volta e grazie alla mediazione del materiale, sono riusciti ad appropriarsi della situazione problematica e a gestire la procedura risolutiva in modo corretto[65].

- <u>Serena Guerri, Lucia Lanini e Sara Missanelli</u>, per poter riflettere sul punto di vista degli allievi di fronte ad un problema del RMT, hanno cercato di renderli "protagonisti" nella stesura dell'analisi a priori di un problema appositamente selezionato, in modo da poter evidenziare i loro ragionamenti e vedere se e quanto si discostavano da quelli degli adulti. È nata così una sperimentazione in classi di cat. 6 e cat.7 articolata in tre fasi: 1) individuazione di un primo problema, risoluzione per gruppi e presentazione-discussione dell'*analisi a priori* "ufficiale" per permettere agli allievi di rendersi conto della ricchezza di quest'ultima dal punto di vista del compito matematico, delle strategie, ma anche dell'attribuzione dei punteggi, da un lato necessari per la gara, dall'altro utile strumento per mettere in luce i possibili errori che si potrebbero fare; 2) proposta del problema ***Collezione di Giornalini (Cat. 5, 6, 7) 27.I.09***: gli allievi, dopo averlo risolto, hanno compilato le rubriche previste dall'analisi a priori ufficiale; 3) messa in comune e discussione sul lavoro svolto e conseguente riflessione sull'attenzione che deve essere data a tutti i passaggi nella risoluzione di un problema: appropriazione del compito, scelta della strategia risolutiva, risposta coerente con la domanda, spiegazione fornita.

- <u>Fabio Brunelli e Francesco Chesi</u> hanno utilizzato il tema dell'Incontro per riflettere sul compito degli alunni di fronte ad un problema che mettesse in gioco più ambiti matematici ed avesse più soluzioni: lavorare in sinergia con più ambiti matematici ed avere l'opportunità di utilizzare metodologie risolutive proprie di un

---

[64] Coordinatrici Sezione Siena: *Carla Crociani, Lucia Doretti, Francesca Ricci, Lucia Salomone, Rita Spatoloni*

[65] Tornano qui appropriate le seguenti parole di F. Jaquet "*Molto sovente la possibilità di manipolare oggetti modifica il rapporto dell'allievo con il problema, rende la ricerca della soluzione più piacevole e più rapida, fa passare in secondo piano la necessità di notazioni, facilita i tentativi e libera la mente dalla paura dell'errore*" (cfr. ***Guida ai Laboratori di Risoluzione dei Problemi***, Introduzione p. 5, ARMT 2011).

ambito o dell'altro incrementa sia le capacità logiche che quelle della ricerca di strategie risolutive efficaci. La scelta del problema è caduta su ***La piastrellatura (Cat. 6, 7, 8) 27.II.12*** perché, oltre ad avere le caratteristiche cercate, coinvolge tutte le categorie della scuola Secondaria di Primo grado e permette quindi un'analisi a posteriori che consente di poter valutare il progredire delle strategie utilizzate ed il superamento di eventuali errori in relazione alla maturazione degli studenti.

- Fabio Brunelli e Fabiana Ferri hanno interpretato il tema dell'Incontro conducendo un'analisi a posteriori del problema ***Bilancia a due bracci (Cat. 5, 6, 7) 27.II.7,*** per poter analizzare il modo di ragionare degli allievi e capire se, e quanto, questo si discosti da quello dell'adulto. Nonostante insegnanti e ricercatori si sforzino nel prevedere risoluzioni ed errori, sulla base sia delle competenze che dovrebbero essere state acquisite, sia dello sviluppo cognitivo e psicologico legato ad una certa età scolare, nell'esaminare gli elaborati degli allievi e nelle discussioni in classe, ci sono sempre delle sorprese, sia in negativo che in positivo, che offrono interessanti spunti di riflessione.

1. La stella magica (Cat. 4, 5, 6) 20.F.06 *(a cura di Damiana Sforzi)*

Come faccio ormai da diversi anni, anche nell'anno scolastico 2018-2019 ho iscritto le mie classi di categorie 6, 7 e 8 al Rally Matematico Transalpino.
Nelle quattro ore settimanali del mio orario di matematica, un'ora è dedicata alla risoluzione di problemi, diventando così per tutte e tre le classi "*L'ora dei problemi*".
Frequentemente uso i problemi del Rally per introdurre nuovi concetti, ma anche per ripassarne altri, in particolare in cat. 6 all'inizio dell'anno scolastico, quelli già affrontati nella scuola Primaria, servendomene così per verificare il livello di preparazione degli alunni. Questo mi ha permesso di eliminare dalla mia progettazione qualsiasi *test di ingresso iniziale* ed avere poi il controllo in itinere, durante tutto il corso dell'anno. Il lavoro è sempre organizzato in gruppi che gli alunni scelgono in maniera autonoma; nella classe di cat. 6 poiché gli alunni provengono da plessi diversi della Primaria, concordiamo insieme le modalità di scelta, poiché questo favorisce una conoscenza più ampia e una coesione maggiore nel gruppo classe. Anche dal punto di vista relazionale il Rally è potentissimo! Come naturale, durante i primi allenamenti nella classe di cat. 6, si riscontrano sia difficoltà di lavorare in gruppo, sia di approccio a problemi "diversi" per quegli alunni che non hanno mai partecipato al Rally Matematico Transalpino.

Ciò che segue è il resoconto di un'esperienza che ha coinvolto le mie due classi di cat. 6 e di cat.7 della Scuola Secondaria di Primo Grado "G. Carducci" di Venturina Terme (Livorno).

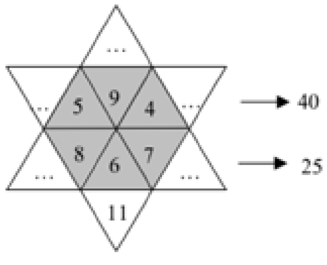
1.1 Analisi a priori dell'insegnante

Motivazioni della scelta di somministrazione del problema

Nei primi allenamenti delle mie classi di cat. 6 e cat. 7, nei mesi di ottobre-novembre, ho proposto il problema ***La stella magica (Cat. 4, 5, 6) 20.F.06***, il cui testo è riportato di seguito.

Ho scelto questo problema poiché ritenevo che potesse incuriosire il titolo e poi perché mi interessava osservare come gli alunni si organizzavano di fronte ad una situazione che, come appariva dalla lettura del testo, richiedeva il controllo di molti vincoli, ma che allo stesso tempo suggeriva l'uso di una rappresentazione grafica che agevolava nella risoluzione.
La somministrazione del problema era anche legata al ripasso, nell'ambito dei naturali, di somma e differenza di numeri e scomposizione additiva di un numero.

LA STELLA MAGICA (Cat. 4, 5, 6) 20.F.06
Andrea ha trovato questa stella in cui sono scritti alcuni numeri.



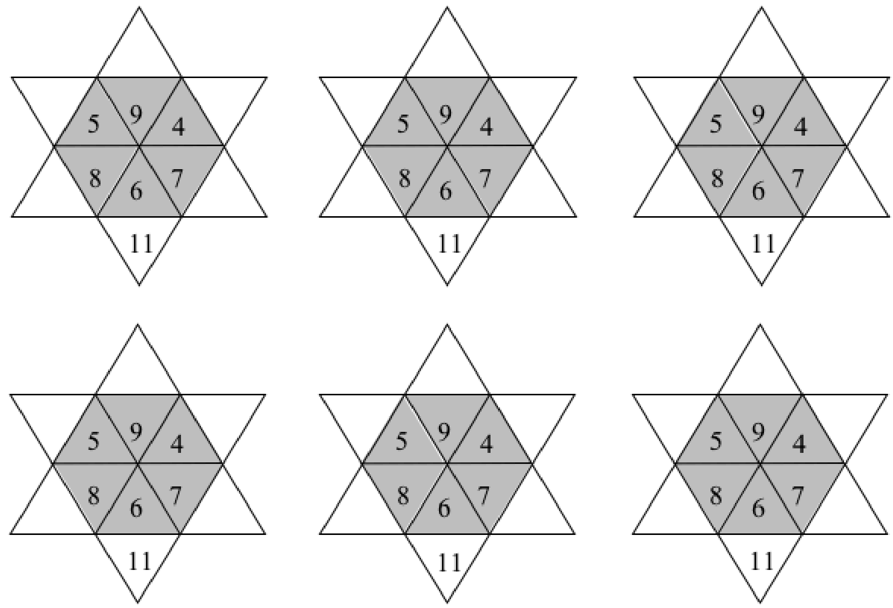
Bisogna inserire dei numeri interi nelle caselle vuote della stella seguendo queste indicazioni:

- tutti i numeri della stella devono essere diversi e minori di 20,
- la somma dei numeri che si trovano nei triangoli grigi deve essere uguale alla somma dei numeri che si trovano nelle punte bianche della stella,
- la somma dei cinque numeri della riga dove sono già scritti i numeri 5, 9, 4, deve essere 40
- la somma dei cinque numeri della riga dove sono già scritti i numeri 8, 6, 7, deve essere 25

Trovate tutti i modi diversi di completare la stella.

Spiegate come avete trovato le vostre soluzioni.

Presentate tutti i modi che avete trovato utilizzando una o più delle stelle vuote disegnate qui sotto.



<u>Aspettative di risoluzione del problema</u>

Una pratica che sono solita compiere per potermi rendere conto delle difficoltà che gli alunni possono trovare nella risoluzione, è quella di svolgere il problema così come penso che farebbero loro.

Le mie aspettative di risoluzione del problema prevedono le seguenti tappe:

- Addizionare tutti i numeri che sono nella parte centrale grigia della stella: 8+6+7+4+9+5 = 39.
- Sottrarre a 39 l'unico numero presente nella punta bianca: 39 – 11 = 28.
- Sommare i numeri presenti nella riga in alto della stella 5 + 4 + 9 = 18, quindi fare 40 – 18 = 22 per ottenere il totale dei numeri da inserire nelle punte bianche di questa riga.
- Sommare i numeri presenti nella riga in basso della stella 8 +6 + 7 = 21, quindi fare 25 – 21 = 4 per ottenere il totale dei numeri da inserire nelle punte bianche di questa riga; comprendere che non si può fare 4 : 2 = 2 perché si andrebbe contro un vincolo del problema ("non si possono ripetere i numeri"). Quindi i due numeri la cui somma è 4, devono essere 3 e 1 (4 e 0 non vanno bene perché si ripeterebbe il 4).
- Rendersi conto che i tre numeri da inserire nelle restanti punte bianche della stella sono da determinare tra i seguenti: 2, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. (*Mi aspetto che il 20 venga escluso perché il testo parla di numeri diversi e minori di 20*).
  Poiché 39 – (11 + 3 + 1) = 24, questa è la somma dei tre numeri cercati. Considerando che due di tali numeri stanno sulla riga del 5, 9, 4 e che sommati a questi devono dare 40, la loro somma è 22, quindi l'unica possibilità è che siano 10 e 12. Di conseguenza il terzo numero, nella "punta" in alto della stella, è 2.
- Ipotizzo che gli allievi, trovata una soluzione, si fermino e non considerino le altre tre soluzioni ottenute scambiando fra loro, in tutti i modi possibili, i numeri 10 e 12 nella riga in alto della stella ed i numeri 1 e 3 nella riga in basso della stella.

<u>Punti critici e punti di forza del problema</u>

Da una prima analisi rilevo:

Punti critici - Difficoltà nella comprensione del testo, che appare lungo e ricco di vincoli aritmetici; è richiesta quindi capacità di comprensione di ciascun vincolo, ma anche capacità di saperli gestire contemporaneamente per

appropriarsi del problema e per organizzare il processo risolutivo. Gli alunni devono inoltre tener conto anche della grafica della stella, che presenta punte bianche e una parte centrale grigia. Infine, la richiesta del problema fa capire che ci sono più modi di completare la stella. Qui si presenta un'ulteriore difficoltà perché la pluralità dei modi non è data dai valori numerici mancanti che sono univocamente determinati (1, 2, 3, 10, 12), ma da come questi possono essere posizionati nella stella.
Punti di forza - Schematizzazione chiara, mediante elenco, delle informazioni presenti nel testo; rappresentazione della stella nel testo e presenza di alcune sue copie alla fine dell'enunciato che possono essere utilizzate per riportare le soluzioni trovate, ma anche per facilitare le prove degli alunni.

1.2 Il problema presentato nelle classi
Ho proposto il problema nel primo allenamento della classe di cat. 6. Gli allievi hanno lavorato divisi in sette gruppi per circa un'ora ed un quarto, ma solo un gruppo su sette riesce a risolvere il problema limitandosi però ad una soluzione. Le principali difficoltà sono state, come previsto, l'appropriazione del problema, l'utilizzo coerente dei vincoli e il loro controllo simultaneo per determinare i numeri da inserire nelle punte bianche della stella. C'è stata inoltre difficoltà nell'utilizzare gli schemi già precostituiti: ogni gruppo ricostruisce la stella e non usa quelle già inserite nel testo, quindi ciò che poteva apparire un punto di forza risulta inutile. Concluso il tempo a disposizione, analizzo la situazione disastrosa. Ho bisogno di capire come procedere con gli allievi, senza necessariamente dare la "soluzione", ma aiutandoli a riflettere su come organizzare una procedura per risolvere il problema, poiché, a mio avviso, è stata quella la chiave dell'insuccesso.
Nel frattempo, decido di utilizzare il problema "*La stella magica",* insieme ad altri sei problemi, in una prova di allenamento per i miei allievi di cat. 7, durante "*L'ora dei problemi*". Gli studenti lavorano formando 7 gruppi. Il gruppo che affronta "*La stella magica"* non ha grandi difficoltà nel risolverlo trovando tutte le soluzioni, forse anche perché il problema è rivolto a categorie inferiori (in genere, questa è una "tecnica" che uso spesso quando ritengo che un problema possa dare un contributo importante nella didattica di classe). Apprezzo la loro modalità di organizzarsi per la ricerca della soluzione, alla quale non avevo pensato: essi si servono dei modelli di stella per ritagliarli, ricavarne tessere triangolari su cui scrivere numeri naturali minori di 20 e poi usarle per risolvere il problema.
A ciascun gruppo è stato chiesto, dopo la risoluzione, di organizzarsi per spiegare i problemi "assegnati", ed è stata concordata una modalità comune per tutti i gruppi, cioè quella di preparare cartelloni che mostrassero il processo risolutivo adottato.
Per il gruppo del problema *"La stella magica"* il cartellone è riportato in fig. 1: in esso si nota che i modelli inseriti nel testo del problema sono stati riprodotti ingranditi, poi ritagliati ed utilizzati come tessere; è anche visibile nel cartellone una rappresentazione di tipo "algebrico", in cui i triangoli bianchi indicano le incognite da trovare.

fig. 1

Partendo dalle modalità di organizzazione e preparazione del cartellone dei miei allievi di cat. 7, mi è venuto in mente di costruire dal problema un "gioco" per il quale è stato necessario realizzare, con la collaborazione di tutta la classe: a) una gigantografia della stella su carta, poi plastificata, sui triangoli della quale sono stati applicate pezzettini di velcro (cfr. fig.2); b) le tessere con i numeri da 0 a 20 (fig. 3) (mi è sembrato interessate che il suggerimento di introdurre lo 0 sia proprio venuto da una parte del gruppo classe).

fig. 2

fig. 3

Questo gioco "a costo zero" è stato poi presentato nella stessa classe di cat. 6 alla quale era stato proposto inizialmente il problema. Personalmente ho costruito due versioni identiche del gioco, mentre altre cinque versioni sono state costruite dagli allievi in un formato ridotto. Questa volta, la possibilità di spostare le tessere sulla stella magica ha permesso agli alunni di cat. 6 di avere un controllo più forte di tutti i vincoli e di poter cambiare i numeri quando serviva, senza dovere cancellare e riscrivere. Per lo svolgimento dell'attività ho volutamente costituito io i sette gruppi, in questo caso omogenei, per sperimentare se gli alunni più in difficoltà avessero una maggiore autonomia nell'affrontare il problema. In questo caso la mia previsione è stata corretta, poiché sono apparsi più motivati quegli alunni che spesso mostravano notevoli difficoltà di approcciarsi ai problemi. Tutto ciò a conferma di un altro aspetto importante del Rally Matematico Transalpino: essere molto inclusivo!

Durante la giornata di Open Day, il gioco "La stella magica" è stato presentato dai miei allievi di cat. 6 e di cat. 7 agli alunni delle classi quinte (cat. 5) della scuola Primaria e ai loro genitori, che si sono messi in gioco cercando di risolvere il problema proposto.

1.3 Conclusioni

La mia esperienza di insegnante che usa il Rally nella pratica didattica mi permette di sottolineare questi tre importanti punti di forza:

1. alto potere relazionale-cooperativo: il lavoro di gruppo è un terreno fertile per la condivisione delle proprie idee e per l'ascolto delle idee degli altri componenti;
2. essere inclusivo-motivante anche per quegli alunni che spesso non provano neppure a svolgere problemi;
3. aspetto giocoso: molti problemi si prestano alla costruzione di giochi facilmente realizzabili con materiali di semplice reperibilità e a basso costo.

2. Collezione di giornalini (Cat. 5, 6, 7) 27.I.09 *(a cura di Serena Guerri, Lucia Lanini, Sara Missanelli)*

Presentiamo un'attività svolta nelle nostre classi di cat. 6 e 7 sul problema ***Collezioni di giornalini***, organizzata allo scopo di portare gli allievi ad essere "protagonisti" di una "loro" *analisi a priori condivisa* del problema, così da poter "toccare con mano" il loro *punto di vista* rispetto a quello degli adulti che hanno redatto la versione "ufficiale" dell'Analisi a priori del problema stesso, e trarne qualche utile elemento di riflessione.

2.1 Attività svolta

L'attività è stata condotta in tre classi di cat. 6 ed in tre classi di cat. 7 ed è consistita in una prima fase "preparatoria" e in una seconda fase di somministrazione del problema in questione.
Nella prima fase, abbiamo proposto e fatto risolvere il problema ***La carta stradale (Cat. 5, 6) 27.I.08***.

LA CARTA STRADALE (Cat. 5, 6) 27.I.08
Su una vecchia carta stradale della regione di Transalpinia è rappresentata una lunga strada che attraversa, nell'ordine, cinque paesi indicati dalle lettere A, B, C, D, E.
Sulla carta sono state annotate in chilometri le distanze fra i vari paesi, ma alcune virgole non sono più visibili. Si possono leggere la distanza fra A ed E: **40,9** e tutte le cifre delle distanze intermedie.
Questo è quello che si può ancora leggere sui tratti intermedi:
A-B: **3 8** B-C: **1 2** C-D: **5 6** D-E: **1 9 5**
Indicate le distanze corrette A-B, B-C, C-D, D-E, inserendo le virgole eventualmente mancanti.
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

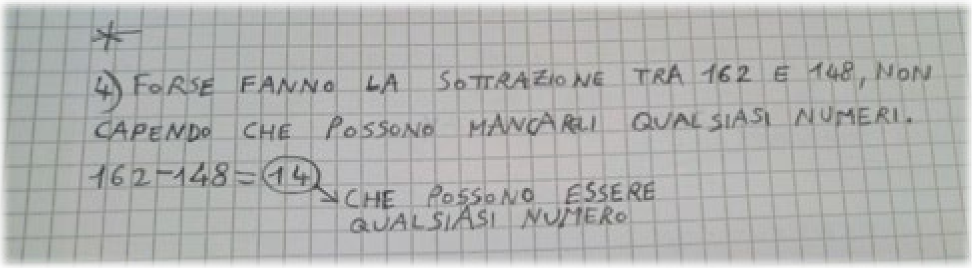
Poi abbiamo presentato la sua scheda di Analisi a priori per mostrare agli studenti cosa ci sia "dietro le quinte" del problema. Abbiamo quindi "svelato" le rubriche: *Compito matematico*, *Analisi del compito* e *Attribuzione*

dei punteggi, per far capire che un problema RMT non è solamente l'oggetto di una gara matematica ma un prezioso strumento didattico per verificare l'acquisizione o meno di certe conoscenze, tramite anche l'individuazione degli errori ricorrenti, o per introdurne di nuove.
Nella seconda fase è stato assegnato, per coppie di studenti, il problema ***Collezione di giornalini (Cat. 5,6,7) 27.I.09*** con il compito di risolverlo e di farne una loro "analisi a priori". É seguita poi una discussione in classe riguardo alla comprensione del testo, alle procedure utilizzate e agli aspetti di maggiore criticità incontrati.

COLLEZIONE DI GIORNALINI (Cat. 5, 6, 7) 27.I.09
Luigi ha conservato tutti i giornalini a fumetti di *Cars* fin dal primo numero uscito, ma ad un certo punto ha smesso di comprarli e di collezionarli.
Il suo amico Enrico invece ha cominciato a comprare il giornalino *Cars* quando ormai erano usciti molti numeri, e da quel momento ha continuato ad acquistarlo regolarmente e a conservarlo senza mai interrompere la sua collezione.
Oggi Enrico ha acquistato il numero 162. Adesso il numero dei giornalini della collezione di Enrico è un terzo del numero dei giornalini che Luigi ha nella sua collezione.
Enrico e Luigi decidono di unire le loro raccolte in modo da avere la collezione completa dal numero 1 al numero 162.
Purtroppo si accorgono che ci sono dei numeri mancanti: hanno in tutto 148 giornalini.
Quali sono i numeri che mancano a Enrico e Luigi per avere una collezione completa?
Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

2.2 Osservazioni sul lavoro svolto in classe

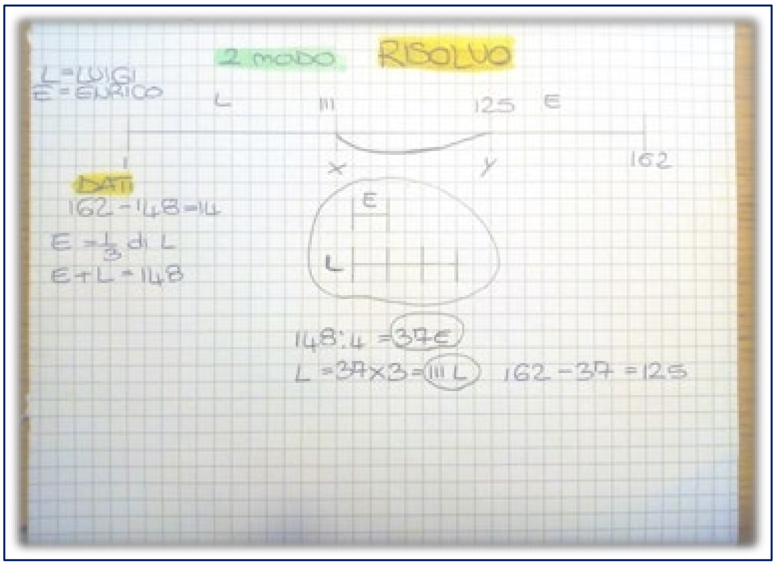
Dalla discussione svoltasi in classe, alcuni studenti hanno ipotizzato l'esistenza di una possibile incomprensione sulla richiesta del problema riguardo al numero dei giornalini: *"Quali sono i numeri che mancano a Enrico e Luigi per avere una collezione completa?"*
Secondo alcuni alunni, infatti, la richiesta, se non letta con attenzione, poteva far pensare alla "quantità" di giornalini, cioè 162 — 148 = 14, anziché ai numeri dei giornalini usciti, nonostante sia specificato "quali" e non "quanti" (v. Elaborato 1).



Elaborato 1

(Forse fanno la sottrazione tra 162 e 168, non capendo che possono mancargli qualsiasi numeri.
162-148 =14 che possono essere qualsiasi numero)

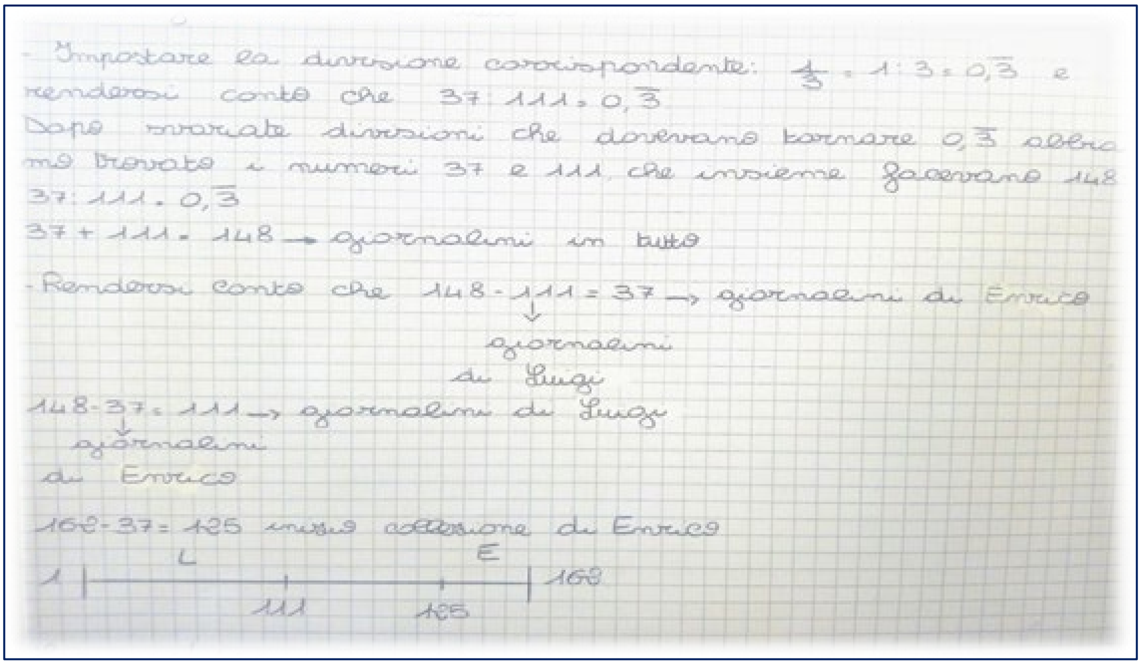
Sono state poi considerate le procedure utilizzate in classe dagli allievi e confrontate con quelle ipotizzate nell'Analisi a priori.
Negli elaborati svolti correttamente la procedura più utilizzata è stata quella di considerare 3 + 1 = 4 parti, rappresentata eventualmente con segmenti (v. Elaborato 2), oppure richiamando la somma di frazioni 3/3+1/3, procedura che nell'analisi a priori non era attesa come principale, mentre in nessun elaborato è stato fatto riferimento alle proporzioni.



Elaborato 2

Solo in un paio di elaborati è stata utilizzata la procedura per tentativi ottenuta dividendo 148 per 2, 3, 4 fino a constatare che 148 : 4 = 37 e 37 × 3 + 37 = 148, oppure scegliendo un numero n e verificando che $n \times 3 + n = 148$.

In un elaborato è presente una procedura, assente nell'analisi a priori: si è calcolato il rapporto tra i giornalini dei due ragazzi, 1/3 = 0,3333… periodico e dopo "svariati tentativi" si è trovato che anche 37 : 111= 0,3333… periodico e che 37 + 111 = 148 (v. Elaborato 3).



Elaborato 3

Infine sono stati analizzati gli errori più frequenti e gli allievi sono stati invitati a darne una motivazione. L'errore che ha pregiudicato maggiormente la risoluzione del problema è stato partire dalla divisione 162:3. Secondo gli studenti non è stata compresa la relazione tra le due collezioni e il fatto che 162 non fosse il totale dei giornalini acquistati, ma il numero dei giornalini usciti.

Tra gli elaborati in cui è applicata una procedura corretta per ottenere la quantità di giornalini di Luigi e Enrico, 111 e 37, ve ne sono diversi che, poi, presentano errori nel considerare 111 come estremo escluso e 125 = 162 − 37 come estremo compreso nell'intervallo dei giornalini mancanti. La maggior parte degli studenti, a questo proposito, ha ammesso che prima di dare conferma dell'intervallo ha preferito assicurarsene "contando con le dita", soprattutto dopo aver fatto 162 − 37 = 125.

2.3 Conclusioni

L'attività descritta ha coinvolto con piacere gli alunni che hanno svolto sia il ruolo di analizzatori dell'enunciato del problema, che quello di ricercatori di possibili strategie ed errori. A questo riguardo, stimolante è stata l'osservazione scrupolosa del testo e in particolare della formulazione della domanda, che sicuramente li ha fatti riflettere sull'attenzione spesso non adeguata che essi pongono alle informazioni contenute nelle varie consegne presenti negli enunciati dei problemi.
Riguardo all'inedita procedura trovata, questa, secondo gli allievi, potrebbe essere stata ispirata dall'argomento trattato in quel periodo dell'anno scolastico, ovvero i numeri periodici; inoltre, a loro parere, scrivere "svariati tentativi" è troppo generico e non corrisponde ad una effettiva procedura per tentativi organizzati.
L'aspetto che ha animato di più la discussione è stato tuttavia "come" rispondere con sicurezza alla domanda, indicando con precisione l'intervallo dei giornalini mancanti. L'uso delle dita, che qualcuno ha confessato con imbarazzo, ha tuttavia dimostrato la capacità di ricorrere a tecniche "rudimentali" per raggiungere la sicurezza necessaria nel dare la risposta.

3. La piastrellatura (Cat. 6, 7, 8) 27.II.12 *(a cura di Fabio Brunelli, Francesco Chesi)*

Abbiamo esaminato gli 801 elaborati della sezione di Siena del problema ***La piastrellatura (Cat. 6, 7, 8) 27.II.12*** di cui riportiamo il testo.

LA PIASTRELLATURA (Cat. 6, 7, 8) 27.II.12

Il signor Francesco ha rivestito di piastrelle il pavimento rettangolare del suo nuovo negozio che ha le dimensioni di 9 m e 18 m.

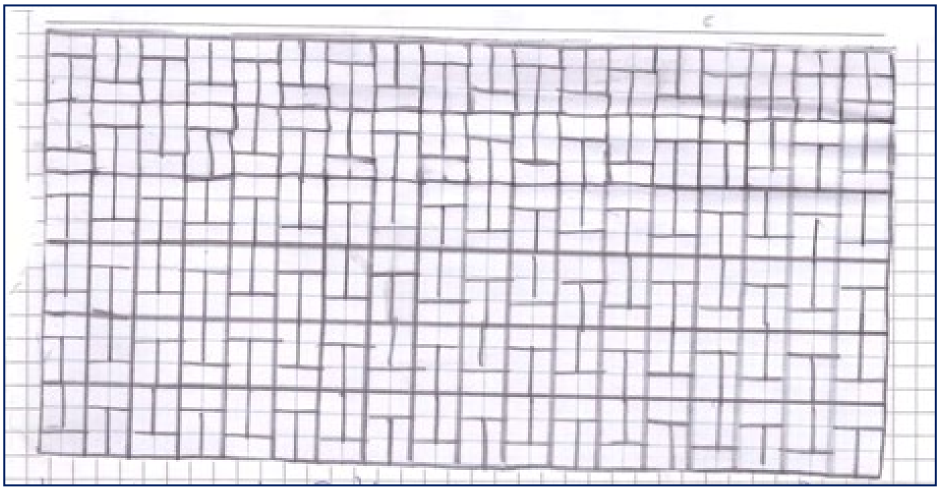
Ha comprato un numero di piastrelle compreso tra 200 e 1000 e ha utilizzato solo piastrelle intere.

Le piastrelle sono tutte uguali: sono rettangolari, hanno i lati uno doppio dell'altro ed entrambi misurano un numero intero di decimetri.

Quale può essere la misura dei lati di ciascuna piastrella?
Spiegate come avete fatto a trovare la risposta

Qui di seguito, abbiamo inserito in alcuni punti dell'Analisi a priori del problema nostri commenti (in blu ed in corsivo), documentati con estratti dagli elaborati degli allievi.

ANALISI A PRIORI
Compito matematico
Trovare le possibili misure (in numeri interi di decimetri) di un rettangolo, sapendo che un lato è il doppio dell'altro e che può essere contenuto un numero n ($200 < n < 1000$) di volte in un rettangolo, di cui si conoscono le misure dei lati (9 m e 18 m).
Analisi del compito
Comprendere che sia il pavimento da ricoprire sia la piastrella sono rettangolari e hanno un lato doppio dell'altro e che quindi le piastrelle possono essere messe nella posizione più semplice, per esempio con le dimensioni parallele a quelle del pavimento (ma, siccome devono rimanere intere, il numero delle piastrelle non cambia se si dispongono in altro modo, per esempio a cornice o parzialmente a cornice, a spina di pesce, ...).
Un esempio di piastrellatura "originale" costruita dagli allievi è il seguente, che compare in un elaborato di cat. 6. Presenta una disposizione delle piastrelle a gruppi di 3, non banale, e rispetta la condizione delle dimensioni una doppia dell'altra.



Scegliere di lavorare con la stessa unità di misura per le dimensioni del pavimento e per quelle della piastrella, preferibilmente in decimetri: il rettangolo da 90 × 180 dm ha un'area di 16 200 dm^2.

Alcuni errori presenti negli elaborati sono relativi alle equivalenze, due tipici: a) 162 m^2 = 1 620 dm^2; b) 162 m^2 riscritto come 162 m = 1 620 dm; una conseguenza dei due errori è che si ottengono piastrelle da 2 dm^2 in numero compreso tra 200 e 1 000 [1 620 (dm^2) : 2 (dm^2) = 810 (piastrelle)], mentre con i corretti valori (16 200 dm^2) si otterrebbe 8 100 piastrelle da 2 dm^2, cioè un numero non accettabile.

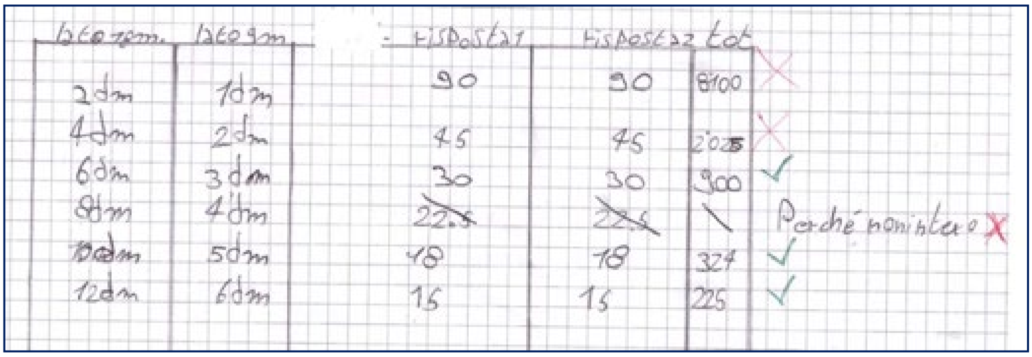
Ci sono più modi per organizzare una ricerca tra i quali, per esempio, i tre seguenti:

a. Partendo dall'area del pavimento 16 200 dm^2 e dal possibile numero di piastrelle, da 200 a 1000, calcolare le aree minime e massime delle piastrelle che sono 16 200 ÷ 1000 = 16,2 (in dm^2) e 16 200 ÷ 200 = 81 (in dm^2).
Essendo le piastrelle scomponibili in due quadrati accostati, l'area di ciascun quadrato sarà compresa tra 16,2 ÷ 2 = 8,1 e 81 ÷ 2 = 40,5 (in dm^2). Le dimensioni dei lati di questi quadrati sono compresi tra $\sqrt{8,1} \approx 2,8$ e $\sqrt{40,5} \approx 6,3$. Poiché le dimensioni delle piastrelle sono numeri interi, si possono prevedere le coppie (3 ; 6), (4 ; 8), (5 ; 10) e (6 ; 12) ed eliminare la coppia (4 ; 8) che ha numeri non divisori di 90 e di 180.

Tale ragionamento, basato sulla ricerca di minimi e massimi di una variabile, non è stato seguito da nessuna delle 801 classi, rivelandosi un procedimento "alto" per alunni di scuola Secondaria di Primo grado.

b. Partendo dai divisori di 90 e 180 per trovare le dimensioni della piastrella e calcolando il numero di piastrelle ogni volta.

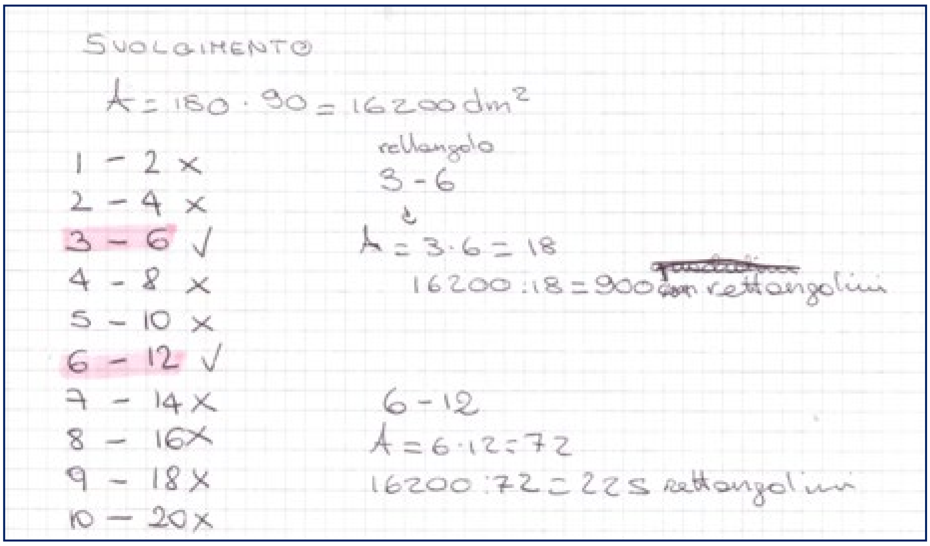
Nel seguente elaborato di cat. 6, si evidenzia la ricerca del numero di piastrelle sui due lati del pavimento e il controllo delle varie relazioni, in particolare si tiene conto che il numero totale di piastrelle dev'essere intero e compreso tra 200 e 1 000.



lato 18 m.	lato 9 m	risposta 1	risposta 2	tot	
2 dm	1 dm	90	90	8100	
4 dm	2 dm	45	45	2025	
6 dm	3 dm	30	30	900	
8 dm	4 dm	~~22.5~~	~~22.5~~		Perché non intero
10 dm	5 dm	18	18	324	
12 dm	6 dm	15	15	225	

c. Partendo da coppie di numeri interi in cui uno è doppio dell'altro e il cui prodotto è contenuto un numero esatto di volte nel pavimento. Per esempio, con la coppia (1; 2) la superficie della piastrella sarà di 2 dm^2 e il numero delle piastrelle sarà 8100 (16 200 ÷ 2).
Continuare con altre coppie di numeri accettando solo i casi in cui il numero delle piastrelle è maggiore di 200 e minore di 1000.
Identificare le tre soluzioni possibili: 900 = 16 200 ÷ (3 × 6); 324 = 16 200 ÷ (5 × 10); 25 = 16200 ÷ (6 × 12).

Nel successivo elaborato di cat. 8, gli alunni hanno impostato il lavoro per coppie di numeri uno doppio dell'altro. Stranamente, hanno "mancato" la coppia corretta 5-10, purtroppo senza lasciare traccia dei calcoli svolti per "mancarla"!



Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta: le tre soluzioni in decimetri (3 - 6); (5 - 10); (6 - 12) oppure in metri (0,3 - 0,6); (0,5 - 1); (0,6 – 1,2) con il dettaglio della ricerca e tutti i calcoli necessari a trovarle
3 Risposta corretta: le tre soluzioni con una ricerca incompleta o mancante di alcuni calcoli oppure due soluzioni corrette e ben argomentate
2 Risposta corretta: le tre soluzioni senza spiegazioni oppure due soluzioni con una ricerca incompleta o mancante di alcuni calcoli oppure una soluzione corretta e ben argomentata
1 Una o due soluzioni corrette senza spiegazioni oppure inizio di ricerca coerente senza arrivare alla conclusione
0 Incomprensione del problema

Riportiamo i risultati della sezione Siena, sia divisi per categoria che complessivi

La Piastrellatura - Categoria 6: media punteggi 0,66					
0	1	2	3	4	
178	63	48	4	7	300
59,33%	21%	16%	1,33%	2,33%	100%
					Totali

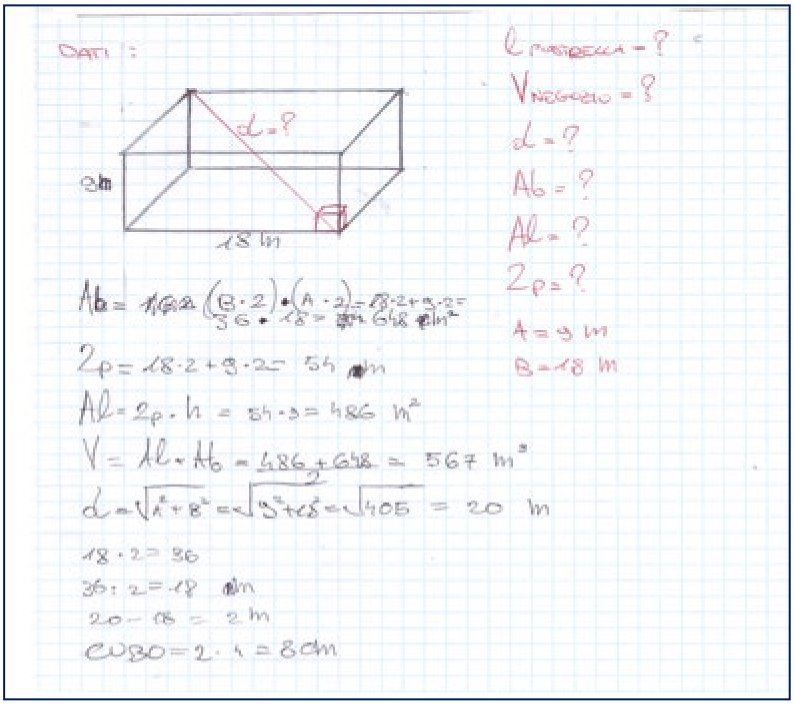
La Piastrellatura - Categoria 7: media punteggi 0,65					
0	1	2	3	4	
177	60	46	1	9	293
59,59%	20,20%	15,4%	1,01%	3,03%	100%
					Totali

La Piastrellatura - Categoria 8: media punteggi 1,29					
0	1	2	3	4	
66	56	61	9	16	208
31,7%	27%	29,3%	4,3%	7,7%	100%
					Totali

La Piastrellatura – Categori 6 - 8: media punteggi 0,82					
0	1	2	3	4	
421	179	155	14	32	801
52,56%	22,35%	19,35%	1,75%	3,99%	100%
					Totali

Considerazioni conclusive

Dall'analisi a posteriori si evidenzia che:
- sommando il numero di classi con punteggio 0 e 1 otteniamo la percentuale del 79%, praticamente hanno fallito otto classi su dieci;
- molte classi hanno trovato una soluzione, 3 dm e 6 dm, senza cercarne altre: l'atteggiamento è in linea con il contratto didattico tipico "una soluzione per un problema", applicato quindi anche laddove le soluzioni sono molteplici (o inesistenti);
- negli elaborati di livello 7 e 8, si è incontrato spesso il calcolo del perimetro del pavimento rettangolare del negozio, o della somma delle sue due dimensioni, e il confronto con l'area. Il caso estremo è il calcolo del loro rapporto, "area : perimetro". Un altro errore è il seguente: essendo le dimensioni sia del pavimento che delle piastrelle (anch'esse rettangolari), una il doppio dell'altra, la loro somma risulta il triplo della dimensione minore, e questo ha portato poi a dividere l'area in 3 parti uguali;
- tra coloro che hanno compreso il problema si nota spesso un approccio disorganizzato: gli alunni non procedono in maniera metodica, elencando tutti i divisori, ma ne individuano solo alcuni, ottenendo di conseguenza solo una parte delle soluzioni.
- non mancano elaborati dove si evidenzia una totale incomprensione del problema: una vera e propria "perla" è costituita dal seguente elaborato di cat. 8, in cui per trovare le dimensioni di una piastrella del pavimento si reputa necessario calcolare il volume del negozio!



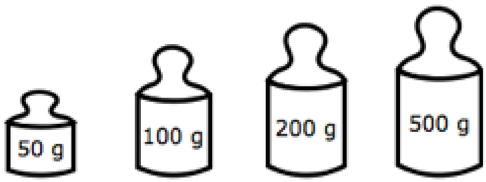
4. Bilancia a due bracci *(a cura di Fabio Brunelli, Fabiana Ferri)*

È stata condotta un'analisi a posteriori del problema ***Bilancia a due bracci (Cat. 5, 6, 7) 27.II.07*** per capire quale sia stato il modo di ragionare degli allievi e verificare se e quanto si sia discostato da quello ipotizzato dall'adulto e presente nella scheda Analisi a priori del problema.

BILANCIA A DUE BRACCI (Cat. 5, 6, 7) 27.II.07

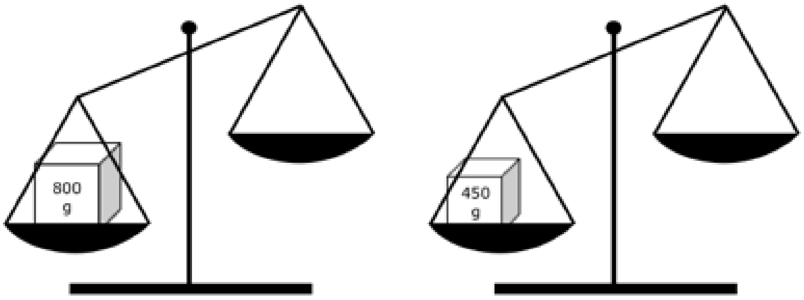
Anna cerca di mettere in equilibrio i piatti di una bilancia a due bracci.

Ha a disposizione un peso da 50 grammi, uno da 100 grammi, uno da 200 grammi e uno da 500 grammi.



In quali modi Anna potrebbe mettere in equilibrio la bilancia di sinistra in cui ha già messo un pacchetto da 800 g e la bilancia di destra in cui ha già messo un pacchetto da 450 g?

(*In ciascuno dei due casi potete utilizzare uno, due, tre oppure i quattro pesi a disposizione*)



1° caso *2° caso*

Per ciascun caso elencate tutti i possibili modi per mettere la bilancia in equilibrio.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Completare due uguaglianze in cui un termine è già dato (800, 450), utilizzando ogni volta uno o più tra quattro numeri dati (50, 100, 200, 500).

Analisi del compito

- Sapere che una bilancia a due bracci è in equilibrio quando il peso complessivo di un piatto è uguale al peso complessivo dell'altro piatto.
- Comprendere i dati del problema: Anna ha quattro pesi a disposizione e, per ogni bilancia, deve scegliere quali pesi la mettono in equilibrio; ogni peso può essere utilizzato una sola volta in ciascun caso.
- Comprendere che può mettere in equilibrio la bilancia mettendo dei pesi solo sul piatto libero oppure in entrambi i piatti
- Procedere caso per caso stabilendo le possibili uguaglianze.

Una sola possibilità per il 1° caso: 800 = 500 + 200 + 100

Tre possibilità per il 2° caso: 450 + 50 = 500 oppure 450 + 100 = 500 + 50 oppure 450 + 200 = 500 + 100 + 50.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (le quattro soluzioni possibili, espresse con un'uguaglianza o un disegno o una descrizione scritta) senza risposte errate (per esempio utilizzato due volte lo stesso peso oppure pesi corretti, ma con errori di calcolo).

3 Tre soluzioni chiaramente descritte, senza risposte errate, oppure le quattro soluzioni, con in più una sola risposta errata

2 Le quattro soluzioni, ma con altre due risposte errate, oppure tre soluzioni, con un'altra risposta errata, oppure due soluzioni senza altre risposte errate

1 Le quattro soluzioni, con più di due risposte errate, oppure due o tre soluzioni con due risposte errate oppure una sola soluzione senza risposte errate, oppure risposta "Ci sono 4 soluzioni" senza alcuna spiegazione

0 Incomprensione del problema oppure una o due soluzioni con più di due risposte errate

4.1 Analisi a posteriori: errori e procedure errate più frequenti

A. L'errore riscontrato più frequentemente è quello di non aver considerato che di ogni peso esiste una sola copia. Si ipotizza che ciò possa essere una conseguenza del fatto che la frase "*In ciascuno dei due casi potete utilizzare* *uno, due, tre, oppure i quattro pesi a disposizione"* compare tra parentesi nel testo e quindi potrebbe non essere stata letta con la dovuta attenzione.

B. Gli alunni ricercano tutti i casi numerici con somma 800 e somma 450, usando anche più volte lo stesso peso e/o "spezzando" il peso da 500 (per divisione o sottrazione) e/o utilizzando pesi non indicati nel testo, come 250 o 300.

C. Alcuni elaborati mostrano il tentativo di bilanciare tra loro i piatti senza tenere presente tutte le condizioni indicate nel testo del problema. Solo nel 2° caso, infatti, è consentito collocare dei pesi nel piatto di sinistra, già occupato da un pacchetto.

Categoria Cinque

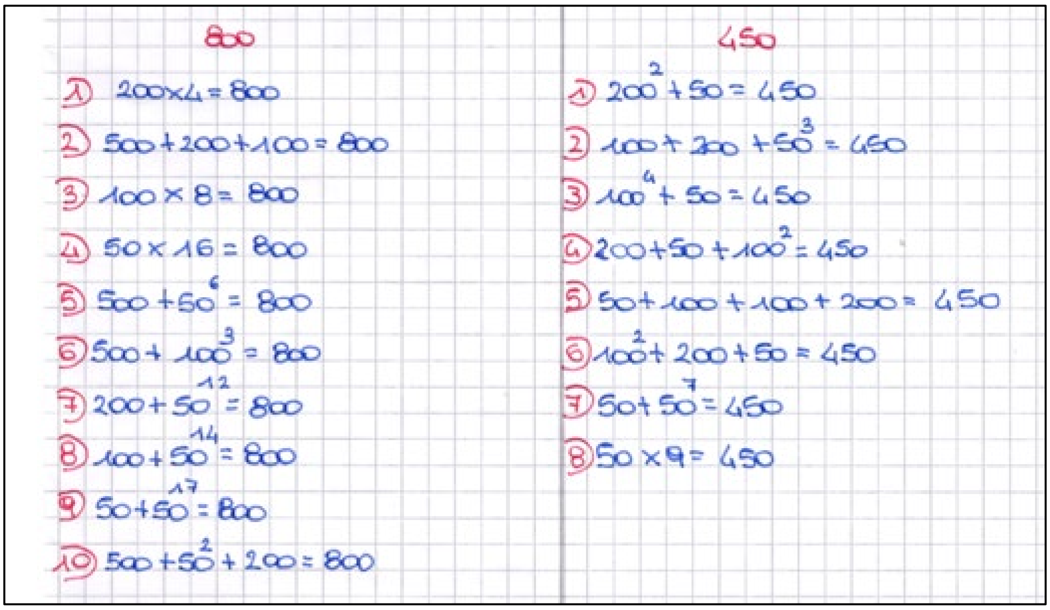
Abbiamo corretto tutti gli elaborati della sezione di Siena delle tre categorie alle quali è stato proposto il problema. Per la categoria 5 sono stati corretti 127 elaborati.
Il problema è risultato relativamente difficile per il livello 5 (media punteggi 2,27). Non sono stati molti i punteggi 4 assegnati (33,85%). Pochi sono stati i punteggi 0 (5,51%). Tuttavia la maggior parte degli allievi (94,49%) si sono cimentati nel problema. Questi i risultati in sintesi:

Bilancia a due bracci - Categoria 5: media punteggi 2,27					
0	1	2	3	4	
7	44	27	6	43	127
5,51%	34,64%	21,25%	4,72%	33,85%	100%
					Totali

Si riportano due esempi di elaborati (Elaborati 5.1 e 5.2) in cui si procede come segnalato al punto B dell'Analisi a posteriori.

<u>Elaborato 5.1</u>
Nel seguente elaborato gli allievi si concentrano solo nella ricerca di una operazione che permetta di ottenere un determinato valore numerico, dimenticando la richiesta del testo:
"Primo caso: 100 + 200 + 500 = 800 [sembra che abbiano in mente, più che la bilancia, un calcolo per ottenere 800].
Secondo caso: 500 – 50 = 450 [questa scrittura conferma quanto sopra detto, questa volta per il valore 450]
Poi aggiungono:
"Spiegazione. Prima abbiamo letto il testo, e abbiamo fatto delle ipotesi. Alla fine abbiamo sommato per il primo caso 100 + 200 + 500 e ci è venuto 800, poi, per il secondo caso, abbiamo sottratto 50 da 500 e ci è venuto fuori 450".

<u>Elaborato 5.2</u>
Anche nel seguente elaborato gli allievi si sono limitati a cercare i numeri "amici" dell'ottocento e del quattrocentocinquanta, utilizzando i numeri 50, 100, 200, 500 quante volte servivano, senza preoccuparsi che la procedura avesse un riscontro nel problema della bilancia e dei pesi.
Da notare la simbologia usata per rappresentare quante volte uno stesso valore numerico deve essere considerato (che è analoga a quella usata per le potenze, ma in questo caso non ha niente a che vedere con esse): per esempio, 50^6 qui significa "considerare 50 per 6 volte" e quindi il suo valore è 300 (e in modo analogo vanno interpretate le altre scritture).



Quanto sopra osservato è avvalorato dalla spiegazione fornita dagli allievi: *"Abbiamo fatto tantissimi tentativi per trovare i due numeri. Il primo ce ne ha dieci possibilità di essere uguale con gli altri numeri. Mentre l'altro ne aveva solo otto, ma di sicuro non si poteva contare 500 grammi. Così abbiamo trovato le misure dei due numeri".*

Categoria Sei

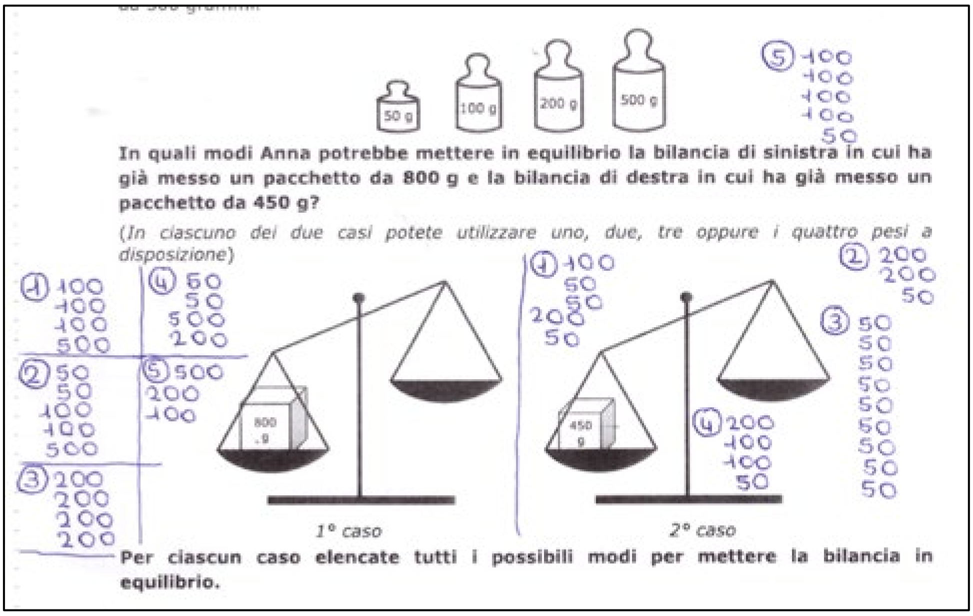
Per la categoria 6 sono stati corretti 305 elaborati.
Anche in questa categoria il problema è risultato relativamente difficile (media punteggi 2,23). Il numero dei punteggi 4 assegnati (30,8%) è stato inferiore a quello della categoria 5 (33,85%). Il numero dei punteggi zero (18,7%) è stato superiore a quello della categoria 5 (5,51%). Il peggioramento statistico dei risultati nel passaggio dall'ultimo anno della scuola Primaria (cat. 5) al primo anno della scuola Secondaria di primo grado (cat. 6) è un fatto noto, non solo all'interno del RMT, ma è anche riportato in letteratura a proposito di altri contesti, come ad esempio le Prove Invalsi (cfr. Babini, Graziani (2018), citato in Bibliografia).

Questi i risultati in sintesi:

Bilancia a due bracci - Categoria 6: media punteggi 2,23					
0	1	2	3	4	
57	36	86	32	94	305
18,7%	11,9%	28,2%	10,4	30,8%	100
					Totali

Riportiamo di seguito alcuni esempi di procedure e commenti estratti dagli elaborati degli allievi, cominciando da due situazioni (Elaborati 6.1 e 6.2) in cui è evidente la totale incomprensione del problema, passando poi ad elaborati con risoluzioni parziali, fino ad arrivare a due esempi che mostrano una corretta e completa risoluzione del problema.

Elaborato 6.1
Le possibilità descritte sia per il 1° che per il 2° caso sono ottenute senza considerare il vincolo che i pesi a disposizione sono solo i quattro rappresentati nel testo.
Ma senza questo vincolo le possibilità si moltiplicano…



Nel loro elaborato, gli allievi scrivono: *"Poi ci siamo accorte che le possibilità sono troppe da scrivere in un foglio, ne abbiamo elencate alcune*".

Elaborato 6.2

Gli alunni, oltre a scrivere una serie di operazioni senza senso che mostrano una totale incomprensione del problema, spiegano così: *"Abbiamo sommato e moltiplicato i numeri dei grammi delle bilance. A volte ripetendo lo stesso numero".*

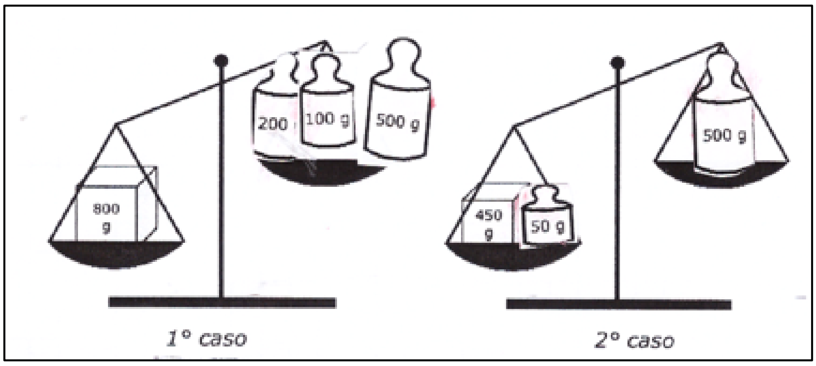
In diversi elaborati gli alunni risolvono il 1° caso mettendo correttamente in equilibrio i due piatti della bilancia, mentre invece non riescono a gestire il 2° caso.
Un esempio si ha nel seguente Elaborato 6.3 nel quale, per il 2° caso, gli allievi trovano una soluzione solo aritmetica che non rispecchia il contesto reale del problema e spiegano così:

Elaborato 6.3

"Per arrivare a 450 g abbiamo diviso in due un peso da 500 g e abbiamo aggiunto un peso da 200 g e così la bilancia è in equilibrio". E ancora: *"Il secondo modo per arrivare a 450 g è: un peso di 500 g meno un peso di 100 g e fa 400 g e abbiamo aggiunto un peso di 50 g".*

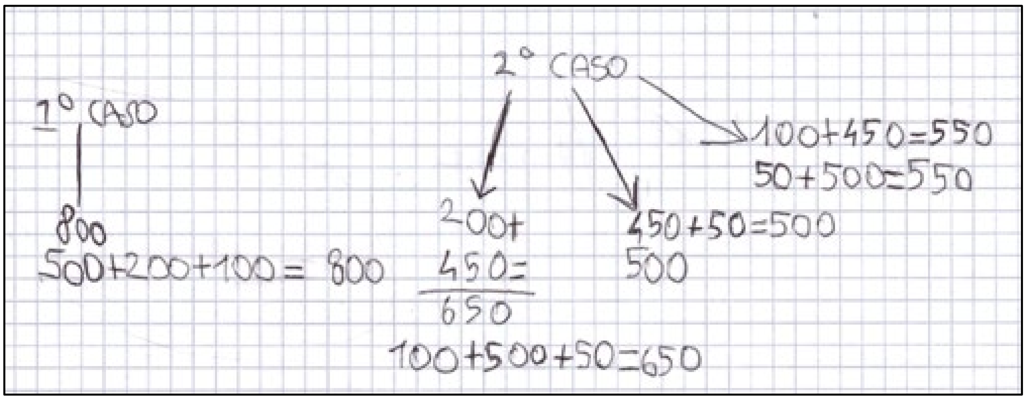
Oppure si trova una sola possibilità anche per il 2° caso come mostrato nell'elaborato seguente (Elaborato 6.4) in cui le soluzioni trovate nei due casi sono espresse ricorrendo al ritaglio e all'incollamento dei pesi opportuni sui piatti delle bilance:

Elaborato 6.4

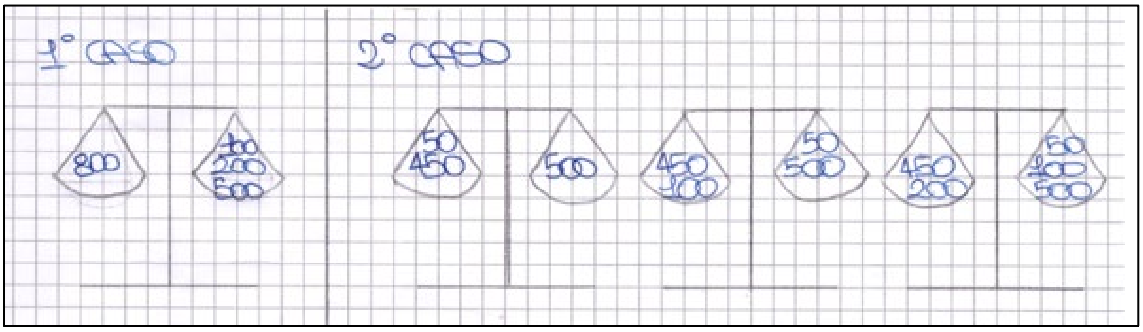


Infine riportiamo due esempi corretti di elaborati (Elaborati 6.5 e 6.6) in cui gli allievi esprimono in modo sintetico, ma chiaro, le soluzioni trovate:

Elaborato 6.5



Elaborato 6.6



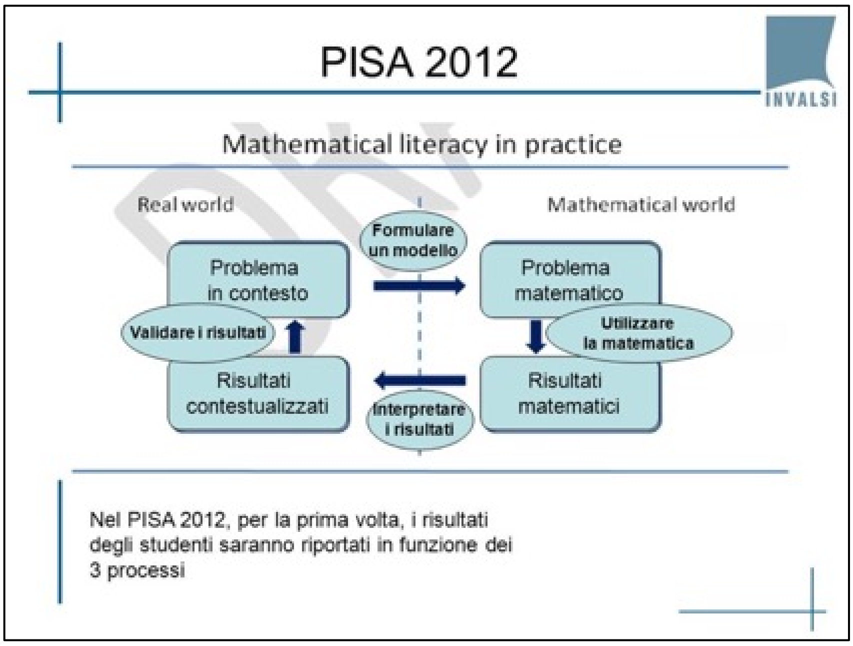
Categoria Sette

Per la categoria 7 sono stati corretti 293 elaborati. Il numero dei punteggi 4 assegnati (46,41%) finalmente risale e il numero dei punteggi zero diminuisce (8,53%).

Bilancia a due bracci - Categoria 7: media punteggi 2,74					
0	1	2	3	4	
25	30	68	31	136	293
8,53%	10,23%	23,20%	10,58%	46,41%	100
					Totali

4.2 Conclusioni

Riteniamo che il problema in oggetto si possa inquadrare nello schema, sotto riprodotto, del "*Ciclo della matematizzazione*", proposto nell'ambito delle prove OCSE – PISA 2012 di Matematica:



Nel nostro caso, gli allievi comprendono che occorre trovare dei numeri-pesi che, sommati tra di loro, forniscano 800 grammi e 450 grammi. Essi risolvono il problema matematico della scomposizione dei due numeri attraverso l'addizione, affidandosi ad una procedura stereotipata, sperimentata in contesti puramente numerici. Molti di essi si fermano però al risultato matematico, senza interpretarlo nel contesto del problema (*i pesi a disposizione*) e senza verificare i risultati ottenuti in relazione alle limitazioni date ("*ha a disposizione un peso da 50 grammi, uno da 100 grammi, uno da 200 grammi e uno da 500 grammi*"). Questa mancata interpretazione dei risultati matematici nel contesto del problema è stata la causa principale dell'insuccesso nella sua risoluzione. Riteniamo che si tratti di un aspetto fondamentale sul quale riflettere e lavorare con gli allievi.

Bibliografia

Babini S. Graziani I., *Analisi di errori su aree e perimetri da item Invalsi, presentati in verticale a studenti del primo e secondo ciclo di istruzione*, III Seminario I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca Bari, 26-28 ottobre 2018, Franco Angeli, in corso di pubblicazione.

Sezione di Udine

EQUAZIONI

A cura di Barbara Bianchin

Galline, bilance ed equazioni

1. Adesione agli scopi e obiettivi del RMT

L'attività di laboratorio è una delle strategie per conseguire quelle che sono le finalità dell'insegnamento della matematica, ovvero formare menti aperte e logiche capaci di argomentare, di confutare, di giustificare, di costruire congetture, di problematizzare, cioè di formulare domande, porre e porsi problemi. Il laboratorio diventa l'ambiente in cui costruire conoscenze matematiche in modo operativo; dà la possibilità al bambino di imparare a ragionare con metodo, a porsi domande e cercare risposte, a sperimentare strategie, ad usare la sua fantasia nel modo più efficace, alla ricerca di modelli sempre più adeguati alle diverse situazioni.

2. L'esperienza

L'esperienza nasce grazie ad uno dei progetti del plesso "animali a scuola" che ha visto l'introduzione di otto galline ovaiole con conseguente organizzazione di quella che prende il nome di Azienda Avicola "Comisso": la costruzione di un pollaio, la gestione dello stesso, la tenuta della contabilità della "Azienda Avicola".

Febbraio 2019

Viene proposto agli alunni di 5ª di Scuola Primaria di preparare il mangime miscelando le varie granaglie partendo da una ricetta trovata nel web:

Mangime bilanciato per galline ovaiole
50% mais, 12% orzo, 12% avena, 19% proteine, 7% carbonato di calcio

Vengono messi a loro disposizione i sacchi delle varie granaglie acquistati al consorzio agrario e si lascia loro la discussione.

Primo problema da affrontare la comprensione delle percentuali: 50% di mais cosa significa? Mezzo sacco da 25 kg?
L'orzo è in un sacco da 10 kg: 12% del sacco va bene?
La discussione porta alla decisione di preparare 10 kg di mangime e di calcolare le percentuali su 10 kg.

Secondo lavoro pesare gli ingredienti. Qui sorge un grosso problema perché la bilancia della scuola, purtroppo, è rotta.
Alcuni propongono di rimandare il lavoro al giorno dopo e procurare una bilancia, ma l'urgenza di sfamare le galline li costringe ad affrontare subito il problema.
Nessuna idea …

L'insegnate li provoca ricordando un gioco che fanno sempre mentre spiega

Decidono di costruire una bilancia con il materiale a disposizione

Su un braccio mettono una bottiglia di varechina (chiusa) da 1 litro, quindi corrispondente ad 1 kg (circa). Sull'altro fissano con lo scotch una bacinella.

Ora non resta che calcolare le percentuali, pesare gli ingredienti e mescolare il tutto; più di una volta sono costretti a togliere granaglie perché ne hanno versate troppe.

Terminata la preparazione del mangime riflettono sul fatto che una bilancia si possa mantenere in equilibrio aumentando o diminuendo di una stessa quantità entrambi i bracci e con l'insegnante cercano di formalizzare quello che hanno scoperto.

Dalla teoria delle situazioni di Guy Brousseau
"la concezione moderna dell'insegnamento chiede dunque all'insegnante di provocare nell'allievo gli adattamenti desiderati attraverso una scelta opportuna di "problemi" che egli pone. Questi problemi, scelti perché l'allievo possa accettarli, devono farlo agire, parlare, riflettere, evolvere autonomamente. [...] l'allievo sa bene che il problema che l'insegnante gli sta proponendo è stato scelto per fargli acquisire una nuova conoscenza, ma sa anche che quella conoscenza è interamente giustificata dalla logica interna della situazione e che egli può costruirla senza fare appello a delle ragioni didattiche. Non solo *può,* ma anzi *deve,* poiché **egli non avrà veramente acquisito questa conoscenza fino a quando non sarà capace di metterla in opera da solo nelle situazioni che incontrerà al di fuori di ogni contesto di insegnamento ed in assenza di ogni indicazione intenzionale.** Una tale situazione è chiamata situazione a-didattica."

Marzo 2019

Affrontano la seconda prova del Rally Matematico Transalpino; questo uno dei problemi:

27° RMT PROVA II marzo – aprile 2019 ©ARMT 2019 10

5. CARTE DI ANIMALI (Cat. 3, 4, 5)

Carlo e Luca collezionano carte di animali.

Per completare la loro raccolta, entrambi comperano delle bustine che contengono tutte lo stesso numero di carte.

Luca ha 17 carte e una bustina ancora da aprire.

Carlo che ha appena incominciato la sua collezione, ha solo 3 carte e tre bustine ancora da aprire.

Dopo aver aperto tutte le bustine, ogni bambino conta le proprie carte.

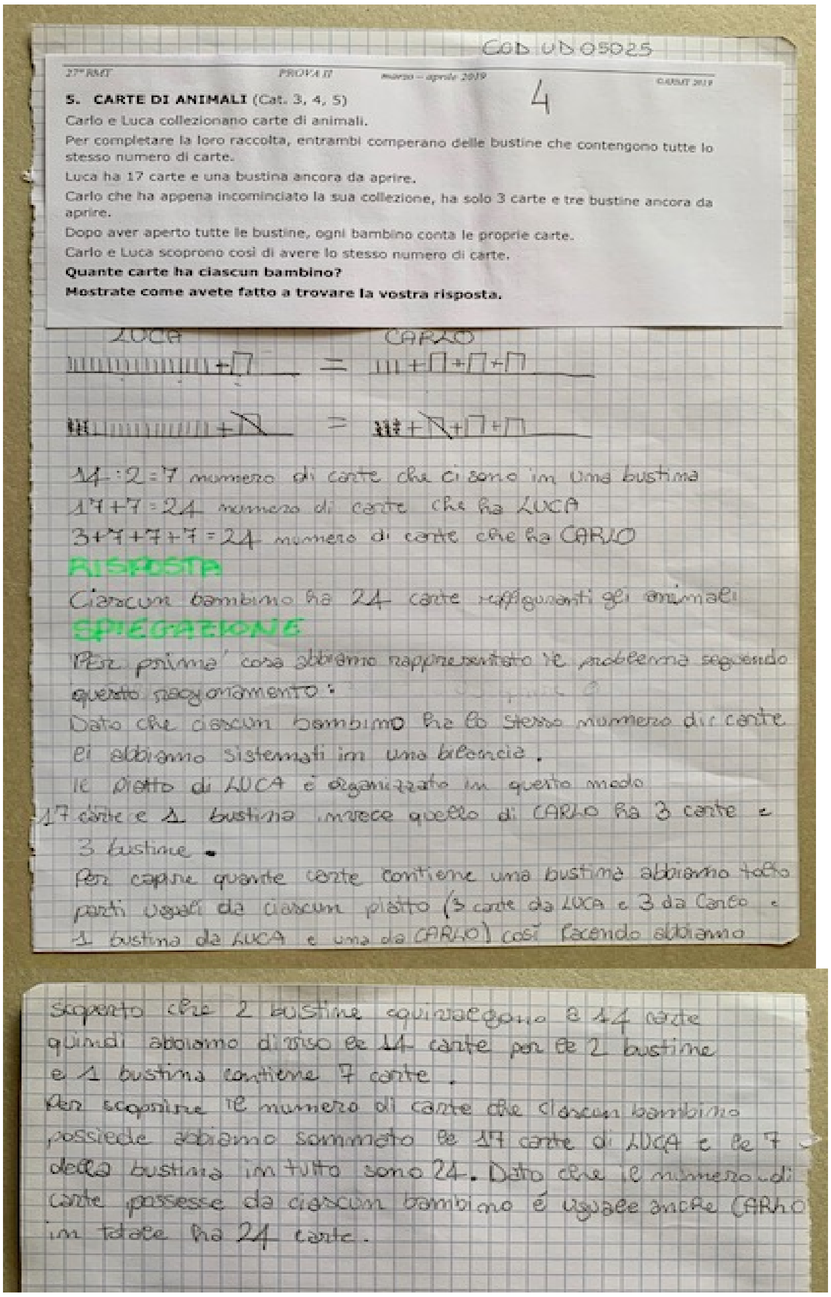
Carlo e Luca scoprono così di avere lo stesso numero di carte.

Quante carte ha ciascun bambino?

Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

Terminata la prova, che i bambini affrontano in piena autonomia come da regolamento del Rally Matematico Transalpino, l'insegnante rientra in classe e chiede:

- Come avete risolto problema?
- Facile! – rispondono – ci siamo organizzati con una bilancia!



Per prima cosa abbiamo rappresentato il problema seguendo questo ragionamento: **dato che ciascun bambino ha lo stesso numero di carte li abbiamo sistemati in una bilancia**:
il piatto di Luca è organizzato in questo modo: 17 carte e 1 bustina invece quello di Carlo ha 3 carte e 3 bustine.
Per capire quante carte contiene una bustina abbiamo tolto parti uguali da ciascun piatto (3 carte da Luca e 3 carte da Carlo e 1 bustina da Luca e 1 da Carlo), così facendo abbiamo scoperto che 2 bustine equivalgono a 14 carte quindi abbiamo diviso le 14 carte per due bustine e una bustina contiene 7 carte.
Per capire il numero di carte che ciascun bambino possiede abbiamo sommato le 17 carte di Luca e le 7 della bustina in tutto sono 24 carte. Dato che il numero di carte "possesse" da ciascun bambino è uguale anche Carlo in totale ha 24 carte.

Tradotto: HANNO IMPOSTATO UN'EQUAZIONE!

Sono stati quindi in grado di effettuare una trasposizione didattica dell'esperienza fatta utilizzandola per risolvere un problema, scoprendo altresì in maniera del tutto autonoma quella che è la logica delle equazioni.
Il problema è stato rivisto e condiviso da tutti ed è diventato patrimonio comune, tanto che anche in altre situazioni sono ricorsi in autonomia alla "bilancia".

Riferimenti bibliografici

Brousseau G. (2008). Ingegneria didattica ed Epistemologia della Matematica. Complementi di matematica per l'indirizzo didattico – volume 17.
Brousseau G. (1990). Le contrat didactique et le concept de milieu : Dévolution. *Recherches en didactique des mathématiques.* La Pensée Sauvage, vol. 9, nº 3, p. 309 - 336

D'Amore B., Fandino Pinilla M. I., Iori M. (2013). Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Complementi di matematica per l'indirizzo didattico - volume 21.

Duval R. (2007). La conversion des représentation: un des deux processus fondamentaux de la penseé. In *Du mot au concept Conversion. Le Séminaire.* Collection « Sciences de l'éducation » Presses universitaires de Grenoble.

Vygotskij L.S. (1962). Thought and Language. Cambridge, MIT Press [Ed. italiana: 1990, Bari, Laterza.

Sezione di Sassari

23° Incontro Internazionale dell'ARMT
Poster Session

"Triangoli sul Geopiano"
"L'allievo di fronte a un problema, l'analisi a priori del suo compito:riflettere sul suo punto di vista"

A cura di Maria Agostina Satta e Rosanna Sanna
Sez ARMT Sassari - IC2 Porto Torres

Premessa

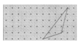
In questo lavoro sono state esaminate le procedure risolutive utilizzate dagli allievi della sezione di Sassari relative al problema "Triangoli sul Geopiano" (27^ RMT). È stata effettuata una comparazione tra l'analisi a priori proposta dagli adulti e le strategie risolutive degli allievi. Gli esiti, riguardanti la soluzione del problema, sono stati deludenti. Alla luce dell'analisi a posteriori, sono stati individuati gli ostacoli che potrebbero aver compromesso la corretta risoluzione del problema. Infine, è stato progettato un percorso con la finalità di superare le difficoltà incontrate dagli allievi.

Strategie utilizzate dagli allievi previste nell'analisi a priori

- Procedura tramite disegno della retta parallela ad AB, disegno corretto dell'altezza ed individuazione dei tre chiodi posti sulla retta parallela ad AB che individuano triangoli equivalenti. Fig. 1
- Calcolo dell'area del triangolo ABC determinata mediante misurazioni.
- Costruzione del triangolo simmetrico.
- Calcolo dell'area mediante formula di Pick.

Triangoli sul Geopiano (cat.8,9,10)

Mattia ha teso un elastico fra i tre chiodi A, B, C del suo geopiano per formare il triangolo della figura seguente:



Mantiene l'elastico sui chiodi A e B e lo solleva dal chiodo C per fissarlo su un altro chiodo, cercando di ottenere un nuovo triangolo, con la stessa area di ABC.

Mattia si chiede quali possono essere i chiodi, oltre a C, sui quali poter fissare l'elastico per ottenere altri triangoli della medesima area del triangolo ABC, di cui A e B siano sempre due vertici.

Segnate tutti questi chiodi sul geopiano e spiegate come avete fatto a trovarli.

Strategie utilizzate dagli allievi non previste nell'analisi a priori

Costruzione di parallelogrammi equivalenti al doppio del triangolo ABC.

- Individuazione dei tre chiodi mediante disegno di tre parallelogrammi successivi equivalenti al doppio del triangolo ABC con spiegazione chiara e corretta. Fig. 2
- Individuazione di un solo chiodo mediante costruzione di un solo parallelogramma equivalente al doppio del triangolo ABC. Fig. 3

Osservazioni

L'analisi degli elaborati mostra che le procedure previste nell'analisi a priori sono state seguite da coloro che hanno risolto correttamente il problema. In diversi elaborati tuttavia emerge che gli allievi, pur seguendo le procedure previste nell'analisi a priori, commettono diversi errori. In altri casi gli allievi sono andati alla ricerca di strategie non previste e non adeguate alla risoluzione del problema.

Errori, ostacoli e procedure rilevati

La tabella seguente riporta i punteggi ottenuti da 48 classi della sezione di Sassari che hanno partecipato al 27° RMT. Si nota una percentuale bassissima di elaborati con punteggio 3 e 4 e un'alta percentuale di elaborati con punteggio 0.

Dall'analisi a posteriori effettuata su tutti gli elaborati, sono stati rilevati i seguenti errori, ostacoli e procedure non corrette.

Punteggi	0	1	2	3	4	N.Classi
Cat. 8	62%	15%	22%			27
Cat. 9	42%	17%	25%		17%	12
Cat. 10	33%	11%	56%			9
Totale						48

Errori

Calcolo dell'area:

- Moltiplicano il semiprodotto di due lati. Le lunghezze dei lati vengono misurate con il righello Fig. 4
- Calcolano il semiprodotto di base e altezza. Le lunghezze della base e dell'altezza corrispondono al numero dei chiodi presenti sulla retta orizzontale passante per A e sulla retta verticale passante per C.
 Fig. 5-6
- Calcolano l'area come semiprodotto tra base e altezza. La misura della lunghezza dell'altezza è errata in quanto non è perpendicolare alla base. Fig. 7

Disegno del triangolo simmetrico

Gli allievi tentano di costruire un triangolo equivalente al triangolo ABC con la stessa base AB e con le stesse lunghezze dei lati disegnando inconsapevolmente una sorta di triangolo simmetrico. Fig. 8

Applicazione della formula di Pick

Gli allievi considerano equivalenti i triangoli che hanno lo stesso numero di chiodi interni. Fig. 9

Ostacoli

- Non appropriazione del concetto di altezza, spesso considerata corrispondente ad uno dei lati del triangolo.
- Difficoltà nel tracciare le altezze, questa aumenta sia quando le figure geometriche si trovano in posizione non "standard ", sia nel caso in cui l'altezza cada sulla retta che contiene il lato.
- Mancata individuazione del luogo geometrico (retta parallela alla base AB passante per il vertice C) determinato dalla traslazione dell'estremità del segmento altezza (di misura costante) quando si sposta sulla retta AB.

Procedure

Procedure non "vincenti"

La procedura del calcolo dell'area del triangolo ABC per determinare i triangoli equivalenti che hanno due vertici in A e B e il terzo vertice su un nuovo chiodo, richiederebbe diversi tentativi e misurazioni accurate. In alcuni elaborati, infatti, è presente il calcolo corretto dell'area, ma gli allievi non individuano i triangoli equivalenti al triangolo ABC. Fig. 10-11

Procedure non corrette

Disegno triangolo simmetrico

Gli allievi non si sono resi conto che disegnare un triangolo simmetrico non soddisfaceva i due vincoli: stessa area e terzo vertice su un chiodo contemporaneamente.

Applicazione della formula di Pick

Dall'analisi degli elaborati ipotizziamo che gli allievi non conoscano la formula di Pick, ma che si sia trattato di un tentativo per trovare una strategia per risolvere il problema. Infatti, in qualche elaborato, è rappresentato un triangolo equivalente al triangolo ABC con un numero di chiodi interni uguale, in altri, invece sono disegnati triangoli non equivalenti che hanno comunque lo stesso numero di chiodi interni. Fig. 9

Percorso didattico

Poiché tra gli ostacoli evidenziati emerge la non acquisizione di un corretto concetto di altezza, abbiamo deciso di appurare quali siano le convinzioni degli allievi su tale concetto.

Che cosa intendono gli allievi per altezza di un triangolo?

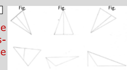
Dalle risposte fornite dagli allievi di tre classi terze del nostro Istituto è emerso quanto segue:

L'altezza è:

- Un segmento che parte da un vertice e cade perpendicolarmente al lato opposto al vertice.
- Una linea dritta che parte dal vertice alto fino a toccare il lato.
- La misura per definire quanto è alta la figura.
- Un segmento che divide in due parti uguali la figura
- Un segmento che divide la figura non per forza in parti uguali.

Gli allievi sanno riconoscere l'altezza in un triangolo?

Fig.



Viene fornita la scheda di Fig.12 nella quale gli allievi devono stabilire quali segmenti possono essere considerati altezze dei triangoli e devono motivarne la scelta.

Il 100% degli allievi riconosce come altezza quella rappresentata in fig. 2, mentre il 40% non considera altezza quella rappresentata in fig. 1 probabilmente perché pensano all'altezza come verticalità e sono gli stessi che alla domanda "Che cosa intendi per altezza di un poligono" rispondono: "la misura per definire quanto è alta la figura".

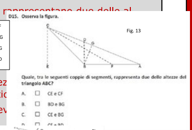
Circa l'80% degli allievi non riconosce come altezza quella della fig. 5 mentre il 55% circa riconosce come altezza quella rappresentata in fig. 6.

Sono stati proposti successivamente due quesiti tratti dalle Prove Invalsi.

Quale tra le seguenti coppie di segmenti rappresentano due delle altezze del triangolo ABC?

CE e CF
BD e BG
CE e BG
CF e BD

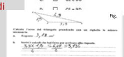
Invalsi 2013 grado 06



Il 47% degli allievi considera come altez… conferma il loro "attaccamento" alla vertic…

Nel quesito che segue il 53% degli allie… del triangolo come semiprodotto di

Invalsi 2013 grado 08



Gli allievi sanno tracciare le altezze in un triangolo?

Si invitano gli allievi a disegnare un triangolo qualsiasi su un foglio bianco e a tracciare le altezze.

Tutti gli allievi rappresentano triangoli in posizione standard e generalmente acutangoli. La quasi totalità traccia correttamente l'altezza relativa al lato parallelo al bordo della pagina, mentre disegna in modo non corretto quelle relative agli altri lati.

Fig.15

Si chiede infine agli allievi di tracciare le altezze in un triangolo ottusangolo posto in posizione non standard.

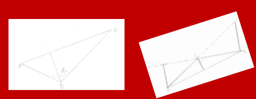
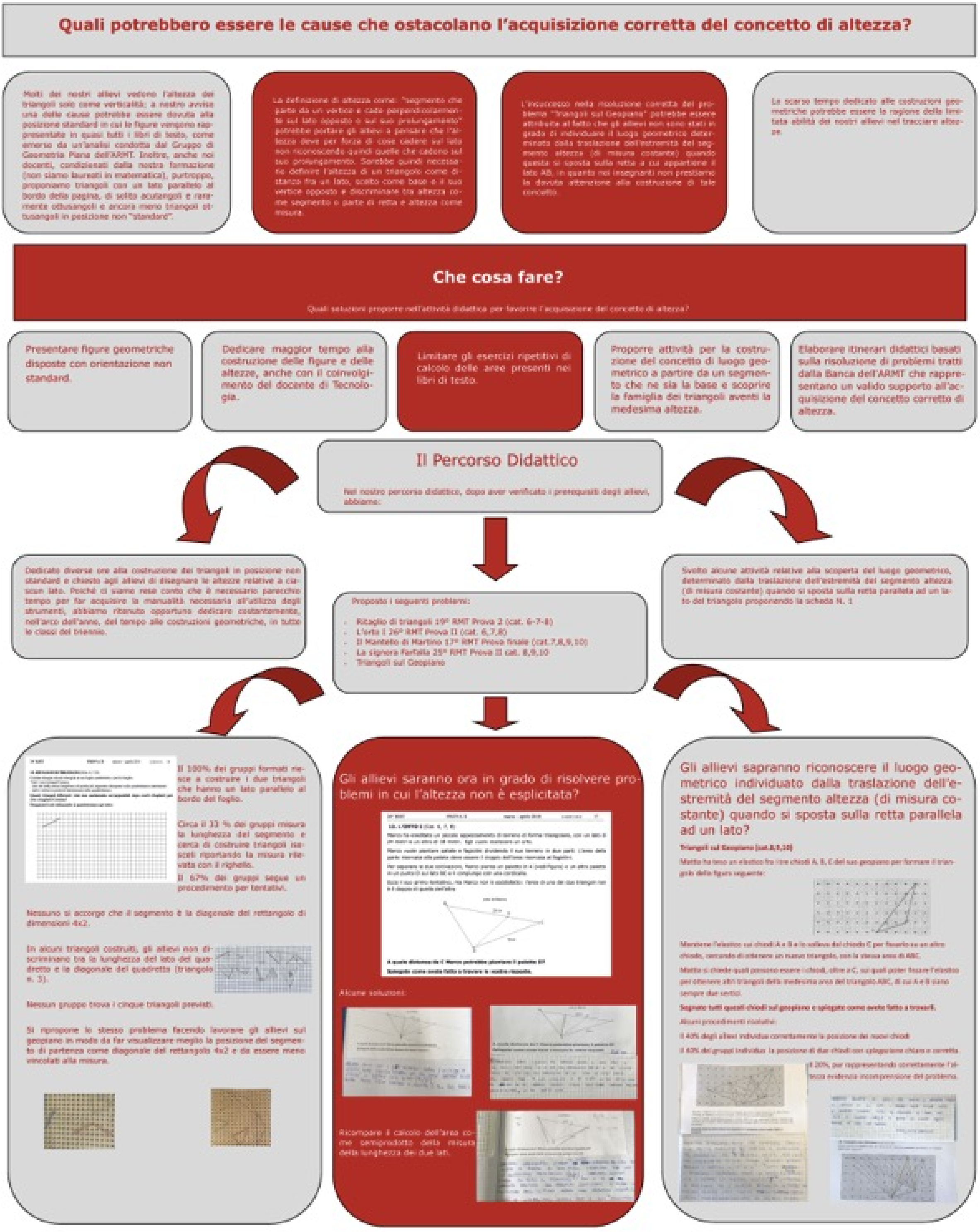


Fig. 16

L'87% degli allievi traccia correttamente l'altezza interna al triangolo ottusangolo, mentre emergono notevoli difficoltà nel tracciare le altezze che cadono sul prolungamento dei lati. Molti allievi tracciano una sola altezza.

(Cfr. Études / Approfondimenti, in questo numero, pp. 147-160 e Triangoli sul geopiano (ral. 27.I.18 ; cat. 8-10)



Quali potrebbero essere le cause che ostacolano l'acquisizione corretta del concetto di altezza?
Molti dei nostri allievi vedono l'altezza dei triangoli solo come verticalità; a nostro avviso una delle cause potrebbe essere dovuta alla posizione standard in cui le figure vengono rappresentate in quasi tutti i libri di testo, come emerso da un'analisi condotta dal Gruppo di Geometria Piana dell'ARMT. Inoltre, anche noi docenti, condizionati dalla nostra formazione (non siamo laureati in matematica), purtroppo, proponiamo triangoli con un lato parallelo al bordo della pagina, di solito acutangoli e raramente ottusangoli e ancora meno triangoli ottusangoli in posizione non "standard".
La definizione di altezza come: "segmento che parte da un vertice e cade perpendicolarmente sul lato opposto o sul suo prolungamento" potrebbe portare gli allievi a pensare che l'altezza deve per forza di cose cadere sul lato non riconoscendo quindi quelle che cadono sul suo prolungamento. Sarebbe quindi necessario definire l'altezza di un triangolo come distanza fra un lato, scelto come base e il suo vertice opposto e discriminare tra altezza come segmento o parte di retta e altezza come misura.
L'insuccesso nella risoluzione corretta del problema "Triangoli sul Geopiano" potrebbe essere attribuito al fatto che gli allievi non sono stati in grado di individuare il luogo geometrico determinato dalla traslazione dell'estremità del segmento altezza (di misura costante) quando questa si sposta sulla retta a cui appartiene il lato AB, in quanto noi insegnanti non prestiamo la dovuta attenzione alla costruzione di tale concetto.
Lo scarso tempo dedicato alle costruzioni geometriche potrebbe essere la ragione della limitata abilità dei nostri allievi nel tracciare altezze.
Che cosa fare?
Quali soluzioni proporre nell'attività didattica per favorire l'acquisizione del concetto di altezza?
Presentare figure geometriche disposte con orientazione non standard.
Dedicare maggior tempo alla costruzione delle figure e delle altezze, anche con il coinvolgimento del docente di Tecnologia.
Limitare gli esercizi ripetitivi di calcolo delle aree presenti nei libri di testo.
Proporre attività per la costruzione del concetto di luogo geometrico a partire da un segmento che ne sia la base e scoprire la famiglia dei triangoli aventi la medesima altezza.
Elaborare itinerari didattici basati sulla risoluzione di problemi tratti dalla Banca dell'ARMT che rappresentano un valido supporto all'acquisizione del concetto corretto di altezza.
Il Percorso Didattico
Nel nostro percorso didattico, dopo aver verificato i prerequisiti degli allievi, abbiamo:
Dedicato diverse ore alla costruzione dei triangoli in posizione non standard e chiesto agli allievi di disegnare le altezze relative a ciascun lato. Poiché ci siamo rese conto che è necessario parecchio tempo per far acquisire la manualità necessaria all'utilizzo degli strumenti, abbiamo ritenuto opportuno dedicare costantemente, nell'arco dell'anno, del tempo alle costruzioni geometriche, in tutte le classi del triennio.
Proposto i seguenti problemi:
- Ritaglio di triangoli 19° RMT Prova 2 (cat. 6-7-8)
- L'orto I 26° RMT Prova II (cat. 6,7,8)
- Il Mantello di Martino 17° RMT Prova finale (cat.7,8,9,10)
- La signora Farfalla 25° RMT Prova II cat. 8,9,10
- Triangoli sul Geopiano
Svolto alcune attività relative alla scoperta del luogo geometrico, determinato dalla traslazione dell'estremità del segmento altezza (di misura costante) quando si sposta sulla retta parallela ad un lato del triangolo proponendo la scheda N. 1
Il 100% dei gruppi formati riesce a costruire i due triangoli che hanno un lato parallelo al bordo del foglio.
Circa il 33 % dei gruppi misura la lunghezza del segmento e cerca di costruire triangoli isosceli riportando la misura rilevata con il righello.
Il 67% dei gruppi segue un procedimento per tentativi.
Nessuno si accorge che il segmento è la diagonale del rettangolo di dimensioni 4x2.
In alcuni triangoli costruiti, gli allievi non discriminano tra la lunghezza del lato del quadretto e la diagonale del quadretto (triangolo n. 3).
Nessun gruppo trova i cinque triangoli previsti.
Si ripropone lo stesso problema facendo lavorare gli allievi sul geopiano in modo da far visualizzare meglio la posizione del segmento di partenza come diagonale del rettangolo 4x2 e da essere meno vincolati alla misura.
Gli allievi saranno ora in grado di risolvere problemi in cui l'altezza non è esplicitata?
Alcune soluzioni:
Ricompare il calcolo dell'area come semiprodotto della misura della lunghezza dei due lati.
Gli allievi sapranno riconoscere il luogo geometrico individuato dalla traslazione dell'estremità del segmento altezza (di misura costante) quando si sposta sulla retta parallela ad un lato?
Triangoli sul Geopiano (cat.8,9,10)
Segnate tutti questi chiodi sul geopiano e spiegate come avete fatto a trovarli.

Gruppo Zeroallazero

si veda Il logo Pitagorico (ral. 25.I.19 ; cat. 9-10) voir Le logo pythagoricien (ral. 25.I.19 ; cat. 9-10)

Groupe Zeroallazero

VOYAGE AVEC LE LOGO PYTHAGORICIEN

Histoire d'un énoncé, y compris l'évolution de l'analyse à priori, et avec les observations découlant de l'analyse a posteriori des copies des élèves

L'idée

Les aspects mathématiques inhérents au fameux « pentagone régulier des pythagoriciens !» avec les relations entre les côtés, les diagonales et les angles, semblent être « à la portée » des élèves des catégories 9 et 10. Dans des problème de ce type, nous pouvons voir la différence entre une activité de type notionnelle et une activité qui considère la géométrie comme une « recherche raisonnée ».

Énoncé : première tentative

Angela, Bruno et Carla préparent un logo pour la nouvelle école pythagoricienne

Angela, aime beaucoup ce logo. Elle se souvient que la somme des angles d'un pentagone mesure 540 degrés et dit :-*dans ce pentagone régulier, les diagonales déterminent les angles avec trois mesures différentes*

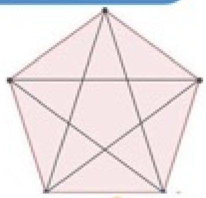
Bruno dit : *non, il n'y en a que deux différents*

Carla n'est pas d'accord avec l'un d'eux et dit : *vous avez tort, il y en a quatre.*

Combien y a-t-il d'angles de mesures différentes dans le pentagone régulier ?

Trouvez les mesures de ces angles et justifiez vos réponses.

L'énoncé est axée sur des problèmes angulaires, mais pour répondre aux consignes, il faut reconnaitre les triangles déterminés par les diagonales du pentagone. On pense qu'il est plus approprié un nouvel énoncé prenant en compte de manière plus explicite les triangles pouvant être visualisés dans la figure proposée.



Énoncé : deuxième tentative

Angela, Silvano et Serafina ont préparé le logo pour la nouvelle école pythagoricienne

Pendant qu'ils l'admirent satisfaits, Angela s'exclame : *Je vois beaucoup de triangles !*

C'est vrai, disent les deux autres. Voyons combien il y a de familles de triangles.

Trouvez, vous aussi, combien il y a de triangles dans le pentagone régulier et de combien de familles différentes.

Pour chaque famille, indiquez les mesures des angles.

Justifiez vos réponses.

La référence explicite aux triangles est bien présente, mais il existe des doutes quant à l'expression « familles de triangles » qui ne semble pas être « rigoureuse » ; il devient nécessaire de passer au langage mathématique et de parler de « triangles semblables » ou de « famille de triangles semblables ». .Après une phase d'observation par les différentes sections, une précision a été ajoutée concernant la similitude et ; le mot "famille" a été remplacé par le mot "type" qui a un sens plus neutre.

Énoncé de l'épreuve

…Pendant qu'ils l'admirent satisfaits, Angela s'exclame : *Je vois beaucoup de triangles !*

C'est vrai, disent les deux autres. Voyons combien il y a de familles de triangle semblables.

(deux triangles sont semblables si les trois angles de l'un ont respectivement les mêmes mesures de ceux de l'autre).

Trouvez, vous aussi, combien il y a de familles de triangles semblables dans cette figure.

Justifiez votre réponse.

De l'historire d'un énoncé …

L'analyse a priori a aussi été l'objet d'une analyse critique. Les principaux aspects de la tâche, dans le cas de ce problème, sont les suivants :

1) comprendre que sur la figure du logo, il y a des triangles « simples » et des triangles formés respectivement de deux, trois, cinq « pièces », pour un total de six types de triangles (dont deux sont isométriques) ;
2) comprendre que les triangles différents peuvent être regroupés en deux types de triangles semblables, dans lesquels les triangles identifiés en 1) tombent, pour ainsi dire, en tant que "sous-types";
3) indiquer les mesures des angles des deux types de triangles trouvés.

… à la parole aux élèves

Les erreurs les plus fréquentes

- un manque de compréhension du concept de similitude, souvent confondu avec l'équivalence ou l'égalité ,
- la reconnaissance uniquement des triangles « d'une seule pièce »
- l'utilisation d'instruments de mesure qu'ils jugeaient nécessaires mais qu'ils étaient incapables de gérer

Ceux qui ont obtenu <u>4 points</u> ont clairement compris les trois requêtes, et les réponses à 1) ont été exprimées de différentes manières : liste de tous les triangles au moyen de lettres attribuées aux sommets, utilisation de couleurs sur la figure pour mettre en évidence les triangles.

Ils ont utilisé le découpage ! Et pourquoi pas ? Bien que nous on l'avait pas indiqué 🤔

Le problème en question, ainsi que d'autres proposés au fil des ans dans le domaine du RMT, doivent être classés en tant que problèmes mettant les élèves en situation de recherche, problèmes qui ne sont pas résolus en particulier par l'application directe de formules de manière mécanique, mais qui nécessitent le recours aux raisonnements qui s'enchainent, ou encore problèmes soulignant les différences de résultats lorsque l'on utilise des instruments de mesure permettant ainsi aux élèves de passer d'une réalité particulière à un contexte « général ».

Ainsi naît de manière « spontanée », un conflit cognitif qui nécessite, pour être surmonté, de « rompre » avec les mesurages pour trouver une voie commune, permettant de certifier les résultats.

(Cfr. Gruppo di ricerca Zeroallazero *"Molto rumore per nulla?" Grande lavoro per costruire un enunciato e… risultati apparentemente deludenti « Beaucoup de bruit pour rien ? » Grand travail de construction d'un énoncé et … résultats apparemment décevants*. La Gazzetta di Transalpino n. 9, 87-116.)

Clara Bisso – François Jaquet

Alcune tappe di un'analisi a priori: *Tre foto su una pagina*

A cura di Clara Bisso e François Jaquet

Presentiamo in questo poster alcune tappe dell'analisi a posteriori di un problema: Tre foto su una pagina.

Immaginatevi di fronte a una pila di elaborati. Non esaminerete i punteggi assegnati (che possono essere segnati da qualche parte sui fogli) o le medie. Ciò che vi interessa è sapere cosa abbiamo fatto gli allievi durante la risoluzione del problema: le risposte ottenute, giuste [illegible] allievi. (Prendete un "questionario di accompagnamento" per annotare alcune osservazioni durante la panoramica di questa analisi a posteriori).

Tappa A

Leggere l'enunciato e risolvere il problema prima di proseguire:ß

TRE FOTO SU UNA PAGINA (Cat. 3, 4, 5) 27.II.04.

Roberto ha incollato tre foto di forma quadrata su una pagina del suo album: una grande che lo ritrae mentre fa sci di fondo e due piccole, una del suo gatto e una del suo cane.

Le tre foto ricoprono interamente la pagina dell'album.

Il contorno della foto grande misura 48 centimetri.

Quanto misura il contorno della pagina su cui sono incollate le tre foto?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

Tappa B - Risposta «60»

Prima constatazione: circa il 45% degli elaborati fornisce la risposta 60

a) con le operazioni che l'accompagnano, come:

48 : 4 = 12 ou 4 x 12 = 48 puis 12 : 2 = 6

poi 10 × 6 ou 12 × 5 ou 18 + 18 + 12 + 12

o 12 × 3 + 6 × 4 ou 12 + 12 + 12 + 12 + 6 + 6 ...

vedere a lato: B1

b) ma a volte, anche con dei commenti che usano, quasi sempre, il termine «la metà».

Leggere i tre commenti a lato: B2 e annotare le osservazioni sul questionario.

Tappa C - Risposta «72»

Dopo la risposta «60», la risposta 72 = 48 + 24 è la più frequente e la più tipica, si trova in un quarto degli elaborati esaminati.

(Sarebbe la risposta corretta se avessimo chiesto l'area della pagina dando 48 cm² per l'area della foto grande.)

Leggere le spiegazioni degli allievi a lato: C

Tappa D - Riposta «96»

La risposta 96 è meno frequente ma si trova in circa il 5% degli elaborati, di ciascuna sezione.

Ha somiglianze con la precedente per i numeri in gioco: 48 e 24, ma osservando gli elaborati a lato: D, si rilevano differenze importanti, a volte le misure dei lati dei quadrati sono annotate, altre volte no.

(Per ridurre il percorso, evitiamo la tappa D' con le risposte 120, 240, 192, 48, ottenute sempre a partire da 48; 24; 12; 6)

vedere a lato: D"

TappaE - risposte vicine a 36 o 37 cm

[illegible]
con righello graduato, in cm, il che avrebbe dovuto condurli ad una risposta vicina a 36 o 37 cm (ad esempio (11,0 + 7,3) × 2 = 36,6). Ma le variazioni vanno oltre le inesattezze delle misurazioni e si trovano risposte comprese fra 35 e 40.

Vedere i due elaborati a lato E1 e E2

E osservare attentamente l'elaborato a lato: E3. Possiamo inserirlo nella categoria E?

Arrivo: disponiamo di risultati statistici sui punteggi attribuiti, relativamente a circa 2500 classi di 19 sezioni:

points	Occ 0	Occ 1	Occ 2, 3 et 4	m
Cat. 3	48%	17%	6+9+20 =35%	1,4
Cat. 4	43%	16%	6+10+25=41%	1,6
Cat. 5	27%	14%	7+11+41=59%	2,3
tot	39%	15%	6+10+29=45%	1,8

I criteri sono raggruppati qui in «0 incomprensioni», «1 errore», «2,3 e 4 risposta corretta»

Abbiamo anche osservazioni su prime analisi a posteriori (1000 elaborati di 8 sezioni: PG, PR, PU, RZ, SI, SR, SS, UD)

- **risposte «corrette» (60) con dettagli di calcoli e talvolta spiegazioni;**
- **risposte «errate» (72) frequenti e alcune spiegazioni;**
- **altre risposte «errate» (96, 120, 240 ...) meno frequenti ma ripetute;**
- **diverse procedure, mediante misurazione;**

[illegible]

Possiamo scrivere "FINE"?

Spetta al visitatore rispondere.

I dati precedenti compariranno nella nostra Banca di problemi.

[illegible]

Manca qualcosa?

[illegible] (punto II.1 del suo statuto)?

a) promuovere la risoluzione di problemi per migliorare l'apprendimento e l'insegnamento della matematica tramite un confronto fra classi.

b) contribuire alla formazione degli insegnanti e alla ricerca in didattica della matematica tramite le sue analisi e i suoi dati raccolti nel campo della risoluzione di problemi.

Quelques étapes d'une analyse a priori: *Trois photos sur une page*

Par Clara Bisso et François Jaquet

Nous présentons dans ce poster quelques étapes d'une analyse a posteriori d'un problème *Trois photos sur une page*. Imaginez-vous devant une haute pile de copies. Vous ne regarderez pas les points attribués (qui sont peut-être marqués quelque part sur les feuilles) ni les moyennes. Ce qui vous intéresse est de savoir ce qu'ont fait les élèves lors de la résolution du problème : les réponses obtenues, justes ou erronées ; les démarches pour les obtenir ; les connaissances mobilisées, avec ou sans efficacité ; les commentaires ou dessins ou schémas produits par les élèves. (Prenez un « questionnaire d'accompagnement » pour noter quelques remarques lors du survol de cette analyse a posteriori).

Étape A

Lire l'énoncé et résoudre soi-même le problème avant d'aller plus loin:

TROIS PHOTOS SUR UNE PAGE (Cat. 3, 4, 5) 27.II.04.

Roberto a collé 3 photos carrées sur une page de son album : une grande où il fait du ski de fond et deux petites, l'une de son chat et l'autre de son chien.

Les trois photos carrées recouvrent entièrement la page de l'album.

Le pourtour de la grande photo mesure 48 cm.

Combien mesure le pourtour de la page sur laquelle sont collées les trois photos ?

Montrer comment vous avez trouvé votre réponse.

Étape B - Réponse « 60 »

Premier constat : à peu près 45% des copies donnent la réponse 60

a) avec les opérations qui les accompagnent, du genre :

48 : 4 = 12 ou 4 × 12 = 48 puis 12 : 2 = 6

puis 10 × 6 ou 12 × 5 ou 18 + 18 + 12 + 12

ou 12 × 3 + 6 × 4 ou 12 + 12 + 12 + 12 + 6 + 6 … voir en marge B1

b) mais aussi parfois, avec des commentaires qui, presque toujours, utilisent l'expression « la moitié ».

Lisez les trois commentaires en marge B2 et notez vos remarques sur le questionnaire.

Étape C - Réponse « 72 »

Après la réponse « 60 », la réponse 72 = 48 + 24 est la plus fréquente et la plus typique, on la rencontre dans un quart des copies examinées.

(Ce serait la réponse correcte si on avait demandé l'aire de la page en donnant 48 cm² pour l'aire de la grande photo.)

Lisez les explications des élève en marge C.

Étape D - Réponse « 96 »

La réponse 96 est moins fréquente mais on la trouve dans environ 5% des copies, de chaque section.

Elle présente des ressemblances avec la précédente par les nombres en jeu : 48 et 24, mais en observant les copies en marge D on constate des différences importantes. Certaines fois les mesures des côtés des carrés sont notées, d'autre fois non.

(Pour réduire le parcours, nous évitons une étape D' avec des réponses 120, 240, 192, 48, obtenues toujours à partir de 48 ; 24 ; 12 ; 6)

Voir en marge D'.

Étape E - réponses proches de 36 ou 37 cm

Dans près de 10% des cas, les élève ont mesuré les côtés des figures à la règle graduée, en cm, ce qui aurait dû les conduire à une réponse proche de 36 ou 37 cm (par exemple (11,0 + 7,3) × 2 = 36,6). Mais les variation vont au-delà des imprécisions des mesures et on trouve des réponses s'étalant de 35 à 40.

Voir les deux copies en marge E1 et E2

Et observez bien la copie en marge E3. Peut-on la mettre dans la catégorie E ?

Arrivée

Arrivée : Nous disposons de résultats statistiques sur les points attribués, sur près de 2500 classes de 19 sections :

points	Occ 0	Occ 1	Occ 2, 3 et 4	m
Cat. 3	48%	17%	6+9+20=35%	1,4
Cat. 4	43%	16%	6+10+25=41%	1,6
Cat. 5	27%	14%	7+11+41=59%	2,3
tot	39%	15%	6+10+29=45%	1,8

Les critères sont ici regroupés en « 0 incompréhension », « 1 erreur », « 2,3 et 4 réponse correcte »

Nous disposons d'observations sur premières analyses a posteriori (1000 copies de 8 sections : PG, PR, PU, RZ, SI, SR, SS, UD)

- des réponses « correctes » (60) avec détails des calculs et parfois explications

- des réponses « erronées » (72) fréquentes et quelques explications

- d'autres réponses « erronées » (96, 120, 240 …) moins fréquentes mais répétées

- des procédures différentes, par mesurage

Les confusions ou ambiguïtés sont fréquentes et paraissent significatives.

Peut-on écrire « FIN » ?

C'est au visiteur de répondre.

Les données précédentes vont figurer dans notre Banque de problèmes.

Mais sont-elles suffisantes ?

Manque-t-il quelque chose ?

Répondent-elles aux finalités du RMT (point II.1 de ses statuts) ?

a) promouvoir la résolution de problèmes pour **améliorer l'apprentissage et l'enseignement** des mathématiques par une confrontation entre classes,

b) de contribuer à la formation des enseignants et à la recherche en didactique des mathématiques, par ses analyses et ses données recueillies dans le domaine de la résolution de problèmes.

(Cfr. Bisso, Jaquet in questo numero, pp. 59-85)