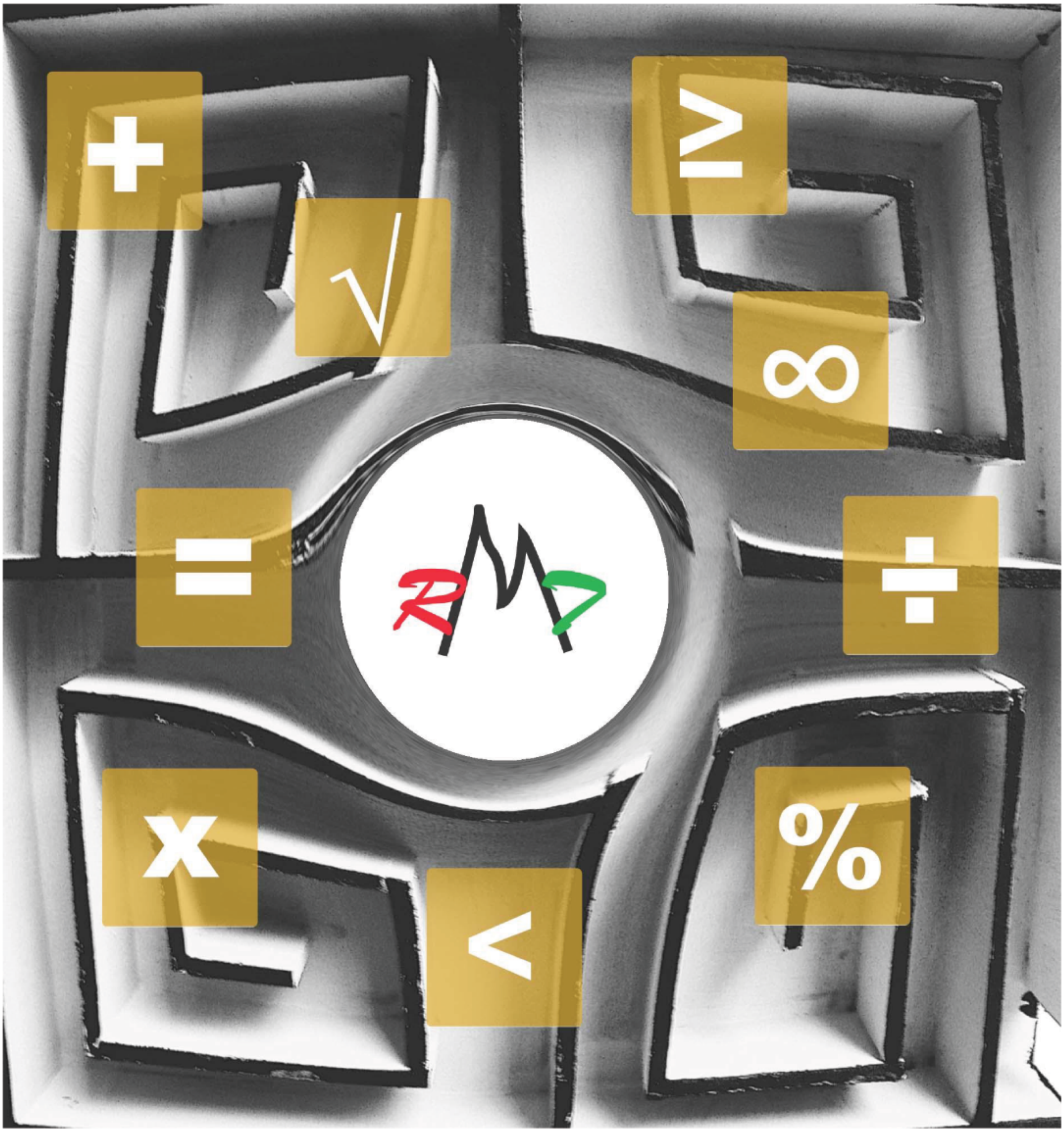
# La Gazette de Transalpie
# La Gazzetta di Transalpino

N° 9, octobre / ottobre 2019



Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

**Éditeur responsable / Editore responsabile**

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.org

ISSN 2234-9596

**TABLE DES MATIÈRES / INDICE**

## Numéro 9, octobre 2019/ Numero 9, ottobre 2019



## Études / Approfondimenti



## Rubrique dédiée aux posters présentés à la rencontre internationale de Pont Saint Martin
## Rubrica dedicata ai poster presentati al convegno internazionale di Pont Saint Martin

# ÉDITORIAL : RMT ET RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, QUELS RAPPORTS ?

**François Jaquet**

Dès sa création, le RMT, a orienté son champ d'action vers les élèves, les maîtres et aussi, plus généralement, vers « l'enseignement des mathématiques et la recherche en didactique ». Nos statuts et textes officiels en font foi. Le thème de notre première rencontre internationale, d'octobre 1997, ne pouvait pas être plus explicite : « Les apports du RMT à la didactique des mathématiques. ».

Alors que nous sommes plongés jusqu'au cou dans nos tâches de gestion et de conduite de notre association, d'élaboration et d'analyses de problèmes, de regroupements de toutes les données recueillies, il est bon, de souffler un peu et de prendre du recul en se posant les questions existentielles de toute entreprise dynamique, sur le maintien du cap, sur nos finalités, sur notre évolution, …

Dans son allocution prononcée lors de la remise du titre de docteur honoris causa de l'Université de Montréal, en 1997, Guy Brousseau définissait la didactique des mathématiques comme la science des conditions spécifiques de la diffusion des connaissances mathématiques puis il posait trois questions à son propos : qui peut l'étudier ? à qui s'adresse cette science ? qui l'accueille ?

Sa réponse à la première question est que, les travaux des psychologues, linguiste, pédagogues, sociologues etc ne permettent pas aux enseignants d'en faire bon usage et que c'est aux mathématiciens qu'incombe la part de la didactique des mathématiques non abordée par les autres disciplines.

A la deuxième question il répond que « cette science s'adresse aux mathématiciens », tout en ouvrant la voie aux « mathématiciens d'école, de collège ou d'université ».

A la troisième question, il parle des distinctions « entre un psychologue qui s'intéresse à la didactique et un didacticien psychologue d'origine, entre un mathématicien didacticien et un didacticien qui s'intéresse aux mathématiques » et constate que « chacun a beaucoup de mal à présenter à ses pairs l'objet de son travail et que, pour l'instant cette terre donne rarement une citoyenneté aux nouveaux arrivants ». Il conclut toutefois en citant les « facultés d'éducation » (formation), plus sensibles aux besoins de l'enseignement « C'est probablement la bonne voie et je crois qu'elles seront récompensées de leur persévérance ».

Dans ces propos, datant de plus de vingt ans et prononcés dans un contexte « académique », il n'y a pas beaucoup de place pour des gens comme nous, qui considérons que nous opérons dans le champ de la didactique des mathématiques tout en étant enseignants, de métier ou d'origine.

Sans vouloir être prétentieux, nous pouvons affirmer que la démarche du RMT est scientifique : élaborer des problèmes analysés a priori, observer et conserver les résultats, analyser la manière dont les élèves les ont résolus, regrouper les procédures, obstacles et erreurs, les désigner, les communiquer par nos publications et par notre banque de problèmes, les discuter, en tenir compte pour des expérimentations ultérieures. Toutes ces caractéristiques nous situent dans une discipline scientifique : la didactique des mathématiques.

Notre réponse à la première question nous paraît évidente : cette science est aussi la nôtre, animateurs du RMT, nous l'étudions et nous y participons activement depuis plus de 25 ans en y apportant nos résultats.

Pour la deuxième question la réponse est déjà contenue dans nos textes : nous nous adressons à ceux qui ont besoins des données que nous continuons à recueillir et que nous mettons à disposition : notre collectivité du RMT, les enseignants participants actifs, mais aussi tous ceux qui lisent avec intérêt nos analyses de problèmes, soit dans la description des procédures, erreurs et obstacles, soit dans les propositions d'exploitations didactiques que nous sommes en mesure de rédiger après tant d'expérimentations répétées.

Les réponses à la troisième question sur l'accueil de nos réflexions sont données par les témoignages d'intérêt qui commencent à affluer : ceux de formateurs ou d'enseignants qui osent innover en faisant résoudre nos problèmes par leurs élèves.

Notre champ d'action n'est pas celui de la réflexion théorique, c'est celui de l'observation minutieuse de ce qui se passe dans la tête de l'élève lorsqu'il résout un problème. Nous osons le revendiquer comme un domaine important de la didactique des mathématiques, et nous affirmons avec conviction que nous poursuivons notre action, en précisant que notre porte est ouverte à tous ceux qui s'y intéressent.

# EDITORIALE: RMT E RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA, QUALI RAPPORTI?

**François Jaquet**

A partire dalla sua creazione, il RMT ha orientato il suo campo d'azione verso gli allievi, gli insegnanti e anche, in maniera più generale, verso "l'insegnamento della matematica e la ricerca in didattica". Il nostro statuto e i nostri testi ufficiali ne fanno fede. Il tema del nostro primo incontro internazionale, dell'ottobre 1997, non poteva essere più esplicito: "Gli apporti del RMT alla didattica della matematica".

E allora, mentre siamo immersi fino al collo negli imprescindibili compiti di gestione e di conduzione della nostra associazione, di elaborazione e analisi di problemi, di raggruppamenti di tutti i dati raccolti, non è male tirare un po' il fiato e porsi delle domande esistenziali sulle imprese dinamiche, sul mantenere la rotta, sulle nostre finalità, sulla nostra evoluzione, …

Guy Brousseau, nel suo discorso pronunciato in merito al titolo di dottore honoris causa ricevuto all'Università di Montréal, nel 1997, definiva la didattica della matematica come la scienza delle condizioni specifiche della diffusione delle conoscenze matematiche e poi poneva tre domande a tale proposito: chi può studiarla? A chi è indirizzata tale scienza? Chi l'accetta?

La sua risposta alla prima domanda è che i lavori di psicologi, linguisti, pedagogisti, sociologi, ecc, non permettono agli insegnanti di farne buon uso e che è ai matematici che spetta la parte della didattica della matematica non presa in considerazione nelle altre discipline.

Alla seconda domanda egli risponde che "questa scienza" si indirizza ai "matematici", compresi i "matematici di scuola dei vari livelli scolastici o dell'università".

A proposito della terza domanda parla di distinzioni "tra uno psicologo che si interessa alla didattica e un didattico psicologo, tra un matematico didattico e un didattico che si interessa alla matematica" e osserva che "per ognuno di essi è difficile presentare all'altro l'oggetto del proprio lavoro e che, per il momento, questa terra dà difficilmente la cittadinanza ai nuovi arrivati". Conclude tuttavia citando le facoltà per la formazione, come sensibili ai bisogni dell'insegnamento. "Si tratta forse della buona strada e credo che saranno ricompensate per la loro perseveranza".

In questo discorso, che data da più di vent'anni e pronunciato in un contesto "accademico", non c'è molto posto per persone come noi che pensiamo di operare in un campo della didattica della matematica in quanto insegnanti.

Senza voler essere pretenziosi, possiamo affermare che l'approccio del RMT è scientifico: elaborare analisi a priori, osservare e conservare i risultati dei problemi, analizzare la maniera in cui gli allievi li hanno risolti, raggruppare procedure, ostacoli ed errori, designarli, comunicarli con le nostre pubblicazioni e con la nostra banca di problemi, discutere, tenerne conto per sperimentazioni ulteriori. Tutte queste caratteristiche ci situano in una disciplina scientifica: la didattica della matematica.

La nostra risposta alla prima domanda ci sembra evidente: questa scienza è anche la nostra, animatori del RMT, la studiamo e vi partecipiamo attivamente da più di 25 anni e vi apportiamo i nostri risultati.

Per la seconda domanda la risposta è già contenuta nei nostri testi: ci indirizziamo a coloro che hanno bisogno dei dati che continuiamo a raccogliere e che mettiamo a disposizione: la nostra collettività del RMT, gli insegnanti che partecipano in modo attivo, ma anche coloro che leggono con interesse le nostre analisi dei problemi, sia per quanto riguarda la descrizione di procedure, errori e ostacoli, sia per quanto riguarda le proposte di utilizzazioni didattiche che possiamo redigere dopo numerose sperimentazioni ripetute.

Le risposte alla terza domanda sull'accettazione delle nostre riflessioni sono date dalle testimonianze di interesse che cominciano a confluire: quelle dei formatori o degli insegnanti che osano innovare facendo risolvere i nostri problemi dai loro allievi.

Il nostro campo d'azione non è quello della riflessione teorica, è quello dell'osservazione minuziosa di ciò che passa nella testa dell'allievo quando risolve un problema. Osiamo rivendicarlo come ambito importante della didattica della matematica e affermiamo con convinzione che continueremo la nostra azione precisando che la nostra porta è aperta a tutti coloro che vi si interessino.

# PRESENTAZIONE DEL NUMERO

Questo numero 9 de *La Gazzetta di Transalpino* contiene cinque articoli: i primi due relativi alle conferenze plenarie tenute al convegno di Pont Saint Martin, il terzo si connette strettamente alle problematiche delle due conferenze, il quarto riporta lo sviluppo della costruzione dell'enunciato di un problema di geometria proposto alle categorie dei "grandi" e messo a confronto con le strategie dei gruppi di allievi e l'ultimo è la testimonianza di un'insegnante che utilizza i problemi del RMT nella didattica di classe; segue la rubrica con due studi di approfondimento di schede della banca di problemi e, in chiusura, un articolo relativo a un poster presentato al suddetto convegno.

- L'articolo, ***Problemi di matematica su Internet: l'offerta, la modalità e l'utilizzazione*** di **Luc Olivier Pochon**, ha lo scopo precipuo di far progredire la riflessione sulla Banca di problemi del RMT al fine di permettere un suo proficuo utilizzo. Tali riflessioni sono precedute da un'analisi di diversi siti Internet che riportano problemi di matematica.

- **François Jaquet**, nel suo articolo dal titolo ***Elaborazione di un percorso di apprendimento a partire da problemi della banca,*** propone una visita guidata della Banca di problemi rivolta a un insegnante che prova a organizzare un percorso di apprendimento per i propri allievi a proposito del rettangolo, della sua area e di tutte le nozioni che ne discendono. Vi si troverà qualche considerazione introduttiva sulla risoluzione di problemi, una modalità di entrata nella banca, tramite gli "ambiti" e le "famiglie di compiti", l'esame di qualcuna delle sue schede e le loro diverse rubriche.

- **Florence Falguères e Christine le Moal** in ***Mettere a frutto le risorse didattiche dell'ARMT in classe e nella formazione*** presentano una proposta sulla riorganizzazione dei nostri spazi Internet di lavoro a partire dall'idea di un nuovo spazio, accessibile agli insegnanti e ai formatori.

- Nell'articolo ***"Molto rumore per nulla?" Grande lavoro per costruire un enunciato e… risultati apparentemente deludenti*** del **Gruppo di ricerca Zeroallazero** viene tracciata "la storia" di un enunciato comprensiva della successiva evoluzione della relativa analisi a priori, per concludersi con le osservazioni scaturite dalla imprescindibile analisi a posteriori degli elaborati dei gruppi di allievi… che conducono all'importanza di non fermarsi alla gara ma di riprendere il problema come attività in classe.

- In ***Matematica in classe con il Rally Matematico Transalpino***, ***"un'insegnante racconta"***, **Brunella Brogi** presenta con dovizia di particolari l'attività didattica che ha svolto, nel corso del recente anno scolastico, nelle sue tre classi di secondaria di I grado, con problemi del RMT.

Nella **rubrica APPROFONDIMENTI**, che ospita le note di approfondimento di schede della banca di problemi, **Michel Henry e Angela Rizza**, coordinatori del gruppo di lavoro *Funzioni*, propongono uno studio (in versione bilingue) a partire dal problema *Griglie* elaborato nell'ambito dei lavori del gruppo che coordinano. Da parte loro, **i membri del sottogruppo "per i grandi" del Gruppo Geometria piana** presentano (in versione bilingue) un'analisi del problema *L'orto I* a partire dagli elaborati delle sezioni alle quali afferiscono i membri del Gruppo stesso.

Nella **rubrica dedicata ai poster presentati al convegno internazionale di Pont Saint Martin** figura l'articolo che riporta gli aspetti che la sezione di Siena ha presentato in forma sintetica nel proprio poster.

# PRÉSENTATION DU NUMÉRO

Ce numéro 9 de *La Gazette de Transalpie* contient cinq articles : les deux premiers sont les textes des conférences plénières tenues à la rencontre de Pont Saint Martin, le troisième est étroitement lié aux problématiques des deux conférences, le quatrième décrit l'évolution de la construction d'un problème de géométrie proposé aux catégories des « grands » et le dernier est le témoignage d'une enseignante qui travaille en classe avec les problèmes du RMT ; la rubrique suivante est dédiée à nos approfondissements et présente deux études de problèmes ; une partie finale est dédiée à un article issu d'un poster présenté lors de la rencontre mentionnée ci-dessus.

- L'article*, **Problèmes mathématiques sur Internet : l'offre, la manière et l'usage*** de **Luc Olivier Pochon**, a pour but principal de faire avancer la réflexion sur la Banque de Problèmes de l'ARMT. Ces réflexions sont précédées par un rapide tour des problèmes mathématiques que l'on trouve sur Internet, ce qui permettra de mieux situer la Banque de Problèmes de l'ARMT dans l'offre à disposition en ligne pour l'enseignement des mathématiques.

- **François Jaquet**, dans son article ***Élaboration d'un parcours d'apprentissage à partir des problèmes de la Banque***, présente une visite guidée de la Banque de problèmes à l'intention d'un enseignant qui cherche à organiser un parcours d'apprentissage pour ses élèves, à propos du rectangle, de son aire et de toutes les notions qui l'accompagnent. On y trouvera quelques considérations préalables sur la résolution de problèmes, une manière d'entrer dans la banque, par ses « domaines » et « familles de tâches », l'examen de quelques-unes de ses fiches et de leurs rubriques.

- **Florence Falguères et Christine le Moal** dans l'article ***Exploiter les ressources didactiques de l'ARMT en classe et pour la formation*** présentent une proposition sur la réorganisation des espaces Internet de l'ARMT à partir de l'idée d'un nouvel espace, accessible aux enseignants et aux formateurs.

- L'article ***« Beaucoup de bruit pour rien ? » Grand travail de construction d'énoncé et … résultats apparemment décevants***, du **Groupe de recherche « Zeroallazero »** raconte l'« histoire » d'un énoncé, y compris l'évolution ultérieure de l'analyse à priori, et se termine par les observations concernant l'analyse a posteriori des copies des groupes d'élève... qui amènent à la nécessité de ne pas s'arrêter au concours, mais de reprendre le problème comme une activité en classe.

- Dans l'article ***Mathématiques en classe avec le Rallye Mathématique Transalpin, « le témoignage d'une enseignante »***, **Brunella Brogi** présente en détail l'activité qu'elle a développée dans ses trois classes de collège, au cours de l'année scolaire 2018/19, avec les problèmes du RMT.

Dans la **rubrique ÉTUDES** qui accueille les études détaillées de nos problèmes, **Michel Henry et Angela Rizza**, coordinateurs du groupe de travail *Fonction*, proposent une étude, en version bilingue et élaborée dans le cadre des travaux du groupe qu'ils animent, du problème *Grilles* ; **les membres du sous-groupe « pour les grands » du Groupe Géométrie plane** présentent l'analyse a posteriori du problème *Potager I* à partir des copies d'élèves des sections des membres du groupe, en version bilingue.

Dans la **rubrique dédiée aux posters présentés à la rencontre internationale de Pont Saint Martin** figure l'article concernant les aspects que la section de Sienne a présentés dans son poster.

# PROBLÈMES MATHÉMATIQUES SUR INTERNET
# L'OFFRE, LA MANIÈRE ET L'USAGE

**Luc-Olivier Pochon**

## Résumé

La banque de problème de l'Association du Rallye mathématique transalpin (BP-ARMT), arrive à un stade de développement qui devrait en permettre une utilisation aisée.

Mais des questions restent ouvertes quant à son évolution, notamment : comment affiner les critères de recherche ? Comment améliorer l'aspect collaboratif ? Cet article va permettre de les préciser après avoir fait un état des ressources en matière de problèmes mathématiques sur Internet et de la manière dont ces ressources sont organisées et utilisées.

## Introduction

Avec plus de mille problèmes disponibles, dont près de la moitié déjà bien documentés (analyses a priori et résultats), la banque de problèmes de l'Association du Rallye mathématique transalpin (BP-ARMT) devrait permettre aux animateurs de l'association de l'utiliser avec profit.

De plus, moyennant une information sur ces buts et sur le fait qu'elle est en constante évolution, elle sera ouverte, selon décision du groupe de gestion, à un plus large public. Toutefois, les participants aux rallyes (organisateurs, correcteurs, créateurs de problèmes) et les enseignants qui basent une partie de leur pratique sur la résolution de problèmes constituent le public cible privilégié.

Mais les analyses de nombreux problèmes restent à compléter. Il faut aussi affiner, voire corriger, les critères de classement et l'indexation des fiches de problèmes. Il s'agit aussi et surtout de trouver des modalités qui permettent une meilleure collaboration entre les différents types de participants intéressés au projet.

Le but de cet article est de faire avancer la réflexion. Il fera tout d'abord un tour rapide des problèmes mathématiques que l'on trouve sur Internet, ce qui permettra de situer la banque de problèmes de l'ARMT dans l'offre à disposition en ligne pour l'enseignement des mathématiques. Il posera également la question de savoir quelle utilisation est faite de cette offre.

Dans la section suivante, il précisera les diverses manières de classer des problèmes mathématiques sur Internet en regard des systèmes de classement proposés en général.

Dans ce panorama, on verra que la classification des problèmes par types de « tâches » est une des particularités de la banque de problèmes du Rallye mathématique transalpin. Elle paraît bien adaptée à une didactique qui organise des parcours d'apprentissage à partir de problèmes. Mais cette option est encore à débattre après avoir précisé ce que recouvre la notion relativement ambiguë de tâche.

Finalement, on abordera quelques-unes des « tâches » proposées et des questions ouvertes à ce propos.

## Quelle-est l'offre de problèmes mathématiques sur Internet ?

### Une offre abondante

Si l'on effectue, naïvement, sur Google la requête 'problèmes mathématiques' le système nous propose près de 20 millions d'adresses et les propositions des 20 premiers écrans (environs 200 adresses) sont assez pertinentes. Il en va de même pour la requête en italien. On peut aussi s'amuser à tester d'autres requêtes, par exemple : 'concours mathématique' ou 'rallye mathématique', en français et en italien. Avec cette dernière requête, la banque de problèmes de l'ARMT occupe les deux premières places en français et quasiment toute la première page délivrée par le moteur de recherche en italien.

La requête 'banque de problèmes mathématiques' apporte près de 3 millions de résultats dont un bon nombre assez pertinents, ceci avant de s'éloigner des mathématiques et d'entrer dans le méandre des problèmes bancaires. La BP-ARMT n'apparaît pas dans les premières pages. Alors que la requête en italien 'banca di problemi matematici' offre moins de résultats mais la première page est presque consacrée au Rallye mathématique transalpin.

Pour voir apparaître des informations sur la BP-ARMT en version française, il faut préciser la requête 'banque de problèmes mathématiques familles' (3 place) ou encore 'banque de problèmes mathématiques familles de tâches'

(1$^{e}$ place). Ces résultats sont évidemment anecdotiques. Ils peuvent fluctuer dans le temps[1] où se différencier selon les utilisateurs. Par contre, ils permettent de dégager les caractéristiques des sites proposant des problèmes de mathématiques.

## Classification de l'offre

L'examen de quelques centaines d'adresses fournies par Google, permet de dégager des critères qui permettent de comparer les offres en matière de problèmes mathématiques sur Internet. En voici une brève énumération :

- L'initiative de la réalisation : certains sites relèvent d'initiatives personnelles, d'autres sont créés par des institutions publiques ou des communautés d'intérêt. Certaines initiatives personnelles peuvent être soutenues par une institution et ainsi revêtir un aspect semi-public. Pour d'autres initiatives, le caractère commercial prime (nous les appellerons les initiatives « start-up »).
- But : cette rubrique distingue la mise à disposition de collections de questions de mathématiques récréatives et les sites proposant des problèmes plus scolaires avec une intention pédagogique d'évaluation ou d'apprentissage.
- Contenu : on trouve des sites où seuls les énoncés des problèmes sont proposés, ceux ou une solution est proposée et ceux ou des résultats, voire une analyse des réponses figurent également. Il faut encore citer les sites proposant une théorie sur la résolution de problèmes.
- Forme de la présentation : cette rubrique différencie les sites où ce sont des fiches à imprimer (ou à lire à l'écran) qui délivrent les problèmes ou si les exercices sont à résoudre en ligne avec une correction automatique. Certains sites proposent les deux formes de présentation.
- Enrichissement : cela concerne la manière dont le contenu évolue : il peut y avoir recueil de données via des demandes de collaboration, ou alors le site bénéfice du travail d'une communauté constituée ou encore utilise un retour des utilisateurs via un forum, des animations ou des demandes adressées aux gestionnaires du site.
- Mode de recherche : les contenus peuvent être accessibles par navigation (hyperlien), menus ou moyennant un formulaire de recherche. Certains sites combinent plusieurs de ces possibilités.
- Support technique : cette rubrique est de moindre importance pour un utilisateur non directement impliqué dans la réalisation du site. Les contenus peuvent être délivrés par des documents à télécharger (pdf, documents Word ou OpenOffice, etc.) ou à consulter sur le navigateur (pages html statiques ou dynamiques), voire enrichies d'animations (Flash, Javascript).
- Publicité : cette rubrique ne concerne pas non plus directement le contenu délivré. Toutefois, selon qu'il n'y ait pas de publicité, qu'elle soit discrète ou agressive, l'usage des ressources en est modifié.
- Critères de classement : ce sont les informations qui permettent à l'utilisateur de sélectionner les problèmes. La quatrième partie de l'article sera consacrée à cette importante rubrique.

***Collection de problèmes « récréatifs » : Recreomath***

Cette importante collection de problèmes, d'énigmes et de jeux (plus de 7500) bien connue est une réalisation personnelle d'un enseignent par ailleurs auteur de plusieurs livres. Elle se parcourt à l'aide d'hyperliens. Les problèmes sont à la fois classés par types (figure 1), séries et par thèmes (par exemple : Initiation à l'algèbre). Les problèmes sont accompagnés de leur solution.

***Collection de problèmes scolaires***

* *Pianetiproblemi*

Ce site offre près de 5000 problèmes (de type problèmes d'application) d'arithmétique et de géométrie pour l'école obligatoire. Il est réalisé par une équipe d'enseignants également impliquée dans le *Campionato italiano di problemi matematici*. Les problèmes sont disponibles via des liens sur des mots-clés notionnels ('angoli', 'apotema', etc.) ou via un formulaire de recherche original (figure 2) qui permet de combiner des mots-clés.

Les problèmes peuvent être travaillés en ligne et une solution est fournie en même temps que l'évaluation. Celle-ci ne peut être obtenue qu'après avoir rempli la zone de développement. L'ensemble peut être récupéré sous forme d'un fichier pdf.

1 Ces requêtes ont été effectuées à la fin de l'été 2018. Les sites mentionnés ont été consultés à la même époque.

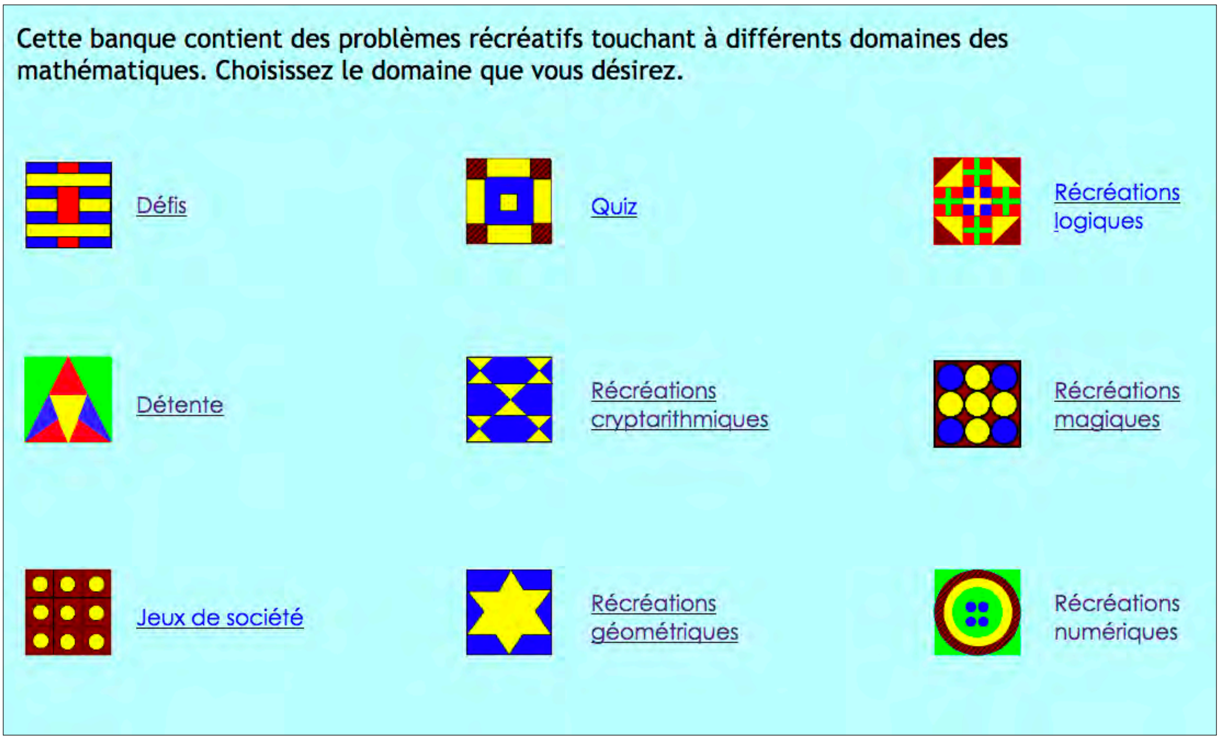



fig 1. Recreomath [http://www.recreomath.qc.ca/]

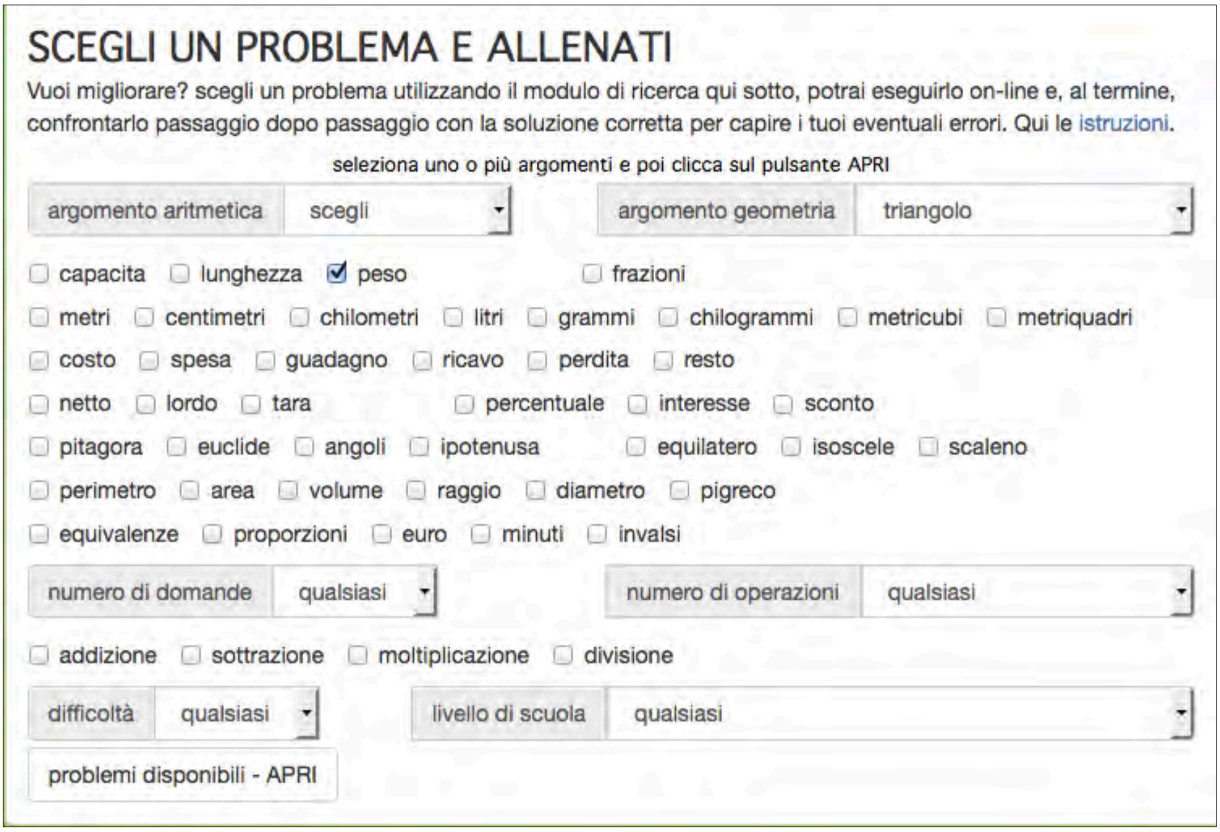



fig 2. Pianetiproblemi [https://www.pianetaproblemi.it/]

* *Gomaths*

Ce site est presque toujours en tête des listes proposées par Google. Il est dû à une initiative personnelle. Il a acquis une telle notoriété que son développement est soutenu par les autorités scolaires du canton de Vaud en Suisse. Le site propose principalement des exerciseurs de calcul et des problèmes d'application (figure 3). Il est possible de répondre en ligne à une famille de problèmes avec une évaluation automatique ou alors de générer une liste de problèmes à l'imprimer.


fig 3. Gomaths [http://www.gomaths.ch/prob.php , http://www.gomaths.ch/]

On trouve également de nombreux sites de ce type mais de plus petite envergure, créés par des enseignants qui mettent à disposition leurs moyens personnels, souvent sous forme de fiches. Par exemple :

* *La classe de Mallory*[2]

Ce site offre l'image d'une pratique pédagogique basée sur l'apprentissage de types de problèmes. Sous la forme de fiches à imprimer un premier problème est proposé suivi d'autres de la même structure.

* *Mathématiques faciles* [https://www.mathematiquesfaciles.com/]

Ce site fait partie d'une galaxie de cours gratuits mis à disposition par Laurent Weber qui revendique 150 millions de visites par an. Il permet aux utilisateurs de créer des exercices, des tests voire des cours complets.

Certains sites sont accompagnés de publicités discrètes. Par exemple *soutien67* dont l'interface adopte la métaphore du collège (figure 4) ou *educalire*[3].

A noter qu'une collection exceptionnelle de problèmes connue sous le nom de « *20 000 problems under the sea : mathematical treasure on the web* » est souvent citée. Mais elle ne semble (momentanément?) plus disponible ; le

2 https://laclassedemallory.net/2017/10/24/banque-dexercices-en-resolution-de-problemes/

3 http://educalire.ch/accueil1.htm

lien[4] sur le site est cassé. Bowron & Hall en ont fait une description qui se trouve parmi une longue liste[5] de références anglo-saxonnes réunies par Mary DeCarlo.


fig 4. Les salles de ressources [http://soutien67.free.fr/sommaire.htm]

***Avec enrichissement via interaction : Youmath***

Ce site a l'ambition de couvrir la scolarité de l'école élémentaire à l'université. C'est un exemple de site start-up à visée commerciale. Sa particularité est qu'il offre une aide personnalisée sous forme de forum. Par contre son choix d'une publicité agressive rend les pages proposant des problèmes et leurs solutions souvent illisibles.

***Cours complets ou en devenir***

* *Sesamath*[6]

L'association Sesamath s'adresse aux professeurs et à leurs élèves. Elle a pour buts de promouvoir l'utilisation des TICE dans l'enseignement des mathématiques, le travail coopératif et la co-formation des enseignants et d'offrir des services d'accompagnement des élèves dans leur apprentissage,  tout cela dans une philosophie de Service Public.

L'association diffuse des ressources numériques gratuitement sur Internet et favorise, dans la mesure du possible, des licences libres pour les documents et logiciels mis en ligne ainsi que des formats ouverts. Elle se finance en partie en réalisant et vendant des manuels papier.

C'est étonnement une référence non apparue dans les premières pages de nos requêtes qui nous semble digne d'intérêt :

* *Problemi di matematica per le classi elementari*

4 http://problems.math.umr.edu/index.htm

5 http://www.istl.org/03-summer/internet.html

6 http://www.sesamath.net/

Ce travail semble plus informel et n'est encore qu'à ces débuts. Un wiki est ouvert dans l'environnement *wikibooks* où en principe chacun peut contribuer (figure 5).


# Problemi di matematica per le classi elementari

*Wikibooks, manuali e libri di testo liberi.*

La **matematica** è generalmente considerata una materia "antipatica" per alcuni studenti ed insegnanti. In realtà non è difficile farla diventare un'esperienza piacevole, se la si lega a realtà concrete, esperienze pratiche o giochi!

Gli esercizi che seguono possono essere svolti in maniera giocosa, e sono finalizzati a diversi livelli di età.

Qua sotto seguono problemi facili, in più per l'alunno potrebbe essere divertente farli online!

Per evitare che l'alunno veda le soluzioni premere il tasto TAB nella tastiera (al posto di Invio)

**Indice** [nascondi]



## Classe prima elementare [ modifica ]

Punto aggiunto per ogni risposta corretta: 1

Punti sottratti per ogni risposta non corretta: 0

Ignora i coefficienti di domanda:

Mescola le domande

1 Il maestro Francesco ha 3 schede. Perde 1 scheda. Arriva la maestra Marta e dà a Francesco altre 5 schede. Quante schede avrà in tutto il maestro?

2 Roberta ha 20 biscotti e ne mangia 11. Quanti biscotti rimangono a Roberta?

fig 5. [https://it.wikibooks.org/wiki/Problemi_di_matematica_per_le_classi_elementari]

***Théorie sur la résolution de problèmes***

Plusieurs sites proposent des aspects théoriques sur la résolution de problèmes. Il s'agit alors davantage d'apprendre à résoudre des problèmes (lire les données, repérer les données essentielles, les données inutiles, etc.) que de l'enseignement basé sur des parcours d'apprentissage à partir de problèmes. *Alloprof*[7] est un exemple de site de ce premier type.

***Problèmes de concours ou de rallye***

Les requêtes 'concours' ou 'rallye mathématique' permettent de rassembler une assez grande quantité de compétitions mathématiques par ailleurs répertoriées, pour ce qui concerne les compétitions en français, dans le bulletin *Panoramath 4* (Clément & Criton, 2006).

Ainsi, par exemple, le *Kangourou des mathématiques*[8] ou le *Rallye mathématique de l'académie de Lyon*[9] proposent les sujets du concours et des corrigés, voire quelques analyses de réponses.

***Evaluation***

Les grandes enquêtes évaluatives apparaissent également dans la liste des sites répertoriés. On y trouve des informations sur le programme PISA[10] (Programme for International Student Assessment) ou des monitorages nationaux tel que INVALSI (ou Prova Nazionale) mené en Italie par l'Istituto nazionale per la valutazione[11].

7 http://www.alloprof.qc.ca/BV/Pages/m1205.aspx

8 http://www.mathkang.org

9 http://rallye-math.univ-lyon1.fr

10 http://www.oecd.org/pisa/

11 http://www.invalsi.it/invalsi/index.php

En général, ces ressources se limitent aux publications des résultats. Les analyses statistiques sont globales avec seulement quelques problèmes offerts comme exemples.

En ce qui concerne le test INVALSI, si les problèmes eux-mêmes ne semblent pas directement (du moins pas facilement) accessibles, ils sont mis en partie à disposition (et même sous forme interactive) à une autre adresse[12].

### L'offre : Conclusion

L'offre d'exercices et d'activités mathématiques sur Internet est étoffée et recouvre tous les usages possibles des problèmes mathématiques. Les enseignants peuvent trouver en ligne des fiches de théorie, des exercices d'entraînement ou de remédiation, des problèmes de mathématiques récréatives, etc. bien que la catégorie dépende souvent plus de l'utilisation qui en est fait en classe que d'une classification a priori. La plupart de ces ressources est mise à disposition gratuitement, mais il existe aussi des offres commerciales ou mixtes. Du point de vue de la forme, il peut s'agir de documents classiques (fiches à imprimer) ou d'activités en ligne, les deux formes pouvant cohabiter, notamment pour les exercices d'entraînement au calcul ou les problèmes d'application.

A noter toutefois que si les problèmes sont parfois, et même assez souvent, accompagnés de solutions (parfois sous forme interactive), il ne sont, en général, pas accompagnés d'une analyse détaillée. Ou alors les données des problèmes qui bénéficient d'une analyse statistique (et parfois d'une analyse d'erreurs) ne sont pas disponibles faisant l'objet de diffusion restreinte (PISA, par exemple). De ce point de vue, la BP-ARMT semble présenter une caractéristique propre.

La BP-ARMT est aussi construite avec une conception de l'apprentissage basée sur la résolution de problèmes alors que généralement c'est plutôt l'entraînement à résoudre des problèmes type qui est développé. Une autre distinction à relever est que les problèmes de l’ARMT sont conçus pour être résolus par groupes, sans intervention de l’enseignant, avec une première tâche collective d’appropriation de la situation (ou décontextualisation).

Sans entrer dans les détails des critères de classifications, l'accès aux ressources se fait par navigation ou par menu, rarement par formulaire de recherche. Les deux possibilités offertes par la BP-ARMT sont plutôt rarement utilisées. Il faut toutefois signaler que la recherche par formulaire proposée initialement par la BP-ARMT était peu appréciée (surtout lorsque la recherche se fait sur téléphone mobile) et que la recherche par navigation a été instaurée à la suite d'un atelier consacré au sujet lors de la rencontre de Siena en 2014.

Certaines références attendues comme les pages de Thérèse Eveilleau[13] ou du « Matou matheux[14] » ne figurent étonnement pas dans les résultats directement accessibles (les quelques premières pages). C'est peut-être un souhait de leurs responsables de limiter les accès des « crawleurs » à ces ressources.

## Quelle utilisation de cette offre ?

### Un constat et des hypothèses

Il faut tout d'abord constater qu'il n'y a quasiment pas de travaux analysant la façon dont les enseignants recherchent de l'information sur Internet. Les travaux de recherches se concentrent davantage sur l'usage des ressources électroniques dans l'enseignement en omettant la première étape qui consiste à obtenir ces ressources. Quelques constats et hypothèses peuvent toutefois être formulés à partir de notre propre expérience et d'enquêtes menées à cinq années d'intervalle auprès d'enseignants de Suisse romande (Pochon & Vermot, 2010 ; Kassam, 2015). Des demandes à ce sujet auprès d'autres collègues n'ont pas abouti.

Notons tout d'abord que rechercher des bons problèmes sur Internet est un travail relativement astreignant. Les moteurs de recherche généralistes sont peu adaptés pour ce travail et malgré l'abondance des résultats, il y a peu de ressources qui correspondent à un besoin particulier (niveau, notation, etc.). Par ailleurs, les modes de fonctionnement des sites sont disparates. De plus, il est souvent difficile de percevoir l'ensemble et la cohérence du matériel mis à disposition. Cela demande une bonne connaissance de la ressource. Jacques Perriault[15] faisait déjà cette remarque à l'époque de l'utilisation des disquettes.

Ne possédant pas de données en suffisance, nous ne pouvons qu'émettre quelques hypothèses pour caractériser la situation.

- Les enseignants internautes dans leur pratique courante se limitent le plus souvent à la consultation d’un ou deux sites auxquels ils sont habitués.

12 https://www.engheben.it/prof/materiali/invalsi/prove_invalsi.htm

13 http://herese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/

14 http://matoumatheux.ac-rennes.fr/accueil.htm

15 Communication personnelle.

- Les sites qu'ils privilégient sont des sites officiels ou semi-officiels ou recommandés (et répertoriés). Ils correspondent à leur programme ou en sont proches. Ils peuvent accompagner un moyen d'enseignement officiel, comme par exemple, le site accompagnant les moyens de mathématiques des degrés 9 à 11 de Suisse romande. Les plateformes mises à disposition des enseignants par l'institution scolaire proposent aussi souvent un choix de ressources plus ou moins évaluées.

- Ce qui semble être un attrait, ce sont les problèmes avec des commentaires didactiques et la mise à disposition de documents imprimables ou projetables. C'est ce que l'on peut déduire des deux enquêtes déjà citées effectuées par l'IRDP.

## Intérêt d'internet du point de vue de la publication

La diffusion de documents, en particulier pédagogiques, sur Internet, présente plusieurs avantages par rapport au mode de faire classique. Un argument souvent cité est que cela permet de proposer des documents qui évoluent (corrections, enrichissements, etc.).

Ce point n'est pas vraiment à discuter. Si, dans un premier temps, il fallait disposer d'une certaine infrastructure et de connaissances techniques pour gérer un site web, la mise à disposition de systèmes de gestion du contenu (CMS), wiki, forum, etc. permet à chacun d'intervenir sur des contenus en ligne.

Un autre argument concerne les possibilités accrues de partage et de collaboration. Cela paraît plausible, mais il vaut la peine d'y porter un regard plus attentif, ce que nous ferons par la suite.

Finalement, un troisième argument, davantage technique, évoque des possibilités de recherche des documents plus riches voire tout simplement rendues possibles. Plusieurs critères de classements, pas nécessairement hiérarchisés (comme l'est la classification décimale universelle) peuvent être adoptés pour un même corpus. Cet argument sera également développé ultérieurement.

## Possibilités de partage et de collaboration

Si les possibilités de partage sont bien présentes, leur réalité reste à examiner au-delà de la communication intense générée par les réseaux sociaux. Évoquons quelques tentatives de partage.

* Partage par « Social bookmarking » : cette pratique théorisée sous le terme de *folksonomie*[16] propose la mutualisation de l'indexation des ressources.

Cette méthode est évoquée par Michèle Drechsler (Drechsler, 2007) qui constate, et elle n'est pas la seule, que les moteurs de recherche généralistes ne permettent pas de trouver de bonnes ressources. Cette observation rejoint les hypothèses faites précédemment. Cette solution aurait l'avantage de compléter les mises à disposition d'adresses par des sites institutionnels ou plus généralistes[17]

* Moteurs de recherche spécifiques : Un internaute[18] montre comment utiliser un outil[19] de Google pour créer un moteur de recherche (nommé *Moteur de recherche 100% maths*) limitant les recherches sur des sites pré-sélectionnés.

* Partage de ressources personnelles sur réseaux sociaux spécialisés : Sur Thot Cursus un article[20] présente une expérience menée par Laurent Dubois à l'université de Genève. Le propos est de créer un *Réseau social pour enseigner les sciences à l'école primaire*.

Un regard sur ces propositions, montre que leur mise en pratique est difficile. Le site de « Social bookmarking » est peu fréquenté, le *Moteur de recherche 100% maths* fait une démonstration qui n'est pas achevée. Par ailleurs, le lien[21] sur le *Réseau social pour enseigner les sciences à l'école primaire* est brisé. Contacté, Laurent Dubois évoque la plus grande attraction des réseaux sociaux généralistes et du contact direct.

Ces tentatives plus ou moins en échec interpellent le projet de la banque de problèmes de l'ARMT. Il est difficile de faire vivre une communauté d'intérêt de façon purement « virtuelle ». C'est un fait déjà constaté à l'époque des anciennes « nouvelles technologies » (Rheingold, 1993, Pochon, 2003). Par ailleurs, il faut une certaine masse critique pour qu'une plateforme d'échange (forum, blog, réseau social, etc.) fasse l'objet de consultations régulières de la part des personnes intéressées. Le site *mathematiquesfaciles.com* avec sa galaxie de cours semble bénéficier de cette masse critique. C'est également le cas de *sesamath*.

---

16 Terme forgé à partir de folk et taxonomie (https://fr.wikipedia.org/wiki/Folksonomie)

17 http://eduscol.education.fr/maths/enseigner/ressources-et-usages-numeriques.html

18 http://www.inclassablesmathematiques.fr/archive/2011/04/27/moteur-de-recherche-100-maths.html

19 https://developers.google.com/custom-search/

20 http://cursus.edu/article/3530/reseau-social-pour-enseigner-les-sciences/#.WXmgtIWpdZc

21 http://educasciences.ning.com/

Les réalisations dues à des initiatives personnelles font souvent appel à des collaborations mais ces appels sont assez peu entendus ou difficilement gérables. Il est tout autant difficile aux contributeurs occasionnels d'adopter les conventions du créateur qu'à celui-ci d'admettre de nouvelles manières de faire.

### Usage : conclusion

La banque de problème de l'ARMT qui repose sur le travail de la communauté : groupes de travail, sections et comités de l'association, semble posséder les conditions nécessaires qui permettent une utilisation élargie. Par contre, le processus manque encore de dynamisme, d'un souffle, qui permette de passer d'une situation d'archivage à un corpus en évolution grâce aux apports de divers publics. Il est actuellement possible d'envoyer des messages aux gestionnaires de la base directement. Cette possibilité est encore peu exploitée. Elle devra faire l'objet d'une évaluation avant d'ouvrir un dispositif plus interactif (du type forum de discussion).

Il ne faut pas oublier que l'objectif du rallye, n'est pas à proprement scolaire. Pour de nombreux participants, enseignants et formateurs, l'accent de l'effort est mis sur la réalisation des problèmes, leur correction, l'analyse des productions et l'organisation de la compétition, plus proche de leur pratique habituelle.

## Systèmes de classification de problèmes mathématiques

Les systèmes de classification d'un ensemble de problèmes sont multiples. Leur adoption peut dépendre du but pour lequel les problèmes sont rassemblés en un corpus : enseignement (selon divers paradigmes), recherche en didactique (effet de l'habillage, de la présentation ou de la forme de l'énoncé), évaluation, etc.

### Systèmes de classement possibles

Dans le cadre de EVAPM et de la banque de problèmes EVAPMIB, Antoine Bodin (Bodin, 2009) a relevé les diverses manières rencontrées dans la littérature, principalement relative à l'évaluation, de classer les problèmes de mathématiques. Avec quelques adaptations, nous reprenons cette liste de critères dans laquelle des définitions utiles peuvent être puisées.

Les quatre premiers critères, bien que nécessitant des précisions, sont relativement faciles à décrire. Les suivants plus délicats.

***Classement par types de problèmes ou d'exercices***

Cette classification peut intervenir dans un vaste corpus de problèmes en distinguant les exercices d'exposition (pour introduire à un domaine), les problèmes de recherche, les exercices d'application (pour éprouver les notions étudiées) ou d'entraînement, etc.

***Classement par la forme des questions***

Ce critère peut aussi se rencontrer dans de vastes collections de problèmes, principalement d'évaluation. Il concerne la façon dont les solutions sont formulées : réponses courtes ou développées, QCM, etc.

***Classement selon l'âge ou le niveau scolaire***

Ce critère ne présente pas de difficulté à établir, mais il peut varier selon les pays et les programmes scolaires. Pour mémoire, l'introduction du programme HARMOS en Suisse introduit quelques confusions (la catégorie 3 du Rallye mathématique transalpin s'adresse aux classes du niveau 5 selon la numération HARMOS).

***Classement selon la difficulté***

Que la difficulté soit exprimée en pourcentage de réussite ou selon une échelle issue de la théorie des réponses aux items (IRT- Item response theory), ce critère ne présente en principe pas de difficulté objective. Toutefois, il entre en interaction avec le critère précédent et également au vécu scolaire antérieur du public visé.

***Classement par contenus mathématiques***

Ce critère a besoin de précision. Il peut s'agir, et c'est souvent le cas, du domaine mathématique concerné : arithmétique, algèbre, géométrie, analyse, probabilités. Ce critère peut être précisé par des sous-domaines : géométrie synthétique, géométrie analytique, géométrie différentielle, etc. Les notions mathématiques (équations bi-carrées, produit scalaire, …) peuvent aussi servir à décrire un contenu lorsque les problèmes sont des énoncés avec peu d'habillage.

Il peut aussi s'agit du choix de différents thèmes sans forcément viser à l'exhaustivité. Ainsi, dans le cas de EVAPMIB dix thèmes sont retenus, par exemple : Constructions géométriques ; Connaissance et utilisation des théorèmes en géométrie ; Connaissance des nombres - calcul numérique ; Proportionnalité et situations affines.

Le consortium PISA propose un classement en cinq thématiques : Variations et croissance ; Espace et formes ; Raisonnement quantitatif ; Incertitude ; Indépendances et relations.

Les huit problématiques définies par l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement publique (APMEP) en France partagent en partie la même idée en insistant davantage sur ce que les questions permettent de résoudre que sur les outils mathématiques qui sont mobilisés, par exemple : Repérage ; Mesure de grandeurs avec précision, Approximation ou incertitude ; Techniques algorithmiques ; Conjectures, preuves, réfutations et validations.

***Classement selon les objectifs contrôlés***

Lorsqu'il s'agit d'évaluation, il peut être utile de posséder des familles de problèmes susceptibles de contrôler un objectif d'apprentissage. Une famille de près de mille objectifs sert à indexer les problèmes de la base EVAPMIB.

Par exemple : Caractériser le triangle rectangle par la médiane relative à l'hypoténuse. Ou encore : *Connaître l'axe de symétrie de la figure formée par une droite et un cercle*.

***Classement selon les activités et les processus sollicites***

Le consortium PISA propose sous le nom de « processus » (avec différentes appellations selon les années) une typologie des différents types d'activités mathématiques qu'un problème peut déclencher. Les processus mathématiques, qui décrivent ce que font des individus pour établir un lien entre le contexte du problème et les mathématiques et, donc, pour résoudre le problème, ainsi que les capacités qui sous-tendent ces processus.

Cette typologie comporte les catégories suivantes (Bodin & al, 2016) :

La pensée et raisonnement mathématique ; Argumentation, Communication, Modélisation ; Création et résolution de problèmes ; Représentation ; Utilisation d'un langage et d'opérations de nature symbolique, formelle et technique ; Utilisation d'outils et d'instruments.

Dans le même ordre d'idées, Régis Gras (Gras, 1977, cité par Bodin 2009) a proposé une liste de dix types d'activités qui sont autant d'amorces de descriptions de tâches liées à la résolution de problèmes (par exemple : tâches de type calculatoire, classificatoire, logique, etc.).

***Classement selon la complexité***

En suivant Bodin dans le document cité on peu principalement distinguer deux types de complexité :

- la complexité liée à l'énoncé qui mêle le niveau langagier de l'énoncé et les représentations qu'il génère (les modèles selon l'appellation de Grize). Un exemple est donné par l'utilisation du mot « plus » dans des problèmes dont la solution est donnée par une soustraction.

- la complexité cognitive qui concerne le niveau de l'activité mentale sollicitée, de l'automatisme à la création.

Les taxonomies d'objectifs organisées par ordre de complexité ne manquent pas. La taxonomie de Bloom[22] est la première à laquelle on peut faire références. Mais elle n'est pas adaptée aux mathématiques. Régis Gras en a fait une version pour les mathématiques au niveau de l'enseignement secondaire. Les cinq grandes catégories en sont : A : Connaissances de base ; B : Analyse et traduction ; C : Compréhension ; D : Synthèse et créativité ; E : Critique et évaluation. Chaque catégorie se décompose en différentes actions. Par exemple pour la catégorie B (Analyse et traduction) les verbes introduisant les sous-catégories sont : décomposer, repérer les éléments, changer de forme, modifier.

Le classement par « classes de compétences » en six niveaux[23] adopté par le consortium PISA qui tient compte du niveau de mathématisation attendu, n'est pas fondamentalement différent.

Une classification peu rencontrée, à cheval entre contenu et complexité, est la classification selon la structure mathématique. Cela rejoint l'organisation des anciens manuels scolaires : problème de proportionnalité directe, inverse, etc. Un tel classement doit être ajusté finement aux connaissances supposées des élèves donc à leur âge connaissant le cursus dans lequel ils s'inscrivent.

La typologie de Vergnaud (1981) sur les problèmes additifs peut aussi s'apparenter à une classification par structure mathématique lorsque l'on distingue le nombre comme état ou comme opérateur[24].

## Systèmes de classement trouvés sur le web

Les collections de problèmes trouvées sur le web n'exploitent pas toutes les systèmes de classifications possibles. C'est principalement par contenu, thèmes ou chapitres scolaires qu'elles sont organisées. Par exemple : calcul mental, géométrie. Plusieurs niveaux peuvent être utilisés : géométrie / carré.

Le deuxième critère de classement presque toujours utilisé est de façon évidente le niveau scolaire ou l'âge.

---

22 Voir par exemple http://sophieturpaud.com/2015/02/10/comment-definir-un-objectif-pedagogique-en-formation/ Tax-Bloom.png

23 http://www.oecd.org/pisa/test-fr/

24 On trouve sur Internet le document *banque_de_problemes_selon_la_typologie_de_vergnaud.pdf* dont le nom est explicite. Il contient une petite centaine d'énoncés de problèmes.

Finalement dans le cas des concours, ce sont les feuilles d'épreuve (ou sujets) qui sont proposés. On a également vu des problèmes regroupés par la structure de leur résolution (problèmes isomorphes).

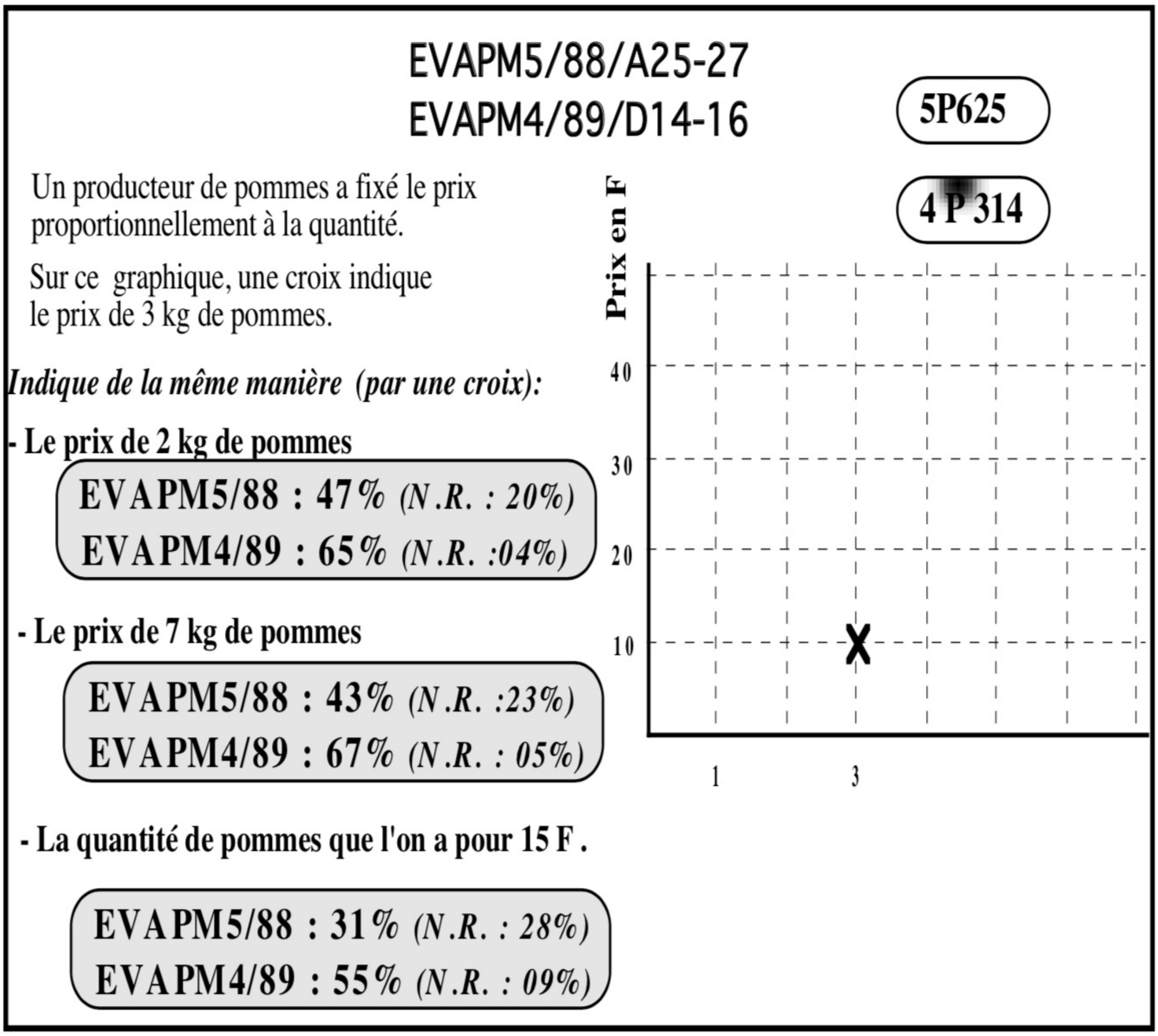



fig 6. Une question de la banque EVAPMIB avec les résultats

## Systèmes de classement des projets EVAPMIB et HARMOS

Deux systèmes de classement auxquels nous nous sommes intéressés et qui n'apparaissent pas ou très discrètement sur Internet sont ceux proposé par l'observatoire EVAPM et par un groupe de réflexion conduit par l'IRDP à propos des épreuves de monitorage HARMOS[25].

La méthodologie adoptée par l'observatoire EVAPM est disponible sur le web[26], mais pas les problèmes. Ceux-ci étaient rassemblés initialement dans un système Hypercard et sont actuellement toujours à disposition sur CD-ROM dans un nouvel environnement. Quant à la réflexion sur les épreuves collectives du groupe de réflexion HARMOS, elle n'a finalement pas été retenue, des procédures de classement statistiques étant plus à même de répondre aux objectifs de l'épreuve.

## Cas de l'observatoire EVAPM

Les figures 6 et 7 reprises de Bodin et Couturier (1993, 2004) illustrent par un exemple les typologies décrites précédemment.

25 HARMOS désigne un processus d'harmonisation de la scolarité obligatoire en Suisse (durée, organisation, etc.) avec notamment une future mise sur pied d'évaluation des compétences en langue, sciences et mathématiques à l'issue des trois cycles d'enseignements (4-7 ans, 8-11 ans, 12-14 ans).

26 https://www.apmep.fr/-Observatoire-EVAPM

La figure 6 présente la question avec les taux de réussite, alors que la figure 7 donne la fiche sur laquelle figure le niveau de complexité cognitive codé B3 et l'objectif contrôlé classé selon la taxonomie de R. Gras sous le code 5P625.

B3 : *Traduction d'un problème d'un mode dans un autre avec interprétation*

5P625 : *Compléter un graphique représentant une situation de proportionnalité, les données étant partiellement fournies.*

**Question N° 98389**

**Code Base EVAPMIB : P018**

**Capacité code EVAPM : 5P625**

**Codes question : EVAPM5/88/A25-27 ; EVAPM4/89/D14-16**

Codes questions liées : EVAPM5/90/N10-12 (autre formulation), EVAPM4/89/P28 ; SPRESE3/90/A2 repris EVAPM3/92/T6)

**Origine : APMEP**

**Mots clés contenus : *Proportionnalité - graphique***

Sens : outil

Type d'activité :

Forme : semi-ouverte

Temps : de 2 à 5 minutes

**Facilité : 10**

Complexité : B3

fig 7. La fiche associée à la question

## Classification « HARMOS »

Le groupe de réflexion lié au cycle 3 (élèves de 12 à 15 ans) dans le cadre du projet de monitorage de HARMOS envisageait une classification selon les deux dimensions représentées dans la figure 8.

Le première dimension (les têtes de colonnes) concerne de façon relativement habituelle le domaine mathématique, chacun étant subdivisé en sous-domaines. La deuxième dimension est constituée d'une liste de compétences générales subdivisées parfois en sous-rubriques.

Partant du fait que les problèmes dépassaient le niveau de simples applications, l'originalité de la classification adoptée était de marquer pour chaque problème les compétences, domaine par domaine, que la résolution du problème permettait de mettre en évidence. Ainsi chaque problème reçoit une liste de codes. A titre d'exemple, le problème 19 de la deuxième épreuve du 18e rallye (Le pré du père François) est décomposé selon cette grille dans la figure 8. Le code A.03 (1) indique qu'un aspect facile (niveau 1) de terminologie concernant le domaine *Grandeur et mesure* est un observable du problème.

Ainsi le but de cette classification n'était pas d'assigner à chaque problème l'évaluation d'une compétence ou de marquer un savoir acquis mais de signaler ce que le problème permet d'observer. Le problème de l'évaluation viendrait dans un deuxième temps en choisissant les problèmes sur la base des caractéristiques établies.

Le travail qui aurait dû se poursuivre en étudiant la manière de pondérer les différents scores et la faisabilité du projet n'a pas été mené à terme. Des méthodes plus globales (IRT multifactorielle) ont été adoptées.

## Classement des problèmes du RMT

### Les informations disponibles

Rappelons rapidement les informations formant la fiche papier (en opposition à la fiche électronique insérée dans la banque de problèmes) de chaque problème. Outre le titre, l'énoncé du problème et la catégorie d'élèves auxquels il est destiné, il y a l'importante analyse a priori comportant le domaine de connaissances[27] et l'analyse de la tâche selon la tradition didactique présentée par Roland Charnay (Charnay, 2003) ou Michel Henry et collègues (Henry, Almouloud, Mendonça Campos, 2006) et les critères de correction. Les problèmes qui sont jugés les plus intéressants font l'objet ultérieurement, dans la limite des forces à disposition, d'une « analyse a posteriori » (examen des résultats chiffrés, analyse des erreurs, procédures utilisées, ...). Ce travail complémentaire peut être mené par divers chercheurs, mais en principe il est géré par des groupes de travail de l'ARMT, chacun lié à un domaine de connaissance (Opération, Géométrie plane, etc.), auquel le problème a été attribué. L'attribution se faisant en fonction du domaine de connaissances jugé principal du problème.

Par ailleurs, les résultats de la passation sont disponibles sur l'ensemble des sections.

### Le contenu de la banque

Les fiches électroniques reprennent ces informations de la façon suivante :

Tout d'abord le problème est associé à un domaine conceptuel principal (qui correspond au groupe qui le gère). Le problème peut également être associé à des domaines jugés secondaires.

Lors des travaux préparatoires de la valorisation des travaux effectués dans le cadre de l'ARMT, les domaines conceptuels qui reprennent les « grands » chapitres de l'éducation mathématique se sont d'abord imposés dans la mesure où des groupes de travail se répartissent l'analyse des problèmes ainsi.

Puis l'utilisation de sous-domaines (par exemple dans le domaine des opérations, les opérations avec les nombres entiers) dans une perspectives hiérarchisées proposée comme complément était envisagée. Cette classification a été abandonnée de même que l'univocité primitivement adoptée (un problème n'appartenait qu'à un seul domaine/sous-domaine/...), ceci pour répondre aux mieux à l'usage des problèmes dans le cadre du RMT.

En effet, les problèmes sont complexes et ne sont pas liés à un chapitre particulier de mathématiques. Ils n'imposent pas directement la méthode et les outils adéquats. Ils ne sont pas calibrés par rapport à un programme de mathématiques comme le sont les problèmes d'évaluation dont la fonction est de contrôler l'usage et la maîtrise, par les élèves d'un élément de connaissance lié à un objectif pédagogique bien défini d'un niveau de complexité donné.

Toutefois, le domaine mathématique est complété par les concepts mathématiques évoqués dans l'énoncé et utilisés dans la résolution. Ils sont repris en grande partie du domaine de connaissances de l'analyse a priori (par exemple : aire, triangle, nombre pair, etc.).

27 La liste contient des concepts et des actions, par exemple : « comparaison d'aires par découpage et recomposition » ou « organisation d'un dénombrement ». La version électronique sépare ces deux types d'information.

| Le pré du père François (18.II.19) | **01. Géométrie**<br>1.Géométrie synthétique<br>2.Propriétés des figures<br>3.Transformations | **02. Nombres et opérations**<br>•4. Ensembles<br>•5. Propriétés et priorités des opérations<br>•6. Algorithmes<br>•7. Arithmétique | **03. Grandeurs & mesures**<br>•8. Calcul de dimensions<br>•9. Pythagore<br>•10. Trigonométrie du triangle rectangle<br>•11. Grandeurs fondamentales et composées | **04. Fonctions et calcul littéral**<br>•12. Proportionnalité<br>•13. Etude de fonctions<br>•14. Représentation de fonctions<br>•15. Equations | **05. Analyse de données**<br>•16. Lecture, organisation et tri<br>•17. Critiques<br>•18. Représentations | **06. Habillage** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Appropriation | | | A.03 (1) | | | |
| A1. Terminologie | | | | | | |
| A2. Ecriture | | | | | | |
| A3. Langage | | | | | | A3.06 (2) |
| B. Modélisation | B.01 (1) | | | B.04 (2) | | |
| C. Raisonnement | | | | | | |
| C1. Invention | | | | | | |
| C2. Cheminement | | | | C2.13 (1),C2.15 (1) | | |
| C3. Déduction | | | | | | |
| D. Utilisation de techniques | | | | D.13 (1), D.15 (2) | | |
| E. Instrumentation | | | | | | |
| E1. Outils traditionnels | | | | | | |
| E2. Aide-mémoire | | | | | | |
| E3. Calculette | | | | | | |
| E4. Ordinateur | | | | | | |
| F. Interprétation et critique des résultats | F.01 (1) | | | F.04 (2) | | |
| G. Communication | | | | | | |
| G1. Terminologie math | | | | | | |
| G2. Ecriture math. | | | | | | |
| G3. Structure | | | | | | |

fig 8. Indexation possible du problème « Le pré du père François » (Problème 19 de l'épreuve II du 18e rallye)

L'analyse de la tâche de l'analyse a priori, parfois revue en fonction de l'analyse a posteriori, est également reprise dans la fiche électronique. Elle rend compte de la manière dont les notions peuvent être mises en jeu.

Cette analyse fait également l'objet d'un résumé. Ces résumés servent de point de départ à une classification par « tâches » qui sera décrite ultérieurement.

Les résultats, avec les critères d'attribution des points, constituent aussi une information figurant sur la fiche électronique. Ils peuvent être suivis d'une analyse des erreurs, de recommandations ou propositions pour l'utilisation en classe. Finalement une rubrique propose des prolongements à l'activité et des analyses plus élaborées.

Avec chaque problème, le numéro du rallye dont il fait partie est enregistré. De même que l'épreuve (I, II ou finale) et sa place dans l'épreuve[28]. Les catégories allant de 3 à 10 (élèves de 8 à 15 ans) indiquent le degré scolaire des élèves auxquels le problème est destiné. Habituellement les problèmes font partie de plusieurs catégories.

A noter que certaines rubriques peuvent être momentanément absentes n'étant pas rédigées ou parce que les informations n'ont pas été conservées (notamment les résultats aux épreuves des premiers rallyes). Ces fiches sont relativement brèves. Les développements qui ont parus dans des revues, la Gazette de Transalpie ou des études ad hoc sont référencés dans une bibliographie.

## Critères de recherche

En définitive les problèmes sont classés par épreuve et rallye, catégorie, domaine conceptuel et tâches ce qui constitue autant de critères de recherches.

De plus, une indexation s'opère également sur les concepts et les mots des titres des problèmes.

Le classement par « tâche » issu de l'analyse de la tâche sera mieux décrit ultérieurement après que la notion de tâche soit précisée. La formulation des « tâches » reste un exercice difficile. Si elle peut s'inspirer en partie du modèle des activités de R. Gras (1977) adopté par la banque EVAPMIB[29], les problèmes de la BP-ARMT, plus complexes, ne se laissent pas facilement décrire par une simple action (dans le sens décrit plus loin) mathématique

**AL - Etudier des alignements d'objets**

Problèmes pour lesquels la première tâche est de découvrir les régularités dans des dispositions répétitives d'objets, de découvrir les alignements et les périodes et d'en tirer profit pour les compléter ou pour en dénombrer les éléments. Cette tâche est en général combinée avec des reports de figures par isométries et /ou par des reproductions de suites numériques périodiques.

Remarque et suggestion

**Problèmes**

**Carrelages (ral. 02.I.11 ; cat. 5-5 ; 02rmti_fr-11)**: Déterminer le temps nécessaire pour compléter un carrelage connaissant le rectangle à carreler et le temps mis pour poser les plaques figurant sur le dessin.

**Le trou (ral. 02.II.05 ; cat. 3-5 ; 02rmtii_fr-5)**: Dénombrer le nombre de pavés qui manquent (44) dans un pavage rectangulaire de 12 x 8,5 composé de pavés rectangulaires et de demi-rectangles carrés (sur les bords), dans un contexte de trou dans un mur de briques.

**La tache (ral. 03.II.06 ; cat. 3-5 ; 03rmtii_fr-6)**: Un réseau quadrillé de points blancs (6 x 11) est inséré dans un réseau quadrillé de points noirs (7 x 12). Les deux réseaux sont masqués partiellement par une tache qui ne laisse apparaître que les points du bord. Calculer le nombre de points masqués.

**Le potager de grand-mère (ral. 06.I.02 ; cat. 3-4 ; 06rmti_fr-2)**: Dénombrer le nombre d'objets alignés parallèlement à la diagonale d''un carré, dans un réseau donné par la disposition de trois rangs voisins; après avoir découvert la trame du quadrillage (8 x 8) et les relations entre les nombres de rangs voisins.

(une addition, une résolution d'équations, etc.).

fig 9. Familles des problèmes liées à la tâche

Pour le moment retenons que les familles de problèmes associées à une « tâche » sont décrites par un code, un titre et une description (figure 9). Cette dernière devrait permettre de percevoir globalement le type ou la catégorie d'actions que l'élève aura à accomplir pour résoudre le problème ».

Chaque tâche peut être associée à un domaine conceptuel particulier, mais il n'y a pas de lien de dépendance stricte.

28 Le 4e problème de la deuxième épreuve du 12e rallye est noté 12.II.04.

29 Des travaux menés à l'IRDP pour créer une banque d'items (Margot, 1984) offrent également un catalogue de tâches de base en mathématiques scolaires.

## Systèmes de classification : conclusion

En définitive les banques consultées sur Internet présentent peu de diversité quant à la manière de classifier des problèmes. Les classifications selon le domaine ou le niveau prédominent. Les anciens travaux en matière d'analyse de problèmes ne semblent pas être mis à profit. Il n'est pas impossible que les facilités offertes par l'indexation des moteurs de recherche paraissent suffisantes. Ce qui selon d'autres remarques est notoirement une illusion.

Par ailleurs, les travaux théoriques actuels sont davantage consacrés à l'étude de modèles et de techniques statistiques sophistiqués (IRT multifactorielle, par exemple) qui évidemment ne conviennent pas dans le cas présent.

Nous nous sommes donc surtout appuyés sur les travaux plus anciens de l'observatoire EVAPM et de l'IRDP et des réflexions propres menées dans le cadre de l'ARMT.

Si les différents critères de classement de la BP-ARMT sont en partie redondants (ce qui reste à vérifier), ils en permettent l'accès selon différents types d'usages. Cette redondance favorise également l'accès par navigation qui est préféré à l'utilisation d'un formulaire de recherche.

L'index constitué sur les mots du titre (et prochainement du résumé, voire de l'énoncé) permet de retrouver un problème particulier dont on se souvient du thème.

Pour les analyses et une utilisation didactique, la classification par tâche paraît importante (voir l'article de François Jaquet, dans ce numéro, Houdement, 2015). Finalement, Les mots-clés du domaine mathématique permettent de trouver des problèmes mettant en œuvre une notion mathématique particulière.

En utilisant le formulaire de recherche, le croisement de différents critères permet de préciser les « tâches » selon l'âge des élèves.

## A propos de la notion de tâche

> Qu'est-ce donc que le temps ? Quand personne ne me le demande, je le sais ; dès qu'il s'agit de l'expliquer, je ne le sais plus. (Saint-Augustin, Confessions)

## Un concept polysémique

Tout le monde comprend ce qu'est une tâche, mais chacun en possède sa propre perception : Est-ce que l'on dit de faire ? ce que l'on fait ? ce que l'on croit devoir faire ? C'est un concept qui fait partie d'un champ conceptuel comprenant les ingrédients : consigne, objectif (cognitif, pédagogique), démarche, procédure, but, activité, compétence, capacité, etc. Parfois synonyme de problème (c'est ainsi que l'on peut parfois trouver l'expression dans la banque famille de tâches plutôt que famille de problèmes). Brousseau (2004) montre également que selon le contexte la notion de tâche prend des colorations diverses. Selon lui, la tâche est un projet. Il s'emploie de montrer les inconvénients de l'usage inconsidéré de ce terme.

Le dictionnaire (Petit Robert) admet les deux acceptions[30] proches mais néanmoins le tiraillement entre ce qui est à faire (consigne) et ce que l'on fait (l'activité).

## Référence à la tâche dans la théorie de l'activité

Dans le cadre de la théorie de l'activité Leontiev (1976 cité par Leplat & Hoc, 1983) donne une définition que l'on adoptera ainsi que des concepts associés : Une tâche est un but donné dans des conditions déterminées.

Ensuite la tâche enclenche une activité aussi bien matérielle qu'intellectuelle. Celle-ci va s'étaler sur une période composée de différents étapes plus courtes au cours desquelles se déroulent des processus relativement bien identifiables nommés actions. Les actions elles-mêmes se décomposent en opérations plus difficiles à cerner.

Une action peut être associée à une (sous-)tâche que le meneur ou les meneurs de l'activité se donnent.

L'énoncé d'un but (la tâche), notamment dans le monde du travail, peut être accompagné explicitement ou implicitement d'une marche à suivre.

Le même schéma à trois niveaux (activité, actions, opérations) peut être utilisé pour décrire aussi bien des activités individuelles que collectives.

30 Travail déterminé qu'on doit exécuter. (besogne, ouvrage) / Ce qu'il faut faire ; conduite commandée par une nécessité ou dont on se fait une obligation (devoir, mission, rôle).

Il nous permet de désigner les différentes étapes de l'analyse de la tâche par un terme approprié, les actions. Dans ce modèle, les opérations peuvent être constituées des petits processus intériorisés quasiment instinctifs lorsqu'il faut exécuter des calculs ou des constructions simples.

## La classification par « tâches » de la BP-ARMT

C'est à dessein que l'on propose le mot « tâche » entre guillemets dans l'expression classification par « tâches ».

Dans un problème du RMT, il y a en général, selon la définition adoptée, deux tâches explicitées : résoudre le problème qui se particularise par une consigne dans le cadre des données et les conditions du RMT, et décrire ou expliquer sa démarche. Une tâche implicite collective relève de l'organisation des groupes de travail.

Si l'on en tient à ce niveau de généralité, la classification est trop grossière. Il faut trouver des critères plus sélectifs.

Mais caractériser un problème par une *tâche* globale suffisamment précise est un exercice difficile, pas toujours possible. C'est pour cela que l'on considère souvent plutôt les *actions,* voire les *opérations,* principales que décrit l'analyse a priori.

Dans le cadre de la résolution de problèmes mathématiques, il ne semble pas être nécessaire de distinguer la tâche prescrite de la tâche effective comme cela peut se faire dans le cas en analyse du travail. Toutefois, les données peuvent induire des versions différentes des actions menées selon le cursus de celui ou celle qui résout le problème : dans ce que les uns identifieront un comptage de salades d'autres peuvent identifier un problème d'équations.

Comme plusieurs stratégies de résolution sont toujours possibles, certaines prévues et d'autres découvertes lors de l'analyse a posteriori, il faut distinguer les actions de l'activité supposée et celles de l'activité effective.

A noter que l'analyse a priori n'explicite pas toujours certaines actions courantes telles que lire les données, essayer, etc. Par contre, elles ne devraient pas être omises dans la description des tâches à l'intérieur de la BP-ARMT.

En définitive, les familles des problèmes sont caractérisées par un mixte comprenant des tâches au sens propre, des actions et quelques autres caractéristiques qui peuvent relever d'actions implicites ou d'opérations.

## Exemples de « tâches »

*LAC : Compléter des calculs lacunaires* : C'est une tâche au sens propre qui apparaît formulée de façon diverses dans les consignes, par exemple : « Trouvez les nombres qui se cachent sous les dessins ». (04.I.13)

*ADD : Rechercher une somme ou une différence de nombre* : C'est bien une tâche, mais jamais proposée telle quelle dans un problème du rallye. Dans le cas des problèmes du RMT, cela décrit une action. Ce critère est peu sélectif. Il apparait dans de nombreux problèmes (plus du 10%),

*MEQ : Établir puis résoudre des (in)équations* : Dans le cadres des problèmes du RMT cet énoncé relève plutôt d'une action[31]. Toutefois, il est rare que les problèmes que des « experts » résoudraient en posant puis en résolvant des équations sont le fait des élèves participants aux rallyes (sauf occasionnellement ceux des catégories 8 à 10). Le titre adopté prête donc à confusion. C'est la description qui indique quelle est la véritable tâche.

Trouver une meilleure appellation n'est pas chose aisée. Le groupe *Algèbre* avait proposé de façon parallèle la formulation « *AA - Passer de l'arithmétique à l'algèbre* » qui semble recouvrir le même type de problèmes[32]. Dans ce cas, l'appellation évoque plutôt un usage didactique du problème. Le cas est en discussion.

La « tâche » *DSP* – *Repérer des données superflues* serait plutôt une opération de même que *OBS - Observer des relations.*

La « tâche » *QUA- Travailler sur un quadrillage* donne une indication sur le contexte de la tâche.

## Programme pour le futur

Il reste encore du pain sur la planche. Tout d'abord, il s'agit de terminer la saisie de toutes les informations disponibles. C'est un travail routinier, mais qui demande du temps. Puis, il faudra terminer l'indexage par concepts et la rédaction des résumés. Ce dernier travail est crucial pour la phase ultérieure de classification selon les « tâches ». En effet, c'est en passant en revue les problèmes et en rédigeant les résumés que le repérage de « tâches » et leur description s'effectuent le plus facilement.

Parmi les familles à examiner, se trouvent tout d'abord celles qui sont peu peuplées (*CDF – Mettre en relation code fractionnaire et code décimal* avec un seul problème) ou celles qui trop abondantes (*ADD - Rechercher une somme*

31 Alors que cela peut être une tâche dans le cadre de problèmes classiques des degrés post-obligatoires.

32 Actuellement peu de problèmes appartiennent aux deux familles. C'est le cas du problème « Modèles réduits » (26.I.04).

*ou une différence de nombres* avec 158 problèmes). Elles sont à revoir en fonction de la fréquence de leur utilisation, de leur recoupement avec les notions et des problèmes qui les constituent.

Les familles dont le titre prête à confusions sont aussi à examiner. C'est le cas des familles MEQ (le titre évoque une action qui n'est pas du ressort des élèves) et AA (le titre évoque une intention didactique) évoquées précédemment.

Créer des familles plus spécifiques fait partie des pistes à explorer. En particulier pour classer les problèmes dont on désire préciser les actions par adjonction de ADD (par exemple : LAC, ADD pour les problèmes lacunaires relevant de l'addition), il serait possible de créer de nouvelles sous-familles (dans le cas de l'exemple LAC/ADD).

Pour créer des familles bien adaptées à des problèmes du type « Au fitness » (14.II.12) (où il s'agit de faire un choix entre deux modalités de payement), on pourrait se référer à la structure mathématique sous-jacente, c'est-à-dire à une comparaison de fonctions affines, ou, mieux, une comparaison d'offres.

Des problèmes du type « La cueillette des champignons » (19.I.15) où il s'agit de déterminer combien chacun des quatre enfants participant à la cueillette a ramassé de champignons connaissant le total et des informations partielles sur la récolte de chacun peuvent être résolus en passant par un système d'équation (en l'occurrence, système de 5 équations à 5 inconnues). Toutefois, les élèves vont très certainement les résoudre par diverses tentatives et les plus experts exploiteront des raccourcis. Ces problèmes sont à faire migrer dans la sous-famille *LO/NU - Effectuer des déductions avec des contraintes numériques*. Mais qu'en est-il de l'usage de cette classification ? Les premières observations de l'utilisation de la BP-ARMT montrent que les requêtes par mot-clé (titre ou concept) sont beaucoup plus utilisées (réflexe Google ?) que les recherches par navigation dont la recherche par « tâches » fait partie. Par conséquent, le classement par « tâches », auquel une grande importance est accordée n'a pas encore montré toute son utilité.

Ce sera peut-être le cas lorsqu'il s'agira de concevoir des scénarios à l'image du parcours décrit par François Jaquet dans ce numéro de la Gazette. L'usage futur montrera également quelle est la redondance (ou l'articulation) entre l'information fournie par les concepts du domaine mathématique (vocabulaire non contrôlé en assez grand nombres) et la liste des tâches (fixées en nombre limité).

L'intérêt porté par différents publics (concepteurs de problèmes, utilisateurs) sera aussi à prendre en compte.

D'autres questions restent à examiner dans le partage du travail des descriptions entre les groupes de travail, par exemple *Algèbre* et *Fonction* pour ce qui est des équations ou *Géométrie plane* et *Grandeurs et mesure* pour ce qui relève de la détermination d'aires.

Il n'est pas impossible à terme que les classifications puissent être en partie déduites automatiquement à partir d'informations tirées de l'analyse de la tâche, du résumé et de l'énoncé.

## Pour conclure : de l'intérêt et de l'utilité de classifier les problèmes du RMT

Dans cet article nous avons vu que la banque de problèmes de l'ARMT fait partie d'un ensemble important de ressources de problèmes de tous les types et de toutes les provenances disponibles sur Internet. Elle possède la particularité de proposer des analyses de tâches.

Cette caractéristique a conduit à développer une classification des problèmes par « tâches », terme qui recouvre à la fois des tâches proprement dites, des actions et opérations qui peuvent intervenir dans l'activité de résolution.

La banque est principalement basée sur des travaux en didactique relayés par les groupes de travail et de réflexion de l'ARMT. Mais, des travaux relatifs à l'établissement de typologies et taxonomies liés à la résolution de problèmes mathématiques, notamment ceux menés par EVAPM et par l'IRDP (dont le groupe de travail HARMOS) ont aussi été largement consultés. Ces travaux classiques liés à l'évaluation des compétences ou des objectifs offrent quelques points de repère importants avec la différence que, dans le cas du rallye, il n'y a pas d'évaluation relative à un référentiel scolaire. Les problèmes ne sont pas taillés pour mettre en évidence l'atteinte (ou la poursuite) d'un objectif. Ils veulent donner la possibilité de pratiquer des mathématiques. Cela a pour conséquence que l' « habillage » dont ils sont pourvus rend leur classement plus difficile à effectuer. Les actions et les concepts mathématiques à mettre en œuvre ne figurent pas directement dans l'énoncé ou la consigne.

Dans l'état actuel, la banque peut servir d'outil de travail aux concepteurs de problèmes. Il semble également possible de créer à partir de la banque des parcours didactiques raisonnés pour l'apprentissage d'une famille de concepts. Malgré tout, il reste encore beaucoup à faire, notamment dans la définition et la description des tâches.

Toutefois, ce travail un peu technique d'ingénierie didactique ne doit pas faire oublier que l'objectif du rallye n'est pas à proprement scolaire. En effet, l'activité de classement des problèmes est vraisemblablement moins intéressante que celle de création de nouveaux problèmes. L'observation de l'ingéniosité des enfants pour résoudre les problèmes, l'identification des obstacles qu'ils rencontrent et l'analyse des perceptions justes ou erronées de concepts mathématiques sont plus attrayantes.

Par contre, on peut imaginer que l'effort demandé par le travail de classification peut être récompensé par son utilité à proposer des variantes. Cela étant dit, les groupes de travail ont commencé un travail critique du classement adopté. Ils vérifient que les catégories adoptées sont en bonne correspondance avec les problèmes qu'elles décrivent, que les descriptions sont pertinentes et que les titres sont appropriés.

Il est souhaitable que cet apport puisse être poursuivi et qu'il y ait une co-construction de la banque à travers le « dialogue » entre problèmes, descriptions de « tâches », retours d'utilisateurs et statistiques d'utilisation.

## Bibliographie

Bodin, A. & Couturier, F. (1993). Développement d'une base de données d'évaluation en mathématiques : EVAPMIB. *Pédagogies*, N° 5/93.

Bodin, A. & Couturier, F. (2004). *Développement d'une base de données d'évaluation en mathématiques : EVAPMIB.* Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM), Université de FRANCHE COMTÉ (reprise de la publication de 1993).

Bodin, A. (2009). *Comment classer les questions de mathématiques ?* IREM de Franche-Comté, Document de travail.

Bodin, A., Hosson (de), C., Décamp, N., Grapin, N. & Vrignaud, P. (2016). *Comparaison des évaluations PISA et TIMSS. Acquis des élèves : comprendre les évaluations internationales* (volume 1). Conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco).

Bowron, M. & Hall, L. M., (2001). *20,000 problems under the sea : mathematical treasure on the web*. MathPro Press University of Missouri-Rolla. Department of Mathematics and Statistics.

Brousseau, G. (2004). *Tâche, situation, activité*[33].

Charnay, R. (2003). L'analyse a priori, un outil pour l'enseignant. *Math-Ecole*, 209, décembre 2003, 14-26 (paru aussi dans le 3e volume des actes des rencontres sur le RMT avec une traduction en italien).

Clément, M. & Criton, M. (dir.) (2006). *Panorama 2006 des compétitions mathématiques*. PanoraMath 4. Paris : POLE – CIJM.

DeCarlo, M. (2003). S*cience and Technology Sources on the Internet : Mathematics Education Resources on the Internet.* Syracuse University Mathematics Library (http://www.istl.org/03-summer/internet.html).

Drechsler, M. (2007). Quand les enseignants indexent la toile. *Médialog*, 63, septembre 2007, 4-8.

Gras R. (1977). *Contributions à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques.* Thèse-0université de RENNES.

Gras, R. (2002). *Taxonomie d'objectifs cognitifs*. Observatoire EVAPM.

Henry, M., Almouloud, S.A. & Mendonça Campos, T.M. (2006). Analyses de situations didactiques[34]. *Educ. Mat. Pesqui.*, São Paulo, 8(1), 45-65.

Houdement, C. (2015). Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes. *La Gazette de Transalpie*, no 4.

Kassam, S. (2015). *Utilisation du site Internet des moyens de Mathématiques 9-10-11 : Enque□te auprès des enseignants – principaux résultats*. Neuchâtel : IRDP, document de travail 15.1001.

Leontiev, A. (1976). *Le développement du psychisme*. Paris : Editions sociales.

Leplat, J. & Hoc, J.M. (1983). Tâche et activité dans l'analyse des situations. *Cahiers de Psychologie Cognitive*, 3(1), 49-63.

Margot, A. (1984). *Création d'une banque d'items de mathématique : du traitement documentaire des items à l'informatisation du système.* Neuchâtel : IRDP (IRDP/D+M 84.09).

Pochon, L.-O. (2003). Quelques repères historiques et culturels concernant les NTIC et leur usage dans l'éducation. *Cahiers de psychologie n°39*. Université de Neuchâtel, Institut de psychologie et éducation.

Pochon, L.-O. (2007). *Vers un modèle formel de classification de problèmes mathématiques et son usage dans la définition de compétences mathématiques.* Neuchâtel : IRDP. (Document de travail 07.1002).

33 http://www.ssrdm.ch/SSRDM/actualite/materiels/tachebrousseau.pdf (archivé par Google)

34 Adaptation d'une communication aux journées d'études sur le RMT de Torre delle Stelle 2002 : Le rôle de l'analyse a priori dans l'élaboration d'un problème de Rallye, (Il ruolo dell'analisi a priori nell'elaborazione di un problema del rally), Actes bilingues (Français-Italien) des journées d'études sur le RMT de Torre delle Stelle 2002, A.R.M.T. Grugnetti, L. et Jaquet F. ed., Università di Parma e di Cagliari, octobre 2003, p. 237-256.

Pochon L.-O. & Vermot, B. (2010). A *propos de l'usage actuel et futur des supports informatisés pour l'enseignement des mathématiques aux degrés 7-8-9*. Neuchâtel : IRDP. Document de travail. (mis à disposition dans le Bulletin de la SENS, n° 49 : http://www.sens-neuchatel.ch/bulletin/no49/art2-49-Pochon-Vermot.pdf)

Rheingold, H. (1993). *The Virtual Community. Homesteading on the Electronic Frontier*. Reading, Mass : Addison-Wesley.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.* Berne : Peter Lang.

# PROBLEMI DI MATEMATICA SU INTERNET
# L'OFFERTA, LA MODALITÀ E L'UTILIZZAZIONE

**Luc-Olivier Pochon**

## Sunto

La banca di problemi dell'Associazione Rally Matematico Transalpino (BP-ARMT) è giunta a uno stadio di sviluppo che dovrebbe permetterne un'utilizzazione agevole.

Permangono peraltro alcune questioni aperte in merito alla sua evoluzione, in particolare l'affinamento dei criteri di ricerca e il miglioramento dell'aspetto collaborativo. Questo articolo ha lo scopo di fornire chiarimenti in merito, basandosi anche su una breve rassegna delle risorse relative ai problemi di matematica presenti su Internet, e sulle relative modalità di organizzazione e utilizzo.

## Introduzione

Con più di mille problemi disponibili, dei quali circa la metà ben documentata (analisi a priori e risultati), la banca di problemi dell'Associazione Rally Matematico Transalpino (BP-ARMT) dovrebbe permettere agli animatori dell'associazione un suo proficuo utilizzo.

Inoltre, con la spiegazione dei suoi obiettivi e visto che è in costante evoluzione, sarà aperta a un pubblico più ampio per decisione del gruppo di gestione. Tuttavia i partecipanti al rally (organizzatori, correttori, creatori di problemi) e gli insegnanti, che basano una parte della loro attività in classe sulla risoluzione di problemi, costituiscono il pubblico privilegiato.

Restano però da completare le analisi di numerosi problemi. È anche necessario affinare, talvolta correggere, i criteri di classificazione e le indicazioni contenute nelle schede dei problemi. Si tratta inoltre e soprattutto di trovare modalità che permettano una collaborazione migliore fra le diverse tipologie di partecipanti interessati al progetto.

Lo scopo di quest'articolo è quello di far progredire la riflessione. La prima parte è dedicata a un rapido giro d'orizzonte sui problemi di matematica che si trovano su Internet, cosa che permetterà di situare la banca di problemi dell'ARMT nell'ambito dell'offerta disponibile online per l'insegnamento della matematica. Porrà anche la questione sull'utilizzazione di tale offerta.

Nella parte successiva si preciseranno le diverse maniere di classificare i problemi di matematica su Internet in merito ai sistemi di classificazione proposti in generale.

In questo panorama avremo l'occasione di vedere che la classificazione dei problemi per tipi di "compiti" è una delle particolarità della banca di problemi del Rally Matematico Transalpino e si adatta bene a una didattica che organizza percorsi di apprendimento a partire da problemi. Su questa opzione il dibattito è però ancora aperto laddove si voglia precisare la nozione relativamente ambigua di compito.

E per finire verrà presentato qualcuno dei "compiti" proposti e qualcuna delle questioni aperte a tale proposito.

## Qual è l'offerta di problemi di matematica su Internet?

### Un'offerta abbondante

Se, in maniera un po' semplicistica, cerchiamo su Google 'problemi di matematica', il sistema ci propone circa 20 milioni di siti e le proposte delle prime 20 schermate (circa 200 siti) sono abbastanza pertinenti. Ci si può anche divertire a provare altre richieste, come ad esempio: 'gara matematica' o 'rally matematico', in francese e in italiano. Con questa richiesta, la banca di problemi dell'ARMT occupa i primi due posti in francese e quasi tutte le prime pagine ottenute dal motore di ricerca in italiano.

La richiesta 'banca di problemi matematici' (in francese) presenta circa 3 milioni di risultati dei quali un buon numero abbastanza pertinenti, prima di allontanarsi dalla matematica e entrare nei meandri di problemi bancari. La BP-ARMT non appare nelle prime pagine. Mentre la richiesta in italiano 'banca di problemi matematici' offre meno risultati ma la prima pagina è quasi completamente consacrata al Rally matematico transalpino.

Per avere informazioni sulla BP-ARMT in versione francese, bisogna precisare la richiesta 'banque de problèmes mathématiques familles' (3e posti) o 'banque de problèmes mathématiques familles de tâches' (1e posto).

Questi risultati sono evidentemente aneddotici e possono fluttuare nel tempo[1] o differenziarsi secondo gli utilizzatori. Per contro, consentono di evidenziare le caratteristiche dei siti che propongono problemi di matematica.

## Classificazione dell'offerta

L'esame di alcune centinaia di indirizzi forniti da Google consente di evidenziare dei criteri che permettono di confrontare le offerte relative a problemi di matematica su Internet. Eccone un breve elenco:

- Origine dell'iniziativa: alcuni siti sono creati a livello personale mentre altri fanno riferimento a istituzioni pubbliche o a comunità interessate all'argomento. Alcune delle iniziative personali sono sostenute da un'istituzione e assumono così un aspetto semi-pubblico. Altre iniziative sono a carattere commerciale (le chiameremo iniziative "start-up").
- Obiettivo: questa rubrica fa una distinzione fra le collezioni di questioni matematiche ricreative e i siti che propongono problemi a carattere più scolastico con un'intenzione pedagogica di valutazione o di apprendimento.
- Contenuto: ci sono siti che propongono solamente gli enunciati dei problemi, altri dove è anche proposta una soluzione o i risultati, altri ancora in cui c'è un'analisi delle risposte. Vanno citati anche siti che propongono una teoria sulla risoluzione di problemi.
- Forma della presentazione: in questa sezione si distinguono siti che presentano problemi sotto forma di schede da stampare (o da leggere sullo schermo) ed altri in cui gli esercizi devono essere risolti online e propongono anche una correzione automatica. In alcuni siti ci sono entrambe le forme di presentazione.
- Arricchimento: questo riguarda le tecnologie digitali utilizzate per lo sviluppo del sito. Ci possono essere raccolte di dati tramite domande di collaborazione, o il sito beneficia del lavoro di una comunità strutturata o ancora utilizza il feedback degli utenti tramite un forum, animazioni o richieste indirizzate ai gestori del sito.
- Modalità di ricerca: i contenuti possono essere accessibili per mezzo di collegamenti ipertestuali (hyperlink) o di menù, oppure attraverso un modulo di ricerca. Certi siti combinano diverse possibilità.
- Supporto tecnico: questa rubrica è meno importante per un utente non direttamente implicato nella realizzazione del sito. I contenuti possono essere presentati con documenti da scaricare (pdf, documenti Word o Open Office, ecc.) o da consultare online (pagine html statiche o dinamiche), o ancora arricchite con animazioni (Flash, Java script).
- Pubblicità: questa rubrica non riguarda direttamente il contenuto proposto. Comunque, che la pubblicità sia discreta o aggressiva, l'uso delle risorse risulta modificato.
- Criteri di classificazione: sono le informazioni che permettono all'utente di selezionare i problemi. La quarta parte dell'articolo sarà consacrata a questa importante rubrica.

## Collezione di problemi "ricreativi": Recreomath

Questa importante raccolta di problemi, enigmi e giochi (oltre 7 500), è il risultato personale di un insegnante e autore di diversi libri.
Si consulta attraverso collegamenti ipertestuali.
I problemi sono classificati per tipo (Figura 1), serie e tema (ad esempio: Introduzione all'algebra). I problemi sono accompagnati dalla loro soluzione.

1 Queste richieste si riferiscono alla fine dell'estate del 2018. I siti menzionati sono stati consultati nella medesima epoca.

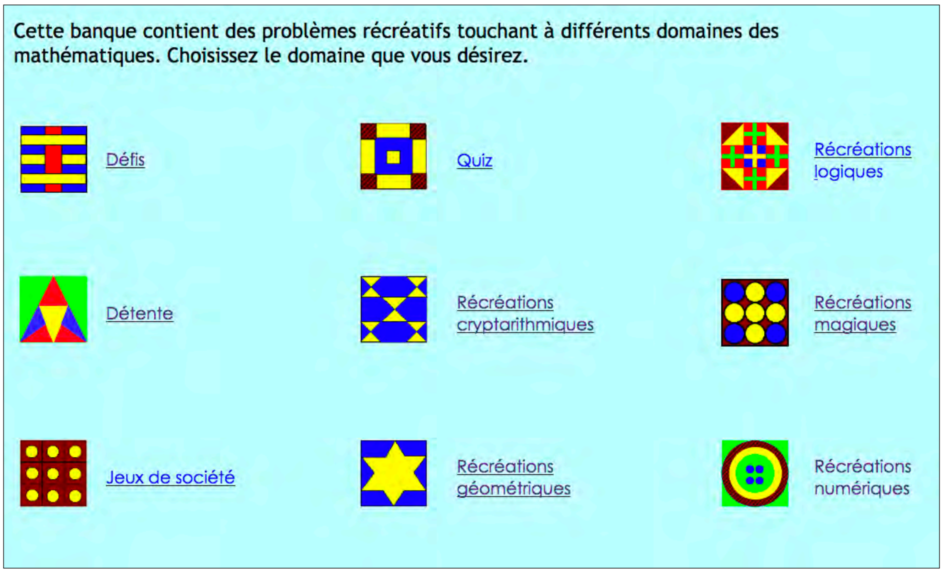



fig 1. Recreomath [http://www.recreomath.qc.ca/]

## Collezione di problemi scolastici

* Pianeta problemi

Questo sito offre quasi 5 000 problemi (di tipo applicativo) di aritmetica e geometria per l'istruzione obbligatoria. È realizzato da un team di insegnanti coinvolti nel Campionato italiano di problemi matematici. I problemi sono disponibili tramite link a parole chiave nozionali ('angoli', 'apotema', ...) o tramite un modulo di ricerca originale (figura 2) che consente di combinare le parole chiave. I problemi possono essere risolti online e una soluzione viene fornita contemporaneamente alla valutazione. Questo può essere ottenuto solo dopo aver risolto il problema utilizzando gli strumenti messi a disposizione. Il lavoro svolto può essere recuperato come file pdf.

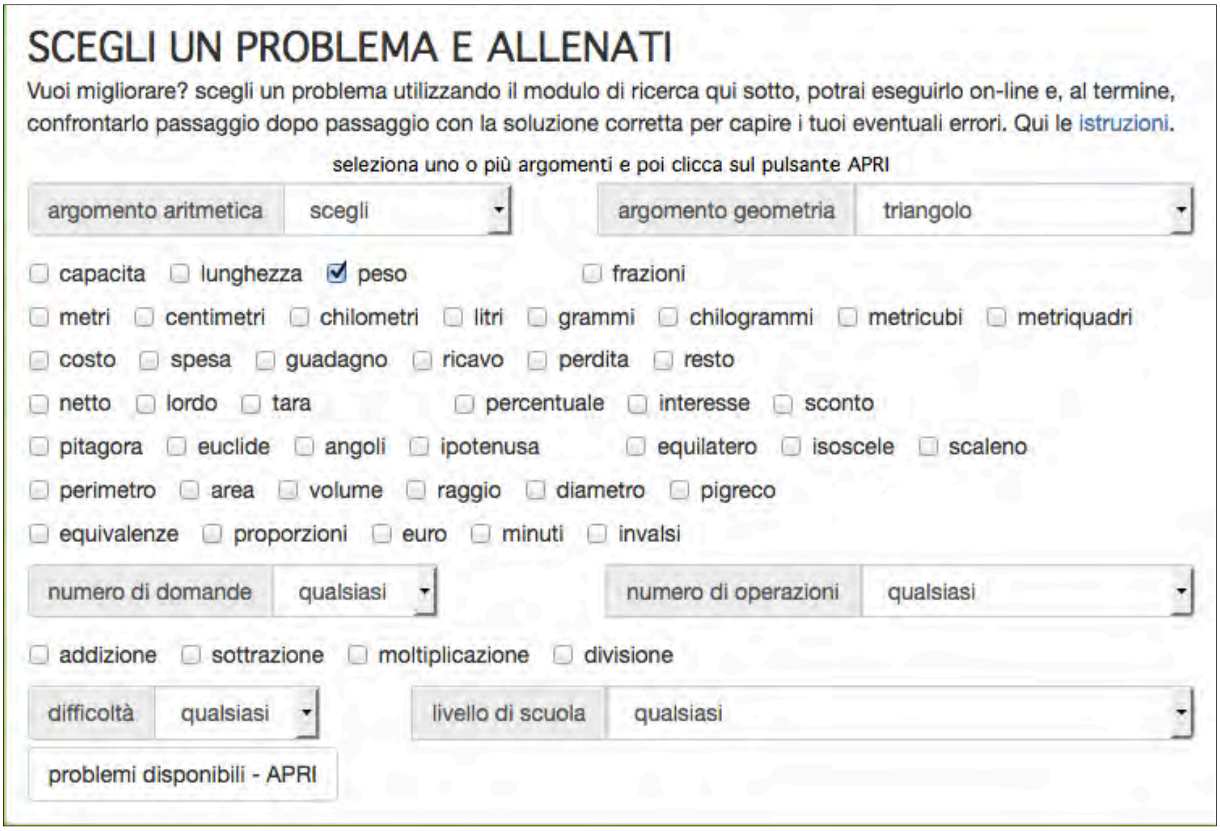



fig 2. Pianetaproblemi [https://www.pianetaproblemi.it/]

* Gomaths

Questo sito è quasi sempre in cima alle liste proposte da Google. È dovuto a un'iniziativa personale. Ha acquisito una tale notorietà che il suo sviluppo è sostenuto dalle autorità scolastiche del cantone di Vaud in Svizzera. Il sito offre principalmente esercizi di calcolo e problemi applicativi (Figura 3). È possibile rispondere a una famiglia di problemi online con una valutazione automatica o generare un elenco di problemi da stampare.


fig 3. Gomaths [http://www.gomaths.ch/prob.php , http://www.gomaths.ch/]

Ci sono anche molti siti di questo tipo ma più piccoli, creati da insegnanti che mettono a disposizione le loro risorse personali, spesso sotto forma di documenti scaricabili. Ad esempio:

**La classe de Mallory*[2]

Questo sito offre l'immagine di una pratica didattica basata sull'apprendimento di tipi di problemi. Sotto forma di schede per stampare, viene proposto un primo problema seguito da altri con la stessa struttura.

* Matematica facile [https://www.mathematiquesfaciles.com/]

Questo sito fa parte di una galassia di corsi gratuiti messi a disposizione da Laurent Weber che sostiene di avere 150 milioni di visite all'anno. Permette agli utenti di creare esercizi, test o anche corsi completi.

Alcuni siti sono accompagnati da pubblicità discreta. Ad esempio, *soutien67* la cui interfaccia adotta la metafora della scuola (figura 4) o *educalire*[3].

Si noti che una raccolta eccezionale di problemi nota come "20,000 problems under the sea : mathematical treasure on the web " compare spesso nelle ricerche. Ma sembra (momentaneamente?) non più disponibile; il link[4] sul sito non funziona. Bowron & Hall ne hanno fatto una descrizione che si trova attraverso una lunga lista[5] di riferimenti anglosassoni riuniti da Mary De Carlo.

2 https://laclassedemallory.net/2017/10/24/banque-dexercices-en-resolution-de-problemes/

3 http://educalire.ch/accueil1.htm

4 http://problems.math.umr.edu/index.htm

5 http://www.istl.org/03-summer/internet.html


Fig 4. Les salles de ressources [http://soutien67.free.fr/sommaire.htm]

### Con arricchimento tramite interazione: Youmath

Questo sito mira a coprire tutti gli ordini di scuola dalla primaria all'università. Questo è un esempio di un sito di start-up per scopi commerciali. La sua particolarità è che offre un aiuto personalizzato sotto forma di forum. Di contro, la scelta di una pubblicità aggressiva rende spesso illeggibili le pagine che propongono i problemi e le loro soluzioni.

### Corsi completi o in via di completamento

* Sesamath[6]

L'associazione Sesamath è pensata per gli insegnanti e i loro studenti. I suoi obiettivi sono promuovere l'uso delle TIC nell'insegnamento della matematica, il lavoro cooperativo e la co-formazione degli insegnanti e offrire servizi per supportare gli studenti nel loro apprendimento, il tutto in una filosofia di servizio. pubblico.
L'associazione offre gratuitamente risorse digitali su Internet e, per quanto possibile, promuove licenze gratuite per documenti, software online e formati aperti. Si finanzia in parte producendo e vendendo manuali cartacei.
Questo è sorprendentemente un sito che non è apparso nelle prime pagine delle nostre richieste.

* Problemi di matematica per le classi elementari

Il contenuto sembra più informale ed è ancora solo all'inizio. È stato creato un wiki nell'ambiente wikibook dove, in linea di principio, tutti possono contribuire (figura 5).

6 http://www.sesamath.net/


Problemi di matematica per le classi elementari

*Wikibooks, manuali e libri di testo liberi.*

La **matematica** è generalmente considerata una materia "antipatica" per alcuni studenti ed insegnanti. In realtà non è difficile farla diventare un'esperienza piacevole, se la si lega a realtà concrete, esperienze pratiche o giochi!

Gli esercizi che seguono possono essere svolti in maniera giocosa, e sono finalizzati a diversi livelli di età.

Qua sotto seguono problemi facili, in più per l'alunno potrebbe essere divertente farli online!

Per evitare che l'alunno veda le soluzioni premere il tasto TAB nella tastiera (al posto di Invio)

**Indice** [nascondi]
1 Classe prima elementare
2 Classe seconda elementare
2.1 Problemi con tutti i dati utili
2.2 Operazioni
3 Classe terza elementare
3.1 Problemi con dati mancanti
4 Classe quarta elementare
5 Classe quinta elementare

Classe prima elementare [ modifica ]

Punto aggiunto per ogni risposta corretta: 1
Punti sottratti per ogni risposta non corretta: 0
Ignora i coefficienti di domanda:
Mescola le domande

1 Il maestro Francesco ha 3 schede. Perde 1 scheda. Arriva la maestra Marta e dà a Francesco altre 5 schede. Quante schede avrà in tutto il maestro?

2 Roberta ha 20 biscotti e ne mangia 11. Quanti biscotti rimangono a Roberta?

fig 5. [https://it.wikibooks.org/wiki/Problemi_di_matematica_per_le_classi_elementari]

***Teoria sulla risoluzione di problemi***

Diversi siti propongono aspetti teorici della risoluzione dei problemi. Si tratta quindi perlopiù di imparare a risolvere problemi (leggere dati, individuare dati essenziali, dati inutili, ...) e non dell'insegnamento basato su un percorso d'apprendimento a partire problemi. *Alloprof*[7] è un esempio di un sito di questo primo tipo.

***Problemi di gare o di rally***

Le ricerche 'concorso' o 'rally matematico' permettono di ottenere una quantità abbastanza ampia di competizioni matematiche elencate anche, per quanto riguarda le competizioni in francese, nel bollettino *Panoramath 4* (Clément & Criton, 2006).

Così, ad esempio, il *Kangourou della matematica*[8] o il *Rallye mathématique de l'académie de Lyon*[9] propongono i testi dei quesiti, le correzioni e alcune analisi delle risposte.

***Valutazione***

Anche le grandi indagini con scopi valutativi compaiono nell'elenco ottenuto con una ricerca. Si trovano informazioni su PISA[10] (Programme for International Student Assessment) o sul monitoraggio nazionale come i test INVALSI (o Prova Nazionale) condotti in Italia dall'Istituto nazionale per la valutazione[11].

In generale, queste risorse si limitano alla pubblicazione dei risultati. Le analisi statistiche sono globali con solo pochi problemi offerti come esempi.

7 http://www.alloprof.qc.ca/BV/Pages/m1205.aspx

8 http://www.mathkang.org

9 http://rallye-math.univ-lyon1.fr

10 http://www.oecd.org/pisa/

11 http://www.invalsi.it/invalsi/index.php

Per quanto riguarda il test INVALSI, se i problemi stessi non sembrano direttamente (almeno non facilmente) accessibili, sono parzialmente disponibili (e anche in forma interattiva) a un altro indirizzo [12].

### L'offerta: conclusione

L'offerta di esercizi e di attività matematiche su Internet è ampia e ricopre tutti gli usi possibili dei problemi matematici. Gli insegnanti possono trovare pagine su aspetti teorici, su esercizi di allenamento o di recupero, su problemi di matematica ricreativa, ... benché la categoria dipenda sovente più dall'uso che se ne fa in classe che da una classificazione a priori. La maggior parte delle risorse è disponibile gratuitamente, ma esistono anche offerte commerciali o miste. Dal punto di vista della forma ci possono essere documenti classici (schede da stampare) o attività online; le due forme possono coesistere, soprattutto per quanto riguarda gli esercizi di allenamento al calcolo o i problemi di applicazione.

Si noti comunque che i problemi sono, talvolta, e anche abbastanza sovente, accompagnati da soluzioni, qualche volta in forma interattiva, ma in generale non sono accompagnati da un'analisi dettagliata. Oppure i dati dei problemi che beneficiano di un'analisi statistica (e talvolta di un'analisi degli errori) non sono disponibili se non per una diffusione ristretta (PISA, per esempio). Da questo punto di vista la BP-ARMT sembra presentare una caratteristica propria.

La BP-ARMT è anche costruita con una concezione dell'apprendimento basata sulla risoluzione di problemi mentre in generale viene proposto un allenamento alla risoluzione di problemi. Un'altra distinzione da rilevare è quella secondo cui i problemi dell'ARMT sono concepiti per essere risolti in gruppo, senza intervento dell'insegnante, con un primo compito collettivo di appropriazione della situazione (o decontestualizzazione).

Senza entrare nei dettagli dei criteri di classificazione, si può accedere alle risorse tramite collegamenti ipertestuali (link) o un menù, raramente attraverso un modulo di ricerca. Le due possibilità offerte dalla BP-ARMT sono piuttosto rare. Bisogna comunque segnalare che la ricerca con il modulo proposto inizialmente per la BP-ARMT era stata poco apprezzata (soprattutto se la ricerca veniva fatta con il cellulare) e che la ricerca per mezzo di link è stata decisa in seguito al laboratorio consacrato a tela argomento a Siena nel 2014.

Alcuni siti che ci si potrebbe attendere dopo una ricerca, come le pagine di Thérèse Eveilleau[13] o di « Matou matheux[14] » non appaiono sorprendentemente tra i risultati direttamente accessibili (nelle prime pagine). Potrebbe essere una decisione dei gestori per limitare l'accesso dei "crawler" alle loro risorse.

## Quale uso di tale offerta?

### Una constatazione e delle ipotesi

Bisogna dapprima constatare che ci sono pochissimi studi che analizzano il modo in cui gli insegnanti ricercano le informazioni su Internet. I lavori di ricerca si concentrano soprattutto sull'uso delle risorse elettroniche nell'insegnamento omettendo la prima fase che consiste nell'ottenere tali risorse. Alcune constatazioni e ipotesi possono tuttavia essere formulate a partire da nostre esperienze e inchieste svolte a cinque anni d'intervallo presso insegnanti della Svizzera romanda (Pochon & Vermot, 2010; Kassam, 2015). Richieste su tale argomento ad altri colleghi non hanno avuto successo.

Notiamo che cercare buoni problemi su Internet è un compito piuttosto impegnativo. I motori di ricerca generalisti sono poco adatti a tale scopo e malgrado l'abbondanza di risultati, ci sono poche risorse che corrispondano a un bisogno particolare (livello, notazione, ecc.). D'altronde, le modalità di funzionamento dei siti sono disparate. Inoltre, è sovente difficile percepire l'insieme e la coerenza del materiale messo a disposizione. Cosa che richiede una buona conoscenza della risorsa. Jacques Perriault[15] faceva già questa osservazione all'epoca dell'utilizzazione dei floppy disk.

Non possedendo dati a sufficienza non possiamo che fare qualche ipotesi per caratterizzare la situazione.

- Gli insegnanti internauti nella loro pratica corrente si limitano sovente alla consultazione di uno o due siti ai quali sono abituati.
- I siti che privilegiano sono siti ufficiali o semi-ufficiali o raccomandati (e repertoriati). Corrispondono ai loro programmi o ne sono vicini. Possono accompagnare un libro di testo ufficiale. Come ad esempio, il sito che in

12 https://www.engheben.it/prof/materiali/invalsi/prove_invalsi.htm

13 http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/

14 http://matoumatheux.ac-rennes.fr/accueil.htm

15 Comunicazione personale.

Svizzera romanda accompagna alcuni libri di testo. Le piattaforme messe a disposizione degli insegnanti dall'istituzione scolastica propongono molto spesso una scelta di risorse più o meno valutate.

- Ciò che sembra attraente sono i problemi con commenti didattici e la messa a disposizione di documenti che è possibile stampare o proiettare. Lo si può dedurre da due inchieste effettuate dall'IRDP (a Neuchâtel).

## Interesse di Internet dal punto di vista della pubblicazione

La diffusione di documenti, in particolare pedagogici su Internet, presenta diversi vantaggi in rapporto al modo di fare classico. Un argomento sovente citato è che permette di proporre documenti che evolvono (correzioni, arricchimento, ecc.).

Questo punto non è da mettere in discussione. Se, in un primo tempo, bisogna disporre di una certa infrastruttura e di conoscenze tecniche per gestire un sito web, la messa a disposizione di sistemi di gestione del contenuto (CMS), wiki, forum, ecc. permette a tutti di intervenire su contenuti online.

Un altro argomento riguarda maggiori opportunità di condivisione e di collaborazione. Questo sembra plausibile, ma vale la pena dare un'occhiata più da vicino, cosa che faremo più tardi.

Infine, un terzo argomento, più tecnico, suggerisce possibilità di ricerca di documenti più ricchi o semplicemente resi possibili. Diversi criteri di classificazione, non necessariamente gerarchici (come lo è la classificazione decimale universale) possono essere adottati per uno stesso "corpus". Anche questo argomento sarà sviluppato più avanti.

## Possibilità di condivisione e di collaborazione

Se le possibilità di condivisione sono ben presenti, la loro realtà rimane da esaminare al di là dell'intensa comunicazione generata dai social network. Parliamo di alcuni tentativi di condivisione.
* Condivisione tramite "Social bookmarking": questa pratica teorizzata sotto il termine di *folksonomia*[16] propone la mutualizzazione dell'indicizzazione delle risorse.
Questo metodo è ricordato da Michèle Drechsler (Drechsler, 2007) che osserva, e lei non è l'unica, che i motori di ricerca generalisti non riescono a trovare buone risorse. Questa osservazione è coerente con le ipotesi fatte in precedenza. Questa soluzione avrebbe il vantaggio di integrare la disponibilità di indirizzi da parte di siti istituzionali o più generalisti[17].

* Motori di ricerca specifici: un internauta[18] mostra come utilizzare uno strumento[19] Google per creare un motore di ricerca (denominato *Motore di ricerca matematico al 100%*) che limita le ricerche sui siti preselezionati.

* Condivisione di risorse personali su social network specializzati: su Thot Cursus un articolo[20] presenta un esperimento condotto da Laurent Dubois all'Università di Ginevra. Lo scopo è quello di creare una *Rete sociale per insegnare la scienza nella scuola primaria*.
Uno sguardo a queste proposte mostra che la loro attuazione è difficile. Il sito di "Social bookmarking" è poco utilizzato, il *Motore di ricerca matematico al 100%* fa una dimostrazione che non è stata completata. Inoltre, il link[21] della *Réseau social pour enseigner les sciences à l'école primaire* non è funzionante. Contattato, Laurent Dubois segnala la grande attrazione dei social network generalisti e dei contatti diretti.
Questi tentativi, più o meno infruttuosi, stanno mettendo a dura prova il progetto della banca di problemi dell'ARMT. È difficile sostenere una comunità di interesse in un modo puramente "virtuale". Questo è un fatto già osservato al tempo delle vecchie "nuove tecnologie" (Rheingold, 1993, Pochon, 2003). Inoltre, richiede una certa massa critica per una piattaforma di scambio (forum, blog, social network, ecc.) per essere oggetto di regolari consultazioni da parte delle parti interessate. Il sito *mathematiquesfaciles.com* con la sua galassia di lezioni sembra beneficiare di questa massa critica. Questo è anche il caso del *sesamath*.
Le realizzazioni ottenute grazie a iniziative personali spesso implicano collaborazioni, ma questi appelli restano generalmente inascoltati o difficili da gestire. È altrettanto difficoltoso sia per i contributori occasionali adottare le convenzioni del creatore del sito, e sia per quest'ultimo accettare nuovi modi di fare.

16 Termine nato dall'unione di folk e tassonomia (https://it.wikipedia.org/wiki/Folksonomia)

17 http://eduscol.education.fr/maths/enseigner/ressources-et-usages-numeriques.html

18 http://www.inclassablesmathematiques.fr/archive/2011/04/27/moteur-de-recherche-100-maths.html

19 https://developers.google.com/custom-search/

20 http://cursus.edu/article/3530/reseau-social-pour-enseigner-les-sciences/#.WXmgtIWpdZc

21 http://educasciences.ning.com/

### Utilizzazione: conclusione

La banca di problemi dell'ARMT che si basa sull'attività della comunità: gruppi di lavoro, sezioni e comitato dell'associazione, sembra possedere le condizioni necessarie che permettono un'utilizzazione allargata. Per contro, il processo manca ancora di dinamismo, di un "soffio", che permetta di passare da una situazione di archivio a un corpus in evoluzione grazie agli apporti di un pubblico variegato. È attualmente possibile inviare direttamente messaggi ai gestori del database. Questa possibilità è ancora poco sfruttata e dovrebbe essere l'oggetto di una valutazione prima di mettere a disposizione uno strumento più interattivo (come un forum di discussione).

Non bisogna dimenticare che l'obiettivo del RMT non è strettamente scolastico. Per numerosi partecipanti, insegnanti e formatori, l'accento principale è posto sulla creazione dei problemi, sulla loro correzione, sull'analisi degli elaborati e sull'organizzazione della gara, più vicini alla loro pratica abituale.

## Sistemi di classificazione di problemi di matematica

I sistemi di classificazione di una raccolta di problemi sono numerosi. La loro adozione può dipendere dall'obiettivo in vista del quale i problemi sono raggruppati in un certo insieme: insegnamento (secondo diversi paradigmi), ricerca in didattica (effetto del contesto, della presentazione o della forma dell'enunciato), valutazione, ecc.

### Sistemi di classificazione possibili

Nel contesto di EVAPM e della banca dei problemi di EVAPMIB, Antoine Bodin (Bodin, 2009) ha identificato i vari modi in cui la letteratura, principalmente relativa alla valutazione, classifica i problemi matematici. Con alcuni adattamenti, riprendiamo questo elenco di criteri da cui è possibile trarre utili definizioni.

I primi quattro criteri, anche se richiedono un chiarimento, sono relativamente facili da descrivere. I seguenti sono più delicati.

***Classificazione per tipi di problemi o di esercizi***
Questa classificazione può essere utilizzata in una vasta gamma di problemi distinguendo tra esercizi di esposizione (per introdurre un argomento), problemi di ricerca, esercizi di applicazione (per testare le nozioni studiate) o di formazione, ecc.

***Classificazione per la forma delle domande***
Questo criterio si può trovare anche in grandi raccolte di problemi, principalmente di valutazione. Riguarda il modo in cui vengono formulate le soluzioni: risposte brevi o sviluppate, domande a scelta multipla, ecc.

***Classificazione secondo l'età o il livello scolastico***
Questo criterio non è difficile da stabilire, ma può variare a seconda dei paesi e dei programmi scolastici. Per la cronaca, l'introduzione del progetto HARMOS in Svizzera introduce qualche confusione (la categoria 3 del rally matematico transalpino è per le classi di livello 5 in base alla numerazione HARMOS).

***Classificazione secondo la difficoltà***
Se la difficoltà è espressa come percentuale di successo o su una scala derivata dalla teoria di risposta agli item (IRT - Item response theory), questo criterio non presenta in linea di principio una difficoltà oggettiva. Tuttavia, interagisce con il criterio precedente e anche con la precedente esperienza scolastica del target di riferimento.

***Classificazione per contenuti matematici***
Questo criterio ha bisogno di precisione. Può essere, e spesso è, il dominio matematico interessato: aritmetica, algebra, geometria, analisi, probabilità. Questo criterio può essere specificato dai sottodomini: geometria sintetica, geometria analitica, geometria differenziale, ecc. Le nozioni matematiche (equazioni bi-quadro, prodotto scalare, ...) possono anche essere usate per descrivere un contenuto quando i problemi sono degli enunciati con un contesto stringato.
Può anche essere la scelta di temi diversi senza necessariamente mirare alla completezza. Pertanto, nel caso di EVAPMIB, vengono selezionati dieci temi, ad esempio: Costruzioni geometriche; Conoscenza e uso dei teoremi in geometria; Conoscenza numerica - Calcolo numerico; Proporzionalità e situazioni affini.
Il progetto PISA propone una classificazione in cinque temi: Variazioni e crescita; Spazio e forme; Ragionamento quantitativo; incertezza; Indipendenze e relazioni.
Le otto problematiche definite dall'Associazione degli insegnanti di matematica dell'educazione pubblica (APMEP) in Francia condividono in parte la stessa idea insistendo più su ciò che le domande permettono di risolvere che sugli strumenti matematici che vengono mobilitati, ad esempio: Monitoraggio; Misura delle grandezze con precisione, approssimazione o incertezza; Tecniche algoritmiche; Congetture, prove, confutazioni e convalide.

***Classificazione secondo gli obiettivi verificati***

Quando si tratta di valutazione, può essere utile avere famiglie di problemi in grado di verificare un obiettivo di apprendimento. Una famiglia di quasi mille obiettivi viene utilizzata per indicizzare i problemi del database EVAPMIB.

Ad esempio: Caratterizzare il triangolo rettangolo in base alla mediana relativa all'ipotenusa. Oppure: Conoscere l'asse di simmetria della figura formato da una retta e da un cerchio.

***Classificazione secondo le attività e i processi sollecitati***

Il progetto PISA propone sotto il nome di "processo" (con nomi diversi a seconda degli anni) una tipologia dei diversi tipi di attività matematiche che un problema può suscitare. Processi matematici, che descrivono ciò che gli individui fanno per mettere in relazione il contesto del problema con la matematica e, quindi, per risolvere il problema, così come le capacità che sono alla base di questi processi.

Questa tipologia ha le seguenti categorie (Bodin & al, 2016): pensiero e ragionamento matematico; argomentazione, comunicazione, modellizzazione; creazione e soluzione di un problema; rappresentazione; uso del linguaggio e delle operazioni simboliche, formali e tecniche; utilizzazione di materiali e strumenti.

Allo stesso modo, Regis Gras (Gras, 1977, citato da Bodin 2009) ha proposto un elenco di dieci tipi di attività che sono altrettanti avvii di descrizione dei compiti relativi alla risoluzione dei problemi (ad esempio: attività di calcolo, di classificazione, logiche, ecc.).

***Classificazione secondo la complessità***

Seguendo Bodin nel documento citato si possono distinguere due tipi di complessità:

- la complessità legata all'enunciato che coinvolge il livello linguistico dell'enunciato stesso e le rappresentazioni che genera (i modelli secondo la denominazione di Grize). Un esempio è dato dall'uso della parola "più" nei problemi la cui soluzione è data da una sottrazione.
- la complessità cognitiva che riguarda il livello dell'attività mentale sollecitata, dall'automatismo alla creazione.

Le tassonomie oggettive organizzate in ordine di complessità non mancano. La tassonomia di Bloom[22] è la prima a cui fare riferimento. Ma non è adattata alla matematica. Régis Gras ha realizzato una versione per la matematica a livello di istruzione secondaria. Le cinque grandi categorie sono: A: Conoscenza di base; B: analisi e traduzione; C: Comprensione; D: sintesi e creatività; E: Critica e valutazione. Ogni categoria è suddivisa in diverse azioni. Ad esempio, per la categoria B (Analisi e traduzione) i verbi che introducono le sottocategorie sono: scomporre, identificare gli elementi, cambiare forma, modificare.

La classificazione delle "classi di competenza" a sei livelli[23] adottata dal progetto PISA, che tiene conto del livello di matematizzazione previsto, non è fondamentalmente diversa.

Una classificazione, poco incontrata, che si colloca a cavallo tra contenuto e complessità è la classificazione secondo la struttura matematica. Ciò si ricollega all'organizzazione di vecchi libri di testo: il problema della proporzionalità diretta, l'opposto, ecc. Tale classificazione deve essere adattata con precisione alla presunta conoscenza degli studenti, quindi alla loro età, conoscendo il corso di studi a cui sono iscritti.

La tipologia di Vergnaud (1981) sui problemi additivi può anche essere correlata a una classificazione per struttura matematica quando distinguiamo il numero come stato o come operatore.

## Sistemi di classificazione trovati sul web

Le collezioni di problemi trovati sul web non coprono tutte le classificazioni possibili. Sono organizzate principalmente per contenuto, temi o capitoli scolastici. Per esempio: calcolo mentale, geometria. Possono essere utilizzati diversi livelli: geometria / quadrato.

Il secondo criterio di classificazione quasi sempre utilizzato è in maniera evidente il livello scolastico o l'età.

Infine, nel caso delle gare, sono proposti gli enunciati delle prove. Abbiamo anche trovato problemi raggruppati secondo la struttura della loro risoluzione (problemi isomorfi).

*L'articolo analizza nei dettagli due sistemi di classificazione* EVAPMIB et HARMOS, uno francese e uno svizzero. *Si rimanda all'articolo in francese*

## Classificazione dei problemi del RMT

### Le informazioni disponibili

Ricordiamo rapidamente le informazioni relative alla scheda cartacea (in contrapposizione alla scheda elettronica inserita nella banca di problemi) di ciascun problema. Oltre al titolo, all'enunciato del problema e alla categoria di

22 Vedere per esempio http://sophieturpaud.com/2015/02/10/comment-definir-un-objectif-pedagogique-en-formation/ Tax-Bloom.png

23 http://www.oecd.org/pisa/test-fr/

allievi ai quali il problema è destinato, figura l'importante analisi a priori con l'ambito delle conoscenze[24] e l'analisi del compito secondo la tradizione didattica presentata da Roland Charnay (Charnay, 2003) o Michel Henry e colleghi (Henry, Almouloud, Mendonça Campos, 2006) e i criteri di correzione. I problemi che sono giudicati come più interessanti sono poi oggetto, nel limite delle forze a disposizione, di una "analisi a posteriori" (esame dei risultati, analisi degli errori, procedure utilizzate, ...). Questo incarico complementare può essere condotto da diversi ricercatori, ma in linea di principio, è gestito dai gruppi di lavoro dell'ARMT, ciascuno legato a un ambito di conoscenze (Operazioni, Geometria piana, ecc.), al quale il problema è stato attribuito. L'attribuzione si fa in funzione dell'ambito di conoscenze giudicato come principale nel caso di ciascun problema.

I risultati delle prove sono disponibili per quanto riguarda tutte sezioni.

## Il contenuto della banca

Le schede elettroniche riprendono queste informazioni come segue.

Per prima cosa il problema è associato a un ambito concettuale principale (che corrisponde al gruppo che lo gestisce). Il problema può anche essere associato ad ambiti giudicati secondari.

Durante i lavori preparatori per la valorizzazione delle attività effettuate dall'ARMT, gli ambiti concettuali che riprendono i "grandi" capitoli dell'educazione matematica si sono inizialmente stabiliti in base ai gruppi di lavoro che si occupavano dell'analisi dei problemi.

Durante i lavori preparatori per la valorizzazione delle attività effettuate dall'ARMT, gli ambiti concettuali che riprendono i "grandi" capitoli dell'educazione matematica sono stati inizialmente stabiliti in base ai gruppi di lavoro che si occupavano dell'analisi dei problemi.

Poi era stata immaginata un'utilizzazione dei sotto-ambiti (per esempio nell'ambito delle operazioni, le operazioni con numeri interi) in una prospettiva gerarchica proposta come complemento. Questa classificazione è stata abbandonata così come l'univocità inizialmente adottata (un problema apparteneva a un solo dominio-sotto dominio /...), per rispondere al meglio all'uso dei problemi nell'ambito del RMT.

In effetti, i problemi sono complessi e non sono legati a un capitolo particolare di matematica. Non impongono direttamente il metodo e gli strumenti adeguati. Non sono calibrati in rapporto a un programma di matematica come lo sono i problemi per la valutazione la cui funzione è quella di controllare l'uso e la padronanza da parte degli allievi di un elemento della conoscenza legata a un obiettivo pedagogico ben definito di un livello di complessità dato.

Tuttavia l'ambito matematico è completato dai concetti matematici evocati nell'enunciato e utilizzati nella risoluzione. Sono ripresi in gran parte nell'ambito delle conoscenze dell'analisi a priori (per esempio: area, triangolo, numeri pari, ecc.). *Per quanto riguarda un esempio con una tabella, si rimanda all'articolo in francese.*

L'analisi del compito dell'analisi a priori, talvolta rivista in funzione dell'analisi a posteriori, è anch'essa ripresa nella scheda elettronica ed evidenzia il modo in cui le nozioni possono essere messe in gioco.

Questa analisi appare anche in un sunto. I vari sunti sono utili come punti di partenza per una classificazione per "compiti", che sarà discussa più avanti.

I risultati, con i criteri di attribuzione dei punteggi, costituiscono anch'essi un'informazione presente sulla scheda elettronica. Possono essere seguiti da un'analisi degli errori, ma anche da raccomandazioni o proposte per l'utilizzazione in classe. Infine una rubrica propone analisi più elaborate per "andare più lontano" con l'attività.

Per ogni problema è indicato il numero del rally di cui fa parte, ma anche la prova (I, II o finale) e il numero d'ordine nella prova[25]. Le categorie, che vanno da 3 a 10 (allievi dagli 8 ai 15 anni) indicano il livello scolare degli allievi ai quali il problema è destinato. Generalmente i problemi fanno parte di diverse categorie.

Alcune rubriche possono essere momentaneamente assenti o perché ancora non redatte o perché le informazioni non sono state conservate (in particolare i risultati delle prove dei primi rally). Queste schede sono relativamente brevi. Gli sviluppi riportati nelle riviste, la Gazzetta di Transalpino o studi ad hoc, sono riportati nella bibliografia della scheda.

## Criteri di ricerca

In definitiva i problemi sono classificati per prova e rally, categoria, ambito concettuale e compiti, tutti aspetti che costituiscono i vari criteri di ricerca.

Inoltre, una indicizzazione viene fatta anche sui concetti e le parole dei titoli dei problemi.

---

24 La lista contiene concetti e azioni, ad esempi. "confronto di aree per ritaglio e ricomposizione" o "organizzazione di un conteggio". La versione elettronica separa questi due tipi di informazione.

25 Ad esempio, il quarto problema della seconda prova del 12° rally è indicato con.II.04.

La classificazione per “compito” a partire dall’analisi del compito, sarà descritta più avanti quando la nozione di “compito” sarà precisata meglio. La formulazione dei “compiti” resta un esercizio difficile. Se tale nozione può ispirarsi in parte al modello delle attività di R. Gras (1977) adottato dalla banca EVAPMIB[26], i problemi della BP-ARMT sono più complessi, la nozione stessa non può essere descritta facilmente con una semplice azione matematica (un’addizione, una risoluzione di equazioni, ecc.).

***AL - Gestire allineamenti di oggetti***

Problemi per i quali un compito importante è quello di scoprire le regolarità nelle disposizioni ripetitive di oggetti, di scoprire gli allineamenti e i periodi da utilizzarli per completare o per enumerare gli elementi in gioco. Questo compito è in generale affiancato da rapporti di figure per isometrie e/o tramite riproduzione di successioni numeriche periodiche.

Remarque et suggestion

***Problemi***

**Il buco (ral. 02.II.05 ; cat. 3-5 ; 02rmtii_it-5)**: Trovare il numero di mattoni che mancano (44) in una pavimentazione rettangolare di 12 x 8,5 composto da mattoni rettangolari e da mezzi mattoni che sono quadrati (sui bordi), in un contesto di buco su un muro di mattoni.

**La macchia (ral. 03.II.06 ; cat. 3-5 ; 03rmtii_it-6)**: Un reticolo a maglie quadrate di punti bianchi (6 x 11) è inserito in un reticolo a maglie quadrate di punti neri (7 x 12). I due reticoli sono parzialmente nascosti da una macchia che ne lascia vedere solo i punti sul bordo. Calcolare il numero di punti nascosti.

**L'orto della nonna (ral. 06.I.02 ; cat. 3-4 ; 06rmti_it-2)**: Trovare il numero di oggetti allineati parallelamente alla diagonale di un quadrato, in un reticolo dato tramite la disposizione di tre allineamenti vicini, dopo aver scoperto la trama della quadrettatura (8 x 8) e le relazioni tra i numeri degli allineamenti vicini.

***AL/DEN - Enumerare***

Osservare allineamenti di oggetti e determinare le relazioni numeriche tra le sequenze… per arrivare a contare con l’aiuto di operazioni aritmetiche.

Remarque et suggestion

***Problemi***

**Il buco (ral. 02.II.05 ; cat. 3-5 ; 02rmtii_it-5)**: Trovare il numero di mattoni che mancano (44) in una pavimentazione rettangolare di 12 x 8,5 composto da mattoni rettangolari e da mezzi mattoni che sono quadrati (sui bordi), in un contesto di buco su un muro di mattoni.

**La macchia (ral. 03.II.06 ; cat. 3-5 ; 03rmtii_it-6)**: Un reticolo a maglie quadrate di punti bianchi (6 x 11) è inserito in un reticolo a maglie quadrate di punti neri (7 x 12). I due reticoli sono parzialmente nascosti da una macchia che ne lascia vedere solo i punti sul bordo. Calcolare il numero di punti nascosti.

**L'orto della nonna (ral. 06.I.02 ; cat. 3-4 ; 06rmti_it-2)**: Trovare il numero di oggetti allineati parallelamente alla diagonale di un quadrato, in un reticolo dato tramite la disposizione di tre allineamenti vicini, dopo aver scoperto la trama della quadrettatura (8 x 8) e le relazioni tra i numeri degli allineamenti vicini.

Per il momento teniamo presente che le famiglie di problemi associati a un “compito” sono descritti da un codice, un titolo e una descrizione. Quest’ultimo dovrebbe permettere di percepire globalmente il tipo o la categoria d’azione che l’allievo dovrà compiere per risolvere il problema.

Ogni compito può essere associato a un ambito concettuale particolare, ma non c’è un legame di dipendenza stretto.

## Sistemi di classificazione: conclusione

In definitiva, le banche consultate su Internet presentano poche differenze in merito al modo di classificare i problemi. Le classificazioni secondo l’ambito o il livello sono quelle più frequenti. Non sembra che siano sfruttati i lavori precedenti relativi all’analisi di problemi.

Non è escluso che le facilitazioni offerte dall'indicizzazione dei motori di ricerca sembrino sufficienti. Cosa che secondo altre osservazioni è notoriamente un'illusione.

Inoltre i lavori teorici attuali sono perlopiù consacrati allo studio di modelli e di tecniche sofisticate (IRT multifattoriale, ad esempio) che evidentemente non vanno bene nel presente caso.

26 Lavori svolti all’IRDP per creare una banca di item offrono anch’essi un catalogo di compiti di base in matematica per la scuola.

Ci siamo pertanto appoggiati su lavori più vecchi dell'osservatorio francese EVAPM et dell'IRDP (istituto di ricerca svizzero) e su riflessioni svolte nell'ambito dell'ARMT.

Se i vari criteri di classificazione della la BP-ARMT sono in parte ridondanti (cosa che va verificata), permettono l'accesso secondo diversi tipi di utilizzazione. Questa ridondanza rende anche più agile la navigazione che è da preferire all'utilizzazione di un modulo di ricerca.

L'indice costituito sui termini del titolo (e fra breve del sunto, se non addirittura dell'enunciato) permette di ritrovare un problema particolare di cui ci si ricordi l'argomento.

Per le analisi e un'utilizzazione didattica, la classificazione per compito sembra importante (si veda l'articolo di François Jaquet in questo numero e in Houdement, 2015). Infine, le parole-chiave dell'ambito matematico permettono di trovare problemi che mettono in opera una nozione matematica particolare.

Utilizzando il formulario di ricerca, l'incrocio di diversi criteri permette di precisare i "compiti" secondo l'età degli allievi.

## A proposito della nozione di compito

> Cos'è allora il tempo? Se nessuno me lo chiede, lo so; se dovessi spiegarlo a chi me lo chiede, allora non lo so. (Sant'Agostino, Confessioni)

### Un concetto polisemico

Tutti capiscono che cosa sia un compito, ma ogni persona ne ha una propria idea: è ciò che si dice di fare? Ciò che si fa? Ciò che crediamo di dover fare? Si tratta di un concetto che fa parte di un campo concettuale che comprende i seguenti ingredienti: consegna, obiettivo (cognitivo, pedagogico), approccio, procedura, scopo, attività, competenze, capacità, ... Talvolta sinonimo di problema (è così che talvolta possiamo trovare nella banca famiglia di compiti invece di famiglia di problemi). Brousseau (2004) mostra che a seconda del contesto la nozione di compito assume sfumature diverse e reputa che il compito sia un progetto. Mostra inoltre gli inconvenienti dell'uso sconsiderato di tale termine.

Il dizionario (Petit Robert) ammette le due accezioni vicine ma che comunque si situano fra ciò che c'è da fare (consegna) e ciò che si fa (l'attività).

### Riferimento al compito nella teoria dell'attività

Nell'ambito della teoria dell'attività Leontiev (1976 citato da Leplat & Hoc, 1983) dà una definizione che adotteremo insieme ai concetti associati: un compito è un obiettivo dato in condizioni determinate.

Il compito si riferisce a un'attività sia materiale ~~e~~ sia intellettuale. Riguarda un periodo composto da diverse tappe più corte nel corso delle quali si svolgono dei processi relativamente ben identificabili, detti azioni. Le azioni stesse si scompongono in operazioni più difficili da inquadrare.

Un'azione può essere associata a un (sotto-)compito che colui o coloro che svolgono l'attività si danno.

L'enunciato di un obiettivo (il compito), in particolare nel mondo del lavoro, può essere accompagnato esplicitamente o implicitamente da una via da seguire.

Il medesimo schema a tre livelli (attività, azione, operazione) può essere utilizzato per descrivere sia attività individuali e sia quelle collettive.

Ci permette di designare le diverse tappe dell'analisi del compito con un termine appropriato, le azioni. In questo modello, le operazioni possono essere costituite da piccoli processi interiorizzati quasi istintivi quando bisogna eseguire calcoli o costruzioni semplici.

## La classificazione per "compiti" della BP-ARMT

È a proposito che viene proposto il termine "compito" tra virgolette nell'espressione classificazione per "compiti"

In un problema del RMT, secondo la definizione adottata, ci sono in generale due compiti esplicitati: risolvere il problema che si particolarizza con una consegna nell'ambito dei dati e le condizioni del RMT, e descrivere o spiegare la procedura seguita. Un compito implicito collettivo riguarda l'organizzazione dei gruppi di lavoro.

Se si resta su questo livello generale, la classificazione è troppo grossolana. Bisogna trovare criteri più selettivi.

Peraltro, caratterizzare un problema tramite un *compito* globale sufficientemente preciso è un esercizio difficile, non sempre possibile. È per questo che si considerano sovente le azioni, o *operazioni* principali descritte nell'analisi a priori.

Nell'ambito della risoluzione di problemi di matematica, non sembra necessario distinguere il compito prescritto dal compito effettivo come può invece essere fatto nel caso dell'analisi dell'attività. Tuttavia, i dati possono indurre due versioni differenti di azioni condotte secondo la procedura di coloro che risolvono il problema: in quello che gli uni vedranno un conteggio di insalate, altri possono vedere un problema di equazioni.

Poiché diverse strategie di risoluzione sono sempre possibili, alcune previste a altre scoperte con l'analisi a posteriori, bisogna distinguere le azioni dell'attività ipotizzata e quelle dell'attività effettiva.

Si noti che l'analisi a priori non esplicita sempre certe azioni correnti quali leggere i dati, tentare, ecc. Invece non dovrebbero essere omesse nella descrizione dei compiti all'interno della BP-ARMT.

In definitiva, le famiglie dei problemi sono caratterizzate da un mix comprendente compiti in senso stretto, azioni e qualche altra caratteristica che può dipendere da azioni implicite o da operazioni.

## Esempi di "compiti"

*LAC: Completare frasi aperte*: è un compito in senso stretto che appare formulato in diversi modi nelle consegne, per esempio: "Trovate i numeri che si nascondono sotto i disegni" (04.I.13).

*ADD: Cercare una somma o una differenza di numeri*: è proprio un compito, ma mai proposto in questa forma in un problema del rally. Nel caso dei problemi del RMT, questo compito descrive un'azione. Questo criterio è poco selettivo. Appare in numerosi problemi (in più del 10%).

*MEQ: mettere in equazione*: nell'ambito dei problesmi del RMT quest'espressione è piuttosto un'azione[27]. Tuttavia è raro che i problemi che gli "esperti" risolverebbero ponendo e poi risolvendo un'equazione, siano risolti in tal modo dagli allievi che partecipano al rally (salvo occasionalmente quelli delle categorie da 8 a 10). Il titolo adottato si presta dunque a creare confusione. È piuttosto la descrizione che indica quale sia il vero compito.

Trovare una denominazione migliore non è cosa semplice. Il gruppo *Algebra* aveva proposto la formulazione "*AA – Passare dall'aritmetica all'algebra"* che sembra riguardare lo stesso tipo di problemi[28]. In questo caso, il titolo evoca piuttosto un uso didattico del problema.

Il "compito" *DSP - Individuare dati superflui* sarebbe un'operazione così come *OBS – Osservare delle relazioni.*

Il "compito" *QUA - Lavorare su una quadrettatura* dà un'indicazione sul contesto del compito.

## Programma per il futuro. Mettere in relazione un codice frazionario e un codice decimale

Resta ancora carne sul fuoco. Innanzitutto si tratta di portare a termine l'acquisizione di tutte le informazioni disponibili. Si tratta di un'attività di routine, ma che richiede tempo. Poi bisognerà portare a termine l'indicizzazione per concetti e la redazione dei sunti. Quest'ultima operazione è cruciale per la fase ulteriore di classificazione secondo i "compiti". In effetti, è nel passare in rivista i problemi e nel redigere i sunti che è più semplice individuare i "compiti" e passare alla loro descrizione.

Tra le famiglie da esaminare si trovano dapprima quelle poco "popolose" (*CDF – Mettere in relazione un codice frazionario e un codice decimale* con un solo problema) o quelle troppo abbondanti (*ADD – Cercare una somma o una differenza di numeri* con 158 problemi). Sono da rivedere in funzione della frequenza della loro utilizzazione, del loro controllo incrociato con le nozioni e i problemi relativi.

Sono anche da riprendere in esame le famiglie il cui titolo si presta a confusioni. È il caso delle famiglie MEQ (il titolo fa pensare a un'azione che non è sempre adatta agli allievi, a seconda del loro livello) e AA (il titolo evoca un'intenzione didattica) ricordata in precedenza.

Creare famiglie più specifiche fa parte delle piste da esplorare. In particolare per classificare i problemi che fanno parte di più sotto-famiglie (ad esempio in ADD e in LAC) sarebbe possibile creare una nuova sotto-famiglia che contenga entrambe LAC/ADD.

Per creare famiglie che si adattano bene a problemi del tipo "In palestra" (14.II.12) (dove si tratta di fare una scelta fra due modalità di pagamento), si potrebbe riferirsi alla struttura matematica soggiacente, cioè a un confronto di funzioni affini, o meglio, a un confronto di offerte.

Problemi del tipo "In cerca di funghi" (19.I.15), dove si tratta di determinare la quantità di funghi che hanno colto quattro bambini, conoscendo il totale e informazioni parziali sulla raccolta di ciascuno, possono essere risolti tramite un sistema di equazioni (5 equazioni e 5 incognite). Tuttavia gli allievi risolveranno quasi certamente con diversi tentativi e i più esperti cercheranno delle scorciatoie. Questi problemi devono emigrare nella sotto-famiglia *LO/NU – Effettuare deduzioni con vincoli numerici*.

Che cosa dire sull'uso di tale classificazione? Le prime osservazioni dell'utilizzazione della BP-ARMT mostrano che le richieste per parole-chiave (titolo o concetto) sono utilizzate di più (influsso Google?) delle ricerche per

27 Mentre può essere un compito nell'ambito di problemi classici di scuola secondaria.

28 Attualmente sono pochi i problemi che appartengono alle due famiglie. È il caso del problema "Modellini" (26.I.04).

navigazione di cui la ricerca per "compiti" fa parte. Di conseguenza, la classificazione per "compiti" alla quale accordiamo una grande importanza, non ha ancora mostrato la sua utilità.

Lo diventerà forse quando si tratterà di pensare a scenari come i percorsi descritti da François Jaquet in questo numero della Gazzetta. L'uso futuro mostrerà anche quale sia la ridondanza (o l'articolazione) tra l'informazione fornita dai concetti dell'ambito matematico (vocabolario non completamente controllato) e la lista dei compiti (fissati in numero limitato).

Sarà necessario prendere in considerazione anche l'interesse dimostrato dai diversi tipi di pubblico (creatori di problemi, utilizzatori).

Restano da esaminare altre questioni nella suddivisione del lavoro dei "descrittori per la classificazione" tra i gruppi di lavoro, per esempio *Algebra* e *Funzioni* per ciò che riguarda le equazioni o *Geometria piana* e *Grandezze e misure* per ciò che riguarda la determinazione di aree.

Non è impossibile che le classificazioni possano essere dedotte automaticamente a partire da informazioni provenienti dall'analisi del compito, del sunto e dell'enunciato.

## Per concludere: interesse e utilità di classificare i problemi del RMT

In questo articolo abbiamo visto che la banca di problemi dell'ARMT fa parte di un insieme importante di risorse di problemi di tutti i tipi e di tutte le provenienze disponibili su Internet. La nostra banca di problemi possiede la particolarità di proporre le analisi di compiti.

Questa caratteristica ha portato a sviluppare una classificazione dei problemi per "compiti", termine che si riferisce a compiti propriamente detti, ad azioni e operazioni che possono intervenire nell'attività di risoluzione.

La banca è basata principalmente sulle attività didattiche trasmesse dai gruppi di lavoro e di riflessione dell'ARMT. Sono peraltro stati consultati studi relativi e tipologie e tassonomie legate alla risoluzione di problemi di matematica, in particolare quelli sviluppati da EVAPM e dall'IRDP (compreso il gruppo di lavoro HARMOS).

Questi progetti, classici, sulla valutazione delle competenze o degli obiettivi offrono alcuni punti importanti di riferimento con la differenza che, nel caso del rally, non c'è una valutazione che si riferisca all'attività scolastica. I problemi non sono proposti al fine di mettere in evidenza il raggiungimento (o la ricerca) di un obiettivo. Vogliono invece dare la possibilità di fare matematica e questo porta come conseguenza il fatto che il contesto rende più difficile la loro classificazione. Le azioni e i concetti matematici da mettere in opera non figurano direttamente nell'enunciato e nella consegna.

Nel suo stato attuale, la banca può essere uno strumento di lavoro per i creatori dei problemi. Sembra anche possibile realizzare percorsi didattici ragionati per l'apprendimento di una famiglia di concetti. Malgrado tutto, molto resta ancora da fare, soprattutto per quanto riguarda la definizione e la descrizione dei compiti.

Tuttavia, questo lavoro un po' tecnico d'ingegneria didattica non deve far dimenticare che l'obiettivo del rally non è strettamente scolastico.

L'attività di classificazione dei problemi è verosimilmente meno interessante della creazione di nuovi problemi. L'osservazione dell'ingegnosità degli allievi nel risolvere i problemi, l'identificazione degli ostacoli che incontrano e l'analisi delle percezioni giuste o sbagliate di concetti matematici sono più attraenti.

Per contro, possiamo pensare che lo sforzo richiesto per il lavoro di classificazione possa essere ricompensato dalla sua utilità per proporre delle varianti. Detto ciò, i gruppi di lavoro hanno cominciato una riflessione critica relativa alla classificazione adottata. I gruppi verificano che le categorie utilizzate siano ben corrispondenti ai problemi che descrivono, che le descrizioni siano pertinenti e i titoli appropriati.

È augurabile che tale apporto possa continuare e che ci sia una co-costruzione della banca attraverso il "dialogo" tra problemi, descrizione di "compiti", feedback degli utenti e statistiche di utilizzo.

## Bibliografia

Bodin, A. & Couturier, F. (1993). Développement d'une base de données d'évaluation en mathématiques : EVAPMIB. *Pédagogies*, N° 5/93.

Bodin, A. & Couturier, F. (2004). *Développement d'une base de données d'évaluation en mathématiques : EVAPMIB.* Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM), Université de FRANCHE COMTÉ (reprise de la publication de 1993).

Bodin, A. (2009). *Comment classer les questions de mathématiques ?* IREM de Franche-Comté, Document de travail.

Bodin, A., Hosson (de), C., Décamp, N., Grapin, N. & Vrignaud, P. (2016). *Comparaison des évaluations PISA et TIMSS. Acquis des élèves : comprendre les évaluations internationales* (volume 1). Conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco).

Bowron, M. & Hall, L. M., (2001). *20,000 problems under the sea : mathematical treasure on the web*. MathPro Press University of Missouri-Rolla. Department of Mathematics and Statistics.

Brousseau, G. (2004). *Tâche, situation, activité*[29].

Charnay, R. (2003). L'analyse a priori, un outil pour l'enseignant. *Math-Ecole*, 209, décembre 2003, 14-26 (paru aussi dans le 3e volume des actes des rencontres sur le RMT avec une traduction en italien).

Clément, M. & Criton, M. (dir.) (2006). *Panorama 2006 des compétitions mathématiques*. PanoraMath 4. Paris : POLE – CIJM.

DeCarlo, M. (2003). S*cience and Technology Sources on the Internet : Mathematics Education Resources on the Internet.* Syracuse University Mathematics Library (http://www.istl.org/03-summer/internet.html).

Drechsler, M. (2007). Quand les enseignants indexent la toile. *Médialog*, 63, septembre 2007, 4-8.

Gras R. (1977). *Contributions à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques.* Thèse-0université de RENNES.

Gras, R. (2002). *Taxonomie d'objectifs cognitifs*. Observatoire EVAPM.

Henry, M., Almouloud, S.A. & Mendonça Campos, T.M. (2006). Analyses de situations didactiques[30]. *Educ. Mat. Pesqui.*, São Paulo, 8(1), 45-65.

Houdement, C. (2015). Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes. *La Gazette de Transalpie*, no 4.

Kassam, S. (2015). *Utilisation du site Internet des moyens de Mathématiques 9-10-11 : Enquête auprès des enseignants – principaux résultats*. Neuchâtel : IRDP, document de travail 15.1001.

Leontiev, A. (1976). *Le développement du psychisme*. Paris : Editions sociales.

Leplat, J. & Hoc, J.M. (1983). Tâche et activité dans l'analyse des situations. *Cahiers de Psychologie Cognitive*, 3(1), 49-63.

Margot, A. (1984). *Création d'une banque d'items de mathématique : du traitement documentaire des items à l'informatisation du système.* Neuchâtel : IRDP (IRDP/D+M 84.09).

Pochon, L.-O. (2003). Quelques repères historiques et culturels concernant les NTIC et leur usage dans l'éducation. *Cahiers de psychologie n°39*. Université de Neuchâtel, Institut de psychologie et éducation.

Pochon, L.-O. (2007). *Vers un modèle formel de classification de problèmes mathématiques et son usage dans la définition de compétences mathématiques.* Neuchâtel : IRDP. (Document de travail 07.1002).

Pochon L.-O. & Vermot, B. (2010). A *propos de l'usage actuel et futur des supports informatisés pour l'enseignement des mathématiques aux degrés 7-8-9*. Neuchâtel : IRDP. Document de travail. (mis à disposition dans le Bulletin de la SENS, n° 49 : http://www.sens-neuchatel.ch/bulletin/no49/art2-49-Pochon-Vermot.pdf)

Rheingold, H. (1993). *The Virtual Community. Homesteading on the Electronic Frontier*. Reading, Mass : Addison-Wesley.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire.* Berne : Peter Lang.

29 http://www.ssrdm.ch/SSRDM/actualite/materiels/tachebrousseau.pdf (archivé par Google)

30 Adattamento di una comunicazione al convegno internazionale del RMT di Torre delle Stelle 2002: Il ruolo dell'analisi a priori nell'elaborazione di un problema del rally), Actes bilingues (Français-Italien) des journées d'études sur le RMT de Torre delle Stelle 2002, A.R.M.T. Grugnetti, L. et Jaquet F. ed., Università di Parma e di Cagliari, ottobre 2003, p. 237-256.

# ELABORAZIONE DI UN PERCORSO DI APPRENDIMENTO A PARTIRE DA PROBLEMI DELLA BANCA

**François Jaquet**

## Sunto

La presentazione che segue è in qualche maniera una visita guidata della Banca di problemi rivolta a un insegnante che prova a organizzare un percorso di apprendimento per i propri allievi a proposito del rettangolo, della sua area e di tutte le nozioni che ne discendono.
Vi si troverà qualche considerazione introduttiva sulla risoluzione di problemi, una modalità di entrata nella banca, tramite gli "ambiti" e le "famiglie di compiti", l'esame di qualcuna delle sue schede e le loro diverse rubriche.
Lo scopo della visita è quello di percepire, da un lato, qualche potenzialità dello strumento "Banca di problemi" per l'insegnante che cerca di favorite la costruzione di conoscenze per i suoi allievi e, d'altra parte, la sua complessità.
La visita avrà inizio con la presentazione della banca di problemi, proseguirà con la "navigazione" determinata dall'insegnante che potrà entrare con gli ambiti e le famiglie, poi con l'esame di sette schede. Terminerà con qualche considerazione generale.

## 1. Introduzione

### 1.1. Il visitatore

Quando organizza il suo programma all'inizio dell'anno scolastico, quando si rende conto che i suoi allievi non padroneggiano ancora determinate conoscenze, quando scopre un errore frequente o un ostacolo particolare, l'insegnante sceglie un certo percorso di apprendimento – o di recupero – da proporre alla propria classe. Ha a disposizione numerose opzioni: capitoli del libro di testo, programmi di recupero con spiegazioni specifiche, liste di esercizi complementari, …
Laddove metta in dubbio l'efficacia di un percorso convenzionale che va dalla "lezione" agli "esercizi", eventualmente ripetuti fino alla saturazione, è possibile che l'insegnante vada alla ricerca di altre modalità di apprendimento.
Sul Web, troverà numerosi "metodi" che si dicono efficaci secondo coloro che li propongono, serie di problemi organizzati tema per tema, con le soluzioni; software di apprendimento …
Se però il nostro visitatore non cerca dei metodi su come l'insegnante dovrebbe "insegnare matematica", ma piuttosto proposte di attività per i suoi allievi, con le fasi dove gli allievi stessi si pongono delle domande, fanno tentativi, scoperte parziali, scambi… che permettono loro di progredire nell'elaborazione e la padronanza progressiva di un sapere, la Banca di problemi del RMT può allora proporgli qualche suggerimento per le sue importanti scelte.

#### 1.2. Il tema della visita: a proposito di "rettangolo", "area" …

Il visitatore da noi immaginato per questa visita guidata è un insegnante piuttosto particolare (nel seguito lo chiameremo "**I**") che si pone delle domande, interessato dalla "risoluzione di problemi" – citata abbondantemente nei programmi nazionali di matematica – alla ricerca di attività dove i suoi allievi sono protagonisti della costruzione delle loro conoscenze.
Non è un "matematico", la sua formazione è quella di insegnante di scuola secondaria che ha diverse classi o quella di un insegnante di scuola primaria.

**I**: "Rettangolo e area, mi interessa… per un percorso di apprendimento in matematica con una nuova classe di categoria 6 (11-12 anni). È nel programma!!".
In effetti, in tutti i nostri paesi di Transalpino, la nozione figura nei programmo ufficiali. Eccone qualche esempio:
- *Calcola l'**area** del quadrato e del **rettangolo** (misure intere), determina l'**area** di un parallelogramma, di un **triangolo rettangolo** a partire **dall'area del rettangolo** (misure intere)*[1]
- ***Le aree**: nell'intero ciclo conviene scegliere procedure adatte per confrontare le aree di due superfici. ... Si possono allora costruire e utilizzare le formule per calcolare l'area di un quadrato, di un rettangolo, poi in "sesta" (prima secondaria di I grado), **calcolare l'area di un triangolo rettangolo**, di un triangolo qualunque la cui altezza è nota, di un cerchio.*[2]
- *Poi, "descrivere", "riprodurre", "riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse", confrontare e misurare angoli", "concetti di parallelismo, perpendicolarità,..", "riprodurre in scala (p.e. carta a quadretti)",*

[1] « ATTENTES FONDAMENTALES » en fin du cycle (cat 5 -6) PER (MSN 24)
[2] B.O. 26.11.2015

*"determinare il perimetro"* ***… Determinare l'area di rettangoli, triangoli e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule***[3]**.**

### 1.3. Qualche riflessione preliminare del visitatore a proposito di "rettangolo", "area" …

**I**: "Che cosa sanno i miei allievi sull'argomento?"
- Il rettangolo ha un lato più lungo dell'altro, paralleli ai bordi del foglio, della porta, del tavolo, del campo di calcio…?
- è una figura tra le altre: poligono, quadrilatero, parallelogramma, quadrato,
- si parla di lunghezza, larghezza, perimetro, area, poi di parallele, perpendicolari, angolo retto, …
- bisogna fare addizioni, moltiplicazioni, convertire unità di misura (il cm, il $cm^2$),

**I**: "E a lungo termine quali sono i concetti in divenire o in costruzione?"
- Isometrie, proprietà delle operazioni (commutatività, modello di moltiplicazione, distributività), equivalenza, proporzionalità, numero razionale, numero irrazionale, numero reale, approssimazione…"

**I**: "Come affronterò l'argomento quest'anno visto che l'anno scorso i miei allievi ricordavano la formula dell'area del rettangolo ma la padroneggiavano solo nei casi di applicazione diretta e nelle situazioni tradizionali?"
La *Risoluzione di problemi* invocata nei testi ufficiali potrebbe essere la nuova strada?
Proviamo ad andare a vedere nella *Banca di problemi del RMT* di cui ho sentito parlare".

## 2. L'entrata nella Banca

### 2.1. Dove trovarla?

Per una prima visita, si può entrare nella banca tramite il sito dell'ARMT: http://www.armtint.org
e con la rubrica Banca di problemi, in basso a destra, dove è sufficiente andare ad Accedi per veder apparire la presentazione:

> Benvenuti. Avete appena passato la soglia della "Banca di problemi del Rally matematico transalpino" e vi aspettate ovviamente di trovare dei problemi e, in effetti, ne troverete più di un migliaio.
> Prima di andare oltre forse vi chiedete:
> - Di quale tipo di problemi si tratta?
> - Chi sono i destinatari della banca e come sono organizzati i problemi?
> - Quali sono le concezioni dell'apprendimento soggiacenti?
> - Qual è il ruolo dell'insegnante nell'ambito della risoluzione di problemi?
> - Come contribuire?

(Nota per la lettura di questo testo: nell'accedere al sito con i link predisposti più sopra, il lettore vedrà apparire una pagina intera della banca. Il testo di questo articolo ne riproduce solo qualche parte essenziale "in un riquadro").

Chi naviga su Internet e non si pone le domande indicate più sopra, passerà a un altro sito mentre il nostro visitatore vi si soffermerà. Ne avrà almeno per cinque o dieci minuti.
Anche il lettore può interessarsene e vedrà che i cinque paragrafi (e pagine) di questa introduzione situano in maniera chiara e veritiera lo strumento "banca di problemi del RMT": i problemi proposti non sono "esercizi" di applicazione e non ci si interessa solamente alla risposta corretta. Vedrà anche che la responsabilità della procedura di risoluzione è lasciata all'allievo e che il ruolo dell'insegnante non è quello di "insegnare" o di "presentare" la lezione, bensì di stimolare un dibattito tra allievi, che seguirà la risoluzione o i tentativi di risoluzione. Vedrà infine, in maniera sintetica, che:
- La banca di problemi del RMT non offre "modelli già confezionati", ma tutto è "fatto su misura".
- In situazione di risoluzione di problemi bisogna adattarsi al "terreno" degli allievi, il "programma" non è la priorità.
- L'insegnamento tramite la risoluzione di problemi è complesso, delicato e più difficile rispetto a "fare la lezione" o "dare degli esercizi". L'insegnante non ha più il ruolo unico di trasmettitore del sapere, ma quello di regista della costruzione per il tramite degli allievi.

### 2.2. Navigazione

Dopo l'introduzione, la porta si apre con Accesso alla banca che troviamo in basso nella colonna di sinistra di ciascuna delle pagine precedenti, poi, dopo aver scelto la lingua "Italiano" o "Francese" su Navigare o Naviguer: (lasciando da parte per il momento la rubrica « Demander » o «Domandare») si presentano sei entrate
- Ambiti: i grandi capitoli dei programmi o dei libri di testo
- Famiglie: gli ambiti, suddivisi in famiglie di compiti

[3] Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana 05.02.2013. Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria *Spazio e figure*

- Concetti: una ricerca tramite nozioni, conoscenze, saperi… o anche “parole-chiavi” che chiamiamo attualmente “concetti” in attesa di trovare una denominazione più universale
- Rally: la lista delle prove dal 2° al 27° RMT, utile soprattutto per coloro che hanno partecipato alle edizioni precedenti e desiderano ritrovare rapidamente i problemi di una prova particolare
- Vocabolario: una ricerca secondo i termini dei titoli dei problemi, in ordine alfabetico, utile soprattutto per coloro che si ricordano di certi problemi
- Categorie: una ricerca di problemi secondo le categorie alle quali erano stati attribuiti, da 3 a 10, corrispondenti alle età degli allievi, dagli 8-9 anni ai 15-16 anni.

### 2.3. Entrata tramite le famiglie

Per il nostro visitatore che è alla ricerca di idee di problemi in funzione dei bisogni dei suoi allievi, è l’entrata per Famiglie che gli consente di procedere con efficacia. Vi trova una lista che si sussegue su due pagine e il suo interesse per il *rettangolo* e *l’area* lo inducono a leggere le famiglie degli ambiti GM e GP, di cui ecco qualche rubrica.
In GM, “Grandezze e misure”, per esempio, si trovano le famiglie LA e RD con alcune delle loro “sotto-famiglie”:

LA – Utilizzare misure di lunghezze e aree
    LA/UA - Gestire unità d’area
    …
RD - Ricercare o utilizzare dimensioni
    RD/AP - Determinare aree e/o perimetri
    RD/CP - Confrontare aree e/o perimetri
    RD/VOL- Determinare aree e/o perimetri e/o volumi
    …

Poi in GP “Geometria piana”, le famiglie CA, IF, QUA e alcune delle loro sotto-famiglie.

CA - Confrontare aree
CA/D - Confrontare aree con il ritaglio
CA/P - Confrontare aree su una quadrettatura
…
IF - Identificare figure
    IF/INV - Fare un inventario
    IF/RC - Riconoscere e costruire figure elementari
QUA-Lavorare su una quadrettatura
    QUA/GQ - Gestire poligoni su carta quadrettata
    …

Nel proseguire la visita, si osserverà che non sono da memorizzare i codici che designano ambiti, famiglia e sotto-famiglie, necessari alla classificazione. Sono le descrizioni succinte dei problemi che appaiono quando “si apre” una famiglia che saranno determinanti per la scelta delle schede.
Per esempio, nella famiglia IF/RC - IF/RC - Riconoscere e costruire figure elementari

…

Il tavolo da spostare **(ral.** 16.F.24 **; cat.** 4-5 **;** 16rmtf_it-24): Su una quadrettatura, determinare i vertici mancanti di rettangoli nei quali alcuni vertici sono dati, a partire da un modello sistemato in una posizione diversa

…

Il quadrato di Lea **(ral.** 17.II.11 **; cat.** 5-7 **;** 17rmtii_it-11): A partire da un puzzle di 10 pezzi disposti in forma di parallelogramma (su una trama di cinque quadrati allineati, ricostruire un rombo, poi un trapezio rettangolo con 8 di quei pezzi e infine un quadrato con i 10 pezzi.

I dieci punti **(ral.** 18.I.08 **; cat.** 5-7 **;** 18rmti_it-8): A partire da dieci punti su una griglia quadrettata, ricerca di gruppi di quattro punti che formano dei quadrilateri aventi le proprietà caratteristiche del rettangolo.

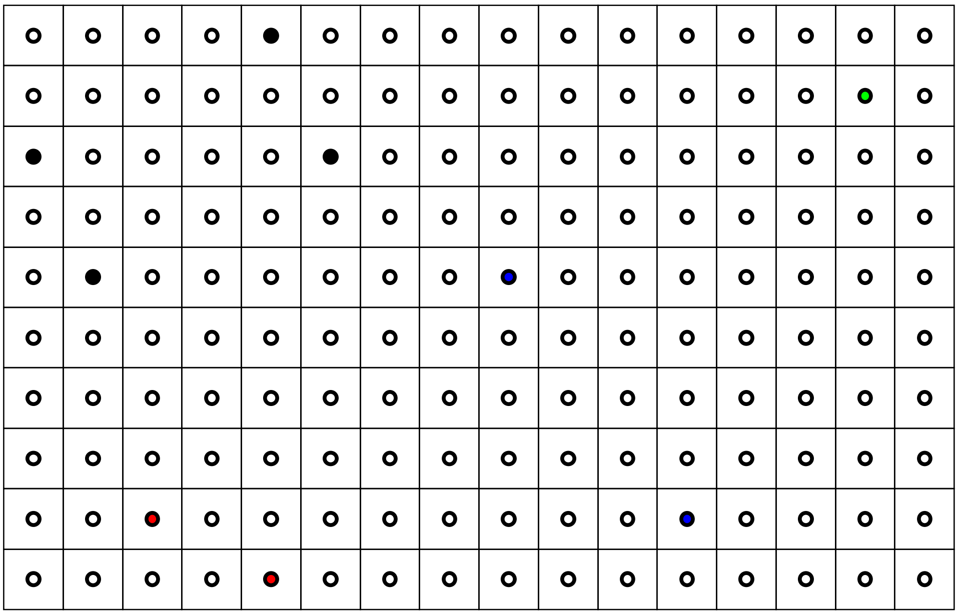
…

## 3. le schede dei problemi

### 3.1. Il tavolo da spostare

La visita comincia con la prima delle schede del riquadro riportato più sopra della sotto-famiglia IF/RC Riconoscere e costruire figure elementari che troviamo anche nelle famiglia ANG (Utilizzare angoli e/o misure di angoli e QUA (Lavorare su una quadrettatura. È il suo sunto che ha attirato l’occhio del visitatore:

Il tavolo da spostare (cat. 4, 5, 6)



Questo disegno rappresenta il pavimento della cucina di Giulia con un cerchietto al centro di ciascuna piastrella quadrata.

Giulia osserva una cosa sorprendente: in certe posizioni, i quattro piedi del tavolo di cucina ricoprono esattamente quattro cerchietti del pavimento.

Per cominciare Giulia sistema il tavolo in una certa posizione, con i quattro piedi che ricoprono esattamente i quattro cerchietti segnati in nero sul disegno (in alto a sinistra).

Poi lo sposta in modo che i quattro piedi del tavolo poggino su altri quattro cerchietti. Due di questi cerchietti sono segnati in rosso sul disegno.

**Segnate in rosso gli altri due cerchietti ricoperti dagli altri due piedi del tavolo in questa seconda posizione.**

Giulia sposta ancora il tavolo …

(L'enunciato completo richiede ancora di disegnare il tavolo in due altre posizioni: con due piedi sui cerchietti blu, poi con un piede sul cerchio verde in alto a destra).

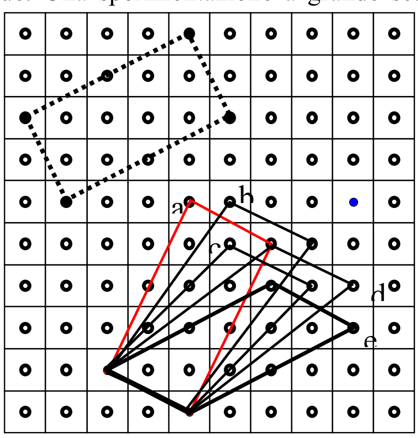
Qui di seguito qualche commento del visitatore dopo la lettura dell'enunciato e la presa di visione dei risultati.

**I**: "C'è molto da leggere e l'impaginazione non è delle migliori ma…
Penso che non ci saranno difficoltà. Concordo con l'analisi a priori.
I miei allievi sanno bene che un tavolo è rettangolare e hanno già avuto modo di riconoscere un rettangolo, anche disposto in questo modo".

Le rubriche ***Risultati*** e ***Procedure, ostacoli ed errori rilevati*** mostrano invece una confusione tra rettangolo e parallelogramma.

Il problema era stato proposto alle classi della finale internazionale di Briga, nel 2008: le 12 classi "migliori" vincitrici delle finali regionali di categoria 4 dell'anno precedente. Quasi tutte avevano disegnato parallelogrammi non rettangoli, come mostra la figura che segue. Una sperimentazione a grande scala ha confermato questo ostacolo.

Disposizione dei "tavoli" rilevate negli elaborati degli allievi; quelle in rosso sono presenti solo in una minoranza di casi.



**I**: “Oh là là!! Le medie dei punteggi attribuiti non sono certamente alte. Non posso credere che gli allievi disegnino dei tavoli a forma di parallelogrammi non rettangoli! Verificherò con i miei allievi: per gruppi di due, per 25-30 minuti e poi faremo una messa in comune”.

Poi il nostro visitatore ritorna sulla scheda, rilegge procedure, ostacoli ed errori rilevati e si interessa anche alla rubrica successiva:

***Indicazioni didattiche***

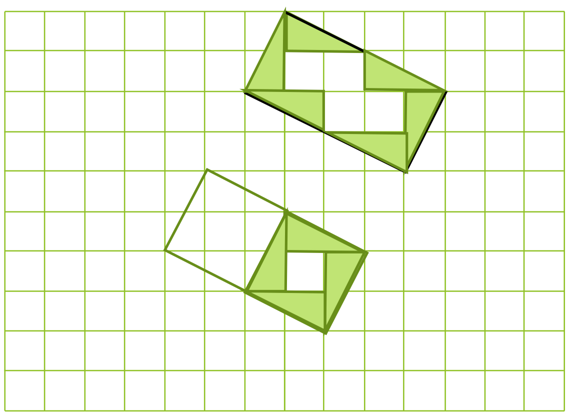
…

Il problema si presta a numerosi altri sviluppi:
- Constatare che in una rotazione di 90 gradi i lati del rettangolo seguono sempre le diagonali di rettangoli della quadrettatura di dimensioni (1 x 2) e che ciò consente di verificare che l’angolo è retto se si immagina una rotazione di un quarto di giro.
- Proporre agli allievi un rettangolo avente le stesse dimensioni di quelle del tavolo, ma con i vertici sulle intersezioni della quadrettatura invece che al centro dei quadratini e chiedere di calcolare la sua area in quadratini della quadrettatura: 10 (cosa che può farsi con conteggio dei 4 quadratini interi e di 6 ricostituiti). Poi far scomporre il rettangolo in due quadrati uguali giustapposti, la cui area è 5 in quadratini della quadrettatura. Infine, chiedere quanto misura il lato di questo quadrato (in lati dei quadratini).

Aiutandosi con la calcolatrice per arrivare progressivamente ad approssimazioni successive di 2; 2,1; 2,2; 2,3; 2,25; ... Questo sviluppo permette di considerare un “nuovo” numero che non si può determinare con misure tramite il righello ma al quale ci si può avvicinare con elevamento al quadrato e di cui la calcolatrice dà una buona approssimazione con il tasto √.

…

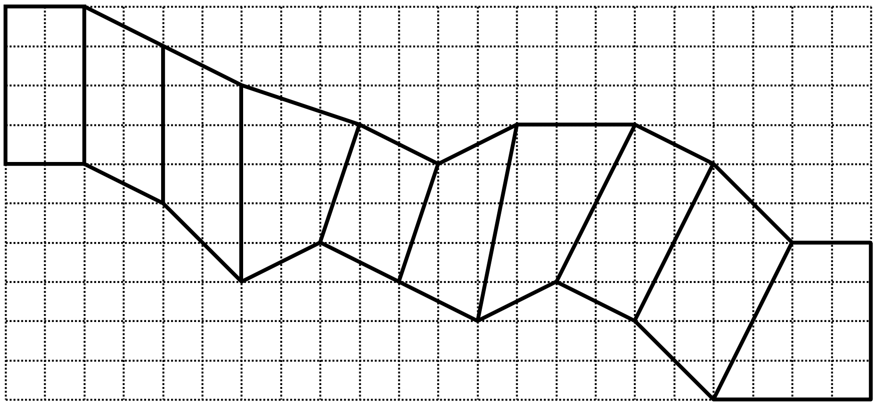
**I.** Buona idea: dedicherò una o due lezioni a costruzioni, rotazioni e simmetrie di rettangoli per rinforzare la consapevolezza che gli angoli sono retti, ecc.
E seguirò le proposte sull’area del tavolo. Spero che i miei allievi riusciranno a convincersi che tale area misura esattamente 10 quadretti della quadrettatura, anche se i lati del rettangolo non sono espressi in numeri interi, con l’apporto di figure come le seguenti:



## 3.2. Sul muro della scuola (I)

Nella scheda de *Il tavolo da spostare*, la rubrica ***Per andare più lontano*** propone altri tre problemi; *I dieci punti, Sul muro della* (I), *Sul muro della scuola* (II).
Soffermiamoci sul secondo e interessiamoci all’errore più frequente e alle indicazioni didattiche.

Sul muro della scuola (I) (cat. 4, 5)
Per decorare un muro della scuola, alcuni alunni hanno preparato un modello formato da 10 quadrilateri, su carta a quadretti, come nella figura che vedete qui sotto.
Luca dice: "Per colorarlo, potremmo usare pittura rossa per i rettangoli, pittura verde per i parallelogrammi non rettangoli e pittura gialla per tutti gli altri quadrilateri."



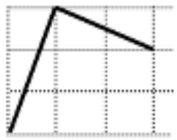
**Colorate il modello come ha proposto Luca.**

Nella rubrica ***Procedure, ostacoli et errori rilevati*** si legge, fra l'altro:

L'errore più frequente, per circa la metà degli elaborati esaminati, è, in effetti, quello di considerare il quinto quadrilatero dalla sinistra come un rettangolo, senza rendersi conto che la sua "larghezza" è la diagonale di un rettangolo (1 × 2) e la sua "lunghezza" è la diagonale di un rettangolo (1 × 3)

Questo angolo è retto (angoli complementari nella quadrettatura)

Questo non può esserlo

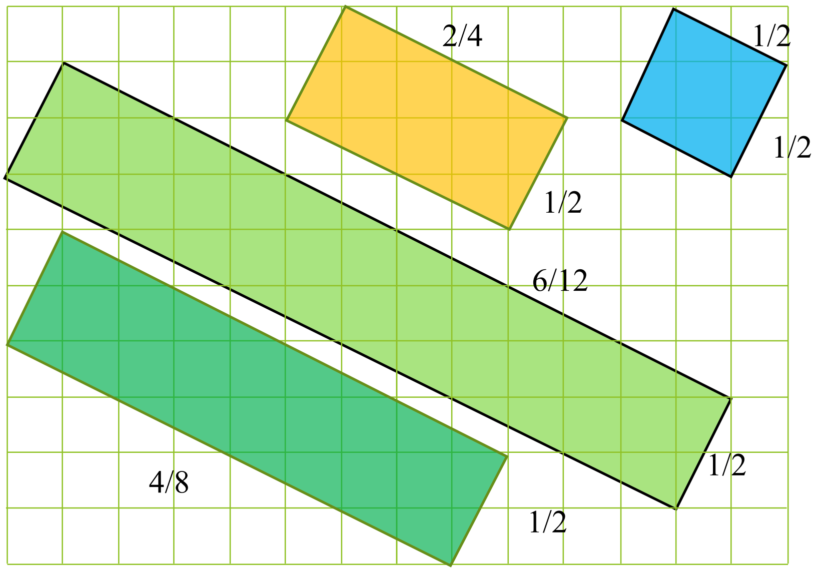


poi, nelle ***Indicazioni didattiche:***

…
L'ottavo quadrilatero è interessante da questo punto di vista in quanto i suoi lati sono non solo diagonali di rettangoli (1 x 2) della quadrettatura, ma anche di rettangoli (2 x 4), poi, prolungandoli, di rettangoli (3 x 6), poi di (4 x 8) … con un'apertura sull'uguaglianza dei rapporti, come approccio alla proporzionalità in una situazione geometrica.

che provocano le reazioni del nostro visitatore:

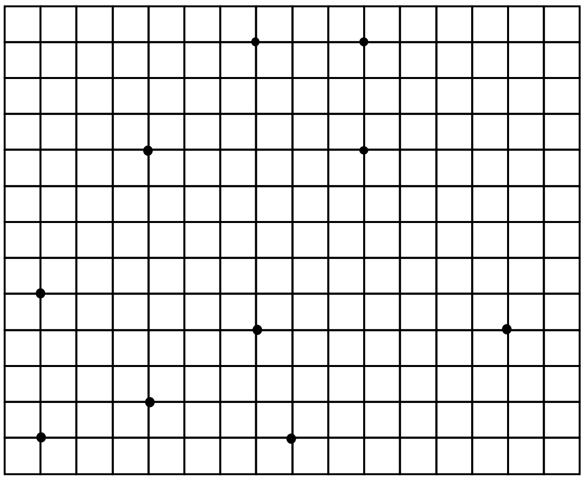
**I:** "Dopo il problema precedente i miei allievi di categoria 6 non dovrebbero più avere troppe difficoltà, come indicano i risultati, visto che in categoria 5 c'è già il 52% di risposte completamente corrette. Verificherò comunque il quinto quadrilatero del "muro della scuola".
Preparerò una scheda per esplorare la figura che segue: calcolare l'area del quadrato blu il cui lato è la diagonale di un rettangolo di dimensioni 1 e 2, poi quella del rettangolo giallo avente la stessa larghezza del quadrato ma la cui lunghezza è la diagonale di un rettangolo di dimensioni 2 e 4, il doppio di quella della larghezza, …":




**I:** "E potremo ricominciare a partire dalle diagonali di rettangoli differenti del tipo (1 × 2), (2 × 3), ( 1 × 4) allungati, disposti perpendicolarmente …
A proposito, questo mi ricorda vagamente le lezioni di geometria analitica al liceo, quando il professore ci parlava di vettori paralleli a una retta o di vettore "normale"… . Mi sembra di percepire delle analogie! Se avessi fatto quest'attività nella secondaria di I grado, forse avrei avuto meno difficoltà".

### 3.3 I dieci punti

I dieci punti (cat. 5, 6, 7)
Ci sono dieci punti segnati qui sotto su una griglia quadrettata.
Francesco ne ha trovato quattro che sono i vertici di un rettangolo.

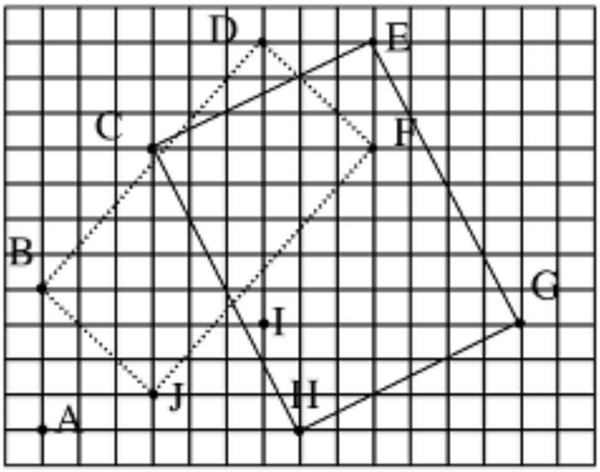


**Individuate questi quattro punti, disegnate il rettangolo in rosso e spiegate perché pensate che sia un rettangolo.**

Anna dice che può disegnare più di un rettangolo i cui vertici sono quattro dei dieci punti dati.

**Che cosa ne pensate?**

Il nostro visitatore legge attentamente la rubrica ***Procedure, ostacoli ed errore rilevati*** e osserva che c'è un solo rettangolo CHGE




poi si sofferma sul seguito della scheda:

***Procedure, ostacoli ed errore rilevati***
Le procedure di ricerca delle coppie di segmenti paralleli e congruenti sono dapprima di tipo "visivo", poi analitiche, per esempio tramite un controllo con il ricorso a strumenti. Si trova così che non ci sono coppie di segmenti paralleli alle righe della griglia e che ci sono solo **4 coppie da prendere in considerazione: BD e JF, BJ e DF, CE e HC, CH e EG.**

***Indicazioni didattiche***
Ma si può anche andare più lontano, verso una giustificazione tramite le "componenti" orizzontale e verticale dei segmenti considerati come diagonali di rettangoli. Si tratta di una "iniziazione" naturale al concetto di vettore e delle sue componenti.

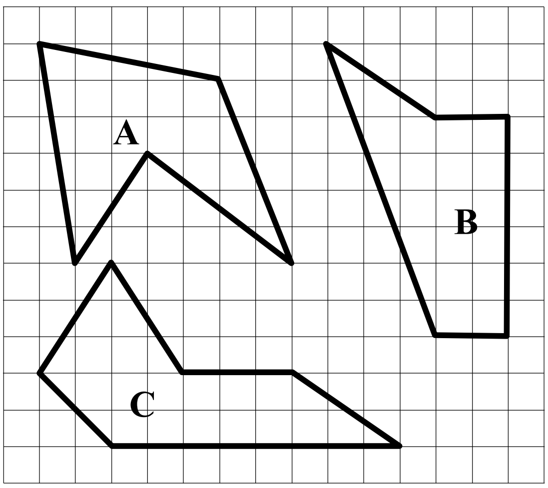
E inserisce ancora un problema nel suo futuro percorso:

**I**: "Secondo me questo problema andrà bene tra una o due settimane dopo "*Il muro della scuola (I)" e*, per BFJD, farò osservare che il confronto dei rapporti è efficace e: 3/3 ≠ 6/7".

### 3.4. Confronto di figure

Confronto di figure (cat. 6, 7, 8)

Patrizia e Brunella osservano questi tre poligoni e si chiedono se hanno tutti la stessa area.




**Dite se le aree di questi tre poligoni sono le stesse o se sono diverse.**
**Mostrate come siete arrivati alla vostra risposta.**

***Risultati***
…
Le medie ottenute possono sembrare deboli ma occorre tener conto che i punteggi attribuiti dipendono dall'insieme del compito: la ricerca delle superfici delle tre figure. Ciò significa, ad esempio, che il 39% (6 + 18 + 15) dei gruppi ha trovato due o tre delle aree, il 28% ne ha trovato una sola ed il 34% ha commesso troppi errori e non ha trovato alcuna area corretta.

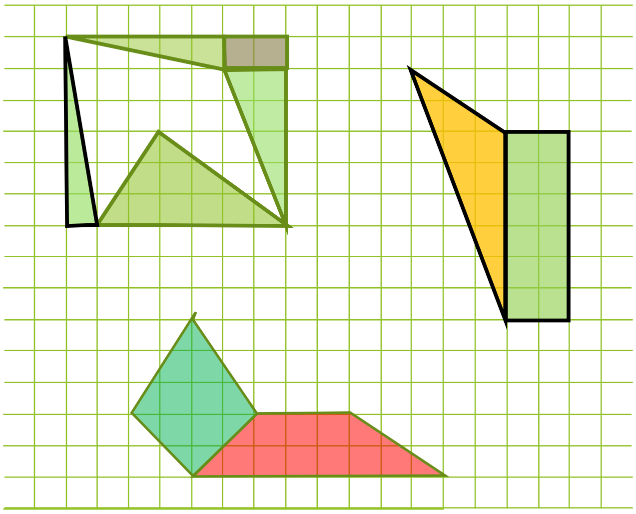
**I:** "verificherò se la mia classe di categoria 6 se la caverà meglio".

***Procedure, ostacoli ed errore rilevati***
L'analisi a posteriori approfondita di circa 350 elaborati di quattro sezioni ha permesso di evidenziare tre procedure principali:
…

**I**: "È piuttosto lungo da leggere, ma, in effetti, ci sono delle osservazioni che ho già constatato con i miei allievi".

***Indicazioni didattiche***
…
- la percezione della "grandezza" area e la sua distinzione dalla "grandezza" lunghezza, la necessità di scegliere un'unità d'area che sia la medesima per tutte le figure,
- l'organizzazione del conteggio e dei raggruppamenti delle parti di unità,
- la necessità di scomporre le figure complesse in figure elementari nel caso in cui il conteggio e i raggruppamenti siano troppo complessi,
- "l'additività" delle aree che può estendersi alla "sottrattività" quando si inquadri la figura in un rettangolo circoscritto,
- la padronanza delle formule dell'area del rettangolo, ma anche del triangolo, la percezione che un triangolo è un semi-parallelogramma che è da parte sua equivalente ad un rettangolo,
- la totale inadeguatezza dei tentativi di misurazione in cm,

**I**: "Tengo a mente *l'additività e la sottrattività, la* padronanza delle formule (che sono nel programma), l'inadeguatezza dei tentativi di misurazioni per la fase di istituzionalizzazione, dopo la messa in comune e la discussione. Qui c'è tutto il programma del livello corrispondente alle categorie 6 e 7 sul calcolo di aree.
Mi piacerebbe anche che i miei allievi potessero applicare le formule sui triangoli e perché no sul trapezio e sul romboide e poi fare una verifica con il conteggio uno a uno dei quadretti. So già che ci saranno dei problemi con il triangolo giallo: si può prendere come «base» il suo lato verticale di lunghezza 6 (lati di quadretti), ma non sarà facile determinare l'altezza corrispondente!!".



**I**: "Poi, per finire, passeremo alle misure in cm per mostrare l'inefficacia delle procedure con misurazione!".

### 3.5. A quale distanza?

**A quale distanza ?** (cat. 7, 8)

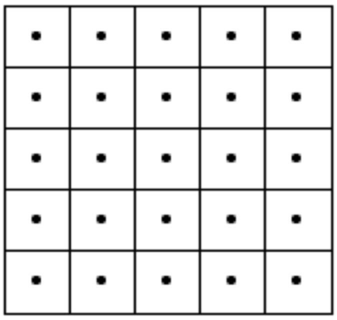
Un giardiniere ha piantato degli alberi a distanza regolare in un terreno quadrato come mostra il disegno.

Suo figlio, che ha una mente matematica, osserva che la distanza tra due alberi non è sempre la stessa. Egli pone questa domanda:

"Quante distanze differenti ci sono tra due alberi del tuo giardino?"

**Rispondete anche voi a questa domanda.**

**Spiegate come avete trovato la soluzione.**



**I**:" Forse questo problema è prematuro in prima secondaria I, ma potrei proporlo alla fine dell'anno per riprendere la problematica dell'inefficacia delle misure, come visto in precedenza" In effetti, secondo il ***Compito di risoluzione e saperi***, gli allievi possono confrontare le differenti lunghezze col compasso con una precisione sufficiente, salvo per due fra esse, molto vicine, per le quali si renderanno conto che bisogna utilizzare tutto ciò che è stato intravisto nei problemi precedenti, come spiega bene la rubrica seguente:

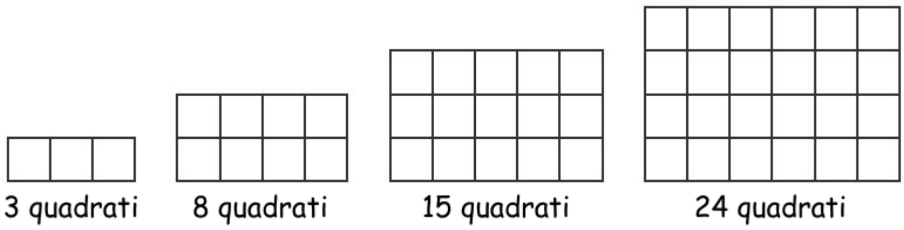
***Indicazioni didattiche***

Il solo confronto che richiede un'attenzione particolare è quello delle due diagonali di un rettangolo (1;4) e del quadrato (3;3). La differenza è visibile con l'uso del compasso o con la costruzione precisa di un ingrandimento della griglia quadrata. Il confronto può anche essere fatto per costruzione, su una quadrettatura di quadrati costruiti su ciascuna diagonale, poi con conteggio dei quadrati interi e di parti di quadrati raggruppati. Le aree di questi quadrati sono rispettivamente 17 e 18 (in quadrati della quadrettatura) e si può concludere, per deduzione, che i due segmenti sono differenti (anche senza il teorema di Pitagora, né calcoli di radici quadrate!).

### 3. 6. Griglie

Griglie (cat. 4, 5, 6)

Asmine disegna una serie di griglie rispettando la seguente regola: per ogni nuova griglia aggiunge una riga e una colonna di quadretti alla griglia precedente.




**Continuando a costruire griglie rispettando la stessa regola, potrà costruire una griglia di esattamente 112 quadratini?**

**E una di esattamente 224?**

**Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.**

**I: "**Questo problema mi piace molto con una successione numerica da scoprire che è possibile verificare con conteggio dei quadrati del disegno. Ai miei allievi piacerà; a loro piace andare alla ricerca di un qualcosa che permetta loro di passare da un numero al successivo".
Mi è anche piaciuto molto lo studio citato in bibliografia: (http://www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/etude-op88-fr.pdf)".[4]
Questo problema è una variazione di Griglie (08.II.05) con modifiche minori. Le medie dei punteggi ottenute per le categorie corrispondenti sono molto simili.

L'estratto che segue fa parte della scheda di questa prima versione del problema.

[4] Questo studio è anche pubblicato nella rubrica "Approfondimenti" del n. 9 de La Gazzetta di Transalpino.

***Indicazioni didattiche***

Questo problema è interessante per rafforzare o costruire i due concetti seguenti:

- l'area del rettangolo come prodotto delle misure delle sue due dimensioni, con le sue rappresentazioni geometriche attraverso delle griglie,
- la metodologia delle sequenze o progressioni con le leggi del passaggio da una griglia alla seguente, sia aumentando ogni volta i due fattori di un'unità, sia aggiungendo le differenze successive (che sono esse stesse la sequenza dei numeri dispari successivi)

Rende ancora possibile combattere la "tentazione della proporzionalità", vale a dire l'applicazione meccanica e non ragionata della regola reciproca di "se raddoppio le dimensioni, anche l'area raddoppia".

Si veda anche la seconda versione, con modifiche minori, del problema Griglie (25.I.06). Le medie dei punteggi ottenuti per le categorie corrispondenti sono quasi le stesse.

**I:** "La tentazione della proporzionalità rischia veramente di essere forte per qualcuno dei miei allievi".

### 3.7. Il ritaglio di triangoli

<u>Il ritaglio di triangoli</u> (cat. 6, 7, 8)

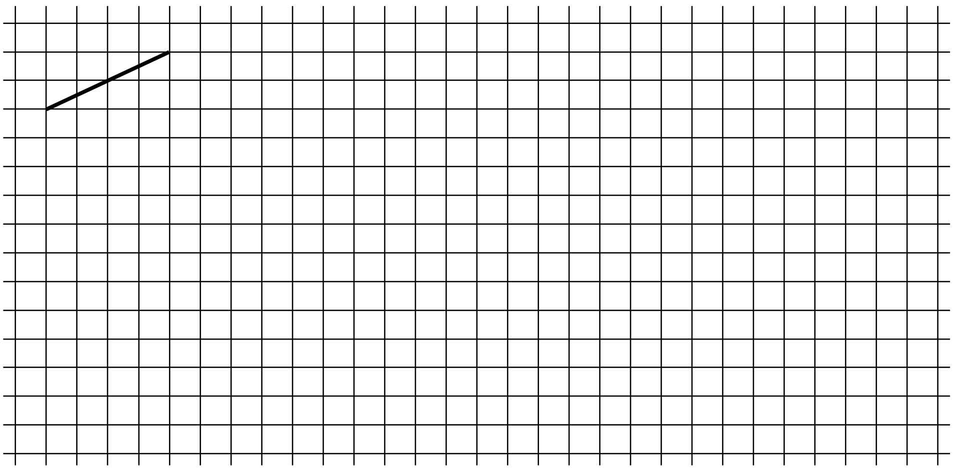
Cristina disegna alcuni triangoli su un foglio quadrettato e poi li ritaglia.

Tutti i suoi triangoli hanno:

- due lati della stessa lunghezza di quella del segmento disegnato sulla quadrettatura sottostante;
- tutti i vertici in punti di intersezione della quadrettatura.

**Quanti triangoli differenti (cioè non esattamente sovrapponibili dopo averli ritagliati) può aver ritagliato Cristina?**

**Disegnateli tutti utilizzando la quadrettatura qui sotto.**



**I**: "Vedo che nella rubrica ***Risultati*** la media di 0,8 in categoria 6 corrisponde al 55% dei gruppi che hanno trovato un solo triangolo o incomprensione e 23% con solo due triangoli!! Mi chiedo se i miei allievi riconosceranno il segmento dato (2 × 4) o (1 × 2) disegnato in tutte le posizioni possibili dopo l'attività con il problema *Il tavolo da* spostare. E sono d'accordo con l'osservazione che segue:"

***Indicazioni didattiche***

Un problema come "Il ritaglio di triangoli" permette di far venire alla luce ostacoli caratteristici a proposito di nozioni che sembrerebbero acquisite, come il triangolo isoscele, la sua posizione e la congruenza di segmenti. Si osserva chiaramente che l'immagine di triangolo isoscele che hanno gli allievi è quella di una figura con tre lati di cui uno è orizzontale e gli altri due, congruenti, sono obliqui. …

## 4. IL PUNTO SULLA SITUAZIONE

### 4.1. Ricchezza e diversità

Abbiamo visto sette problemi: *Il tavolo da spostare, Sul muro della scuola (I), I dieci punti, Confronto di figure, A quale distanza? Griglie, Il ritaglio di triangoli.*

Questi sette problemi permettono di prendere in considerazione una gran parte di argomenti del programma delle classi corrispondenti a quelle della nostra categoria 6 (11-12 anni) e molti altri, dei livelli precedenti e di quelli successivi.

Si prendono in considerazione: il rettangolo, i suoi lati, il loro rapporto, le sue diagonali, i suoi angoli, il triangolo rettangolo; le lunghezze e le aree, le distanze, i numeri reali, le approssimazioni, le unità di lunghezza e di area, la geometria su quadrettatura, le formule di aree, le isometrie, …

Le sette schede corrispondenti sono ricche di constatazioni e osservazioni raccolte alla lettura degli elaborati degli allievi, poi di suggerimenti e di indicazioni didattiche.

La banca offre pertanto una sorgente di dati molto abbondanti. Non può però andare più in là. La palla è poi nel campo del visitatore.

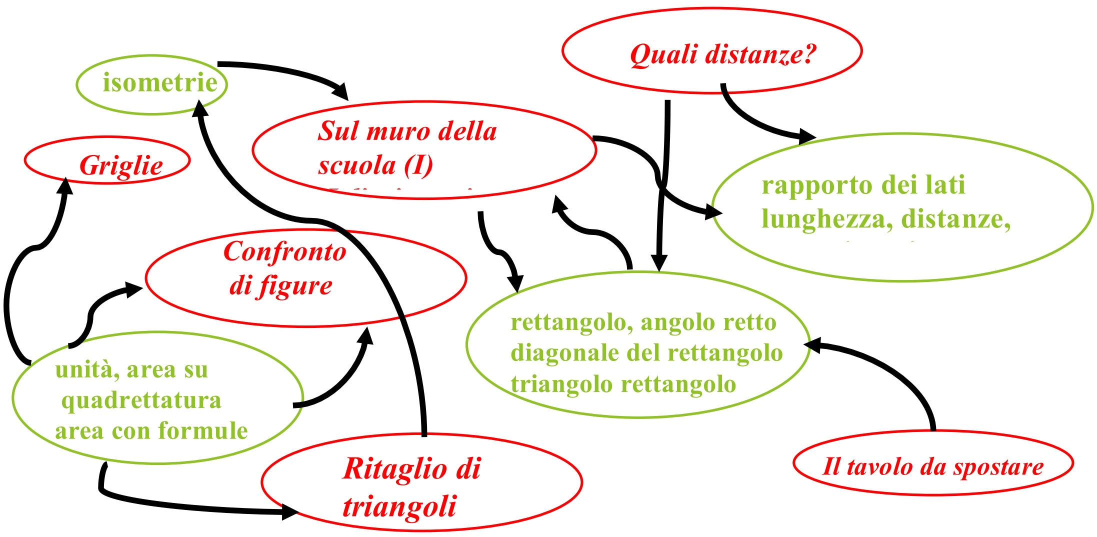
**I**: "Ci sono volute alcune ore per esaminare queste schede della banca: leggere gli enunciati, risolvere i sette problemi, leggere attentamente le varie rubriche, reperire le idee per la mia classe. Non figura però alcuna indicazione sull'ordine secondo il quale io possa organizzare questi problemi! Penso che dovrò essere io a organizzare il mio percorso!".

### 4.2. Percorso tra i problemi– percorso di apprendimento

Il tema di questa presentazione è "Elaborazione di percorsi di apprendimento a partire da problemi della banca".

La visita è cominciata con *Il tavolo da spostare*. Avremmo potuto scegliere un ordine diverso, scegliere altri problemi: un altro percorso tra problemi della banca.

Tornando al commento iniziale del nostro visitatore: *Rettangolo e area, mi interessa*, ci si rende conto che i sette problemi possono contribuire a far progredire i propri allievi nella costruzione dei concetti quali "rettangolo", "area" e tutti gli altri della lista precedente. Lo schema che segue dà qualche esempio di progressione tra problemi e concetti o nozioni.




### 4.3. Il compito dell'insegnante

Se da un lato la banca offre una sorgente di dati estremamente ricca e abbondante, dall'altro lato non pretende di sostituirsi all'insegnante che è interamente responsabile della conduzione della classe, secondo le sue concezioni personali dell'insegnamento e dell'apprendimento e secondo le caratteristiche della classe. Ecco un inventario succinto dei suoi compiti:

A) **La preparazione**:

- Ricerca di problemi e bozza di risoluzione
- Lettura della scheda
- Legame con i bisogni dei propri allievi e loro livello
- Riflessione su conoscenze, concetti, … programma

**B) L'organizzazione di percorsi**

- Da dove cominciare e dove finire
- La ripartizione delle attività nella durata globale del percorso
- Un problema e le sue utilizzazioni ogni settimana, il tutto in un trimestre?

**C) Gli altri vincoli**

- Differenziazione, valutazione
- Il programma, i libri di testo,
- Le relazioni tra allievi, i genitori, la direzione, …

## 5. Qualche riflessione a guisa di conclusione

### 5.1. La risoluzione di problemi

I testi ufficiali di accompagnamento ai programmi fanno tutti riferimento all'attività di risoluzione di problemi, ma senza precisarne le modalità né entrare nelle relative concezioni di apprendimento. "Risolvere problemi" è spesso una "formula" interpretata come soluzione-miracolo per l'insegnamento della matematica.

Alla lettura delle schede della banca ci si rende conto che i problemi proposti non posseggono in se stessi alcun potere magico. È nel risolverli che gli allievi si pongono delle domande, cercano di utilizzare saperi già incontrati o adattarli o ancora immaginarne altri. La risposta corretta riveste un interesse secondario, gli aspetti che sono invece al centro dell'attività matematica sono le procedure di ricerca, gli scambi tra allievi, i modi di superare gli ostacoli.

La risoluzione dei problemi proposti dal RMT è sottomessa a condizioni particolari: l'allievo si trova davanti ad una situazione nuova, responsabile della ricerca della soluzione, in collaborazione con i compagni, con la necessità di rispondere anche alla richiesta di descrivere la procedura di risoluzione.

Se poi il problema è utilizzato in classe, l'allievo parteciperà ancora a scambi e discussioni collettive per arrivare a fasi di sintesi, validazioni, esplicitazione di saperi e istituzionalizzazione.

L'insegnante che opti per questa utilizzazione didattica ha operato una scelta, difficile da gestire e diciamolo pure, ardita; infatti, è molto più semplice dare un problema come applicazione di un sapere "insegnato" in precedenza, senza preoccuparsi d'altro che della risposta, corretta o errata.

Possiamo ricordare a tale proposito che il contratto di entrata nella banca (si veda 2.1) è chiaro ed esplicito:

> Quali sono le concezioni dell'apprendimento soggiacenti?
> Questo lavoro di ricostruzione di saperi pregressi o di costruzione di nuovi saperi, è la sfida del problema, ma non scaturisce spontaneamente durante la risoluzione del problema. Bisogna che l'allievo prenda coscienza delle concezioni antagoniste del sapere in gioco: quella che non è adeguata o erronea e quella che permetterà di arrivare alla soluzione. Questo confronto può eventualmente essere abbozzato all'interno del gruppo di allievi, ma più sovente, si manifesterà solo all'atto del dibattito collettivo organizzato dall'insegnante dopo che gli allievi avranno dato le loro risposte.

### 5.2. Un nuovo sguardo sui "programmi"

Questa visita della banca ha avuto inizio con un riferimento al "rettangolo" e alle "aree" che troviamo in tutti i programmi di matematica. Ci siamo però subito resi conto che non è sufficiente proporre agli allievi i sette problemi presi in considerazione perché acquisiscano le "competenze" o "attese" richieste dai testi ufficiali. I risultati rilevati lo testimoniano bene. Per esempio: il termine "rettangolo" dei programmi è ben noto agli allievi ben prima degli 11 anni, ma è associato a una figura nella quale la perpendicolarità dei lati non è percepita coscientemente; è invece solo riconosciuto in posizione privilegiata; la formula dell'area del rettangolo può essere memorizzata o applicata efficacemente in maniera algoritmica solo in casi particolari; gli allievi sanno misurare lunghezze con il righello, ma non sanno interpretare le misure ottenute quando non sono numeri interi di cm o di mm; … . I nostri problemi permettono di scoprire ciò che c'è nella testa di coloro che cercano di risolverli: conoscenze in costruzione e non ancora completate, se mai lo saranno un giorno.

Ciascun visitatore (insegnante) della banca deve evidentemente tener conto delle nozioni che figurano nei programmi di matematica per scegliere i problemi che utilizzerà; ma poi deve dare la priorità allo sviluppo dinamico dei concetti approcciati in funzione dei bisogni e delle capacità dei propri allievi, indipendentemente dai testi ufficiali. Ad esempio, nella "geometria su quadrettatura" illustrata con alcuni dei problemi esaminati, se gli allievi scoprono che l'area di un quadrato, per scomposizione, corrisponde a 10 quadretti unità, non è vietato riflettere sulla natura della misura del lato di tale quadrato, anche se il teorema di Pitagora o lo studio delle radici quadrate non figurano nel programma di quella classe.

### 5.3. L’avvenire della banca di problemi del RMT

Un sforzo è già stato compiuto da tutti coloro i quali, in seno al RMT, da più di vent’anni, elaborano problemi, attribuisco i punteggi agli elaborati degli allievi, li analizzano a posteriori, prendono in considerazione i risultati per creare nuovi problemi che consentano in maniera migliore di cogliere i passaggi importanti nella costruzione delle conoscenze. Le 1200 schede attuali della banca lo testimoniano.
Terminiamo questa presentazione con un appello.
La nostra banca è un’opera collettiva, viva e in evoluzione. È il riflesso di coloro che contribuiscono alla sua elaborazione e la utilizzano: gli animatori delle nostre sezioni, tutti coloro i quali leggono gli elaborati degli allievi e partecipano all’attribuzione dei punteggi, gli autori e revisori dei problemi, i gruppi permanenti di lavoro, tutti coloro che si lanciano nelle analisi a posteriori, tutti coloro che utilizzano i nostri problemi in classe e propongono nuovi commenti o risultati.
A tutti chiediamo di partecipare a questa elaborazione perché c’è ancora molto da fare:

**Bisogna continuare!!**

- Completare i nostri sunti con concisione, precisione, armonizzazione.
- Descrivere le famiglie, o ridefinirle, o crearne altre più precise.
- Analizzare elaborati, elaborati, elaborati… per avvicinarci al compito di risoluzione dell’allievo, alle sue procedure, ai suoi ostacoli e difficoltà.
- Proporre suggerimenti per l’utilizzazione didattica, per connessioni con altri problemi.
- Elaborare varianti per esplorare tutto ciò che si osserva nelle analisi a posteriori.
- Sperimentare, proporre percorsi di apprendimento a partire dai nostri problemi[5].

[5] Tra il momento della stesura della presentazione e la sua pubblicazione su La Gazzetta di Transalpino, abbiamo ricevuto un bell’esempio di utilizzazione dei nostri problemi (si veda l’articolo di Brunella Brogi alle pagine 117-119 di questo n. 9).

# ÉLABORATION D'UN PARCOURS D'APPRENTISSAGE À PARTIR DE PROBLÈMES DE LA BANQUE

**François Jaquet**

## Résumé

L'exposé qui suit n'est pas une « conférence » mais simplement une visite guidée de la Banque de problèmes à l'intention d'un enseignant qui cherche à organiser un parcours d'apprentissage pour ses élèves, à propos du rectangle, de son aire et de toutes les notions qui l'accompagnent.
On y trouvera quelques considérations préalables sur la résolution de problèmes, une manière d'entrer dans la banque, par ses « domaines » et « familles de tâches », l'examen de quelques-unes de ses fiches et de leurs rubriques.
Le but de la visite est de percevoir, d'une part, quelques potentialités de l'instrument « Banque de problèmes » pour l'enseignant qui cherche à favoriser la construction de connaissances par ses élèves et d'autre part, sa complexité.
La visite partira par la présentation de la Banque de problèmes, continuera par la « navigation » déterminée par l'enseignant, permettant d'entrer par les domaines et les familles, puis par l'examen de sept fiches. Elle se terminera par quelques considérations générales.

## 1. Introduction

### 1.1. Le visiteur

Lorsqu'il organise son programme en début d'année scolaire, lorsqu'il constate que ses élèves n'ont pas encore maîtrisé certaines connaissances, lorsqu'il découvre une erreur fréquente ou un obstacle particulier, l'enseignant choisit un parcours d'apprentissage - ou de remédiation - à proposer à sa classe. Il a de nombreuses options à disposition : chapitres du manuel scolaire, programme de répétitions préparé-par des explications spécifiques, liste d'exercices complémentaires, …
Si ses pratiques précédentes ont mis en doute l'efficacité d'un parcours conventionnel allant du « cours » aux « exercices », éventuellement répétés jusqu'à saturation, il est possible que l'enseignant recherche d'autres modalités d'apprentissage.
Sur le Web, il trouvera de nombreuses « méthodes », prétendues efficaces selon leurs présentateurs, des séries de problèmes organisées thème par thème, avec les solutions ; des logiciels d'apprentissage …
Mais si notre visiteur ne recherche pas de directives sur la manière dont le professeur devrait « enseigner les mathématiques » mais plutôt des propositions d'activités pour ses élèves, avec leurs phases d'interrogations d'essais, de découvertes partielles, d'échanges … leur permettant de progresser dans l'élaboration et la maîtrise progressive d'un savoir, la Banque de problèmes du RMT peut alors lui proposer quelques suggestions pour ces choix importants.

### 1.2. Le thème de la visite : à propos de « rectangle », « aires » …

Le visiteur que nous avons imaginé pour cette visite guidée est un enseignant bien particulier (nous l'appellerons « **E** » par la suite), qui se pose des questions, intéressé par la « résolution de problèmes » - citée abondamment dans ses programmes nationaux de mathématiques - à la recherche d'activités dans lesquelles ses élèves sont les protagonistes de la construction de leurs connaissances.
Ce n'est pas vraiment un « mathématicien », sa formation est celle d'un professeur de l'école secondaire qui a plusieurs classes ou celle d'un enseignant du primaire en classe unique.
**E** : « Rectangle et aire, ça m'intéresse … pour un parcours d'apprentissage en mathématiques avec ma nouvelle classe de catégorie 6. (11-12 ans). C'est au programme !! »
En effet, dans tous nos pays de Transalpie, la notion figure dans les programmes officiels. En voici quelques exemples :
- *Calcule l'**aire** du carré et du **rectangle** (mesures entières), détermine l'**aire** d'un parallélogramme, d'un **triangle rectangle** à partir de **l'aire du rectangle** (mesures entières)*[1]
- ***Les aires** : Tout au long du cycle, il convient de choisir la procédure adaptée pour comparer les aires de deux surfaces. … On peut alors construire et utiliser les formules pour calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle, puis en 6e, **calculer l'aire d'un triangle rectangle**, d'un triangle quelconque dont une hauteur est connue, d'un disque.*[2]
- *Après « décrire », « reproduire », « reconnaître des figures obtenues par translations, rotations et symétries axiales, confronter et mesurer des angles », « concepts de parallélisme, perpendicularité, ... », « reproduire à*

---

[1] « ATTENTES FONDAMENTALES » en fin du cycle (cat 5 -6) PER (MSN 24)

[2] B.O. 26.11.2015

*l'échelle (par exemple sur papier quadrillé) », « déterminer le périmètre »* ***… Déterminer l'aire de rectangles et triangles et d'autres figures par décomposition ou par utilisation des formules les plus communes.***[3]

### 1.3. Quelques réflexions préalables du visiteur à propos de « rectangle », « aire » …

**E** : « Que savent mes élèves sur le sujet ? »

- Le rectangle a un côté plus long que l'autre, parallèles aux bords de la feuille, porte, table, terrain de foot … ?
- c'est une figure parmi d'autres : polygones, quadrilatères, parallélogramme, carré,
- on parle de longueur, largeur, périmètre, aire, puis de parallèles, perpendiculaires, angle droit, …
- il faut faire des additions, multiplications, convertir des unités de mesure (le cm, le $cm^2$),

**E** : « Et à plus long terme quels sont les concepts en devenir ou en construction ? »

- Isométries, propriétés des opérations (commutativité, modèle de multiplication, distributivité), équivalence, proportionnalité, nombre rationnel, nombre irrationnel, nombre réel, approximation … »

**E** : « Comment vais-je m'y prendre cette année vu que les années précédentes mes élèves avaient retenu facilement la formule de l'aire du rectangle mais ne la maîtrisaient que dans les cas d'application directe et dans des situations traditionnelles.

La *Résolution de problèmes* invoquée dans les textes officiels peut-elle être voie nouvelle ?

Allons voir la *Banque de problèmes du RMT* dont j'ai entendu parler. »

## 2. L'entrée dans la Banque

### 2.1. Où la trouver ?

Pour une première visite, on entre dans la banque par le site de l'ARMT : http://www.armtint.org
et par sa rubrique Banque de problèmes, en bas à droite, où il suffit d'aller sur Accédez, pour voir apparaître sa présentation :

> Vous venez de franchir le seuil de la « Banque de problèmes du Rallye mathématique transalpin ». Vous vous attendez donc à y trouver une collection de problèmes et, effectivement, vous en trouverez plus d'un millier.
> Avant d'aller plus loin vous pouvez - et vous devez - vous demander :
> De quel type de problèmes s'agit-il ?
> A qui la banque s'adresse-t-elle et comment y sont organisés les problèmes ?
> Quelles sont les conceptions de l'apprentissage sous-jacentes ?
> Quel est le rôle de l'enseignant en résolution de problèmes ?
> Comment y contribuer ?

(Note pour la lecture de ce texte : En accédant au site par les liens préparés ici, le lecteur voit apparaître une page entière de la banque. Le texte de cet article n'en reproduit que quelques parties essentielles, en « encadré ».)

Le promeneur « surfeur » qui ne se pose pas ces questions passera à un autre site alors que notre visiteur, va justement s'y arrêter. Il en aura pour cinq à dix minutes au moins.
Le lecteur peut s'y intéresser aussi, il verra que les cinq paragraphes (et pages) de cette introduction situent clairement et honnêtement l'instrument « Banque de problèmes du RMT » : les problèmes proposés ne sont pas des « exercices » d'applications et on ne s'intéresse pas seulement à la bonne réponse. Il verra ensuite que la responsabilité de la démarche de résolution est confiée à l'élève et que le rôle du maître n'est pas « d'enseigner » ou présenter le « cours » mais de stimuler un débat entre élèves qui suivra la résolution ou ses tentatives. Il verra finalement, de manière synthétique, que :

- La Banque de problèmes du RMT n'offre pas de « prêt à porter », tout y est « sur mesure ».
- En résolution de problèmes, il faut s'adapter au « terrain » des élèves, le « programme » n'a pas la priorité.
- L'enseignement par la résolution de problèmes est complexe, délicat et plus difficile que de « faire le cours » ou de « donner des exercices ». L'enseignant n'a plus le rôle unique de transmetteur du savoir, mais celui de metteur en scène de sa construction par les élèves.

### 2.2. Navigation

Après l'introduction, la porte s'ouvre par Accès à la banque, qu'on trouve au bas de la colonne de gauche de chacune des cinq pages précédentes, puis après avoir choisi la langue « Italiano » ou « Français » sur Naviguer ou Navigare (en laissant de côté, pour l'instant la rubrique « Demander » ou « Demandare ») se présentent alors six entrées :

- Domaines : les grands chapitres des programmes ou manuels scolaires

[3] Gazzetta Ufficiale della Repubblica Italiana 05.02.2013. Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria *Spazio e figure*

- Familles : les domaines, répartis en familles de tâches
- Concepts : une recherche par les notions, connaissances, savoirs … ou même « mots-clés » que nous appelons actuellement « concepts » en attente de trouver une appellation plus universelle
- Rallyes : la liste des épreuves, du 2e au 27e RMT, utile surtout pour ceux qui ont participé aux éditions précédentes et désirent retrouver rapidement les problèmes d'une épreuve particulière
- Vocabulaire : une recherche selon les mots des titres des problèmes, par ordre alphabétique, utile surtout pour ceux qui se souviennent de certains problèmes
- Catégories : une recherche des problèmes selon les catégories auxquelles ils ont été attribués, de 3 à 10, correspondant aux âges des élèves de 8-9 ans à 15-16 ans.

### 2.3. Entrée par les familles

Pour notre visiteur, qui cherche des idées de problèmes en fonction des besoins de ses élèves, c'est l'entrée par Familles qui va lui permettre de se diriger avec la plus grande efficacité. Il y trouve une liste qui défile sur deux pages et son intérêt pour le *rectangle* et l'*aire* vont l'induire à la lecture des familles des domaines GM et GP, dont voici quelques rubriques.
Dans GM, « Grandeurs et mesures » par exemple, on trouve les familles LA et RD avec quelques-unes de leurs « sous-familles :

LA - Utiliser des mesures de longueurs et aires
  LA/UA - Traiter des unités d'aires
  …
RD - Rechercher ou utiliser des dimensions
  RD/AP - Déterminer des aires et/ou périmètres
  RD/CP - Comparer des aires et/ou des périmètres
  RD/VOL- Déterminer des aires et/ou périmètres et/ou volumes
  …

Puis dans GP « Géométrie plane », les familles CA, IF, QUA et certaines de leurs sous-familles.

CA - Comparer des aires
  CA/D - Comparer des aires par découpage
  CA/P - Comparer des aires sur un quadrillage
  …
IF - Identifier des figures
  IF/INV - Dresser un inventaire
  IF/RC - Reconnaître et construire des figures élémentaires
QUA - Travailler sur un quadrillage
  QUA/GQ - Traiter des polygones sur quadrillages
  …

On verra, en poursuivant la visite, que les codes qui désignent les domaine, familles et sous-familles, nécessaires pour la classification, n'auront pas à être mémorisés. Ce sont les descriptions succinctes des problèmes apparaissant lorsqu'on « ouvre » une famille qui seront déterminants pour le choix des fiches.
Par exemple, dans la famille IF/RC - Reconnaître et construire des figures élémentaires :

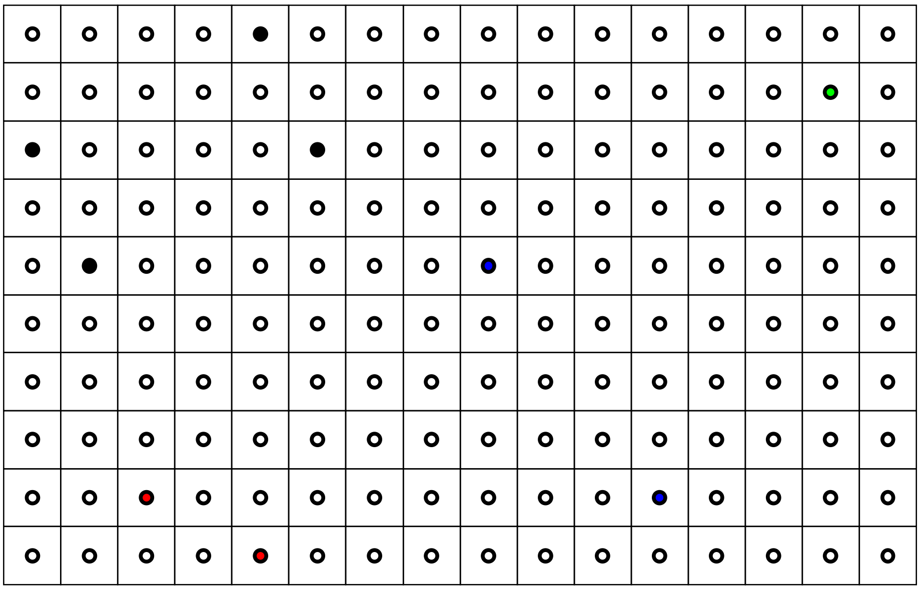
…
La table à déplacer **(ral.** 16.F.24 **; cat.** 4-5 **;** 16rmtf_fr-24**)** : Sur un quadrillage, déterminer les sommets manquants de rectangles dont certains sommets sont donnés, à partir d'un modèle placé dans une position différente.
**…**
Le carré de Léa **(ral.** 17.II.11 **; cat.** 5-7 **;** 17rmtii_fr-11**)** : A partir d'un puzzle de 10 pièces disposées en parallélogramme (sur une trame de cinq carrés alignés), reconstituer un losange, puis un trapèze rectangle avec 8 de ces pièces et finalement un carré avec les 10 pièces.
Les dix points **(ral.** 18.I.08 **; cat.** 5-7 **;** 18rmti_fr-8**)** : A partir de 10 points placés sur un réseau à maille carré, recherche de quadruplets de points formant des quadrilatères qui vérifient les propriétés caractéristiques du rectangle.

## 3. Les fiches des problèmes

### 3.1. La table à déplacer

La visite commence par la première des fiches de l'extrait précédent de la sous-famille IF/RC - Reconnaître et construire des figures élémentaires qu'on trouve aussi dans les familles ANG (Utiliser des angles et/ou des mesures d'angles) et QUA (Travailler sur un quadrillage). C'est son résumé qui a attiré l'œil de notre visiteur :

**La table à déplacer (cat. 4, 5, 6)**



Ce dessin représente le sol de la cuisine de Julie avec des petits cercles au centre de chaque carreau.
Julie a remarqué une chose étonnante : dans certaines positions, les quatre pieds de la table de cuisine recouvrent exactement quatre petits cercles du carrelage.

Julie place tout d'abord la table dans une certaine position, avec les quatre pieds qui recouvrent exactement les quatre cercles marqués en noir sur le dessin (en haut à gauche).

Julie la déplace de manière que les quatre pieds de la table recouvrent exactement quatre autres cercles. Deux de ces cercles sont marqués en rouge sur le dessin.
**Marquez en rouge les deux autres cercles recouverts par les deux autres pieds de la table dans cette deuxième position.**

Julie déplace encore la table ….

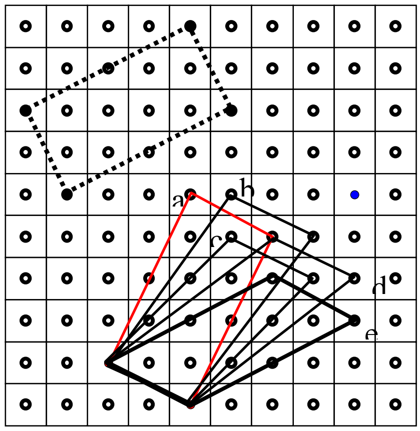
(L'énoncé complet demande encore de dessiner la table dans deux emplacements : avec deux pieds sur les cercles bleus puis avec un pied sur le cercle vert en haut à droite.)

Voici quelques commentaires de notre visiteur à la lecture de l'énoncé et des résultats.

**E**: « Il y a beaucoup à lire et la mise en page n'est pas des meilleures mais …
Je pense qu'il n'y aura pas de difficultés. Je suis d'accord avec l'analyse a priori.
Mes élèves savent bien qu'une table est rectangulaire et ont déjà reconnu des rectangles, même disposés ainsi. »

Les rubriques ***Résultats*** et ***Procédure, obstacles et erreurs relevés*** montrent cependant une confusion majoritaire entre rectangle et parallélogramme.
Le problème avait été proposé aux classes de la finale internationale de Brigue, en 2008 : les 12 « meilleures » classes gagnantes des finales régionales de catégorie 4 de l'année précédente. Presque toutes avaient dessiné des parallélogrammes non rectangles, comme le montre la figure reproduite ici. Une expérimentation à plus grande échelle a confirmé cet obstacle.

Dispositions des « tables »
relevées dans les copies d'élèves,
celle en rouge n'apparaissant que dans
une petite minorité de cas.




**E**: « Oh là là !! Les moyennes des points attribués ne sont pas bien élevées. Je n'arrive pas à croire que les élèves dessinent des tables en forme de parallélogrammes non rectangles ! Je vais vérifier avec mes élèves : par groupes de deux, 25 à 30 minutes, puis mise en commun. »
Puis notre visiteur revient sur la fiche, relit les procédures et obstacles et erreurs relevés, puis s'intéresse à la rubrique suivante :

***Exploitations didactiques***

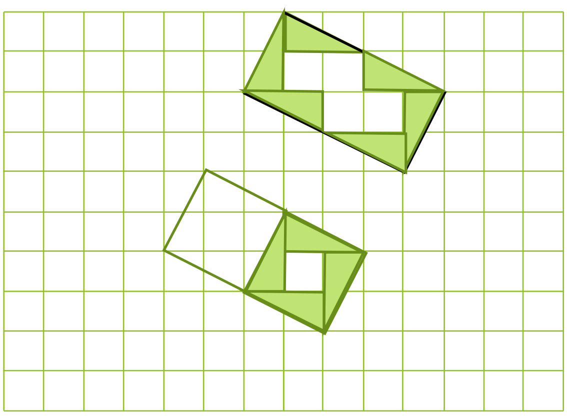
…

Le problème se prête encore à de nombreux développements :

- Constater que, dans une rotation de 90 degrés, les côtés du rectangle suivent toujours les diagonales de rectangles du quadrillage de dimensions (1 × 2) et que ceci permet de vérifier que l'angle est droit si on imagine une rotation d'un quart de tour.

- Proposer aux élèves un rectangle de mêmes dimensions que celui de la table mais avec ses sommets sur les intersections du quadrillage au lieu des centres des carrés et demander de calculer son aire en carreaux du quadrillage : 10. (Ce qui peut se faire par comptage des 4 carreaux entiers et 6 carreaux reconstitués). Puis faire décomposer le rectangle en deux carrés égaux juxtaposés, dont l'aire est 5 en carreaux du quadrillage. Finalement, demander combien mesure le côté de ce carré (en côtés de carreau), en s'aidant de la calculatrice pour arriver progressivement à des approximations successives de 2 ; 2,1 ; 2,2 ; 2,3 ; 2,25 ; ... Ce développement permet de prendre en compte un nouveau nombre, qu'on ne peut pas déterminer par des mesures à la règle mais dont on peut s'approcher par élévations au carré et dont la calculatrice donne une bonne approximation par sa touche √.

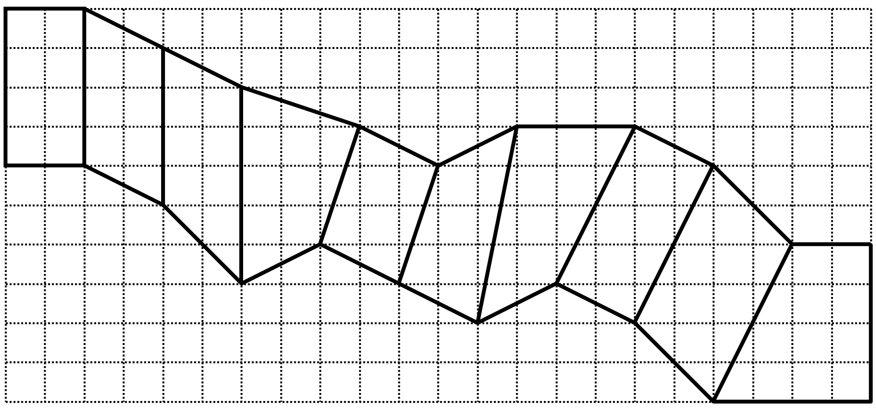
**E.** Bonnes idées : je vais consacrer une ou deux périodes de constructions, déplacements, rotations et symétries de rectangles pour renforcer la prise en compte des angles droits, etc.
Et je vais suivre les propositions sur l'aire de la table. J'espère que mes élèves vont être convaincus que cette aire mesure exactement 10 carreaux du quadrillage, même si les côtés du rectangle ne s'expriment pas par des nombres entiers, à l'aide de figures comme celles-ci : »



### 3.2. Sur le mur de l'école (I)

Dans la fiche de La table à déplacer, la rubrique ***Pour aller plus loin*** propose trois autres problèmes ; *Les dix points*, *Sur le mur de l'école (I)*, *Sur le mur de l'école (II)* .
Arrêtons-nous sur le deuxième et intéressons-nous à l'erreur la plus fréquente ainsi qu'aux exploitations didactiques.

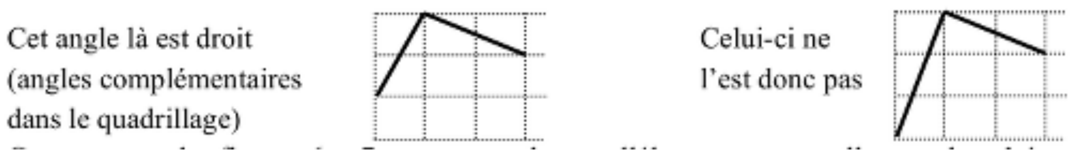
Sur le mur de l'école (I) (cat. 4, 5)
Pour décorer un mur de l'école, quelques élèves ont préparé un modèle, formé de 10 quadrilatères sur papier quadrillé, comme sur la figure ci-dessous.
Luc dit :
« Pour le colorier, nous pourrions employer de la peinture rouge pour les rectangles, de la peinture verte pour les parallélogrammes qui ne sont pas rectangles et de la peinture jaune pour tous les autres quadrilatères. »



**Coloriez le modèle comme Luc l'a proposé.**

Dans la rubrique ***Procédures, obstacles et erreurs relevés*** on lit, entre autres :

L'erreur la plus fréquente, pour près de la moitié des copies examinées, est effectivement de considérer le cinquième quadrilatère depuis la gauche comme un rectangle, sans remarquer que sa largeur est la diagonale d'un rectangle (1 × 2) alors que sa longueur est la diagonale d'un rectangle (1 × 3).
…



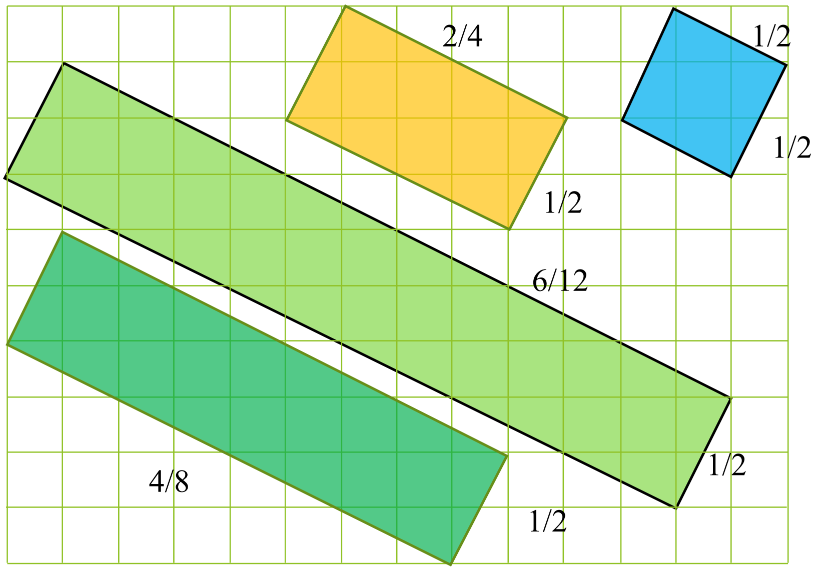

puis, dans les ***Exploitations didactiques*** :

…
Le huitième quadrilatère est intéressant à cet effet car ses côtés sont non seulement des diagonales de rectangles (1 × 2) du quadrillage, mais aussi de (2 × 4), puis, en les prolongeant, de (3 × 6), puis de (4 × 8) ... avec une ouverture sur l'égalité des rapports, comme approche de la proportionnalité dans une situation géométrique.

provoquant la réaction de notre visiteur :

**E :** « Après le problème précédent, il ne devrait plus y avoir trop de difficultés pour mes élèves de catégorie 6, comme les résultats l'indiquent, vu que, en catégorie 5 il y a déjà 52% de réponses entièrement justes. Je vais cependant vérifier la 5e figure selon le premier extrait ci-dessus.

Et je vais préparer une fiche pour exploiter l'idée du deuxième extrait : calculer l'aire du carré bleu dont le côté est la diagonale d'un rectangle de dimensions 1 et 2, puis celle du rectangle jaune de même largeur que le carré mais dont la longueur est la diagonale d'un rectangle de dimensions 2 et 4, le double de celle de la largeur, … » :



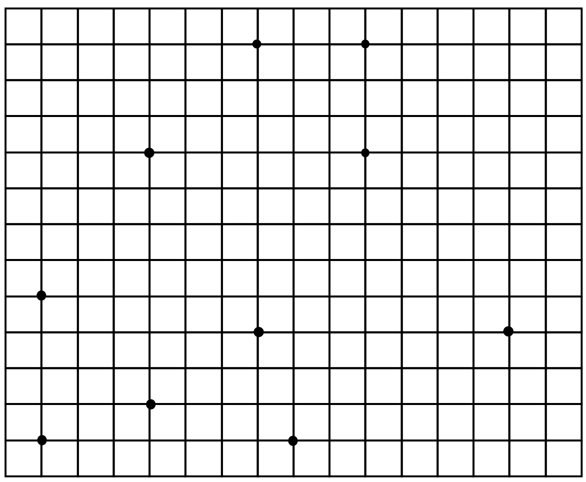

**E :** « Et on pourra recommencer à partir de diagonales de rectangles différents de (1 × 2), (2 × 3), ( 1 × 4) allongés, disposés perpendiculairement …
A propos, ça me rappelle vaguement mes cours de géométrie analytique au lycée, quand notre professeur nous parlait de vecteurs parallèles à une droite ou du vecteur « normal »… Il me semble percevoir des analogies ! Si j'avais fait cette activité au collège, peut-être que j'aurais eu moins de difficultés ! »

### 3.3 Les dix points

Les dix points (cat. 5, 6, 7)

Il y a dix points marqués sur la grille dessinée ci-dessous.

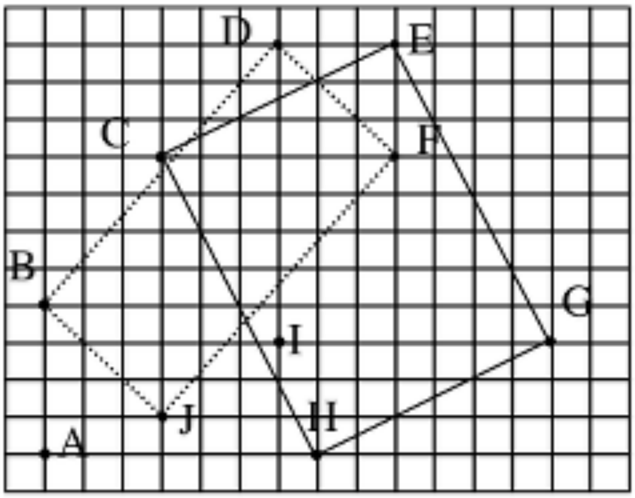
François en a trouvé quatre qui sont les sommets d'un rectangle.



**Trouvez ces quatre points, dessinez le rectangle en rouge et expliquez pourquoi vous pensez que c'est un rectangle.**
Anne dit qu'on peut dessiner plus d'un rectangle dont les sommets sont quatre des dix points donnés.

**Qu'en pensez-vous ?**

Notre visiteur lit attentivement la rubrique ***Procédures, obstacles et erreurs relevés***, constate qu'il n'y a qu'un seul rectangle CHGE




puis il s'arrête sur la suite de la fiche :

***Procédures, obstacles et erreurs relevés***

On arrive ainsi à deux parallélogrammes BJFD et CHGE. Pour contrôler ensuite si les angles sont droits, il est possible d'utiliser la règle et l'équerre, le rapporteur ou recourir à une analyse fine des positions des côtés par rapport aux lignes du quadrillage. Par exemple, pour BJFD, **on peut remarquer que les côtés BJ et DF suivent les nœuds du quadrillage et que ce n'est pas le cas pour les côtés BD et JF**.

***Exploitations didactiques***

On peut aller aussi plus loin dans la justification, en étudiant les « composantes » horizontale et verticale des segments (en tant que diagonales de rectangles portés par les lignes du quadrillage). Il s'agit ici d'une « initiation » tout à fait naturelle au concept de pente ou à celui de vecteur et de ses composantes dans un repère.

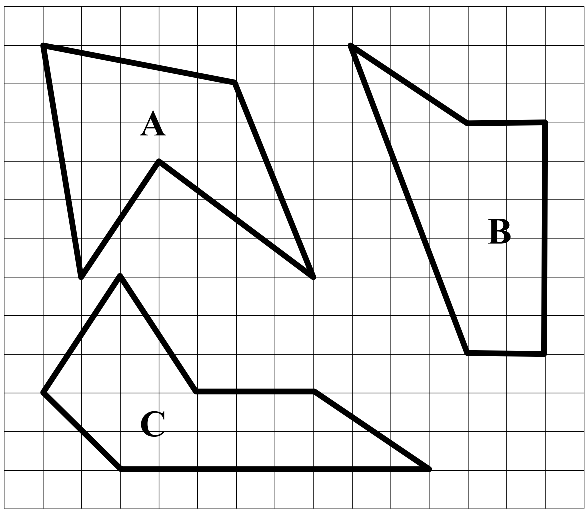
et insère ce nouveau problème dans son futur parcours :

**E** : « Selon moi, ce problème irait bien une ou deux semaines après « *Le mur de l'école (I)* » et, pour BFJD, je ferai remarquer que la comparaison des rapports est aussi efficace et généralisable : 3/3 ≠ 6/7 ».

### 3.4. Comparaison de figures

**Comparaison de figures** (cat. 6, 7, 8)

Patricia et Brigitte observent ces trois polygones et se demandent s'ils ont tous la même aire.




**Dites si les aires de ces trois polygones sont les mêmes ou sont différentes.**

**Montrez comment vous êtes arrivés à vos réponses.**

***Résultats***
…
Les moyennes obtenues peuvent sembler faibles mais il faut tenir compte que les points attribués dépendent de l'ensemble de la tâche : la recherche des aires des trois figures. Ce qui signifie, par exemple, que 39% (6 + 18 + 15) des groupes ont trouvé deux ou trois des aires, 28% n'en ont trouvé qu'une seule et 34 % ont commis trop d'erreurs et n'ont trouvé aucune aire correcte.

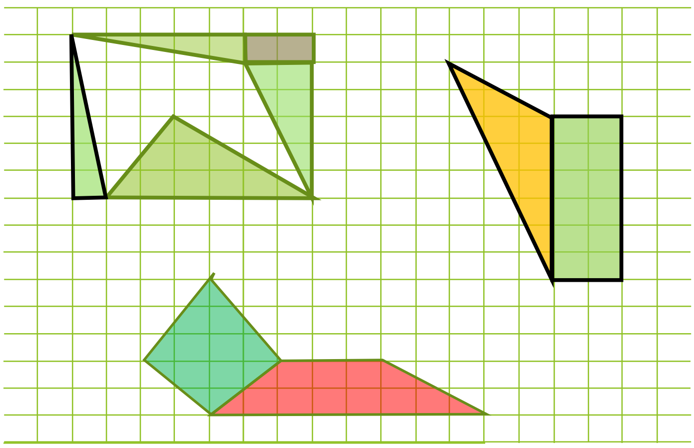
**E : «** Je vais voir si ma classe de catégorie 6 s'en tirera mieux ».

***Procédures, obstacles et erreurs relevés***
L'analyse a posteriori approfondie d'environ 350 copies de quatre sections a permis d'observer trois procédures principales :
…

**E** : « C'est bien long à lire, mais, effectivement il y a des observations que j'ai déjà rencontrées avec mes élèves. »

***Exploitations didactiques***
…
- la perception de la « grandeur » aire et sa distinction de la « grandeur » longueur ; la nécessité de choisir une unité d'aire qui soit la même pour toutes les figures,
- l'organisation du comptage et des regroupements de parties d'unité,
- la nécessité de décomposer les figures complexes en figures élémentaires au cas où les comptages et regroupements d'unités sont trop complexes,
- « l'additivité » des aires qui peut s'étendre à la « soustractivité » lorsqu'on encadre la figure dans un rectangle circonscrit,
- la maîtrise des formules de l'aire du rectangle mais aussi du triangle, la perception qu'un triangle est un demi-parallélogramme qui est-lui même équivalent à un rectangle,
- la totale inadéquation des tentatives de mesurage en cm.
...

**E** : « Je retiens *l'additivité et la soustractivité*, la maîtrise des formules (qui sont au programme), l'inadéquation des tentatives de mesurage pour la phase d'institutionnalisation, après la mise en commun et la discussion. Il y a là tout le programme de 6$^{e}$ et de 7$^{e}$ sur les calculs d'aires.
Et j'aimerais aussi que mes élèves puissent appliquer les formules sur les triangles et pourquoi pas sur le trapèze et le cerf-volant, et les vérifier avec le comptage un à un des carreaux. Je sais déjà qu'il y aura des problèmes avec le triangle jaune : on peut prendre comme « base » son côté vertical, de longueur 6 (côtés de carreau) mais ça ne sera pas facile de déterminer la « hauteur » correspondante !! »

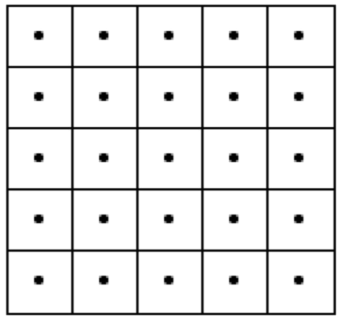


**E** : « Puis pour finir, nous allons passer aux mesures en cm pour montrer l'inefficacité de la procédure par mesurage ! »

### 3.5. Combien de distances

***Combien de distances ?*** ***(cat 7, 8)***

Un pépiniériste a planté des arbres très régulièrement sur un terrain de forme carrée, comme le montre ce dessin.
Son fils, qui a l'esprit mathématique, remarque que la distance entre deux arbres n'est pas toujours la même.
Il lui pose alors cette question : *« Combien existe-t-il de distances différentes entre deux arbres de ta plantation ? »*



**Répondez vous aussi à cette question.**

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

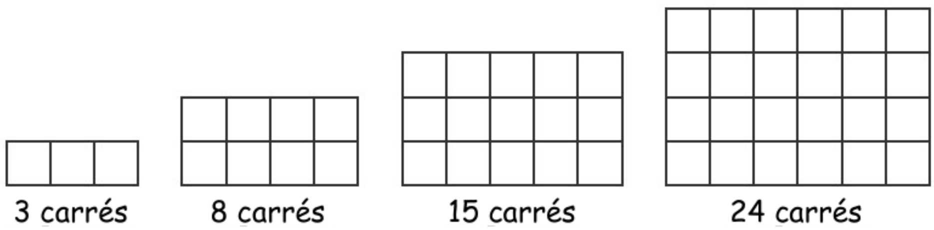
***Exploitations didactiques***
La seule comparaison qui nécessite une attention particulière est celle des deux diagonales d'un rectangle (1;4) et du carré (3;3). La différence est visible au compas ou par une construction précise d'un agrandissement de la grille. Elle peut aussi se faire par construction, sur quadrillage de carrés construits sur chacune des diagonales, puis par comptage des carreaux entiers et des parties de carreaux regroupées. Les aires de ces carrés sont respectivement 17 et 18 (en carreaux du quadrillage) et on peut en conclure, par déduction, que les deux segments sont différents. (Même sans Pythagore ni calculs de racines carrées !)

### 3. 6. Les grilles

*Les grilles* (cat. 4, 5, 6)

Asmine dessine une suite de grilles selon cette règle : pour chaque nouvelle grille elle ajoute une rangée et une colonne de carrés à la grille précédente.

Voici les quatre grilles qu'elle a déjà dessinées :




**En continuant à construire des grilles en respectant la même règle, pourrait-elle construire une grille avec exactement 112 carrés ?**

**Et une grille avec exactement 224 ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

**E :** « Ce problème me plaît bien, il y a une suite de nombres à découvrir qu'on peut vérifier par comptage des carrés sur des dessins. Mes élèves vont aimer ; ils adorent rechercher les « trucs » pour passer d'un nombre au suivant.
J'ai aussi beaucoup aimé l'étude citée en bibliographie : (http://www.projet-ermitage.org/ARMT/doc/etude-op88-fr.pdf) »[4]

Ce problème est une variante de Grilles (08.II.05) avec des modifications mineures. Les moyennes de points obtenues, pour les catégories correspondantes, sont très proches.

[4] Cette étude fait l'objet d'un « Approfondissement » du n° 9 de la Gazette de Transalpie.

L'extrait suivant est tiré de la fiche de cette première version du problème

***Exploitations didactiques***
Ce problème est intéressant pour renforcer ou construire les deux concepts suivants :
- l'aire du rectangle comme produit des mesures de ses deux dimensions, avec ses représentations géométriques par des grilles
- l'approche de suites ou de progressions avec les lois de passage d'une grille à la suivante, soit en augmentant à chaque fois les deux facteurs d'une unité, soit en additionnant les écarts successifs (qui sont eux-mêmes la suite des nombres impairs successifs)

Il permet encore de lutter contre la « tentation de la proportionnalité », c'est-à-dire l'application mécanique et non raisonnée de la règle réciproque de « si je double les dimensions, l'aire double aussi ».
Voir aussi la seconde version, avec modifications mineures, du problème Grilles (25.I.06). Les moyennes des points obtenues pour les catégories correspondantes sont pratiquement les mêmes.

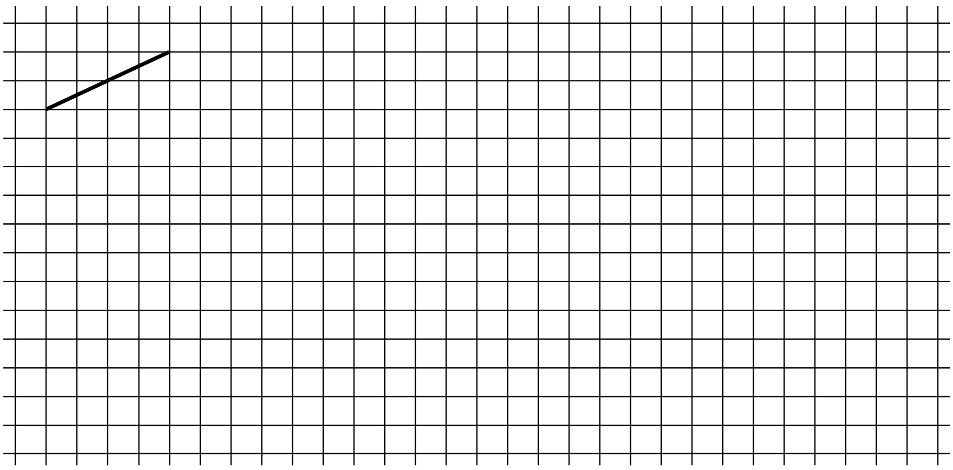
**E :** « La tentation de la proportionnalité risque bien d'être forte pour certains de mes élèves. »

### 3.7. Découpages de triangles

***Découpages de triangles*** (cat. 6, 7, 8)
Christine découpe des triangles dans une feuille quadrillée.
Tous ses triangles ont :
- deux côtés de même longueur que le segment déjà dessiné dans le quadrillage ci-dessous ;
- tous leurs sommets sont sur des points d'intersection du quadrillage.

**Combien Christine peut-elle découper de triangles différents ?**
(Qu'elle ne peut pas superposer après les avoir découpés.)

**Dessinez-les tous sur le quadrillage ci-dessous.**



**E** : Je constate dans la rubrique ***Résultats*** que la moyenne de 0,8 en catégorie 6, correspond à 55% des groupes qui n'ont trouvé qu'un seul triangle ou incompréhension et 23% avec deux triangles seulement !! Mes élèves reconnaîtront-ils le segment donné (2 × 4) ou (1 × 2) dessinés dans toutes les positions possibles après l'exploitation du problème *La table à déplacer* ? Et je suis d'accord avec la remarque suivante : »

***Exploitations didactiques***

Un problème comme « Découpages de triangles » permet de faire émerger des obstacles caractéristiques à propos de notions qui sembleraient acquises, comme le triangle isocèle, l'isométrie des angles et des côtés. On constate clairement que l'image du triangle isocèle qu'ont les élèves est celle d'une figure dont l'un des trois côtés est horizontal et les deux autres, isométriques sont obliques. …

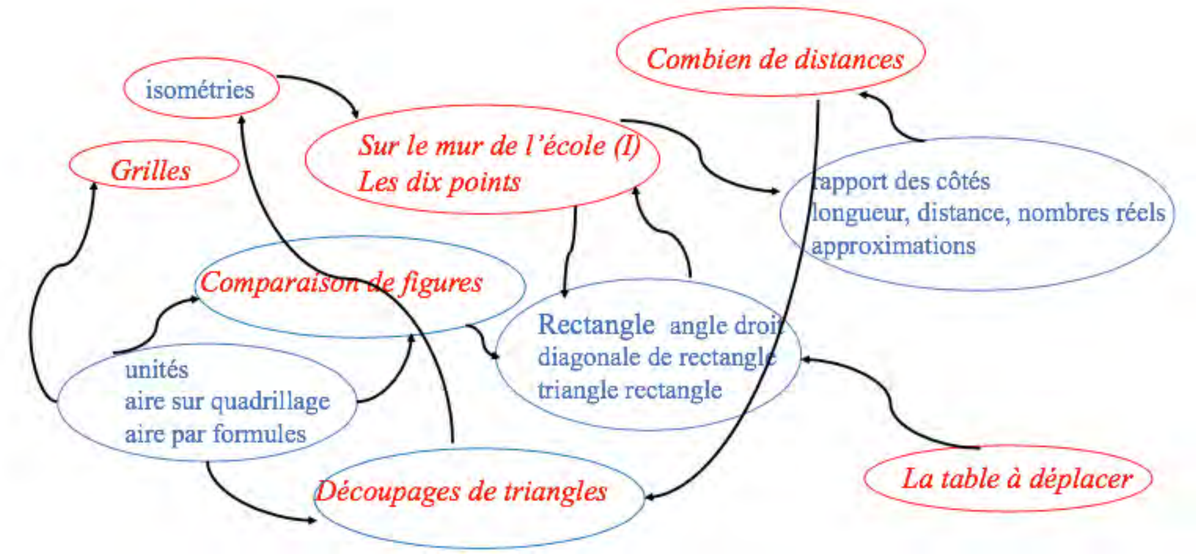
## 4. Le point sur la situation

### 4.1. Richesse et diversité

Nous avons vu sept problèmes : *La table à déplacer*, *Sur le mur de l'école (I)*, *Les dix points*, *Comparaison de figures*, *Combien de distances*, *Grilles*, *Découpages de triangles*.
Ces sept problèmes permettent de toucher une grande partie des matières au programme des classes correspondant à celles de notre catégorie 6 (11-12 ans) et beaucoup d'autres, des degrés précédents et des suivants. On y aborde : le rectangle, ses côtés, leur rapport, ses diagonales, ses angles, le triangle rectangle, les longueurs et les aires, les distances, les nombres réels, les approximations, les unités de longueur et d'aire, la géométrie sur quadrillage, les formules d'aire, les isométries, …
Les sept fiches correspondantes sont riches de constatations et observations recueillies à la lecture des copies d'élèves, puis de suggestions d'exploitations didactiques.
La banque offre donc une source de données très abondante. Elle ne peut cependant pas aller au-delà. La balle est dans le camp du visiteur.
**E** : « Il m'a bien fallu deux à trois heures pour examiner ces fiches de la banque : lire les énoncés, résoudre moi-même les sept problèmes, lire les rubriques attentivement, y repérer des idées pour ma classe. Mais il n'y a pas d'indications sur l'ordre dans lequel je peux organiser ces problèmes ! Je sens que je vais devoir organiser moi-même mon parcours ! ».

### 4.2. Parcours entre les problèmes - parcours d'apprentissage

Le thème de cette présentation est « Élaboration de parcours d'apprentissage à partir de problèmes de la banque ».
La visite a commencé par *La table à déplacer*. On aurait pu choisir un autre ordre, choisir d'autres problèmes : un autre parcours entre des problèmes de la banque.
En revenant à l'idée de départ de notre visiteur : *Rectangle et aire, ça m'intéresse*, on se rend compte que les sept problèmes peuvent faire progresser ses élèves dans la construction des concepts « rectangle », « aire » et tous les autres de la liste précédente. Le schéma suivant ne donne que quelques exemples de progressions entre problèmes et concepts ou notions.




### 4.3. La tâche de l'enseignant

Si la banque offre une source de données extrêmement riche et abondante, elle ne prétend pas se substituer à l'enseignant qui est entièrement responsable de la conduite de la classe, selon ses conceptions personnelles de l'enseignement et de l'apprentissage et selon les caractéristiques de sa classe. Voici un inventaire succinct de ses tâches :

***A. La préparation :***

- recherche des problèmes et esquisse de résolution,
- lecture de la fiche,
- liens avec les besoins de ses élèves et leur niveau,
- réflexion sur les connaissances, concepts, … programme

***B. L'organisation du parcours***

- détermination de la durée du parcours (qui, dans le cas des sept problèmes présentés, peut s'étendre sur deux à trois mois),
- ordre et répartition des activités

- pour chaque problème, les modalités de résolution, les mises en commun, les moments d'institutionnalisation, les activités de structuration

***C. Les autres contingences***

- différenciation, évaluation,
- le programme, les manuels,
- les relations entre élèves, les parents, la direction, …

## 5. Quelques réflexions en guise de conclusions

### 5.1. La résolution de problèmes

Les textes officiels d'accompagnement des programmes font tous référence à l'activité de résolution de problèmes, mais sans en préciser les modalités ni entrer dans les conceptions de l'apprentissage qui s'y rapportent. « Résoudre des problèmes » est une formule souvent interprétée comme une solution-miracle pour l'enseignement des mathématiques.
A la lecture des fiches de la banque, on se rend compte que les problèmes proposés ne possèdent en eux-mêmes aucun pouvoir magique. C'est en les résolvant que les élèves se posent des questions, cherchent à mettre en œuvre des savoirs déjà rencontrés ou à les adapter, ou à en imaginer d'autres. La réponse correcte n'a qu'un intérêt secondaire, ce sont les procédures de recherche, les échanges entre élèves, les moyens de surmonter les obstacles qui sont au cœur de l'activité mathématique.
La résolution des problèmes proposés par le RMT est soumise à des conditions particulières : l'élève se trouve devant une situation nouvelle, responsable de la recherche de la solution, en coopération avec des camarades, avec demande de décrire sa démarche de résolution.
Si le problème est exploité ultérieurement en classe, l'élève participera en plus à des échanges et discussions collectives, pour aboutir à des phases de synthèses, validations, explicitations des savoirs ou institutionnalisation.
L'enseignant qui opte pour cette exploitation didactique a fait un choix, difficile à gérer et, reconnaissons-le, audacieux ; car il est beaucoup plus simple de donner un problème comme application d'un savoir « enseigné » préalablement, sans se préoccuper d'autre chose que de la réponse, correcte ou erronée.
On peut rappeler ici que le contrat établi à l'entrée dans la banque (Voir 2.1) est clair et explicite :

> Quelles sont les conceptions de l'apprentissage sous-jacentes ?
> Ce travail de reconstruction de savoirs anciens ou de construction de savoirs nouveaux est l'enjeu du problème, mais il ne va pas se faire spontanément durant sa résolution. Il faut que les élèves prennent conscience des conceptions antagonistes du savoir en jeu : celles qui sont inadéquates ou erronées et celles qui permettront d'arriver aux solutions. Cette confrontation peut éventuellement s'ébaucher au sein du groupe d'élèves, mais le plus souvent, elle n'apparaît que lors d'un débat collectif organisé par le maître après que les élèves ont donné leurs réponses.

### 5.2. Un nouveau regard sur les « programmes »

Cette visite de la banque a commencé par une référence au « rectangle » et aux « aires », qu'on trouve dans tous les programmes de mathématiques. Mais on s'est bien vite rendu compte qu'il ne suffit pas de proposer aux élèves les sept problèmes envisagés pour que ceux-ci acquièrent les « compétences » ou « attentes » requises par les textes officiels. Les résultats relevés le montrent bien. Par exemple : le mot « rectangle » des programmes est connu des élèves bien avant l'âge de 11 ans, mais il est associé à une figure où la perpendicularité des côtés n'est pas perçue consciemment et il n'est seulement reconnu que dans certaines positions privilégiées ; la formule de l'aire du rectangle peut être mémorisée ou appliquée efficacement de manière algorithmique dans des cas particuliers seulement ; les élèves savent mesurer des longueurs avec leur règle mais ne savent pas interpréter les mesures obtenues lorsqu'elle ne sont pas des nombres entiers de cm ou de mm ; … Nos problèmes nous conduisent à découvrir ce qu'il y a dans la tête de ceux qui cherchent à les résoudre : des connaissances en construction et non encore achevées, pour autant qu'elles le soient un jour.
Chaque visiteur de la banque doit évidemment tenir compte des notions figurant dans son programme de mathématiques pour choisir les problèmes qu'il va utiliser ; mais ensuite il doit donner la priorité au développement dynamique des concepts abordés en fonction des besoins et capacités de ses élèves, indépendamment des textes officiels. Par exemple, dans la « géométrie sur quadrillage » illustrée par plusieurs des problèmes examinés, si les élèves découvrent que l'aire d'un carré, par décomposition, correspond à 10 carreaux unités, il n'est pas interdit de réfléchir sur la nature de la mesure du côté de ce carré, même si Pythagore ou l'étude des racines carrées ne figurent pas au programme.

### 5.3. L'avenir de la banque de problèmes du RMT

Un énorme effort a déjà été fourni par tous ceux qui, au sein du RMT, depuis plus de 20 ans, élaborent des problèmes, attribuent des points les copies des élèves, les analysent a posteriori, se penchent sur les résultats observés pour créer de nouveaux problèmes permettant de mieux cerner les passages importants dans la construction des connaissances. Les 1200 fiches actuelles de la banque en témoignent.
Nous terminons cet exposé par un appel.
Notre banque est une œuvre collective, vivante et en évolution. Elle est le reflet de ceux qui contribuent à son élaboration et qui l'utilisent : les animateurs de nos sections, tous ceux qui lisent les copies d'élèves et participent à l'attribution des points, les auteurs et lecteurs des problèmes, les groupes permanents de travail, tous ceux qui se lancent dans les analyses a posteriori, tous ceux qui utilisent nos problèmes en classe et proposent de nouveaux commentaires ou résultats.
A tous, nous demandons de participer à cette élaboration car il y a encore beaucoup à faire :

## Il faut continuer !!

- Compléter nos fiches, traduire et harmoniser.
- Décrire les familles, ou les redéfinir, ou en créer de plus précises.
- Analyser des copies, des copies, des copies … pour se rapprocher de la tâche de résolution de l'élève, de ses procédures, obstacles et difficultés.
- Proposer des suggestions d'exploitations didactiques, de liens avec d'autres problèmes.
- Expérimenter ou proposer des parcours d'apprentissage à partir de nos problèmes[5].

[5] Entre le moment de la présentation et sa publication dans la Gazette de Transalpie, nous avons reçu un bel exemple d'utilisation de nos problèmes .Voir l'article de Brunella Brogi en pages 121-123- de ce numéro 9.

# EXPLOITER LES RESSOURCES DIDACTIQUES DE L'ARMT EN CLASSE ET POUR LA FORMATION

**Florence Falguères e Christine le Moal**[1]

## Introduction

En 2015, dans la Gazette de Transalpie n°4, Lucia Grugnetti et François Jaquet écrivaient : *Les problèmes pouvaient-ils avoir une vie au-delà du palmarès du concours ?*

Quatre ans après, la « banque » alimentée par les problèmes du rallye et leurs analyses, compte plus de 1200 problèmes (énoncés des problèmes suivis d'analyses plus ou moins détaillées selon les cas) et le site internet est le berceau des Gazettes qui regroupent une quarantaine d'articles. Face à cette richesse didactique, une réponse affirmative à la question posée par les créateurs du rallye semble s'imposer.

Cependant, même si les programmes officiels encouragent les enseignants à accorder une place importante à la résolution de problèmes dans tous les pays où le RMT est proposé (voir Gazette n°4, *Éditorial* rédigé par François Jaquet), certains enseignants n'osent pas encore se lancer dans cette démarche et n'utilisent pas les problèmes du rallye en dehors de la compétition, même lorsqu'ils connaissent le rallye et y participent.

La réflexion qu'a menée la section de Franche-Comté est de s'interroger sur « *Comment les différents espaces numériques construits par l'ARMT et leurs contenus, de plus en plus riches d'informations, pourraient mieux interagir ensemble pour être utilisés non seulement dans le cadre de la classe mais aussi dans celui de la formation des enseignants* ».

Après une réflexion sur les nombreux outils et les liens développés entre eux actuellement par l'ARMT ainsi que sur les attentes des enseignants en terme d'accompagnement professionnel, un questionnement sur la réorganisation des espaces numériques de travail sera conduit à partir de l'idée d'un nouvel espace, accessible aux enseignants et aux formateurs.  Cette proposition s'inspirera des difficultés et des besoins des enseignants et sera nourrie par les études déjà menées par l'ARMT ou dans d'autres contextes de recherche.

## I. Cheminement de l'utilisateur des ressources proposées par l'ARMT

Cette première partie de l'article s'intéressera tout d'abord à l'organisation actuelle des ressources didactiques sur les sites construits par l'ARMT.

Ces ressources didactiques disponibles librement sur Internet ont évolué au fil des années, elles dépassent certainement par leur quantité et leur qualité ce que les premiers membres de l'ARMT auraient pu imaginer en créant le RMT (initialement, Rallye Mathématique Romand).

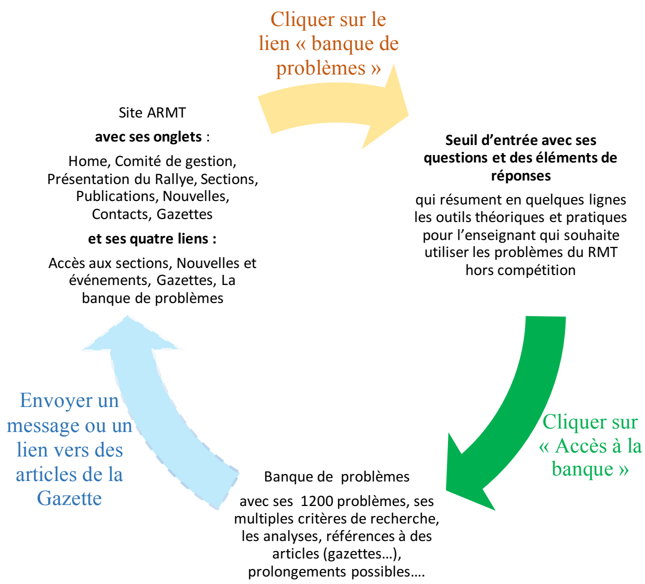
L'organisation des outils didactiques qui suivent, leur forme (articles, conseils, problèmes, analyses…) et leur nature se fait actuellement à partir de trois sites Web :

- Le site de l'ARMT a été créé en 2006 puis remis à jour il y a quelques années, il propose des espaces publics et des espaces réservés aux différentes sections qui participent au rallye[2]. Il présente sur son espace public, l'historique de l'association et de ses réalisations, son organisation (composition de son comité de gestion…), une présentation du rallye et des sections, les versions numériques des gazettes (brochures réalisées à partir des travaux des membres des sections ou des conférenciers qui sont invités aux rencontres internationales) et différents liens.
- La page qui se présente comme le seuil d'entrée dans la banque de problèmes fait techniquement le lien entre le site de l'Association du Rallye Mathématique Transalpin et l'accès à la Banque, mais donne surtout des éléments essentiels de compréhension à un utilisateur de la banque.
- La banque quant à elle est un outil qui propose tous les problèmes créés par les membres de l'association à l'occasion des rallyes successifs. Les énoncés sont souvent suivis d'analyses réalisées à partir des productions des élèves et de liens qui peuvent amener l'utilisateur vers un article d'une gazette ou qui l'invite à prendre contact avec l'association pour partager son expérience.

À ce jour, ces trois sites représentent trois espaces bien différents et chaque lien amène l'utilisateur à passer d'un site à l'autre dans un sens unique.

[1] Section Franche-Comté de l'ARMT.

[2] Un autre espace « privé » est actuellement en développement, l'Agora, plateforme qui permet d'archiver et de mettre à disposition des membres des sections des documents variés.




Les utilisateurs de ces sites sont des membres de l'association ou des personnes qui ont entendu parler du RMT et qui veulent en savoir plus, des enseignants et parfois des formateurs.

De quelle façon, ces ressources disponibles accompagnent librement ces professionnels de l'enseignement ?

## II. Cheminement de l'enseignant dans l'évolution de sa pratique

L'ARMT s'est déjà questionnée sur les conseils à donner aux enseignants qui souhaitent utiliser les contenus de la banque de problèmes. Le seuil d'entrée de la banque de problèmes en témoigne. Pour mémoire, voici les questionnements suggérés sur cette page Web :

a) De quel type de problèmes s'agit-il ?

b) À qui la banque s'adresse-t-elle et comment y sont organisés les problèmes ?

c) Quelles sont les conceptions de l'apprentissage sous-jacentes ?

d) Quel est le rôle de l'enseignant en résolution de problèmes ?

e) Comment y contribuer ?

L'utilisateur obtiendra, s'il le souhaite, une réponse concise d'une vingtaine de lignes à chacune de ces interrogations, mais l'enseignant qui ne s'intéresse à aucun de ces points ne pourra pas accéder au lien vers la banque de problèmes[3]. Cette précaution montre que pour l'ARMT, s'ouvrir à un enseignement basé sur la résolution de problème nécessite une préparation de laquelle il n'est pas possible de se passer. Quel enseignant peut prétendre maîtriser cette approche didactique ?

Cette deuxième partie se penche donc sur le cheminement de l'enseignant vers cette approche didactique, les paragraphes qui suivent prolongeront les questionnements déjà suggérés ci-dessus par des interrogations plus générales que peuvent légitimement se poser les enseignants :

*1) En quoi proposer des problèmes aux élèves participe à leurs apprentissages ?*

*2) Qu'est-ce qu'un (bon) problème, où en trouver, lequel choisir ?*

*3) Comment organiser une séance de résolution de problème ?*

*4) Comment intégrer ces séances de résolution dans la progression annuelle de l'enseignant ?*

*5) Comment évaluer les productions des élèves en résolution de problèmes ?*

---

[3] Pour y accéder, il devrait au moins « ouvrir » une de ces cinq rubriques et utiliser la case « accès à la banque ».

Pour chacun de ces questionnements, il sera constaté que des articles de la gazette ou des études menées a posteriori donnent déjà des éléments de réponses, ils sont donc susceptibles d'aider l'enseignant dans sa démarche et même participer à sa formation.

*1) En quoi proposer des problèmes aux élèves participe à leurs apprentissages mathématiques ?*

Ce premier questionnement rejoint la question posée sur la page Web qui est à l'entrée de la banque de problèmes : *Quelles sont les conceptions de l'apprentissage sous-jacentes ?* La réponse proposée évoque la conception de l'apprentissage « auto-socio-constructiviste[4] » dont les grandes lignes sont données en quelques mots. Dans l'article « *Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes* » de la Gazette de Transalpie n°4, Catherine Houdement donne aussi des éléments théoriques, elle évoque dans un des paragraphes, le point de vue de Julo, psychologue cognitiviste, sur l'activité de résolution de problèmes.

La didactique des mathématiques est extrêmement présente dans tous les types d'actions de l'ARMT : lors de l'élaboration des problèmes, des analyses *a priori*, des analyses *a posteriori,* dans les travaux de groupes, lors de l'écriture des articles ou des études, à l'occasion de rencontres internationales pendant lesquelles des didacticien(ne)s et psychologues ont éclairé et enrichi les réflexions. Certains étaient présents à titre d'invités : Gérard Vergnaud, Michèle Artigue, et d'autres en tant que membres de l'ARMT : Roland Charnay, Michel Henry, Catherine Houdement, … sans oublier les fondateurs du RMT François Jaquet et Lucia Grugnetti.

L'ARMT a toujours montré beaucoup d'intérêt pour la formation des enseignants, le rallye participe à l'élaboration d'analyses didactiques et ainsi peut servir à la formation des enseignants. D'ailleurs, la banque accessible librement ne s'adresse pas qu'à ces derniers, elle peut aussi s'adresser aux formateurs.

Présenter des théories didactiques comme la *théorie des situations didactiques* de Guy Brousseau, les théories de Gérard Vergnaud sur les suites de transformations qui interviennent dans un processus de résolution de problèmes et la dialectique outil/objet de Régine Douady (la liste n'est pas exhaustive) en compléments des travaux et des réflexions déjà menés serait parfaitement en cohérence avec l'esprit de ce qui a été construit par l'association depuis de longues années et permettrait à l'enseignant de s'intéresser à des outils précieux pour comprendre les processus d'apprentissage, mais ces outils agissent sur « un terrain » bien sensible… le terrain des élèves.

L'enseignant, une fois convaincu que mettre en place des situations de résolution de problèmes est nécessaire pour l'apprentissage de concepts mathématiques, pourra se lancer dans l'aventure. Cependant cela n'est pas si simple, comme il a été évoqué dans l'introduction, malgré les encouragements des institutions (quel que soit le pays), la mise en place de situations de résolution de problèmes semble poser des difficultés aux enseignants. Le cheminement proposé ci-dessus invite donc à se poser la deuxième question :

*2) Qu'est-ce qu'un (bon) problème, où en trouver ?*

Certains enseignants pensent répondre aux exigences institutionnelles, soit en proposant des activités ou exercices qui ont le titre de « problèmes » dans les manuels mais qui n'en sont pas vraiment, soit en imposant aux élèves, lors de la résolution d'un bon problème en classe ou à la maison, la procédure à suivre. Comment les aider à comprendre les caractéristiques de ce qu'est un problème mathématique et à trouver des supports qui en proposent.

C'est dans la Gazette de Transalpie n°7 et pendant une conférence à Pont-Saint-Martin que des éléments de réponse sont donnés respectivement par Michel Criton et Luc-Olivier Pochon.

Dans son article « la résolution des problèmes, un moteur pour développer la créativité » (Gazette de Transalpie n°7, Michel Criton écrivait : *une des définitions du mot « problème » est la suivante « question à résoudre dans un domaine quelconque, qui se présente avec un certain nombre de difficultés, d'obstacles à surmonter ». Pour résoudre un exercice, on connait à l'avance la ou les méthodes à appliquer. Pour résoudre un problème, on doit trouver, (parfois inventer) la méthode à utiliser, comme dans la vie…*

Mais les « vrais » problèmes sont-ils si simples à trouver pour les enseignants ? Plusieurs ressources sont à leur disposition : les manuels scolaires, leur créativité (voir éditorial de la gazette de Transalpie n°5 rédigé par François Jaquet : « *de l'exercice au problème* ») et les sites internet.

- Les nouveaux manuels ou documents scolaires semblent avoir bien évolué en France sur la question de vrais énoncés de problèmes, mais le nombre de problèmes proposés est très limité par chaque manuel.
- La création de problèmes n'est pas évidente, les membres des sections de l'ARMT pourraient en témoigner, cette tâche nécessite un grand travail entre collègues qu'il n'est pas toujours facile de mettre en place.
- Il reste à l'enseignant motivé à trouver des « bonnes adresses » sur Internet….

[4] Théorie de l'apprentissage initiée par le Groupe Français d'Éducation Nouvelle, créé en 1922.

Luc-Olivier Pochon, mathématicien et informaticien, s'est intéressé aux sites qui proposent des problèmes de mathématiques et à leur mode de classement de ces problèmes. Ces recherches présentées lors d'une conférence pendant la rencontre internationale de 2018 de Pont-Saint-Martin, soulignent bien la place privilégiée que la banque de problèmes du RMT prend sur Internet parmi les ressources de problèmes de mathématiques pour les enseignants, tant au niveau de sa richesse en problèmes (1200 problèmes) qu'au niveau de l'analyse de ces derniers ou même encore de son organisation.

La définition rappelée par Michel Criton ci-dessus montre que les problèmes du RMT sont de vrais problèmes et peuvent donc être source de nombreux apprentissages en dehors de la compétition.

D'autres mathématiciens mais aussi des psychologues se sont déjà penchés sur cette question de définir ce qu'est un problème. Jean Brun, psychologue, précise : « *il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation, où la situation n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est-à-dire qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple* ».

Cette citation rappelle que l'enseignant est le seul à connaître suffisamment ses élèves pour pouvoir choisir le problème qu'il convient de leur proposer. Il n'y a pas de recettes, d'une classe à l'autre, d'une année à l'autre, d'un groupe d'élèves à l'autre, la recherche du problème qui convient est sans cesse renouvelée.

*3) Comment organiser une séance de résolution de problèmes*

Sur le « *seuil d'entrée de la banque de problèmes* », un texte permet à l'utilisateur de prendre connaissance des spécificités des problèmes du RMT pour l'aider à comprendre l'outil qu'il s'apprête à utiliser à des fins didactiques. Sur cette page, l'enseignant pourra aussi trouver des recommandations sur son rôle en résolution de problèmes, celui-ci sera précisé en quatre phases : *choisir le problème*, *(...) proposer le problème dans des conditions où les élèves ont l'entière responsabilité de leur travail (...) organiser une mise en commun. (...) institutionnaliser les connaissances construites.* La description de ces étapes fait écho aux travaux réalisés par la didacticienne Régine Douady, déjà évoqués ci-dessus, qui s'intéressent à la pratique des *situations problèmes*.

Ces recommandations pourraient être prolongées par des connaissances didactiques complémentaires qui permettraient de préciser certains de ces points, car la tâche pour l'enseignant n'est pas simple, le plus difficile reste à faire, passer à la pratique !

La pratique l'amène à changer de posture : les attentes réciproques autour du savoir participent du *contrat didactique* définit par Guy Brousseau en 1986. Dans sa *théorie des situations didactique,* Brousseau s'intéresse aussi à la question d'*obstacles* comme Gaston Bachelard[5] avant lui. Connaître les différents types d'obstacles que peuvent rencontrer les élèves, être en mesure de les distinguer et comprendre leur origine n'est pas optionnel pour un enseignant, cela l'amènera à donner un autre statut à l'*erreur* et à réconcilier certains élèves avec les mathématiques.

Dans la banque de problèmes, à la suite d'un grand nombre d'énoncés, l'enseignant pourra trouver des informations concernant les obstacles et les erreurs qui ont été repérés lors de l'analyse des productions des copies des élèves, ce sera une aide précieuse lorsqu'il devra choisir le moment le plus opportun pour proposer le problème en classe.

*4) Comment intégrer ces séances de résolution dans la progression annuelle de l'enseignant ?*

Si plusieurs travaux ont été menés sur cette question par des membres de l'ARMT, un gros travail reste encore à faire, voici quelques références de travaux menés par François Jaquet et Michel Henry et qui peuvent toutefois donner des pistes de travail :

- En 2017, dans son article *Conditions pour la résolution de problèmes* (gazette n°7), François Jaquet, en s'appuyant sur l'analyse des procédures de résolutions du problème « *Chameaux et dromadaires* (cat 5, 6) » (24$^{e}$ RMT-2016), évoque dans quelles conditions un enseignant pouvait exploiter le problème en classe en dehors de l'épreuve. Plusieurs problèmes du RMT ont fait l'objet à partir de l'analyse *a posteriori* des productions des élèves, d'un approfondissement particulier qui a mené à une étude ou (et) à un article dans une gazette.
- En 2010, le groupe *Fonctions et suites* faisait l'étude du problème « *La machine à calculer* » (15. II. 10. Cat 5, 6, 7). Un lien permet à partir de la fiche problème d'accéder à l'étude.

---

5 Citons pour mémoire ces remarques célèbres de Bachelard : « *c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique… En fait, on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites … Quand il se présente à la culture scientifique, l'esprit n'est jamais jeune. Il est même très vieux, car il a l'âge de ses préjugés* ». Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris, J. Vrin, (1971), réédition 1996.

Il parait prudent pour un enseignant qui débute dans l'exploitation de problèmes du RMT en classe de prendre connaissance de ce type d'articles ou études dont la lecture lui épargnera certainement de nombreux écueils. Il pourra ainsi, bien outillé, proposer prioritairement ces problèmes déjà étudiés.

Mais un enseignant, à tort ou à raison, propose à ses élèves des séances de résolution de problèmes à des fins d'apprentissage, « à tort » car lequel ou laquelle d'entre nous n'est pas tombé dans le piège (de manière « inconsciente ») de mal interpréter une remarque, une pensée ou une intention d'élève en vue d'atteindre les objectifs qu'il ou elle s'était fixés préalablement ? Mais aussi « à raison », s'il connait bien le niveau de développement de ses élèves et *l'état de leur progression dans la construction de chaque concept ou savoir* (Gazette n°4 L. Grugnetti, F. Jaquet. *Les problèmes du RMT : l'élargissement*) et si le problème choisi est bien approprié (chercher les procédures possibles, prendre connaissance des éléments d'analyse *a posteriori*…). Cette phase est extrêmement délicate et déterminante, c'est elle qui guidera l'enseignant vers le choix des modalités d'exploitation didactique du problème.

Dans la Gazette n°4, dans l'article *Les problèmes du RMT : L'élargissement*, Lucia Grugnetti et François Jaquet proposent d'*utiliser ou exploiter le problème pour ...*

- Introduire un nouveau concept ou comme « point de départ » (lorsque les analyses du problème ont clairement fait apparaître ce concept et l'intérêt de la situation pour son approche).
- Confronter différents niveaux de construction d'un concept chez les élèves (par exemple pour provoquer le conflit aire/périmètre ou pour vérifier le distinction rectangle/parallélogramme comme les analyses de problèmes de la banque de problèmes l'ont vérifié).
- Développer les capacités de ses élèves dans les démarches de recherche (par exemple pour un problème où l'organisation rigoureuse d'un long inventaire s'est avérée nécessaire).
- Pour renforcer un savoir, pour la classe entière ou pour certains élèves (lorsque ce savoir a été bien identifié).

…

Cette liste montre la potentialité des situations de résolution de problèmes dans les apprentissages des élèves !

*5) Comment évaluer les productions des élèves en résolution de problèmes ?*

Après la mise en place d'une séance de résolution de problèmes, l'enseignant devra évaluer le travail des élèves. Pour l'évaluation des productions des élèves, là encore François Jaquet dans la gazette n°7, dans son article « conditions pour la résolution de problèmes » met en garde l'enseignant sur ses réactions face aux productions des élèves en citant G. de Vecchi :

*« Abandonner progressivement les modes d'évaluations traumatisants qui, chez certains enfants, détruisent la confiance dans leurs capacités, et éliminent leur désir d'apprendre…*

*Donner à l'erreur un statut positif, en la considérant comme un indicateur d'obstacle à renverser, sans lui faire porter le poids d'un jugement négatif ».*

(G. de Vecchi in *café pédagogique*, septembre 2008)

L'enseignant qui aura suscité l'intérêt de ses élèves, qui leur aura permis d'avancer dans la construction de leurs savoirs pendant la séance de résolution de problème, pourra alors être satisfait du travail accompli et s'il en éprouve l'envie, partager son expérience avec ses collègues enseignants ou même avec l'ARMT (contacts possibles à partir du site de l'ARMT ou de la banque de problèmes).

Cette partie montre, par ses très nombreuses références aux articles de la gazette, aux études menées, aux analyses a posteriori des problèmes … que tout enseignant dispose déjà dans les documents mis à sa disposition sur les différents sites, d'informations qui lui permettront d'expérimenter des séances de résolution de problèmes avec ses élèves. Cependant ces supports se trouvent actuellement sur des sites différents et nécessitent des navigations circulaires mais unilatérales comme le schéma le présentait.

## III. Perspectives

L'enjeu de la suite de cet article n'est donc pas d'augmenter de manière significative les contenus même si l'ajout de références aux travaux de didacticiens dont les théories permettent de mieux comprendre la conception de l'apprentissage par la résolution de problèmes semblerait nécessaire dans un objectif de formation mais de réorganiser les ressources et de les mettre davantage en lien pour qu'elles puissent être plus facilement accessibles et ainsi mieux accompagner des enseignants.

En se détachant totalement des contraintes techniques**,** la section de Franche-Comté s'est questionnée sur une organisation possible d'un nouvel espace de travail numérique qui se partagerait en trois grands sous-espaces **sans hiérarchie entre eux** et qui pourraient s'ouvrir simultanément :

- L'un permettrait d'accéder à quelques éléments théoriques, en reprenant les références déjà citées dans des articles et en les complétant. Ces théories se sont construites à partir d'observations et d'analyses des productions des élèves ce qui fait parfaitement écho à ce que font depuis de nombreuses années les membres du RMT lors de la rédaction d'études de problèmes (les exemples sont nombreux dans les différentes Gazettes)[6].

- Un autre sous-espace serait la banque de problèmes elle-même. La banque de problèmes du RMT, même si quelques améliorations d'ordre pratique sont toujours possibles, est un outil admirablement bien construit qui ne se contente pas de permettre à son utilisateur d'accéder à un grand nombre de problèmes de qualité et leurs analyses, mais qui lui laisse aussi la possibilité de faire sa recherche selon des entrées multiples.

- Le dernier sous-espace serait consacré à la pratique de l'enseignant en classe et pourrait ainsi donner des outils pour les étapes de mise en place de cette pratique : organisation des séances, place des problèmes dans la progression, posture de l'enseignant, gestion des obstacles et des erreurs, l'organisation du milieu… Les enseignants pourraient aussi témoigner de leurs expériences et les partager par le biais d'une fenêtre d'expression. Cette partie-là serait, plus que les autres, à construire, si l'accès aux problèmes peut se faire sur la banque selon 6 critères de recherche, les articles des gazettes qui proposent beaucoup d'aides diverses pour la pratique de la classe sont actuellement rangés dans l'ordre chronologique de leur rédaction, la recherche nécessite d'ouvrir beaucoup de fenêtre avant d'accéder au paragraphe, au contenu recherché à moins d'avoir eu connaissance de l'article par l'intermédiaire de la banque de problèmes.

## Conclusion

Un enseignant, pour construire des situations d'apprentissage, doit disposer de « problèmes bien choisis » qui permettront aux élèves de construire un concept. Il doit connaître des théories qui donneront du sens à ses choix et l'accompagneront à toutes les étapes du dispositif d'apprentissage. Et il doit être en mesure de créer l'environnement propice à cet apprentissage, ce qui nécessite une bonne maîtrise du problème choisi et une bonne connaissance de ses élèves, conditions que seule une pratique régulière peut lui permettre d'acquérir.

Ces trois conditions complémentaires sont sans cesse en interaction pendant la mise en place de la situation didactique. Dans le poster réalisé par la section de Franche-Comté à l'occasion de la rencontre de l'ARMT de Pont Saint Martin, nous avons choisi comme exemple de concept la construction de la notion de fonction. Dans cet objectif, nous avons exploré la banque de problèmes du RMT et sélectionné le problème « La machine à calculer » dont l'énoncé était suivi d'une monographie liée à une fiche développée dans la banque de problèmes. Lors de l'expérience décrite dans la monographie, les élèves avaient travaillé dans des conditions satisfaisantes de résolution de problèmes (voir théorie des situations didactiques), et les observateurs ont pu exploiter les productions des élèves pour construire une étude. Celle-ci indique les procédures, les obstacles et les erreurs relevés susceptibles d'éclairer l'enseignant sur ce qui pourra se vivre dans sa classe. L'étude donne aussi dans un paragraphe « exploitation didactique » des extraits commentés de copies organisés selon une progression de l'acquisition de la notion de fonction. La bibliographie qui termine l'article montre que cette analyse s'appuie sur des travaux de recherche en didactique.

Cet exemple illustre bien la position prise dans cette monographie et dans le contenu du poster (en Annexe) par la section de Franche-Comté : pour mieux appréhender le rapport entre apprentissage et résolution de problèmes, l'enseignant a besoin d'une formation adaptée, d'outils construits à partir d'observations de travaux d'élèves, et également de références à des études menées dans le cadre de recherche en didactique. Les ressources ont alors un grand rôle à jouer, encore faut-il qu'elles puissent s'organiser de telle sorte que leur complémentarité soit mise en exergue et que l'accès à leur contenu soit facilité.

## Bibliographie

- ANSELMO, B. & HENRY, M. (2017). Les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin, une ressource pour la formation des enseignants / I problemi del Rally Matematico Transalpino, una risorsa per la formazione degli insegnanti, *La Gazette de Transalpie* n°5, http://www.armtint.org.

- BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en*

[6] La section de Franche-Comté dispose d'éléments concernant les approches de théories didactiques qui pourraient figurer dans un tel espace.

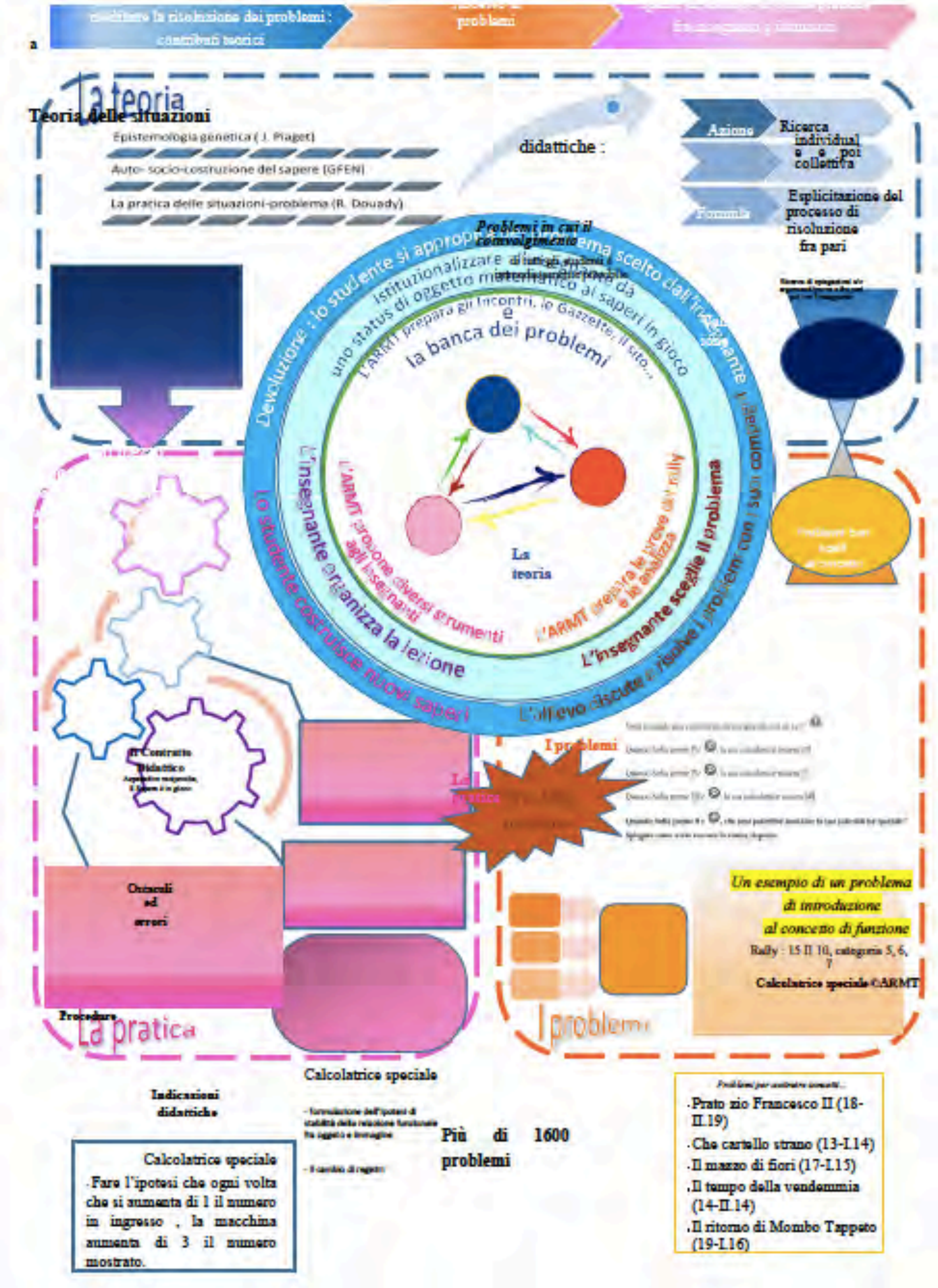
*Didactique des Mathématiques*, vol. 7 n°2, ed. La pensée sauvage, Grenoble**.**

- BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9 n°3, ed. La pensée sauvage, Grenoble**.**
- DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, La pensée sauvage, Grenoble.
- GRUGNETTI L. & JAQUET F. (2015). I problemi del RMT: ampliamento progressivo delle loro finalità / Les problèmes du RMT : l'élargissement progressif de leurs finalités, *La Gazette de Transalpie* n°4, http://www.armtint.org.
- HENRY, M. (2010). Erreurs et obstacles, schèmes et concepts / Errori e ostacoli, schemi e concetti, *La Gazette de Transalpie* n°0, http://www.armtint.org.
- HOUDEMENT, C. (2015). Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes / RMT, punto d'incontro tra insegnanti e risoluzione di problemi, *La Gazette de Transalpie* n°4, http://www.armtint.org.
- VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* n°6, vol. 10 n° 2, 3, La pensée sauvage, Grenoble

**Sitologie**

Pour la Gazette de Transalpie, voir le lien « La Gazette » dans le site www.armtint.org

## Annexe


La teoria
Teoria delle situazioni
Epistemologia genetica (J. Piaget)
Auto- socio-costruzione del sapere (GFEN)
La pratica delle situazioni-problema (R. Douady)
didattiche :
Azione
Ricerca individual e poi collettiva
Formula
Esplicitazione del processo di risoluzione fra pari
Problemi in cui il coinvolgimento
Devoluzione : lo studente si appropria del problema scelto dall'insegnante
istituzionalizzare
uno status di oggetto matematico ai saperi in gioco
L'ARMT prepara gli incontri, le Gazzette, il sito...
e
la banca dei problemi
La teoria
L'insegnante organizza la lezione
L'ARMT propone diversi strumenti agli insegnanti
L'ARMT prepara le prove del rally e le analizza
L'insegnante sceglie il problema
Lo studente costruisce nuovi saperi
L'allievo discute e risolve i problemi con i suoi compagni
Il Contratto Didattico
Ostacoli ed errori
Procedure
La pratica
I problemi
Un esempio di un problema di introduzione al concetto di funzione
Rally : 15 II 10, categoria 5, 6, 7
Calcolatrice speciale ©ARMT
I problemi
Calcolatrice speciale
Indicazioni didattiche
Più di 1600 problemi
Calcolatrice speciale
Fare l'ipotesi che ogni volta che si aumenta di 1 il numero in ingresso , la macchina aumenta di 3 il numero mostrato.
Prato zio Francesco II (18-II.19)
Che cartello strano (13-I.14)
Il mazzo di fiori (17-I.15)
Il tempo della vendemmia (14-II.14)
Il ritorno di Mombo Tappeto (19-I.16)

# METTERE A FRUTTO LE RISORSE DIDATTICHE DELL'ARMT IN CLASSE E NELLA FORMAZIONE

**Florence Falguères e Christine le Moal**[1]

## Introduzione

Nel 2015, in un articolo della Gazzetta di transalpino n° 4, Lucia Grugnetti e François Jaquet avevano scritto: *I problemi possono rivestire un ruolo al li là di una classifica all'interno della gara?*

Quattro anni dopo, la Banca di problemi", alimentata dai problemi del Rally matematico transalpino (RMT) e dalle loro analisi, conta più di 1200 problemi (enunciati seguiti da analisi che possono essere più o meno dettagliate, secondo i casi) e il sito Internet è la "culla" dei numeri della Gazzetta che raccolgono una quarantina di articoli. Di fronte a questa ricchezza didattica, sembra che la risposta alla domanda dei creatori del rally, sia affermativa.

Tuttavia, anche se i programmi ufficiali incoraggiano gli insegnanti ad accordare un posto importante alla risoluzione di problemi in tutti i paesi nei quali il RMT è proposto (si veda *la Gazzetta* n° 4, *Editoriale* di François Jaquet), alcuni insegnanti non osano ancora lanciarsi su questa strada e non utilizzano i problemi del RMT al di là della gara, anche se lo conoscono e vi partecipano.

La riflessione che ha fatto la sezione della Franche-Comté è quella di interrogarsi su "*Come potrebbero interagire al meglio i diversi siti Internet costruiti dall'ARMT, sempre più ricchi di informazioni, al fine di essere utilizzati non solo nell'ambito della classe, ma anche in quello della formazione degli insegnanti*"?

Dopo alcune riflessioni sui numerosi strumenti e le loro interconnessioni sviluppati attualmente dall'ARMT e anche sulle attese degli insegnanti in termini di accompagnamento professionale, presenteremo una proposta sulla riorganizzazione dei nostri spazi Internet di lavoro a partire dall'idea di un nuovo spazio, accessibile agli insegnanti e ai formatori. Questa proposta si ispira alle difficoltà e ai bisogni degli insegnanti e sarà "nutrita" da studi già sviluppati nell'ambito dell'ARMT o in altri contesti di ricerca.

## I. Percorso dell'utilizzatore delle risorse proposte all'ARMT

Questa prima parte dell'articolo si interessa dapprima all'organizzazione attuale delle risorse didattiche sui siti costruiti dall'ARMT.

Tali risorse didattiche, disponibili su Internet con accesso libero, si sono evolute nel corso degli anni e ora vanno certamente ben oltre, per qualità e quantità, le aspettative immaginate da coloro che avevano dato vita al RMT (inizialmente Rallye Mathématique Romand).

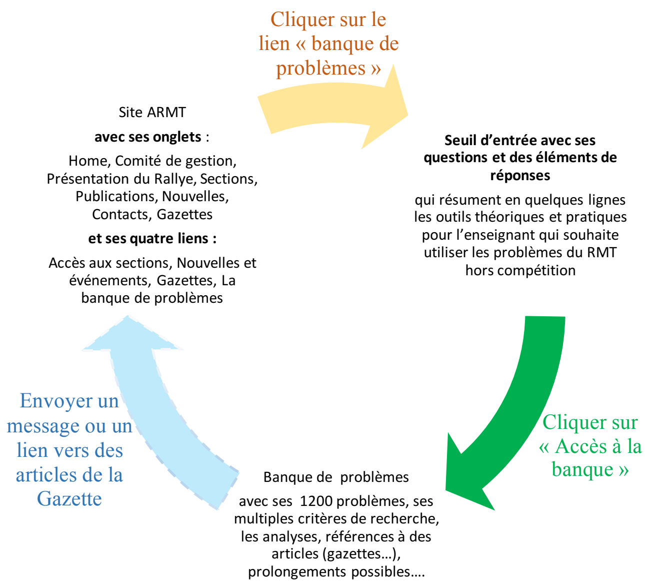
L'organizzazione degli strumenti didattici che seguono, la loro forma (articoli, suggerimenti, problemi, analisi…) e la loro natura fanno attualmente riferimento a tre siti Web:

- il sito dell'ARMT, creato nel 2006 e poi aggiornato qualche anno fa, che propone sia spazi pubblici sia spazi privati riservati alle sezioni che partecipano al RMT[2]. Presenta sul suo spazio pubblico la storia dell'associazione e delle sue realizzazioni, la sua organizzazione (composizione del comitato di gestione…), una presentazione del rally nella quale vengono ricordate le concezioni pedagogiche e didattiche, una presentazione delle sezioni, i numeri on line della Gazzetta di Transalpino (pubblicazione realizzata a partire da lavori di membri delle sezioni o di conferenze di esperti invitati ai suoi convegni internazionali) e diversi link;
- la pagina soglia d'entrata nella Banca di problemi e che tecnicamente è una interconnessione fra l'Associazione del Rally Matematico Transalpino e l'accesso alla Banca, ma offre soprattutto elementi essenziali di comprensione a un utilizzatore della banca;
- la Banca che, da parte sua, è uno strumento per proporre tutti i problemi creati dai membri dell'associazione per le diverse edizioni del rally. Gli enunciati sono sovente seguiti da analisi realizzate a partire dagli elaborati degli allievi e link che possono condurre l'utilizzatore verso un articolo di un certo numero della Gazzetta o che lo invitano a prendere contatto con l'associazione per condividere la propria esperienza.

Attualmente si può passare da un sito all'altro in un unico senso

[1] Sezione Franche-Comté dell'ARMT.

[2] Un altro spazio "privato" viene attualmente sviluppato, Agora, piattaforma che permette di archiviare e mettere a disposizione dei membri delle sezioni vari documenti.




Gli utilizzatori di questi siti sono membri dell'associazione o persone che hanno sentito parlare del RMT e che vogliono saperne di più, insegnanti e, talvolta, formatori.

In quale modo queste risorse disponibili accompagnano liberamente questi professionisti dell'insegnamento?

## II. Percorso dell'insegnante nell'evoluzione della sua professione

L'ARMT si è già posta domande sui suggerimenti da dare agli insegnanti che desiderano utilizzare i contenuti della banca di problemi. La soglia d'entrata della banca ne è una testimonianza. A livello informatico, le domande o rubriche di questa pagina Web sono le seguenti:

Di quale tipo di problemi si tratta?

Chi sono i destinatari della banca e come sono organizzati i problemi?

Quali sono le concezioni dell'apprendimento soggiacenti?

Qual è il ruolo dell'insegnante nell'ambito della risoluzione di problemi?

Come contribuire?

L'utilizzatore, se lo desidera, otterrà, una risposta concisa di una ventina di righe a ciascuna delle richieste, ma l'insegnante che non sia interessato ad alcuna di tali domande non potrà accedere al link verso la banca di problemi[3]. Questa precauzione mostra che per l'ARMT aprirsi ad un insegnamento basato sulla risoluzione di problemi necessita di una preparazione che non è possibile evitare. Quale insegnante può essere certo di padroneggiare questo approccio didattico?

Questa seconda parte si occupa pertanto del percorso dell'insegnante verso tale approccio didattico; i paragrafi che seguono andranno oltre le questioni già evocate più sopra con interrogativi più generali, che gli insegnanti possono legittimamente porsi:

*1) Come contribuisce all'acquisizione di conoscenze matematiche il proporre problemi agli allievi?*

*2) Che cos'è un (buon) problema, dove trovarne, quali scegliere?*

*3) Come organizzare una lezione mediante la risoluzione di problemi?*

*4) Come integrare queste attività di risoluzione di problemi nella programmazione annuale dell'insegnante?*

*5) Come valutare le produzioni degli allievi in merito alla risoluzione di problemi?*

[3] Per accedervi dovrebbe almeno "aprire" una delle cinque rubriche e utilizzare la casella "accesso alla banca".

Per ognuna di queste domande va osservato che alcuni articoli della Gazzetta di Transalpino o altri studi con analisi a posteriori degli elaborati degli allievi, offrono già elementi di risposta e possono aiutare l'insegnante nella sua didattica di classe e anche contribuire alla sua formazione.

*1) Come contribuisce all'acquisizione di conoscenze matematiche il proporre problemi agli allievi?*

Questa prima domanda si collega a una delle domande sulla pagina Web all'entrata della Banca di Problemi: *Quali sono le concezioni dell'apprendimento soggiacenti?*

La risposta proposta evoca la concezione dell'apprendimento di tipo "socio-costruttivista[4]" di cui vengono ricordate le idee principali. Nell'articolo "*RMT, punto d'incontro tra insegnanti e risoluzione di problemi*" della Gazzetta di Transalpino n. 4, Catherine Houdement espone alcuni ulteriori elementi teorici e fa riferimento in particolare, in uno dei paragrafi, al punto di vista dello psicologo cognitivista Jean Julo, sull'attività di risoluzione di problemi.

La didattica della matematica è fortemente presente in tutti i tipi di azione dell'ARMT: all'atto dell'elaborazione dei problemi, delle analisi *a priori*, delle analisi *a posteriori*, nei lavori di gruppo, negli articoli e negli approfondimenti, nei suoi incontri internazionali, nell'ambito dei quali didattici e psicologi hanno arricchito tali riflessioni. Alcuni erano presenti in quanto invitati, come ad esempio Gérard Vergnaud, Michèle Artigue, e altri come membri dell'ARMT: Roland Charnay, Michel Henry, Catherine Houdement, … senza dimenticare i fondatori del RMT François Jaquet e Lucia Grugnetti.

L'ARMT ha sempre mostrato interesse verso la formazione degli insegnanti e si impegna nell'elaborazione di analisi didattiche che possono essere utili alla formazione degli insegnanti. D'altronde, la Banca di problemi ha un accesso libero e può rivolgersi anche ai formatori.

Presentare teorie didattiche come *théorie des situations didactiques* di Guy Brousseau, le teorie di Gérard Vergnaud sulla successione delle trasformazioni che intervengono in un processo di risoluzione di problemi e la dialettica strumento/oggetto di Régine Douady (la lista non è esaustiva), come complemento dei lavori e delle riflessioni già condotti, sarebbe coerente con lo spirito di ciò che è stato costruito dall'associazione in tanti anni e permetterebbe all'insegnante di interessarsi a strumenti preziosi per capire i processi di apprendimento, purché questi strumenti agiscano "su un terreno" sensibile… quello dell'allievo.

L'insegnante potrà lanciarsi in tale avventura una volta convinto del fatto che mettere in pratica situazioni di risoluzione di problemi sia necessario per l'apprendimento dei concetti matematici. Questo però non è semplice, come ricordato nell'introduzione (qualunque sia il paese); il ricorso a situazioni di risoluzione di problemi sembra incontrare resistenze presso gli insegnanti. E questo porta a porsi una seconda domanda:

*2) Che cos'è un (buon) problema, dove trovarne, quali scegliere?*

Alcuni insegnanti pensano di rispondere alle esigenze istituzionali sia proponendo attività o esercizi aventi come titolo "problemi" nel libro di testo, ma che in effetti non lo sono, sia imponendo agli allievi, di fronte a buoni problemi dati in classe o a casa, la procedura da seguire. Come aiutarli a capire le caratteristiche di quello che è un problema matematico e a trovare dei supporti che ne propongano?

Nel n. 7 della Gazzetta di Transalpino e in una conferenza all'incontro internazionale dell'ARMT a Pont-Saint-Martin (Italia) vengono dati elementi di risposta rispettivamente da Criton e Luc-Olivier Pochon.

Nel suo articolo dal titolo "La risoluzione di problemi, un motore per sviluppare la creatività" Michel Criton scriveva: *Una delle definizioni del termine "problema" è la seguente: "questione da risolvere in un ambito qualunque, che si presenta con un certo numero di difficoltà, di ostacoli".*

*Per risolvere un esercizio, si conoscono in anticipo il metodo o i metodi da applicare.*

*Per risolvere un problema, è necessario trovare (talvolta inventare) il metodo da utilizzare, come nella vita...*

Ma i "veri" problemi sono semplici da trovare per gli insegnanti? Diversi mezzi sono a loro disposizione: i testi scolastici, la loro creatività (si veda l'editoriale del n. 5 della Gazzetta di Transalpino redatto da François Jaquet "dall'esercizio al problema") e i siti internet.

- I nuovi libri di testo o documenti per la scuola sembrano essersi evoluti in Francia sulla questione relativa a veri enunciati di problemi, ma quelli proposti nei vari libri di testo sono ancora pochissimi

[4] Teoria dell'apprendimento alla quale ha dato l'avvio il *Groupe Français d'Éducation Nouvelle*, creato nel 1922.

- La creazione di problemi non è semplice, i membri delle sezioni dell'ARMT potrebbe testimoniarlo; questo compito richiede un gran lavoro tra colleghi e non è sempre facile da realizzare.

- All'insegnante motivato resta da trovare "buoni indirizzi" su Internet… ….

Luc-Olivier Pochon, matematico e informatico, si è interessato ai siti che propongono problemi di matematica e alla maniera nella quale sono classificati. Queste ricerche, presentate nella sua conferenza nell'ambito del convegno internazionale dell'ARMT a Pont Saint Martin, sottolineano chiaramente il posto privilegiato che la Banca di Problemi del RMT sta prendendo su Internet tra le varie risorse di problemi di matematica per gli insegnanti, sia a livello della ricchezza in quantità di problemi (1200) sia a livello delle loro analisi e anche per la sua organizzazione.

La definizione ricordata più sopra da Michel Criton mostra che i problemi del RMT sono dei veri problemi e possono pertanto essere sorgente di numerosi apprendimenti al di là della gara.

Anche altri matematici, ma anche psicologi, si sono occupati di cercare di definire che cosa sia un problema. Jean Brun, psicologo, precisa che *c'è un problema solo nel rapporto soggetto/situazione dove la situazione non è subito disponibile, ma è possibile costruirla. Cioè che un problema per qualcuno può non esserlo, mentre per un altro sì, e questo, ad esempio, in funzione del livello di sviluppo intellettuale.*

Questa citazione implica che sia l'insegnante, che è il solo a conoscere sufficientemente gli allievi, a scegliere il problema che conviene proporre loro. Non ci sono ricette, da una classe all'altra, da un anno all'altro, da un gruppo di allievi all'altro: la ricerca del problema che può andare bene è costantemente nuova.

*3) Come organizzare una lezione con la risoluzione di problemi?*

Nella pagina di entrata nella Banca di Problemi, un testo permette all'utilizzatore di venire a conoscenza delle specificità dei problemi del RMT, per aiutare a capire lo strumento che si prepara ad utilizzare a fini didattici. Su tale pagina l'insegnante potrà anche trovare alcune raccomandazioni sul suo ruolo in fase di risoluzione di problemi e precisamente secondo quattro fasi: *scegliere il problema, (…) proporre il problema in condizioni nelle quali gli allievi abbiano l'intera responsabilità del loro lavoro, (…) organizzare una messa in comune, (…) istituzionalizzare le conoscenze costruite.* La descrizione di queste tappe fa eco ai lavori realizzati dalla didattica Régine Douady, già ricordata più sopra, che si interessa alla pratica delle *situazioni problema*.

Queste raccomandazioni potrebbero essere accompagnate da conoscenze didattiche complementari, che permetterebbero di precisare alcuni punti, in quanto il compito dell'insegnante non è semplice e la parte più difficile resta da compiere: passare alla messa in opera in classe!

La pratica di classe porta l'insegnante a cambiare "atteggiamento", le attese reciproche intorno al sapere partecipano al *contratto didattico* definito da Guy Brousseau nel 1986. Nella sua *teoria delle situazioni didattiche* Brousseau si interessa anche alla questione di *ostacolo* come Gaston Bachelard[5] prima lui. Conoscere i diversi tipi di ostacolo che possono incontrare gli allievi, essere capaci di distinguerli e capirne le ragioni, non è facoltativo per un insegnante e questo lo porterà ad attribuire un altro statuto all'errore e a riconciliare alcuni allievi con la matematica.

Nella Banca di Problemi, che riporta un gran numero di enunciati, l'insegnante potrà trovare informazioni riguardanti gli ostacoli e gli errori individuati nell'analisi degli elaborati degli allievi; sarà questo un aiuto prezioso quando dovrà scegliere il momento più opportuno per proporre un certo problema in classe.

*4) Come integrare queste attività di risoluzione di problemi nella programmazione annuale dell'insegnante?*

Se da un lato sono stati sviluppati svariati lavori su tale questione da parte dei membri dell'ARMT, dall'altro resta ancora un grosso lavoro da fare. Qui di seguito comunque sono riportati alcuni riferimenti ai lavori di François Jaquet e Michel Henry che possono indicare delle piste di lavoro:

- Nel 2017, nel suo articolo *Condizioni per la risoluzione di problemi* (Gazzetta di Transalpino n. 7), François Jaquet, basandosi sull'analisi di procedure di risoluzione del problema "*Cammelli e dromedari* (Cat. 5, 6)" (24° RMT-2016), indica in quali condizioni un insegnante possa utilizzare il problema in classe al di là della prova. Diversi problemi del RMT sono stati oggetto di un approfondimento particolare a partire dalle produzioni degli allievi, fino a diventare un articolo pubblicato sulla Gazzetta.

- Nel 2010, Il gruppo *funzioni e successioni* aveva studiato il problema "*Calcolatrice speciale*" (15. II. 10. Cat. 5, 6, 7). Un link permette di passare dalla scheda del problema al suo approfondimento.

---

[5] Citiamo queste celebri osservazioni di Bachelard: « *c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique… En fait, on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites … Quand il se présente à la culture scientifique, l'esprit n'est jamais jeune. Il est même très vieux, car il a l'âge de ses préjugés* ». Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris, J. Vrin, (1971), réédition 1996.

Sembra opportuno che un insegnante che "debutta" nell'uso di problemi del RMT in classe prenda visione di questo tipo di articoli o di approfondimenti, la cui lettura gli risparmierà certamente numerose insidie. Potrà così, ben attrezzato, proporre prioritariamente questi problemi già analizzati.

Un insegnante propone ai suoi allievi, nel bene o nel male, attività per l'apprendimento con la risoluzione di problemi. "Nel male", dal momento che chi fra noi non è caduto nel tranello (in maniera "non conscia") di interpretare male un'osservazione, un pensiero o un'intenzione dell'allievo in vista del raggiungimento di obiettivi prefissati? Ma anche "nel bene", laddove l'insegnante conosca bene il livello di sviluppo dei propri allievi, *per effettuare il passaggio essenziale, ma delicato, è necessario conoscere la classe, gli allievi, i loro percorsi didattici e lo stato della loro progressione nella costruzione di ogni concetto o sapere* (Gazzetta di Transalpino n. 4 L. Grugnetti, F. Jaquet. *I problemi del RMT: ampliamento progressivo delle loro finalità*) e inoltre sappia se il problema scelto è appropriato (cercare le procedure possibili, conoscere elementi di analisi *a posteriori*…). Questa fase è estremamente delicata e determinante ed è quella che guiderà l'insegnante verso la scelta di modalità di utilizzazione didattica del problema.

Nella Gazzetta n. 4, nell'articolo citato, Lucia Grugnetti e François Jaquet propongono di *utilizzare il problema per*

- *introdurre un nuovo concetto o come "punto di partenza" (laddove le analisi del problema abbiano fatto apparire chiaramente questo concetto e l'interesse della situazione per un suo approccio);*
- *confrontare diversi livelli di costruzione di un concetto per i propri allievi (per esempio, per provocare il conflitto area/perimetro o per verificare la distinzione rettangolo/parallelogramma come le analisi dei problemi della banca hanno verificato);*
- *sviluppare le capacità dei propri allievi nelle procedure di ricerca (per esempio, per un problema dove l'organizzazione rigorosa di un lungo inventario si è rivelata necessaria);*
- *per rinforzare un sapere per la classe intera o per alcuni allievi (laddove tale sapere sia stato ben identificato);*
- ...

Questo elenco mette in evidenza la potenzialità delle situazioni di risoluzione di problemi al fine dell'apprendimento degli allievi!

*5) Come valutare le produzioni degli allievi in merito alla risoluzione di problemi?*

Dopo una attività con i problemi, l'insegnante dovrà valutare il lavoro degli allievi. Per quanto riguarda la valutazione, ancora François Jaquet, nel suo articolo pubblicato nel numero 7 della Gazzetta di Transalpino, mette in guardia l'insegnante sulle sue reazioni di fronte alle produzioni degli allievi con una citazione di G. de Vecchi:

*Abbandonare progressivamente le modalità di valutazione traumatiche che, nel caso di certi allievi, distruggono la confidenza nelle proprie capacità e cancellano il loro desiderio di apprendere…*

*Dare all'errore uno statuto positivo, considerandolo come un indicatore di ostacoli da abbattere senza fargli portare il peso di un giudizio negativo.*

(G. de Vecchi in *café pédagogique*, settembre 2008)

L'insegnante che avrà suscitato un certo interesse dei suoi allievi e che avrà permesso loro di evolvere nella costruzione dei loro saperi nel corso dell'attività con i problemi, potrà essere soddisfatto del lavoro svolto e, se ne avrà voglia, potrà condividere la sua esperienza con i colleghi o anche con l'ARMT (contatti possibili tramite il sito dell'ARMT o della Banca di Problemi).

Questa parte mostra, con i suoi numerosi riferimenti agli articoli della Gazzetta, alle analisi a posteriori e ai suoi approfondimenti… che un insegnante dispone già attraverso i documenti messi a disposizione sui diversi siti, di informazioni che gli permetterebbero di sperimentare attività di risoluzione di problemi con i propri allievi. Questi supporti si trovano per ora su siti differenti e necessitano di navigazioni circolari ma unilaterali, come lo schema presentato più sopra.

## III. Prospettive

Lo scopo del seguito di questo articolo non è quello di aumentare in maniera significativa i contenuti, anche se l'aggiunta di riferimenti ai lavori dei didattici (le cui teorie permettono di capire meglio la concezione dell'apprendimento tramite la risoluzione di problemi) sembrerebbe necessaria in un obiettivo di formazione. Lo scopo è piuttosto quello che riguarda una nuova organizzazione delle risorse e di mettere tali risorse in relazione fra loro, affinché possano essere di più facile accesso e quindi possano accompagnare meglio gli insegnanti nella prassi didattica.

Al di là di problematiche tecniche, la sezione Franche-Comté si è posta delle domande su una possibile organizzazione di un nuovo spazio di lavoro, che si dividerebbe in tre grandi sotto-spazi **non gerarchizzati,** che potrebbero aprirsi simultaneamente:

- L'uno permetterebbe di accedere a qualche elemento teorico nel riprendere i riferimenti citati negli articoli, completandoli. Queste teorie sono state costruite a partire da osservazioni e analisi di produzioni degli allievi, come fanno i membri del RMT da numerosi anni quando preparano gli approfondimenti relativi ai problemi (gli esempi si trovano in numeri della Gazzetta di Transalpino)[6].
- Un altro sotto-spazio sarebbe costituito dalla Banca di Problemi, la quale, anche se potrebbe forse essere migliorata dal punto di vista pratico, è uno strumento molto ben costruito, che non si accontenta di consentire al suo utilizzatore di accedere a un gran numero di problemi di qualità e alle loro analisi, ma gli lascia anche la possibilità di realizzare la sua ricerca secondo diverse entrate nel sistema.
- L'ultimo sotto-spazio sarebbe dedicato alla pratica dell'insegnante in classe e potrebbe così fornire diversi strumenti: gestione delle attività, ruolo dei problemi nella progressione didattica, atteggiamento dell'insegnante, gestione di ostacoli ed errori, organizzazione dell'ambiente di lavoro,… . Gli insegnanti potrebbero "parlare" delle loro esperienze e condividerle su uno spazio apposito. Questa parte sarebbe da costruire. Se l'accesso ai problemi può essere condotto sulla Banca secondo sei criteri di ricerca, gli articoli della Gazzetta di Transalpino, che propongono numerosi supporti di diverso tipo per la pratica di classe, sono invece pubblicati in ordine cronologico. La ricerca necessita di aprire diverse finestre prima di accedere ad un determinato paragrafo o al contenuto ricercato, a meno che non si abbia già notizia di un certo articolo tramite la Banca di Problemi.

## Conclusione

Un insegnante, per poter costruire situazioni di apprendimento, deve disporre di "problemi ben scelti" che permetteranno agli allievi di costruire un concetto. Deve conoscere teorie che diano un senso alle sue scelte e che l'accompagneranno in tutte le fasi del dispositivo di apprendimento. Deve inoltre poter creare un ambiente propizio a tale apprendimento, cosa che necessita una buona conoscenza del problema scelto e una buona conoscenza dei propri allievi, condizioni che solo una pratica regolare può permettergli di acquisire.

Queste tre condizioni complementari sono in continua interazione nella situazione didattica. Nel poster realizzato dalla sezione Franche-Comté per l'incontro ARMT di Pont Saint Martin (vedasi allegato), abbiamo scelto come esempio la costruzione del concetto di funzione. Con questo obiettivo, abbiamo esplorato la Banca di Problemi del RMT e selezionato il problema "Calcolatrice speciale", a partire dal quale era stata redatta una monografia connessa alla scheda completa nella banca di problemi. Nell'esperienza descritta nella monografia gli allievi avevano avuto modo di lavorare in condizioni opportune relative alla risoluzione di problemi (si veda la teoria delle situazioni didattiche) e gli osservatori avevano potuto utilizzare le produzioni degli allievi per costruire la suddetta monografia. Vi si trovano le procedure, gli ostacoli e gli errori rilevati, suscettibili di chiarire all'insegnante ciò che potrà succedere in classe. Lo studio, nel paragrafo dal titolo "Indicazioni didattiche", riporta anche esempi commentati di elaborati, organizzati secondo una progressione dell'acquisizione della nozione di funzione. La bibliografia della monografia mostra che una tale analisi si appoggia su lavori di ricerca didattica.

Questo esempio illustra bene la posizione presa in questo articolo e nel contenuto del poster della sezione Franche-Comté: per meglio gestire il rapporto tra apprendimento e risoluzione di problemi, l'insegnante necessita di una formazione opportuna, di strumenti costruiti a partire da osservazioni di produzioni degli allievi e anche di riferimenti a studi sviluppati nell'ambito della ricerca didattica. Le possibili risorse giocano allora un grande ruolo, purché possano essere organizzate in modo complementare e con contenuto di facile accesso.

## Bibliografia

- ANSELMO, B. & HENRY, M. (2017). Les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin, une ressource pour la formation des enseignants / I problemi del Rally Matematico Transalpino, una risorsa per la formazione degli insegnanti, *La Gazette de Transalpie* n°5, http://www.armtint.org.
- BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7 n°2, ed. La pensée sauvage, Grenoble**.**

[6] La sezione Franche-Comté dispone di elementi che riguardano approcci alle teorie didattiche che potrebbero figurare in questo spazio.

- BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9 n°3, ed. La pensée sauvage, Grenoble.

- DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.2, La pensée sauvage, Grenoble.

- GRUGNETTI L. & JAQUET F. (2015). I problemi del RMT: ampliamento progressivo delle loro finalità / Les problèmes du RMT : l'élargissement progressif de leurs finalités, *La Gazette de Transalpie* n°4, http://www.armtint.org.

- HENRY, M. (2010). Erreurs et obstacles, schèmes et concepts / Errori e ostacoli, schemi e concetti, *La Gazette de Transalpie* n°0, http://www.armtint.org.

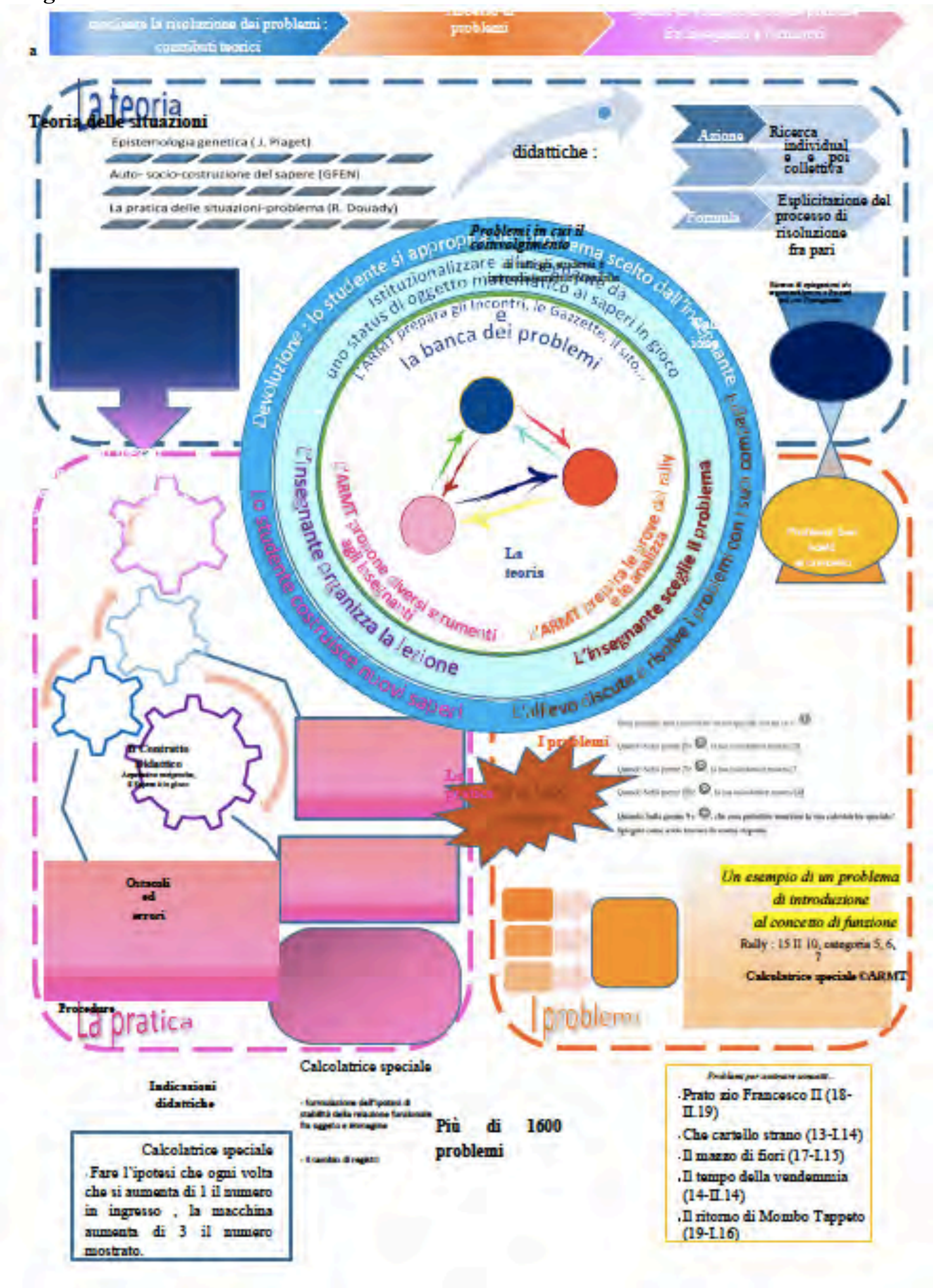
- HOUDEMENT, C. (2015). Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes / RMT, punto d'incontro tra insegnanti e risoluzione di problemi, *La Gazette de Transalpie* n°4, http://www.armtint.org.

- VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* n°6, vol. 10 n° 2, 3, La pensée sauvage, Grenoble

## Sitologia

Per la Gazzetta di Transalpino si veda il link "La Gazzetta" nel sito www.armtint.org

## Allegato


La teoria
Teoria delle situazioni
Epistemologia genetica (J. Piaget)
Auto- socio-costruzione del sapere (GFEN)
La pratica delle situazioni-problema (R. Douady)
didattiche :
Azione
Ricerca individual e e poi collettiva
Formula
Esplicitazione del processo di risoluzione fra pari
Problemi in cui il coinvolgimento
Devoluzione : lo studente si appropria del problema scelto dall'insegnante
istituzionalizzare e dare uno status di oggetto matematico ai saperi in gioco
L'ARMT prepara gli incontri, le Gazzette, il sito...
e
la banca dei problemi
La teoria
L'ARMT propone diversi strumenti agli insegnanti
L'insegnante organizza la lezione
Lo studente costruisce nuovi saperi
L'ARMT prepara le prove del rally e le analizza
L'insegnante sceglie il problema
L'allievo discute e risolve i problemi con i suoi compagni
Il Contratto Didattico
Ostacoli ed errori
Procedure
La pratica
I problemi
Un esempio di un problema di introduzione al concetto di funzione
Rally : 15 II 10, categoria 5, 6, 7
Calcolatrice speciale ©ARMT
I problemi
Calcolatrice speciale
Indicazioni didattiche
Più di 1600 problemi
Calcolatrice speciale
Fare l'ipotesi che ogni volta che si aumenta di 1 il numero in ingresso , la macchina aumenta di 3 il numero mostrato.
Prato zio Francesco II (18-II.19)
Che cartello strano (13-I.14)
Il mazzo di fiori (17-I.15)
Il tempo della vendemmia (14-II.14)
Il ritorno di Mombo Tappeto (19-I.16)

# "MOLTO RUMORE PER NULLA"?

# GRANDE LAVORO PER COSTRUIRE UN ENUNCIATO E… RISULTATI APPARENTEMENTE DELUDENTI

**Gruppo di ricerca Zeroallazero**[1]

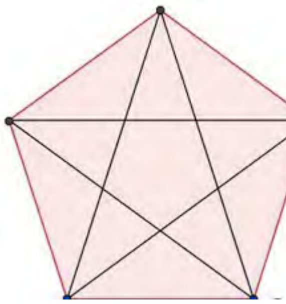
## Introduzione

Dall'idea iniziale di un enunciato di un problema, in questo caso del RMT, alla sua messa a punto il cammino è lungo e complesso. Dapprima si focalizza il contenuto matematico al quale si è interessati e si comincia a pensare ad un possibile enunciato. Per costruire un opportuno enunciato è necessario però tener conto di due vincoli essenziali: l'assenza di ambiguità del linguaggio utilizzato e la chiarezza di interpretazione. Infatti l'interpretazione di un contesto deve essere il più possibile "universale", non deve cioè dipendere da situazioni particolari né scolastiche né di altro tipo.
La leggibilità da parte degli alunni degli enunciati dei problemi del RMT, senza aiuto esterno, è un altro aspetto prioritario: bisogna tener conto della sintassi, del vocabolario, della complessità delle frasi, della terminologia, in funzione dell'età.
Bisogna porre attenzione anche alla presentazione dei dati: ci si deve chiedere se emergono chiaramente durante la lettura e se tutti sono necessari o no.
Non meno importante è la modalità di formulazione delle domande o, in generale delle consegne, sia per la comprensione da parte di coloro che sono chiamati a risolvere il problema, sia per la successiva attribuzione dei punteggi strettamente collegata alle consegne stesse.
In quest'articolo viene tracciata "la storia" di un enunciato comprensiva della successiva evoluzione della relativa analisi a priori, per concludersi con le osservazioni scaturite dalla imprescindibile analisi a posteriori degli elaborati dei gruppi di allievi.

## 1. La "storia" di un enunciato

### 1.1. L'idea

Gli aspetti matematici insiti nel famoso "pentagono regolare dei pitagorici" con le relazioni fra lati, diagonali e angoli, sembrano essere "alla portata" degli allievi del biennio di scuola secondaria superiore (categorie 9 e 10 nell'ambito del RMT), ma forse anche per allievi dell'ultimo anno di scuola secondaria di primo grado (categoria 8).

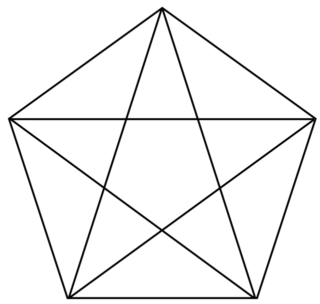


Il contenuto matematico che si era immaginato riguarda la ricerca delle misure degli angoli dei triangoli che possono essere individuati nella figura.
In effetti, nell'ambito del RMT erano già stati proposti problemi relativi al pentagono regolare, ma con l'attenzione posta "solo" sulla ricerca del numero di triangoli individuabili nella figura, come ad esempio nel problema seguente (21° RMT, prima prova):

[1] Maria Felicia Andriani, Clara Bisso, Serafina Foglia, Silvano Gregori, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Daniela Medici, M. Gabriella Rinaldi, Angela Rizza, Vincenza Vannucci.

**Triangoli sì, ma quanti?** (per le categorie 6, 7 e 8)[2]

Ecco un pentagono regolare con tutte le diagonali



Alice dice: *In questo pentagono vedo 10 triangoli.*

Bianca le risponde: *Io, ne vedo molti di più!*

**Quanti triangoli si possono vedere in tutto in questa figura?**

**Spiegate come avete trovato la vostra risposta.**

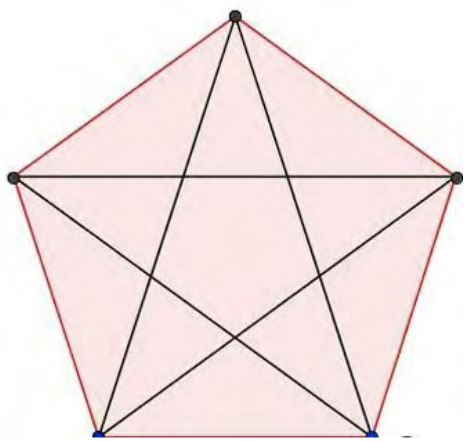
Come si vede, si tratta di un problema incentrato sulla visualizzazione e individuazione di triangoli e il loro conteggio.
I risultati di questo problema non sono stati soddisfacenti (individuati pochi triangoli, ma soprattutto difficoltà di evidenziare chiaramente i triangoli individuati, indispensabile per un corretto conteggio) a livello di categoria 6, ma anche, in una certa misura, a livello di categoria 7.
Sembra dunque ragionevole proporre il nuovo problema, più impegnativo, a partire eventualmente dalla categoria 8 e non prima.

### 1.2. Tentativo di costruzione di un enunciato

A partire dalla figura precedente e tenendo conto del contenuto matematico immaginato, è stato fatto un primo tentativo di enunciato del problema da proporre eventualmente alle categorie 8, 9, 10.
Questa prima bozza di enunciato è focalizzata essenzialmente su questioni angolari e si reputa necessario ricordare agli allievi quanto valga la misura della somma degli angoli di un pentagono.

**Il logo pitagorico (prima bozza)**

Angela, Bruno e Carla preparano il logo per la nuova scuola pitagorica



Ad Angela, questo logo piace molto. Si ricorda che la somma degli angoli di un pentagono misura 540 gradi e dice:
- *in questo pentagono regolare le sue diagonali individuano angoli con tre diverse misure*

Bruno dice, *no ce ne sono solo due diversi*
Carla non è d'accordo con nessuno dei due e dice: *vi sbagliate, ce ne sono quattro.*

**Quanti angoli con misure diverse ci sono nel pentagono regolare, secondo voi?**

**Trovate le misure di tali angoli e giustificate le vostre risposte.**

### 1.3. Evoluzione dell'enunciato

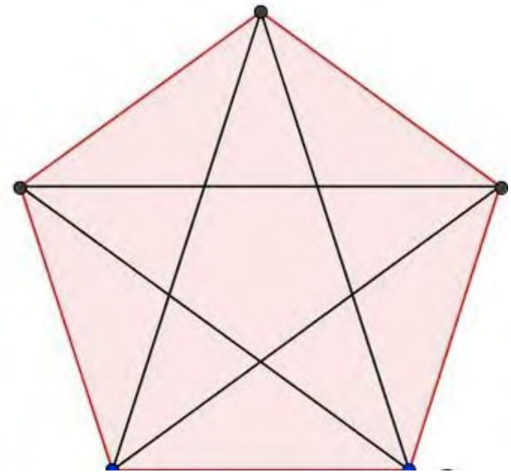
Benché l'impostazione dell'enunciato sia tutto incentrato su questioni angolari, i primi passi che gli allievi dovranno compiere per riuscire a rispondere alle consegne sono legati ai triangoli individuati dalle diagonali del

[2] Si veda Banca di Problemi il cui sito ha un link a partire dal sito www.armtint.org

pentagono (come peraltro richiesto dall’enunciato del problema del 21° RMT più sopra riportato). Sono evidenti 1 10 triangoli isosceli e il pentagono interno, (cioè la partizione della figura in 11 parti “elementari”) sono evidenti; poi gli allievi dovranno contare i triangoli costituiti da due triangoli: due per ogni lato, per un totale di 10; poi gli allievi dovranno contare i triangoli composti da due triangoli: due su ogni lato del pentagono, per un totale di 10; poi i 5 triangoli formati da tre triangoli (uno per ogni vertice del pentagono); poi i 5 triangoli interni composti dal pentagono interno e di due triangoli interni piccoli e infine i 5 triangoli composti dal pentagono interno e da 4 altri triangoli. Si sono individuati così 35 triangoli. La questione specificamente angolare dovrà essere affrontata solo in un secondo tempo.
Si reputa pertanto che sia più opportuno mettere a punto un nuovo enunciato che tenga conto più esplicitamente dei triangoli che si possono visualizzare nella figura proposta.

**1.4. Il logo pitagorico (seconda bozza)**

Angela, Silvano e Serafina hanno preparato il logo per la nuova scuola pitagorica



Mentre lo ammirano soddisfatti, Angela esclama: *vedo tantissimi triangoli!*
*E’ vero*, dicono gli altri due. *Vediamo quante famiglie di triangoli ci sono.*

**Trovate anche voi quanti triangoli ci sono nel pentagono regolare e di quante famiglie diverse.**

**Per ciascuna famiglia indicate le misure degli angoli.**

**Giustificate le vostre risposte.**

In questo caso il riferimento esplicito ai triangoli è ben presente, ma sorgono dei dubbi sull’espressione “famiglie di triangoli” che, in effetti, non sembra essere “rigorosa”.

Che cosa si può intendere con “famiglie di triangoli”? Può essere interpretata dal punto di vista delle grandezze, delle isometrie, delle similitudini, della loro posizione nel pentagono, ...

Come superare questa ambiguità di linguaggio?

Dal linguaggio improprio e ambiguo di “famiglia di triangoli” diventa necessario passare al linguaggio matematico e parlare di “triangoli simili” o di “famiglia di triangoli simili”.

Una criticità che permane ancora in questa seconda bozza dell’enunciato viene rilevata nelle richieste. Nei “criteri per l’elaborazione dei problemi” è sottolineato il fatto che sia molto difficile attribuire i punteggi quando vi siano diverse domande, soprattutto laddove siano fra loro dipendenti.

Nel caso di questo problema possiamo già pensare che ci sarà circa ¼ delle risposte “35” alla richiesta del numero di triangoli e una diversità di altre risposte fra le quali 15, 20 o 25 (secondo i risultati del problema *Triangoli, sì ma quanti?* citato in precedenza). Per ognuna di queste risposte alla prima consegna, ci saranno svariati tipi di risposte alla seconda: due famiglie, tre famiglie, ecc. La seconda consegna che riguarda le misure degli angoli apporterà anch’essa risposte diversificate.

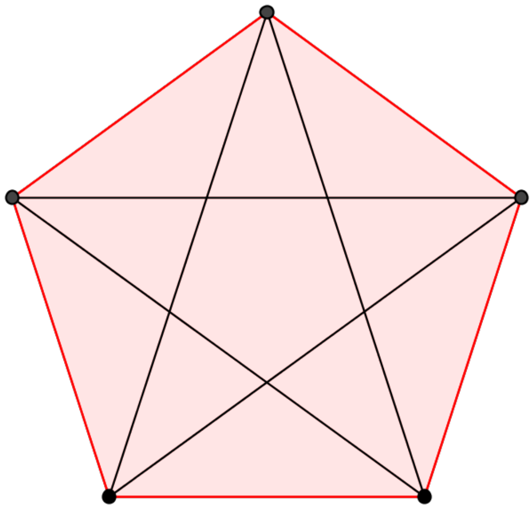
Anche se si contasse “giusto o sbagliato” a ciascuna di queste tre risposte, si arriverebbe a otto tipi di risposte, da cui la grande difficoltà di attribuire i punteggi da 0 a 4.

Questa analisi porta a concludere che è necessario rinunciare almeno a una delle domande, oppure a integrala nella richiesta di spiegazioni.

Tenendo conto di tutti questi aspetti critici si predispone un’ulteriore bozza dell’enunciato dove, peraltro, sembra “più prudente” ricordare agli allievi quando due triangoli sono simili.

**1.5. Il logo pitagorico (terza bozza)**

Angela, Silvano e Serafina hanno preparato il logo per la nuova scuola pitagorica:



Mentre lo ammirano soddisfatti, Angela esclama: *vedo tantissimi triangoli!*
*È vero*, dicono gli altri due, *vediamo quante famiglie di triangoli simili ci sono.*
(Due triangoli sono simili se i tre angoli dell'uno hanno rispettivamente le stesse misure di quelli dell'altro).

**Trovate anche voi quante famiglie di triangoli simili ci sono in questa figura.**

**Giustificate la vostra risposta.**

## 2. L'analisi a priori, ovvero, che cosa propone l'adulto

### 2.1. Il compito matematico

Il primo paragrafo dell'analisi a priori riguarda il contenuto matematico e a questo proposito diventa necessario stabilire quali fra i seguenti aspetti si reputino importanti: il conteggio dei triangoli, l'identificazione dei triangoli simili, le misure degli angoli.

Tenendo anche conto dell'ultima formulazione delle consegne dell'enunciato si rinuncia al conteggio dei triangoli, sapendo bene che ci saranno pochi conteggi completi e si concentra l'attenzione sul riconoscimento dei triangoli simili che richiede anche le misure degli angoli.

Il "Compito matematico" diventa quindi "Identificare i triangoli formati dalle diagonali e dai lati di un pentagono regolare poi classificarli in famiglie di triangoli simili."

### 2.2. Il compito dell'allievo

A partire dall'enunciato e dal compito matematico più sopra definito, si elaborano, inevitabilmente dal punto di vista di adulti, quelle che potrebbero essere le procedure degli allievi che, nella rubrica "Analisi a priori" dei problemi del RMT, va sotto il nome di "Compito dell'allievo".

**Prima bozza del compito dell'allievo**

Quella che segue è una prima lista "ragionata" delle tappe che potrebbero portare alla risoluzione del problema, all'interno della quale, in corsivo, si trovano anche osservazioni e "dubbi" degli estensori:

- Osservare la figura e "vedervi" il pentagono esterno, le diagonali (stella a cinque punte) e la suddivisione del pentagono in 11 parti elementari: un pentagono interno (*p*) e due tipi di parti elementari, cioè 5 triangoli (*a*) con angoli acuti formati dalle "punte della stella" e 5 triangoli (*o*) con un angolo ottuso di cui un lato coincide con un lato del pentagono esterno.
- Constatare che alcune delle 11 parti possono essere assemblate per formare altri triangoli oltre ai due tipi elementari *a* e *o*. *(Si noti che questo è uno degli ostacoli del problema: passare da ciò che si vede a ciò che si potrebbe vedere)*:

  un terzo tipo composto da due triangoli adiacenti (*a* e *o*), un quarto tipo composto da tre triangoli adiacenti (*o*, *a*, *o*) aventi un vertice comune con un vertice del pentagono esterno,

un quinto tipo composto dal pentagono centrale e da due triangoli (*a*, *p*, *a*), “opposti” ai triangoli del tipo precedente rispetto ad una diagonale (i triangoli di questo quinto tipo si rileveranno uguali a quelli del terzo tipo)

un sesto tipo composto da cinque parti elementari (*o*, *a*, *a*, *p*, *a*).

- Determinare gli angoli “elementari” presenti nella figura totale, constatare che alcuni sono uguali e che ci sono solo angoli di 108, 72 e 36 gradi (è la parte più complessa del problema, che fa appello a tutte le conoscenze sugli angoli di un triangolo, “addizione” e “sottrazione”, angoli opposti, alterni interni, …)

  Per esempio, se si vede che il pentagono può essere scomposto in tre triangoli dove la somma degli angoli è uguale a quella degli angoli del pentagono, se ne deduce che la somma dei angoli è di 540 gradi e che per ragioni di simmetria, uno degli angoli è di 108 gradi, poi si possono trovare due angoli di 36 gradi, poi calcolare l’angolo di una “punta della stella” che misura anch’esso 36 gradi, …

Da un punto di vista dinamico è possibile seguire il percorso dei cinque lati della stella: si parte da un vertice seguendo una diagonale, arrivati al vertice successivo si ruota di un angolo giro “meno” l’angolo della punta (cioè si gira intorno alla punta), e si ripete cinque volte questo spostamento e questa rotazione per ritrovarsi nella posizione di partenza, dopo 5 mezzi giri (equivalenti a un mezzo giro o 180 gradi) meno cinque angoli della punta, dopo una divisione per 5, si trova la misura di un angolo della punta 180 : 5 = 36.

Con il confronto per esempio di un triangolo del quarto tipo e di un triangolo del sesto tipo dove α e ß sono le misure rispettive dell’angolo minore di questi triangoli, si ottengono le equazioni $4\alpha + \beta = 180 = 2\alpha + 3\beta$ da cui si deduce $\alpha = \beta$ poi $5\alpha = 5\beta = 180$ e infine $\alpha = \beta = 36$,

*(Ci si chiede se sia necessario descrivere queste procedure. Se si indica nell’enunciato che la somma degli angoli di un pentagono è di 540 gradi, si orientano gli allievi verso una determinata procedura e il problema diventa meno ricco?)*

Oppure fare ricorso a misure (approssimative) degli angoli, prese direttamente sulla figura e adattarle e fare una verifica per convincersi che le misure dei tre angoli sono 108, 72 e 36 gradi.

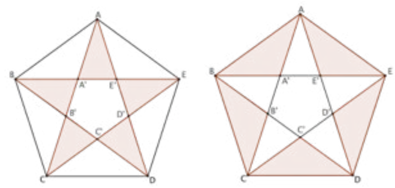
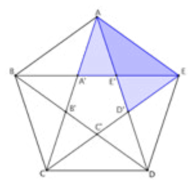
- Constatare che tutti i triangoli hanno due angoli uguali (triangoli isosceli) e che ci sono solo due famiglie di triangoli simili: quella dei triangoli con gli angoli acuti: 36, 72 e 72 gradi e i triangoli con un angolo ottuso: 36, 36 e 108 gradi.

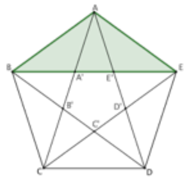
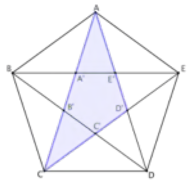
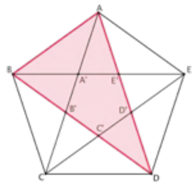
Tenuto conto dell’importanza della presentazione del “Compito dell’allievo”, sia per la definizione dei criteri per l’attribuzione dei punteggi, che per il ruolo che giocherà nel corso della correzione degli elaborati, prende corpo la necessità di presentare anche graficamente le diverse tipologie di triangoli.

Si elabora dunque la

**Seconda bozza del compito dell’allievo**:

- Capire che per trovare le famiglie di triangoli simili è necessario identificare i numerosi triangoli formati dalle diagonali del pentagono e rendersi conto della necessità di trovare un criterio per l’identificazione di tali triangoli. Ad esempio notare che ci sono triangoli “semplici” e altri formati da più triangoli. Si possono in tal modo contare:

| | |
|---|---|
| 10 triangoli semplici (i 5 che formano “le punte della stella” formata dalle diagonali più i 5 con la base su uno dei lati del pentagono)<br><br>tipi: 1 e 2 |  |
| 10 triangoli composti da due triangoli: ve ne sono 2 per ogni lato<br><br>tipo 3 |  |

| | |
|---|---|
| 5 triangoli composti da 3 triangoli: uno per ogni vertice<br><br>tipo 4 |  |
| 5 triangoli composti da 2 triangoli e il pentagono interno<br><br>tipo 5 |  |
| 5 triangoli composti da quattro triangoli e il pentagono interno<br><br>tipo 6 |  |

- A questo punto, per trovare il numero di famiglie di triangoli simili, è necessario passare alla ricerca delle misure degli angoli dei triangoli. Ci sono numerose maniere di trovare tali misure.
- Per esempio, nel trovare dapprima che gli angoli interni del pentagono misurano 108° e questo lo si può trovare nel vedere che il pentagono può scomporsi in tre triangoli la cui somma degli angoli è quella del pentagono; dedurne allora che la somma dei suoi angoli è 540° e che per delle ragioni di simmetria, uno dei suoi angoli è di 108°. Considerando poi uno dei triangoli isosceli aventi come lati uguali due lati del pentagono e come base una diagonale per esempio ABE, si trovano facilmente le ampiezze degli angoli alla base: (180 - 108) : 2 = 36; Dunque i tre angoli consecutivi di vertice A, BAC, CAD, DAE misurano rispettivamente 36°, (108 – 36 × 2) = 36, 36°. Ciò vale per tutte le terne di angoli consecutivi in ogni vertice del pentagono. Si possono a questo punto individuare le ampiezze di tutti gli angoli, per ogni gruppo di triangoli nella tabella. Per esempio il triangolo AEE' ha due angoli da 36° nei vertici A ed E; (180°-36°·2)=108° nel vertice E'. Il triangolo AA'E' ha l'angolo in A di 36°; l'angolo in E' è supplementare all'angolo AE'E, quindi misura 72°; così pure per l'angolo in A', e così via.

Oppure α = ß

- nel confrontare, per esempio, un triangolo di tipo 4 e uno di tipo 6 dove α e ß sono le misure rispettive dell'angolo minore di questi triangoli, si ottengono le equazioni $4\alpha + ß = 180$ e $2\alpha + 3ß = 180$ dalle quali si deduce $\alpha = ß$ poi $5\alpha = 5ß = 180$ e infine $\alpha = ß = 36$. Si trovano gli angoli che misurano 72°, e 108°.
- Infine, visto che tutti i triangoli che si individuano nella figura hanno angoli alla base congruenti, dedurre che si tratta di triangoli isosceli di due diverse famiglie:
    - triangoli con angoli alla base di 36° e angolo al vertice di 108°;
    - triangoli con angoli al vertice di 36° e angoli alla base di 72°.

In effetti, questa presentazione appare più gestibile per l'analisi degli elaborati e la necessaria attribuzione dei punteggi che viene pertanto redatta nel modo seguente:

4 Risposta corretta (due famiglie di triangoli simili) con descrizione completa che permette di giustificare la risposta: calcolo di tutti gli angoli e ripartizione di tutti i tipi di triangoli in due famiglie: 36, 72, 72 per i tre tipi di triangoli acuti e 36, 36, 108 per i due (o tre) tipi di angoli ottusi

3 Risposta corretta (due famiglie di triangoli simili) con descrizione incompleta: per esempio, i cinque o sei tipi di triangoli non sono stati identificati, il dettaglio dei calcoli degli angoli non è menzionato

2 Risposta corretta (due famiglie di triangoli simili) con solamente un disegno o una descrizione di un rappresentante per famiglia

1 Risposta corretta (due famiglie di triangoli simili) senza alcuna spiegazione

oppure risposta errata (una famiglia o tre famiglie) con menzione degli angoli di almeno una famiglia

oppure risposta errata dovuta a calcoli o misure imprecise degli angoli

0 Incomprensione del problema

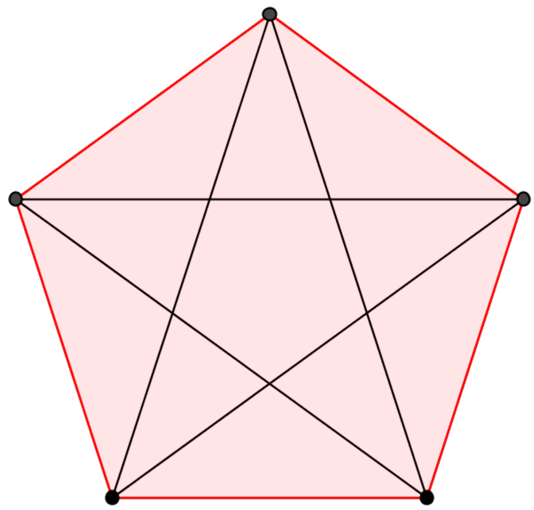
**3. La storia della costruzione di questo problema, con il suo enunciato e la sua analisi a priori, … non è ancora finita**

Come per ogni problema del RMT, il gruppo di lavoro, in questo caso il gruppo Zeroallazero, che lo ha progettato nelle sue varie componenti, enunciato e analisi a priori, lo "consegna" al "Gruppo di pilotaggio" che è preposto ad una prima analisi e alla suddivisione dei problemi ricevuti nelle tre prove di ciascuna edizione della gara. Dopo una fase di osservazione da parte delle diverse sezioni dell'associazione del RMT, si è arrivati alla versione definitiva, che ha visto diverse modifiche: le categorie interessate sono solo la 9 e la 10, in quanto si è reputato che il problema fosse troppo difficile per la categoria 8; nell'enunciato è stata aggiunta una precisazione alla frase tra parentesi "per esempio tutti i triangoli che hanno i tre angoli che misurano 30, 40, 110 gradi sono simili" come eventuale supporto per gli allievi; la parola "famiglia" è stata sostituita con la parola "tipo" che ha un significato più neutro.

**Problema "Il logo pitagorico" – Versione assegnata al RMT ed. 25, prima prova (25.I.19)**

**19. IL LOGO PITAGORICO** (Cat. 9, 10)

Angela e Serafina hanno preparato il logo per la nuova scuola pitagorica:



Mentre lo ammirano soddisfatte, Angela esclama: *Vedo tantissimi triangoli in questa figura!*
*È vero*, dice Serafina, *cerchiamo quanti tipi di triangoli simili fra loro ci sono.*
(Due triangoli sono simili se gli angoli dell'uno sono rispettivamente uguali a quelli dell'altro; per esempio tutti i triangoli che hanno i tre angoli che misurano 30, 40, 110 gradi sono simili).

**Trovate anche voi tutti i tipi di triangoli simili fra loro che ci sono in questa figura.**

**Giustificate la vostra risposta e date la misura degli angoli di ciascun tipo di triangoli.**

---

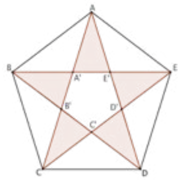
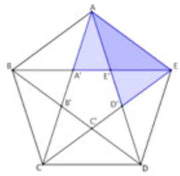
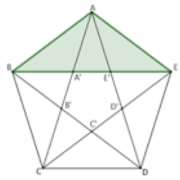
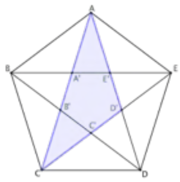
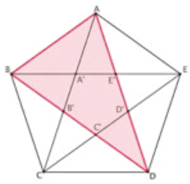
**ANALISI A PRIORI**

**Compito matematico**

- Identificare i triangoli formati dalle diagonali e dai lati di un pentagono regolare poi classificarli in famiglie di triangoli simili.

**Analisi del compito**

- Capire che per trovare le famiglie di triangoli simili è necessario identificare i numerosi triangoli formati dalle diagonali del pentagono e rendersi conto della necessità di trovare un criterio per l'identificazione di tali triangoli. Ad esempio notare che ci sono triangoli "semplici" e altri formati da più triangoli. Si possono in tal modo contare:

| | |
|---|---|
| 10 triangoli semplici (i cinque che formano “le punte della stella” formata dalle diagonali e i cinque con la base su uno dei lati del pentagono)<br><br>tipi: 1 e 2 |  |
| 10 triangoli composti da due triangoli: ve ne sono due per ogni lato<br><br>tipo 3 |  |
| 5 triangoli composti da tre triangoli: uno per ogni vertice<br><br>tipo 4 |  |
| 5 triangoli composti da due triangoli e il pentagono interno<br><br>tipo 5 |  |
| 5 triangoli composti da quattro triangoli e il pentagono interno<br><br>tipo 6 |  |

- A questo punto, per trovare il numero di famiglie di triangoli simili, è necessario passare alla ricerca delle misure degli angoli dei triangoli. Ci sono numerosi modi di trovare tali misure.

  Per esempio, se non è nota la misura della somma degli angoli interni di un pentagono, si può osservare che il pentagono si può scomporre in tre triangoli e che quindi la misura della somma degli angoli interni al pentagono è 180 × 3 = 540. Poiché il pentagono è regolare la misura di ogni suo angolo è 108 = 540 : 5. Considerando poi uno dei triangoli isosceli (di tipo 4) aventi come lati uguali due lati del pentagono e come base una diagonale, si trovano facilmente le ampiezze degli angoli adiacenti alla base: (180°– 108°):2=36°; dunque i tre angoli consecutivi di vertice A: BAC e DAE, misurano entrambi 36°, e CAD, l'angolo della “punta” della stella, misura (108°– 36°×2)=36°. Si possono così determinare tutti gli angoli della figura. Per esempio, i triangoli di tipo 2, 4 e 5 hanno due angoli di 36° e un angolo di 108°. I triangoli di tipo 1, 2 e 6 hanno un angolo di 36° e due angoli di 72°.

Oppure:

- confrontare, per esempio, un triangolo di tipo 4 e uno di tipo 6, indicando con $o$ la misura dell’angolo di minor ampiezza del triangolo di tipo 4 e con $a$ quella di minore ampiezza di uno di tipo 6, si ottengono le equazioni $4o + a = 180°$ e $2o + 3a = 180°$ dalle quali si deduce $o = a$ e $5o = 5a = 180°$ e infine $o = a = 36°$. Si trovano poi le misure dell’ampiezza degli altri due angoli: 72°, ecc.
- Infine, visto che tutti i triangoli che si individuano nella figura hanno angoli alla base congruenti, dedurre che si tratta di triangoli isosceli di due diverse famiglie:
- triangoli con angoli alla base di 36° e angolo al vertice di 108°;
- triangoli con angoli al vertice di 36° e angoli alla base di 72°.

  (Nel caso si utilizzi un goniometro, lo strumenti non permetterà verosimilmente di dare i valori esatti delle misure degli angoli).

**Attribuzione dei punteggi**

4 Risposta corretta (due tipi di triangoli simili) con descrizione completa che permette di giustificare la risposta: determinazione di tutti gli angoli e ripartizione di tutti i tipi di triangoli in due famiglie: 36, 72, 72 per i tre tipi di triangoli acuti e 36, 36, 108 per i due (o tre) tipi di angoli ottusi

3 Risposta corretta con descrizione incompleta: per esempio, i cinque o sei tipi di triangoli non sono stati identificati, il dettaglio della determinazione degli angoli non è menzionato, la misura degli angoli presa con il goniometro è approssimativa

2 Risposta corretta con solamente un disegno o una descrizione di un rappresentante per famiglia

1 Risposta corretta senza alcuna spiegazione
oppure risposta errata (un tipo o tre tipi) con menzione degli angoli di almeno un tipo
oppure risposta errata dovuta a calcoli o misure imprecise degli angoli

0 Risposta errata: 7 che corrisponde ai tipi di triangoli congruenti fra loro
oppure incomprensione del problema

**Livello**: 9, 10

**Origine**: G0A0

## 4. Infine la parola agli allievi

Come abbiamo visto, la costruzione del problema è stata lunga e complessa, ma ha riguardato solo gli adulti, a parte il confronto, molto utile peraltro, con i risultati di un problema similare precedente (possiamo dire della stessa famiglia).

Il titolo del presente articolo “Molto rumore per nulla?” (Shakespeare ci perdonerà), vuol mettere l’accento sul passaggio “ideale” dalla preparazione di un problema all’analisi a posteriori degli elaborati degli allievi che, in qualche modo, saranno i giudici del problema stesso.

Laddove ci si fermi ai risultati in termini di punteggi ottenuti dalle classi di categoria 9 e di classi di categoria 10, di nove sezioni, il termine “deludenti” a tali risultati può essere appropriato.

In realtà è solo l’analisi a posteriori degli elaborati degli allievi, con le risoluzioni espresse con il loro linguaggio, che può dare un senso ai risultati “numerici”.

### 4.1. I risultati

I punteggi di cui alla tabella che segue sono quelli attribuiti alle 342 classi delle nove-sezioni che partecipano al RMT anche per quanto riguarda le categorie 9 e 10:

| Categoria | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | N. classi | Media |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cat 9** | 69 (38%) | 37 (20%) | 24 (13%) | 30 (16%) | 23 (13%) | 183 | 1.46 |
| **Cat 10** | 71 (45%) | 27 (17%) | 12 (8%) | 31 (19%) | 18 (11%) | 159 | 1.36 |
| **Totale** | 140 (41%) | 64 (19%) | 36 (11%) | 61 (18%) | 41 (12%) | 342 | 1.41 |

### 4.2. Analisi a posteriori

L’analisi a posteriori è stata svolta in particolare sugli elaborati della sezione di Parma a cura di Serafina Foglia e Angela Rizza del nostro gruppo Zeroallazero.

Gli aspetti precipui del compito, nel caso di questo problema, sono tre:

1) capire che nella figura del logo ci sono triangoli “semplici” e triangoli formati rispettivamente da due “pezzi”, da tre “pezzi”, da cinque “pezzi”, per un totale di sei *tipi* di triangoli (due congruenti fra loro);
2) capire che i triangoli diversi si possono raggruppare in due *tipi* di triangoli simili, in cui i triangoli identificati in 1) rientrano, diciamo così, come “*sottotipi*”;
3) indicare le misure degli angoli dei due *tipi* di triangoli trovati.

I punteggi da 4 a 0 sono stati assegnati nel modo sotto descritto:
Chi ha avuto 4 punti ha recepito chiaramente tutte e tre le richieste, e le risposte alla 1) sono state espresse in diversi modi: elenco di tutti i triangoli attraverso lettere attribuite ai vertici, uso di colori sulla figura per evidenziare i triangoli, raggruppamento dei sottotipi per triangoli acutangoli e ottusangoli, ritaglio di triangoli per evidenziare i sottotipi.

***Esempi di elaborati di categoria 9***

Uso di colori sulla figura per evidenziare i triangoli


Figura 1

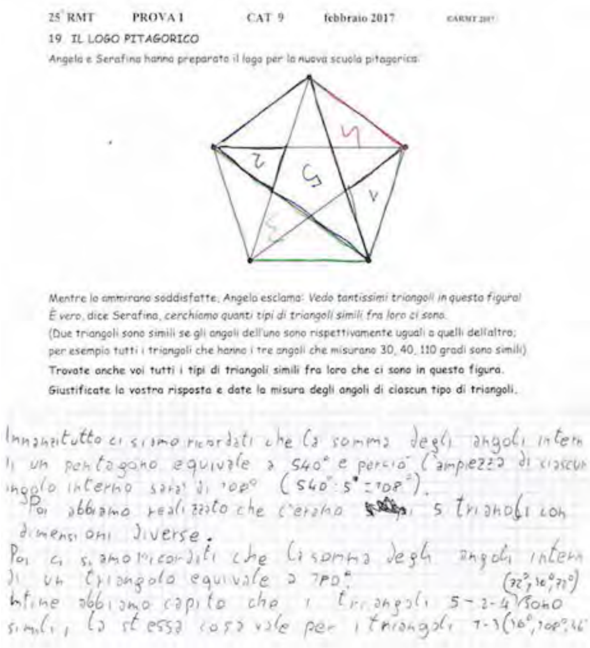



Figura 2

raggruppamento dei sottotipi per triangoli acutangoli e ottusangoli

*Innanzitutto ci siamo ricordati che la somma degli angoli interni di un pentagono regolare equivale a 540° e perciò l'ampiezza di ciascun angolo interno sarà di 108° (540°:5=108°).*
*Poi abbiamo realizzato che c'erano 5 triangoli con dimensioni diverse. Poi ci siamo ricordati che la somma degli angoli interni di un triangolo equivale a 180°.*
*Infine abbiamo capito che i triangoli 5-2-4 (72° ,30°, 72° sono simili, la stessa cosa vale per i triangoli 1-3 (36°, 108°, 36°)*

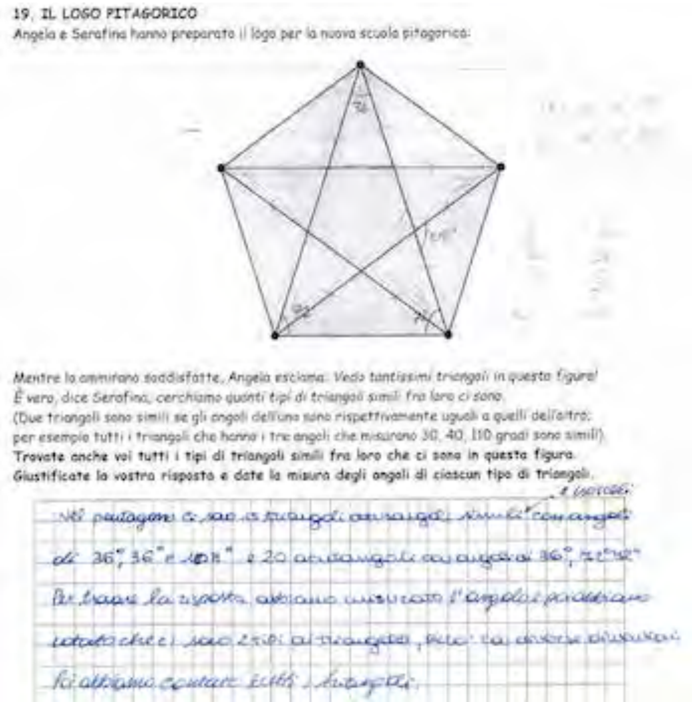



Figura 3

E ancora il seguente elaborato con ritaglio di triangoli per evidenziare i sottotipi:

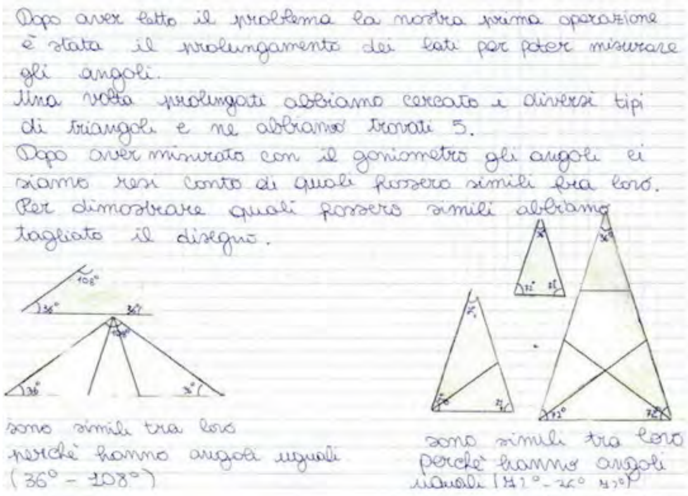



Figura 4

Chi ha avuto <u>3 punti</u> ha invece:

- mancato la risposta alla richiesta 1); vengono citati i due tipi di triangoli simili con le misure corrette degli angoli e sono individuati anche i sottotipi: c'è il riferimento ad un totale di 35 triangoli o a totali parziali, oppure c'è un inizio di elenco dei triangoli con "eccetera…", oppure viene indicato un rappresentante per ogni sottotipo, anche con ritagli. I cosiddetti sottotipi non sono però esplicitati completamente: le risposte alle richieste 2) e 3) hanno superato o inglobato la risposta alla 1).
- commesso errori (anche uno solo) nella misura degli angoli a causa dell'utilizzo del goniometro (circostanza prevista nell'analisi a priori del problema).

Nel secondo caso (cat. 10) c'è effettivamente un errore, nel primo (cat. 10) c'è invece solo uno svolgimento incompleto; abbiamo pensato ad un'ambiguità legata alla parola "tipo" (come si vedrà meglio più avanti). Il terzo esempio è di categoria 9.

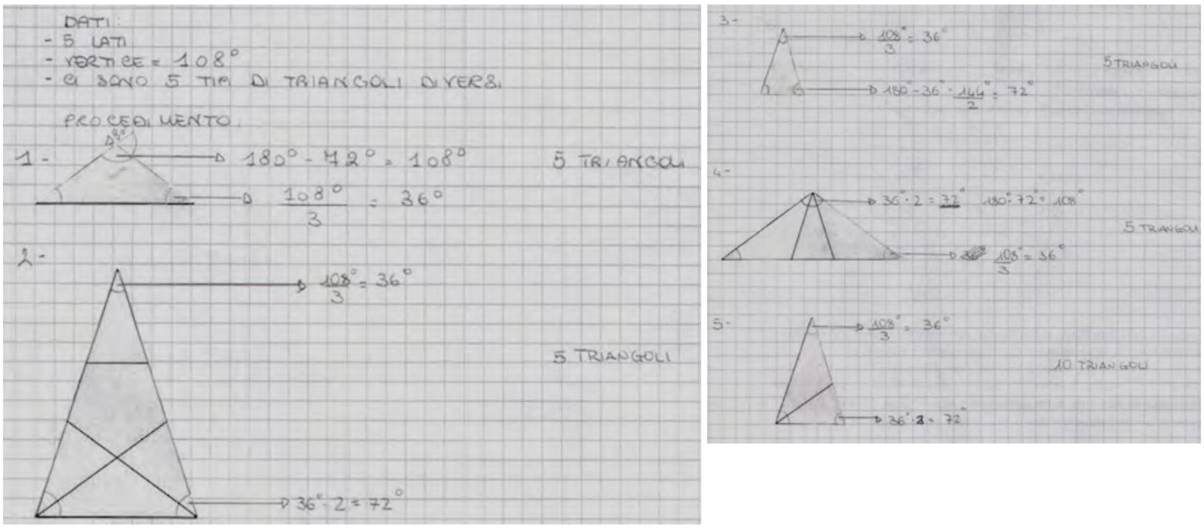
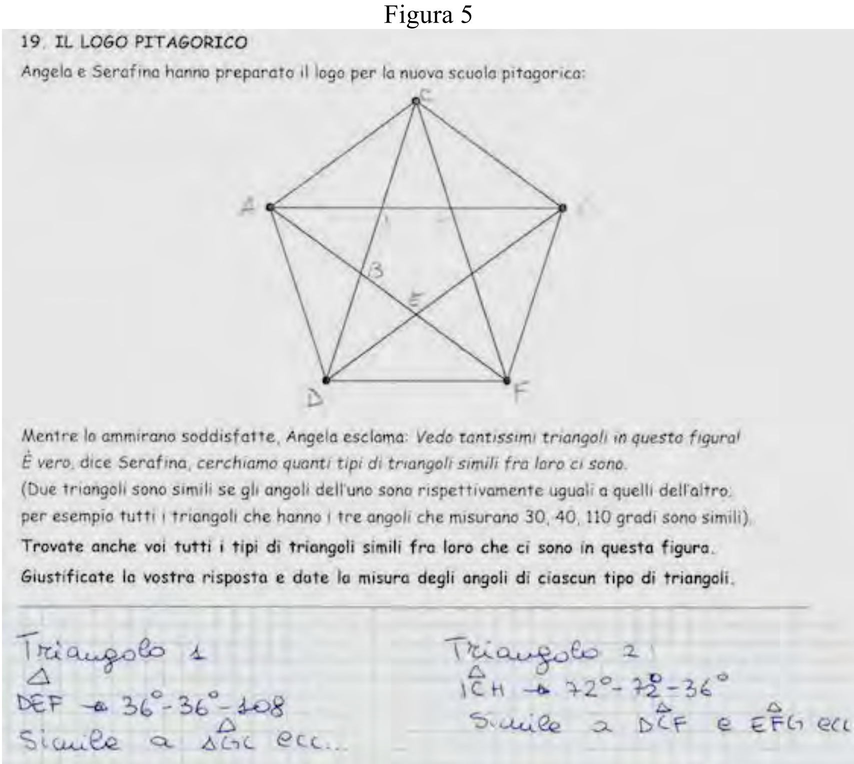



Figura 5



19. IL LOGO PITAGORICO

Angela e Serafina hanno preparato il logo per la nuova scuola pitagorica:



Mentre lo ammirano soddisfatte, Angela esclama: *Vedo tantissimi triangoli in questa figura!*
*È vero,* dice Serafina, *cerchiamo quanti tipi di triangoli simili fra loro ci sono.*
(Due triangoli sono simili se gli angoli dell'uno sono rispettivamente uguali a quelli dell'altro, per esempio tutti i triangoli che hanno i tre angoli che misurano 30, 40, 110 gradi sono simili).
**Trovate anche voi tutti i tipi di triangoli simili fra loro che ci sono in questa figura.**
**Giustificate la vostra risposta e date la misura degli angoli di ciascun tipo di triangoli.**

Triangolo 1
△DEF → 36°-36°-108
Simile a △AGC ecc..

Triangolo 2
△ICH → 72°-72°-36°
Simile a △DCF e △EFG ecc

Figura 6

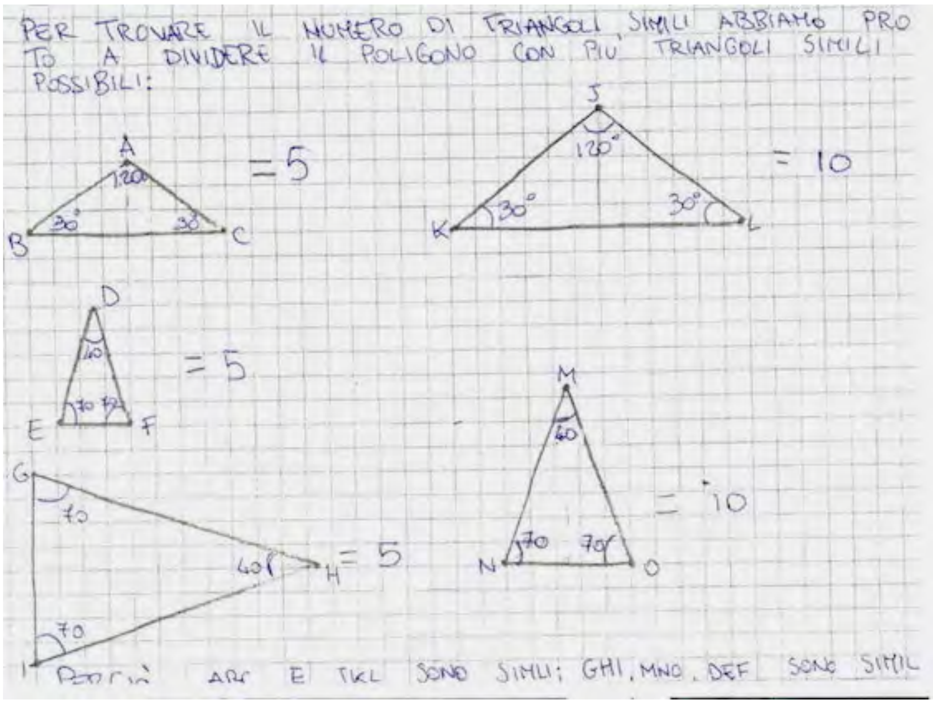
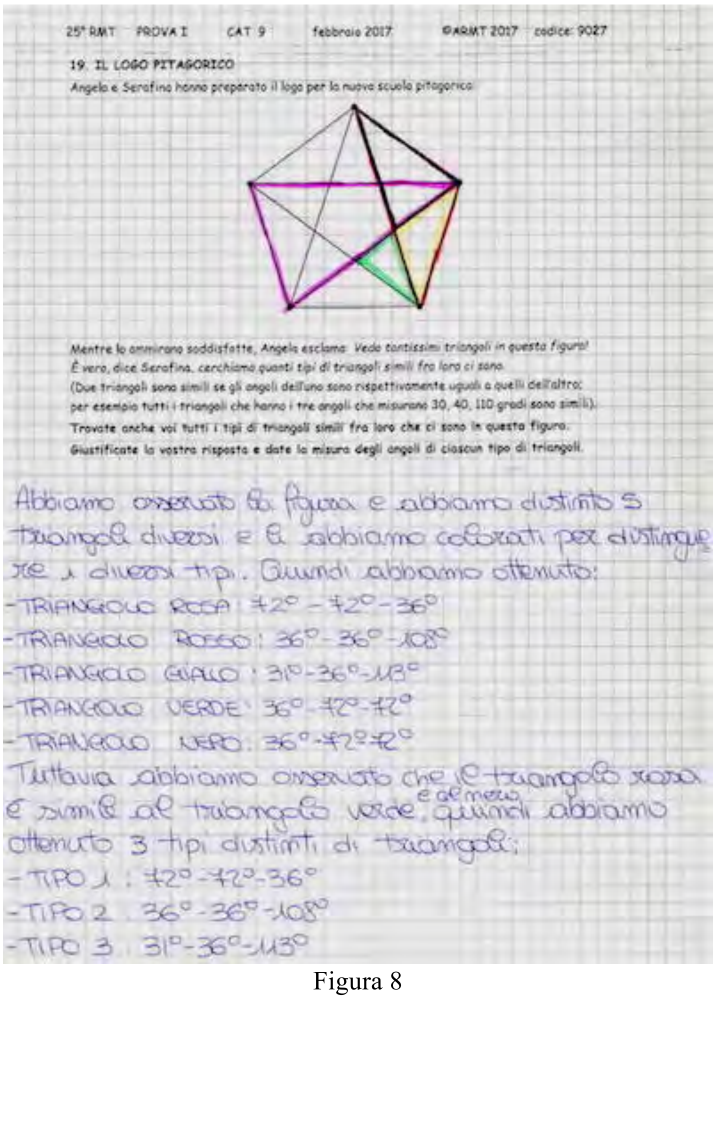



Figura 7

Chi ha avuto 2 punti ha in generale fornito una risposta parziale; in un caso, come il seguente di categoria 9,


25° RMT PROVA I CAT 9 febbraio 2017 ©ARMT 2017 codice: 9027

19. IL LOGO PITAGORICO

Angelo e Serafina hanno preparato il logo per la nuova scuola pitagorica:

Mentre lo ammirano soddisfatte, Angela esclama: *Vedo tantissimi triangoli in questa figura!*
*È vero*, dice Serafina, *cerchiamo quanti tipi di triangoli simili fra loro ci sono.*
(Due triangoli sono simili se gli angoli dell'uno sono rispettivamente uguali a quelli dell'altro: per esempio tutti i triangoli che hanno i tre angoli che misurano 30, 40, 110 gradi sono simili).
**Trovate anche voi tutti i tipi di triangoli simili fra loro che ci sono in questa figura.**
**Giustificate la vostra risposta e date la misura degli angoli di ciascun tipo di triangoli.**

Abbiamo osservato la figura e abbiamo distinto 5 triangoli diversi e li abbiamo colorati per distinguer-ne i diversi tipi. Quindi abbiamo ottenuto:
- TRIANGOLO ROSA: 72° - 72° - 36°
- TRIANGOLO ROSSO: 36° - 36° - 108°
- TRIANGOLO GIALLO: 31° - 36° - 113°
- TRIANGOLO VERDE: 36° - 72° - 72°
- TRIANGOLO NERO: 36° - 72° - 72°

Tuttavia abbiamo osservato che il triangolo rosa è simile al triangolo verde e al nero, quindi abbiamo ottenuto 3 tipi distinti di triangoli:
- TIPO 1: 72° - 72° - 36°
- TIPO 2: 36° - 36° - 108°
- TIPO 3: 31° - 36° - 113°

Figura 8

la risposta è sbagliata a causa di un errore nella misura degli angoli: tale eventualità non era stata prevista nell'analisi del compito.

Chi ha avuto 1 punto ha solo iniziato un ragionamento sugli angoli dei diversi triangoli che "vedeva" e non ha portato a termine la classificazione dei triangoli, non rispondendo di fatto alle domande poste dal problema.

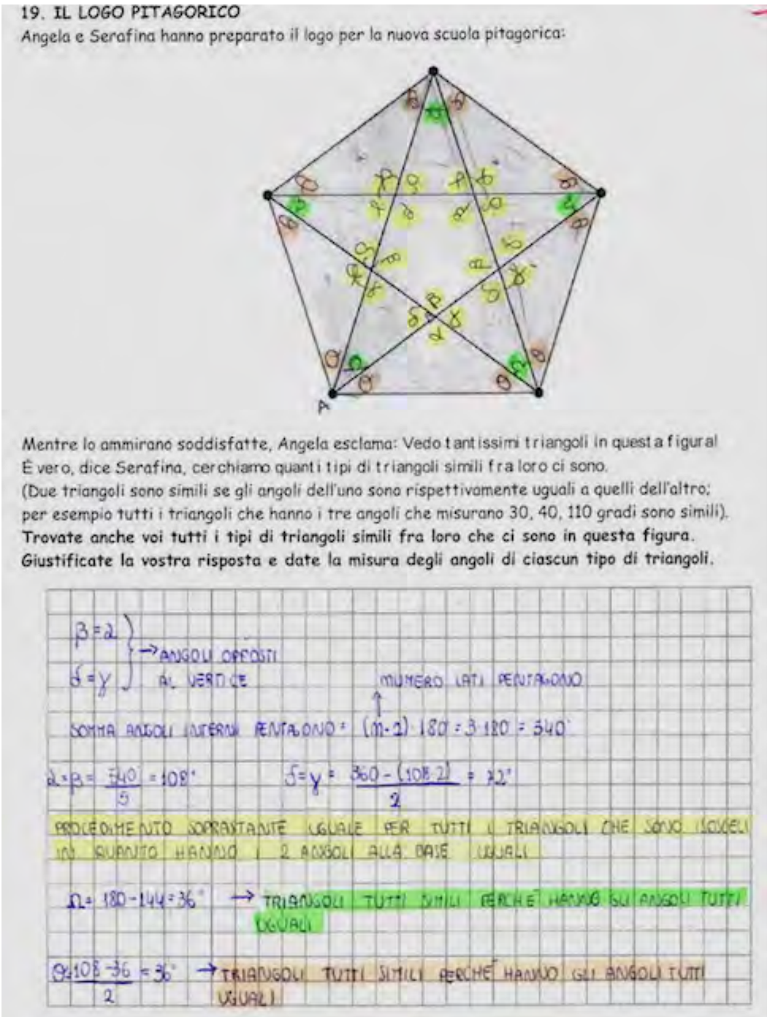



Figura 9

Chi ha avuto 0 punti ha lasciato la risposta in bianco oppure ha tentato di rispondere al problema, evidenziando però:

- una mancata comprensione del concetto di similitudine, spesso confusa con la congruenza
- il riconoscimento solo di triangoli "mono-pezzo", come nel caso dell'elaborato di categoria 9:

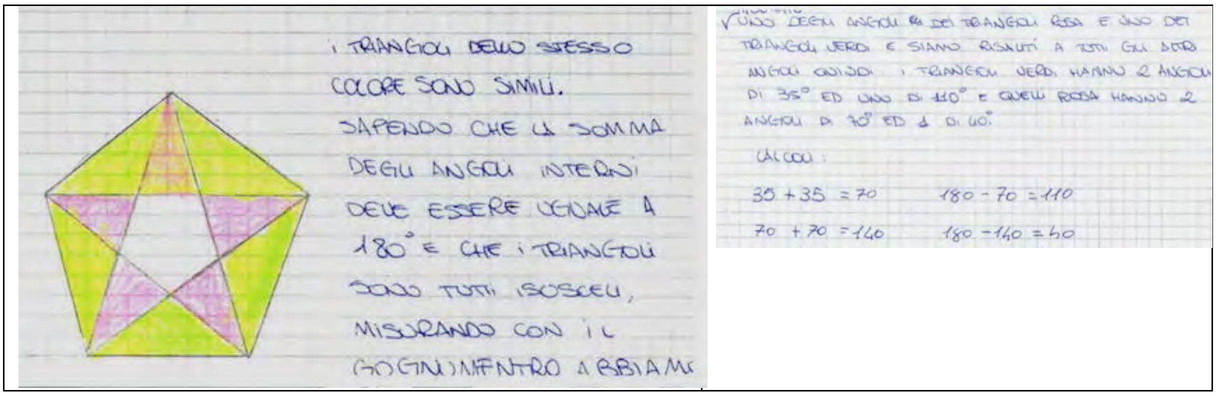



Figura 10

- il ricorso a strumenti di misura che sentivano come necessari ma che non hanno saputo gestire (cat. 9):

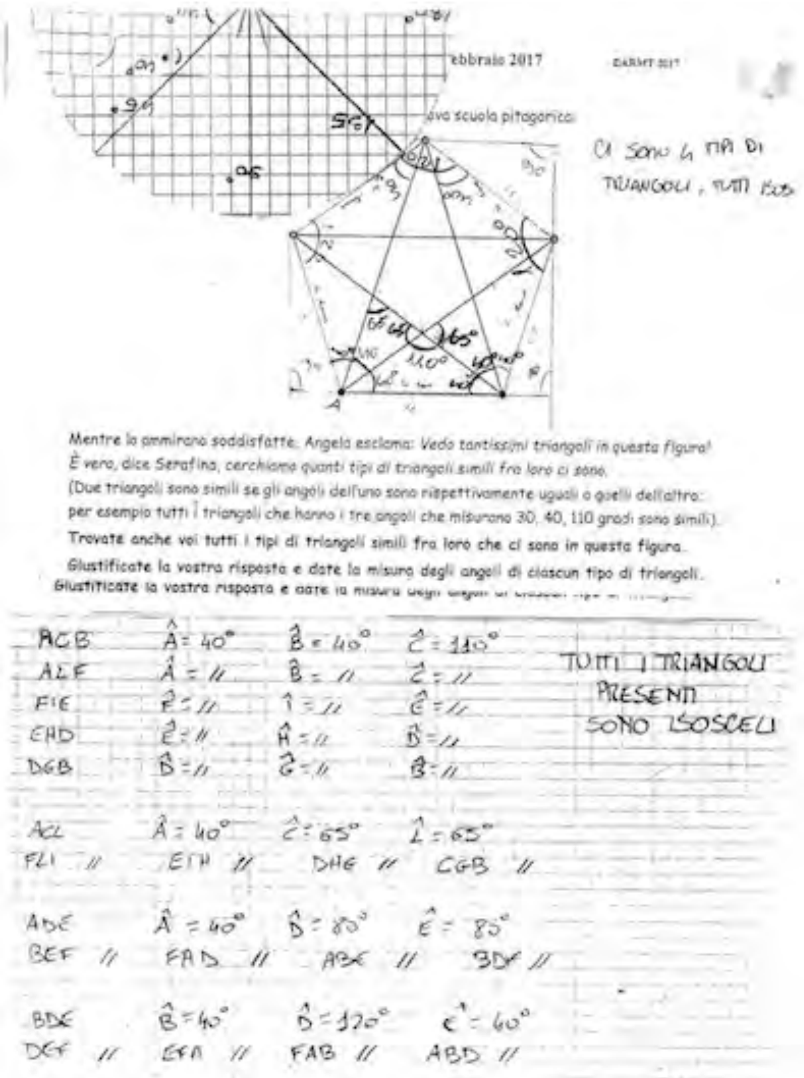


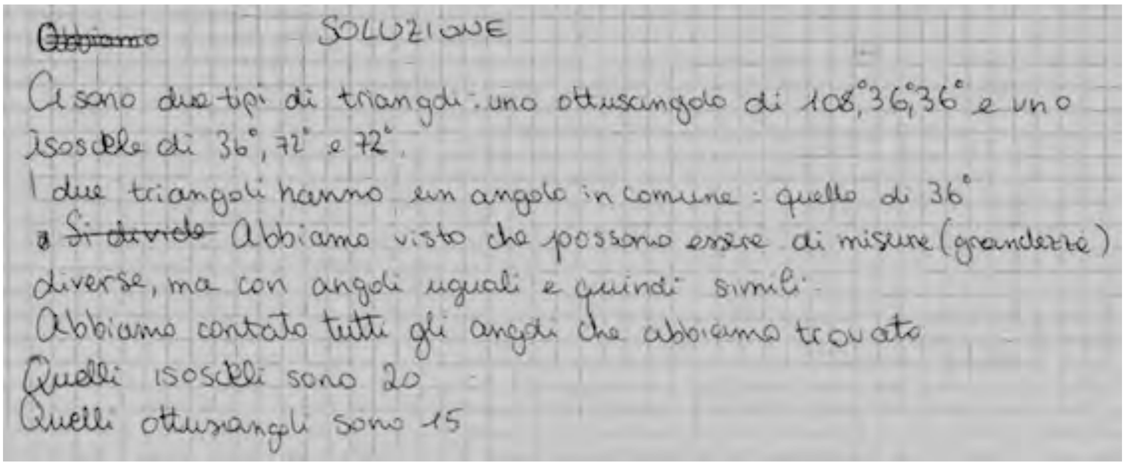

Figura 11

- e infine, solo il conteggio dei vari triangoli (non richiesto) senza la relativa classificazione in tipi.

**Alcune osservazioni**

Considerando l’elevato numero di punteggi 0 (16 per la cat. 9 e 17 per la cat. 10, per la sezione di Parma) e la tabella riassuntiva dei punteggi delle 342 classi vista più sopra, il problema si è rivelato piuttosto difficile.
In effetti, altri problemi analoghi assegnati in precedenti edizioni del RMT, avevano avuto un basso tasso di riuscita.
Il testo del problema, più volte rivisto, come riportato, per essere reso più chiaro e comprensibile, resta ancora troppo ricco di spunti per possibili risposte: a fronte di elaborati estremamente sintetici che centrano le risposte, ci sono analisi molto dettagliate che però non arrivano alla conclusione, concentrandosi o disperdendosi in osservazioni non scorrette, ma comunque non pertinenti.
Riprendendo l’analisi iniziale delle tre richieste del problema, l’uso dell’espressione “tipi di triangoli simili” in tre frasi diverse potrebbe aver focalizzato l’attenzione sulla richiesta 2) mettendo in secondo piano la 1), che pure doveva essere stata compresa. In altre parole, una volta capito che i tipi di triangoli simili erano due, e determinate le misure corrette degli angoli, anche attraverso vere e proprie dimostrazioni geometriche, a molti non è parso più necessario distinguere quelli che inizialmente abbiamo chiamato sottotipi.

A tal proposito occorre dire che alcuni elaborati, valutati con punteggi differenti, presentano lievi sfumature nelle risposte, a riprova della difficoltà di attribuire punteggi coerenti con quelli stabiliti, quando il problema presenta più richieste o contiene più domande. D’altro canto, in diversi elaborati, indipendentemente dal punteggio ottenuto, si nota lo sforzo di contare il numero totale di triangoli all’interno dei vari sottotipi o il numero totale complessivo di triangoli inclusi nella figura, numeri effettivamente non richiesti, come nel caso dell'elaborato di categoria 9 seguente:



~~Abbiamo~~ SOLUZIONE

Ci sono due tipi di triangoli: uno ottusangolo di 108°, 36°, 36° e uno isoscele di 36°, 72° e 72°.

I due triangoli hanno un angolo in comune: quello di 36°

e ~~Si divide~~ Abbiamo visto che possono essere di misure (grandezze) diverse, ma con angoli uguali e quindi simili.

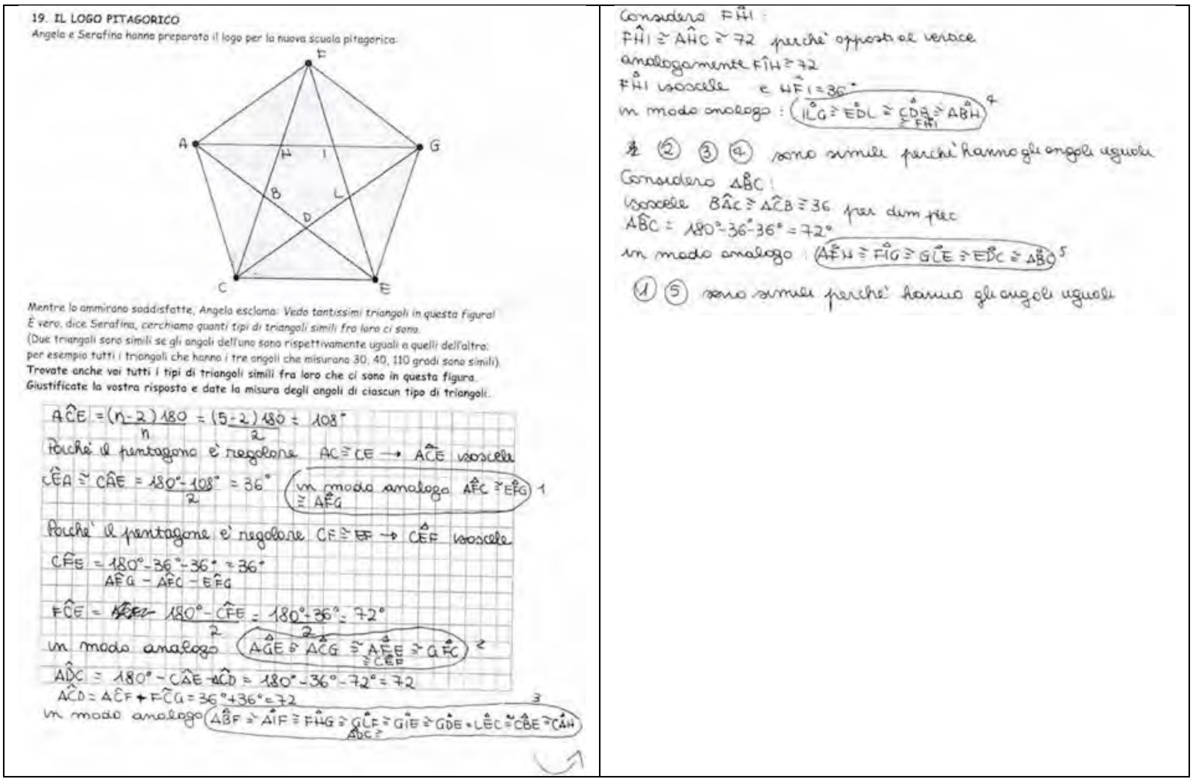
Abbiamo contato tutti gli angoli che abbiamo trovato

Quelli isosceli sono 20

Quelli ottusangoli sono 15

Figura 12

Non si notano grandi differenze tra gli elaborati delle categorie 9 e 10, ma si evidenzia, nel passaggio dalla categoria 9 alla 10, l'abbandono della strategia della misura e del ricorso al goniometro a favore di ragionamenti più astratti e della ricerca di dimostrazioni geometriche come si evidenzia negli elaborati seguenti:



**19. IL LOGO PITAGORICO**

*Angela e Serafina hanno preparato il logo per la nuova scuola pitagorica.*



*Mentre lo ammirano soddisfatte, Angela esclama: Vedo tantissimi triangoli in questa figura!*
*È vero, dice Serafina, cerchiamo quanti tipi di triangoli simili fra loro ci sono.*
(Due triangoli sono simili se gli angoli dell'uno sono rispettivamente uguali a quelli dell'altro: per esempio tutti i triangoli che hanno i tre angoli che misurano 30, 40, 110 gradi sono simili).
**Trovate anche voi tutti i tipi di triangoli simili fra loro che ci sono in questa figura.**
**Giustificate la vostra risposta e date la misura degli angoli di ciascun tipo di triangoli.**

$A\hat{C}E = \frac{(n-2)180}{n} = \frac{(5-2)180}{2} = 108°$

Poiché il pentagono è regolare $AC \cong CE \rightarrow A\hat{C}E$ isoscele

$C\hat{E}A \cong C\hat{A}E = \frac{180°-108°}{2} = 36°$ (in modo analogo $A\hat{F}C \cong E\hat{F}G \cong A\hat{F}G$) 1

Poiché il pentagono è regolare $CF \cong ~~EF~~ \rightarrow C\hat{E}F$ isoscele

$C\hat{F}E = 180° - 36° - 36° = 36°$
$A\hat{F}G - A\hat{F}C - E\hat{F}G$

$F\hat{C}E = \frac{180° - C\hat{F}E}{2} = \frac{180° - 36°}{2} = 72°$

in modo analogo ($A\hat{G}E \cong A\hat{C}G \cong A\hat{F}E \cong G\hat{F}C \cong C\hat{E}F$) 2

$A\hat{D}C = 180° - C\hat{A}E - A\hat{C}D = 180° - 36° - 72° = 72$

$A\hat{C}D = A\hat{C}F + F\hat{C}G = 36° + 36° = 72$

in modo analogo ($A\hat{B}F \cong A\hat{I}F \cong F\hat{H}G \cong G\hat{L}F \cong G\hat{I}E \cong G\hat{D}E \cong L\hat{E}C \cong C\hat{B}E \cong C\hat{A}H \cong A\hat{D}C$) 3

Considero $F\hat{H}I$:

$F\hat{H}I \cong A\hat{H}C \cong 72$ perché opposti al vertice

analogamente $F\hat{I}H \cong 72$

$F\hat{H}I$ isoscele e $H\hat{F}I = 36°$

in modo analogo: ($I\hat{L}G \cong E\hat{D}L \cong C\hat{D}B \cong A\hat{B}H \cong F\hat{H}I$) 4

2 3 4 sono simili perché hanno gli angoli uguali

Considero $A\hat{B}C$:

isoscele $B\hat{A}C \cong A\hat{C}B \cong 36$ per dim prec

$A\hat{B}C = 180° - 36° - 36° = 72°$

in modo analogo: ($A\hat{F}H \cong F\hat{I}G \cong G\hat{L}E \cong E\hat{D}C \cong A\hat{B}C$) 5

1 5 sono simili perché hanno gli angoli uguali

Figura 13

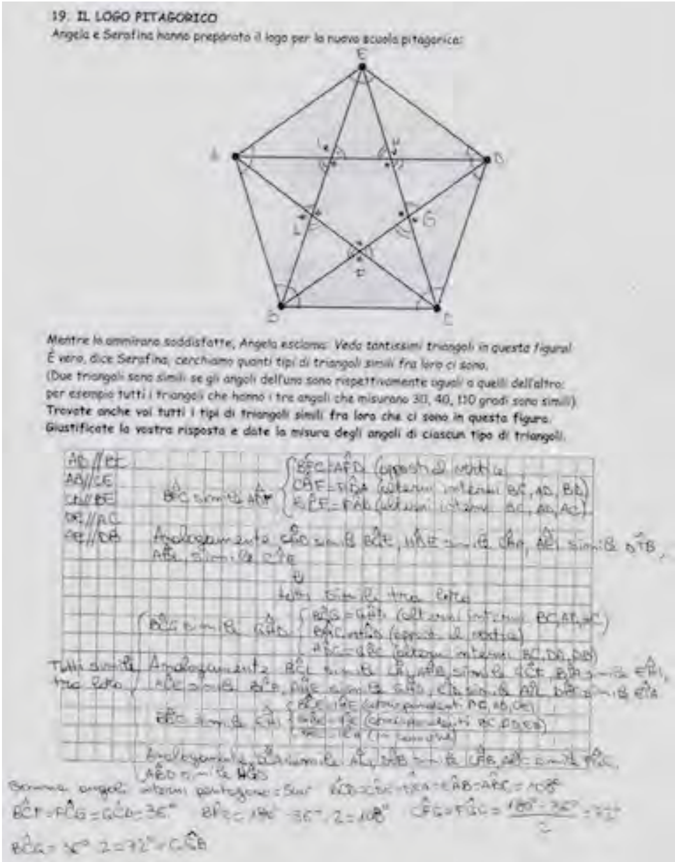



Figura 14

**Indicazioni didattiche**

**Benché** i risultati che riguardano problemi del RMT a contenuto geometrico, in particolare per quelli delle categorie più alte, si rivelino nel complesso deludenti, pensiamo che abbia senso continuare a proporli convinti che, al di là dei risultati della gara, possano essere ripresi in classe per attività geometriche che stimolino la mobilizzazione di conoscenze pregresse, talvolta oscurate da una preponderanza di attività essenzialmente di tipo algebrico.

Il problema in oggetto, e altri proposti negli anni nell’ambito del RMT, sono da catalogare come problemi che mettono gli allievi in situazioni di ricerca, problemi cioè che non si risolvono in particolare con l’applicazione diretta di formule o di definizioni in qualche modo meccaniche, ma che necessitano del ricorso a successivi ragionamenti, o ancora problemi che evidenziano le diversità di risultati laddove si ricorra a misurazioni, cosa che porta alla domanda “perché otteniamo risultati diversi?”, abituando quindi gli alunni al passaggio da una realtà particolare ad un ambito “generale”.

Nasce così, in maniera “spontanea”, un conflitto cognitivo che necessita, per il suo superamento, di “sganciarsi” dalle misure per trovare una via comune in qualche modo certificata.

È proprio nel lavoro di classe, l’ambiente nel quale sarà possibile mettere a confronto i diversi modi di risolvere un problema e ciò permetterà di far evolvere incertezze e stereotipi, come ad esempio il riferimento al riconoscimento solo di triangoli che abbiamo indicato come “mono-pezzo” (citato in precedenza some primo esempio di punteggio 0) o come il confondere ancora “congruenza” e “similitudine”.

Può inoltre essere interessante dibattere sulla necessità iniziale di trovare un **criterio** per l’identificazione delle famiglie di triangoli simili.

In aspetti di questo tipo si può intravedere **la differenza fra un’attività di tipo nozionistico e un’attività che veda la geometria come “ricerca ragionata”.**

Nella seconda parte del titolo di questo articolo si trova scritto “risultati apparentemente deludenti”; pensiamo infatti che i risultati piuttosto deludenti della prova, potrebbero non esserlo più quando il problema in oggetto **diventi protagonista di una ricca attività in classe.**

# « BEAUCOUP DE BRUIT POUR RIEN » ?

# GRAND TRAVAIL DE CONSTRUCTION D'UN ÉNONCÉ ET … RÉSULTATS APPAREMMENT DÉCEVANTS

**Groupe de recherche Zeroallazero**[1]

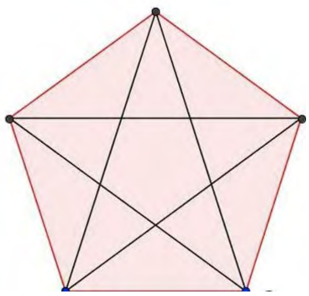
## Introduction

De l'idée initiale d'un énoncé de problème, dans le cas du RMT, jusqu'à sa mise au point, le chemin est long et complexe. Tout d'abord on détermine le contenu mathématique auquel nous nous intéressons, et nous commençons à réfléchir à un énoncé possible. Cependant, pour construire un énoncé approprié, deux contraintes essentielles doivent être prises en compte : l'absence d'ambiguïté du langage utilisé et la clarté de l'interprétation. En fait, l'interprétation d'un contexte doit être aussi "universelle" que possible, c'est-à-dire qu'elle ne doit dépendre d'aucune situation particulière, ni scolaire ni d'aucune autre sorte.
La lisibilité des énoncés des problèmes de la RMT par les élèves, sans aide extérieure, est un autre aspect prioritaire : nous devons prendre en compte la syntaxe, le vocabulaire, la complexité des phrases, la terminologie, en fonction de l'âge.
Il faut également être attentif à la présentation des données : il faut se demander si elles apparaissent clairement lors de la lecture et si elles sont toutes nécessaires ou non.
La formulation des questions ou, en général, des consignes, n'est pas moins importante, tant pour la compréhension de ceux qui sont appelés à résoudre le problème que pour l'attribution ultérieure des points étroitement liés aux consignes.
Cet article raconte l'« histoire » d'un énoncé, y compris l'évolution ultérieure de l'analyse à priori, et se termine par les observations découlant de la nécessaire analyse a posteriori des copies des groupes d'élèves.

## 1. « L'histoire » d'un énoncé

### 1.1. L'idée

Les aspects mathématiques inhérents au fameux « pentagone régulier des pythagoriciens !» avec les relations entre les côtés, les diagonales et les angles, semblent être « à la portée » des élèves des deux premières années de l'école supérieure (catégories 9 et 10 pour le RMT), mais peut-être également pour les élèves de la dernière année du collège (catégorie 8).

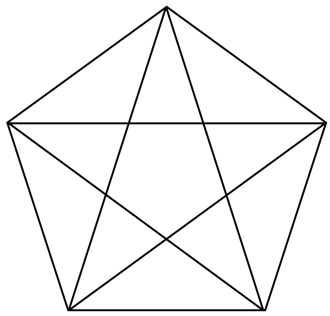


Le contenu mathématique imaginé est la recherche des mesures des angles des triangles présents dans la figure.
En fait, au sein du RMT, des problèmes liés au pentagone régulier avaient déjà été proposés, mais avec l'attention centrée « uniquement » sur la recherche du nombre de triangles qu'on pouvait identifier sur la figure, comme par exemple dans le problème suivant (21e RMT, première épreuve):

[1] Maria Felicia Andriani, Clara Bisso, Serafina Foglia, Silvano Gregori, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Daniela Medici, M. Gabriella Rinaldi, Angela Rizza, Vincenza Vannucci.

**Des triangles, oui, mais combien ?** (Cat. 6, 7, 8)

Voici un pentagone régulier, dessiné avec toutes ses diagonales :



Alice dit *: « Je vois 10 triangles dans ce pentagone. »*
Bianca lui répond : « *Moi, j'en vois plus que ça ! »*

**Combien peut-on voir, en tout, de triangles dans cette figure ?**

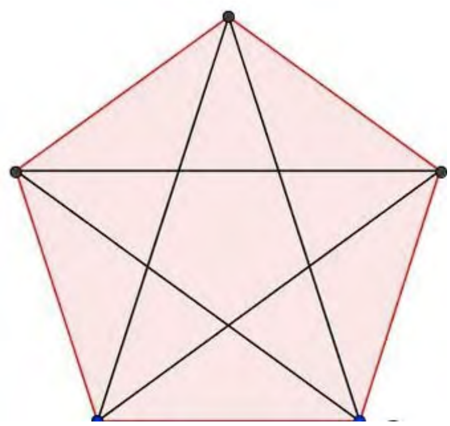
**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

Comme on peut le constater, il s'agit d'un problème centré sur la visualisation et l'identification des triangles et leur dénombrement.
Les résultats de ce problème n'ont pas été satisfaisants (seuls quelques triangles ont été identifiés, mais surtout on a relevé des difficultés pour mettre clairement en évidence les triangles identifiés, qui sont essentiels pour un comptage correct) en catégorie 6, mais aussi, dans une certaine mesure, en catégorie 7.
Il a donc semblé raisonnable de proposer le nouveau problème, plus exigeant, à partir de la catégorie 8 et pas avant.

### 1.2. Tentative de construction d'un énoncé

En partant de la figure précédente et en tenant compte du contenu mathématique imaginé, une première tentative a été faite pour écrire un énoncé du problème à proposer aux catégories 8, 9, 10.
Cette première version de l'énoncé est essentiellement axée sur les problèmes angulaires et il est jugé nécessaire de rappeler aux élèves combien vaut la mesure de la somme des angles d'un pentagone.

**Le logo pythagoricien (premier projet)**
Angela, Bruno et Carla préparent un logo pour la nouvelle école pythagoricienne



Angela, aime beaucoup ce logo. Elle se souvient que la somme des angles d'un pentagone mesure 540 degrés et dit:
- *dans ce pentagone régulier, les diagonales déterminent les angles avec trois mesures différentes*
Bruno dit *non, il n'y en a que deux différentes*
Carla n'est pas d'accord avec l'un d'eux et dit : *vous avez tort, il y en a quatre.*
**Combien y a-t-il d'angles de mesures différentes dans le pentagone régulier ?**
**Trouvez les mesures de ces angles et justifiez vos réponses.**

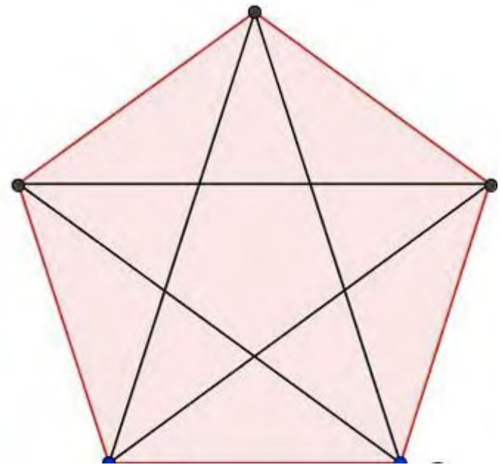
### 1.3. Évolution de l'énoncé

Bien que la formulation de l'énoncé soit entièrement axée sur des problèmes angulaires, les premières étapes que doivent suivre les élèves pour pouvoir répondre aux consignes, sont liées aux triangles déterminés par les diagonales du pentagone (comme l'exige également l'énoncé du problème du 21^e RMT ci-dessus). Les 10 triangles isocèles et le pentagone interne (qui constituent la partition de la figure en 11 parties « élémentaires ») sont évidents ; puis les élèves devront compter les triangles composés de deux triangles : deux sur chaque côté du pentagone, pour un total de 10 ; puis les 5 triangles formés de trois triangles, (un par sommet du pentagone) puis

les 5 triangles intérieurs composés du pentagone interne et de deux petits triangles isocèles et finalement les 5 triangles composés du pentagone interne et de quatre autres triangles. Ainsi, 35 triangles sont identifiés. La question spécifiquement angulaire ne devra être abordée que plus tard.
On pense, donc, qu'il est plus approprié de développer un nouvel énoncé prenant en compte de manière plus explicite les triangles pouvant être visualisés dans la figure proposée.

**1.4. Le logo pythagoricien (deuxième projet)**

Angela, Silvano et Serafina ont préparé le logo pour la nouvelle école pythagoricienne



Pendant qu'ils l'admirent satisfaits, Angela s'exclame : *Je vois beaucoup de triangles !*
*C'est vrai,* disent les deux autres. *Voyons combien il y a de familles de triangles*.
**Trouvez, vous aussi, combien il y a de triangles dans le pentagone régulier et de combien de familles différentes.**
**Pour chaque famille, indiquez les mesures des angles.**

**Justifiez vos réponses.**

Dans ce cas, la référence explicite aux triangles est bien présente, mais il existe des doutes quant à l'expression « familles de triangles » qui, en réalité, ne semble pas être « rigoureuse ».
Que peut-on comprendre par l'expression « familles de triangles » ? Elle peut être interprétée du point de vue des grandeurs, des isométries, des similitudes, de leur position dans le pentagone, ...
Comment surmonter cette ambiguïté du langage ?

Du langage impropre et ambigu de la « famille des triangles », il devient nécessaire de passer au langage mathématique et de parler de « triangles semblables » ou de « famille de triangles semblables ».

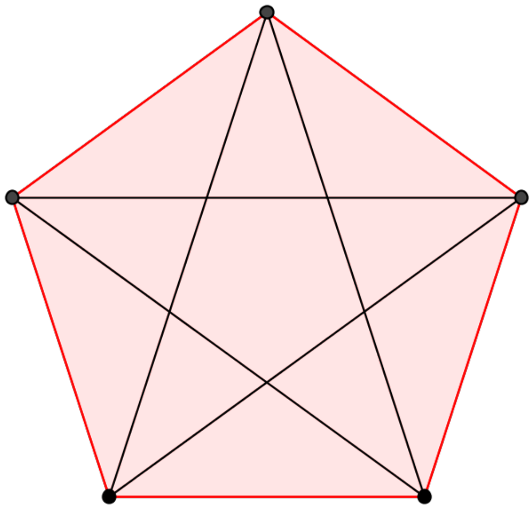
Une critique qui subsiste dans cette deuxième version de la phrase est détectée dans les questions. Dans les « critères pour l'élaboration de problèmes », il est souligné qu'il est très difficile d'attribuer des points lorsque plusieurs questions se posent, en particulier lorsqu'elles dépendent les unes des autres.

Dans le cas de ce problème, nous pouvons déjà penser qu'il y aura environ ¼ des réponses « 35 » à la demande du nombre de triangles et une diversité d'autres réponses dont 15, 20 ou 25 (selon les résultats du problème *Des triangles, oui, mais combien ?* cité précédemment). Pour chacune de ces réponses à la première question, il y aura plusieurs types de réponses à la deuxième : deux familles, trois familles, etc. La deuxième question concernant les mesures des angles fournira également des réponses diversifiées.

Même si nous nous limitions à « correct ou erroné » pour chacune de ces trois réponses, nous aboutirions à huit types de réponses, d'où la grande difficulté d'attribuer les points de 0 à 4.
Cette analyse conduit à la conclusion qu'il est nécessaire de renoncer à au moins une des questions ou de la compléter dans la demande d'explications.
Tenant compte de tous ces aspects critiques, une nouvelle version de l'énoncé est préparée où, de plus, il semble « plus prudent » de rappeler aux élèves ce que sont deux triangles semblables.

### 1.5. Le logo pythagoricien (troisième projet)

Angela, Silvano et Serafina ont préparé le logo pour la nouvelle école pythagoricienne :
:



Pendant qu'ils l'admirent satisfaits, Angela s'exclame : *Je vois beaucoup de triangles !*
*C'est vrai,* disent les deux autres. *Voyons combien il y a de familles de triangle semblables.*
(deux triangles sont semblables si les trois angles de l'un ont respectivement les mêmes mesures de ceux de l'autre).

**Trouvez, vous aussi, combien il y a de familles de triangles semblables dans cette figure.**

**Justifiez votre réponse.**

## 2. L'analyse a priori, c'est-à-dire ce que l'adulte propose

### 2.1. La tâche mathématique

Le premier paragraphe de l'analyse à priori concerne le contenu mathématique et à cet égard, il est nécessaire d'établir quels sont les aspects jugés importants : le comptage des triangles, l'identification des triangles semblables, les mesures des angles.

Tenant compte également de la dernière formulation des consignes de l'énoncé, on renonce au décompte des triangles, sachant très bien qu'il y aura peu de comptages complets et on se concentre sur la reconnaissance de triangles semblables, qui nécessite également la mesure des angles.

La « tâche mathématique » devient alors « Identifier les triangles formés par les diagonales et les côtés d'un pentagone régulier, puis les classer en familles de triangles semblables. »

### 2.2. La tâche de l'élève

À partir de l'énoncé et de la tâche mathématique décrite ci-dessus, on élabore, du point de vue des adultes - inévitablement - ce que pourraient être les procédures des élèves qui, dans la rubrique « Analyse a priori » des problèmes du RMT, est désignée par « Tâche de l'élève ».

**Première ébauche de la tâche de l'élève**

Ce qui suit est une première liste « raisonnée » des étapes pouvant mener à la résolution du problème, dans laquelle, en italique, il existe également des observations et des « doutes » des rédacteurs :

- Observer la figure et y « voir » le pentagone externe, les diagonales (étoile à cinq pointes) et la subdivision du pentagone en 11 parties élémentaires : un pentagone interne (p) et deux types de parties élémentaires, soit 5 triangles (a) avec angles aigus formés par les « pointes de l'étoile » et 5 triangles (o) avec un ange obtus dont l'un des côtés coïncide avec un côté du pentagone extérieur.
- Constater que certaines des 11 pièces peuvent être assemblées pour former d'autres triangles en plus des deux types élémentaires a et o. (Noter que c'est l'un des obstacles du problème : *passer de ce que l'on voit à ce qu'on pourrait voir*):
  - un troisième type composé de deux triangles adjacents (a et o),

  - un quatrième type composé de trois triangles adjacents (o, a, o) ayant un sommet commun avec un sommet du pentagone extérieur,
  - un cinquième type composé du pentagone central et de deux triangles (a, p, a), « opposés » aux triangles du type précédent par rapport à une diagonale (les triangles de ce cinquième type seront égaux à ceux du troisième type)
  - un sixième type composé de cinq parties élémentaires (o, a, a, p, a).
- Déterminer les angles « élémentaires » présents dans la figure totale, en notant que certains sont égaux et qu'il n'y a que des angles de 108, 72 et 36 degrés (c'est la partie la plus complexe du problème, qui fait appel à toutes les connaissances sur les angles d'un triangle, « addition » et « soustraction », angles opposés, alternes internes, ...)

  Par exemple, si l'on voit que le pentagone peut être décomposé en trois triangles dont la somme des angles est égale à celle des angles du pentagone, nous en déduisons que la somme des angles est de 540 degrés et que, pour des raisons de symétrie, l'un des angles est de 108 degrés, puis on peut trouver deux angles de 36 degrés, puis calculer l'angle d'une « pointe de l'étoile » qui mesure également 36 degrés, ...

  D'un point de vue dynamique, il est possible de suivre le parcours suivant les cinq côtés de l'étoile : à partir d'un sommet, en suivant une diagonale, on arrive au sommet suivant, on tourne autour de la pointe et cette procédure, répétée cinq fois, fait que l'on se retrouve dans la position de départ. Après 5 demi-tours (qui équivalent chacun à 180 degrés) dont on retire cinq angles de la pointe, après une division par 5, on trouve la mesure d'un angle de la pointe $180 : 5 = 36$.

  Avec la comparaison par exemple d'un triangle du quatrième type et d'un triangle du sixième type où $\alpha$ et $\beta$ sont les mesures respectives de l'angle inférieur de ces triangles, on obtient les équations

  $$4 \alpha + \beta = 180 = 2 \alpha + 3 \beta$$

  dont on déduit $\alpha = \beta$ puis $5 \alpha = 5 \beta = 180$ et enfin $\alpha = \beta = 36$,

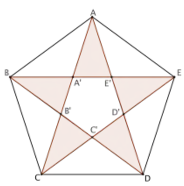
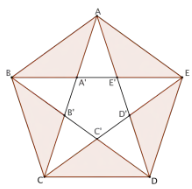
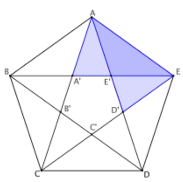
  (*On peut se demandes s'il est nécessaire de décrire ces procédures. Si l'on indique dans l'énoncé que la somme des angles d'un pentagone est de 540 degrés, les élèves sont orientés vers une certaine procédure et le problème devient moins riche ?)*

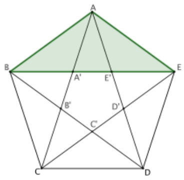
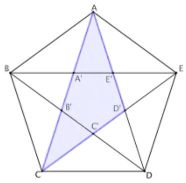
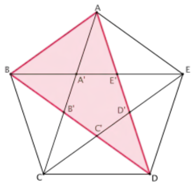
  On peut également recourir à des mesures (approximatives) des angles, prises directement sur la figure, les adapter et faire un contrôle pour se convaincre que les mesures des trois angles sont de 108, 72 et 36 degrés.
- Noter que tous les triangles ont deux angles égaux (triangles isocèles) et qu'il n'y a que deux familles de triangles semblables : celle des triangles aux angles aigus : 36, 72 et 72 degrés et elle des triangles à angle obtus: 36, 36 et 108 degrés.

Compte tenu de l'importance de la présentation de la « tâche de l'élève », tant pour la définition des critères d'attribution des points que pour le rôle qui sera joué lors de la correction des copies, on ressent la nécessité de présenter graphiquement les différents types de triangles.

C'est ainsi que s'élabore la **deuxième version de la tâche de l'élève :**

- Comprendre que pour trouver les familles de triangles semblables, il est nécessaire d'identifier les nombreux triangles formés par les diagonales du pentagone et de prendre conscience de la nécessité de trouver un critère d'identification de ces triangles. Par exemple, noter qu'il existe des triangles « simples » et d'autres triangles formés par plusieurs triangles. De cette façon, nous pouvons compter :

| | |
|---|---|
| 10 triangles simples (le 5 formant « les pointes de l'étoile » formée par les diagonales et les 5 avec la base sur l'un des côtés du pentagone)<br><br>types: 1 et 2 |   |
| 10 triangles composés de deux triangles : il y en a 2 sur chaque côté de la figure<br><br>type 3 |  |

| | |
|---|---|
| 5 triangles composés de 3 triangles : un pour chaque sommet<br><br>type 4 |  |
| 5 triangles composés de 2 triangles et du pentagone intérieur<br><br>type 5 |  |
| 5 triangles composés de quatre triangles et du pentagone intérieur<br><br>type 6 |  |

- À ce stade, pour trouver le nombre de familles de triangles semblables, il est nécessaire de rechercher les mesures des angles des triangles. Il y a de nombreuses façons de les trouver.

  Par exemple, en constatant d'abord que les angles intérieurs du pentagone mesurent 108°, ce qui peut se trouver en constatant que le pentagone peut se décomposer en trois triangles dont la somme des angles est celle du pentagone.

  En déduire alors que la somme de ses angles est de 540° et que, pour certaines raisons de symétrie, l'un de ses angles est de 108°. En considérant l'un des triangles isocèles ayant comme côtés égaux deux côtés du pentagone et comme base une diagonale, par exemple ABE, on trouve facilement les mesures des angles à la base : (180 - 108) : 2 = 36 ; par conséquent, les trois angles consécutifs de sommets A, BAC, CAD et DAE mesurent respectivement, en degrés : 36 ; (108 – 36 × 2) = 36 et 36. Ceci s'applique à toutes les groupes de trois d'angles consécutifs dans chaque sommet du pentagone. À ce stade, il est possible d'identifier les mesures de tous les angles, pour chaque groupe de triangles du tableau. Par exemple, le triangle AEE' a deux angles de 36° dans les sommets A et E ; (180 - 36 × 2) = 108° au sommet E'. Le triangle AA'E' a l'angle en A de 36°; l'angle en E' s'ajoute à l'angle AE'E, il mesure donc 72°; il en va de même pour l'angle en A', et ainsi de suite.

Ou $\alpha = \beta$

  en comparant, par exemple, un triangle de type 4 et un de type 6 où $\alpha$ et $\beta$ sont les mesures respectives de l'angle inférieur de ces triangles, on obtient les équations $4\alpha + \beta = 180$ et $2\alpha + 3\beta = 180$ dont on déduit $\alpha = \beta$ puis $5\alpha = 5\beta = 180$ et enfin $\alpha = \beta = 36$. On trouve les angles qui mesurent 72° et 10 °.

- Enfin, étant donné que tous les triangles identifiés sur la figure ont des angles de base congruents, nous pouvons en déduire que nous avons à faire à des triangles isocèles de deux familles différentes :
  - des triangles avec deux angles à la base de 36° et un angle au sommet de 108° ;
  - des triangles avec un angle au sommet de 36° et des angles à la base de 72°.

En fait, cette présentation semble plus facile à gérer pour l'analyse des copies et l'attribution des points nécessaire, qui s'écrit donc comme suit :

4 Réponse correcte (deux familles de triangles semblables) avec une description complète permettant de la justifier : calcul de tous les angles et répartition de tous les types de triangles dans deux familles: 36, 72, 72 pour les trois types de triangles aigus et 36, 36, 108 pour les deux (ou trois) types d'angles obtus

3 Réponse correcte (deux familles triangulaires semblables) avec une description incomplète: par exemple, les cinq ou six types de triangles n'ont pas été identifiés, le détail du calcul des angles n'est pas mentionné

2 Réponse correcte (deux familles de triangles semblables) avec un seul dessin ou description d'un représentant par famille

1 réponse correcte (deux familles de triangles semblables) sans aucune explication

  ou réponse incorrecte (une famille ou trois familles) avec mention des angles d'au moins une famille

  ou réponse incorrecte en raison de calculs inexacts ou d'angles inexacts

0 Incompréhension du problème

**3. L'histoire de la construction de ce problème, avec son énoncé et son analyse a priori, ... n'est pas encore terminée**

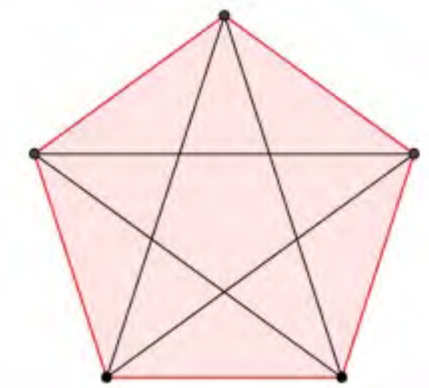
Comme pour tout problème du RMT, le groupe de travail, en l'occurrence le groupe Zeroallazero, qui l'a conçu dans ses différentes composantes, énoncé et analyse a priori, le « livre » au « Groupe de pilotage » qui se charge d'une première analyse et de la subdivision des problèmes reçus dans les trois épreuves de chaque édition du concours.

Après une phase d'observation par les différentes sections de l'association des RMT, nous sommes arrivés à la version finale, qui a connu plusieurs changements : les catégories concernées ne sont que 9 et 10, le problème étant jugé trop difficile pour la catégorie 8 ; dans l'énoncé, une précision a été ajoutée à la phrase entre parenthèses « par exemple, tous les triangles dont les trois angles mesurent 30, 40 et 110 degrés sont semblables » comme support possible pour les élèves ; le mot "famille" a été remplacé par le mot "type" qui a un sens plus neutre.

**Problème « Le logo Pythagoricien » - Version de la première épreuve du 25e RMT (25.I.19)**

**19. LE LOGO PYTHAGORICIEN** (Cat. 9, 10)

Angela et Séraphin ont préparé un logo pour la nouvelle école Pythagoricienne.



Alors qu'ils l'admirent, avec satisfaction, Angela s'exclame : *Je vois beaucoup de triangles dans cette figure !*
*C'est vrai,* dit Séraphin : *voyons combien de types de triangles semblables il y a ?*
(Deux triangles sont semblables si les trois angles de l'un sont égaux, respectivement, aux trois angles de l'autre ; par exemple tous les triangles dont les trois angles mesurent 30, 40 et 110 degrés sont semblables).

**Trouvez combien il y a de types de triangles semblables dans cette figure.**

**Justifiez votre réponse et donnez la valeur des angles de chaque type de triangles.**

---

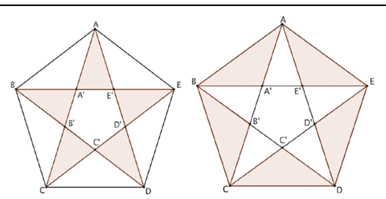
**ANALYSE A PRIORI**

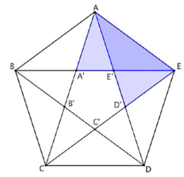
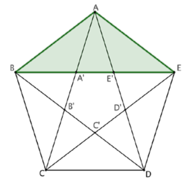
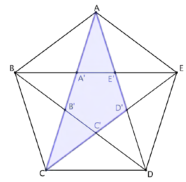
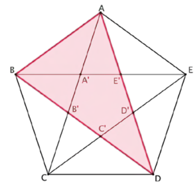
**Tâche mathématique**

- Identifier les triangles formés par les diagonales et les côtés d'un pentagone régulier puis les classer en familles de triangles semblables.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que pour trouver les familles de triangles semblables il faut repérer les nombreux triangles formés par les diagonales et les côtés du pentagone et se rendre compte de la nécessité de trouver un critère pour leur identification Par exemple, remarquer qu'il y a des triangles « élémentaires » et d'autres triangles composés de plusieurs éléments. On peut alors les compter ainsi :

| | |
|---|---|
| 10 triangles élémentaires (les 5 « pointes de l'étoile » et les 5 dont la base est un côté du pentagone)<br><br>types 1 e 2 |  |

| | |
|---|---|
| 10 triangles composés de deux<br>triangles : 2 sur chaque côté<br><br>type 3 |  |
| 5 triangles composés de trois triangles :<br>un pour chaque sommet<br><br>type 4 |  |
| 5 triangles composés de deux triangles et du<br>pentagone intérieur<br><br>type 5 |  |
| 5 triangles composés de quatre triangles<br>et du pentagone intérieur<br><br><br>type 6 |  |

- A ce point, pour trouver le nombre de familles de triangles semblables il est nécessaire de passer à la recherche des mesures des angles des triangles. Il y a plusieurs manières de faire :

  Par exemple, si la somme des angles d'un pentagone n'est pas connue, on peut remarquer que celui-ci se décompose en trois triangles et que par conséquent la somme des angles internes est 180 × 3 = 540. Et comme le pentagone est régulier chacun de ses angles mesure 108 = 540 : 3 (en degrés). Un des triangles isocèles de type 4 a donc les deux angles adjacents à la base dont les mesures sont (180° - 108°) :2 = 36° ; et les trois angles du sommet A : BAC e DAE, mesurent chacun 36 degrés, et CAD, l'angle à la « pointe » de l'étoile mesure (108 – 36 × 2) = 36 (degrés). On peut ainsi déterminer tous les angles de la figure. Par exemple, les triangles de type 2, 4 et 5 ont deux angles de 36° et un angle de 108°. Les triangles de type 1, 2 et 6 ont un angle de 36° et deux angles de 72°.

Ou, confronter, par exemple, un triangle de type 4 et un de type 6, en notant $o$ la mesure d'un angle aigu du triangle de type 4 et $a$ celle du plus petit angle d'un triangle de type 6, on obtient les équations $4o + a = 180$ et $2o + 3a = 180$ dont on tire $o = a$ et $5o = 5a = 180$ et enfin $o = a = 36$. On trouve alors les mesures des deux angles : 72 (en degrés), etc.

Enfin, vu que tous les triangles de la figure sont isocèles, on peut les classer en deux catégories :

- triangles avec angles de base de 36° et angle au sommet de 108°;
- triangles avec angle au sommet de 36° et angles de base de 72°.

(En cas d'utilisation d'un rapporteur, la précision de l'instrument ne permettra vraisemblablement pas de donner les valeurs exactes des angles.)

**Attribution des points**

4 Réponse correcte (deux familles de triangles semblables) avec description complète qui permet de justifier la réponse : détermination de toutes les mesures d'angles et répartition de tous les types de triangles en deux familles : 36, 72, 72 pour les trois types de triangles aigus, 36, 36, 108 pour les deux (ou trois) types de triangles obtus

3 Réponse correcte avec description incomplète : par exemple, les cinq ou six types de triangles n'ont pas été identifiés, le détail des déterminations des mesures d'angles n'est pas mentionné, les mesures des angles prises au rapporteur ne sont qu'approximatives

2 Réponse correcte avec seulement un dessin ou une description d'un représentant de la famille

1 Réponse correcte sans aucune explication

ou (une famille ou trois familles de triangles semblables) avec mention des angles d'une famille au moins

ou réponse erronée due à des calculs ou mesures imprécises des angles

0 Réponse erronée : 7 qui correspond à des types de triangles semblables
ou incompréhension du problème

**Niveaux** : 9, 10

**Origine** : GOAO

**4. Enfin, la parole aux élèves**

Comme nous l'avons vu, la construction du problème a été longue et complexe, mais elle n'a concerné que les adultes, mis à part la comparaison, qui est toutefois très utile, avec les résultats d'un problème précédent similaire (de la même famille).

Le titre de cet article « Beaucoup de bruit pour rien ? » (Shakespeare nous pardonnera), veut mettre l'accent sur le passage « idéal » de la préparation d'un problème à l'analyse a posteriori des travaux des élèves qui seront, d'une certaine manière, les juges du problème lui-même.

Lorsque nous nous arrêtons aux résultats en termes de scores obtenus pour les classes de la catégorie 9 et les classes de la catégorie 10, sur neuf sections, le terme « décevant » pour de tels résultats peut être approprié.

En réalité, seule l'analyse a posteriori des copies des élèves, avec les résolutions exprimées avec leur langue, peut donner un sens aux résultats "numériques".

**4.1. Les résultats**

Les points indiqués dans le tableau ci-dessous sont ceux attribués aux 342 classes des neuf sections participant au RMT, en ce qui concerne les catégories 9 et 10 :

| Catégorie | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | N. classes | M. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cat 9** | 69 (38%) | 37 (20%) | 24 (13%) | 30 (16%) | 23 (13%) | 183 | 1.46 |
| **Cat 10** | 71 (45%) | 27 (17%) | 12 (8%) | 31 (19%) | 18 (11%) | 159 | 1.36 |
| **Total** | 140 (41%) | 64 (19%) | 36 (11%) | 61 (18%) | 41 (12%) | 342 | 1.41 |

**4.2. Analyse a posteriori**

L'analyse a posteriori a notamment été réalisée par Serafina Foglia et Angela Rizza du groupe Zeroallazero sur les travaux de la section de Parme.

Les principaux aspects de la tâche, dans le cas de ce problème, sont les suivants :

1) comprendre que sur la figure du logo, il y a des triangles « simples » et des triangles formés respectivement de deux, trois, cinq « pièces », pour un total de six types de triangles (dont deux sont isométriques) ;
2) comprendre que les triangles différents peuvent être regroupés en deux types de triangles semblables, dans lesquels les triangles identifiés en 1) tombent, pour ainsi dire, en tant que "sous-types";
3) indiquer les mesures des angles des deux types de triangles trouvés.

Les points de 4 à 0 ont été attribués comme suit :

Ceux qui ont obtenu 4 points ont clairement compris les trois requêtes, et les réponses à 1) ont été exprimées de différentes manières : liste de tous les triangles au moyen de lettres attribuées aux sommets, utilisation de couleurs sur la figure pour mettre en évidence les triangles, groupement de sous-types pour les triangles aux angles aigus et triangles avec un angle obtus, découpage de triangles pour la mise en évidence des sous-types.

***En ce qui concerne les figures qui représentent les copies d'élèves, voir la version italienne de cet article.***

***Exemples de copies de catégorie 9***

**Voir les figures 1, 2, 3, 4 respectivement avec :**

- Utilisation de couleurs sur la figure pour mettre en évidence les triangles (1)
- Regroupement de sous-types par triangles avec angles aigus et obtus (2, 3)
- Et encore découpage de triangles pour mettre en évidence les sous-types (4)

Ceux qui ont obtenu 3 points n'ont par contre :

pas répondu à la question 1) ; les deux types de triangles sont mentionnés avec les mesures d'angle correctes et les sous-types sont également identifiés : il y a une référence à un total de 35 triangles ou des totaux partiels, ou il y a un début d'une liste de triangles avec « etc. », ou un représentant est indiqué pour chaque sous-type, également avec des découpage.
Cependant, les soi-disant sous-types ne sont pas expliqués en détail : les réponses aux questions 2) et 3) ont dépassé ou incorporé la réponse à la question 1).
ou ont commis des erreurs (même une seule) dans la mesure des angles, dues à l'utilisation du rapporteur d'angles (circonstance envisagée dans l'analyse a priori du problème).
Dans le second exemple (cat. 10, figure 6), il y a effectivement une erreur ; dans le premier (cat. 10, figure 5), il n'y a qu'un développement incomplet ; nous avons pensé à une ambiguïté liée au mot « type » (comme nous le verrons mieux plus tard). Le troisième exemple est la copie d'une classe de catégorie 9 (figure 7).

Ceux qui ont obtenu 2 points donnaient généralement une réponse partielle ; dans un cas de catégorie 9 (figure 8) :
La réponse est fausse à cause d'une erreur dans la mesure des angles : cette possibilité n'avait pas été prévue dans l'analyse de la tâche.

Ceux qui ont obtenu 1 point, ont seulement commencé à raisonner sur les angles des différents triangles qu'ils « voyaient » et n'ont pas complété la classification des triangles, ne répondant pas réellement aux questions posées par l'énoncé du problème (figure 9).

Les auteurs des copies qui ont obtenu 0 point n'ont pas donné de réponse ou ont essayé de répondre au problème, avec les lacunes suivantes :
- un manque de compréhension du concept de similitude, souvent confondu avec l'équivalence ou l'égalité
- la reconnaissance uniquement des triangles « d'une seule pièce », comme dans le cas de la copie de catégorie 9 (figure 10)
- l'utilisation d'instruments de mesure qu'ils jugeaient nécessaires mais qu'ils étaient incapables de gérer catégorie 9 (figure 11)
  et enfin, seulement le comptage des différents triangles (non requis) sans la classification des différents types.

**Quelques observations**

Compte tenu du nombre de « 0 points » (16 pour la catégorie 9 et 17 pour la catégorie 10, pour la section de Parme) et du tableau récapitulatif des points des 342 classes vues ci-dessus, le problème s'est avéré assez difficile.

En fait, d'autres problèmes similaires attribués dans les éditions précédentes du RMT avaient un faible taux de réussite.

Le texte du problème, révisé plusieurs fois - comme on l'a décrit précédemment - pour être plus clair et plus compréhensible, est encore trop riche en pistes de réponses possibles : face à des copies extrêmement synthétiques centrés sur la réponse, on trouve des analyses très détaillées n'arrivant toutefois pas à la conclusion, se concentrant ou se dispersant par des observations non forcément incorrectes, mais non pertinentes dans tous ces cas.

Reprenant l'analyse initiale des trois questions du problème, l'utilisation de l'expression « types de triangles semblables » dans trois phrases différentes aurait pu être centrée sur la question 2) occultant la question 1), qui devait également être comprise. En d'autres termes, après avoir compris qu'il y a deux types de triangles semblables et déterminé les mesures correctes des angles, même à l'aide de démonstrations géométriques réelles, beaucoup de groupes d'élèves n'ont plus jugé nécessaire de distinguer ceux que nous appelions initialement des sous-types.

À cet égard, on peut noter que certaines copies, avec des points différents, présentent de légères nuances dans les réponses, ce qui prouve la difficulté d'attribuer des points de manière cohérente, lorsque le problème contient plus de questions. Par ailleurs, dans diverses copies, quel que soit les points obtenus, nous notons l'effort de compter le nombre total de triangles dans les différents sous-types ou le nombre total de triangles inclus dans la figure, des nombres qui ne sont pas réellement nécessaires, comme dans le cas de la copie de catégorie 9 (figure 12).

Il n'y a pas de différences majeures entre les copies des catégories 9 et 10, mais dans la transition des catégories 9 à 10, on relève l'abandon de la stratégie de mesure et de recours au rapporteur d'angles au profit d'un raisonnement plus abstrait et de la recherche de démonstrations géométriques, comme on le voit dans les copies des figures 13 et 14.

**Indications didactiques**

Bien que les résultats concernant des problèmes du RMT avec un contenu géométrique, en particulier ceux des catégories supérieures, soient généralement décevants, nous pensons qu'il est important de continuer à les proposer, convaincus qu'au-delà des résultats du concours, ils peuvent être repris en classe pour les activités géométriques qui stimulent la mobilisation des connaissances antérieures, parfois masquées par une prépondérance d'activités essentiellement algébriques.

Le problème en question, ainsi que d'autres proposés au fil des ans dans le domaine du RMT, doivent être classés en tant que problèmes mettant les élèves en situation de recherche, problèmes qui ne sont pas résolus en particulier par l'application directe de formules de manière mécanique, mais qui nécessitent le recours aux raisonnements qui s'enchainent, ou encore problèmes soulignant les différences de résultats lorsque l'on utilise des instruments de mesure et qui conduisent à la question « pourquoi obtenons-nous des résultats différents ? », permettant ainsi aux élèves de passer d'une réalité particulière à un contexte « général ».

Ainsi naît de manière « spontanée », un conflit cognitif qui nécessite, pour être surmonté, de « rompre » avec les mesurages pour trouver une voie commune, permettant de certifier les résultats.

C'est précisément le travail en classe, qui constituera le milieu dans lequel il sera possible de comparer les différentes façons de résoudre un problème, ce qui permettra de faire évoluer les incertitudes et les stéréotypes, tels que la référence à la reconnaissance uniquement des triangles que nous avons indiqués par « triangle d'une seule pièce » (premier exemple de « 0 point » cité précédemment) ou encore la confusion entre « isométrie » et « similitude ».

Il peut également être intéressant de discuter de la nécessité initiale de trouver un **critère** pour identifier les familles de triangles semblables.

Dans des aspects de ce type, nous pouvons voir **la différence entre une activité de type notionnelle et une activité qui considère la géométrie comme une « recherche raisonnée ».**

La deuxième partie du titre de cet article, mentionne « résultats apparemment décevants » ; il faut préciser que ce jugement plutôt négatif peut être entièrement reconsidéré si le problème en question devient l'objet essentiel d'une activité de classe, riche de découvertes et de progression dans la construction de connaissances.

# MATEMATICA IN CLASSE CON IL RALLY MATEMATICO TRANSALPINO

## Un'insegnante racconta

**Brunella Brogi**[1]

Nel corrente anno scolastico (2018-2019) ho partecipato al 27° Rally Matematico Transalpino con le mie tre classi di categoria 6, 7, 8 della scuola secondaria di I grado "Il Pontormo" di Carmignano (Prato). Nel calendario delle lezioni settimanali che ho programmato in ogni classe, esiste "l'ora del RMT", il giorno in cui svolgerla, lavorando su un quaderno dedicato, viene spesso scelto dagli alunni per intervallare la presenza di materie da loro ritenute "pesanti" presenti nel resto della mattina. Durante l'attività gli alunni lavorano in gruppi scelti in autonomia, dopo aver condiviso quali possono essere i criteri migliori per formarli e funzionali allo scopo del lavoro come, per esempio, quello di evitare che tutti gli alunni non italofoni si riuniscano nel solito gruppo. Durante "l'ora del RMT" tutti i gruppi lavorano sullo stesso problema, così che successivamente possano esserci il confronto e la discussione collegiale. I tempi sono più distesi rispetto a quelli della gara, spesso lo svolgimento di un problema impegna più lezioni, a volte viene terminato a casa un problema iniziato in classe. In quel momento lo scopo non è portare il gruppo a risolvere il problema in 50 minuti, come è richiesto durante le prove, ma permettere al gruppo di risolverlo e di imparare contenuti disciplinari e strategie risolutive con divertimento e partecipazione.

Un motivo per cui partecipo da anni è perché lo trovo un modo di fare matematica stimolante e formativo per gli alunni e per me, che non sono laureata in matematica e ho imparato molto, utilizzando questi problemi, dal punto di vista dei contenuti disciplinari e della loro trasposizione didattica. Per me è soprattutto formativa la partecipazione alla correzione degli elaborati e quella ai lavori di gruppo della sezione a cui appartengo.

Un altro motivo per cui uso i problemi del RMT è perché essi sono pienamente rispondenti a quanto riportato nelle "Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione - 2012". Tutti i punti auspicati da tale documento per l'insegnamento della matematica si ritrovano nelle "concezioni del RMT": *"In matematica […] è elemento fondamentale il laboratorio inteso […] come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte […] Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi […] Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti […] Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi".*

I problemi del RMT sono significativi per l'apprendimento degli alunni e didatticamente ricchi per l'insegnante, quelli che propongo li scelgo come stimolo iniziale per introdurre un nuovo concetto, oppure per consolidare un argomento già trattato. Altri criteri che uso sono di carattere metodologico e non contenutistico, cioè mi servo di quel problema per far riflettere l'alunno su come ha proceduto nella sua risoluzione. Anche l'analisi a posteriori, che faccio partecipando alle sessioni di correzione degli elaborati delle prove, rappresenta per me uno stimolo ed è forte la curiosità di vedere, successivamente, se le strategie adottate dai miei alunni sono dello stesso tipo di quelle che ho trovato negli elaborati corretti. Di seguito sono riportati alcuni esempi dei criteri che ho utilizzato nel proporre un problema alla classe:

### 1. Comprensione del testo scritto e lettura di una immagine, capacità di estrapolare informazioni

Nell'ambito del 35° Convegno sulla didattica della matematica, che il GFMT ha organizzato a Lucca nel settembre 2018, ho seguito il laboratorio "Problemi: dall'analisi a priori all'analisi a posteriori" condotto da Lucia Grugnetti e François Jaquet. In quella sede, tra le altre attività proposte, sono state analizzate le copie di alcuni elaborati del problema *Triangoli volati via* (22. II. 5, cat. 3-6), discutendo sugli errori riscontrati e sulle loro possibili cause che li hanno indotti. Dalla riflessione che siamo stati invitati a fare, mi è nata l'idea di proporre il problema in classe: in quella di categoria 6, che stava iniziando il suo percorso nel mondo del RMT (soltanto alcuni alunni lo avevano incontrato alla scuola primaria) e in quella di categoria 7. In particolare gli alunni della classe prima non hanno capito il testo scritto: i triangoli disegnati non erano affatto tutti uguali o, addirittura erano stati disegnati fuori dal triangolo grigio, inoltre non era stato colto il suggerimento fornito dal disegno con i cateti dei triangoli piccoli paralleli ai cateti del triangolo grande. Questo disastroso inizio non mi ha scoraggiata, quindi nelle lezioni successive ho guidato gli alunni nella lettura del testo e in quella del disegno. Ho fatto disegnare dei modelli dei triangoli raffigurati su carta con quadretti di 1 cm di lato, così da permetterne la manipolazione e il riconoscimento delle

[1] ISTITUTO COMPRENSIVO "IL PONTORMO" Carmignano (Prato) e Sezione-Associazione ARMT di Siena.

parti indipendentemente dalla posizione della figura. Ho chiesto di suddividere il modello in triangoli più piccoli seguendo il suggerimento fornito dal disegno; lavorando su un altro modello cartaceo uguale ho chiesto di ripiegarlo più volte facendo combaciare i cateti, come si può ripiegare un fazzoletto di stoffa (era stato questo un suggerimento del prof.re Fabio Brunelli durante il laboratorio lucchese). Ho fatto riflettere gli alunni sul fatto che queste due diverse modalità di suddivisione (il numero di "triangolini" è infatti diverso nei due casi) rispondevano alla richiesta di disegnare triangoli uguali, ma solo una rispondeva anche all'altro vincolo posto dal problema. Ho cercato di educare gli alunni alla osservazione critica del testo, dei disegni, dei loro modelli. Le pieghe effettuate hanno inoltre permesso di introdurre, o recuperare, i concetti di altezza di un triangolo rispetto all'ipotenusa, di bisettrice, di mediana, di triangoli simili, di misura della superficie usando il "triangolino" come unità di misura.

## 2. Riconoscimento di figure geometriche in posizioni non "standard"

Una difficoltà tipica degli alunni, in particolare della classe prima è il riconoscimento di alcune figure geometriche, alle quali viene dato un nome diverso in base alla loro posizione, al loro orientamento sul piano o nello spazio e non in base alle loro caratteristiche intrinseche. Casi tipici sono rappresentati dal triangolo rettangolo, classificato in modo diverso a seconda dell'orientamento dei cateti, e del quadrato, chiamato rombo se le sue diagonali si trovano in posizione verticale e orizzontale. Una delle soluzioni del problema *Il campo raddoppiato* (26.I.9, cat. 5-7) è un rettangolo disegnato sulla quadrettatura dello sfondo in posizione "non standard", cioè con i lati non paralleli ai margini del foglio. Ho proposto questo problema agli alunni di categoria 6 dopo aver lavorato sul riconoscimento delle figure anche attraverso la manipolazione dei loro modelli cartacei, ma quasi nessuno ha pensato di disegnare il campo rettangolare con i lati obliqui lungo le diagonali della quadrettatura.

Per lo stesso motivo, ho proposto *Sul muro della scuola (II)* (18.II.13, cat. 6-8) e *Angoli e triangoli* (23.II.14, cat. 7-10) alle classi seconde e terze, per verificare la loro capacità di riconoscere gli angoli retti i cui lati non sono paralleli ai margini del foglio. Ho cercato anche di indirizzare il riconoscimento attraverso l'osservazione delle proprietà geometriche e non solo per confronto con l'angolo retto della squadra o tramite misurazione con il goniometro.

## 3. Introduzione di un nuovo concetto

Nella classe terza non avevo ancora lavorato sulla rappresentazione grafica di una funzione lineare. A differenza di quanto proposto dal loro libro, ho provato a stimolare la costruzione del concetto proponendo agli alunni il problema *Passeggiata di robot saltatori* (27.I.15, cat. 7-10), che non era stato risolto durante la I prova. Gli alunni hanno proceduto per punti discreti contando i quadretti, come indicato nel testo e incollando alcune pagine al quaderno per aumentare la superficie di lavoro e quindi trovare il punto in cui si sovrappongono le impronte dei due robot. Gruppi di lavoro diversi hanno ottenuto risultati diversi. Volevo creare in loro l'esigenza di cercare uno strumento risolutivo più funzionale allo scopo. Ho quindi sfruttato la criticità emersa per introdurre la rappresentazione di funzioni lineari sul piano cartesiano e la scrittura della corrispondente equazione.

La classe seconda ha risolto correttamente il problema *Piega e ... dispiega (II)* (27.I.11, cat. 6,7). Durante la sua correzione, fatta successivamente alla I prova, ho chiesto agli alunni di riprodurre la figura del problema attraverso la piegatura della carta, come indicato nel testo. Ho utilizzato quel foglio pieghettato per recuperare i concetti di frazioni e rapporti tra le superfici dei triangoli e dei quadrati su di esso riconoscibili. Questo foglio è poi diventato il modello del pavimento del palazzo del tiranno Policrate, sul quale Pitagora, secondo la leggenda, aveva intuito la relazione alla base del teorema che porta il suo nome. Attraverso questo foglio di carta ho guidato gli alunni alla scoperta del teorema di Pitagora.

## 4. Consolidamento di un concetto già trattato

La classe seconda, nel corso dell'anno precedente, grazie alla piegatura e alla successiva manipolazione di modellini origami di triangoli rettangoli isosceli, aveva scoperto il rapporto esistente tra la superficie di un quadrato e quella di un altro quadrato costruito sulla sua diagonale. In un momento in cui non avevo ancora trattato il teorema di Pitagora, ho proposto *Spirale di quadrati (I)* (23.II.11, cat. 6-8) per verificare quanto gli alunni si ricordassero sull'argomento. L'esperimento ha avuto esiti positivi, inoltre il problema ha fornito l'opportunità di parlare dei concetti di rapporto, superficie e area di un quadrato, radice quadrata, tutti argomenti che, in quel momento, non erano ancora stati studiati.

Nella classe prima avevo lavorato sul piano cartesiano e sull'uso del compasso per individuare su di esso tutti i punti del piano posti a una data distanza da un punto di riferimento. Avevamo fatto anche esperienze simili, ma su superfici maggiori rispetto a quelle di un quaderno, per le quali le dimensioni del compasso risultavano insufficienti, così da stimolare negli alunni il ricorso a una corda, di lunghezza corrispondente a quella del raggio, per individuare chi di loro (assunti a modelli di punti) fosse equidistante da un alunno preso come riferimento.

Dopo qualche tempo ho proposto *La porcilaia* (24.II.11, cat. 6-8) e quasi tutti gli alunni hanno risolto il problema usando il compasso o un cordoncino. In riferimento al ruolo formativo che il RMT ha per me, devo aggiungere che prima di aver conosciuto questo problema e di aver partecipato alla sua correzione ai tempi della ventiquattresima edizione, non avevo mai pensato di proporre questo uso del compasso nella mia attività didattica.

## 5. Metodo di lavoro: ricerca organizzata

La maggior parte degli alunni con cui inizio a lavorare nella classe prima non ha fatto esperienze di ricerca di dati, combinazioni, regolarità. Mi è sembrato utile proporre il problema *Una moneta ben meritata* (14.I.12, cat. 6-10) anche per far capire agli alunni l'importanza di lavorare in modo organizzato. In questo tipo di problema, la ricerca del numero corretto di quadrati passa anche attraverso l'uso di adeguate strategie grafiche, quali l'impiego di colori diversi per disegnare i quadrati sullo stesso modello di geopiano, oppure il disegnare quadrati di dimensioni e inclinazioni diverse su varie copie del geopiano. Disegnare tutti i quadrati sullo stesso modello di geopiano, come alcuni alunni avevano fatto, porta a ottenere un groviglio di linee non funzionale alla soluzione del problema. Gli alunni non conoscevano la tavoletta chiodata a cui si riferisce il testo e ho ritenuto utile fornire ai vari gruppi le tavolette di cui dispone la scuola, così che essi facessero l'esperienza reale di tendere gli elastici a formare dei quadrati. Il vero geopiano aveva dimensioni maggiori di quello disegnato, ma molti alunni non hanno prestato attenzione a questa differenza e hanno proposto quadrati di dimensioni non valide ai fini del problema. Quindi è stato necessario intervenire per guidarli nella lettura dell'immagine. Dopo aver lavorato concretamente sul geopiano, gli alunni hanno individuato un maggior numero di quadrati, ma solo pochi hanno disegnato quadrati con i lati non paralleli ai bordi del foglio. Per tale motivo ho lavorato, di nuovo, sul riconoscimento di quadrati in posizioni "non standard".

## In conclusione

La ricchezza del RMT è tale che un problema non serve mai a un solo scopo didattico, anche se io ho cercato di evidenziarlo nel precedente elenco, semmai questo può essere solo prevalente.

Ciascun problema propone vari stimoli, così gli alunni sono coinvolti in un apprendimento attivo. L'errore è frequente e di vario tipo, ma dall'errore si impara, lavorando insieme con i compagni, nel rispetto reciproco, e con l'aiuto dell'insegnante, che impara con loro.

# MATHÉMATIQUES EN CLASSE AVEC LE RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

## Le témoignage d'une enseignante

**Brunella Brogi**[1]

Dans le courant de l'année scolaire 2018-2019 j'ai participé au 27$^{e}$ Rallye Mathématique Transalpin avec mes trois classes de catégories 6, 7, 8 de l'école secondaire de degré I « Il Pontormo » di Carmignano (Prato). Dans mon calendrier hebdomadaire, j'ai programmé pour chaque classe « l'heure du RMT » ; le jour où elle se déroule est souvent choisi par les élèves pour créer un espace entre des matières qu'ils considèrent comme « pesantes » dans le reste de la matinée. Un cahier particulier y est dédié. Pendant l'activité, les élèves travaillent en groupes, formés en pleine autonomie après s'être entendus sur les meilleurs critères de formation et de fonctionnement comme par exemple en évitant que tous les élèves non italophones constituent un même groupe. Durant « l'heure du RMT » tous les groupes travaillent sur le même problème afin qu'une confrontation et une discussion collective puissent s'organiser par la suite. La durée est plus étendue que celle des épreuves habituelles, souvent la résolution d'un problème occupe plus d'une leçon et, parfois, elle se termine à la maison. Dans ce cas le but n'est pas de résoudre le problème en 50 minutes selon les conditions de passation des épreuves, mais de permettre au groupe de mener à terme la résolution et d'apprendre des contenus disciplinaires ou des stratégies de résolution d'une manière plaisante et collective.

Une des raisons pour lesquelles je participe au RMT depuis des années est que je trouve que c'est une façon de faire des mathématiques stimulante et formatrice pour les élèves comme pour moi, qui ne suis pas diplômée en mathématiques et qui ai beaucoup appris en utilisant ces problèmes du point de vue du contenu disciplinaire et de leur transposition dans l'enseignement. Pour moi, c'est la participation à la correction des copies et au travail de groupe au sein de la section à laquelle j'appartiens qui est la plus formatrice.

Une autre raison pour laquelle j'utilise les problèmes du RMT est qu'ils sont tout-à-fait conformes à ce qui est rapporté dans les « Lignes directrices nationales pour le programme de la maternelle et du premier cycle de l'enseignement, 2012 ». Tous les points soulignés dans ce document pour l'enseignement des mathématiques se retrouvent dans les « conceptions du RMT »: *« En mathématiques [...] le laboratoire est un élément fondamental [...] en tant que moment au cours duquel l'étudiant est actif, formule ses hypothèses et en contrôle les conséquences, conçoit et expérimente, discute et argumente ses choix [...] La résolution de problèmes est caractéristique de la pratique mathématique [...] Une attention particulière sera accordée au développement de la capacité d'exposer et de discuter avec des camarades les solutions et procédures suivies [...] Le développement d'une vision adéquate des mathématiques est d'une extrême importance, elle ne se réduit pas à un ensemble de règles à mémoriser et à appliquer, mais est reconnue et appréciée comme contexte pour affronter et se poser des problèmes ayant du sens. »*

Les problèmes du RMT sont utiles pour l'apprentissage des élèves et riches pour l'enseignant du point de vue didactique. Ceux que je propose sont choisis pour introduire un nouveau concept ou pour consolider un sujet déjà traité. D'autres critères que j'utilise sont d'ordre méthodologique et non notionnel, c'est-à-dire que je me sers d'un problème pour amener l'élève à réfléchir sur la façon dont il a procédé dans sa résolution. De même, l'analyse *a posteriori*, que je fais en participant aux séances de correction des copies, me stimule et ma curiosité est grande de voir, par la suite, si les stratégies adoptées par mes élèves sont du même type que celles que j'ai trouvées dans les copies que j'ai examinées. Voici quelques exemples de critères que j'ai utilisés pour proposer un problème à la classe :

[1] ISTITUTO COMPRENSIVO "IL PONTORMO" Carmignano (Prato) et Section-Association ARMT de Siena.

## 1. Compréhension de l'énoncé et lecture d'une image, capacité d'extrapoler des informations

Dans le cadre de la 35e Conférence sur l'enseignement des mathématiques organisée par la GFMT à Lucques en septembre 2018, j'ai suivi l'atelier « Problèmes : de l'analyse a priori à l'analyse a posteriori » animé par Lucia Grugnetti et François Jaquet. A cette occasion, parmi les autres activités proposées, certaines copies du problème *Triangles envolés* 22.II.5, cat. 3-6) ont été analysées, en examinant les erreurs trouvées et leurs causes possibles. De la réflexion que nous avons été invités à faire, l'idée m'est venue de proposer le problème à ma première classe de catégorie 6, qui commençait son voyage dans le monde du RMT (seuls quelques élèves y avaient participé à l'école primaire) et à celle de catégorie 7. En particulier, les élèves ne comprenaient pas l'énoncé : les triangles dessinés n'étaient pas tous identiques ou avaient même été dessinés en dehors du triangle gris ; ils n'avaient pas tenu compte de la consigne du dessin où le côté du grand triangle est composé de trois côtés des angles droits de trois petits triangles. Ce début désastreux ne m'a pas découragée, c'est pourquoi, au cours des leçons suivantes, j'ai guidé les élèves dans la lecture du texte et l'observation du dessin. J'ai fait dessiner des triangles sur du papier quadrillé dont les carreaux mesurent 1 cm de côté, afin de permettre la manipulation et la reconnaissance des pièces, quelle que soit la position de la figure. J'ai demandé de partager le « grand triangle » en triangles plus petits en suivant la suggestion de la figure. Puis en travaillant sur un autre « grand triangle » en papier, j'ai demandé de le plier trois fois de suite, comme on peut le faire avec un mouchoir en tissu (c'était une suggestion du prof. Fabio Brunelli lors de l'atelier de Lucques). J'ai fait réfléchir les élèves sur la différence entre ces deux modes de partage (le nombre de triangles n'est pas le même dans les deux cas, 8 ou 9). Et pourtant, dans les deux cas, il s'agit de recouvrir la figure par des triangles égaux, mais un seul satisfait la deuxième contrainte du problème (trois côtés de l'angle droit des petits triangles occupent un côté de l'angle droit du grand triangle). J'ai essayé de sensibiliser les élèves à la lecture critique de l'énoncé, à l'observation des dessins et des pièces découpées. Les plis nous ont également permis d'introduire ou de rappeler les concepts de hauteur d'un triangle par rapport à l'hypoténuse, de bissectrice, de médiane, de triangles semblables, de mesure de l'aire en utilisant le « petit triangle » comme unité de mesure.

## 2. Reconnaissance de figures géométriques dans des positions non standard

Une difficulté typique des élèves, en particulier en catégorie 6, est la reconnaissance de certaines figures géométriques auxquelles ils attribuent des noms différents en fonction de leur position, de leur orientation sur le plan ou dans l'espace et non sur la base de leurs caractéristiques intrinsèques. Les cas typiques sont celui du triangle rectangle, perçu différemment selon l'orientation des côtés de l'angle droit, et celui du carré, appelé losange si ses diagonales sont en position verticale et horizontale. Une des solutions au problème *Un champ d'aire double* (26.I.09, cat. 5-7) est un rectangle dessiné sur la grille de l'arrière-plan dans une position « non standard », c'est-à-dire avec des côtés non parallèles aux bords de la feuille. J'ai proposé ce problème aux élèves de la catégorie 6 après avoir travaillé sur la reconnaissance des figures et manipulé les figures découpées dans du papier, mais presque personne n'a pensé à dessiner le champ rectangulaire avec les côtés obliques le long des diagonales de la grille.

Pour la même raison, j'ai proposé à mes deux autres classes de niveaux 7 et 8 les problèmes *Sur le mur de l'école (II)* (18.II.13, cat. 6-8) et *Angles et triangles* (23.II.14, cat. 7-10), pour vérifier leur capacité à reconnaître des angles droits dont les côtés ne sont pas parallèles aux bords de la feuille. J'ai aussi essayé d'aborder cette reconnaissance en observant les propriétés géométriques et pas seulement en comparant avec l'angle droit d'une équerre ou en mesurant avec un rapporteur.

## 3. Introduction d'un nouveau concept

Dans ma troisième classe, de niveau 8, je n'avais pas encore travaillé sur la représentation graphique d'une fonction linéaire. Contrairement à ce qui est proposé dans le manuel, j'ai essayé d'introduire la construction de ce concept en proposant aux élèves le problème *Parcours de robots sauteurs* (27.I.15, cat. 7-10), qui n'avait pas été résolu lors de l'épreuve I. Les élèves ont procédé point par point en comptant les carrés, comme indiqué dans le texte, puis en collant quelques pages supplémentaires à celles du cahier pour augmenter les dimensions de la feuille et trouver ainsi le point de chevauchement des empreintes de pas des deux robots. Différents groupes de travail ont obtenu des résultats différents. Je voulais leur faire ressentir la nécessité de rechercher un outil de solution plus fonctionnel pour cette situation. J'ai ensuite exploité les arguments issus de la confrontation pour introduire la représentation de fonctions linéaires dans le plan cartésien et l'écriture de l'équation correspondante.

Ma deuxième classe, de niveau 7, a résolu correctement le problème *Papier déplié (II)* (27.I.11, cat 6,7). Lors de sa correction, effectuée après la première épreuve, j'ai demandé aux élèves de reproduire la figure du problème en pliant le papier, comme indiqué dans le texte. J'ai utilisé cette feuille pliée pour exploiter les concepts de fractions et de relations entre les surfaces des triangles et des carrés qui peuvent y être reconnus. Cette feuille est ensuite devenue le modèle de plancher du palais du tyran Polycrate de Samos, sur lequel Pythagore, selon la légende, avait deviné la relation à la base du théorème qui porte son nom. Au moyen de cette feuille de papier, j'ai guidé les élèves dans la découverte du théorème de Pythagore.

## 4. Consolidation d'un concept déjà traité

Au cours de l'année précédente, ma deuxième classe avait découvert, grâce au pliage et à la manipulation ultérieure de triangles rectangles isocèles - origami - la relation entre l'aire d'un carré et celle d'un autre carré construit sur sa diagonale. À une époque où je n'avais pas encore traité le théorème de Pythagore, j'ai proposé *Spirale de carrés (I)* (23.II.11, cat. 6-8) pour vérifier le degré de mémorisation des élèves sur le sujet. L'expérience a eu des résultats positifs. De plus, le problème a donné l'occasion de parler des concepts de rapport, d'aire d'un carré, de racine carrée, qui n'avaient pas encore été étudiés.

Dans ma première classe, de niveau 6, j'avais travaillé sur le plan cartésien et sur l'utilisation du compas pour identifier tous les points du plan à une distance donnée d'un point de référence. Nous avions également fait des expériences similaires, mais sur des surfaces plus grandes que celles d'un cahier, pour lesquelles les dimensions du compas étaient insuffisantes, de manière à inciter les élèves (qui simulaient les points), à utiliser une cordelette, de longueur correspondant à celle du rayon, pour identifier ceux d'entre eux qui se trouvaient à égale distance d'un élève pris comme référence. Plus tard, j'ai proposé *La porcherie* (24.II.11, cat. 6-8) et presque tous les élèves ont résolu le problème en utilisant le compas ou un cordon. En ce qui concerne le rôle que joue le RMT dans ma formation personnelle, je dois ajouter qu'avant d'avoir eu connaissance de ce problème et d'avoir participé à sa correction lors de la vingt-quatrième édition, je n'avais jamais pensé à proposer cet usage du compas dans mon enseignement.

## 5. Méthode de travail : recherche organisée

La plupart des élèves avec qui je commence à travailler, au niveau 6, n'ont pas d'expérience de recherche de données, de combinaisons, de régularités. Il m'a paru utile de leur proposer le problème *La pièce de monnaie* (14.I.12, cat. 6-10) afin de leur faire aussi comprendre l'importance de travailler de manière organisée. Dans ce type de problème, la recherche du nombre correct de carrés passe également par l'utilisation de stratégies graphiques appropriées, telles que l'utilisation de couleurs différentes pour tracer les carrés sur un géoplan (feuille pointillée selon les sommets d'un quadrillage) ou pour tracer des carrés de tailles et d'inclinaisons différentes sur diverses copies de ces feuilles. Dessiner tous les carrés sur une même feuille, comme l'avaient fait certains élèves, aboutit à un enchevêtrement de lignes qui ne permettent pas de résoudre le problème. Les élèves ne connaissaient pas la « planche à clous » mentionnée dans l'énoncé et j'ai jugé utile de fournir aux différents groupes les planches à disposition de l'école, afin qu'ils puissent vraiment expérimenter l'étirement des élastiques pour former des carrés. La planche à clous était plus grande que le géoplan de la figure, mais de nombreux élèves n'ont pas prêté attention à cette différence et ont proposé des carrés de dimensions ne correspondant pas à celles du problème. Il était donc nécessaire d'intervenir pour les guider dans la lecture de l'image. Après avoir travaillé concrètement sur le géoplan, avec des carrés dont les côtés ne sont pas parallèles aux bords de la feuille. Pour cette raison, j'ai de nouveau travaillé sur la reconnaissance des carrés dans des positions "non standard".

## En conclusion

La richesse du RMT est telle qu'un problème ne sert jamais à un seul objectif d'enseignement, ce que j'ai essayé de le mettre en évidence dans la liste précédente.

Chaque problème offre différents stimuli, de sorte que les élèves participent à un apprentissage actif. L'erreur est fréquente et de nature diverse, mais de son erreur l'élève apprend en travaillant avec ses camarades, dans le respect mutuel et avec l'aide de l'enseignant qui apprend avec eux.

# ÉTUDE/APPROFONDIMENTI
# LES GRILLES/ GRIGLIE

**Michel Henry, Angela Rizza**
**Gruppo di lavoro: Funzioni e successioni/Groupe de travail Fonctions et suites[1]**

## Griglie / Les grilles

***Identificazione / Identification***
Rally: 25.I.06 ; categorie: 4, 5, 6
Ambiti: FN, OPN ; famiglie: DCP, MUL, SF, / Domaine conceptuel : fonctions, suite de figures géométriques
Code: op88-fr ; statut : 2

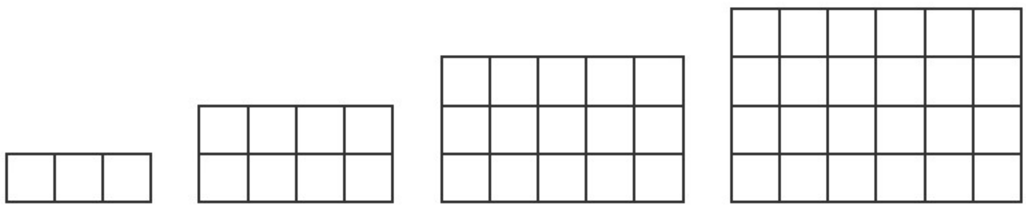
**Sunto**

**In una successione di griglie di cui sono date le prime quattro (1×3; 2×4; 3×5; 4×6) con l'indicazione del corrispondente numero di quadretti, verificare se si possono costruire delle griglie di forma di 112 e 224./**

**Dans une suite de grilles dont les quatre premières sont dessinées (1 × 3 ; 2 × 4 ; 3 × 5 ; 4 × 6 ) et le nombre de carreaux indiqué (3 ; 8 ; 15 ; 24), vérifier s'il est possible de trouver des grilles de 112 et 224 carreaux.**

**Enunciato/Énoncé**

Asmine disegna una serie di griglie rispettando la seguente regola: per ogni nuova griglia aggiunge una riga e una colonna di quadretti alla griglia precedente.
Queste sono le quattro griglie che ha già disegnato:/
Asmine dessine une suite de grilles selon cette règle : pour chaque nouvelle grille elle ajoute une rangée et une colonne de carrés à la grille précédente.
Voici les quatre grilles qu'elle a déjà dessinées :



3 quadrati   8 quadrati   15 quadrati   24 quadrati

**Continuando a costruire griglie rispettando la stessa regola, potrà costruire una griglia di esattamente 112 quadratini?**
**E una di esattamente 224?**
**Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta./**
**En continuant à construire des grilles en respectant la même règle, pourra-t-elle construire une grille avec exactement 112 carrés ?**
**Et une grille avec exactement 224 ?**
**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

[1] Le groupe "Fonctions" qui a analysé ce problème dans le cadre de la rencontre ARMT de Charleroi en 2017, était composé de Lucia Argilla, Luciana Berto, Valeria Ferrari, Mathias Front, Annie Henry, Michel Henry, Rosa Iaderosa, Andrea Maffia, Luc-Olivier Pochon, Maria Polo, Angela Rizza, Salvatore Carlo Sini.

### Compito per la risoluzione e saperi mobilizzati / Tâche de résolution et savoirs mobilisés

*Analisi del compito*

- Osservare le griglie già disegnate e capire come funziona la regola di costruzione.
- Continuare a disegnare altre griglie, aggiungendo sempre una riga e una colonna, per vedere se si possono ottenere quelle con il numero di quadratini richiesto.
- Per ogni griglia determinare il numero di quadratini con una moltiplicazione o con un conteggio e osservare che non si può fare una griglia di 112 quadratini, mentre se ne può fare una di 224. Questa procedura è lunga e un po' noiosa, anche se non impossibile.

Oppure:

- osservare le regolarità che si ripetono da una griglia all'altra. Si può notare per esempio che la differenza dei numeri di quadratini tra la lunghezza e la larghezza è sempre di 2, (3-1; 4-2; 5-3; 6-4;…), oppure che per passare da una griglia all'altra si aumenta di 1 sia l'altezza che la larghezza. A partire da questa osservazione, impostare una serie di moltiplicazioni in cui i due fattori differiscono di 2 e vedere se tra i risultati ottenuti compaiono i numeri cercati: 7 × 5 = 35; 8 × 6 = 48; 9 × 7 = 63; 10 × 8 = 80; 11 × 9 = 99; 12 × 10 = 120; …16 × 14 = 224. Constatare che il numero 112 non compare, mentre compare il 224.

Oppure:

- Osservare che, a partire dalla prima griglia, il numero di quadretti delle griglie successive si ottiene aggiungendo 5, 7, 9, 11, quadretti al numero di quadretti della griglia precedente: 3 + 5 = 8; 8 + 7 = 15; 15 + 9 = 24. Questi numeri (5, 7, 9, 11) sono la differenza tra il numero di quadratini di una griglia e il numero di quadratini della precedente. Costruire eventualmente altre griglie per verificare che questa differenza aumenta ogni volta di 2. Impostare quindi una serie di addizioni, partendo dall'ultimo numero di quadretti indicato negli esempi, a cui bisogna aggiungerne 11. Continuare così e verificare se tra i numeri ottenuti compaiono quelli richiesti: 24 + 11 = 35; 35 + 13 = 48; 48 + 15 = 63; … 80 + 19 = 99; 99 + 21 = 120; …195 + 29 = 224.

Concludere che non è possibile costruire una griglia con 112 quadratini, ma che è possibile con 224 quadratini./

*Analyse a priori de la tâche*

- Observer les grilles déjà dessinées et comprendre la règle de construction.
- Essayer de dessiner d'autres grilles en ajoutant toujours une rangée et une colonne de carrés pour voir si on réussit à obtenir celles avec le nombre de carrés indiqués.
- Dénombrer à chaque dessin tous les carrés ou en calculer le nombre et constater qu'on ne peut pas faire une grille avec 112 carrés, mais que c'est possible avec 224 carrés et trouver ainsi la réponse. Cette procédure est longue et fastidieuse, mais pas impossible.
- Ou, observer les régularités qu'on retrouve d'une grille à l'autre. Noter par exemple que la différence des nombres de carrés entre la longueur et la largeur est toujours de 2, (3 – 1 ; 4 – 2 ; 5 – 3 ; 6 – 4 ; …), ou que pour passer d'une grille à l'autre longueur et largeur augmentent chacune de 1. A partir de ce constat, effectuer une série de multiplications dans lesquelles la différence entre les deux facteurs est de 2 et voir si parmi les résultats obtenus figurent les nombres cherchés : 7 x 5 = 35 ; 8 x 6 = 48 ; 9 x 7 = 63 ; 10 x 8 = 80 ; 11 x 9 = 99 ; 12 x 10 = 120 ; … ; 16 x 14 = 224. Constater que le nombre 112 n'apparait pas, alors que 224 apparait.
- Ou, observer à partir de la première grille que les nombres de carrés des grilles successives s'obtiennent en ajoutant 5, 7, 9, 11, ... carrés au nombre de carrés de la grille précédente : 3 + 5 = 8 ; 8 + 7 = 15 ; 15 + 9 = 24. Les nombres (5, 7, 9, 11) représentent les différences entre le nombre de carrés d'une grille et le nombre de carrés de la grille précédente. Construire éventuellement d'autres grilles pour vérifier que la différence augment à chaque fois de 2. A partir de ce constat, effectuer une série d'additions en partant du dernier nombre de carrés indiqué dans les exemples auquel il faut ajouter 11. Continuer ainsi, et vérifier si parmi les nombres obtenus figurent ceux recherchés : 24 + 11 = 35 ; 35 + 13 = 48 ; 48 + 15 = 63 ; … ; 80 + 19 = 99 ; 99 + 21 = 120 ; … ; 195 + 29 = 224.

Conclure qu'on ne peut pas construire une grille avec 112 carrés, mais que c'est possible avec 224 carrés.

### Parole chiave / Mots-clés

Numero naturale, addizione, somma, moltiplicazione, prodotto, termine, successione, progressione, funzione di secondo grado, verifica/

Nombre naturel, addition, somme, multiplication, produit, terme, suite, progression, fonction du second degré, vérification

### Risultati / Résultats

Punteggi attribuiti su 3209 classi di 20 sezioni: Points attribués, sur 3209 classes issues de 20 sections :

25.I.06

| Categoria | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **Num. classi** | **Media** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cat 4** | 331 (38%) | 119 (14%) | 102 (12%) | 94 (11%) | 230 (26%) | 876 | 1.74 |
| **Cat 5** | 258 (28%) | 109 (12%) | 124 (13%) | 115 (12%) | 329 (35%) | 935 | 2.16 |
| **Cat 6** | 387 (28%) | 123 (9%) | 192 (14%) | 199 (14%) | 497 (36%) | 1398 | 2.21 |
| **Total** | 976 (30%) | 351 (11%) | 418 (13%) | 408 (13%) | 1056 (33%) | 3209 | 2.07 |

Secondo i criteri dell'analisi a priori:

4 Risposte corrette (no 112, sì 224) con una spiegazione chiara e completa (rappresentazione di altre griglie, dettaglio di tutti i calcoli effettuati, osservazioni risolutive esplicitate, …) che faccia capire la procedura adottata.

3 Risposte corrette con spiegazione incompleta o poco chiara (mancanza di qualche calcolo o di qualche passaggio, osservazioni risolutive abbozzate ma non esplicitate, …)

2 Le due risposte corrette senza spiegazione
oppure una sola risposta corretta (per un errore di calcolo o di conteggio) con spiegazioni che facciano capire quale procedura si è seguita

1 Entrambe le risposte sbagliate per errori di calcolo, ma procedura impostata correttamente
\- oppure una delle due risposte corretta e ben spiegata e l'altra errata per un errore di tipo concettuale (ad esempio, visto che la griglia di 112 quadratini non si può fare, si deduce che non sia possibile realizzare quella di 224 perché è il doppio)

0 Incomprensione del problema

Questo problema è una variante di 08-II-05 Griglie (A) con delle piccole modifiche. Le medie dei punteggi ottenuti, nelle stesse categorie, sono molto simili./

Selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

- **4 points** : Réponse correcte (non pour 112, oui pour 224) avec des explications claires et complètes (dessins, détails des calculs effectués, observations commentées des grilles...) qui permettent de comprendre la procédure utilisée
- **3 points** : Réponse correcte avec des explications incomplètes ou peu claires (absence de quelques calculs, de quelques étapes, commentaires sommaires pas suffisamment explicites, …)
- **2 points** : Les deux réponses correctes sans explications OU une seule réponse correcte (l'autre erronée suite à une erreur de calcul ou de dénombrement) avec des explications qui permettent de comprendre la procédure utilisée
- **1 point** : Les deux réponses sont erronées suite à des erreurs de calcul, mais la procédure utilisée est correcte OU une des deux réponses est correcte et bien expliquée et l'autre est erronée suite à une erreur de raisonnement (par exemple, comme ce n'est pas possible de construire une grille avec 112 carrés on en déduit qu'il n'est pas possible d'en construire une avec 224 carrés car 224 est le double de 112).
- **0 point** : Incompréhension du problème

Ce problème est une variante de Grilles (A) avec des modifications mineures. Les moyennes de point obtenue, pour les catégories correspondantes, sont très proches.

## Procedure, ostacoli ed errori rilevati / Procédures, obstacles et erreurs relevés

Gli esempi seguenti in italiano delle categorie 4, 5 provengono dalla sezione di Parma mentre quelli della categoria 6 dalla sezione di Milano. Gli esempi di elaborati in francese della categoria 6 vengono dalla sezione di Franche-Comté. / Les exemples en italien qui suivent pour les catégories 4, 5 proviennent de la section de Parma et de Milano pour la catégorie 6. Les exemples de copies en français de catégorie 6 viennent de la section de Franche-Comté.

Negli elaborati appaiono due tipi di procedure:

- una procedura grafica con la rappresentazione di tutta la successione delle griglie fino a quella di 224 quadretti, disegnate separatamente oppure incasellate una dentro l'altra in un unico disegno
- la descrizione del passaggio da una griglia alla successiva mediante la successione numerica del numero di quadretti contati in larghezza, in lunghezza oppure in area./

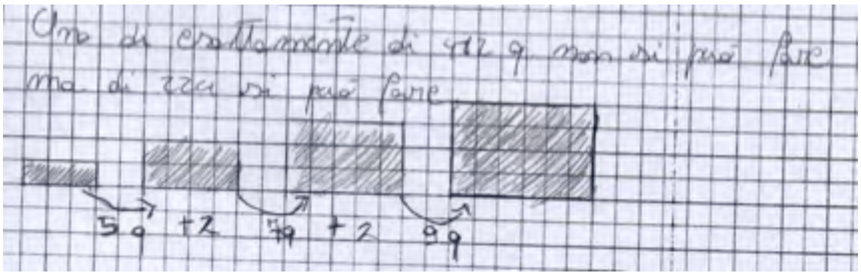
Deux types de procédures apparaissent dans les copies :

- une procédure graphique qui présente une succession de grilles jusqu'à celle qui contient 224 carrés, dans deux présentations possibles : soit des grilles séparées, soit des grilles incluses les unes dans les autres,
- une description du passage d'une grille à la suivante présentant une suite numérique de dénombrement des nombres de carreaux comptés soit en largeur, soit en longueur, soit en aire.

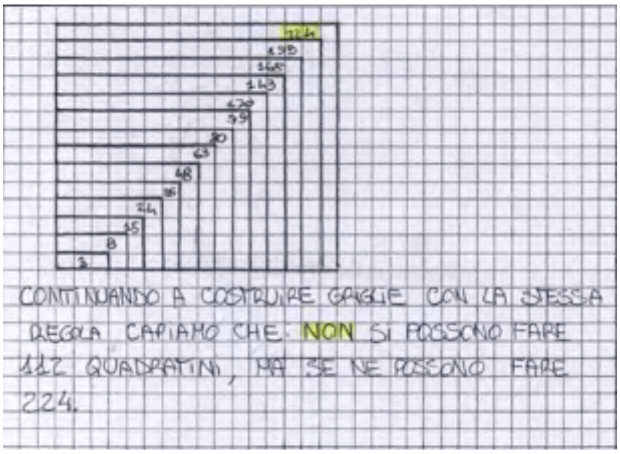
## Indicazioni didattiche / Exploitations didactiques

L'analisi dei protocolli ha evidenziato l'evoluzione del livello di competenza argomentativa degli alunni, rispetto al livello scolare.
Le rappresentazioni che abbiamo trovato in tutte e tre le categorie riportano alcune griglie in sequenza staccate:

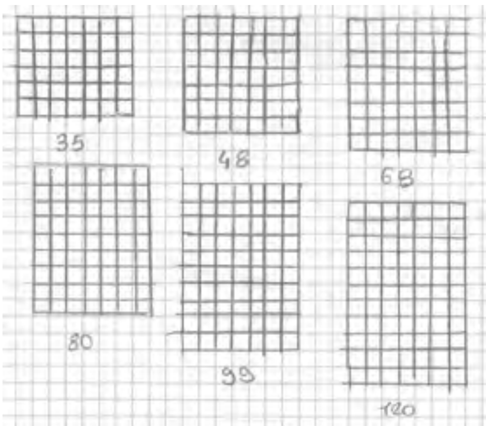
L'analyse des copies a montré l'évolution de l'argumentation que les élèves présentent dans leurs explications, en fonction de leurs niveaux scolaires.
Les représentations graphiques que nous avons trouvé dans les trois catégories montrent quelques suites de grilles séparées :



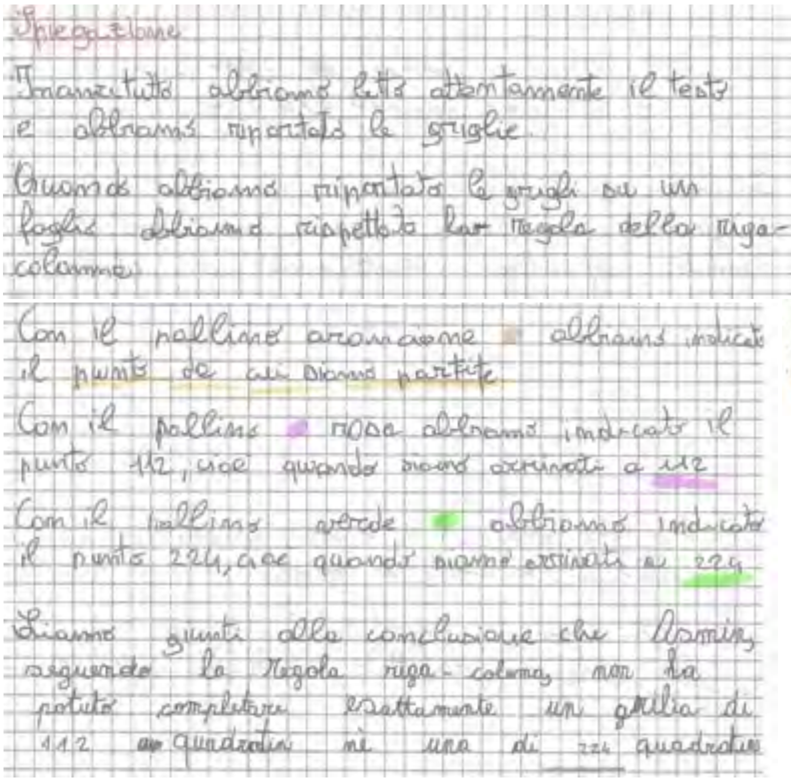

oppure incasellate l'una nell'altra / ou incluses l'une dans l'autre




La seconda rappresentazione risulta più efficace ed economica in termini di spazio; inoltre c'è un minore rischio di errore / La seconde représentation est plus efficace et économique en termes de place; il y a en outre un risque plus petit d'erreur :



anche se il conteggio dei quadratini può introdurre qualche difficoltà / même si le comptage des carreaux peut introduire quelques difficultés :



Spiegazione

Innanzitutto abbiamo letto attentamente il testo e abbiamo riportato le griglie.

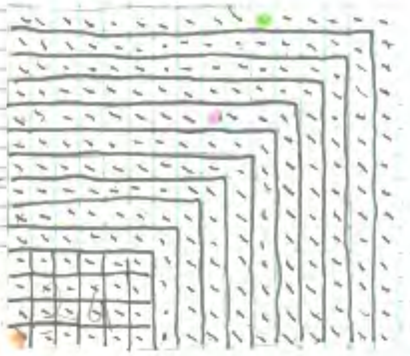
Quando abbiamo riportato le griglie su un foglio abbiamo rispettato la regola della riga-colonna.

Con il pallino arancione abbiamo indicato il punto da cui siamo partiti.

Con il pallino rosa abbiamo indicato il punto 112, cioè quando siamo arrivati a 112.

Con il pallino verde abbiamo indicato il punto 224, cioè quando siamo arrivati a 224.

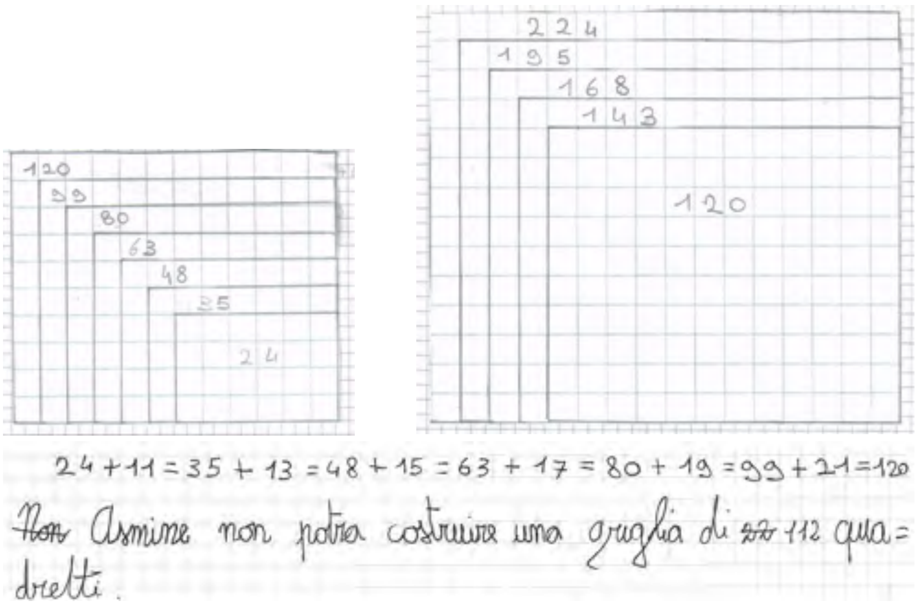
Siamo giunti alla conclusione che Asmin, seguendo la regola riga-colonna, non ha potuto completare esattamente una griglia di 112 quadratini né una di 224 quadratini



## Protocolli di categoria 4 / Copies de catégorie 4

Anche nei problemi ben svolti prevale la strategia grafica, gli allievi prevalentemente completano i disegni e contano il progressivo aumentare delle caselle nelle griglie rettangolari. A volte compaiono i calcoli effettuati in sequenza, ma nella maggior parte dei casi c'è solo la procedura, non commentata. /

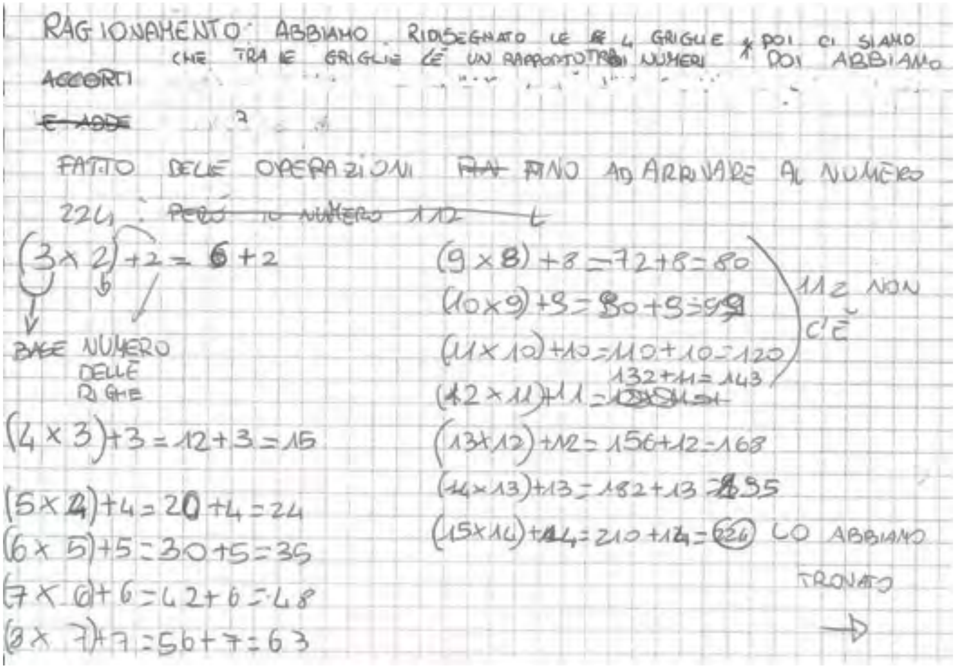
Même dans les bonnes copies de ce niveau 4, la stratégie graphique prédomine. Généralement, les élèves réalisent les dessins et comptent les cases dans les grilles rectangulaires. Dans la plupart des cas, la procédure est indiquée sans commentaires, avec parfois des calculs successifs :

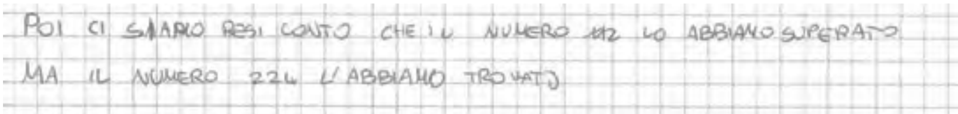


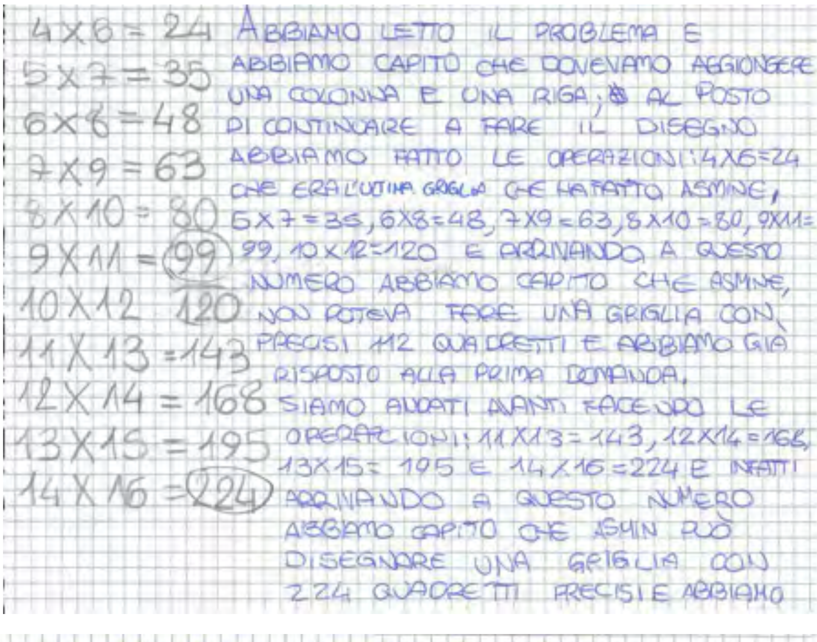

24 + 11 = 35 + 13 = 48 + 15 = 63 + 17 = 80 + 19 = 99 + 21 = 120

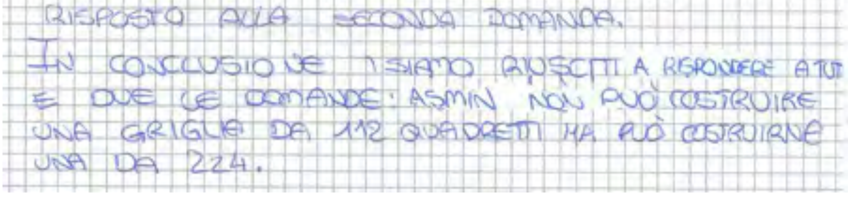
~~Non~~ Asmine non potrà costruire una griglia di ~~22~~ 112 quadretti.

Alcuni, anche in questa categoria, riescono a scoprire regolarità e fare commenti opportuni / Dans cette catégorie, quelques élèves réussissent à découvrir une régularité et à faire un commentaire pertinent :

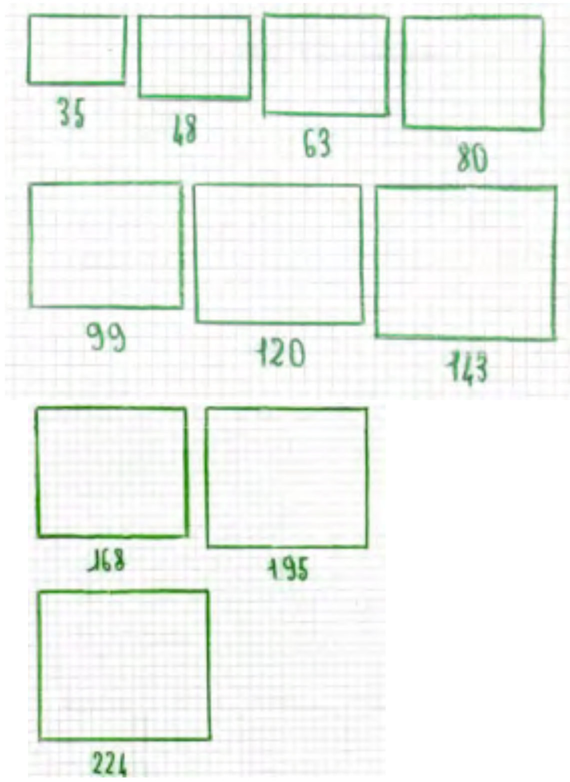


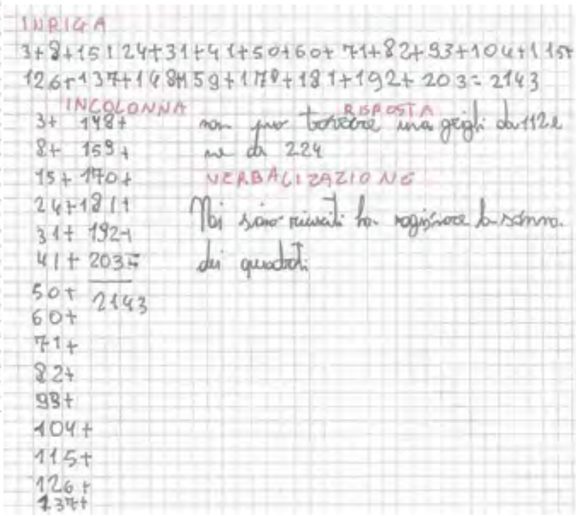




Solo un protocollo presenta disegno e verbalizzazione del ragionamento, ma in modo molto semplice: / Une seule copie présente un dessin et une verbalisation très simple du raisonnement :



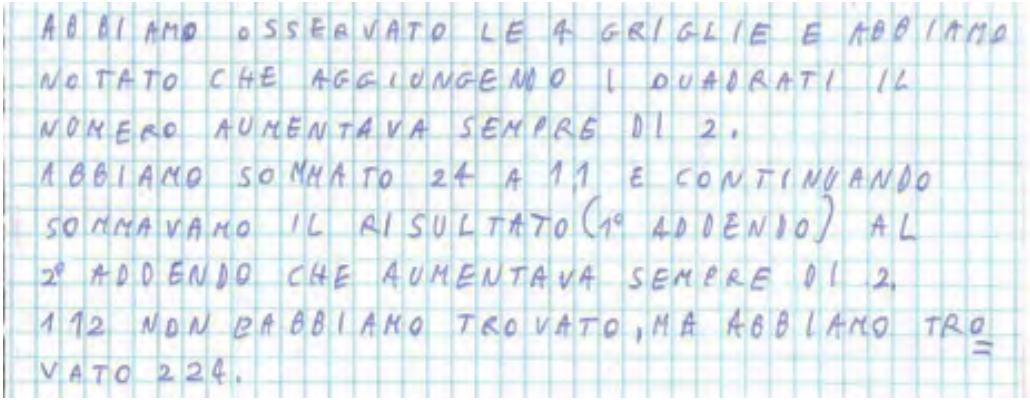


Presenti alcuni casi di calcoli fatti “a caso”: / Deux exemples de calculs faits « au hasard » :


In alcuni casi (rarissimi in cat. 4) vi sono solo spiegazioni a parole, talvolta giudicate incomplete dai correttori. L’elaborato seguente presenta ad esempio un ragionamento corretto ma incompiuto: /

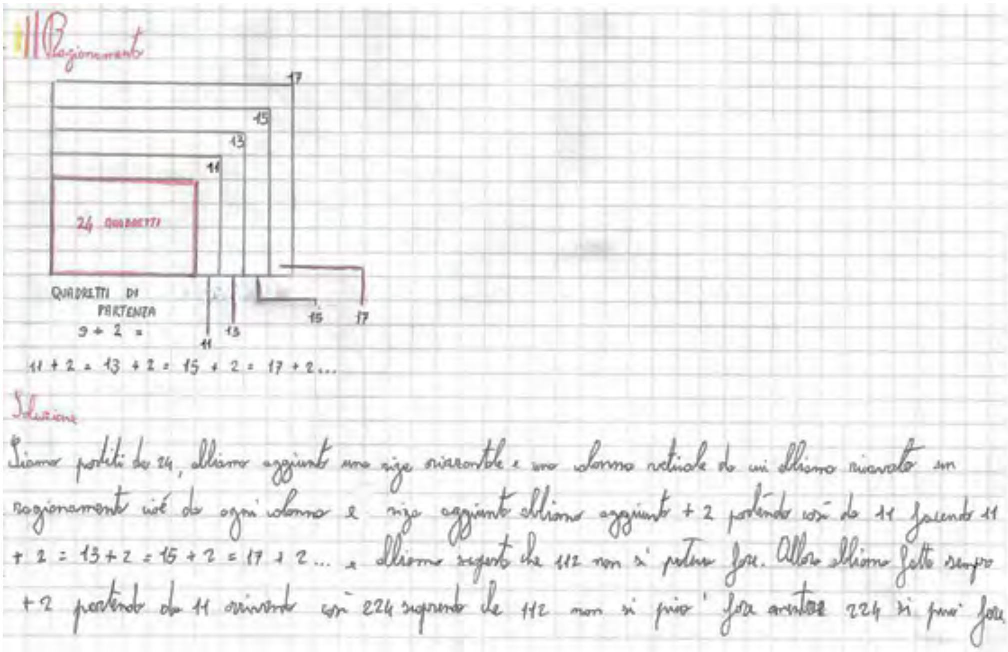
Dans quelques cas (rares en cat. 4), on trouve des explications verbales, parfois jugées incomplètes par les correcteurs. La copie suivante présente cependant un raisonnement correct mais inachevé :

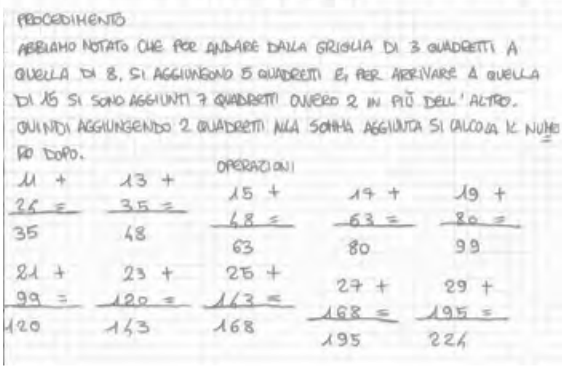

ABBIAMO OSSERVATO LE 4 GRIGLIE E ABBIAMO NOTATO CHE AGGIUNGEMMO I QUADRATI IL NUMERO AUMENTAVA SEMPRE DI 2.
ABBIAMO SOMMATO 24 A 11 E CONTINUANDO SOMMAVAMO IL RISULTATO (1° ADDENDO) AL 2° ADDENDO CHE AUMENTAVA SEMPRE DI 2.
112 NON L'ABBIAMO TROVATO, MA ABBIAMO TRO= VATO 224.

## Categoria 5 / Categorie 5

Compaiono spiegazioni verbali affiancate ai disegni delle griglie, in questo caso con un maggiore coordinamento tra le due rappresentazioni. Quindi in questa categoria cominciano a coesistere almeno due tipologie di spiegazioni, per lo più verbale e grafica, oppure verbale e procedurale con i calcoli (PR5014, PR5002, PR5073) /

Dans cette catégorie, les explications verbales apparaissent plus détaillées, souvent accolées aux dessins des grilles, avec une coordination plus précise entre les deux représentations. Au moins deux types d'explications commencent à se présenter : description avec graphique et explication procédurale avec les calculs.





PROCEDIMENTO
ABBIAMO NOTATO CHE PER ANDARE DALLA GRIGLIA DI 3 QUADRETTI A QUELLA DI 8, SI AGGIUNGONO 5 QUADRETTI E, PER ARRIVARE A QUELLA DI 15 SI SONO AGGIUNTI 7 QUADRETTI OVVERO 2 IN PIÙ DELL'ALTRO. QUINDI AGGIUNGENDO 2 QUADRETTI ALLA SOMMA AGGIUNTA SI CALCOLA IL NUMERO DOPO.
OPERAZIONI
11 + 24 = 35
13 + 35 = 48
15 + 48 = 63
17 + 63 = 80
19 + 80 = 99
21 + 99 = 120
23 + 120 = 143
25 + 143 = 168
27 + 168 = 195
29 + 195 = 224

dati

4 griglie alla partenza
devi sommare 1 in altez
za e 1 in larghezza

cerco

?riesci a creare una griglia di 112 quadretti
?riesci a creare un

24+4=28 quadrato 4 | 28+7=35 quadrato 3 | 35+5=40+8=48 quadrato 6 | 54+6=54+9=63 quadrato 7

63+7=70+10=80 quadrato 8 | 80+8=88+11=99 quadrato 9 | 99+9=108+12=120 quadrato 10

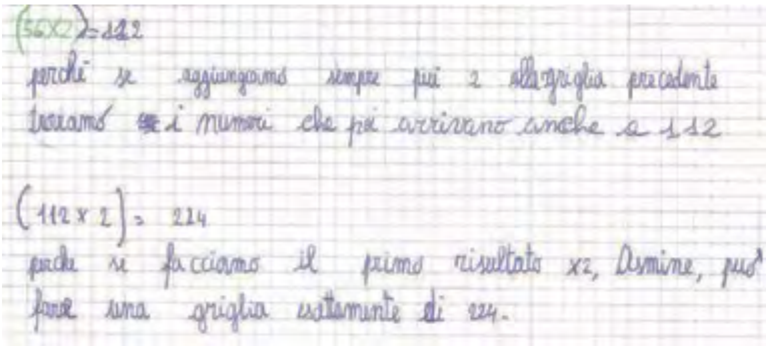
120+10=130+13=143 quadrato 11 | 143+11=154+14=168 quadrato 12 | 168+

12=180+15=195 quadrato 13 | 195+13=208+16=224 quadrato 14

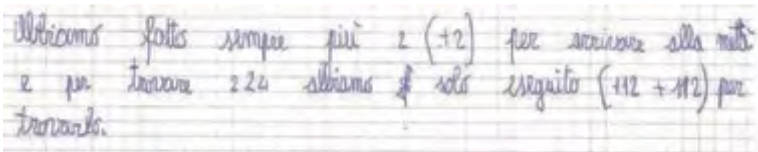
Risposta: potrà costruire solo quelle da 224 quadretti

Ragionamento: abbiamo aggiunto nel quarto 4 che è l'altezza e 7 che rappresenta la linea orizzontale e quella che si incrocio con quella vertical (19) dopo abbiamo aggiunto 1 quadrato ai 2 fattori e poi siamo arrivato alla conclusione

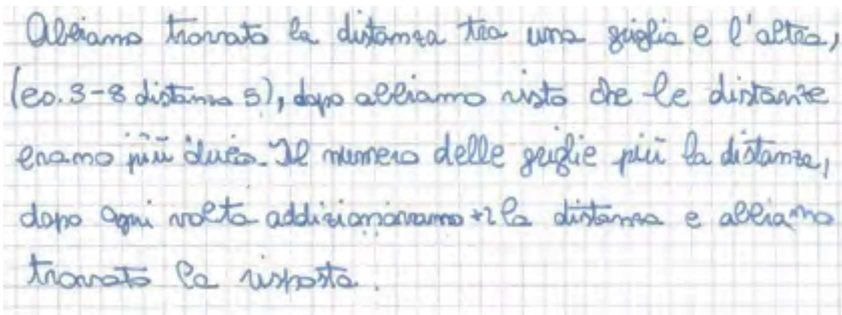
Presente ancora un errore dovuto all'operazione ×2 oppure :2, forse indotta dalla frase del testo "aggiunge una riga e una colonna": / Dans cette copie, on trouve une erreur de calcul due à l'opération ×2 ou : 2, peut-être induite par la phrase de l'énoncé : "elle ajoute une rangée et une colonne…".


(56x2)=112
perché se aggiungiamo sempre più 2 alla griglia precedente troviamo i numeri che poi arrivano anche a 112

(112 x 2) = 224
perché se facciamo il primo risultato x2, dunque, può fare una griglia esattamente di 224.


Abbiamo fatto sempre più 2 (+2) per arrivare alla metà e per trovare 224 abbiamo solo eseguito (112 + 112) per trovarlo.

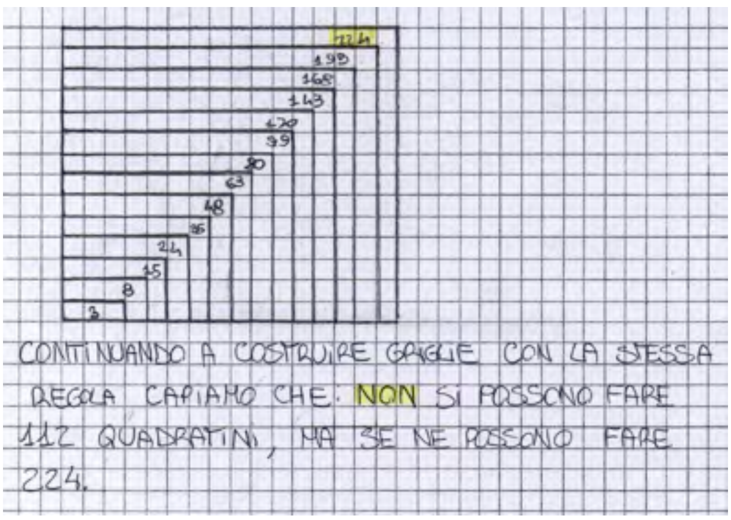
Una spiegazione basata su una procedura additiva corretta, ma poco esplicitata : / Une explication basée sur une procédure additive correcte mais peu explicitée :


Abbiamo trovato la distanza tra una griglia e l'altra, (es. 3-8 distanza 5), dopo abbiamo visto che le distanze erano più due. Il numero delle griglie più la distanza, dopo ogni volta addizionavamo +2 la distanza e abbiamo trovato la risposta.

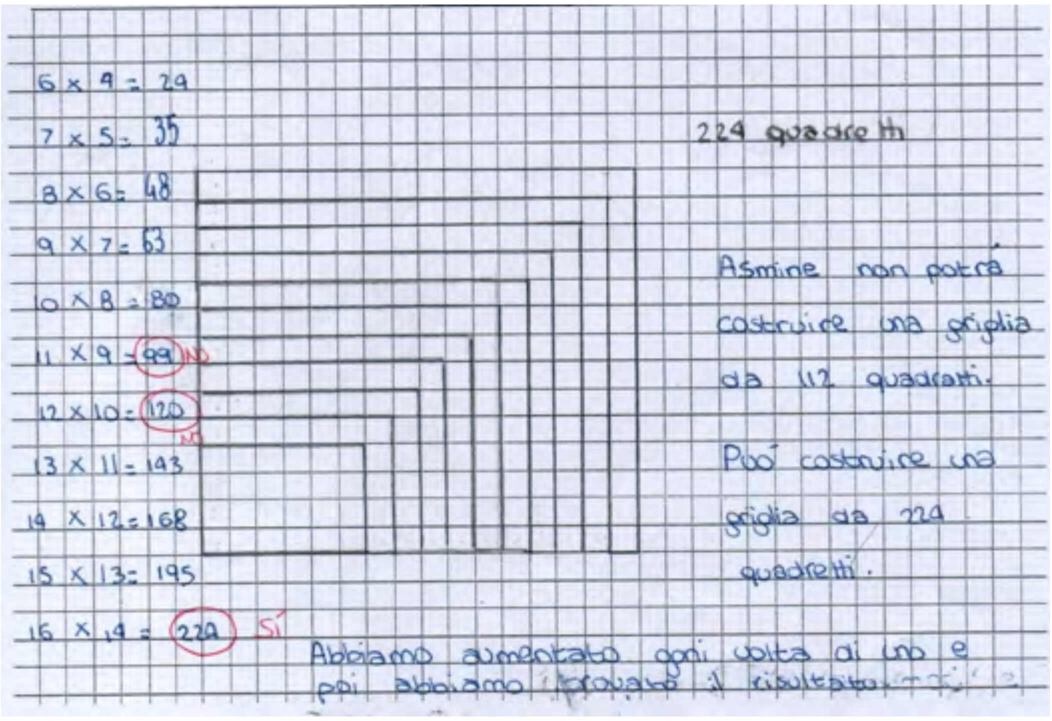
## Categoria 6 / Catégorie 6

Gli elaborati di questa categoria mostrano una certa evoluzione sui seguenti aspetti:
i disegni non si presentano più in forma svincolata tra loro ma sono quasi sempre presentati in una figura che raccoglie le varie griglie incasellandole tra loro /

Les copies de cette catégorie montrent une certaine évolution sur les aspects suivants :
les dessins ne présentent plus des grilles séparées, mais sont presque toujours présentés dans une illustration schématique représentant les différentes grilles imbriquées :

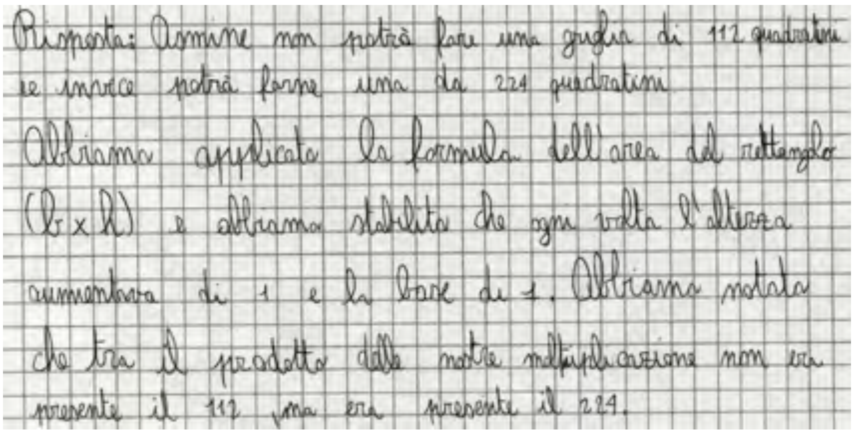



le varie rappresentazioni si coordinano in maniera più armonica: / les différentes représentations sont coordonnées de manière plus harmonique :



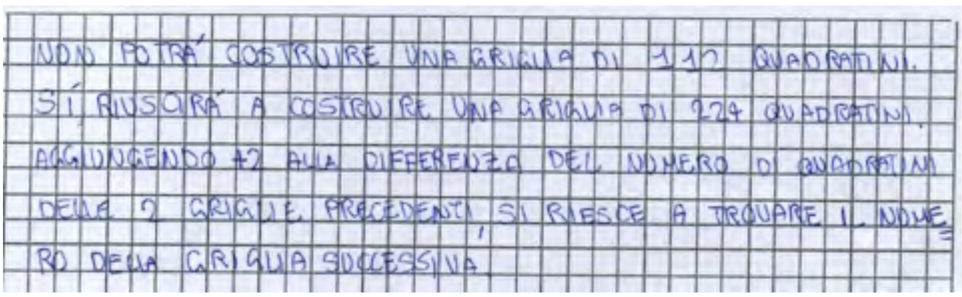

l'osservazione della regolarità numerica con cui variano le aree nella successione delle griglie viene prevalentemente osservata geometricamente, tuttavia viene descritta anche verbalmente, e a volte questa operazione avviene svincolandosi dall'osservazione dei disegni: /

l'observation de la régularité numérique avec laquelle les zones changent dans la succession des grilles est généralement repérée géométriquement, cependant elle est aussi décrite verbalement parfois dégagée de l'observation des dessins :



Risposta: Asmine non potrà fare una griglia di 112 quadratini e invece potrà farne una da 224 quadratini. Abbiamo applicato la formula dell'area del rettangolo (b x h) e abbiamo stabilito che ogni volta l'altezza aumentava di 1 e la base di 1. Abbiamo notato che tra il prodotto delle nostre moltiplicazioni non era presente il 112 ma era presente il 224.

e / et



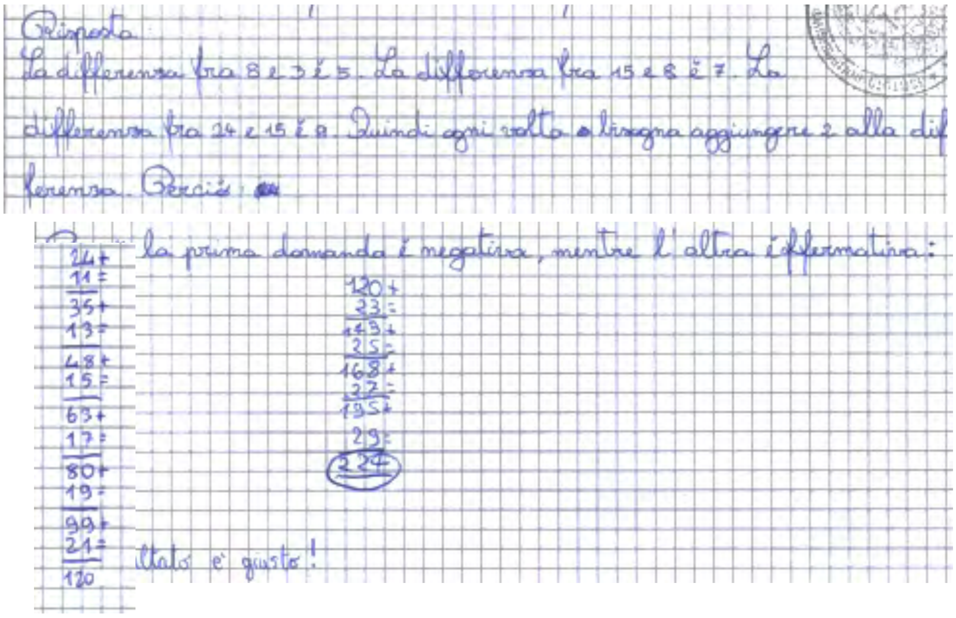
NON POTRÁ COSTRUIRE UNA GRIGLIA DI 112 QUADRATINI. SÍ RIUSCIRÁ A COSTRUIRE UNA GRIGLIA DI 224 QUADRATINI. AGGIUNGENDO +2 ALLA DIFFERENZA DEL NUMERO DI QUADRATINI DELLE 2 GRIGLIE PRECEDENTI, SI RIESCE A TROVARE IL NUMERO DELLA GRIGLIA SUCCESSIVA.

Si possono osservare due atteggiamenti dei ragazzi nell'affrontare il problema:

- uno più ingenuo in cui si concentrano sulla ricerca dei numeri richiesti. A volte infatti, pur osservando in maniera più evoluta la variabilità delle griglie, prevale l'atteggiamento aritmetico centrato sui calcoli:

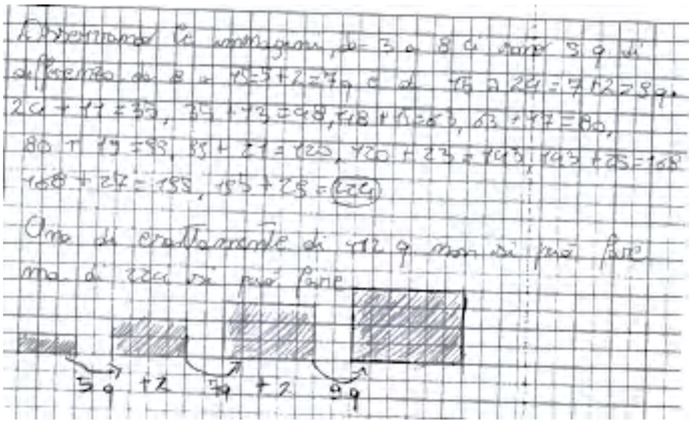
Les élèves peuvent adopter deux attitudes en abordant ce problème :

- la plus immédiate dans laquelle ils se concentrent sur la recherche des nombres demandés. Mais en observant de manière plus attentive la variabilité des grilles, l'approche arithmétique centrée sur les calculs prévaut :



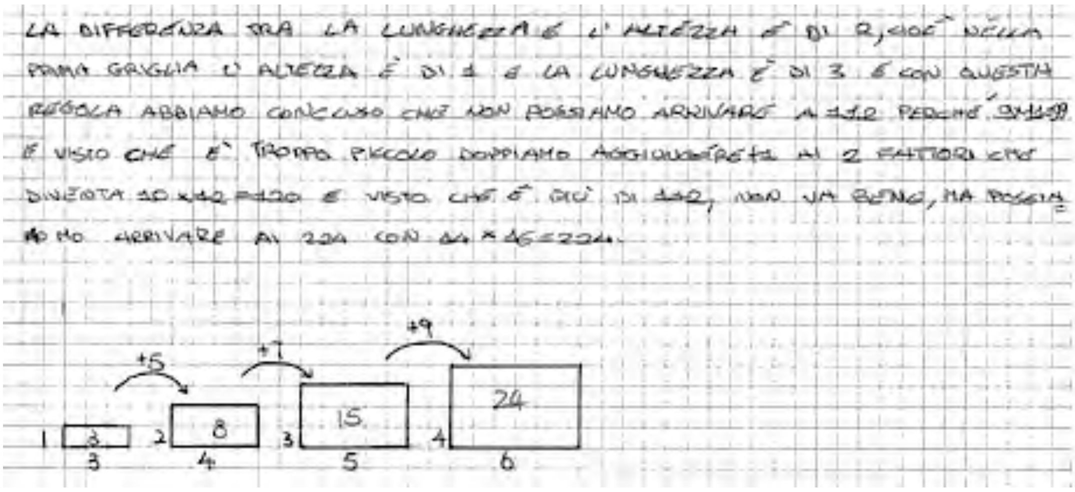

- l'altro più evoluto in cui appare evidente la visione funzionale nella successione delle griglie. I ragazzi arrivano anche a denotare sia il posto che occupa una griglia nella successione, sia il valore numerico dei quadretti.

- l'autre plus évoluée dans laquelle la vision fonctionnelle apparaît plus clairement dans la succession des grilles.



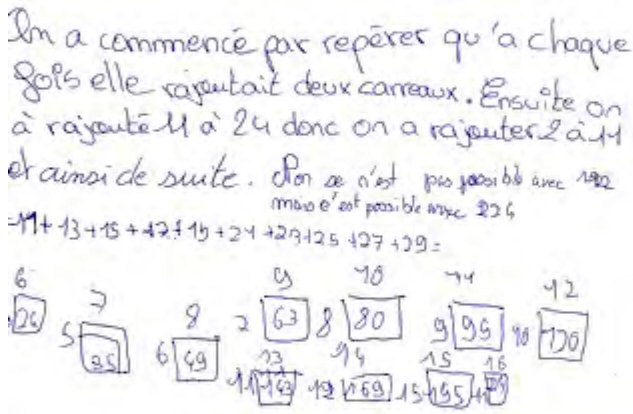
Alcuni elaborati evidenziano che i ragazzi cominciano ad avere una visione funzionale del problema, riconoscono la variabilità correlata delle dimensioni della griglia. In un paio di casi perfino si distingue tra il numero d'ordine della griglia e i numeri che ne connotano le dimensioni. Gli allievi riescono anche a notare sia il posto occupato da una griglia nella successione, sia i valori numerici delle aree dei rettangoli: /

Quelques copies montrent que les élèves commencent à avoir une vision fonctionnelle du problème, ils reconnaissent la variabilité des dimensions des grilles. Dans certains cas ils font la distinction entre le numéro d'ordre de la grille et les nombres correspondant à leurs dimensions. Les élèves arrivent aussi à noter soit la place occupée par une grille dans la succession, soit les valeurs numériques des aires des quadrillages :



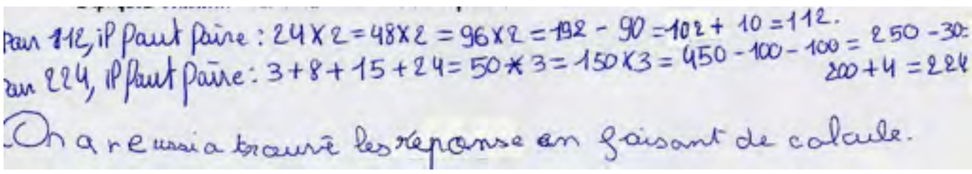

Compaiono anche tre rappresentazioni coordinate tra loro, si evitano i disegni ricorrenti, ma si fa ricorso ad una sola figura che sinteticamente rappresenta la variabilità delle griglie.

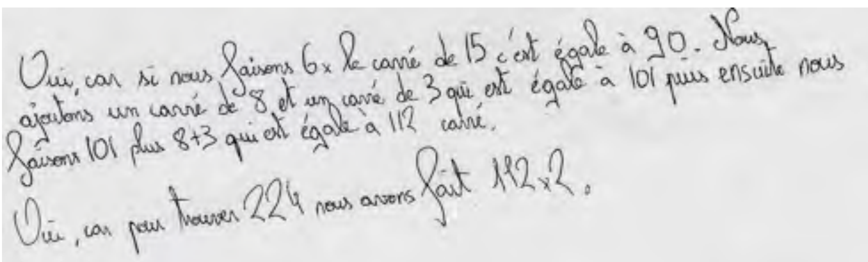
Des représentations coordonnées apparaissent aussi tout en évitant les dessins successifs, en ayant recours à une illustration qui représente synthétiquement la variabilité des grilles :




A volte si tenta di ragionare solo sui numeri, eliminando i disegni, ma questo tentativo spesso porta all'insuccesso nei risultati:

Parfois les élèves tentent de raisonner seulement sur les nombres, en éliminant les dessins mais cette tentative porte souvent à l'insuccès dans les résultats.



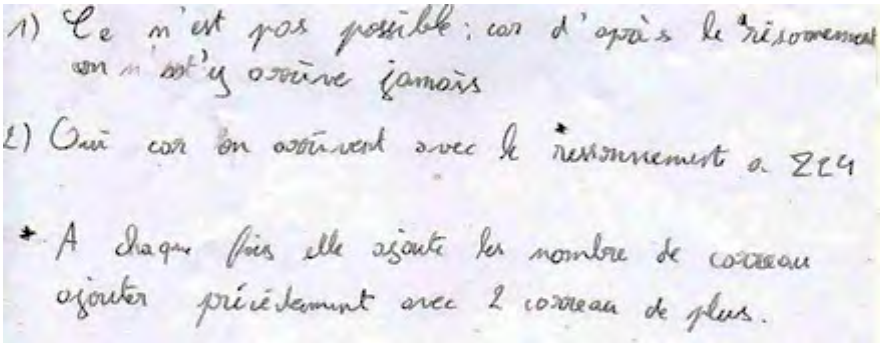

La chiave del problema consiste nel trovare due numeri interi la cui differenza è 2 e il cui prodotto è 112 e successivamente 224. In questo elaborato è stato compreso chiaramente:

La clé du problème consiste à trouver deux nombres entiers dont la différence est 2 et le produit 112 puis 224. Cette copie l'a bien comprise :


1 Non elle ne pourrat pas faire le nombreu 112 car 11×9 = 99 et 12×10=120.
2 Oui elle pourrat faire le nombreu 224 car 16×14 = 224.

In un elaborato abbiamo trovato un tentativo di descrivere verbalmente la "regola" con cui le griglie cambiano e si accrescono.

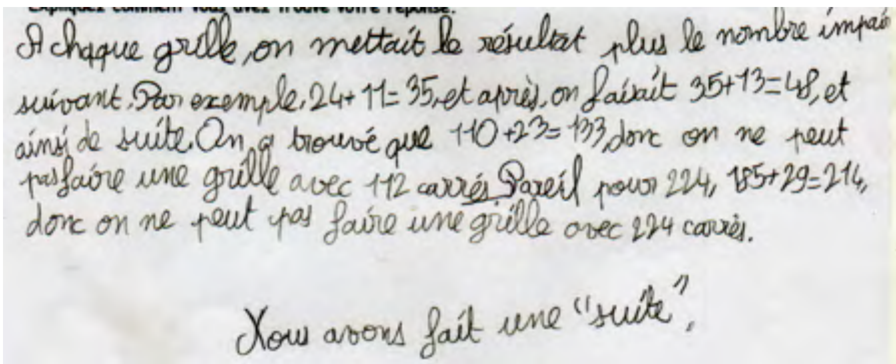
Dans cette copie nous avons trouvé une tentative de décrire verbalement la "règle" selon laquelle les nombres des carreaux des grilles s'accroissent.


1) Ce n'est pas possible : car d'après le résonnement on n'est y arrive jamais
2) Oui car on arrivent avec le * ressonnement a 224
* A chaque fois elle ajoute les nombre de carreau ajouter précédament avec 2 carreau de plus.

## Per andare più lontano / Pour aller plus loin

Questo problema potrebbe essere considerato come introduttivo alla nozione di funzione e di successione numerica, a condizione che la ricerca di una formula per esprimere il passaggio da una griglia all'altra sia necessaria per poter rispondere alla domanda.

Ce problème pourrait être considéré comme introductif à la notion de fonction et de suite numérique, à condition que la recherche d'une formule pour exprimer le passage d'une grille à l'autre soit nécessaire pour pouvoir répondre à la question.


A chaque grille, on mettait le résultat plus le nombre impair suivant. Par exemple, 24+11= 35, et après, on faisait 35+13=48, et ainsi de suite. On a trouvé que 110+23=133, donc on ne peut pas faire une grille avec 112 carrés. Pareil pour 224, 185+29=214, donc on ne peut pas faire une grille avec 224 carrés.

Nous avons fait une "suite".

A questo scopo i numeri 112 e 224 si rivelano troppo piccoli, in quanto possono essere trattati con una successione di disegni schematici o di griglie incasellate. La variabile didattica del numero totale di quadretti risulta dunque essenziale per determinare l'obiettivo matematico del problema.

Ce n'est pas le cas comme on l'a vu avec les nombres 112 et 224, trop petits, qui peuvent être traités par une suite de dessins même schématiques ou par des grilles emboîtées. Cette variable didactique est donc essentielle et détermine l'objectif mathématique du problème.

Elle ne peut pas construire une grille avec exactement 112
carrés car.
3 8 15 24 35 48 63 80 99 112 120
5 7 9 11 13 15 17 19 21.
Par contre elle peut faire une grille avec exactement 224
carrées car.
120 143 168 195 224
23 25 27 29

Potremmo porre la seguente domanda: *continuando a costruire griglie che rispettano la stessa regola, potremo costruire una griglia con esattamente 1224 quadretti?*

Posons donc la question suivante : *en continuant à construire des grilles en respectant la même règle, pourrait-on construire une grille avec exactement 1224 carrés* ?

Questo dato rende impossibile una soluzione grafica. Non è neppure possibile dare la successione numerica delle 34 aree successive espresse in quadretti: 3 (3×1), 8 (4×2), 15 (5×3), …, 1224 (36×34) per la 34-esima griglia. La 33-esima è composta da 35×33 = 1155 quadretti, e dunque non è possibile ottenere griglie formate da un numero di quadretti strettamente compreso fra 1155 e 1224.

Il problema, per essere risolto nella sua generalità, suppone di avere una legge che fornisce l'area di una griglia in funzione della sua posizione nella successione. Il seguente elaborato ha ben compreso il processo che porta alla relazione funzionale cercata, ma al livello 6 non è possibile sfruttarlo adeguatamente.

Cette valeur rend impossible une solution par dessins. Il n'est guère possible non plus de donner la suite numérique des 34 aires des grilles successives en nombres de carrés : 3 (3 × 1), 8 (4 × 2), 15 (5 × 3), …, 1224 (36 × 34) pour la 34$^{\text{ème}}$ grille. La 33$^{\text{ème}}$ compte 35 × 33 = 1155 carrés, il n'est donc pas possible d'obtenir une grille ayant un nombre de carrés strictement compris entre 1155 et 1224.

Ce problème, pour être résolu dans sa généralité, suppose donc d'avoir une expression donnant l'aire d'une grille en fonction de son rang. La copie suivante a bien compris le processus qui induit la relation fonctionnelle cherchée, mais au niveau 6 il n'était pas possible de l'exploiter algébriquement.

on a remarquer que à chaque grille suivante on
rajoute 5/7/9/11/13/15....

112 ne fonctionne pas car 99+21=120 c'est trop grand.

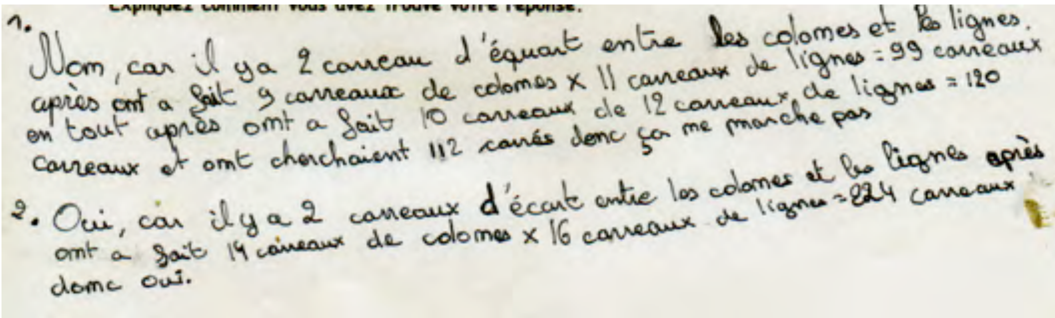
Mais 224 fonctionne car 195+24=224.

Seguendo questa regola di costruzione, possibile al livello 10, si può ottenere la seguente espressione : se $n$ indica la posizione di una griglia nella successione, l'area corrispondente $A(n)$ è uguale alla somma dei numeri dispari da 3 a $2n+1$. Tale successione è ottenuta a partire dalla successione dei numeri interi da 1 a $n$, moltiplicandoli per 2 e aggiungendo 1 a ciascun numero. La sua somma è uguale al doppio della somma degli interi da 1 a $n$ (che vale $n(n+1)/2$) alla quale si aggiunge $n$ : $A(n) = n^2 + 2n = (n + 1)^2 - 1$. Quest'area può corrispondere a quella di una griglia a condizione che il numero di quadretti dato, N, sia tale che N+1 sia un quadrato perfetto e in questo caso la posizione $n$ corrispondente è $n = \sqrt{N+1} - 1$.

En suivant cette règle de construction, possible au niveau 10, on peut obtenir cette expression : si R est le rang de la grille considérée, son aire A(R) est donc égale à la somme partielle de la suite des nombres impairs de 3 à 2R + 1. Cette suite est obtenue à partir de la suite des entiers de 1 à R en les multipliant par 2 et ajoutant 1 à chacun. Sa somme est donc égale au double de la somme des entiers de 1 à R (qui vaut R(R + 1)/2) auquel on ajoute R : $A(R) = R^2 + 2R = (R + 1)^2 - 1$. Cette aire ne peut donc être celle d'une grille qu'à la condition que le nombre N de carrés donné soit tel que N + 1 soit un carré parfait, et dans ce cas le rang de la grille correspondante est $R = \sqrt{N+1} - 1$.

Un'altra strategia risulta indubbiamente più abbordabile, in ogni caso ai livelli 8 e 9: l'area $A(n)$ è ottenuta dal prodotto della lunghezza per la larghezza della griglia, espressa in numero di lati di quadretti. Si può osservare che tali numeri differiscono di 2.

Une autre stratégie est sans doute plus abordable, en tout cas aux niveaux 8 et 9 : l'aire A(R) est obtenue par le produit de la longueur par la largeur de la grille, en nombres de côtés de carrés. Mais on a pu remarquer que ces deux nombres diffèrent de 2.



Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

1. Nom, car il ya 2 carreau d'équart entre les colomes et les lignes. après ont a fait 9 carreaux de colomes x 11 carreaux de lignes = 99 carreaux en tout après omt a fait 10 carreaux de 12 carreaux de lignes = 120 carreaux et omt cherchaient 112 carrés donc ça me marche pas

2. Oui, car il y a 2 carreaux d'écart entre les colomes et les lignes après omt a fait 14 carreaux de colomes x 16 carreaux de lignes = 224 carreaux donc oui.

Così, se $n$ indica la posizione della griglia cercata, che corrisponde anche alla larghezza di tale griglia, si ha: $A(n) = n(n + 2)$. Per valori abbastanza gradi di $n$, tale numero è vicino a $n^2$. Se N è il numero dato di quadretti totali, la ricerca di un prodotto possibile si può fare per tentativi a partire dall'intero precedente $\sqrt{N}$. Nell'esempio proposto, con $1155 < N < 1224$, si ottiene $34 < \sqrt{N} < 35$, da cui il prodotto $A(n) = 34 \times 36 = 1224$.

Ainsi, si R est le rang de la grille cherchée, égal à la largeur de cette grille, on a : $A(R) = R(R + 2)$. Pour des valeurs de R assez grandes, ce nombre est proche de $R^2$. Si N est le nombre de carrés demandé, la recherche d'un produit possible peut se faire par essais à partir de l'entier précédant $\sqrt{N}$. Dans l'exemple proposé, avec $1155 < N < 1224$, cela donne $34 < \sqrt{N} < 35$, d'où le produit $A(R) = 34 \text{ x } 36 = 1224$.

# ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

## LE POTAGER I / L'ORTO I

**Maddalena Asara, Brunella Brogi, Fabio Brunelli, Speranza Dettori, Florence Falguères, Gloria Giacomelli, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Elisabetta Mari, Silvia Mazzucco, Andrè Nguyen, Lucia Palmas, Elsa Renna, Patrizia Sabatini, Rosanna Sanna, M. Agostina Satta**

L'étude proposée ici, sur le problème « Le potager I », concerne l'analyse a posteriori des copies des sections auxquelles appartiennent certains membres du sous-groupe « pour le grands » du Groupe géométrie plane.

L'approfondimento proposto qui, sul problema "L'orto I", riporta l'analisi a posteriori degli elaborati delle sezioni alle quali afferiscono alcuni dei membri del sottogruppo "per i grandi" del Gruppo geometria piana.

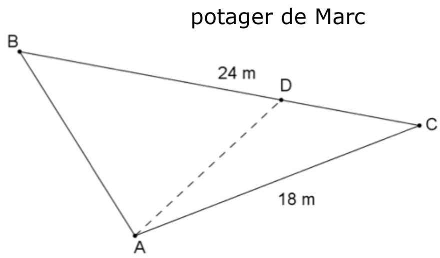
**LE POTAGER I** (26.II.12 Cat. 6, 7, 8)

Marc a hérité d'une petite parcelle de terrain de forme triangulaire, avec un côté de 24 mètres et un autre de 18 mètres. Il veut réaliser un potager.

Marc veut planter des pommes de terre et des haricots verts en divisant son terrain en deux parties. L'aire de la partie réservée aux pommes de terre doit être le double de l'aire de la partie réservée aux haricots verts.

Pour séparer ses deux cultures, Marc plante un pieu en A (voir la figure) et un autre pieu en un point D sur le côté [BC]. Il les joint par une ficelle.

Voici sa première tentative, mais il n'est pas satisfait : l'aire de l'un des deux triangles n'est pas le double de celle de l'autre.




**À quelle distance de C Marc doit-il planter le pieu D ?**

**Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.**

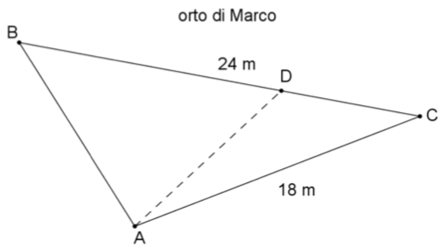
**L'orto I** (26.II.12 Cat. 6, 7, 8)

Marco ha ereditato un piccolo appezzamento di terreno di forma triangolare, con un lato di 24 metri e un altro di 18 metri. Egli vuole realizzare un orto.

Marco vuole piantare patate e fagiolini dividendo il suo terreno in due parti. L'area della parte riservata alle patate deve essere il doppio dell'area riservata ai fagiolini.

Per separare le due coltivazioni, Marco pianta un paletto in A (vedi figura) e un altro paletto in un punto D sul lato BC e li congiunge con una cordicella.

Ecco il suo primo tentativo, ma Marco non è soddisfatto: l'area di uno dei due triangoli non è il doppio di quella dell'altro




**A quale distanza da C Marco dovrà piantare il paletto D?**

**Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.**

---

## DALL'ANALISI A PRIORI ALL'ANALISI A POSTERIORI / DE L'ANALYSE A PRIORI À L'ANALYSE A POSTERIORI

### Compito matematico / Tâche mathématique

Nell'analisi a priori originale il compito matematico era stato espresso nella forma: "Dividere un triangolo in due triangoli aventi l'uno area doppia dell'altro", mentre dopo l'analisi a posteriori che verrà descritta più avanti, ha più senso indicare il compito matematico come "Determinare la posizione di un segmento che divide un triangolo in due triangoli aventi l'uno area doppia dell'altro."

Dans l'analyse a priori originale, la tâche mathématique était présentée sous la forme : « Diviser un triangle en deux triangles dont l'un est d'aire double de celle de l'autre », alors qu'après l'analyse a posteriori qui sera décrite plus loin, il est plus logique d'indiquer la tâche mathématique telle que « Déterminer la position d'un segment qui divise un triangle en deux triangles, l'un ayant une surface double de l'autre ».

### Compito per la risoluzione e saperi mobilizzati / Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Rendersi conto che l'enunciato fornisce solo le misure di due lati del triangolo ABC e che di conseguenza questo triangolo non è "determinato", cioè che quello disegnato non è l'unico con i lati di quelle misure.
- Rendersi quindi conto che l'area dell'orto è indeterminata, pur constatando che i due triangoli ADB e ADC hanno un'area indeterminata ma una doppia dell'altra.
- Constatare però che tali due triangoli hanno la stessa altezza tracciata da A. Pertanto perché un'area sia il doppio dell'altra essi devono avere le loro basi nello stesso rapporto 2,
- Capire che dunque la base di lunghezza 24 m, deve essere divisa in due parti proporzionali a 1 e 2.
- quindi BD = 2 DC o DC = 2 BD.
- Dedurre che il paletto D deve essere piantato a 8 metri o a 16 metri da C.

Oppure:

In maniera intuitiva, vista la mancanza di dati, accontentarsi della partizione della base in parti proporzionali a 1 e 2

- Se rendre compte que l'énoncé ne fournit que les mesures de deux côtés du triangle ABC et que par conséquent ce triangle n'est pas « déterminé », c'est-à-dire que le triangle dessiné n'est pas le seul à avoir les côtés avec ces mesures.
- Puis réaliser que la surface du potager est indéterminée, tout en notant que les deux triangles ADB et ADC ont une surface indéterminée mais l'une double de l'autre.
- Noter cependant que ces deux triangles ont la même hauteur issue de A. Par conséquent, pour qu'une zone soit le double de l'autre, ils doivent avoir leur base dans le même rapport 2.
- Comprendre que la longueur de la base de 24 m doit donc être divisée en deux parties proportionnelles à 1 et 2.
  donc BD = 2 DC ou DC = 2 BD.
- En déduire que la borne D doit être plantée à 8 ou 16 mètres de C.

ou :

De manière intuitive, vu le manque de données, se contenter de la partition de la base en parties proportionnelles à 1 et 2

### Parole-chiave / Mots clés

Triangolo, altezza, area, proporzionalità, rapporto
Triangle, hauteur, aire, proportionnalité, rapport

**Résultats / Risultati**

Sur les classes (près de 3500) de 20 sections/Su circa 3500 classi di 20 sezioni

| Points Punteggi | Occ 0 | Occ 1 | Occ 2 | Occ 3 | Occ 4 | Total | m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cat. 6 | 814 | 207 | 365 | 45 | 6 | 1437 | 0,8 |
| Cat. 7 | 631 | 199 | 295 | 83 | 9 | 1217 | 0,9 |
| Cat. 8 | 402 | 147 | 165 | 74 | 39 | 827 | 1,0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Cat. 6 | 57% | 14% | 25% | 3% | 0% |
| Cat. 7 | 52% | 16% | 24% | 7% | 1% |
| Cat. 8 | 49% | 18% | 20% | 9% | 5% |
| **tot** | 53% | 16% | 24% | 6% | 2% |

La media è bassa per tutte e tre le categorie anche se migliora leggermente dalla categoria più bassa a quella più alta, senza peraltro poter dire che tale miglioramento sia significativo.

La moyenne est basse pour les trois catégories et s'améliore très légèrement de la 6$^e$ à la 8$^e$ mais sans pouvoir dire si cette augmentation est significative.

Selon les critères suivants de l'attribution des points :

4 Réponse complète (D à 8 m ou à 16 m de C), avec des explications claires et complètes (constater que les deux triangles ont la même hauteur, avec une représentation graphique qui montre la hauteur commune).

3 Réponse complète avec des explications partielles ou peu claires,
ou une seule valeur (8 m ou 16 m) avec des explications claires.

2 Une seule valeur donnée (8 m ou 16 m) avec des explications partielles ou absentes.

1 Une réponse approximative obtenue par des mesures sur le dessin,
ou début de raisonnement correct avec une représentation graphique correcte.

0 Incompréhension du problème.

Secondo i criteri seguenti dell'attribuzione dei punteggi:

4 Risposta completa (D a 8 m o a 16 m da C), con spiegazioni chiare e complete (aver constatato che l'altezza è la medesima nei due triangoli, rappresentazione grafica che mostri l'altezza comune).

3 Risposta completa con spiegazioni parziali o poco chiare
oppure trovato un solo valore (8 m o 16 m) con spiegazioni chiare

2 Trovato un solo valore (8 m o 16 m) con spiegazioni parziali o assenti

1 Una risposta approssimata ottenuta con misurazioni sui disegni
oppure inizio di ragionamento corretto con rappresentazione grafica corretta

0 Incomprensione del problema

## Osservazioni a posteriori / Observations a posteriori

L'analisi a posteriori è stata svolta sugli elaborati di sezioni cui afferiscono i membri del gruppo (Franche-Comté, Parma, Rozzano, Sassari, Siena e Svizzera romanda; oltre a quello della classe di Lucia Palmas della scuola italiana di Asmara-Eritrea) con attenzione particolare ai numerosi elaborati della sezione di Siena che Brunella Brogi, Fabio Brunelli, Gloria Giacomelli e in parte Silvia Mazzucco hanno analizzato in maniera molto dettagliata.

L'analyse a posteriori a été réalisée sur les copies des sections des membres du groupe (Franche-Comté, Parme, Rozzano, Sassari, Sienne et la Suisse romande ; en plus de celle de la classe Lucia Palmas de l'école italienne d'Asmara-Erythrée), avec une attention particulière envers les nombreuses copies de la section de Sienne, que Brunella Brogi, Fabio Brunelli, Gloria Giacomelli et partiellement Silvia Mazzucco, ont analysées de manière très détaillée.

Il problema, come è chiaro già dai risultati ottenuti e riportati più sopra, risulta molto mal riuscito e l'analisi a posteriori, oltre a consentirci di capire quali siano le ragioni precipue delle difficoltà incontrate dagli allievi, obbliga noi adulti a riflettere sugli effettivi ostacoli insiti nel problema.

Comme le montrent déjà les résultats obtenus et rapportés ci-dessus, le problème est très mal réussi e l'analyse a posteriori, tout en nous permettant de comprendre quelles sont les principales raisons des difficultés rencontrées par les élèves, nous oblige, nous, adultes, à réfléchir aux véritables obstacles inhérents au problème.

La difficoltà principale di questo problema risiede in effetti e sostanzialmente nell'apparente mancanza di dati visto che il triangolo non è determinato (è generale).
Si tratta della famiglia di triangoli aventi un lato di 24 m e l'altro di 18 m, le cui aree variano da 0 a (24 × 18) : 2

Inoltre, nel caso in cui non si colga il fatto centrale secondo cui l'altezza è la medesima per i due triangoli, benché indeterminata, nel caso della ricerca delle aree è necessario passare attraverso le misure, oppure lavorare solo sulla base.

La difficulté principale de ce problème réside en fait et essentiellement dans le manque apparent de données car le triangle n'est pas déterminé (il est général).
C'est la famille des triangles de 24 m de côté et de 18 m de côté, dont la superficie varie de "0" à (24 × 18) : 2

De plus, si le fait central selon lequel la hauteur est la même pour les deux triangles n'est pas saisi, même si elle est indéterminée, dans le cas de la recherche des aires, il est nécessaire de passer par les mesures ou de ne travailler que sur la base.

Presentiamo qui di seguito aspetti dell'analisi a posteriori che vanno dagli errori più frequenti alle risposte corrette nelle diverse modalità.
Le tabelle che sintetizzano alcune delle analisi a posteriori rispetto alle procedure utilizzate dagli allievi figurano in allegato.

Nous présentons ci-dessous des aspects de l'analyse a posteriori allant des erreurs les plus fréquentes aux réponses correctes des différentes modalités.
Les tableaux qui résument certains des analyses a posteriori par rapport aux procédures utilisées par les élèves sont en annexe.

## Il caso delle risposte errate / le cas des réponses erronées

Nel caso degli elaborati dove non si arriva alla risposta corretta, e si tratta di un'ampia percentuale, si trovano tentativi di vario genere, con misure e calcoli, perlopiù nel tentativo di trovare le aree. In alcuni casi, trovata un'area la si divide per 2 e poi ancora per 2, confondendo i 3/4 con i 2/3.

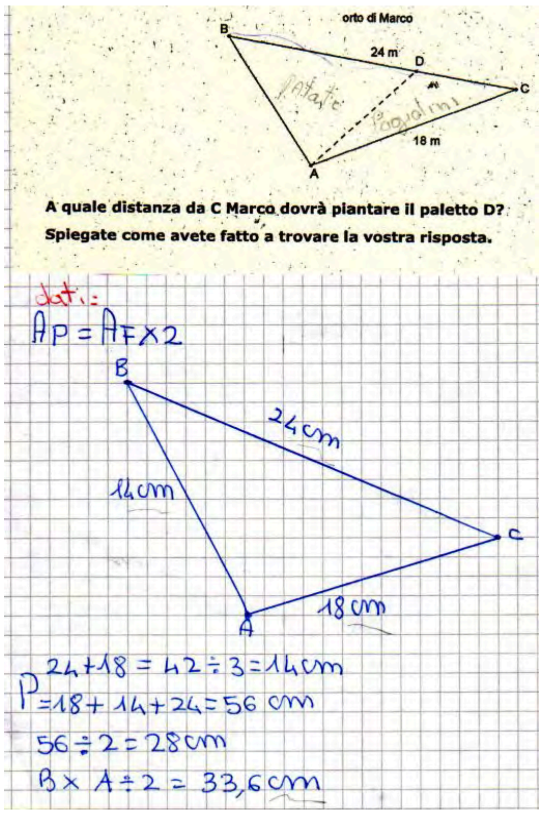
In un certo numero di elaborati, soprattutto di categoria 6, dove si manifesta chiaramente un'incomprensione del problema, gli allievi "si sentono in obbligo" di usare comunque in qualche modo i numeri riportati sulla figura per calcolare l'area o il perimetro del triangolo, mostrando così anche di non conoscere le proprietà della figura. Inoltre, non riconoscono i dati non necessari per la risoluzione del problema come, per esempio, le dimensioni del lato AC. Tale misura viene usata, spesso, per determinare la lunghezza sconosciuta del lato AD, attraverso la sottrazione o l'addizione con il lato BC:
*Operazioni 24 + 18 = 42 42 **:** 2 = 21. Dovrà piantarla a 21 m.*
*24 + 18 = 42 totale orto 42**:**3 = 14 parte più piccola 14 × 2 = 28 parte del doppio di quella piccola 142**:**3 = 4,2 m distanza dal paletto C a quello D.*
*24 – 18 = 6 m 2p = 48 m 48**:**3 = 16 m 16**:**2 = 8 m*

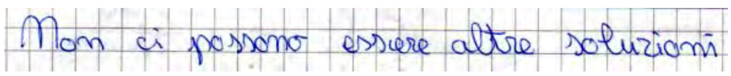
*Spiegazione: per trovare l'ampiezza del campo di patate abbiamo fatto 24 -18 = 6 m che è la lunghezza del lato rimasto. Poi abbiamo sommato 24 + 18 + 6 = 48 m ovvero il perimetro di tutto il campo. Dopodiché abbiamo fatto 48 **:** 3 = 16 m cioè l'ampiezza dei due lati. Infine abbiamo fatto 16 • 2 =32 m che è l'ampiezza totale del campo di patate.*
*Misura 6 perché con la calcolatrice abbiamo fatto 24 m - 18 m = 6 m.*

Dans un certain nombre de copies, en particulier de catégorie 6, où il existe manifestement une incompréhension du problème, les élèves « se sentent obligés » d'utiliser de quelque manière que ce soit les nombres qui apparaissent sur la figure, pour calculer l'aire ou le périmètre du triangle, montrant ainsi également qu'ils ne connaissent pas les propriétés de la figure. De plus, ils ne reconnaissent pas les données qui ne sont pas nécessaires à la résolution du problème, telles que les dimensions du côté AC. Cette mesure est souvent utilisée pour déterminer la longueur inconnue du côté AD, par soustraction ou addition du côté BC :

*Opérations 24 + 18 = 42 × 42: 2 = 21 Vous devez le planter à 21 m.*
*24 + 18 = 42 potager total 42 : 3 = 14 la plus petite partie 14 × 2 = 28 partie du double du petit 142 : 3 = 4,2 m de distance entre le poteau C et celui D.*
*24 - 18 = 6 m 2p = 48 m 48 : 3 = 16 m 16: 2 = 8 m.*
*Explication : pour trouver la largeur du champ de pommes de terre, nous avons fait 24 -18 = 6 m, soit la longueur du côté gauche. Ensuite, nous avons ajouté 24 + 18 + 6 = 48 m ou le périmètre de tout le terrain. Ensuite, nous avons fait 48 : 3 = 16 m, soit la largeur des deux côtés. Finalement nous avons fait 16 • 2 = 32 m qui est la largeur totale du champ de pommes de terre.*
*Mesure 6 car avec la calculatrice nous avons fait 24 m - 18 m = 6 m.*

O ancora, come in questo elaborato dove gli alunni hanno determinato la lunghezza del lato AB per addizione dei due lati noti / Ou encore, comme dans cette copie où les élèves ont déterminé la longueur du côté AB en additionnant les deux côtés connus




In alcuni casi, ancora soprattutto di categoria 6, permane la confusione fra area e perimetro.

Gli allievi operano sul perimetro come se questo fosse l'area, nel senso che lo dividono in due parti una doppia dell'altra, per verificare quanto riportato nell'enunciato circa l'appezzamento destinato rispettivamente alle patate o ai fagiolini. Vengono confuse le unità di misura di lunghezza e di superficie, le misure vengono espresse indifferentemente in centimetri o in metri e vengono mescolate:

*Marco ha piantato il paletto a 7 m da D, a 12 m da B la parte delle patate. Abbiamo sommato 24 m a 18 m e fa 42, lo abbiamo diviso a 3 e faceva 14 ed era l'area delle patate. Visto che l'area delle patate deve essere il doppio dell'altra parte lo abbiamo diviso per 2 faceva 7.*

*Risposta: la distanza C e d è 14 cm Soluzione: Abbiamo fatto 24 + 18 = 42 dopo: 3 =14 e la seconda parte 42 perché prima abbiamo fatto 24 + 18 = 42 dopo aver trovato il perimetro abbiamo trovato l'area facendo 42* **:** *3 = 14 e abbiamo trovato la parte dei fagiolini, in seguito abbiamo fatto 14x2 trovando la parte delle patate che e 28.*

*Abbiamo fatto 24 + 18 = 42 poi 42***:***3 =14 m e abbiamo trovato l'area della coltivazione dei fagiolini. 14x2 = 28 e abbiamo trovato l'area delle patate e il paletto D abbiamo spostato 4 m indietro.*

Dans certains cas, notamment dans la catégorie 6, il subsiste une confusion entre aire et périmètre.
Les élèves travaillent sur le périmètre comme s'il s'agissait de l'aire, dans le sens qu'ils le divisent en deux parties, l'une double, pour vérifier ce qui est indiqué dans la déclaration relative à la parcelle destinée respectivement à la pomme de terre ou au haricot vert. Les unités de mesure de longueur et de surface sont confondues, les mesures sont exprimées indifféremment en centimètres ou en mètres et sont mélangées :

*Marco a planté le pieu à 7 m de D, à 12 m de B la part de pommes de terre. Nous avons ajouté 24 m à 18 m et fait 42, nous l'avons divisé en 3 et nous avons fait 14 et c'était la superficie de pommes de terre. Comme la superficie en pommes de terre doit être le double de l'autre côté, nous l'avons divisée par 2 ou 7.*

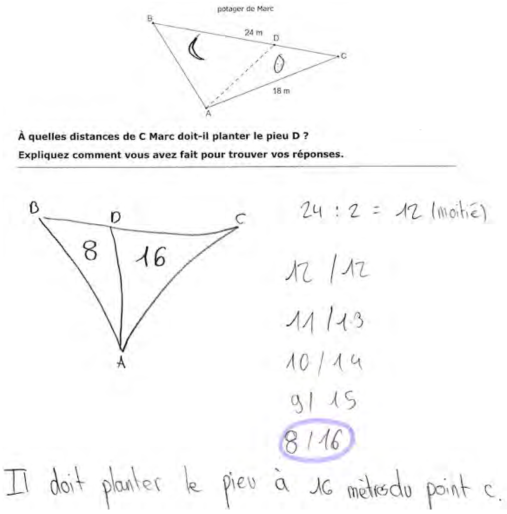
*Réponse : distance C et 14 cm Solution : Nous avons fait 24 + 18 = 42 après : 3 = 14 et la deuxième partie 42 car avant nous avions 24 + 18 = 42 après avoir trouvé le périmètre nous avons trouvé la zone faisant 42 : 3 = 14 et nous avons trouvé la partie des haricots, puis nous avons fait 14 × 2 pour trouver la partie des pommes de terre qui est 28.*

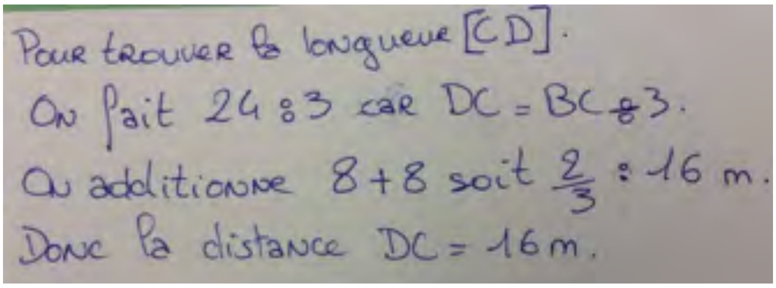
*Nous avons fait 24 + 18 = 42 puis 42 : 3 = 14 m et nous avons trouvé l'aire de culture des haricots verts. 14 × 2 = 28 et nous avons trouvé l'aire de la pomme de terre et le pieu D, nous avons reculé de 4m.*

## Quando la risposta è corretta / Quand la réponse est correcte

Sia a livello della categoria 6 sia a quello di categoria 7, nella maggior parte dei casi, la risposta corretta, pur con spiegazioni spesso non complete, è stata data facendo riferimento solamente alla base del triangolo.

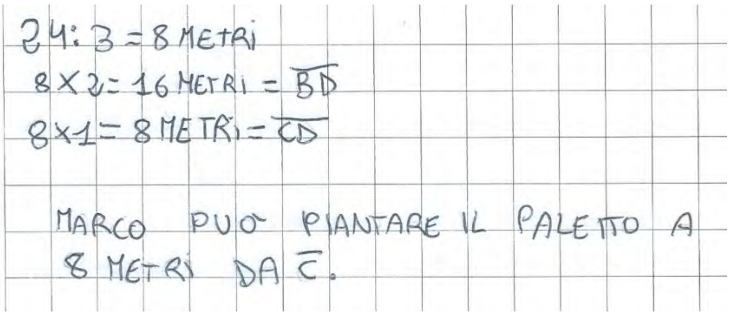
Tant au niveau des catégories 6 que 7, dans la plupart des cas, la réponse correcte, même avec des explications souvent incomplètes, a été donnée en se référant uniquement à la base du triangle.





Pour trouver la longueur [CD].
On fait 24 ÷ 3 car DC = BC ÷ 3.
On additionne 8 + 8 soit $\frac{2}{3}$ = 16 m.
Donc la distance DC = 16 m.

O ancora / ou encore :



24 : 3 = 8 METRI
8 × 2 = 16 METRI = $\overline{BD}$
8 × 1 = 8 METRI = $\overline{CD}$

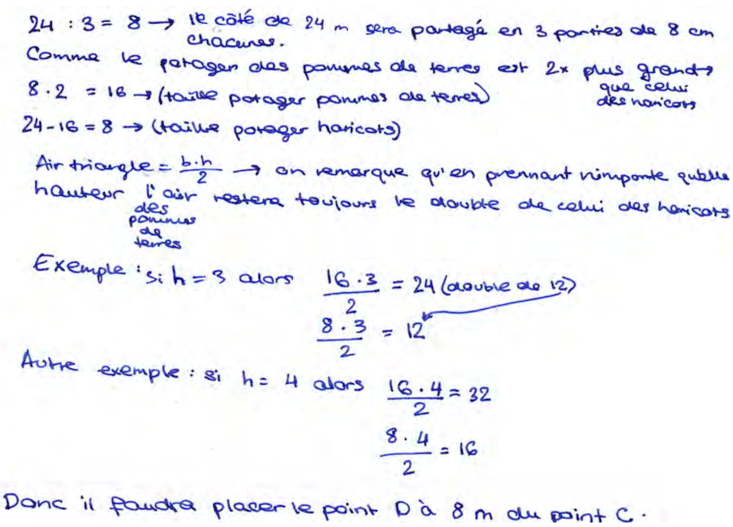
MARCO PUO' PIANTARE IL PALETTO A 8 METRI DA $\overline{C}$.

In effetti, se l'obiettivo principale del problema voleva essere quello di giocare sull'altezza anche di un triangolo ottuso, esterna al triangolo stesso, l'aver poi posto la domanda incentrata solo sulla base, ha spostato l'attenzione dai "triangoli" alle "basi".

En effet, si le but principal du problème était de jouer sur la hauteur d'un triangle obtus, externe au triangle lui-même, le fait que la question concerne uniquement la base, a déplacé l'attention des "triangles" sur les "bases".

In alcuni casi è stata seguita una procedura a partire dall'altezza e poi misure in scala e calcoli delle aree o considerazioni corrette sul "rapporto" tra base e area dei due triangoli come nell'esempio che segue di categoria 7.

Dans certains cas, il a été suivi d'une procédure partant de la hauteur, suivie de mesures d'échelle et de calculs des zones ou de considérations correctes sur la « relation » entre la base et la surface des deux triangles comme dans l'exemple suivant de la catégorie 7.



24 : 3 = 8 → le côté de 24 m sera partagé en 3 parties de 8 cm chacunes.
Comme le potager des pommes de terres est 2× plus grands que celui des haricots
8 · 2 = 16 → (taille potager pommes de terres)
24 - 16 = 8 → (taille potager haricots)
Air triangle = $\frac{b \cdot h}{2}$ → on remarque qu'en prenant nimporte quelle hauteur l'air des pommes de terres restera toujours le double de celui des haricots
Exemple : si h = 3 alors $\frac{16 \cdot 3}{2}$ = 24 (double de 12)
$\frac{8 \cdot 3}{2}$ = 12
Autre exemple : si h = 4 alors $\frac{16 \cdot 4}{2}$ = 32
$\frac{8 \cdot 4}{2}$ = 16
Donc il faudra placer le point D à 8 m du point C.

A partire dalla categoria 7 si incontrano elaborati dove è stato fatto uso del teorema di Pitagora.

En partant de la catégorie 7, on trouve des copies ou le théorème de Pythagore a été utilisé pour rechercher la réponse.

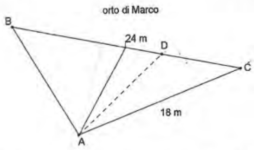
**12. L'ORTO I** (Cat. 6, 7, 8)

Marco ha ereditato un piccolo appezzamento di terreno di forma triangolare, con un lato di 24 metri e un altro di 18 metri. Egli vuole realizzare un orto.

Marco vuole piantare patate e fagiolini dividendo il suo terreno in due parti. L'area della parte riservata alle patate deve essere il doppio dell'area riservata ai fagiolini.

Per separare le due coltivazioni, Marco pianta un paletto in A (vedi figura) e un altro paletto in un punto D sul lato BC e li congiunge con una cordicella.

Ecco il suo primo tentativo, ma Marco non è soddisfatto: l'area di uno dei due triangoli non è il doppio di quella dell'altro




**A quale distanza da C Marco potrebbe piantare il paletto D?**

**Spiegate come avete fatto a trovare le vostre risposte.**

Dati:
$\overline{BC} = 24$ m
$\overline{AC} = 18$ m
Incognita
Distanza tra C e D?

Risolvo
$\overline{AB} = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{24^2 - 18^2} =$
$= \sqrt{252} = 15,8$ m
$A = \frac{18 \cdot 15,8}{2} = 142,2$ m
$142,2 : 3 = 47,4$ m
$47,4 \cdot 2 = 94,8$ m
$24 : 3 = 8$ m
$8 \cdot 2 = 16$ m

Soluzione:
Abbiamo trovato il lato mancante, calcolato l'area e infine diviso l'area e la base per 3 in modo da trovare i dati mancanti rispondendo alla domanda da[...]

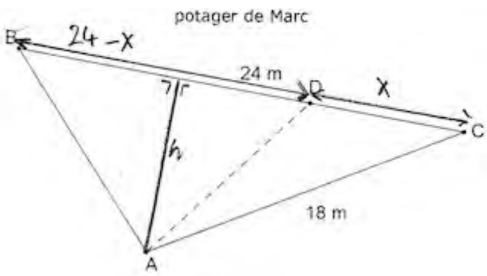
Possiamo peraltro osservare che la procedura passa per un triangolo particolare della famiglia, quello che è rettangolo in A e il cui lato AB misura 15,8 m, cosa che permette agli allievi di calcolare l'area, di dividerla per 3 per trovare le due aree dei triangoli piccoli, ma che poi non hanno utilizzato i risultati di tali operazioni e hanno suddiviso il lato di 24 in 16 e 8.

Ici, nous pouvons toutefois souligner que la procédure est établie pour un triangle particulier de la famille, celui qui est rectangle en A et dont le côté AB mesure 15,8 m, ce qui permet aux élèves de calculer l'aire, de la diviser par 3 pour trouver les deux aires des petits triangles, mais qu'ils n'ont pas utilisé les résultats de ces opérations puisqu'ils ont simplement réparti le côté de 24 en 16 et 8.

## Risposte dei gruppi di allievi di categoria 8 / Réponses de groupes d'élèves de la catégorie 8

Il problema sembra diventare veramente interessante a livello della categoria 8 laddove alcuni gruppi di allievi prendono atto dell'aspetto "generale", come detto più sopra e di conseguenza lo risolvono con una procedura generale che li conduce anche a trovare entrambe le soluzioni.

Le problème semble devenir vraiment intéressant au niveau de la catégorie 8 où certains groupes d'élèves prennent note de l'aspect « général », comme mentionné ci-dessus, et le résolvent par conséquent avec une procédure générale qui les conduit également à trouver les deux solutions.



$\frac{h(24-x)}{2} = \left(\frac{x \cdot h}{2}\right) \cdot 2 \quad | :h$

$\frac{24-x}{2} = x \quad | \cdot 2$

$24 - x = 2x \quad | +x$

$24 = 3x \quad | :3$

$\frac{24}{3} = x = 8$

$S = \{8\}$

Solution 1 : $x = 8\,m$

Solution 2 : $x = 16\,m$

Benché siano rarissimi, anche in categoria 8, i casi di risposta con le due possibili soluzioni, alcuni elaborati, come quello che segue, evidenziano la comprensione del fatto che i triangoli in gioco abbiano la medesima altezza.

Bien que les cas de réponse avec les deux solutions possibles soient très rares, même dans la catégorie 8, certaines copies, comme celle qui suit, soulignent la compréhension du fait que les triangles en jeu ont la même hauteur.


**A quale distanza da C Marco dovrà piantare il paletto D?**
**Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.**

Considerato che la figura va divisa in 2+1 parti dovremo dividere la figura in 3 triangoli
Noi abbiamo capito che i 3 triangoli che componevano la figura avevano la stessa altezza. Inoltre abbiamo raggiunto la conclusione che per modificare l'area e dividerla per 3 dobbiamo dividere la base per 3.

$\frac{2}{3}\overline{BC} = 16\,m$

$\frac{1}{3}\overline{BC} = 8\,m$

Si deduce che il paletto D può essere o a 8m o a 16 m da C

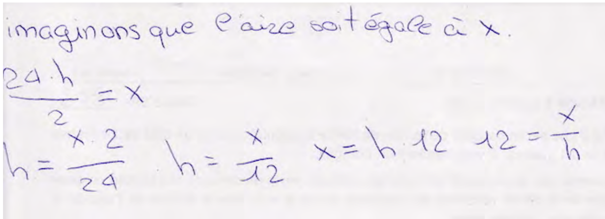
Massimi, Sammarone, Teti, Tomicelli

Va peraltro osservato che il problema non risulta semplice neanche a questo livello scolare dove i risultati sono leggermente migliori rispetto a quelli dei due livelli precedenti

In alcuni casi gli allievi scrivono che è impossibile risolvere il problema perché mancano dei dati. Ma in uno di tali casi (cat. 8), gli allievi cercano di spiegare la "indeterminatezza" del problema con considerazioni interessanti dalle quali però non sanno poi "uscirne"!

On peut également noter que le problème n'est pas simple même au niveau de cette catégorie où les résultats sont légèrement meilleurs que ceux des deux catégories précédentes et où la référence à la hauteur pour sa résolution est plus fréquente surtout par rapport à la catégorie 6.

Dans certains cas, les élèves écrivent qu'il est impossible de résoudre le problème car les données sont manquantes. Mais dans un de ces cas (cat. 8), les élèves tentent d'expliquer « l'indétermination » du problème avec des considérations intéressantes mais, cependant, ils ne savent pas comment « s'en sortir »!


imaginons que l'aire soit égale à x.

$\frac{24 \cdot h}{2} = x$

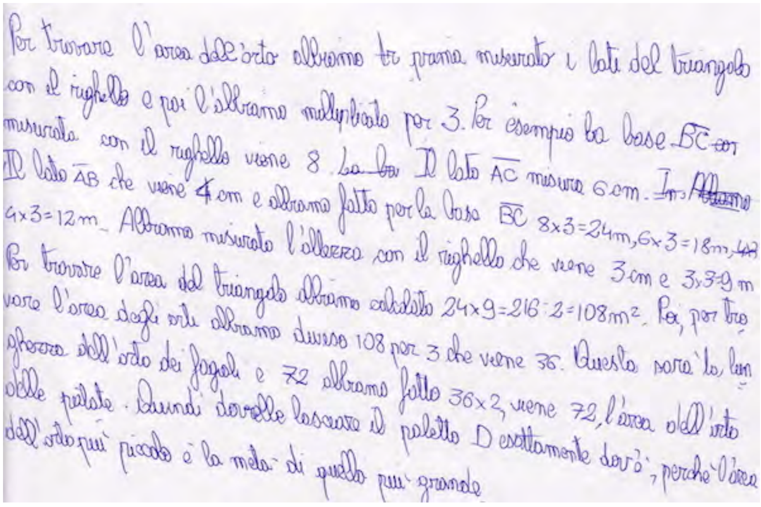
$h = \frac{x \cdot 2}{24}$ $h = \frac{x}{12}$ $x = h \cdot 12$ $12 = \frac{x}{h}$

Sono rimasti "impegolati" in un'equazione a due incognite, impostata peraltro correttamente, ma non hanno fatto il legame con la "proporzionalità" fra l'area del triangolo e la base, nota, di 24 cm, cosa che avrebbe forse permesso loro di risolvere il problema.

Ils sont restés « bridés » dans une équation à deux inconnues, correctement construite, mais ils n'ont pas fait le lien avec la « proportionnalité » entre l'aire du triangle et la mesure de la base, de 24 cm, ce qui leur aurait permis de résoudre le problème.

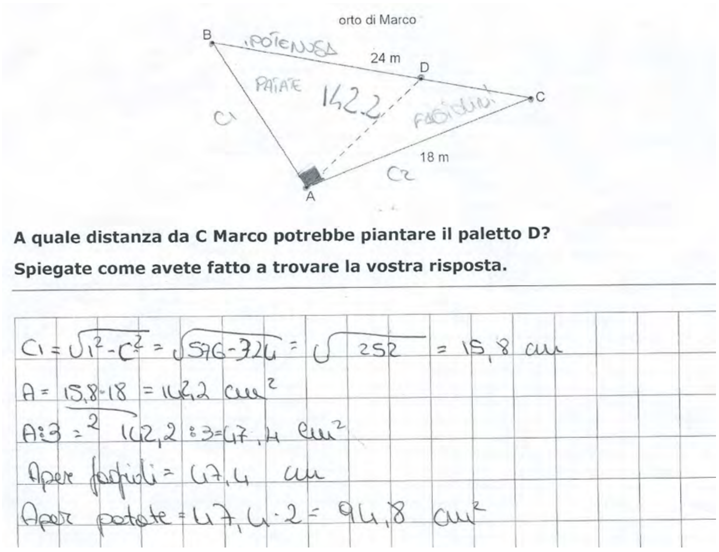
Oppure, come nel caso di un elaborato dove gli allievi, pur avendo calcolato correttamente le aree dei triangoli (con misure prese col righello), hanno dedotto con un controllo approssimativo che il punto dovesse essere lasciato come nella figura dell'enunciato.

Ou bien, comme dans le cas d'une classe où les élèves, bien qu'ils aient correctement calculé les superficies des triangles (avec les mesures prises avec la règle), en ont déduit avec un contrôle approssimatif que le point devrait être laissé comme dans la figure de l'énoncé.


Per trovare l'area dell'orto abbiamo per prima misurato i lati del triangolo con il righello e poi l'abbiamo moltiplicato per 3. Per esempio la base $\overline{BC}$ ~~con~~ misurata con il righello viene 8. ~~La ba~~ Il lato $\overline{AC}$ misura 6 cm. ~~In Abbiamo~~ Il lato $\overline{AB}$ che viene 4 cm e abbiamo fatto per la base $\overline{BC}$ 8x3=24m, 6x3=18m, ~~4x~~ 4x3=12m. Abbiamo misurato l'albero con il righello che viene 3 cm e 3x3=9 m. Per trovare l'area del triangolo abbiamo calcolato 24x9=216:2=108m². Poi, per trovare l'area degli orti abbiamo diviso 108 per 3 che viene 36. Questo sarà la larghezza dell'orto dei fagioli e 72 abbiamo fatto 36x2, viene 72, l'area dell'orto delle patate. Quindi dovrebbe lasciare il paletto D esattamente dov'è, perché l'area dell'orto più piccolo è la metà di quello più grande

In alcuni elaborati, in particolare di categoria 8, gli allievi applicano il teorema di Pitagora per calcolare il terzo lato (cateto), in quanto ritengono che il triangolo sia rettangolo nel vertice A!!!

Dans certaines copies, en particulier de catégorie 8, les élèves appliquent le théorème de Pythagore pour calculer le troisième côté, car ils considèrent que le triangle est rectangle en A !!!




E in questo caso, calcolano poi le due aree.
Dans le cas de cette copie, ensuite ils calculent les deux aires.

## Indicazioni didattiche / Exploitation didactique

Il problema dell’orto, mal riuscito nell’ambito della prova del RMT, assume particolare interesse in un’attività di classe. Nel suo enunciato figurano aspetti di geometria interessanti dal punto di vista didattico.

L’enunciato è un concentrato di aspetti interessanti sulle proprietà dei triangoli. Può aprire la strada a una costruttiva discussione sulla indeterminatezza di un triangolo laddove si conoscano le misure di soli due dei tre lati. E questa indeterminatezza induce anche quella dell’area del triangolo. Un altro aspetto importante è quello legato all’altezza che può essere, come in questo caso, la medesima per due triangoli in cui è diviso il triangolo dato e non è banale dal punto di vista didattico, cogliere il ruolo dell’altezza di un triangolo ottusangolo.

Le problème du potager, mal réussi dans le contexte de la preuve du RMT, revêt un intérêt particulier pour une activité de classe. Son énoncé inclut des aspects de la géométrie qui sont intéressants d'un point de vue pédagogique.

L’énoncé est un concentré d'aspects intéressants sur les propriétés des triangles. Cela peut ouvrir la voie à une discussion constructive sur l’indétermination d’un triangle où les mesures de seulement deux des trois côtés sont connues. Et cette indétermination induit aussi celle de l'aire du triangle. Un autre aspect important est celui lié à la hauteur qui peut être, comme dans ce cas, la même pour les deux triangles qui divisent le triangle donné et il n’est pas banal du point de vue didactique, de saisir le rôle de la hauteur d’un triangle obtus.

Bisogna prendere in considerazione l’analisi della formula “ab/2” e andare al di là della sua applicazione algoritmica: “prendo la base e l’altezza che mi danno (o le misuro), le moltiplico e poi le divido per 2”.

Troppo sovente l’insegnamento si limita a far apprendere la formula in maniera meccanica senza consacrarvi le necessarie riflessioni alla sua gestione critica.

Il faut revenir à l’analyse de la formule « ab/2 » et aller au-delà de son application algorithmique : « je prends la base et la hauteur qu’on me donne (ou je les mesure) je les multiplie puis je divise par 2 ».

Bien souvent, l’enseignement se limite à faire apprendre cette application mécanique de la formule, sans y consacrer les réflexions nécessaires à sa maîtrise.

Bisogna andare alla ricerca di queste lacune nel passato degli allievi delle categorie da 6 a 8, in ambiti diversi:

- Quando è stata introdotta l’area del rettangolo a partire dalle lunghezze dei suoi lati forse non è stato fatto osservare che la moltiplicazione suddetta non è solo quella dei numeri di quadratini, ma anche quella di numeri non necessariamente naturali e, più ancora un’operazione dove due misure di lunghezza conducono a un’altra grandezza: l’area. Inoltre, forse non è stato fatto osservare che se si raddoppia o si triplica… la lunghezza del rettangolo, anche l’area raddoppia o triplica…; che succede la medesima cosa per la larghezza, ma che se si raddoppia o triplica… la lunghezza e la larghezza, l’area non segue più la stessa “regola”!

- Al momento dell'approccio all'area del parallelogramma, forse non si è fatto osservare che la formula è la stessa dell'area del rettangolo.

- Al momento dell'approccio all'area del triangolo, forse non si è fatto osservare il legame tra la formula dell'area del parallelogramma o, più semplicemente che un qualunque triangolo è un semi-parallelogramma e che la sua "altezza" è anche quella del "parallelogramma.

- All'atto delle prime costruzioni del concetto di proporzionalità forse non si è pensato al caso della "proporzionalità multipla", cioè a una grandezza che dipende da diverse altre per il tramite di una relazione moltiplicativa.

Il faut aller rechercher ces lacunes dans le passé des élèves de catégories 6 à 8, dans plusieurs domaines :

- Au moment où a été introduite l'aire du rectangle à partir des longueurs de ses côtés (en nombres entiers) on n'a peut-être pas fait remarquer que la multiplication évoquée n'est pas seulement celle des nombres de carrés, mais aussi celle de deux nombres non naturels et, plus encore une opération où deux mesures de longueurs aboutissent à une mesure d'une autre grandeur : l'aire. On a peut-être aussi négligé de faire constater alors que si on double ou triple … la longueur du rectangle, l'aire double ou triple … également ; que c'est la même chose pour la largeur, mais que si on double ou triple … la longueur et la largeur, l'aire ne double ou ne triple .. pas !

- Au moment d'aborder l'aire du parallélogramme, on n'a peut-être pas fait remarquer que la formule est la même que celle du rectangle.

- Au moment d'aborder l'aire du triangle, on n'a peut-être pas fait remarquer le lien avec la formule de l'aire du parallélogramme ou, tout simplement, que chaque triangle est un demi-parallélogramme et que sa « hauteur » est aussi celle de ce parallélogramme.

- Lors des premières constructions du concept de proportionnalité, on n'a peut-être pas envisagé les cas de « proportionnalité multiples » c'est-à-dire d'une grandeur dépendant de plusieurs autres par une relation multiplicative.

Nel caso dell'area del triangolo c'è una proporzionalità tra le misure della base e dell'area, come anche tra le misure dell'altezza e dell'area. Si ritrova il caso del rettangolo, ma con numeri reali (perché il modello dei quadratini "interi" non funziona) e con la divisione per 2 che agisce sul prodotto (divisione che è lontana da essere percepita come una moltiplicazione per 0,5 o 1/2 e che appare come natura differente dalla moltiplicazione delle due misure).

Se anche tutte queste osservazioni fossero state proposte al momento opportuno, non è inutile riprenderle in una discussione comune sull'area del triangolo insistendo sulla doppia proporzionalità – area e misura della base; area e misura dell'altezza -, la natura delle grandezze in gioco e il passaggio dalle lunghezze alle aree, l'associatività della moltiplicazione dei tre fattori: le due misure e 1/2, …

Dans le cas de l'aire du triangle il y a proportionnalité entre les mesures de la base et de l'aire, comme il y a aussi proportionnalité entre les meures de la hauteur et de l'aire. On retrouve le cas du rectangle, mais avec des nombres réels (parce que le modèle des carrée entiers ne fonctionne plus) et avec la division par 2 qui vient se greffer sur le produit, (division loin d'être perçue comme une multiplication par 0,5 ou 1/2 et qui paraît d'une nature différente de la multiplication des deux mesures).

Mais même si toutes ces remarques ont été faites aux moments opportuns, il n'est pas inutile d'y revenir dans une discussion commune sur l'aire du triangle en insistant sur la double proportionnalité - aire et longueur de la base ; aire et mesure de la hauteur-, la nature des grandeurs en jeu et le passage des longueurs aux aires, l'associativité de la multiplication des trois facteurs : les deux mesures et le 1/2, …

In classe, il problema potrebbe essere completato con un'ulteriore domanda del tipo:
Se il terreno più grande viene venduto a 10000 euro, a quanto deve essere venduto l'altro, allo stesso prezzo a metro quadro?
Questa domanda indurrebbe gli allievi a passare attraverso la ricerca delle aree e a non utilizzare solo il rapporto in seno alla base.
En classe, le problème pourrait être complété par une autre question, telle que :
Si le plus grand terrain est vendu à 10 000 euros, à combien doit être vendu l'autre, au même prix au mètre carré ?

Cette question inciterait les élèves à travailler sur les aires et à ne pas utiliser uniquement le rapport au sein de la base.

# ALLEGATI

**Étude a posteriori : section de Franche-Comté**

Pour permettre d'évaluer l'évolution entre les catégories, 75 copies de chaque niveau ont été observées.

| | **Niveau 6** | **Niveau 7** | **Niveau 8** |
|---|---|---|---|
| **Erreur dans le calcul de l'aire 24*18/2 qui mène à un résultat juste** | 4 | 6 | 0 |
| **Erreur dans le calcul de l'aire 24*18/2 qui mène à un résultat faux** | 3 | 2 | 1 |
| **Confusion périmètre et aire ( notions)** | 5 | 1 | 0 |
| **Confusion périmètre et aire (unités)** | 0 | 2 | 0 |
| **Résultat juste mais explications de la démarche insuffisante** | 28 | 24 | 15 |
| **4 points** | 1 | 0 | 3 |
| **Résultat 6m** | 3 | 0 | 0 |
| **Résultat 12 m** | 4 | 2 | 0 |
| **Démarches non abouties (pas de réponses)** | 5 | 4 | 0 |
| **Utilisation d'une figure** | 3 | 9 | |
| **Aucun engagement** | 11 | 11 | 10 |
| **Essais de Calcul de AB** | 3 | 2 | En utilisant Pythagore : 15 |
| **Tentative d'utiliser la Proportionnalité** | De nombreuses prises de mesures sur la figure mais sans faire appel à la proportionnalité ensuite | 8 | 5 |
| **Référence à la hauteur ( plus précisément que dans une formule citée** | 8 | 12 | 24 |

**Sintesi analisi a posteriori-Sezione di Rozzano**

| Categoria | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|
| **Uso del lato per trovare l'area** | 4<br>8,7 % | 1<br>2,4% | 3<br>11,5% |
| **Procedura che traccia l'altezza ma poi non ne tiene conto** | 1<br>2,2% | 1<br>2,4% | |
| **Procedura con considerazioni solo sulla base** | 10<br>21,7% | 3<br>7,1% | |
| **Solo calcoli sulla misura della base** | 9<br>19,5% | 6<br>14,3% | 10<br>38,5% |
| **Tentativo di calcolare l'altezza utilizzando il teorema di Pitagora** | | 4<br>9,5% | 2<br>7,7% |
| **Procedure che applicano Pitagora come se il vertice A fosse di un angolo retto** | | 4<br>9,5% | |
| **Tentativo di costruzione di altri poligoni per trovare l'area** | | 1<br>2,4% | 2<br>7,7% |
| **Procedure con considerazioni corrette su basi, altezze e area** | 1<br>2,2% | 2<br>4,8% | 1<br>3,8% |

**Sintesi analisi a posteriori-Cat. 6 Sezione di Siena**

| PROCEDURE DI RISOLUZIONE | | Punti 0 | Punti 1 | Punti 2 | Punti 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nessuna risposta** | | 47 elaborati | | | |
| **Incomprensibile** | | 1 elaborato | | | |
| **Determinazione dell'area dell'orto** | **Senza calcoli** | 1 elaborato | | | |
| | **Moltiplicate le misure dei due lati BC e AC o AB** | 9 elaborati | | | |
| | **Moltiplicate le misure dei tre lati** | 2 elaborati | | | |
| | **Somma di 2 lati noti diviso 3 o 2** | 4 elaborati | | | |
| | **Procedimento non esplicitato** | 9 elaborati | | | |
| | **Con misure prese sulla figura** | 1 elaborato | | | 1 elaborato |
| **Confusione tra i concetti di area e di perimetro** | | 2 elaborati | | | |
| **Ritenere che la distanza DC rappresentata sia giusta** | | 1 elaborato | | | |
| **Errato procedimento per suddividere il lato di 24 m in 2 parti una doppia dell'altra** | **Divisione a metà per 2 volte** | 14 elaborati | | | |
| | **Si divide a metà e si moltiplica per 3** | 1 elaborato | | | |
| | **Divisione a metà del lato** | 7 elaborati | | | |
| **Calcolo della misura del terzo lato** | **Tramite differenza tra le due misure presenti** | 6 elaborati | | | |
| | **Tramite proporzione** | 4 elaborati | | | |
| | **Somma diviso 3** | 1 elaborato | | | |
| **Presenza di un disegno dell'orto con suddivisioni sbagliate** | | 1 elaborato | | | |
| **Suddivisione grafica sul disegno dell'enunciato senza calcoli** | **Nessuna soluzione** | 1 elaborato | | | |
| | **Trovata una soluzione** | | 1 elaborato | | |
| **Errata lettura del disegno** | **Considerare AD l'altezza del triangolo** | 1 elaborato | | | |
| **Assenza di controllo del risultato** | **La distanza DC viene espressa con misure troppo grandi o troppo piccole** | 5 elaborati | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Divisione di angoli** | | 4 elaborati | | | |
| **Uso di misure prese sulla figura per trovare distanza DC** | | 6 elaborati | | | |
| **Distanza da punto C espressa in cm** | | | 5 elaborati | | |
| **Uso della proporzionalità** | | | 1 elaborato | | |
| **Il lato di 24 m viene diviso correttamente in due parti una doppia dell'altra** | **Si fa riferimento al fatto che l'altezza dei due triangoli è uguale** | | | 2 elaborati | 9 elaborati |
| | **Non si fa riferimento al fatto che l'altezza dei due triangoli è uguale** | | 1 elaborato | 111 elaborati | |
| | **Dopo aver iniziato lo svolgimento calcolando area e perimetro con dati sbagliati** | | | 15 elaborati | |
| **Per tentativi** | | | | 1 elaborato | |

**Sintesi analisi a posteriori-Cat. 7 Sezione di Siena**

| **PROCEDURE DI RISOLUZIONE** | | **Punti 0** | **Punti 1** | **Punti 2** | **Punti 3** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Nessuna risposta** | | 58 elaborati | | | |
| **Determinazione dell'area dell'orto** | **Moltiplicate le misure dei due lati BC e AC o AB** | | | | |
| | **Calcolo errato dell'area che non viene utilizzata, ma si divide il lato BC in due parti una doppia dell'altra** | 8 elaborati | 3 elaborati | 4 elaborati | 6 elaborati |
| | **Calcolo dell'area con procedimento sbagliato** | 25 elaborati | | | |
| | **Procedimento non esplicitato** | 3 elaborati | | | |
| | **Con misure prese sulla figura** | 8 elaborati | | | |
| **Errato procedimento per suddividere il lato di 24 m in 2 parti una doppia dell'altra** | **Divisione a metà per 2 volte** | 3 elaborati | | | |
| | **Divisione a metà del lato** | 6 elaborati | | | |
| **Suddivisione grafica sul disegno dell'enunciato senza calcoli** | **Nessuna soluzione** | 12 elaborati | | 1 elaborato | |
| | **Trovata una soluzione** | | 1 elaborato | | |
| **Il lato di 24 m viene diviso in due parti correttamente** | **Diviso in due parti anche il lato AC** | 1 elaborato | 1 elaborato | | |

In merito alla **cat. 8**, **l'analisi degli elaborati della sezione di Siena** è stata svolta senza ricorso a tabelle e parte delle considerazioni e osservazioni si trovano nel testo più sopra presentato.

| RISULTATI CATEGORIA 8 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punti | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Totale protocolli |
| Numero elaborati | 76 | 20 | 33 | 43 | 6 | 178 |
| Percentuali | 42.7 | 11.2 | 18.5 | 24.2 | 3.4 | 100% |

**Sintesi analisi a posteriori – Cat. 6 sezione di Sassari**

| Procedure di risoluzione | Punti 0 | Punti 1 | Punti 2 | Punti 3 | Punti 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Incomprensione** | 1 elaborato | | | | |
| **Nessuna risposta** | 7 elaborati | | | | |
| **Calcolo delle aree con la misura dei lati** | 3 elaborati | | | | |
| **Confusione tra area e perimetro** | 2 elaborati | | | | |
| **Procedura che traccia l'altezza ma poi non ne tiene conto** | 3 elaborati | | | | |
| **Procedura con considerazioni solo sulla base** | 9 elaborati | 1 elaborato | 1 elaborato | | |
| **Presenza di un disegno con suddivisione sbagliate** | 1 elaborato | | | | |
| **Il lato di 24 m viene diviso in due parti una doppia dell'altra** | | | | 1 elaborato | |
| **Solo calcoli sulla misura della base** | | 1 | | | |
| **Tentativo di calcolare l'altezza utilizzando il teorema di Pitagora** | | | | | |
| **Procedure che applicano Pitagora come se il vertice A fosse di un angolo retto** | | | | | |
| **Tentativo di costruzione di altri poligoni per trovare l'area** | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Procedure con considerazioni corrette su basi, altezze e area** | | | | | |

**Sintesi analisi a posteriori -Cat.7 sezione di Sassari**

| Procedure di risoluzione | Punti 0 | Punti 1 | Punti 2 | Punti 3 | Punti 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Incomprensione** | 3 elaborati | | | | |
| **Nessuna risposta** | 8 elaborati | | | | |
| **Calcolo delle aree con la misura dei lati** | 2 elaborati | 1 elaborato | | | |
| **Confusione tra area e perimetro** | | | | | |
| **Procedura che traccia l'altezza ma poi non ne tiene conto** | | | | | |
| **Procedura con considerazioni solo sulla base** | 5 elaborati | 1 elaborato | 2 elaborati | | |
| **Presenza di un disegno con suddivisione sbagliate** | | 1 elaborato | | | |
| **Il lato di 24 m viene diviso in due parti una doppia dell'altra** | | | 6 elaborati | 2 elaborati | |
| **Solo calcoli sulla misura della base** | | | | | |
| **Tentativo di calcolare l'altezza utilizzando il teorema di Pitagora** | | | | | |
| **Procedure che applicano Pitagora come se il vertice A fosse di un angolo retto** | 2 elaborati | | | | |
| **Tentativo di costruzione di altri poligoni per trovare l'area** | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Procedure con considerazioni corrette su basi, altezze e area** | | | | | |

**Sintesi analisi a posteriori-Cat. 8 Sezione di Sassari**

| Procedure di risoluzione | Punti 0 | Punti 1 | Punti 2 | Punti 3 | Punti 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Incomprensione** | 2 elaborati | | | | |
| **Nessuna risposta** | 3 elaborati | | | | |
| **Calcolo delle aree con la misura dei lati** | 2 elaborati | 1 elaborati | | | |
| **Confusione tra area e perimetro** | | | | | |
| **Procedura che traccia l'altezza ma poi non ne tiene conto** | | | | | |
| **Procedura con considerazioni solo sulla base** | | | | | |
| **Presenza di un disegno con suddivisione sbagliate** | 1 elaborato | | | | |
| **Il lato di 24 m viene diviso in due parti una doppia dell'altra** | | | 3 elaborati | 3 elaborati | |
| **Solo calcoli sulla misura della base** | | 1 elaborato | | | |
| **Tentativo di calcolare l'altezza utilizzando il teorema di Pitagora** | 1 elaborato | 1 elaborato | | | |
| **Procedure che applicano Pitagora come se il vertice A fosse di un angolo retto** | 1 elaborato | | | | |
| **Tentativo di costruzione di altri poligoni per trovare l'area** | | | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Procedure con considerazioni corrette su basi, altezze e area** | | | | | 1 elaborato |

# POSTER INCONTRO/POSTER RENCONTRE

# PONT SAINT MARTIN

## Sezione di Siena

## COME ‹‹SPENDERE›› I PROBLEMI DELLA BANCA

**A cura delle coordinatrici[1] e di docenti afferenti alla Sezione**

### Introduzione

La sezione di Siena ha partecipato alla Poster session con un proprio contributo dal titolo ***Come «spendere» i problemi della Banca***: i problemi sono immaginati come un piccolo tesoro che può e deve essere speso sia per la formazione degli insegnanti, sia nell'attività didattica in classe.
La Banca di Problemi dell'ARMT (BP) è uno strumento che gli insegnanti possono usare, se non altro, per ricercare buoni problemi da proporre ai propri studenti, avvalendosi della possibilità di scegliere sia il livello che l'ambito concettuale. Via via che essi acquistano familiarità con la Banca, imparano ad affinare la loro ricerca utilizzando più chiavi di accesso, per obiettivi sempre più mirati.
Il poster presentato dalla sezione di Siena raccoglie cinque contributi di insegnanti che mostrano diversi modi e finalità di utilizzo della Banca. Qui di seguito riportiamo una breve presentazione di ciascuno di essi:

- Elena Barlettai, Catiuscia Orienti e Patrizia Sabatini hanno utilizzato la Banca per una ricerca di problemi finalizzata alla costruzione di un percorso in verticale sul nodo concettuale perimetro/area. La messa a punto di tale percorso e la sua sperimentazione in classe sono tuttora in corso e saranno oggetto di un futuro resoconto.
- Fabio Brunelli e Fabiana Ferri hanno scelto un problema della BP e ne hanno evidenziato la versatilità come strumento didattico, sia predisponendo un opportuno materiale, da utilizzare come supporto alla risoluzione, in un'attività laboratoriale per alunni dei primi anni della scuola primaria, sia mostrando, per livelli più alti, la possibilità di un suo sviluppo in ambito algebrico/geometrico.
- Antonella Castellini, docente formatrice, ha utilizzato la BP in un ciclo di incontri di formazione in didattica laboratoriale della matematica sul tema "Frazioni", rivolto a docenti di scuola dell'infanzia, primaria e secondaria di primo grado.
- Serena Guerri, Emma Massi e Sara Missanelli hanno presentato un'attività condotta in una classe prima di un liceo scientifico attraverso un percorso con problemi della Banca scelti nell'ambito Algebra, finalizzata alla costruzione del concetto di equazione che ne faccia scoprire "senso" e "significato" a partire dalla risoluzione di problemi. L'esperienza è stata motivata dalla constatazione che gli studenti arrivano dalla scuola secondaria di primo grado avendo anche acquisito una certa familiarità con la "tecnica" risolutiva delle equazioni di primo grado, ma molto poco abituati ad utilizzare le equazioni per risolvere problemi.
- Angela Mecacci ha utilizzato la BP per l'ideazione e la realizzazione di un progetto all'interno del PON[2] sul recupero e potenziamento delle competenze matematiche di base, che ha coinvolto una trentina di allievi dai 7 ai 12 anni del suo istituto scolastico. Questa esperienza è stata presentata e commentata da Angela anche nello spazio dedicato alla Tavola rotonda dal titolo ***"La Banca di problemi: una risorsa per la didattica"***.

**1. Dalla Banca di Problemi al Laboratorio in atto** *(a cura di Fabio Brunelli e Fabiana Ferri)*
Il nostro lavoro è partito da due problemi della I Prova del 26° RMT, ***Giochi di Ragni (I)*** e ***Giochi di Ragni (II)***, i cui testi sono di seguito riportati.

[1] Coordinatrici Sezione Siena: *Carla Crociani, Lucia Doretti, Francesca Ricci, Lucia Salomone, Rita Spatoloni*

[2] PON è l'acronimo di Programma Operativo Nazionale 2014-2020 "*Per la Scuola. Competenze e ambienti di apprendimento"*. Il Programma è finanziato dai Fondi Strutturali Europei e contiene le linee strategiche prioritarie per il settore dell'istruzione.

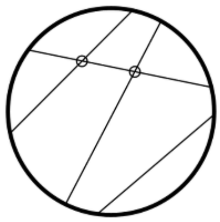
## GIOCHI DI RAGNI (I) (Cat. 3, 4) 26.I.2

Tre simpatici ragnetti Arach, Tipsy e Filomena hanno trovato dei cerchi in un vecchio granaio e fanno una gara di fili.

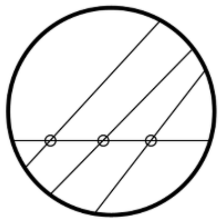
Ognuno di loro deve tirare quattro fili, ben tesi, tra i bordi del suo cerchio. Vincerà chi riuscirà a fare più incroci con i suoi quattro fili.

Ecco i cerchi di Arach e di Tipsy con i quattro fili e gli incroci (segnati con dei cerchietti).

Arach ha solo 2 incroci

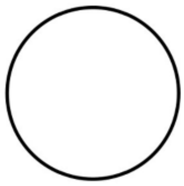


Tipsy ne ha 3



Filomena assicura che riuscirà ad ottenere più incroci di Tipsy, sistemando meglio i suoi quattro fili.

Cerchio di Filomena:



**Qual è il più grande numero di incroci che Filomena potrà ottenere con i suoi quattro fili?**

**Disegnate nel cerchio di Filomena i quattro fili che potrà tendere per avere il più gran numero di incroci possibile.**

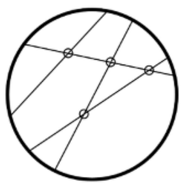
## GIOCHI DI RAGNI (II) (Cat. 5, 6) 26.I.7

Due simpatici ragnetti Arach e Tipsy hanno trovato dei cerchi in un vecchio granaio e fanno una gara di fili.

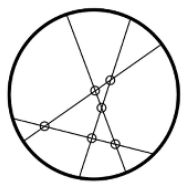
Ognuno di loro deve tendere quattro fili, in linea retta, tra i bordi del proprio cerchio. Vincerà chi riuscirà a fare più incroci con i suoi quattro fili.

Ecco i cerchi di Arach e Tipsy con i quattro fili e gli incroci (sono indicati con dei cerchietti)

Arach ha solo 4 incroci:



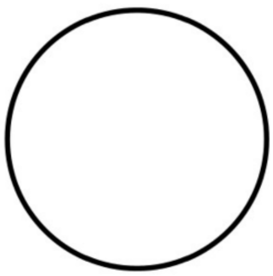
Tipsy, la vincitrice ha ottenuto 6 incroci:



Il giorno dopo, i nostri due ragni, che avevano trovato il gioco molto interessante, ricominciano su cerchi più grandi. Decidono questa volta di tirare ognuno sei fili.

**Qual è il numero massimo di incroci che potranno ottenere con sei fili?**

**Disegnate i sei fili sul cerchio disegnato qui sotto per avere il più gran numero possibile di incroci e dite come l'avete trovato.**



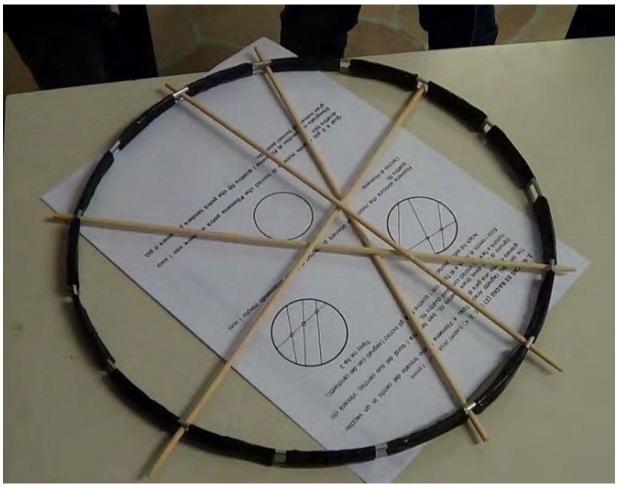
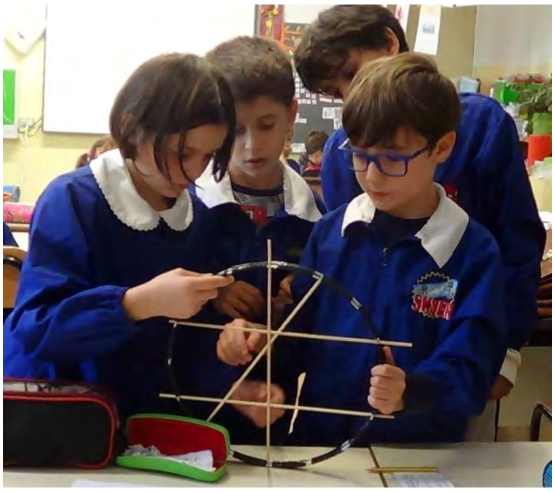
Nella tabella seguente sono raccolti i risultati della Sezione di Siena.

| Cat. 3 Punti | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | *Totale protocolli* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Numero protocolli | 3 | 41 | 26 | 11 | 25 | *106* |
| Percentuali | 2,83% | 38,67% | 24,52% | 10,37% | 23,58% | *100%* |
| | | | | | | |
| **Cat. 4** Punti | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | *Totale protocolli* |
| Numero protocolli | 2 | 34 | 34 | 8 | 54 | *132* |
| Percentuali | 0,01 | 25,75 | 25,75 | 0,06 | 40,90 | *100%* |
| | | | | | | |
| **Cat. 5** Punti | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | *Totale protocolli* |
| Numero protocolli | 17 | 35 | 32 | 23 | 25 | *132* |
| Percentuali | 12,87 | 26,51 | 24,24 | 17,42 | 18,93 | *100%* |
| | | | | | | |
| **Cat. 6** Punti | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | *Totale protocolli* |
| Numero protocolli | 51 | 59 | 97 | 60 | 18 | *267* |
| Percentuali | 19,10 | 22,09 | 36,32 | 22,47 | 6,74 | *100%* |

Riguardo al problema *Giochi di ragni (I)*, si osserva che i risultati migliorano dalla Cat. 3 alla Cat. 4. Al contrario, per il problema *Giochi di ragni (II)* nel passaggio dalla Cat. 5 alla Cat. 6 i risultati peggiorano. Il fatto può apparire strano, ma non ci sorprende, perché lo abbiamo già riscontrato altre volte, come confermato dalle statistiche internazionali dei risultati della gara o evidenziato in articoli e resoconti di sperimentazioni.

Abbiamo voluto trasformare il problema in una attività laboratoriale di tipo anche manipolativo per gli alunni dei primi anni della scuola primaria (primo e secondo anno) che servisse loro come supporto per la risoluzione. Per fare questo abbiamo realizzato un (doppio) cerchio metallico che poteva essere attraversato da bacchette di legno. Nel (doppio) cerchio era stata infatti praticata una successione di fori per poter infilare le bacchette. Ci siamo però resi conto che il modello aveva un grosso limite: le posizioni in numero finito, e strettamente determinate dai fori presenti nella struttura circolare, delle bacchette rispetto al cerchio.

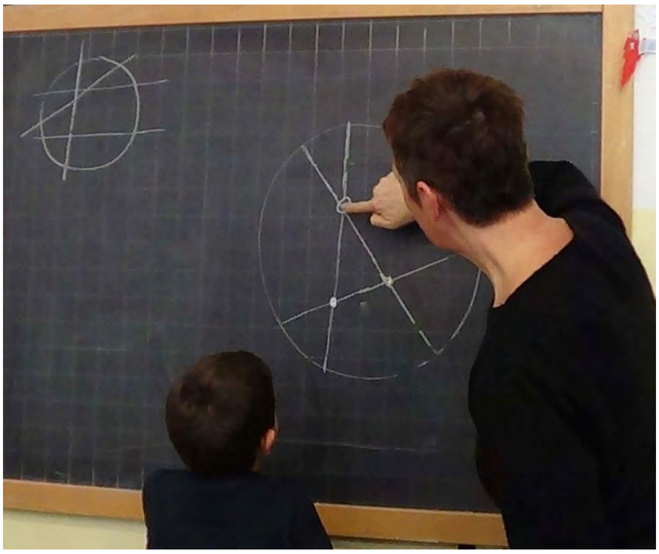
L'artefatto è stato comunque sperimentato con qualche successo in una classe prima primaria (alunni di 6 anni) di Firenze.

Gli alunni sono stati divisi in gruppi di quattro. Ogni gruppo aveva a disposizione un cerchio metallico su cui lavorare. Al termine della risoluzione del problema, ottenuta manipolando il materiale, ad ogni alunno è stato richiesto di rappresentare sul proprio quaderno con un disegno la soluzione trovata. Le attività dei gruppi sono state raccontate alla lavagna e sono state oggetto di elementari argomentazioni da parte dei piccoli allievi.

Abbiamo però anche osservato che ai bambini piaceva a tal punto il manufatto che tendevano a giocare con esso, dimenticando il problema matematico e ciò che era loro richiesto!

Per superare le difficoltà descritte abbiamo realizzato un nuovo modello, nel quale il cerchio è stato disegnato su un foglio di cartone e i fili sono stati ottenuti con sottili strisce di cartoncino nero, facilmente realizzabili e quindi disponibili in gran numero. Il vantaggio principale dell'uso delle strisce di cartoncino da appoggiare sul cerchio è stato senza dubbio la possibilità di disporle come si desiderava (recupero della "continuità" delle posizioni).



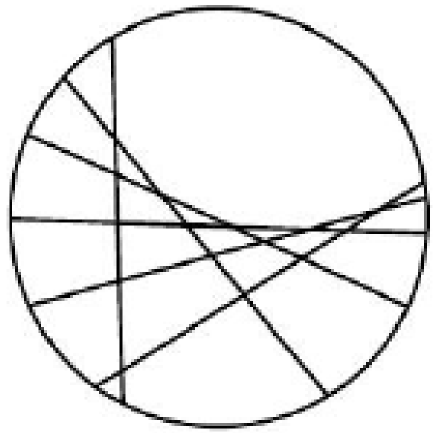
Questa seconda versione è stata presentata durante la poster session al 22° Incontro dell'ARMT a Pont-Saint-Martin (Aosta) nell'ottobre 2018 e, in precedenza, in qualche corso di formazione per insegnanti.
Nell'utilizzo in classe, l'artefatto "leggero" sembra dare risultati buoni e permette ai bambini di conservare la soluzione trovata, attaccandola materialmente sul quaderno con nastro adesivo.

## Sviluppi per le classi successive

Abbiamo osservato che il problema si presta ad una interessante generalizzazione che nasce da domande di questo tipo: *"E se il numero dei fili aumenta, cosa accade? Se i fili sono 10, riusciamo ancora a realizzare una figura e a contare gli incroci, ma nel caso fossero 20, 50, 100, 1000? Sarà possibile in generale calcolare il numero massimo degli incroci, conoscendo solo il numero dei fili?"*

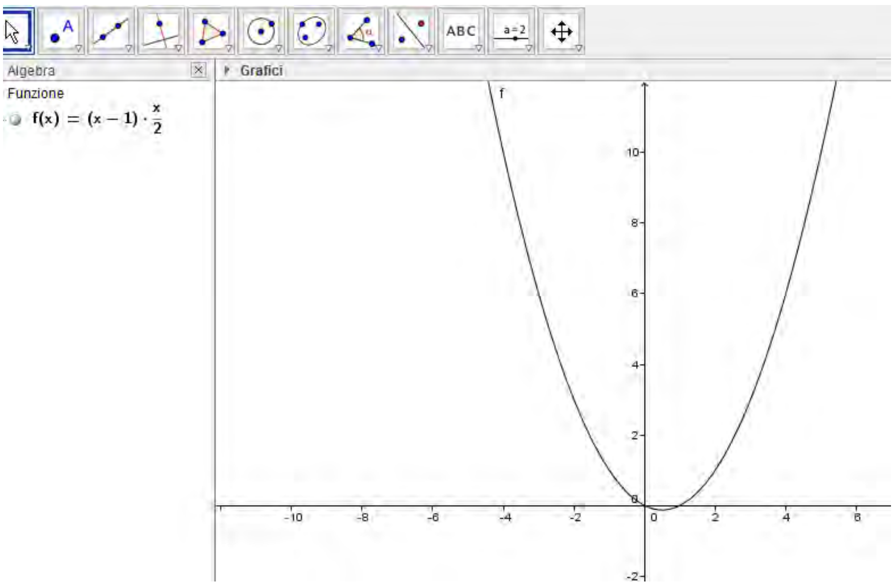
A questi interrogativi risponde una semplice modellizzazione algebrica:

| Numero dei fili | Numero degli incroci |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1+2 = 3 |
| 4 | 3+3 = 6 |
| 5 | 6+4 = 10 |
| 6 | 10+5 = 15 |
| … | … |
| n | $\dfrac{(n-1)\times n}{2}$ |



Nella figura a destra l'intreccio di sei fili che formano quindici nodi

La somma dei primi n numeri, come è noto (problema del giovane Gauss), è data dalla formula
$[n\times(n+1)]/2$ e quindi la somma dei primi n-1 numeri sarà espressa da $[(n-1)\times n]/2$.
La formula ci riporta ad una funzione, che definita per qualunque numero reale, ha per grafico la parabola sotto riportata: per ogni intero positivo n, l'ordinata del punto del grafico della parabola di ascissa n rappresenta proprio il numero degli incroci di n fili.




Questo interessante sviluppo del problema potrebbe essere trattato in classi di categorie 8, 9 e 10.

**Conclusione**
Come sempre, i problemi "buoni", e la Banca ce ne offre in grande quantità, si possono utilizzare a livelli scolastici differenti e con obiettivi diversificati secondo le necessità del percorso didattico scelto dall'insegnante per la propria classe.

**2. Banca di Problemi: dove, come e perché** *(a cura di Antonella Castellini)*

Ho proposto alcuni problemi tratti dalla Banca dell'ARMT durante una serie di incontri di formazione in didattica laboratoriale della matematica in un Istituto Comprensivo della provincia di Arezzo nell'A.S. 2017-18. Il tema scelto dal dipartimento di matematica dell'Istituto è stato LE FRAZIONI e agli incontri hanno partecipato docenti dei tre ordini scolari (dalla scuola dell'infanzia alla secondaria di primo grado).

L'argomento è uno dei nodi concettuali fra i più critici ed è corretto che sia trattato in verticale. I vari aspetti del concetto di frazione, infatti, vengono spesso affrontati separatamente dando l'idea che si tratti di "contenuti totalmente diversi". La scelta allora di lavorare sullo stesso concetto da vari punti di vista ha permesso in modo efficace di coglierne significati e collegamenti.

La frazione come "parte/tutto" è l'aspetto più accessibile e maggiormente trattato alla scuola primaria, che però può "portarsi dietro" *misconcetti* pesanti (l'uguale come congruenza) e puri meccanicismi applicativi (dividere l'intero per il denominatore e moltiplicare per il numeratore) senza che si comprenda il senso dell'azione.

Ho proposto l'attività con i problemi della Banca nell'incontro terminale del percorso di formazione. Ho scelto di far lavorare gli insegnanti sui problemi del RMT perché mi sono sembrati un ottimo strumento per stimolare un confronto ed una discussione collettiva sul tema trattato e, nel contempo, per sollecitare negli stessi insegnanti una riflessione critica sulla propria azione didattica.

Ho scelto i problemi seguenti (i testi sono riportati in Appendice al contributo) perché mi permettevano di puntare l'attenzione sulle criticità emerse e di legare all'aspetto aritmetico anche quello geometrico.

- La torta di nonna Lucia (Cat. 4, 5, 6) 22.II.06
- La torta quadrata (Cat. 3, 4) 22.F.01
- Fette di torta Cat. 6, 7, 8) 22.F.10
- Puzzle II (Cat. 5, 6) 17.II.08

L'attività si è svolta a gruppi, ciascuno dei quali comprendeva docenti dei tre ordini scolari. Ho eliminato da ogni problema la categoria e ho consegnato i quattro problemi a tutti i gruppi.

Il compito da svolgere in ogni gruppo era così articolato:

- risolvete il problema
- confrontate le vostre modalità di risoluzione
- stabilite in quale classe lo dareste così com'è e perché
- su quale aspetto di frazione vi sembra che agisca maggiormente
- esprimete un giudizio sulla validità o la criticità del problema in relazione al tema affrontato
- quali cambiamenti proporreste per adeguare il problema alla vostra classe

Durante l'attività ho seguito i vari gruppi ascoltando le loro riflessioni e le discussioni molto ben argomentate. Interessante è stato il confronto sulla modalità di risoluzione. Ad esempio, per *La torta di nonna Lucia*, i docenti della scuola secondaria facevano riferimento per lo più al concetto di area e ne calcolavano il valore con le formule, mentre i docenti dei livelli inferiori procedevano in gran parte per equiscomponibilità.

Questo fatto ha confermato l'importanza dell'insegnamento *a spirale* di Bruner, in cui si parte da un aspetto più familiare e concreto di un concetto da costruire, per poi procedere sempre più verso l'astrazione e la generalizzazione, ritornando più volte, durante il percorso scolastico, sul concetto stesso in modo sempre più complesso e articolato. Una modalità di questo tipo permette una continua ricostruzione della conoscenza, che è quello che è accaduto ai docenti stessi nel corso della formazione.

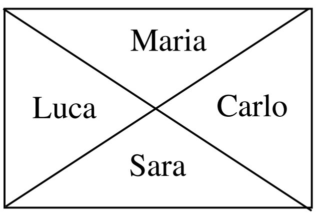
L'aver sperimentato, inoltre, come un problema riesca a far emergere situazioni di apprendimento significative ha rafforzato nei docenti l'importanza di far parte di un Istituto Comprensivo per la possibilità che questo offre di lavorare in sinergia e in collegamento fra vari ordini scolastici, predisponendo attività di ampio respiro su cui ritornare più volte nel tempo.

**Appendice**

**LA TORTA DI NONNA LUCIA (Cat. 4, 5, 6) 22.II.06**

Nonna Lucia ha preparato una torta rettangolare al cioccolato per la merenda dei suoi nipoti Luca, Carlo, Sara e Maria.

Per darne una fetta ciascuno la divide in questo modo:




Luca e Carlo non sono contenti perché pensano che Sara e Maria abbiano i due pezzi più grandi.

Sara e Maria sostengono invece che ognuno ha ricevuto la stessa quantità di torta.

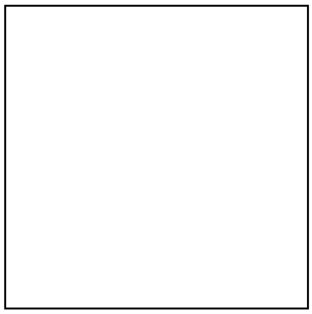
**Chi ha ragione?**

**Mostrate come avete trovato la vostra risposta.**

**LA TORTA QUADRATA (Cat. 3, 4) 22.F.01**

Quattro bambini si ritrovano per mangiare una torta quadrata.
- Ogni bambino vuole chiaramente avere la stessa quantità di torta degli altri;
- due bambini vogliono una fetta di torta di forma quadrata;
- gli altri due bambini vogliono una fetta di torta di forma triangolare.

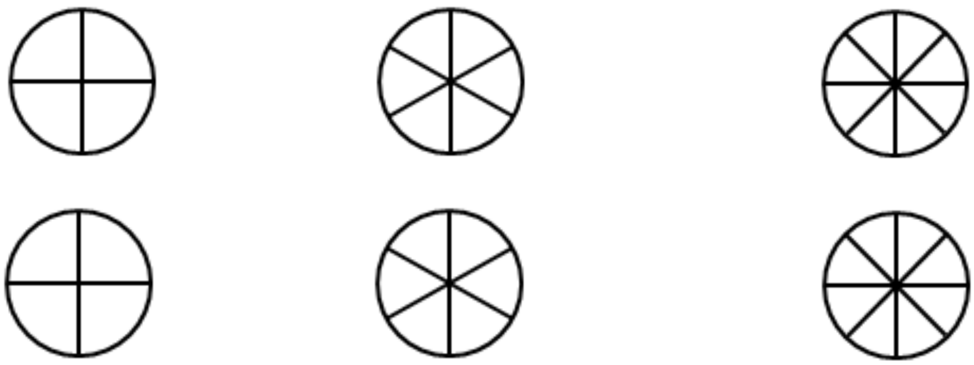
**Disegnate, su questo quadrato, una suddivisione che possa soddisfare ogni bambino:**



**FETTE DI TORTA (Cat. 6, 7, 8) 22.F.10**

Otto amici hanno ordinato sei torte per la merenda. Il pasticciere ha consegnato due torte alle fragole, due torte alle mele e due ai kiwi. Tutte le torte sono della stessa dimensione, ma le torte alle fragole sono già divise in quattro parti uguali, le torte alle mele sono divise in sei parti uguali e quelle ai kiwi divise in otto parti uguali.

Gli otto amici si mettono d'accordo affinché ognuno mangi la stessa quantità di torta, senza dover tagliare altre fette. Ognuno di essi vuole inoltre mangiare due tipi di torta diversi. Siccome sono molto golosi, non rimane nemmeno una fetta di torta.



torte alle fragole torte alle mele torte ai kiwi

**Come possono essersi suddivisi le fette di torta gli otto amici?**

**Indicate tutte le possibilità che avete ottenuto e spiegate il vostro ragionamento.**

**PUZZLE II (Cat. 5, 6) 17.II.08** (il testo è riportato nel contributo di Angela Mecacci).

***3. L'insegnante pioniera… dalla formazione all'azione!*** *(a cura di Serena Guerri, Emma Massi e Sara Missanelli)*

L'attività di seguito presentata nasce dall'esperienza di un'insegnante di scuola secondaria di secondo grado che ha frequentato il corso di formazione di matematica *"Il Rally Matematico Transalpino: un consolidato strumento per rinnovare la didattica"*[3], proposto a docenti della scuola primaria e secondaria di primo e secondo grado

[3] Il corso è stato organizzato dall'Istituto Comprensivo Statale "V. Venturi" di Loro Ciuffenna (AR), all'interno del PON 2014-2020. In tale corso C. Crociani, L. Doretti, S. Salomone, R. Spatoloni sono stati docenti formatori e S. Guerri e S. Missanelli docenti tutor.

dell'area Valdarno aretino. Il corso ha affrontato l'importante tema dell'attività di risoluzione di problemi, caratteristica fondamentale dell'attività matematica.
Gli insegnanti partecipanti, dopo aver conosciuto la storia e le caratteristiche della gara RMT e soprattutto aver apprezzato gli aspetti formativi e didattici che sono alla base del RMT, hanno sperimentato, lavorando in gruppi e partecipando alla correzione collegiale di alcuni elaborati della gara, come i problemi del RMT propongano situazioni per le quali non si dispone di una soluzione immediata e inducano ad inventare una strategia, fare tentativi, verificare, spiegare e giustificare il procedimento utilizzato. Il corso ha offerto, pertanto, l'occasione di riflettere sul contributo costruttivo del RMT riguardo le metodologie di lavoro in classe per l'apprendimento/insegnamento della matematica.
Al di fuori della gara, i problemi possono essere riesaminati con la classe per un'analisi delle procedure utilizzate o per la ricerca di altri possibili percorsi risolutivi; gli stessi quesiti possono essere utilizzati dall'insegnante per rilevare difficoltà incontrate dagli allievi, per la presentazione, sviluppo e approfondimento di concetti, o per la verifica degli argomenti oggetto d'insegnamento. Il RMT offre così agli insegnanti uno strumento per monitorare la propria azione didattica.
A questo scopo l'Associazione Rally Matematico Transalpino mette a disposizione dei suoi utenti una preziosa banca-dati in cui sono raccolti più di un migliaio di problemi, facilmente reperibili grazie alla possibilità di ricerca mediante più criteri: concetto, ambito, famiglia, enunciato, categoria, etc… I docenti possono, quindi, contare su un importante strumento di lavoro quando desiderano utilizzare i problemi RMT fuori dal contesto della gara, per fini prettamente didattici.

**Attività svolta**
L'attività qui esposta, condotta su una classe prima di un liceo scientifico, ha preso forma a seguito della constatazione che gli studenti arrivano dalla scuola secondaria di primo grado al più preparati sulla "tecnica" risolutiva delle equazioni di primo grado, ma in genere non capaci di riconoscere nelle equazioni uno strumento utile nella risoluzione di problemi.
Per gli studenti l'equazione si riduce ad un oggetto matematico di cui devono trovare la soluzione con passaggi, che sanno generalmente applicare, ma di cui non conoscono la giustificazione matematica. L'unica difficoltà che si aspettano è, di fatto, legata solamente al calcolo. Ovviamente saper risolvere un'equazione è importante, ma il concetto di equazione non è fine a se stesso, è quindi opportuno conoscere la sua funzione principale, che è quella di rappresentare e risolvere problemi.
A questo proposito le Indicazioni Nazionali per il primo biennio dei licei scientifici riportano quanto segue: "*Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica. Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni*."

L'obiettivo della nostra attività è stato quindi quello di avvicinare gli allievi a situazioni problematiche risolubili con le equazioni in un modo meno classico e più dinamico, prendendo spunto da contesti che potessero risultare più stimolanti rispetto ai quesiti che si trovano generalmente nei libri di testo.
L'attività si è svolta a piccoli gruppi, simulando la metodologia di una gara del RMT. La Banca, con la sua ampia disponibilità di problemi, distinti per categorie e per contenuto matematico, è stata una fonte preziosa ed essenziale dalla quale trarre gli enunciati più opportuni per costruire un percorso graduale che tenesse conto dell'età degli alunni e soprattutto dei prerequisiti raggiunti nei precedenti percorsi scolastici.

Una prima ricerca all'interno della Banca è stata fatta 'per **concetto**', digitando semplicemente la parola *equazione* e sono apparsi solo 12 enunciati.

**Banca di problemi del RMT**

Richiesta: equazione

**Resultati: da 1 a 12 su 12**

| Titolo | Ambito | Famiglia | S-famiglia | Cat. | Rally | Enunciato |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Al museo | OPN | AM | | 6-10 | 22.II.11 | 22rmtii_it-11 |
| Che cartello strano | FN | MEQ | MEQ/EQ2 | 7-9 | 13.I.14 | 13rmti_it-14 |
| Giocare a FREE CELL | PR | 4P | 4P/PC | 8-10 | 22.I.17 | 22rmti_it-17 |
| Il prato di zio Francesco (II) | FN | MEQ | MEQ/EQ2 | 9-10 | 18.II.19 | 18rmtii_it-19 |
| Il ritorno di Mombo Tappeto | FN | SN | MEQ/EQ2 | 8-10 | 19.I.16 | 19rmti_it-16 |
| La raccolta delle mele | FN | MEQ | MEQ/EQ1 | 9-10 | 22.I.19 | 22rmti_it-19 |
| La squadra di Enrico | OPN | AM | | 7-10 | 22.I.13 | 22rmti_it-13 |
| La terrazza di Giuseppe | GP | LA | | 7-10 | 22.I.16 | 22rmti_it-16 |
| Le due circonferenze | GP | GDE | | 9-10 | 22.II.18 | 22rmtii_it-18 |
| Numeri magici | OPN | AM | | 8-10 | 22.II.17 | 22rmtii_it-17 |
| Strana moltiplicazione | OPN | LAC | | 7-9 | 17.I.14 | 17rmti_it-14 |
| Un mazzo di fiori | AL | MEQ | MEQ/EQ2 | 7-10 | 17.I.15 | 17rmti_it-15 |



Per ampliare l'offerta è stato pertanto necessario indagare all'interno delle famiglie in particolare in MEQ (*"Mettere in equazion*e*"*), dove è stato possibile scegliere i problemi tra una grande varietà proposta.

Gli obiettivi formativi generali sono stati:

- lavorare in gruppo, esprimendo le proprie opinioni ed ascoltando quelle degli altri
- stimolare la ricerca di nuove strategie per l'acquisizione delle conoscenze
- migliorare la capacità di raccolta e rielaborazione dei dati
- sviluppare negli studenti la motivazione all'apprendimento

Gli obiettivi specifici sono stati:

- individuare in un problema dati noti e dati incogniti (con il loro campo di esistenza) e le relazioni esistenti tra di essi
- individuare la relazione chiave tra dati noti e dati incogniti che permette di risolvere un problema
- riconoscere che per risolvere un dato problema si può ricorrere alla scrittura di un'equazione
- riflettere sulla accettabilità di una soluzione nel contesto di un problema reale
- impostare correttamente il problema mettendo in evidenza i dati in ingresso, il procedimento risolutivo e la soluzione finale
- riflettere sul percorso seguito e spiegarlo

I problemi scelti sono stati i seguenti:

**QUANTI ANNI HAI? (Cat. 3, 4) 13.II.02**
Giulio, Tommaso e Lino sono tre fratelli. Antonio vorrebbe conoscere la loro età.
Tommaso gli fornisce queste informazioni:

- io ho 7 anni più di Giulio,
- Lino ha 9 anni più di Giulio,
- se sommi le nostre tre età ottieni 40 anni, che è l'età della nostra mamma

**Qual è l'età di ciascuno dei tre fratelli? Spiegate il vostro ragionamento.**
**UNA GITA AL MARE (Cat. 5, 6, 7) 21.I.09**
Andrea decide di fare una gita al mare, su una spiaggia che dista 120 km da casa sua.
Lungo il percorso si ferma a prendere i suoi amici Bruno e Carlo che l'accompagneranno nel viaggio: dapprima si ferma a prendere Bruno, poi percorre ancora 10 km e si ferma da Carlo.
A questo punto il percorso che deve ancora fare per arrivare al mare supera di 2 km il triplo della distanza già percorsa.
**Qual è la distanza che separa la casa di Bruno dal bordo del mare?**
**Spiegate la vostra risposta.**

**LE ALBICOCCHE** (Cat. 6, 7, 8) 21.II.11
Un gruppo di bambini ha raccolto un bel cesto di albicocche.
I bambini decidono di dividersi tra loro i frutti ed osservano che:

- se prendono tre albicocche ciascuno, ne restano due nel cesto,
- mancano cinque albicocche per poterne prendere quattro ciascuno.

**Quanti sono i bambini?**
**Quante albicocche avevano raccolto?**
**Spiegate come avete trovato le vostre risposte.**

**SALTI DI CANGURO (Cat. 7, 8, 9, 10) 25.F.14**

Mamma canguro esce dalla tana con il suo piccolo nel marsupio e attraversa la radura per raggiungere il ruscello. Procede con andatura regolare compiendo salti di 8 m ciascuno. Al ritorno fa di nuovo esattamente lo stesso percorso procedendo ancora con salti di 8 m. A metà strada, però, si ferma, fa uscire il piccolo dal marsupio e continua il percorso, fino alla tana, saltando insieme a lui con salti regolari di 4 m ciascuno.
Alla fine, mamma canguro, tra andata e ritorno, ha fatto in tutto 135 salti, tra salti di 8 m e salti di 4 m.
**Quanti metri ha percorso il piccolo canguro saltando sulle proprie zampe? Spiegate come avete trovato la vostra risposta.**

**L'ETA' DEL PROFESSORE (Cat.7, 8, 9, 10 ) 19.F.14**

Il professore di matematica propone ai suoi allievi un quesito:
*Calcolate la mia età sapendo che:*
*se raddoppio l'età che avrò fra quattro anni e tolgo 20 all'età che avevo quattro anni fa, la differenza tra i numeri ottenuti è proprio il doppio dell'età che ho adesso!*
*Ora sta a voi trovare la mia età!*
**Qual è l'età del professore? Spiegate come l'avete trovata.**

**ALLA RICERCA DEL NUMERO PERDUTO (Cat. 8, 9, 10) 23.F.16**

Alice e Bernardo hanno una calcolatrice ciascuno.
Cominciano digitando lo stesso numero sulla loro calcolatrice.
Alice digita poi questa sequenza di tasti: $\boxed{\times}\ \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{-}\ \boxed{9}\ \boxed{=}$.
Bernardo, invece, digita quest'altra sequenza: $\boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{+}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$.
A questo punto Alice e Bernardo constatano che sulle loro due calcolatrici è comparso lo stesso risultato.
Stupiti di ciò, decidono di verificare rifacendo i calcoli, ma non si ricordano più qual era il numero che avevano digitato all'inizio sulle loro calcolatrici.
**Qual è questo numero? Spiegate come avete trovato la vostra risposta.**

**Conclusioni**

L'uso dei problemi tratti dalla Banca e della metodologia RMT ha permesso di lavorare su un argomento, inizialmente ostico per gli studenti, in maniera dinamica e divertente. Navigando per "canali" diversi all'interno della Banca si è potuta affinare la ricerca di problemi partendo dal *concetto* di equazione e spaziando in *ambito* e *famiglie*; in questo modo è stato costruito un percorso graduale e misurato sulle caratteristiche degli studenti, tenendo conto del livello di costruzione di conoscenze raggiunto, e senza perdere di vista gli obiettivi didattici prefissati. L'impegno e la partecipazione attiva degli allievi in tutte le varie fasi dell'attività è stato un ulteriore elemento che ci ha mostrato la validità dell'azione didattica intrapresa.

***4. La Banca dei Problemi: una risorsa per la progettazione dei PON*** *(a cura di Angela Mecacci)*

Se consideriamo il primo ciclo di istruzione, la Banca dei problemi del RMT rappresenta attualmente una delle più efficaci risorse per la progettazione didattica in ambito matematico. Tale considerazione deriva da due dati di fatto: sempre più insegnanti attingono dalla Banca problemi interessanti che, grazie alla loro flessibilità, si adattano ad essere proposti in ogni momento dell'attività didattica; i problemi sono accompagnati da un'accurata scheda di analisi del compito, delle competenze coinvolte e delle possibili strategie risolutive, che li rende immediatamente fruibili, mettendone in evidenza le potenzialità.
Nell'esperienza che vado a presentare, queste due caratteristiche hanno reso i problemi del RMT una risorsa irrinunciabile per la progettazione e la realizzazione di un PON sul recupero e potenziamento delle competenze matematiche di base.
Le attività proposte dal PON si pongono un obiettivo chiaro: permettere l'acquisizione delle competenze in un'ottica di inclusione, ponendo un'attenzione particolare agli alunni con problemi di apprendimento o con disagio socio-economico. Anche sotto questo punto di vista i problemi del RMT si presentano come un'opportunità eccezionale, dato che prevedono soluzioni scaturite dal confronto del lavoro di gruppo, dove i tentativi e gli errori sono una tappa fondamentale del processo risolutivo.
Ho progettato e realizzato il Laboratorio PON dal titolo *MATELUDICA* all'interno dell'Istituto Comprensivo 1 di Poggibonsi dove insegno come docente di scuola primaria, collaborando e condividendo ogni scelta con la Prof.ssa Anna Bocci, insegnante di matematica di scuola secondaria di primo grado dello stesso Comprensivo. La scuola aveva imposto dei vincoli alla realizzazione:

- un monte orario complessivo di trenta ore da realizzarsi nell'arco di sette giorni lavorativi consecutivi, nel periodo Giugno-Luglio 2018;
- accogliere come partecipanti gli alunni del Comprensivo 1, sia di scuola primaria che secondaria, fino ad un massimo di trenta iscritti.

Evidentemente alcuni aspetti presentavano delle criticità. Prima di tutto, progettare attività di matematica per alunni dai 7 ai 12 anni non era semplice, data la differenza di età, di competenze acquisite e di esigenze personali. Inoltre, organizzare il lavoro per una durata di almeno quattro ore al giorno mantenendo l'attenzione e, soprattutto, la motivazione degli studenti, ci obbligava a proporre attività coinvolgenti e creative. Dovevamo fare in modo che le difficoltà si trasformassero in opportunità ed è per questo che abbiamo deciso di impostare il laboratorio come un'*officina sulla geometria*, all'interno della quale si affrontano problemi, si costruiscono e si utilizzano strumenti e, con il loro supporto, si cercano soluzioni. In questo percorso di costruzione di nuovi apprendimenti e competenze, i problemi del RMT sono stati usati spesso come provocazione iniziale: gli allievi venivano suddivisi in gruppi eterogenei per età, si proponevano uno o due problemi da risolvere e si offriva loro tutto il materiale possibile per comprendere la situazione e trovare soluzioni.

Naturalmente risulterà chiaro come la scelta dei problemi da proporre fosse la parte più delicata dell'attività, perciò gran parte del tempo dedicato alla progettazione del laboratorio si è spesa selezionando i problemi che più si adattassero alla "officina" che volevamo realizzare. Abbiamo iniziato la ricerca all'interno della Banca selezionando l'ambito della geometria piana, poi ci siamo concentrate su alcune famiglie ed infine abbiamo completato la selezione scegliendo i problemi di categorie medio-basse (dalla cat.3 alla cat.6) che rispettassero il livello dei nostri allievi. Contemporaneamente alla scelta dei problemi abbiamo stilato una programmazione delle attività ad essi correlate ed abbiamo costruito un percorso che comprendesse i seguenti nuclei tematici: orientamento spaziale ed allineamenti, il concetto di angolo e i vari tipi di angolo con un'attenzione particolare all'angolo retto, triangoli, rettangoli, quadrati ed infine, il riconoscimento di poligoni vari.

**I problemi selezionati**

Come evidenziato sopra, la selezione dei problemi su cui lavorare ha determinato con chiarezza il percorso che avremmo seguito nel laboratorio. Raggrupperò tali problemi per tipologia, prendendomi la libertà di compiere aggregazioni arbitrarie, seguendo anche le impressioni e la percezione degli alunni coinvolti.

***Problemi di Puzzle***

Nella Banca del RMT troviamo diversi problemi che prevedono la ricomposizione di poligoni a partire da figure scomposte, come nei puzzles; sono problemi che evidenziano una grande efficacia nelle attività sul concetto di area, di equiestensione e di equiscomponibilità. Inoltre, consentono agli allievi di riprodurre facilmente il problema su carta o cartoncino, in modo da poter verificare concretamente i vari tentativi e le soluzioni corrette.

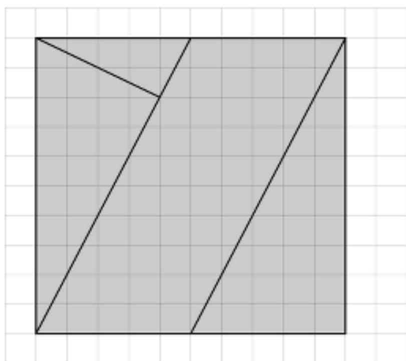
Come esempi proponiamo i problemi ***Puzzle I*** e ***Puzzle II***, presenti nella seconda prova del 17° RMT, poiché mettono in evidenza un altro aspetto importante che caratterizza la costruzione dei problemi del RMT, ovvero la prospettiva di una continuità verticale. A partire dallo stesso testo è stato creato un problema adatto ai bambini più piccoli di 8/9 anni (cat. 3, 4) e un altro, con una richiesta più complessa, che stimolasse gli allievi un po' più grandi di 10/11 anni (cat. 5, 6).

**PUZZLE I (Cat. 3, 4) 17.II.04**

Leo ha riprodotto su un foglio di carta quadrettata il disegno che vedete, poi lo ha tagliato lungo le linee segnate ed ha ottenuto i quattro pezzi di un puzzle.

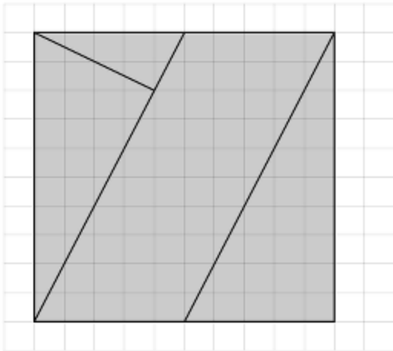
Disponendo in altro modo tutti questi pezzi, Leo riesce a formare un rettangolo.

**Disegnate o incollate questo rettangolo, il più precisamente possibile, sul vostro foglio-risposta, facendo in modo che ciascuno dei pezzi sia ben visibile.**



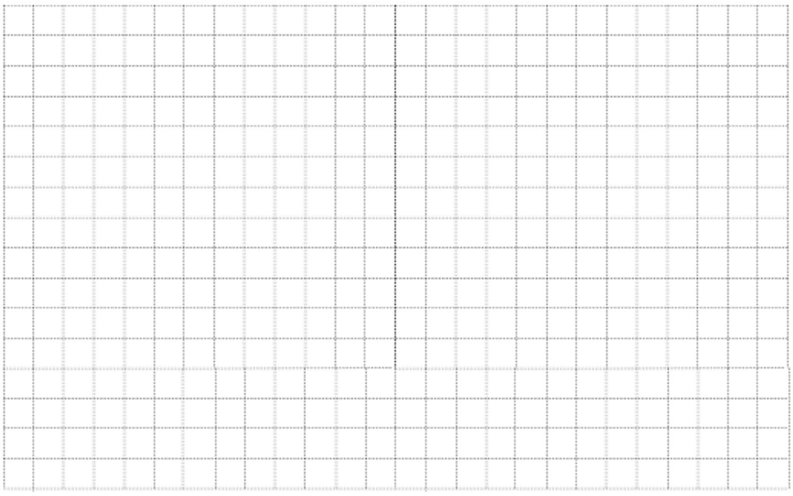
**PUZZLE II (Cat. 5, 6) 17.II.08**

Leo ha riprodotto su un foglio di carta quadrettata il disegno che vedete, poi lo ha tagliato lungo le linee segnate ed ha ottenuto i quattro pezzi di un puzzle costituito da tre triangoli rettangoli e da un parallelogramma.



Disponendo in altro modo questi quattro pezzi, Leo riesce a formare un rettangolo.

**Disegnate questo rettangolo nella quadrettatura qui sotto, in modo che tutti i vertici dei quattro pezzi siano situati precisamente sulle intersezioni delle sue linee.**



Tale proposta rispondeva in pieno all'esigenza del nostro laboratorio di proporre attività interessanti per allievi di età e competenze diverse, dove l'esperienza dei più grandi fosse di supporto per i più piccoli e per i più deboli. Ecco le parole di Noemi (8 anni): *«All'inizio mi veniva sempre un quadrato. Poi ho capito che dovevo fare una figura più lunga. I compagni più grandi mi hanno detto di non farmi ingannare dagli angoli retti ed ho cominciato ad incastrare i triangolini. Alla fine ce l'ho fatta!»*

***Problemi di allineamento***

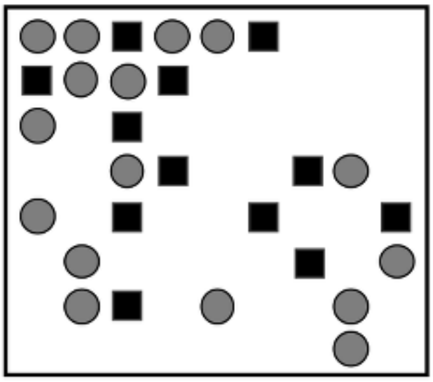
Un'altra tipologia di problemi utilizzata all'interno del laboratorio è stata quella che identificheremo come problemi di allineamento, ma che in taluni casi rispondono più precisamente all'obiettivo della pavimentazione (I gatti 23.I.03, cat. 3,4).

All'interno della Banca è possibile reperire diversi problemi di questo tipo, dai più semplici ai più complessi. Riporterò due esempi secondo me significativi, perché, nonostante fossero previsti più o meno per la stessa categoria, per gli alunni del laboratorio sono risultati molto diversi per complessità.

**CIOCCOLATINI TROPPO BUONI (Cat. 3) 14.F.01**

I cioccolatini di questa scatola erano disposti in modo regolare quando era piena:

- nella prima riga, due cioccolatini tondi al latte erano seguiti da un cremino quadrato al cioccolato fondente, poi da due tondi al latte, poi da un cremino, poi da due tondi al latte, ...
- la seconda riga cominciava con un cremino seguito da due tondi al latte, poi da un cremino,...
- la terza riga era come la prima, la quarta come la seconda e così via.



Alcuni cioccolatini sono già stati mangiati e ne restano solo 28.

**Quanti cioccolatini tondi al latte sono già stati mangiati?**

**E quanti cremini?**

**Spiegate come li avete contati.**

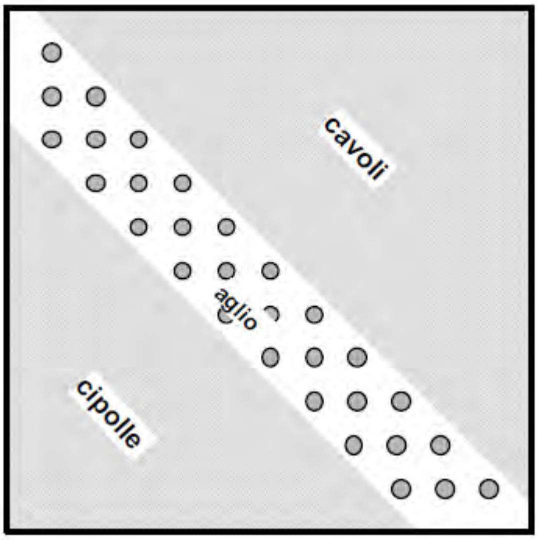
**L'ORTO DELLA NONNA (Cat.3, 4) 06.I.**

Questo è l'orto di forma quadrata che Nonna Papera ha dietro casa. Ha già piantato 30 piantine di aglio e vuole coltivare cavoli e cipolle nelle zone vicine.

Lei è sempre molto ordinata e precisa: le piantine del suo orto devono essere allineate e disposte in modo regolare.

**Quante piantine di cavolo e quante di cipolla dovrà piantare?**

Spiegate il vostro ragionamento.



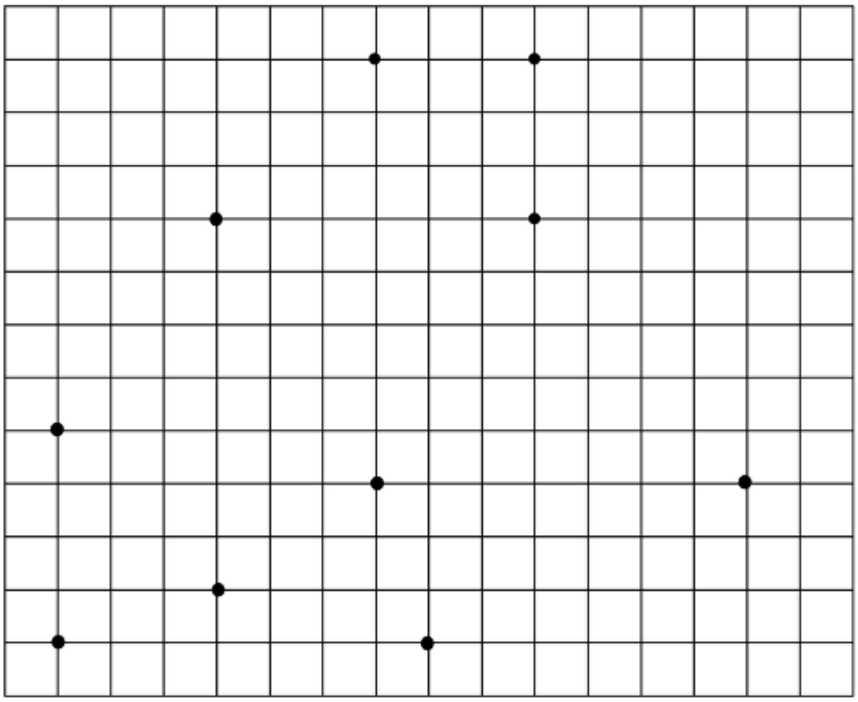

I trenta allievi presenti erano stati suddivisi in entrambi i casi in gruppi eterogenei per età; tutti i gruppi avevano completato correttamente il primo problema "di allineamento", mentre emergeva una grande difficoltà nel risolvere il secondo problema.
Da un'analisi più accurata che ho condotto successivamente intervistando la metà degli allievi presenti in laboratorio e frequentanti il plesso scolastico in cui insegno, ho compreso che il vero problema risultava l'obliquità del disegno presentato. La percezione spaziale e la riproduzione di figure su linee oblique rappresenta un vero ostacolo negli allievi di scuola primaria. Spero che tale considerazione possa stimolare molti insegnanti ad indirizzare i loro sforzi nel creare attività tese al superamento di tale difficoltà o, almeno, a non sottovalutare il problema, che potrebbe risultare di ostacolo a successivi apprendimenti.

***Problemi "di punti"***
L'ultima tipologia di problemi che sono stati proposti all'interno del PON e su cui desidero soffermarmi è quella che impropriamente chiamerò "problemi di punti", poiché tutti accomunati dalla presenza di una griglia "puntata". Sono stati i problemi in cui l'officina ha prodotto i migliori risultati: le griglie "puntate" sono diventate geopiani

da costruire e su cui testare le varie ipotesi che emergevano durante la risoluzione di tali problemi. Chiodi, fili colorati ed elastici hanno coinvolto tutti i ragazzi.
Chiara (10 anni): *"Maestra, posso portarmi a casa la tavoletta costruita e provo a risolvere i problemi che hai dato? Mi diverto e poi li spiego anche a casa mia".*
Matteo (8 anni e mio alunno)*: "Maestra, questi problemi ce li devi dare anche in classe perché sennò gli altri si perdono il meglio!".*

**I DIECI PUNTI** (Cat. 5, 6 ,7) 18.I.0

Ci sono dieci punti segnati qui sotto su una griglia quadrata.
Francesco ne ha trovato quattro che sono i vertici di un rettangolo.



**Individuate questi quattro punti, disegnate il rettangolo in rosso e spiegate perché pensate che sia un rettangolo.**

Anna dice che può disegnare più di un rettangolo i cui vertici sono quattro dei dieci punti dati.

**Che cosa ne pensate?**

Con l'aiuto di questa tipologia di problemi abbiamo iniziato a lavorare sull'angolo retto e, successivamente, su tutti i principali poligoni, constatando sempre più l'efficacia e la creatività di tali proposte.
In più occasioni di discussione con gli allievi è emersa una caratteristica tipica dei problemi del RMT: essi rappresentano l'inizio di un viaggio di scoperta che non sai mai dove ti porta. La risposta alla domanda del problema, ad un certo punto, può diventare l'ultima delle preoccupazioni, perché, ***come in ogni vera conoscenza, il bello è la ricerca e non il risultato!***