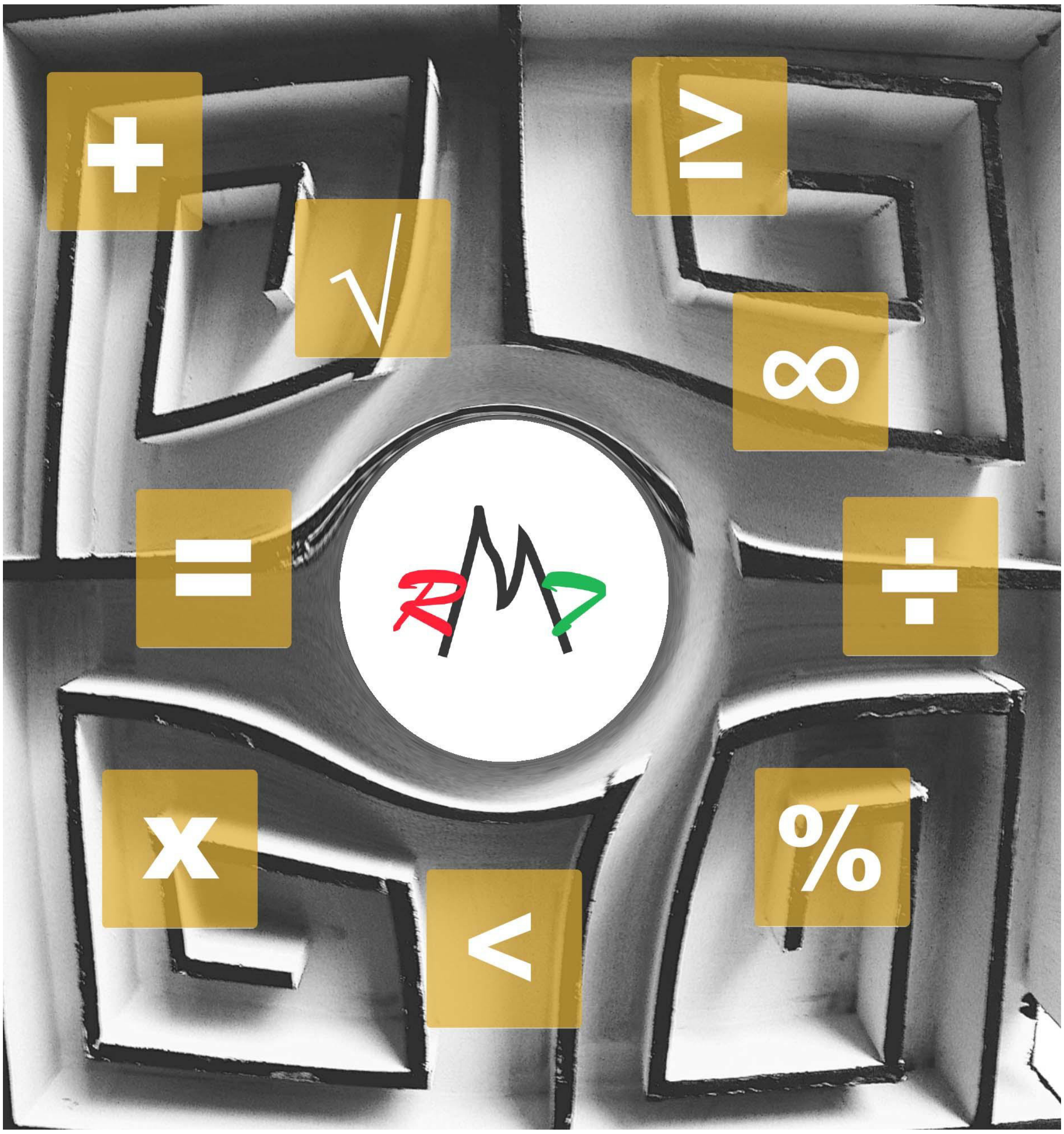
La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 8, octobre / ottobre 2018



Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.org

ISSN 2234-9596

TABLE DES MATIÈRES / INDICE

Numéro 8, septembre 2018/ Numero 8, settembre 2018

ÉDITORIAL : À PROPOS DE RIGUEUR DU LANGAGE

François Jaquet

Quel est l'enseignant qui ne s'est jamais trouvé confronté à une écriture du genre ?

57 – 15 = 42 : 6 = 7

Est-elle juste ou fausse, correcte ou incorrecte, admissible ou non ?

Du point de vue du mathématicien, il s'agit de relations d'égalité dont les trois propriétés sont : la réflexivité (pour toute quantité a, $a = a$), la symétrie (pour toutes quantité a et b, si $a = b$, alors $b = a$) et la transitivité (pour toutes quantités, a, b et c, si $a = b$ et $b = c$, alors $a = c$). Cette écriture est, pour lui, incorrecte ou, du moins « abusive ». Chacune des deux égalités 57 – 15 = 42 et 42 : 6 = 7 est écrite correctement mais si l'on décide de les « contracter » pour n'en faire qu'une seule, plus courte (sans la répétition du 42) il faut en contrôler la rigueur : le premier signe « = » exprime bien l'égalité entre les deux « nombres » « 57 – 15 » et « 42 », le second signe « = » exprime aussi l'égalité entre « 42 : 6 » et « 7 », mais la transitivité n'est plus respectée puisque le premier nombre « 57 – 15 » est différent du troisième « 7 ».

Du point de vue du narrateur qui décrit le déroulement, dans le temps, de la soustraction 57 – 15 et de la division de la différence par 6, le récit correspond aux actions effectuées et est tout à fait acceptable pour le lecteur. Pour vous en convaincre, pressez dans l'ordre les touches de votre calculatrice « 5 » ; « 7 » ; « - » ; « 1 » ; « 5 » ; « = » qui font apparaître « 42 », suivies des trois touches « : » ; « 6 » ; « = » pour voir finalement apparaître « 7 ».

Chacun a donc ses raisons, le mathématicien qui utilise le signe « = » comme indicateur de la relation d'égalité entre les deux quantités qui le flanquent à gauche et à droite, le narrateur ou le lecteur pour qui le signe « = » signifie « est égal » mais aussi « indique le résultat de l'opération » (ou plus simplement : « ça fait »).

On rejoint ici le thème de notre dernière rencontre internationale de l'ARMT, *Lire, reformuler, écrire, rédiger ... : la langue dans les problèmes du RMT, quels points d'appui et quels obstacles ?*

La double égalité ci-dessus est un élément du langage de celui qui l'écrit et elle est observée par celui qui la lit. Les deux personnes sont souvent l'élève et l'enseignant. La question est de savoir comment le second va se comporter, vu qu'il connaît la langue de l'élève et celle du mathématicien.

S'il est « correcteur », pour sa section, d'un problème du RMT où la réponse correcte est 7 et les opérations demandées sont précisément la soustraction 57 – 15 suivie de la division 42 : 6 il pourra hésiter entre « 4 points » *réponse correcte et indication des opérations* ou « 3 points » *réponse correcte mais ...*

S'il est enseignant et qu'il a proposé ce problème du RMT à sa classe d'élèves de 10 à 11 ans, il a toute une gamme de réactions :

- « *C'est bien »* et il laisse passer en sachant que c'est prématuré de corriger ou en pensant que ce n'est pas si grave.
- « *C'est bien, mais ce n'est pas tout à fait correct, la réponse 7 est juste mais ton écriture est fausse ».*
- … (Nous excluons la réponse « *C'est faux ! »*)

Et en cas de réaction négative, l'élève peut dire :

- « Je *ne comprends pas. C'est ce que m'a indiqué ma calculatrice. Voyez !* » (Et il presse les touches dans l'ordre.)
- « *C'est mon papa qui m'a aidé et qui m'a dit d'écrire ça* ! »
- …

Nous n'allons pas dire ici ce qu'il faut faire. C'est à l'enseignant de décider, selon les circonstances, selon ses conceptions du juste et du faux, selon la sensibilité de l'élève. L'important, c'est de savoir qu'on est en présence de deux langages et que, si l'on désire que l'autre modifie le sien, il faut pouvoir lui faire comprendre la raison de ce changement, dans un langage qui lui est accessible.

EDITORIALE: A PROPOSITO DEL RIGORE DEL LINGUAGGIO

François Jaquet

Qual è l'insegnante che non si è mai trovato di fronte a una scrittura del tipo?

57 – 15 = 42 : 6 = 7

Tale scrittura è giusta o sbagliata, corretta o scorretta, ammissibile o no?

Dal punto di vista del matematico, si tratta di relazioni di uguaglianza le cui tre proprietà sono: la riflessiva (per ogni a, $a = a$), la simmetrica (per ogni a e b, se $a = b$, allora $b = a$) e la transitiva (per ogni a, b e c, se $a = b$ e $b = c$, allora $a = c$). Questa scrittura è per lui scorretta o, quanto meno "abusiva". Ciascuna delle due uguaglianze 57 – 15 = 42 e 42 : 6 = 7 è scritta correttamente, ma se si decide di "compattarle" per farne una sola, più corta (senza la ripetizione del 42) bisogna controllarne il rigore: il primo segno «=» esprime in effetti l'uguaglianza tra i due "numeri" «57 – 15» e «42», il secondo segno «=» esprime anch'esso l'uguaglianza tra «42 : 6» e «7», ma la transitività non è più rispettata in quanto il primo "numero" «57 – 15» è differente dal terzo «7».

Dal punto di vista del "narratore" che descrive lo sviluppo, nel tempo, della sottrazione 57 – 15 e della divisione della differenza per 6, il racconto corrisponde alle azioni effettuate e per il lettore è accettabile. Per convincervene, premete nell'ordine i tasti della vostra calcolatrice «5»; «7»; «-»; «1»; «5»; «=» che fanno apparire «42» e ancora tre tasti « : »; «6»; «=» per vedere apparire alla fine «7».

Ognuno ha le sue ragioni: il matematico che utilizza il segno «=» come indicatore della relazione di uguaglianza tra le due quantità che sono a sinistra e a destra di tale segno, il narratore o il lettore per i quali il segno «=» significa «è uguale» ma anche «indica il risultato dell'operazione» (o più semplicemente: «fa»).

Entriamo qui nel tema del nostro ultimo incontro internazionale dell'ARMT, *Leggere, riformulare, scrivere, redigere...: la lingua nei problemi del RMT, quali punti di forza e quali ostacoli?*

La doppia uguaglianza riportata più sopra è un elemento del linguaggio di colui che l'ha scritta ed è osservata da colui che la legge. Le due persone sono sovente l'allievo e l'insegnante. La questione è sapere come si comporterà il secondo, visto che conosce la lingua dell'allievo e quella del matematico.

Se è un "correttore" della sua sezione di un problema del RMT di cui la risposta corretta è 7 e le operazioni richieste sono proprio la sottrazione 57 – 15 seguita dalla divisione 42 : 6, potrà esitare tra «4 punti» *risposta corretta e indicazione delle operazioni* o «3 punti» *risposta corretta ma…*

Se, come insegnante, ha proposto questo problema del RMT alla sua classe di allievi di 10/11 anni, può avere tutta una gamma di reazioni:

- «*Va bene»* e non va oltre sapendo che è prematuro correggere l'allievo o pensando che non è poi così grave.
- «*Va bene, ma non è proprio corretto, la risposta 7 è giusta ma la tua scrittura non è giusta».*
- … (Escludiamo la risposta «*È sbagliato!»*)

E in caso di reazione negativa, l'allievo può dire:

- «*Non capisco. È quello che mi ha indicato la mia calcolatrice. Vede!*» (e preme i tasti nell'ordine).
- «*È mio papà che mi ha aiutato e che mi ha detto di scrivere così*!».
- …

Non diciamo qui ciò che bisogna fare. Sta all'insegnante decidere, secondo le circostanze, secondo le sue concezioni di giusto e di sbagliato, secondo la sensibilità dell'allievo. L'importante è sapere che ci si trova di fronte a due linguaggi e che, se si vuole che l'altro modifichi il suo, bisogna potergli far comprendere la ragione di tale cambiamento in un linguaggio al quale possa accedere.

Presentazione del numero

Questo numero 8 de *La Gazzetta di Transalpino* contiene quattro articoli: due relativi alle conferenze plenarie tenute al convegno di Charleroi, e due che si sviluppano intorno all'analisi a posteriori di diversi problemi del RMT; la rubrica con due studi di approfondimento di schede della banca di problemi e una sezione dedicata agli articoli relativi ai poster presentati al suddetto convegno.

- Nell'articolo *Scrivo, dunque sono anche in matematica nel contesto dei problemi del RMT,* **Lucia Grugnetti e François Jaquet** mettono l'accento sull'intreccio tra i problemi del RMT e la lingua naturale ricordando che tale intreccio si sviluppa nelle diverse fasi dell'attività di redazione degli enunciati, prima, e poi, di risoluzione fino all'ottemperanza della richiesta, fondamentale, di spiegare il processo risolutivo. Analizzano, in particolare, da un lato, la "correlazione" fra gli enunciati dei problemi con "conteggio a ritroso" e le spiegazioni degli allievi, in merito ad aspetti linguistici, non disgiunti, per forza di cose, da aspetti logici e, dall'altro, un problema di tipo algebrico che ha prodotto una grande ricchezza di spunti linguistici nelle spiegazioni degli allievi.

- **Vincent Degauquier**, nel suo articolo dal titolo ***La logica come strumento di analisi per la risoluzione di problemi***, si pone come obiettivo di stabilire due punti. Il primo è che la maggior parte delle frasi in lingua naturale, se non tutte, sono ambigue rispetto alla loro struttura logica. La seconda è che questa ambiguità può influenzare la risoluzione dei problemi matematici. A tal fine, esamina la lingua naturale alla luce del linguaggio della logica contemporanea. Propone inoltre un'analisi logica di frasi in lingua naturale alcune delle quali sono tratte da un problema del Rally Matematico Transalpino.

- **Carla Crociani e Rita Spatoloni** in ***Linguaggio e comunicazione: ri-partiamo dall'analisi a posteriori***, presentano il ricco lavoro svolto con il gruppo "Numerazione" a partire dall'analisi a posteriori di due problemi del 25° RMT, alla luce degli aspetti linguistici. La scelta è stata determinata da motivazioni diverse: l'appartenenza all'ambito dell'aritmetica e della numerazione e i risultati, in generale, poco soddisfacenti. Le autrici sottolineano come l'analisi a posteriori realizzata sui due problemi scelti abbia fornito numerosi spunti di riflessione e discussione.

- Nell'articolo ***Aree di poligoni su una quadrettatura***, **François Jaquet**, evidenzia come l'analisi degli elaborati di un problema di geometria piana permetta di fare luce sul lungo percorso dell'elaborazione del concetto di area e di percepirne le diverse tappe nel corso delle quali i "saperi" si costruiscono progressivamente, si intrecciano, si completano mutualmente per arrivare infine alla capacità di "determinare" l'area di un poligono i cui vertici si trovano sui nodi di una quadrettatura

Nella **rubrica APPROFONDIMENTI**, che ospita le note di approfondimento di schede della banca di problemi, **I membri del sottogruppo "per i grandi" del Gruppo Geometria piana** riportano l'analisi a posteriori del problema *I due rettangoli* a partire dagli elaborati delle sezioni alle quali afferiscono i membri del Gruppo ed è presentato in versione bilingue. Mentre **Michel Henry e Angela Rizza**, coordinatori del gruppo di lavoro *Funzioni*, propongono uno studio a partire dal problema *Il prato di zio Francesco* elaborato nell'ambito dei lavori del gruppo che coordinano.

Nella **rubrica dedicata ai poster presentati al convegno internazionale di Charleroi** figurano gli articoli corrispondenti delle sezioni: *Bourg-en-Bresse, Franche-Comté, Milano, Puglia, Sassari, Siena.*

Présentation du numéro

Ce numéro 8 de *La Gazette de Transalpie* contient quatre articles : les deux premiers sont les textes des conférences plénières tenues à la rencontre de Charleroi, les deux suivants se développent autour de l'analyse a posteriori de différents problèmes du RMT ; la rubrique suivante est dédiée à nos approfondissements et présente deux études de problèmes ; une partie finale est dédiée aux posters présentés lors de la rencontre mentionnée ci-dessus.

- Dans l'article ***J'écris, donc je suis, aussi en mathématiques, dans le contexte des problèmes du RMT***, **Lucia Grugnetti et François Jaquet** mettent l'accent sur l'intrication entre les problèmes du RMT et la langue naturelle en se rappelant que cette intrication se développe dès les différentes phases de la rédaction des énoncés, puis lors de la résolution jusqu'à l'obtention de la demande, fondamentale, d'expliquer le processus qui a permis d'arriver à la solution. Ils analysent en particulier, d'une part la « corrélation » entre les énoncés de problèmes à raisonnement « à rebours » à partir des explications des élèves, selon les aspects linguistiques indissociables des aspects logiques et, d'autre part, un problème de type algébrique qui a produit une grande richesse d'expressions linguistiques dans les explications des élèves.

- L'article de **Vincent Degauquier**, ***La logique comme outil d'analyse pour la résolution de problèmes***, a pour objectif d'établir deux constats. Le premier est que la plupart des phrases en langue naturelle, sinon toutes, sont ambiguës eu égard à leur structure logique. Le second est que cette ambiguïté peut avoir une incidence sur la résolution de problèmes mathématiques. Pour ce faire, l'auteur examine la langue naturelle à la lumière du langage de la logique contemporaine. Il propose aussi une analyse logique de phrases en langue naturelle, dont certaines sont issues d'un problème du Rallye Mathématique Transalpin.

- **Carla Crociani et Rita Spatoloni,** dans ***Langage et communication : re-partons de l'analyse a posteriori***, présentent un riche travail du groupe « Numération » à partir de l'analyse a posteriori de deux problèmes du 25^{e} RMT, selon leurs aspects linguistiques. Leur choix a été déterminé par l'appartenance des sujets au domaine de l'arithmétique et de la numération mais aussi par les résultats jugés en général peu satisfaisants. Les auteures soulignent que l'analyse a posteriori des deux problèmes a fourni une abondance de suggestions de réflexions et de discussions.

- Dans l'article ***Aires de polygones sur quadrillage***, **François Jaquet**, montre comment l'analyse a posteriori des copies d'un problème de géométrie plane permet d'éclairer le long parcours de l'élaboration du concept d'aire et d'en percevoir les différentes étapes, qui se complètent pour arriver enfin à la capacité de « déterminer » l'aire de polygones dont les sommets se situent sur les intersections d'un quadrillage.

Dans la **rubrique ÉTUDES** qui accueille les études détaillées de nos problèmes, **les membres du sous-groupe « pour les grands » du Groupe Géométrie plane** présentent l'analyse a posteriori du problème *Les deux rectangles* à partir des copies des sections des membres du groupe, en version bilingue. **Michel Henry et Angela Rizza**, coordinateurs du groupe de travail *Fonction*, proposent une étude du problème *Le pré du Père François* élaborée dans le cadre des travaux du groupe qu'ils animent.

Dans la **rubrique dédiée aux posters présentés à la rencontre internationale de Charleroi** figurent les comptes rendus des sections de : *Bourg-en-Bresse, Franche-Comté, Milano, Puglia, Sassari, Siena.*

SCRIVO DUNQUE SONO, ANCHE IN MATEMATICA NEL CONTESTO DEI PROBLEMI DEL RMT[1]

Lucia Grugnetti, François Jaquet

C'è un'altra vita del linguaggio, ignota a noi, pervicacemente convinti della trasparenza utilitaria del lessico, persuasi che le parole servano solo per dire "quella cosa lì". Che è vero, e lo fanno benissimo, solo che, una volta messe al mondo, le parole si ritagliano un'altra esistenza, opaca al senso transitivo e referenziale a cui vorremmo inchiodarle, e intrecciano tra loro relazioni irragionevoli e meravigliose, per chi riesca ad abbandonarsi al loro gioco

(Da Stefano Bartezzaghi- *Parole in gioco*, Bompiani, 2017)

Introduzione

Il salto temporale ed epistemologico dal *Cogito ergo sum* di René Descartes (*Discorso sul metodo*-1637), al nostro *Scrivo dunque sono* legato al RMT, può apparire ai più troppo spericolato, ma abbiamo comunque deciso di compierlo con una buona dose di coraggio o forse, di incoscienza.
Ci sentiamo peraltro sostenuti, quasi come costituissero un solido e sicuro paracadute, da due nostri maestri, che purtroppo ci hanno lasciato, nelle persone di Nicolas Rouche e di Francesco Speranza.
Per Nicolas Rouche (1999) *La matematica non è una scienza autarchica; è una forma di pensiero*. Se la caratteristica precipua dei nostri problemi del RMT è, come crediamo, quella di mobilizzare 'il pensiero', nell'andare al di là della sola applicazione di formule e definizioni, allora tali problemi non possono che essere strettamente intrecciati con la lingua naturale, che consente al pensiero di esprimersi.
A sua volta, Francesco Speranza (1993) ci ricorda che *Credere che la conoscenza matematica – e più in generale scientifica – sia indipendente dal linguaggio, e che questo sia uno strumento neutro, è opinione ingenua. Le idee scientifiche si precisano proprio attraverso il linguaggio con il quale vengono formulate e trasmesse, anche quando si tratta di un vero e proprio simbolismo*.
Da qui il titolo della nostra conferenza, che vuol mettere l'accento sull'intreccio tra i problemi del RMT e la lingua naturale e tale intreccio si sviluppa sia nelle diverse fasi dell'attività di redazione degli enunciati, prima, sia, in seguito, nella risoluzione, fino all'ottemperanza della richiesta, fondamentale, di spiegare il processo risolutivo.
In queste due fasi è la lingua scritta, nelle sue diverse accezioni, che possiamo analizzare criticamente.
La lingua parlata entra anch'essa in gioco nella necessaria discussione dei gruppi di allievi che risolvono i problemi. Qui, però, è difficile o quasi impossibile, rilevare gli scambi vocali tra allievi, visto che devono lavorare in autonomia durante le prove. Peraltro, laddove i problemi vengano proposti nel lavoro di classe ordinario, la messa in comune delle procedure di risoluzione necessita della lingua parlata, che ha caratteristiche sue proprie molto interessanti e ricche di indicazioni.
Infatti, mentre *lo scritto è rigido e sequenziale e non offre la possibilità della retroazione (o feedback), in un dialogo chi parla ha sempre la possibilità di tener conto delle reazioni dell'interlocutore – interruzioni (come dici? e allora?), mimica facciale – o anche della sua impassibilità, che verrebbe interpretata come espressione di disinteresse se non di ostilità. Nello scritto non si può intervenire in corso d'opera e, soprattutto rivolgendosi a un destinatario plurimo e indifferenziato, non si possono nemmeno immaginarne le possibili reazioni.* (Enciclopedia Treccani della lingua italiana).

2. Il linguaggio degli adulti negli enunciati e il linguaggio degli allievi nelle spiegazioni

Come evidenzia Jean Julo (1995) "*L'enunciato del problema e il contesto semantico che lo caratterizza, costituiscono una sorta di contratto di comunicazione tra colui che propone il problema e colui che cerca di risolverlo. Tale contratto* particolare che costituisce *l'enunciato del problema (e più in generale tutti gli elementi che servono a presentarlo) riposa dunque su relazioni complesse e sottili tra, da un lato le informazioni che si desidera dare a proposito dell'oggetto del problema e del compito da svolgere e, dall'altro, il contesto semantico che si utilizza per comunicare le informazioni.*"

In tale ottica, ci è sembrato particolarmente interessante analizzare, da un lato, la "correlazione" fra gli enunciati dei problemi con "conteggio a ritroso" e le spiegazioni degli allievi, in merito ad aspetti linguistici, non disgiunti, per forza di cose, da aspetti logici e, dall'altro, un problema di tipo algebrico che ha prodotto una grande ricchezza di spunti linguistici nelle spiegazioni degli allievi.
Questi problemi sono presentati in un ambito temporale esplicitato.

---

[1] Questo articolo riprende la conferenza degli autori presentata nella giornata di apertura del ventunesimo incontro dell'ARMT a Charleroi (Belgio), il 27 ottobre 2017.

Va da sé che è l'analisi a posteriori di centinaia di elaborati che permette di entrare nella correlazione sopra citata tra il linguaggio dell'enunciato e il linguaggio degli allievi.
L'analisi dei problemi con "conteggio a ritroso" è svolta seguendo anche le linee guida di quelli che vanno sotto il nome di *Criteri per l'elaborazione dei problemi del RMT* a cura del "Gruppo di pilotaggio"[2], responsabile della "grande macchina" che ruota intorno alla produzione e alla sistemazione di detti problemi.
Nell'illustrazione dei *Criteri* suddetti viene ricordato che l'elaborazione dei problemi del RMT si inscrive in un procedimento collettivo con una fase di preparazione che sfocia in un enunciato e in un'analisi a priori, una fase di sperimentazione da parte degli alunni e una fase di raccolta dei dati che permette di conoscere non solo i tassi di riuscita, gli ostacoli e difficoltà incontrati dagli alunni, ma anche di pronunciarsi sulle scelte fatte a priori. Il carattere scientifico del procedimento dipende dal modo in cui si tiene conto dei dati raccolti per la preparazione di nuovi problemi, al fine di migliorare la sua efficacia.

2.1. Dai Criteri per l'elaborazione di problemi

Ancora nei *Criteri* citati si evidenzia come l'idea di un problema del RMT nasca generalmente in un contesto dato e si traduca in seguito nel testo dell'enunciato e nelle figure che lo accompagnano. Il cammino tra l'idea e la sua formulazione scritta, però, necessita di numerosi "andate e ritorni", e ciò impedisce di trattarli separatamente. Gli alunni partono dalla lettura dell'enunciato e devono appropriarsi del contesto senza aiuti né facilitazioni da parte dell'insegnante. Anche loro faranno numerosi andate e ritorni tra enunciato e contesto.

Il contesto e la sua presentazione
Prendiamo qui in considerazione due dei vari aspetti relativi al contesto e presenti nei *Criteri*:
1.1. *Universalità del contesto*: il contesto non deve dipendere da nazionalità, regioni, tradizioni, lingua, pratiche e abitudini di prossimità (la scuola, la classe, …) per non favorire né svantaggiare nessuno.
Bisogna interrogarsi sul modo in cui gli alunni possono entrare in un contesto che si pensa essere vicino alla loro realtà, chiedersi se non è troppo artificiale, complesso, stereotipato, se un contesto fittizio non sarebbe più accessibile ...
1.2. *Il testo o la storia (lingua e sintassi) che descrive il contesto:* numerosi enunciati descrivono la situazione attraverso un racconto, con dei personaggi, degli avvenimenti, dei luoghi … e uno svolgimento cronologico. Il lettore deve poter ricostruire "la storia" e darle un senso, prima ancora di capire dove si pone la questione e quali sono i dati numerici o geometrici da estrarne.
Il racconto deve dunque essere coerente, rispettare i tempi (passato, presente, futuro), e far emergere chiaramente gli episodi necessari per poter stabilire delle relazioni matematiche.
La leggibilità da parte degli alunni dei nostri testi, senza aiuto esterno, è evidentemente il criterio prioritario: bisogna tener conto della sintassi, del vocabolario, della complessità delle frasi, della terminologia, in funzione delle categorie.
Bisogna anche tener conto della presentazione dei dati: chiedersi se emergono chiaramente durante la lettura, se i dati inutili sono auspicabili o no.

Gli aspetti matematici
Il RMT privilegia i problemi che possono dire qualcosa in più sul modo in cui gli alunni attivano i saperi riconosciuti nell'insegnamento-apprendimento delle matematiche.
Se non si riesce a definire questi saperi, il problema può comunque essere interessante per l'ingegnosità che ci vuole per risolverlo, per la sfida che propone, per il piacere con il quale gli alunni si impegnano nella sua risoluzione.
Bisogna assicurarsi quindi che l'una o l'altra di queste condizioni sia rispettata prima di trattenere un problema.

2.2. Il naso di Pinocchio

2.2.1. L'enunciato (RMT 7, cat. 3, 4, 5)

Il naso di Pinocchio è lungo 5 centimetri. Quando Pinocchio dice una bugia la Fata dai capelli turchini glielo fa allungare di 3 centimetri, ma quando Pinocchio dà una risposta sincera la Fata glielo fa accorciare di 2 centimetri.
Alla fine della giornata Pinocchio ha il naso lungo 20 centimetri e ha detto 7 bugie.
Quante risposte sincere ha dato Pinocchio alla Fata nel corso della giornata?
Spiegate come avete fatto a trovare la risposta.

---

[2] Roland Charnay, Georges Combier, François Jaquet, Daniela Medici, Graziella Telatin.

2.2.2. Il contesto

Se riprendiamo i punti 1.1 e 1.2 relativi *all'universalità e alla storia del contesto* comprensivi della *lingua* e della *sintassi*, come già evidenziato in (Grugnetti, Dupuis, 2001), l'enunciato di questo problema mette gli allievi a proprio agio, almeno nella fase iniziale: c'è il naso di Pinocchio, ben noto ai bambini di tutto il mondo, o quasi, che si allunga quando il simpatico personaggio dice delle bugie, c'è la fata dai capelli turchini che sa anche premiarlo. Ci sono, insomma, tutti gli ingredienti di una favola.
Le frasi, inoltre, non sono fastidiosamente lunghe e l'enunciato è globalmente breve, requisiti molto importanti per gli allievi di 8-9 anni, come è ben noto.

2.2.3. Il contenuto matematico

La lunghezza finale del naso di Pinocchio è menzionata nell'enunciato, ma poiché ad un certo stadio della procedura di risoluzione, la sua lunghezza è maggiore di quella data nell'enunciato, è necessario operare "un conteggio a ritroso" relativo a una successione di trasformazioni che implica, in questo caso, sia un modello additivo che moltiplicativo. Il problema mette inoltre in gioco la linea dei numeri.

2.3. Le rondini - Rondini e colombe

Consideriamo qui due problemi strettamente "imparentati" a livello della loro struttura di base con una variabile in più nel secondo. Il primo proposto in categoria 3 e il secondo nelle categorie 4 e 5.

2.3.1. Gli enunciati

Le rondini (RMT 23, cat. 3)
Quando Lorenzo si sveglia vede che delle rondini si sono posate su un filo della luce, davanti a casa sua.
Apre la finestra della sua camera, 17 rondini volano via.
Dopo un po', 12 rondini raggiungono quelle che sono rimaste sul filo.
Da dietro la finestra della sua camera, Lorenzo, conta le rondini che sono ora posate sul filo elettrico. Ce ne sono 36.
Quante rondini si trovavano sul filo della luce prima che Lorenzo aprisse la finestra?
Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

Rondini e colombe (RMT 25, cat. 4, 5)
Quando Lorenzo si sveglia, vede che su un filo della luce, davanti a casa sua, sono posate delle rondini e delle colombe.
Apre la finestra della sua camera e 11 rondini e 6 colombe volano via.
Un po' più tardi, 7 rondini e 11 colombe raggiungono quelle che sono rimaste sul filo.
Lorenzo, conta gli uccelli che sono ora posati sul filo della luce. Ci sono 23 rondini e 13 colombe.
Quanti uccelli c'erano sul filo della luce prima che Lorenzo aprisse la finestra?
Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

2.3.2. Il contesto

Per quanto concerne *l'universalità* e *la storia (lingua e sintassi*): Il contesto del problema vede come personaggi due tipi di uccelli noti a tutti. Come nel caso de "Il naso di Pinocchio", le frasi non sono lunghe e si dispiegano via via come in una storia dove gli uccelli ne sono i personaggi, in uno sviluppo nel quale va riconosciuto l'ordine cronologico.

2.3.3. Contenuto matematico

Si tratta ancora di un problema con conteggio a ritroso in ambito temporale dove bisogna trovare ogni volta uno stato iniziale in una situazione nella quale lo stato finale, noto, è il risultato prima di un decremento seguito da un incremento.
In particolare, nel primo problema, bisogna trovare lo "stato iniziale" in una situazione dove lo "stato finale" (36) è il risultato prima di un decremento (-17) e poi di un incremento (+12); mentre nel secondo si tratta di trovare la somma di due numeri, ognuno dei quali era lo stato iniziale in una situazione dove lo stato finale è il risultato prima di un decremento e poi di un incremento.

2.4. Gli enunciati a confronto: la loro struttura "fine"

Una prima analisi degli enunciati dei problemi precedenti, alla luce dei *criteri* citati, relativi ai loro contesti, sembrerebbe rispettare quello che J. Julo, come riportato più sopra, indica come *contratto di comunicazione tra colui che propone il problema e colui che cerca di risolverlo.*

Laddove guardiamo ai risultati globali ottenuti dalle centinaia di classi che partecipano al RMT:
- circa il 70% di risultati positivi per il problema “Il naso di Pinocchio”,
- circa il 40% di risultati positivi per i problemi “similari” le rondini e rondini e colombe.
Quali le cause di questo grande “differenziale”?
I problemi presi in esame si inscrivono tutti e tre nella famiglia dei problemi che necessitano di un ragionamento a ritroso. Dove risiedono allora gli aspetti che hanno portato a risultati tanto diversi?

2.4.1. le analisi del compito dei tre problemi in gioco

Per quanto riguarda “Il naso di Pinocchio”, l’analisi del compito stilata a priori nel 1999, si presenta in una forma succinta. Nel corso degli anni le analisi del compito dei problemi si sono fatte via via più dettagliate, sempre comunque con un linguaggio da adulti.
Analisi del compito:

stabilire che per le 7 bugie dette il naso di Pinocchio si allunga di 21 cm (7x3), che aggiunti ai 5 iniziali porterebbero ad una lunghezza totale di 26 cm (21+5); se il naso di Pinocchio è lungo solo 20 cm, significa che si è accorciato di 6 cm a causa di 3 risposte sincere che ha dato (26-20): 2

- disegnare una linea dei numeri e, partendo dal numero 5, procedere in avanti di 3 in 3 per 7 volte arrivando al numero 26; da qui tornare indietro di 2 in 2 fino al numero 20 (3 volte)
- effettuare per tentativi spostamenti alternati per arrivare a 20 con 7 spostamenti di 3 in avanti (o 7 x 3).

Troviamo un’analisi del compito più dettagliata e articolata nella Banca di problemi del RMT, nella scheda relativa al medesimo problema, redatta alla luce dell’analisi a posteriori (Cfr. Grugnetti, Dupuis, 2001):

- Dal racconto ben noto di Pinocchio, trasformare l’enunciato in una successione di operazioni aritmetiche a partire da una lunghezza di 5 cm alla partenza, per arrivare a una lunghezza di 20 cm, con addizioni di 3 e sottrazioni di 2.
- Rendersi conto che non si conosce l’ordine secondo il quale si effettuano queste operazioni a partire da 5, ma che si sa che ci sono 7 addizioni di 3 e che bisognerà trovare il numero, ancora indeterminato, di sottrazioni di 2 per arrivare a 20.
- Utilizzare eventualmente un supporto o un modello per rappresentare la situazione; per esempio un righello sul quale segnare le diverse posizioni o delle frecce in un senso o in quello contrario.

Ci sono diversi modi di affrontare la successione dei calcoli:
- con tentativi, passo a passo, partendo da 5 ed effettuando addizioni (allungamenti) di 3 e sottrazioni (diminuzioni), per cercare di arrivare a 20 dopo sette addizioni e costatare che sono necessarie tre sottrazioni. È nel corso di questi tentativi che ci si può rendere conto che l’ordine delle sette addizioni e delle tre sottrazioni non influisce sul risultato (ad eccezione del caso in cui le tre sottrazioni intervenissero all’inizio, cosa non possibile da realizzare).
- nel percepire la struttura temporale degli allungamenti e delle riduzioni: calcolare che le 7 bugie corrispondono ad un allungamento di $7 \times 3 = 21$ (cm) che conduce a $5 + 21 = 26$ (cm); calcolare la differenza $26 - 20 = 6$ (cm) e cercare infine il numero delle riduzioni di 2 cm per ottenere questi 6 cm, con una divisione ($6 : 2 = 3$) o una moltiplicazione come frase aperta ($2 \times \ldots = 6$). (Questa procedura corrisponde alla risoluzione dell’equazione $5 + 21 - 2x = 20$).
- la differenza di 6 cm può anche essere determinata tra l’allungamento $7 \times 3 = 21$ (cm) e $15 = 20 - 5$ (cm) dell’aumento globale.

L’analisi del compito stilata a priori, per quanto riguarda “Le rondini”, recita:
- Riconoscere l’ordine cronologico e le variazioni tra gli stati successivi di una grandezza.

  Stato iniziale: apertura della finestra con un numero sconosciuto di rondini

  – partenza di 17 rondini (prima trasformazione) e stato intermedio più piccolo dello stato iniziale

  – arrivo di 12 rondini (seconda trasformazione) e stato finale di 36 più grande dello stato intermedio.

  Identificare l’incognita: lo stato iniziale.
- Tradurre le trasformazioni nelle operazioni adatte ed effettuare i calcoli corrispondenti oppure operare su disegni o su oggetti ricorrendo al conteggio:

  sia nell’ordine cronologico, per tentativi successivi con un’ipotesi di partenza (per esempio $20 - 17 + 12 = 15$, «troppo piccolo», ... per arrivare a $41 - 17 + 12 = 36$)

  sia tornando indietro nel tempo a partire da 36, essendo ben coscienti che si tratta di utilizzare le operazioni inverse delle precedenti: $36 - 12 + 17 = 41$.

Si può anche fare il bilancio delle due trasformazioni: «diminuzione di 5 (17 – 12) rispetto allo stato iniziale».

Mentre l'analisi del compito relativa al problema "Rondini e colombe" si presenta nella forma seguente:

- Riconoscere l'ordine cronologico e le variazioni tra gli stati successivi di due grandezze. Stato iniziale: apertura della finestra con un numero sconosciuto di rondini e di colombe – partenza di 11 rondini e 6 colombe (prima trasformazione) e stato intermedio più piccolo dello stato iniziale – arrivo di 7 rondini e 11 colombe (seconda trasformazione) e stato finale di 23 rondini e 13 colombe, più grande dello stato intermedio. Identificare l'incognita: stato iniziale (numero totale di rondini e colombe).
- Siccome si chiede il numero totale degli uccelli all'inizio, sono possibili due ragionamenti:
  Il primo che verte sul numero totale di uccelli a ogni tappa;
  Il secondo sul numero di ogni categoria di uccelli a ogni tappa.
- Tradurre le trasformazioni nelle operazioni adatte ed effettuare i calcoli corrispondenti oppure operare su dei disegni o degli oggetti ricorrendo al conteggio:
  sia nell'ordine cronologico, per tentativi successivi, con un'ipotesi di partenza che si basa sia sul numero totale di uccelli (per esempio 20 – 17 + 18 = 21, «troppo piccolo», ... per arrivare a 35 – 17 + 18 = 36), sia da una parte sul numero di rondini e da un'altra parte sul numero di colombe per arrivare a 27 – 11 + 7 = 23 e 8 – 6 + 11 = 13 e finire trovando il numero totale di rondini e colombe: 27 + 8 = 35
  sia tornando indietro nel tempo a partire dal numero totale di rondini e di colombe, 36, essendo ben coscienti che si tratta di utilizzare le operazioni inverse delle precedenti: 36 – 18 + 17 = 35 oppure separatamente a partire dal numero di rondini (23 – 7 + 11 = 27) e di colombe (13 – 11 + 6 = 8) e terminare sommando il numero di colombe e rondini: 27 + 8 = 35
  Si può anche fare il bilancio delle due trasformazioni sia per ogni categoria di uccelli: «diminuzione di 4 (11 – 7) in rapporto allo stato iniziale per le rondini e aumento di 5 (11 – 6) per le colombe», sia per l'insieme degli uccelli: aumento di 1 (18 – 17) in rapporto allo stato iniziale.

2.4.2. Il ricorso alla teoria di Gérard Vergnaud

Nelle analisi del compito più sopra presentate, si parla esplicitamente di "trasformazioni" e sappiamo bene quanto peso abbiano nell'apprendimento della matematica le diverse tipologie di trasformazioni che intervengono in una procedura risolutiva.
Appoggiandoci su Gérard Vergnaud (1994), vediamo più da vicino la struttura "fine" insita negli enunciati in gioco.
Per Vergnaud, innanzitutto, "Ciò che succede nel tempo può essere descritto sotto forma di una successione di trasformazioni" (p. 38) e i nostri enunciati si sviluppano effettivamente nel tempo e implicano pertanto una trasformazione o una successione di trasformazioni, connesse a uno stato iniziale e uno stato finale.
Questi tre elementi, stato iniziale, stato finale e la trasformazione (o le trasformazioni), non hanno il medesimo statuto.

- Nel caso del problema "Il naso di Pinocchio", la situazione è del tipo:
  stato iniziale: **noto**
  stato finale: **noto**
  ricerca delle trasformazioni: una nota e complessa e l'altra **incognita**-che può ancora scomporsi in tre trasformazioni; 7(+ 3) e x(-2)

- Nel caso dei problemi "Le rondini", la situazione è del tipo:
  stato iniziale: **incognito**
  trasformazione: **nota** (- 17)
  stato intermedio: **incognito**
  trasformazione: **nota** (+ 12)
  stato finale: **noto**

Il problema "Rondini e colombe" ha la medesima struttura del problema "Le rondini".

Questi due problemi, al contrario del problema "Il naso di Pinocchio" richiedono, oltre ad un conteggio a ritroso, **un ritorno indietro nel tempo**, aspetto che ne aumenta la complessità, per trovare lo stato inziale **incognito**.

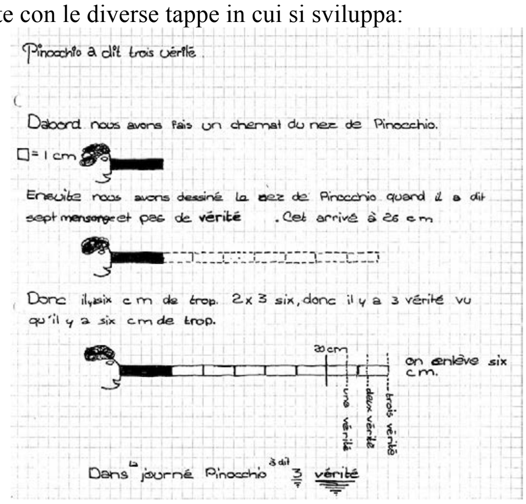
2.5. il ruolo insostituibile delle spiegazioni degli allievi con i loro linguaggi

Per quanto riguarda i problemi del RMT, un'importanza fondamentale è attribuita alle loro analisi a posteriori che consentono di andare ben oltre le attribuzioni dei punteggi utili a poter stilare una classifica.

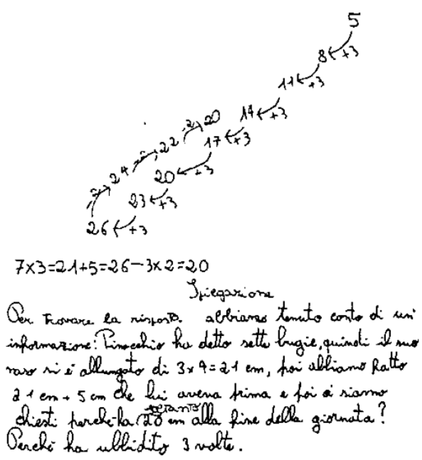
Le analisi a posteriori, oltre a fornire dati statistici, pur interessanti, consentono di "entrare nel "mondo degli allievi" i quali, attraverso le loro spiegazioni, con i linguaggi i più vari, che vanno dal linguaggio naturale a quello iconico, grafico, ecc., ci indicano le strade che hanno percorso per risolvere un dato problema. Ci danno così la possibilità di capire dove sono situati eventuali errori ed ostacoli.
A volte ci sorprendono con procedure alle quali, noi adulti, non avevamo pensato.
E. Monnier, in uno degli articoli di Science&vie, che ha dedicato un intero numero dei suoi "quaderni" alla scrittura (Cfr. bibliografia, p. 40), cita l'antropologo britannico Jack Goody per arrivare a chiarire che *solo la scrittura ha permesso di sviluppare le nozioni aristoteliche di contraddizione o di sillogismo. Contrariamente a una esposizione orale che può essere solo contraddetta istantaneamente, il testo scritto permette una critica differita da parte di un pubblico vario. Si integra in un corpo permanente di argomenti che possibile confrontare e dei quali si possono confrontare l'inizio e la fine, esaminare a piacere ciascuna delle tappe. Lo spirito critico sarebbe pertanto nato solo con la scrittura.*

2.5.1. I nostri piccoli "Vergnaud" con linguaggio naturale e iconico

La situazione "stato-trasformazioni-stato", del problema "il naso di Pinocchio" è rappresentata in maniera esemplare nella soluzione proposta da una classe di categoria 3 della Svizzera romanda, con il ricorso ad uno schema che mette ben in evidenza la **ricerca delle trasformazioni**. Lo schema è inoltre illustrato con linguaggio naturale perfettamente coerente con le diverse tappe in cui si sviluppa:



Le trasformazioni, di cui una nota e complessa e l'altra **incognita**-che può ancora scomporsi in tre trasformazioni; 7 × (+ 3) et x × (-2), sono perfettamente gestite da una classe di Parma di categoria 4, tramite uno schema con frecce: la spiegazione in linguaggio naturale evidenzia una perfetta chiarezza di idee quando i bambini si chiedono: "Perché ha soltanto 20 cm alla fine della giornata?", e si danno la risposta: "Perché ha ubbidito 3 volte", trovando quindi ciò che abbiamo indicato più sopra come la ricerca di x, in x × (-2):

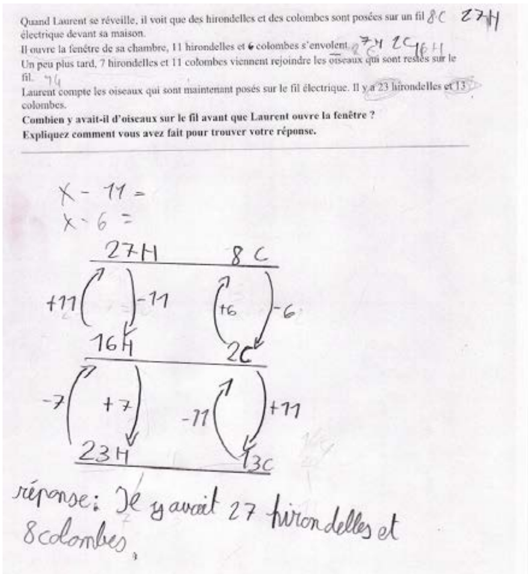


Mentre i due elaborati precedenti evidenziano l'uso di un linguaggio iconico per la ricerca della soluzione, seguito da una spiegazione in linguaggio naturale, in altri casi, la ricerca della soluzione si è avvalsa in maniera appropriata

e potremmo addirittura dire sapiente, di un'analisi in qualche modo di tipo "ipotetico-deduttivo" dell'enunciato, con i passaggi logici che abbiamo evidenziato in rosso:
Si Pinocchio a son nez de 5 cm et qui l'a dit 7 mensonges et que son nez augmente de 3 cm à chaque mensonges, Pinocchio a donc son nez de 26 cm. Mais, vu que son nez doit être de 20 cm il a donc dit 3 fois la vérité.
7x3 = 21+5 = 26 – (3x2) = 20.

In effetti, secondo Piaget, come ben noto, a tali età, gli allievi sono tra lo stadio delle **operazioni concrete** (cominciano a concettualizzare ragionamenti logici) e quello delle **operazioni formali** (ragionamento ipotetico-deduttivo), che non hanno ancora raggiunto

Nel caso del problema "Le rondini" o del problema "Rondini e colombe" lo **stato iniziale incognito** e il necessario **ritorno indietro nel tempo** hanno verosimilmente costituito un grosso ostacolo ad una corretta risoluzione nel caso di un gran numero di classi.
Ciò non toglie però che in alcuni casi gli allievi siano stati perfettamente capaci di gestire la situazione, come ad esempio è mostrato nell'elaborato che segue, nel quale il ricorso al linguaggio iconico evidenzia perfettamente il **percorso temporale** che è necessario seguire per arrivare alla soluzione


Quand Laurent se réveille, il voit que des hirondelles et des colombes sont posées sur un fil électrique devant sa maison.
Il ouvre la fenêtre de sa chambre, 11 hirondelles et 6 colombes s'envolent.
Un peu plus tard, 7 hirondelles et 11 colombes viennent rejoindre les oiseaux qui sont restés sur le fil.
Laurent compte les oiseaux qui sont maintenant posés sur le fil électrique. Il y a 23 hirondelles et 13 colombes.
Combien y avait-il d'oiseaux sur le fil avant que Laurent ouvre la fenêtre ?
Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

X - 11 =
X - 6 =
27H 8C
+11 -11 +6 -6
16H 2C
-7 +7 -11 +11
23H 13C
réponse: Il y avait 27 hirondelles et 8 colombes.

Anche caso del problema "Rondini e colombe", troviamo dei begli esempi di una sorta di "analisi consequenziale implicita" dell'enunciato atta alla ricerca della soluzione:
On a compté combien d'hirondelles et de colombes sont venues ou parties. 11 hirondelles sont parties et 7 sont revenues. Il y en a 4 de moins qu'au départ. 6 colombes sont parties 11 sont revenues. Il y en a 5 de plus qu'au départ.
On fait: 23+4 = 27,   13-5 = 8   et   27+8 = 35 oiseaux

La diversità dei linguaggi utilizzati dagli allievi va certamente al di là delle previsioni degli estensori degli enunciati.

2.5.2. L'importanza delle spiegazioni degli allievi nel caso di risposte errate

Benché il problema "Il naso di Pinocchio" sia stato risolto correttamente da circa il 70% delle classi alle quali era stato proposto, uno sguardo importante va dato al 30% rimanente per capire in quali tipi di errori o confusioni sono incorse alcune classi.
Per esempio, laddove ci si trovi di fronte ad una soluzione come la seguente:
1) 7 x *5 = 35 (mensonges durant toute la journée)*
2) 35 – 20 = 15
3) 15 : 2 = 7,5 qui sont les vérités. (Catégorie 5 – I)

È la spiegazione in linguaggio naturale che diventa chiarificatrice del fatto che “i numeri puri” sono diventati prioritari sulle “grandezze” e sulle “misure”, che hanno così perso di significato! E poiché si tratta ormai di “numeri puri”, si può accettare, per le verità, un numero decimale:
l'opération n^{o} 1 est 7 mensonges fois 5, la mesure du nez, et comme cela j'ai trouvé 35 mensonges en tout. Puis j'ai fait l'opération n^{o} 2 : les mensonges dits dans toute la journée moins la mesure du nez de Pinocchio à la fin de la journée et alors le résultat 15 est la mesure de combien le nez de Pinocchio s'est raccourci. Enfin, pour l'opération n^{o} 3, j'ai divisé par 2 la mesure de combien le nez s'est raccourci, la mesure de combien chaque vérité fait raccourcie le nez et j'ai trouvé le nombre de vérités : 7,5.

2.5.2.1. Problema “Le rondini”: risposte “31”

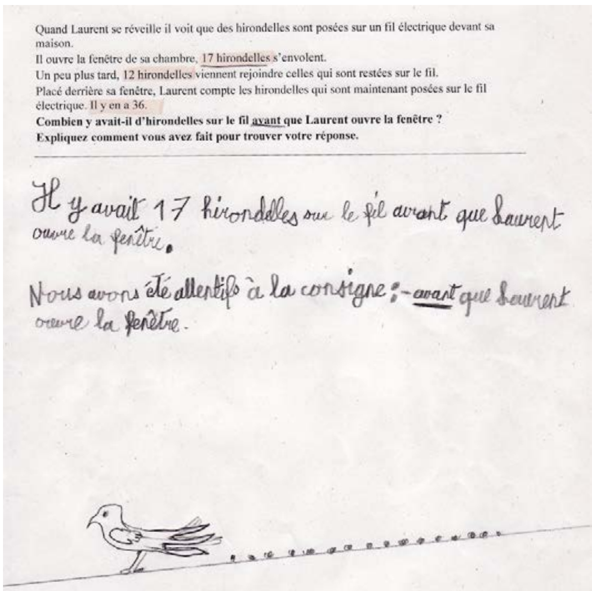
Anche se i dati di questo problema sono formulati mediante frasi brevi (come dai suggerimenti dei criteri relativi al contesto), la vera difficoltà, come sottolineato più sopra, si situa sulla “struttura matematica” che richiede di ricorrere alle operazioni inverse legate alla necessità del ritorno indietro nel tempo.
Troviamo infatti, elaborati sia in Svizzera che a Parma, dove sono state usate le operazioni dirette (36-17+12 = 31), al posto di quelle indirette: 36-12+17 = 41. La trasformazione (-17) e la trasformazione (+12), poiché si deve tornare indietro nel tempo, “cambiano di segno”. Non è stata compresa la “struttura” del problema.

36-17=29+12=41 *Noi abbiamo fatto così: abbiamo usato il 36 dopo abbiamo sottratto le 17 rondini che sono volate via e il risultato è 29, poi abbiamo aggiunto 12 rondini e infine abbiamo capito che prima che Lorenzo aprisse la finestra sul filo c'erano 41 rondini.*	*36-17+12 = 31* *Il y a 31 hirondelles avant que Laurent ouvre la fenêtre.* *Laurent ouvre la fenêtre et voit 17 hirondelle s'en volé. Un peu plus tard il voit 12 hirondelles qui viennent rejoindre celles qui sont restées sur le fil. Après Laurent il en voit 36 sur le fil électrique.*

(Ovviamente il risultato 41, del primo esempio, è dovuto ad un errore di calcolo).

2.5.2.1. Problema “Le rondini”: risposte “48” o “17”

Nel caso di elaborati nei quali la risposta a cui gli allievi arrivano a 48, in luogo di 41, al di là dell'operazione che riportano: 36 + 12, è la spiegazione in linguaggio naturale che diventa importante per capire il malinteso nel quale sono caduti come ad esempio nel caso seguente: *On a vu qu'il y avait 12 hirondelles qui viennent d'arriver sur le file et il y avait 36 hirondelles déjà sur le fil. Donc on a calculé 12+36=48 hirondelles.*
Qui **le prime due frasi non sono prese in considerazione** e la spiegazione ci mostra anche il malinteso secondo cui le 12 rondini si sono posate sul file quando ve ne erano già 36.
Nel caso della risposta 17, come nell'elaborato che segue:


Quand Laurent se réveille il voit que des hirondelles sont posées sur un fil électrique devant sa maison.
Il ouvre la fenêtre de sa chambre, 17 hirondelles s'envolent.
Un peu plus tard, 12 hirondelles viennent rejoindre celles qui sont restées sur le fil.
Placé derrière sa fenêtre, Laurent compte les hirondelles qui sont maintenant posées sur le fil électrique. Il y en a 36.
Combien y avait-il d'hirondelles sur le fil avant que Laurent ouvre la fenêtre ?
Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

Il y avait 17 hirondelles sur le fil avant que Laurent ouvre la fenêtre.

Nous avons été attentifs à la consigne : - avant que Laurent ouvre la fenêtre.

la spiegazione degli allievi mostra chiaramente che, poiché la domanda è incentrata sul “avant/prima”, è come se le frasi successive non avessero alcuna rilevanza.

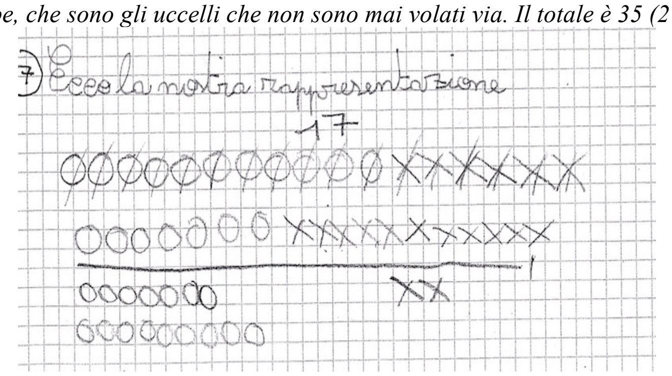
Hanno direttamente collegato la domanda alle due frasi iniziali e ce lo dicono *"Siamo stati attenti alla consegna: prima che Laurent apra la finestra."*
Sottolineano anche l'avant che figura nella domanda, oltre ad aver sottolineata l'espressione "17 hirondelles".

In effetti, come sottolinea J. Julo (1995), *l'analyse des représentations particularisée, dans le cas d'une situation de résolution de problème, va consister à analyser la manière dont nous comprenons cette situation et dont nous interprétons la problématique qui lui est propre mais aussi la manière dont cette compréhension intervient dans la recherche et la découverte de la solution.*

Sono proprio le spiegazioni degli allievi, o di chi risolve il problema, quelle che consentono di capire la maniera in cui la situazione viene effettivamente compresa.
L'attenzione dei bambini che hanno trovato la risposta 17 è stata catturata da quel "prima" e tutto il resto ha perso di importanza.
E ancora una volta, la ricerca dello **stato iniziale incognito** sembra destabilizzare la gestione complessa della situazione e può portare, come nel caso di questo elaborato, ad una semplificazione della situazione, con la scelta delle "espressioni linguistiche" più evidenti, tralasciando la frase "Dopo un po', 12 rondini raggiungono quelle che sono rimaste sul filo".
Sarebbe stato interessante riprendere in questa classe il problema e aprire con gli allievi la discussione partendo dapprima sul "ruolo" di detta frase: "È una frase che serve alla risoluzione del problema o è una frase inutile? E se è inutile, perché pensate che sia stata scritta nell'enunciato del problema?"

2.5.3 La ricchezza dei diversi linguaggi degli allievi

Si rileva spesso una convivenza costruttiva di simboli, rappresentazioni grafiche, lingua naturale, …:
negli elaborati, sia nel caso di quelli corretti che di quelli con errori, si trova sovente più di un tipo di linguaggio al fine di gestire le situazioni e le risposte.
Questi diversi linguaggi si sostengono mutualmente, benché non siano sempre presenti contemporaneamente.
Talvolta però si appoggiano l'uno sull'altro come nel caso dell'elaborato che segue dove, l'analisi attenta dell'enunciato, espressa in lingua naturale si avvale di una rappresentazione grafica **come supporto per la gestione delle trasformazioni**:
1) Prima abbiamo letto attentamente il problema.
2) Per aiutarci abbiamo disegnato, in forma di una rappresentazione grafica, i dati del problema a noi posti.
3) Le rondini sono cerchi e le colombe croci. Seguendo le indicazioni abbiamo disegnato e poi cancellato le rondini e le colombe che sono volate via e sono 17.
4) Basandoci sul prossimo dato abbiamo disegnato le rondini e le colombe che si sono aggiunte a quelle rimaste sul filo.
5) Agli uccelli precedentemente disegnati abbiamo aggiunto, basandoci sull'ultimo dato a noi posto, il numero di cerchi, che sommati alle rondini precedentemente disegnate formava 23; poi abbiamo aggiunto *un numero di colombe, che sommate a quelle precedentemente disegnate, formano 13.*
6) Ora sommando i 17 uccelli volati via, dopo che Lorenzo aprì la finestra, con gli uccelli aggiunti per formare 23 rondini e 13 colombe, che sono gli uccelli che non sono mai volati via. Il totale è 35 (27 rondini e 8 colombe).



Sta a noi adulti percepire tutta la complessità del ragionamento che passa nella testa degli allievi e che si esprime con i diversi linguaggi, rivelatori di ragionamenti corretti, incomprensioni, errori, ostacoli, ecc.
Nel caso dell'esempio precedente, la rappresentazione grafica è una sintesi perfetta dello sviluppo temporale del problema.

3. Un po' più tardi, con il linguaggio algebrico in prospettiva

I problemi precedenti mostrano con una certa evidenza la ricchezza delle espressioni linguistiche adottate dai giovani allievi per spiegare ragionamenti e procedure complesse che esigono di "tradurre" dei ritorni indietro nel tempo con inversione di operazioni aritmetiche.

Illustriamo ora un altro esempio di problema per allievi delle nostre categorie più alte i quali, sempre secondo Piaget, entrano nello stadio delle operazioni formali, al fine di:
- illustrare ancora il pensiero di N. Rouche sull'intreccio dei nostri problemi con la lingua naturale che permette al pensiero di esprimersi e di F. Speranza sulle idee scientifiche che si precisano effettivamente attraverso la lingua nella quale sono formulate,
- passare un po' di tempo sui testi che scriviamo e su quelli tramite i quali i nostri allievi ci rispondono,
- fare qualche considerazione sulla maniera di interpretare i nostri testi rispettivi nell'ambito della comunicazione tra interlocutori che si esprimono con modalità differenti: dalle espressioni gergali alla lingua accademica, passando per i dialetti, i discorsi algebrici, la lingua naturale.

ALLENAMENTI IN BICI / Cat. 7, 8, 9, 10
Il ciclista Giovanni si allena per la sua prossima gara. I suoi allenamenti si svolgono sempre su tre percorsi, uno lungo, uno medio e uno corto. Nell'allenamento di ieri, Giovanni ha effettuato due volte il percorso lungo, due volte il percorso medio e una volta il percorso corto, per un totale di 42 km. Oggi invece ripercorre cinque volte il percorso medio per un totale di 5 km in meno rispetto a ieri. Il suo programma di allenamento per domani prevede un totale di 48,8 km, che otterrà effettuando quattro volte il percorso lungo e una volta quello corto.
Per l'ultimo allenamento prima della gara, quello di dopodomani, Giovanni percorrerà una volta il percorso lungo, tre volte quello medio e due volte quello corto.
Quanti chilometri farà Giovanni nel suo ultimo allenamento?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

3.1. Il linguaggio degli adulti

In un primo tempo ci soffermeremo sul linguaggio adottato dagli adulti quando si rivolgono agli allievi con l'enunciato del problema, oppure quando si rivolgono a loro colleghi nell'analisi a priori, descrizione del compito matematico, analisi del compito dell'allievo e criteri di attribuzione dei punteggi.

3.1.1. Il linguaggio dell'enunciato

Come tutti i nostri enunciati anche questo è redatto da adulti, insegnanti per la maggior parte, che si sforzano di adottare un linguaggio destinato agli allievi (i quali devono poter interpretare e decifrare da soli, senza l'aiuto del loro insegnante assente dalla classe durante la prova secondo le regole del nostro rally):
Le frasi sono brevi, chiare, precise: le 4 corse, i 4 giorni, l'ordine ordine temporale è rispettato, le distanze sono espresse nella stessa unità di misura.
Il contesto: lo si considera "reale" e non fittizio, con un po' d'ingenuità, ma più o meno "credibile": programma d'allenamento, Giovanni, percorsi …
Il problema non è "cattivo": non ci sono a prima vista dati superflui! (vedremo peraltro che la seriazione - inutile - dei percorsi in "corto", "medio" e "lungo" ha indotto alcuni allievi in errore)
Lo stile è quello di un "problema di matematica": un po' pesante e ripetitivo, non molto poetico, una punta di noia?
Vi è un'unica domanda: "Quanti…" con risposta unica e incontestabile.
In breve, ci si è preoccupati di scrivere un testo che permettesse all'allievo "qualunque" di appropriarsi del problema e che rispondesse ai criteri della nostra griglia di elaborazione.
Dietro le parole però, ci sono sempre degli impliciti per il lettore. Ad esempio, l'allievo non lo sa, ma noi sì, vedasi la rubrica "compito matematico":
Determinare la lunghezza di un percorso, $a + 3b + 2c$, composto da tre parti a, b, c, conoscendo la lunghezza di tre altri percorsi composti dalle stesse parti, $2a + 2b + c = 42$; $5b = 42 - 5$; $4a + c = 48{,}8$; o nell'analisi del compito: *Impostare un sistema di tre equazioni in tre incognite…*

3.1.2. L'analisi a priori del problema

Dopo la descrizione del "compito matematico" restano due rubriche nell'analisi a priori del problema: L'Analisi del compito dell'allievo e i Criteri di attribuzione dei punteggi.
È anche interessante vedere come si esprimono gli adulti quando si rivolgono ad altri adulti, nell'analisi a priori, con un linguaggio "rigoroso" che deve essere compreso anche da insegnanti "non matematici".

- *Capire che il numero dei chilometri di ogni allenamento dipende dalla tipologia dei percorsi e da quante volte sono ripetuti.*
- *Rendersi conto che è necessario trovare la lunghezza di ciascun percorso (lungo, medio, corto) e che tali informazioni devono essere ricavate dalla conoscenza delle lunghezze complessive dei primi tre percorsi e dal modo in cui essi sono ottenuti.*
- *Comprendere che è possibile calcolare subito la lunghezza in km del percorso medio: 7,4 [= (42−5) : 5].*
- *Per determinare la lunghezza del percorso lungo e di quello corto, tenere presente la composizione in termini di percorsi dell'allenamento di 42 km e di quello di 48,8 km. C'è più di un modo di procedere.*
- *Per esempio, si può osservare che gli allenamenti dei due giorni differiscono, in km, di 21,6 (= 48,8−27,2) e che ciò è dovuto alla presenza nel secondo allenamento di due percorsi lunghi in più. Ricavare quindi la lunghezza in km del percorso lungo: 10,8 (= 21,6 : 2). Infine, ottenere lunghezza in km del percorso corto: 5,6 (= 48,8−4×10,8).*
- *Concludere che Giovanni nel suo ultimo allenamento, percorrerà 10,8 + 3 × 7,4 +2 × 5,6 = 44,2, in km.*

Oppure:

- *impostare un sistema di tre equazioni in tre incognite:*

$$\begin{cases} 2x+2y+z=42 \\ 5y=37 \\ 4x+z=48{,}8 \end{cases}$$

-o di due equazioni in due incognite dopo aver determinato la lunghezza del percorso medio.
Oppure:

- *procedere per tentativi e aggiustamenti, ma, vista la presenza dei numeri decimali, la procedura può essere molto lunga.*

Questo testo non è di facile lettura, fa appello a scritture aritmetiche, poi algebriche e il lettore deve "concentrarsi" per seguire il filo delle diverse procedure di risoluzione.
Nel passare all'attribuzione dei punteggi, ancora tra adulti, il linguaggio diventa più sintetico:

4 Risposta corretta (44,2 km) con spiegazione chiara del procedimento seguito (elenco dei tentativi o considerazioni corrette basate sul confronto della composizione dei percorsi e delle loro lunghezze o risoluzione di un sistema lineare)

3 Risposta corretta con una spiegazione incompleta o poco chiara

oppure scoperta delle tre lunghezze (5,2; 7,4 e 10,8) con dettagli dei calcoli o verifica dei tre allenamenti

oppure risposta sbagliata dovuta ad un solo errore di calcolo, ma procedura corretta e ben spiegata

2 Risposta corretta senza spiegazioni

oppure scoperta delle tre lunghezze senza spiegazione ma con una sola verifica

oppure presenza di almeno tre tentativi fatti con controllo dei vincoli sulla lunghezza dei percorsi

1 Inizio corretto di ricerca (ad esempio, indicazioni di uno o due tentativi fatti con controllo delle condizioni)

oppure solamente la lunghezza del percorso medio: 7,4 km

0 Incomprensione del problema

Non ci sono più frasi complete dal punto di vista sintattico, si tratta di istruzioni e si può osservare che viene lasciato al destinatario una grande responsabilità di interpretazione come, per esempio, fare la differenza fra le frasi indicate più sopra in blu. La precisione del linguaggio ha qui dei limiti legati alla finalità dell'attribuzione dei punteggi, compito di valutazione o giudizio estremamente delicato.

3.2. La lingua degli allievi

La prima cosa che troviamo spesso negli elaborati degli allievi è una traccia della loro appropriazione della situazione. Non si è ancora nella risoluzione, ma i dati del problema vengono riscritti così come li si interpretano.

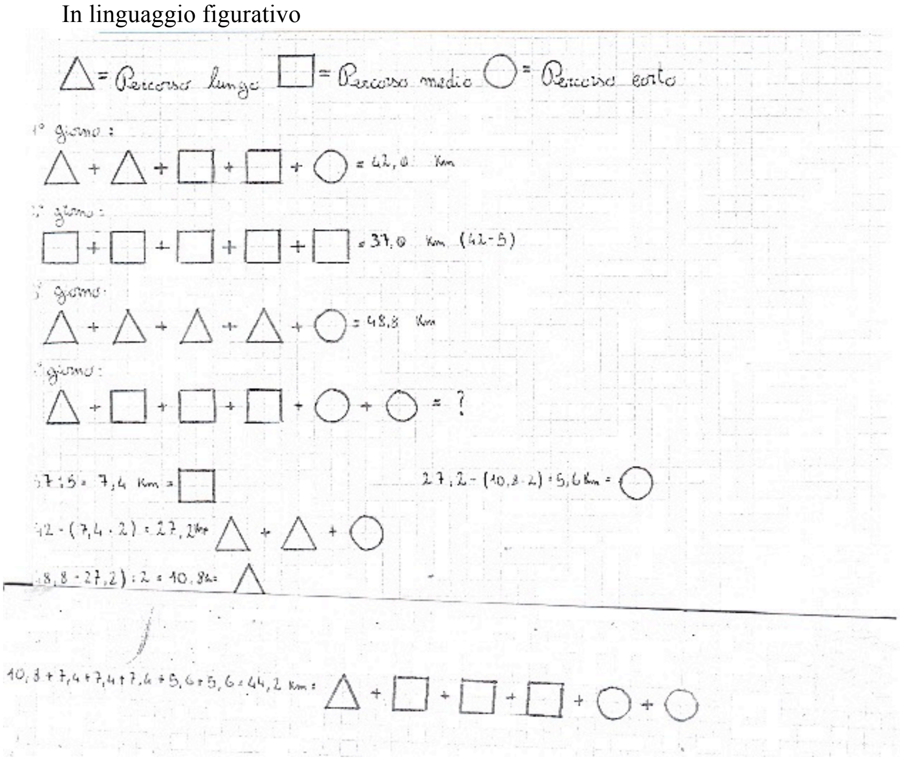
3.2.1. Traduzione dei dati da parte degli allievi

Le relazioni fra i tre percorsi descritti nell'enunciato ci vengono restituiti nelle spiegazioni di numerosi elaborati in linguaggio "allievo".

Esempio in linguaggio sintetico

Ieri = 2 p.lungo - 2p.medio - 1p.corto. 42 km = somma dei percorsi di ieri Oggi = 5p.medio – 5 km di ieri Domani = 48,8 km = 4p.lungo – 1p.corto Dopodomani= 1p.lungo-3p.medio-2 quello corto

Esempio In linguaggio figurativo



Esempio 3 in linguaggio pre-algebrico (cat 9)

IERI = 2 L + 2 M + 1 C = 42 km

OGGI = 5 M = IERI – 5 km = 42 – 5 = 37 km

DOMANI = 4 L + 1 C = 48,8 km

DOPO DOMANI = 1 L + 1 Quanti km farà dopodomani?

3.2.2. Prima procedura per il percorso medio

La gran parte dei gruppi ha calcolato i percorsi medi dalla seconda informazione dell'enunciato *Aujourd'hui, en répétant cinq fois le parcours moyen, il a parcouru 5 km de moins qu'hier » en effectuant l'opération (42 – 5) :5 = 7,4 (km).* o: risoluzione di $5m + 5 = 42$

Si tratta qui di due operazioni successive, elementari per allievi di 13 anni o più che effettuano la trasformazione di ieri a oggi di 5 km di meno e poi della divisione per 5:

(42 – 5) : 5 = 7,4 (km)

corrispondente alla risoluzione dell'equazione, tornando indietro nel tempo: 5m + 5 = 42

Per trovare i chilometri dell'ultimo allenamento di Giovanni siamo partiti con trovare il valore del percorso medio: infatti la seconda affermazione dice che Giovanni ha percorso 5 volte il percorso medio con un totale di 5 km in meno rispetto ai 42 km del primo giorno, perciò abbiamo fatto 42 – 5 = 37, 37 : 5 = 7,4 . Il percorso medio à perciò lungo 7,4.

3.2.3. La sostituzione

Quando la lunghezza del percorso medio è determinata bisogna tenerne conto in una procedura deduttiva, per il seguito della risoluzione e passare alla tappa successiva. Cioè sostituire a percorso medio- due volte il valore 7,4 in una relazione data dal primo allenamento (ieri) e esprimerlo con i linguaggi a disposizione degli allievi.

- In linguaggio algebrico (da 1% a 2% nelle categorie da 8 a 10)
  Si tratta di passare da $c + 2m + 2l = 42$ a
  $c + 14,8 + 2l = 42$ poi a $c + 2l = 27,2$

- in linguaggio naturale (circa il 25% in categoria 7, da 35 al 50% in categoria 8, da 60 al 70% nelle categorie 9 e 10)
- (8^e) *Nous savons que 37 :5 = parcours moyen, cela donne 7,4 km. Ensuite nous pouvons voir que si on enlève 2 fois 7,4 à 42 cela donne 27,2 km.*
- (9^e) *Per trovare questo risultato abbiamo calcolato il percorso medio facendo 37 :5 = 7,4km. Dopo abbiamo tolto i due percorsi medi dal primo allentamento ottenendo 27,2 km.*

3.3. Procedura logico-deduttiva

Dopo la redazione del problema in linguaggio degli adulti e la sua traduzione in linguaggio degli allievi, abbiamo iniziato ad analizzare i compiti preliminari per la sua risoluzione: la determinazione del percorso medio nell'allenamento di oggi e la sua sostituzione negli allenamenti di ieri e di domani per arrivare infine al "punto focale" del problema, che una parte dei gruppi ha affrontato con tentativi successivi senza arrivare sempre alla soluzione corretta e che una parte ha cercato di risolvere con una procedura deduttiva nell'affrontare le due relazioni simultaneamente.

In lingua naturale

(ieri) 1 percorso corto e 2 percorsi lunghi rappresentano 27,2 (km)

(domani) 1 percorso corto e 4 percorsi lunghi rappresentano 48,8 (km)

o in linguaggio algebrico che fa apparire le somiglianze ancora più chiaramente e può condurre a una risoluzione di tipo algoritmico per "confronto" o per "sostituzione"

(ieri) $c + 2l = 27{,}2$

(domani) $c + 4l = 48{,}8$

=> $2l = 48{,}8 - 27{,}2 = 21{,}6$ => $l = 10{,}8$

3.3.1. Procedura per "confronto e sottrazione"

Uno dei rarissimi esempi osservati, che si avvicina al linguaggio algebrico (cat. 9):

… 2A + C = 42 km – (7,4•2) = 27,2 km

2A = 48,8 km - 27,2 km = 21,6 km

A = 21,6 : 2 = 10,8 km

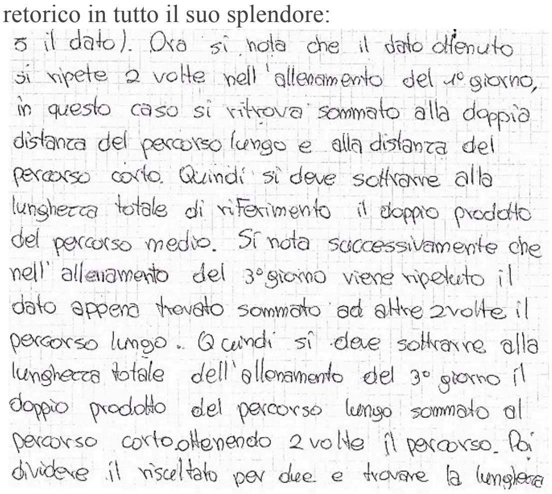
A + 3B + 2C = 10,8 km + (7,4 • 3) km + 2(27,2 – 21,6 km = 44,2 km

La maggior parte degli elaborati è redatta in lingua naturale dell'allievo, secondo una modalità retorica:

(cat. 8) *… Donc deux fois le grand parcours et une fois le petit donne 27,2 km et si on soustrait 48,8 km à 27,2 km cela nous donne deux fois le parcours long. 21,6 : 2 = 10,8.*

(cat. 9)*… a 27,2 km facevano parte 2 percorsi lunghi e 1 corto, poi abbiamo tolto al terzo allenamento. Al terzo allenamento rimanevano 2 percorsi lunghi: 21,6 km che poi abbiamo diviso par 2 trovando 10,8 km che equivalgono alla lunghezza del percorso lungo. Infine per trovare il percorso corto abbiamo tolto dal primo allenamento, cioè 42 km, 2 percorsi lunghi, cioè 21,6 km, et 2 percorsi medi, cioè 14,8 km, rimaneva cosi un percorso corto, cioè 5,6 km. …*

Un altro esempio linguaggio retorico in tutto il suo splendore:


5 il dato). Ora si nota che il dato ottenuto
si ripete 2 volte nell'allenamento del 1° giorno,
in questo caso si ritrova sommato alla doppia
distanza del percorso lungo e alla distanza del
percorso corto. Quindi si deve sottrarre alla
lunghezza totale di riferimento il doppio prodotto
del percorso medio. Si nota successivamente che
nell'allenamento del 3° giorno viene ripetuto il
dato appena trovato sommato ad altre 2 volte il
percorso lungo. Quindi si deve sottrarre alla
lunghezza totale dell'allenamento del 3° giorno il
doppio prodotto del percorso lungo sommato al
percorso corto ottenendo 2 volte il percorso. Poi
dividere il risultato per due e trovare la lunghezza

Il rigore del linguaggio può sembrare importante, ma se si guarda in dettaglio, rivela comunque qualche limite nella precisione retorica: “doppio prodotto” che non lo è…

3.3.2. Procedura “per moltiplicazione”

In linguaggio algebrico dell’adulto:

$c + 2l = 27{,}2 \quad \Rightarrow \quad 2c + 4l = 54{,}4$
$c + 4l = 48{,}8 \quad \Rightarrow \quad c + 4l = 48{,}8$
$\quad \Rightarrow \quad c = 54{,}4 - 48{,}8 = 5{,}6$

Si tratta di un altro algoritmo di risoluzione, detto talvolta “per moltiplicazione” dei due membri di un’equazione prima di procedere per “confronto o sottrazione” (che figura tra il 5 e il 10% degli elaborati, ma senza le scritture simboliche).
Si notano a questo proposito, come nella procedura per “confronto e sottrazione”, i limiti del linguaggio retorico: “si coglie” molto bene che gli allievi hanno percepito le due relazioni e sono capaci di confrontarle o di “manipolarle”. Sono nel registro numerico delle misure di lunghezze, anche se parlano ancora di “percorsi” e aggiungono dei “km” alle loro operazioni.

I linguaggi che mescolano le parole ai segni delle operazioni rivelano il bisogno di simbolismi per ridurre la lunghezza delle frasi.

3.3.3. Procedura “per tentativi”

Questa procedura è stata rilevata in circa il 30% degli elaborati di categoria 7 e nel 20% in categoria 8 e raramente nelle categorie 9 e 10; il linguaggio usato è descrittivo con connettivi logici tipici della dicotomia: se / allora / dunque / affermazione o negazione.
-*… On y est allé par déduction en s’aidant du parcours d’hier* ***Si*** *long = 10* ***alors*** *court = 42 – 2 · 10 – 7,4 · 2 = 7,2 pour le parcours court et pour demain 4 · 10 + 7,2 =* ***47,2 et non 48,8 donc c’est faux.*** *Si long = 10,7 alors court = 42 – 2 · 10,7 – 7,4 · 2 = …* ***Si*** *long = 10,8* ***alors*** *court = 42 – 2 · 10,8 – 7,4 · 2 = 5,6 pour le court et pour demain 4 · 10,8 + 5,6 = 48,8,* ***ça joue***

In alcuni casi gli allievi si limitano a evocare la procedura:
Abbiamo scoperto che il percorso lungo è 18,4 km, il percorso media è 8 km e il percorso corto è di 4 km. Nel ultimo allenamento Giovanni ha percorso 50,4 km (sbagliato ma coerente con le scelte precedenti)

3.4. Correlazione tra i risultati, l’età e il linguaggio

Gli indici di riuscita del problema sono di ordine statistico: il gran numero di elaborati (2222) permette comunque di fare osservazioni significative.
La prima riguarda l’effetto dell’età degli allievi sulle medie dei punteggi attribuiti che passano rispettivamente da 1,6; 2,2; 2, ; 3,2 dalla categoria 7 alla categoria 10: per questo tipo di problema dove si tratta di gestire un sistema di tre relazioni (equazioni lineari) con tre indeterminate, è evidente che gli allievi di 15 anni ottengono riuscite migliori degli allievi di 12.
L’analisi a posteriori condotta su diverse centinaia di elaborati di tre sezioni (FC, SR e PR) mostra che anche la frequenza dei ragionamenti deduttivi aumenta sensibilmente con l’età degli allievi.
Questo tipo di procedura richiede anche un linguaggio più rigoroso della semplice descrizione dei tentativi: bisogna descrivere le fasi della risoluzione, sostituire i valori intermedi via via che vengono trovati.
Di conseguenza c’è una correlazione evidente tra le capacità di ragionamento degli allievi e il linguaggio per esplicitarli.

3.4.1. Gli errori e il linguaggio

Gli elaborati esaminati hanno mostrato una grande varietà di procedure per arrivare alla soluzione corretta del problema e anche una grande varietà di linguaggi per descriverle. Vale la pena esaminare anche il linguaggio con il quale ci hanno restituito la loro incapacità di arrivare a una risposta corretta. La lingua naturale “ricca” non è sinonimo di rigore e logica.
Segue un esempio di spiegazioni in linguaggio “ricco” (descrizione ampia, frasi lunghe, indicatori temporali… ma con numerosi sillogismi o affermazioni errate, in blu):

(7) *Abbiamo trovato i percorsi medi di oggi che è 37 : 5 = 7,4 km poi abbiano sottratto 7,4 × 2 - 42 = 27,2 km. Abbiamo visto che domani Giovanni farà 48,8 km, di quelli sono 4 percorsi lunghi, quindi abbiamo ipotizzato che un percorso lungo ha 0,2 km, poi siamo tornati sulla giornata di ieri e abbiamo moltiplicato quel 0,2 che è 0,4 per poi sottrarlo 27,2 che fa 26,8 poi tolto il 0,8 – 2 unità = 24 : 2 = 12 + 0,2 = 12,2 = percorso lungo. Quindi il*

percorso lungo è 12,2 quello medio 7,4 e infine quello corto 2,8.
Infine per trovare quanti kilometri che ha fatto Giovanni di dopo domani che è 40 km.
(quest'ultimo risultato non è coerente con i precedenti).

In linguaggio "povero" gli esempi non mancano

- Cat. (7) *On a calculé 42 – 5 = 37 pour diviser 37 : 5 = 7,4 un parcours moyen = 7,4 un parcours court = 5,2 un parcours long = 10,9*
  10.9 × 4 +5,2 = 48,8 10,9 + 22,2 + 10,4 = 43,5
  Jean aura fait 43,3 à son dernier entraînement

- (Cat. 7) *Lors de son dernier entraînement, Jean fera 40,3 kilomètres*. (frase ricopiata dall'enunciato)
  Par coup de chance : (12,1 + 7,4 + 7,4 + 7,4 + 3 + 3 = 40,3)

- *1 parcours moyen fait : 7 km car 42 – 5 = 37 et 5 × 7 = 35. Il fera 35 km.*

- *On fait 4 × 42 = 168 – 5 = 163 – 48,8 = 114,2 donc ça fait le résultat.*

3.5 Linguaggio e pensiero

Il problema "Allenamenti in bici" è rivelatore dell'uso di un linguaggio naturale da parte dell'allievo per esprimere il pensiero nella ricerca delle differenti lunghezze dei percorsi. Vi troviamo parole, frasi, numeri, degni di uguaglianza e operazioni, ma anche simboli per ridurre le scritture. Ad esempio la *lunghezza del percorso medio* diventa *percorso medio,* poi medio, poi *M* … .
Queste scritture sono là per ridurre la lunghezza dei testi e mettere in evidenza le grandezze o i valori ancora indeterminati.
Portano anche in sé il passaggio da oggetti fisici – i percorsi con la loro rappresentazione spaziale e materiale – alle loro misure che sono "numeri di km" e talvolta ai numeri (numeri reali)).
Vi sono tutti gli ingredienti necessari all'introduzione dei simbolismi algebrici.
Possiamo ricordare che, storicamente, il linguaggio algebrico ha messo dei secoli a svilupparsi e a passare dalla forma retorica al simbolismo attuale, passando per forme intermedie.
Il linguaggio algebrico figura attualmente in tutte le classi delle nostre categorie da 8 a 10, ma si riflette sempre sulla maniera di introdurlo?
Nel nostro "Allenamenti in bici", si parte da un contesto. I simboli per rappresentare i percorsi sono una creazione degli allievi e rispondono a un loro bisogno. Non si tratta di *x* o di *y* caduti dal cielo che è necessario combinare con operazioni aritmetiche.

4. Che cosa fare dei linguaggi degli allievi

Nell'interessarci alla maniera con la quale ci rivolgiamo agli allievi e alla maniera nella quale questi ultimi esprimono il loro pensiero, scopriamo e riscopriamo la diversità dei linguaggi degli uni e degli altri. L'elaborazione e l'analisi a posteriori dei problemi del RMT costituiscono uno strumento privilegiato per la messa in evidenza per la diversità di tali linguaggi; gli esempi dei quattro problemi analizzati in precedenza lo testimoniano così come lo testimoniano anche tutte le osservazioni e riflessioni condotte sugli altri problemi nel dispositivo della concezione delle analisi del RMT.
Al di là della messa in evidenza della diversità di linguaggio possiamo elaborare qualche elemento di risposta alla questione dell'uso di questi dati. Dobbiamo accontentarci di raccoglierli o possiamo trarne profitto, in particolare per quanto riguarda i linguaggi degli allievi?

Sembra dapprima importante **riconoscerli:** sapere che esistono, che hanno diritto di esistere, che appaiono spontaneamente in tutti gli elaborati che analizziamo, che sono differenti dai nostri linguaggi di adulti e che la cosa è naturale. Su questo punto dovremmo vedere un'analogia con un bambino che si sta appropriando della sua lingua materna o con qualcuno che impara una lingua straniera. In questi casi si adotta un atteggiamento di ascolto e di accettazione di espressioni che non sono ancora quelle dell'adulto, ma che sono in evoluzione "naturale".
Dopo aver riconosciuto i vari linguaggi sembra necessario **cercare di capirli**: dietro le parole, i segni e i disegni, ci sono rappresentazioni mentali che rivelano ostacoli, concezioni errate o incomplete… determinanti per gli interventi didattici che seguono la risoluzione del problema.
Infine si tratta di **rispondere con un linguaggio appropriato:** utilizzare con gli allievi un linguaggio più evoluto del loro, ma che resti alla loro portata; traducendo le loro espressioni e i loro simboli in un linguaggio più rigoroso, facendo capire le ragioni di tale evoluzione, incoraggiando così le espressioni corrette, …

Tutti questi atteggiamenti, dall'ascolto al dialogo, sono quelli dell'insegnante che si astiene dal giudicare o dall'imporre, ma che cerca di partecipare alla costruzione delle conoscenze da parte dell'allievo e a un

miglioramento della maniera di esprimerle. Ritroviamo così il titolo di queste nostre riflessioni:
Scriviamo dunque siamo.

Riferimenti bibliografici

Bartezzaghi S: 2017, *Parole in gioco*, Bompiani.
CREM: 1999, *La matematica dalla scuola materna alla maturità*, A cura di L. Grugnetti e V. Villani, BO: Pitagora Editrice.
Julo J.: 1995, *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*.
Piaget J. Inhelder B.: 1959, *La genèse des structures logiques élémentaires : classifications et sériations*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé
Monnier E.: 2017, 'Et l'homme se mit à écrire, *L'écriture, comment elle a changé le monde,* Les cahiers Science & Vie., N° 172.
Speranza F.: 1997, *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.
Vergnaud G.: 1994, *L'enfant la mathématique et la réalité*.

J'ÉCRIS DONC JE SUIS, EN MATHÉMATIQUES AUSSI DANS LE CONTEXTE DES PROBLÈMES DU RMT[1]

Lucia Grugnetti, François Jaquet

Il y a une autre vie du langage, inconnue de nous, opiniâtrement convaincus de la transparence utilitaire du vocabulaire, persuadés que les mots servent seulement pour dire « cette chose là ». Ceci est vrai, et ils le font très bien, mais une fois mis au monde, les mots se définissent une autre existence, opaque au sens transitif et référentiel auquel nous voudrions les clouer, et tressent entre eux des relations irrationnelles et merveilleuses, pour qui réussit à s'abandonner à leur jeu. (Stefano Bartezzaghi- *Parole in gioco*, Bompiani, 2017)

1. Introduction

Le saut temporel et épistémologique du *Cogito ergo sum* de René Descartes (*Discours sur la méthode*-1637), lié à notre *J'écris donc je suis* du RMT, peut apparaître un peu audacieux, mais nous avons pourtant décidé de le tenter avec une bonne dose de courage ou peut-être d'inconscience.
Nous nous sentons cependant soutenus, comme s'ils nous offraient un parachute solide et sûr, par deux de nos maîtres à penser qui n'ont pas pu malheureusement nous accompagner au-delà de nos débuts : Nicolas Rouche et Francesco Speranza.
Avec les mots de Nicolas Rouche (1999), *La mathématique n'est pas une science autarcique ; c'est une forme de pensée.* Si la caractéristique principale de nos problèmes de RMT est de mobiliser « la pensée », en allant au-delà des seules applications de formules et définitions, alors ces problèmes ne peuvent qu'être étroitement intriqués avec la langue naturelle qui permet à la pensée de s'exprimer.
De son côté, Francesco Speranza (1993) nous rappelle que *Croire que la connaissance mathématique – et plus généralement scientifique – soit indépendante du langage, et que celui-ci est un instrument neutre, est une opinion ingénue. Les idées scientifiques se précisent justement à travers le langage avec lequel elles sont formulées et transmises, même lorsqu'il s'agit de symbolismes purs*.
De là vient le titre de notre conférence qui veut mettre l'accent sur l'intrication entre les problèmes et la langue naturelle qui se développe au cours des différentes phases de l'activité de rédaction des énoncés, puis de résolution, jusqu'à la réponse à la demande pour aboutir à l'explication de la procédure de résolution.
Pour ces deux phases, c'est la langue écrite, dans ses différentes acceptions, que nous pouvons analyser de manière critique.
La langue parlée entre aussi en jeu dans la discussion au sein des groupes qui résolvent le problème. Mais il est malheureusement difficile ou quasi impossible, d'entrer dans leurs échanges oraux vu qu'ils doivent travailler en autonomie durant les épreuves. Cependant, là où les problèmes sont proposés en classe, la mise en commun des procédures de résolution a besoin de la langue parlée qui a ses propres caractéristiques très intéressantes et riches en indications.
En fait, *l'écrit est rigide et séquentiel et n'offre pas la possibilité de rétroaction (feedback). Dans un dialogue, celui qui parle a toujours la possibilité de tenir compte de l'interlocuteur – interruption (que dis-tu ? et alors), mimique – ou aussi de son impassibilité, qui peut être interprétée comme expression de désintérêt, voire de désapprobation. Dans l'écrit on ne peut pas intervenir au cours de la tâche et, surtout en se référant à un destinataire pluriel et indifférencié, on ne peut même pas en imaginer les réactions possibles* (Encyclopédie Treccani de la langue italienne).

2. La langue des adultes dans les énoncés et la langue des élèves dans leurs explications

Comme le dit Jean Julo (1995) *L'énoncé du problème et le contexte sémantique qui le caractérise, constituent une sorte de contrat de communication entre celui qui donne le problème et celui qui cherche à le résoudre. Ce contrat particulier qui constitue l'énoncé du problème (et plus généralement tous les éléments qui servent à le présenter) repose donc sur des relations complexes et subtiles entre d'une part les informations que l'on souhaite donner à propos de l'objet du problème et de la tâche à réaliser et, d'autre part, le contexte sémantique que l'on utilise pour communiquer les informations.*

Dans cette optique, Il nous a semblé particulièrement intéressant d'analyser, d'une part, la "corrélation" entre les énoncés des problèmes avec comptage à rebours et les explications des élèves, selon leurs aspects linguistiques,

[1] Cet article reprend la conférence prononcée par les auteurs lors de l'ouverture de la vingt et unième rencontre de l'ARMT, à Charleroi (Belgique), le 27 octobre 2017.

non disjoints, par la force des choses, de leurs aspects logiques et, d'autre part, un problème de type algébrique qui a produit une grande richesse d'incitations linguistiques dans les explications des élèves.
Ces problèmes sont présentés dans un cadre temporel explicite.

Il va de soi que c'est l'analyse a posteriori de centaines de copies qui permet d'entrer dans la corrélation citée précédemment entre le langage de l'énoncé et le langage de l'élève.
L'analyse des problèmes caractérisés par un « compte à rebours » se déroule selon les grandes lignes déterminées par les *Critères d'élaboration des problèmes du RMT*[2], rédigés par le « Groupe de pilotage » responsable de la « grande machine » qui dirige la production et la gestion des problèmes mentionnés.
Dans la description de ces *Critères* on précise que l'élaboration de nos problèmes s'inscrit dans une démarche collective avec une phase de préparation qui aboutit à un énoncé et une analyse a priori, une phase d'expérimentation par les élèves et une phase de recueil des données qui permet de connaître non seulement les taux de réussite, les obstacles et difficultés rencontrées par les élèves, mais aussi de se prononcer sur les choix effectués a priori. Le caractère scientifique de la démarche dépend de la manière dont on tient compte des données recueillies pour la préparation de nouveaux problèmes, afin d'améliorer son efficacité.

2.1. À partir des Critères pour l'élaboration de problèmes

Toujours dans les *Critères* on précise que l'idée d'un problème du RMT naît généralement dans un contexte donné, elle se traduit ensuite par le texte de l'énoncé et les figures qui l'accompagnent. Mais le cheminement entre l'idée et sa formulation écrite nécessite de nombreux allers et retours, ce qui fait qu'on ne peut pas les traiter séparément. Les élèves partent de la lecture de l'énoncé, doivent s'approprier le contexte sans aucune aide ni facilitation de la part de l'enseignant. Eux aussi feront de nombreux allers et retours entre énoncé et contexte.

Le contexte et sa présentation
On prend ici en considération deux des nombreux aspects du contexte signalés dans les *Critères* :
1.1. *Universalité du contexte* : le contexte devrait être indépendant des pays, régions, traditions, langue, pratiques et habitudes de proximité (l'école, la classe, …) afin de ne favoriser ni de prétériter personne.
Il faut s'interroger sur la manière dont les élèves peuvent entrer dans un contexte qu'on pense être proche de leur réalité, se demander s'il n'est pas trop artificiel, complexe, stéréotypé, si un contexte fictif ne serait pas plus accessible …
1.2. *Le récit (langue et syntaxe) qui décrit le contexte :* de nombreux énoncés décrivent la situation par un récit, avec des personnages, des événements, des lieux … et un déroulement chronologique. Le lecteur doit pouvoir reconstituer « l'histoire » et lui donner un sens, avant même de comprendre où se situe la question et quelles sont les données numériques ou géométriques à en extraire.
Le récit doit donc être cohérent, respecter les temps (passé, présent, futur), et dégager clairement les épisodes nécessaires à l'établissement des relations mathématiques.
La lisibilité de nos textes pour des élèves, sans aide extérieure, est évidemment le critère prioritaire : il faut tenir compte de la syntaxe, du vocabulaire, de la complexité des phrases, de la terminologie, en fonction des catégories. Tenir compte aussi de la présentation des données : se demander si elles apparaissent clairement à la lecture, si les données inutiles sont souhaitables ou non.

Les aspects mathématiques
Le RMT privilégie les problèmes qui peuvent nous en dire plus sur la manière dont les élèves mobilisent les savoirs reconnus dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques.
Si l'on n'arrive pas à définir ces savoirs, le problème peut cependant être intéressant pour l'ingéniosité qu'il faut pour le résoudre, pour le défi qu'il propose, pour le plaisir avec lequel les élèves le résolvent
Il faut donc s'assurer que l'une ou l'autre de ces conditions soit remplie avant de retenir un problème.

2.2. Le nez de Pinocchio

2.2.1. L'énoncé (RMT 7, cat. 3, 4, 5)

Le nez de Pinocchio a 5 cm de long. Quand Pinocchio dit un mensonge, la Fée aux cheveux bleus l'allonge de 3 cm, mais quand il dit la vérité, la Fée le raccourcit de 2 cm.
A la fin de la journée, Pinocchio a dit 7 mensonges et son nez a 20 cm de long.
Combien de fois Pinocchio a-t-il dit la vérité à la Fée au cours de la journée ?

---

[2] Roland Charnay, Georges Combier, François Jaquet, Daniela Medici, Graziella Telatin.

2.2.2. Le contexte

Si on reprend les points 1.1 et 1.2 concernant *l'universalité et l'histoire du contexte* se rapportant à la *langue* et à la *syntaxe*, comme déjà soulignés dans (Grugnetti, Dupuis, 2001), le contexte de ce problème permet aux élèves de se l'approprier facilement, du moins dans sa phase initiale car presque tous les enfants de par le monde connaissent le personnage de Pinocchio ainsi que son problème de nez qui s'allonge lorsqu'il ment. De même, les enfants connaissent aussi la Fée Bleue qui récompense ou pardonne les mensonges de notre sympathique pantin.
De ce fait, l'énoncé du problème contient tous les ingrédients indispensables à ce conte célèbre.
De plus, les phrases ne sont pas trop longues et l'énoncé est bref, condition requise pour les élèves de 8 à 9 ans comme on le sait bien.

2.2.3. Le contenu mathématique

La longueur finale du nez à la fin de la journée est mentionnée dans l'énoncé, mais, puisque à un certain stade de la procédure de résolution, la longueur du nez est supérieure à celle qui est donnée dans l'énoncé, « un retour en arrière » est nécessaire, qui met en jeu une suite de transformations qui implique, dans ce cas, un modèle additif aussi bien qu'un modèle multiplicatif. Le problème met également en jeu des connaissances de numération.

2.3. Les hirondelles - Hirondelles et colombes

Les deux problèmes sont étroitement « apparentés », leur structure de base est la même. Le premier est proposé en catégorie 3 et le second, avec une variable supplémentaire, en catégories 4 et 5.

2.3.1. Les énoncés

Les hirondelles (RMT 23, cat. 3)
Quand Laurent se réveille il voit que des hirondelles sont posées sur un fil électrique devant sa maison.
Il ouvre la fenêtre de sa chambre, 17 hirondelles s'envolent.
Un peu plus tard, 12 hirondelles viennent rejoindre celles qui sont restées sur le fil.
Placé derrière sa fenêtre, Laurent compte les hirondelles qui sont maintenant posées sur le fil électrique. Il y en a 36.
Combien y avait-il d'hirondelles sur le fil avant que Laurent ouvre la fenêtre ?
Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

Hirondelles et colombes e colombe (RMT 25, cat. 4, 5)
Quand Laurent se réveille, il voit que des hirondelles et des colombes sont posées sur un fil électrique devant sa maison.
Il ouvre la fenêtre de sa chambre, 11 hirondelles et 6 colombes s'envolent.
Un peu plus tard, 7 hirondelles et 11 colombes viennent rejoindre les oiseaux qui sont restés sur le fil.
Laurent compte les oiseaux qui sont maintenant posés sur le fil électrique. Il y a 23 hirondelles et 13 colombes.
Combien y avait-il d'oiseaux sur le fil avant que Laurent ouvre la fenêtre ?
Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

2.3.2. Le contexte

En ce qui concerne *l'universalité et l'histoire (langue et syntaxe*) : le contexte du problème fait intervenir comme personnages deux types d'oiseaux connus de tous.
Comme pour « Le nez de Pinocchio », les phrases ne sont pas longues et se succèdent dans l'ordre chronologique comme une histoire dont les oiseaux sont les personnages.

2.3.3. Contenu mathématique

Il s'agit encore d'un problème avec comptage à rebours dans le temps où il faut trouver à chaque fois un état initial dans une situation où l'état final, connu, résulte d'une diminution suivie d'une augmentation.
En particulier, dans le premier problème, il s'agit de trouver « l'état initial », dans une situation où « l'état final » (36) est le résultat obtenu après une diminution (-17) suivie d'une augmentation (+12) ; alors que dans le second il faut trouver la somme de deux nombres, dont chacun d'eux est l'état initial d'une situation où l'état final est obtenu après une diminution suivie d'une augmentation.

2.4. Comparaison des énoncés : leur structure en détail

Une première analyse des énoncés des problèmes précédents, à la lumière des *critères* cités relatifs au contexte semblerait s'inscrire dans ce que J. Julo, comme rappelé précédemment, note comme un *contrat de communication entre celui qui donne le problème et celui qui cherche à le résoudre.*

Lorsqu'on observe les résultats globaux obtenus par les centaines de classes qui participent au RMT, on trouve :
- environ 70% de réussites pour le problème « Le nez de Pinocchio ».
- environ 40% de réussites pour les problèmes « similaires », « Les hirondelles » et « Hirondelles et colombes ».

Quelles sont les raisons de ces grandes différences ?
Ces problèmes examinés s'inscrivent tous dans la famille de ceux qui exigent un raisonnement rétroactif.
Où résident alors les aspects qui ont conduit à des résultats aussi différents ?

2.4.1. Les analyses de la tâche des trois problèmes

En ce qui concerne « Le nez de Pinocchio » l'analyse de la tâche élaborée en 1999 est très succincte. C'est seulement au cours des années que ces analyses se sont développées et détaillées, bien que toujours dans un langage d'adultes.
Analyse de la tâche :
- déterminer que, pour 7 mensonges, le nez de Pinocchio s'allonge de 21 cm (7x3), qui, ajoutés aux 5 cm d'origine pourrait atteindre 26 cm (21+5) ; si le nez de Pinocchio n'a que 20 cm, cela signifie qu'il s'est raccourci de 6 cm, (26 - 20) et que, par conséquent, il a dit 3 fois la vérité (6:2) ;
- dessiner une bande numérique et effectuer 7 déplacements de 3 en 3 à partir de 5 pour arriver à 26 et retourner à 20 en 3 déplacements de 2 en 2 ;
- effectuer par essais des déplacements alternés, (ou additions et soustractions) pour arriver à 20 avec 7 déplacements de 3 en avant (ou 7 x 3).

On trouve une analyse de la tâche plus détaillée et articulée dans la fiche correspondante de la Banque de problèmes du RMT, rédigée à la lumière de l'analyse a posteriori (Cfr. Grugnetti, Dupuis, 2001) :
- De l'histoire bien connue de Pinocchio, transposer l'énoncé en une suite d'opérations arithmétiques partant d'une longueur de 5 cm au départ et aboutissant à une longueur de 20 cm, par des additions de 3 et des soustractions de 2.
- Se rendre compte qu'on ne connaît pas l'ordre dans lequel s'effectuent ces opérations à partir de 5, mais qu'on sait qu'il y a 7 additions de 3 et qu'il faudra trouver le nombre, encore indéterminé, de soustractions de 2 pour arriver à 20.
- Utiliser éventuellement un support ou un modèle pour représenter la situation ; par exemple une ligne graduée sur laquelle noter les différentes positions ou des flèches dans un sens et d'autres dans le sens contraire.

Il y a plusieurs procédures manières d'aborder la tâche des calculs :
- Par essais, pas à pas, en partant de 5 et en effectuant des additions (allongements) de 3 et des soustractions (diminutions), pour chercher à atteindre 20 après sept additions et constater que trois soustractions sont nécessaires. C'est au cours de ces essais qu'on peut se rendre compte que l'ordre des sept additions et des trois soustractions n'a pas d'influence sur le résultat (à l'exception du cas où les trois soustractions interviendraient en premier, ce qui n'est pas possible de réaliser).
- En percevant la structure temporelle des allongements et réductions : calculer que les 7 mensonges correspondent à un allongement de $7 \times 3 = 21$ (cm) qui conduit à $5 + 21 = 26$ (cm) ; calculer la différence $26 - 20 = 6$ cm et finalement, chercher le nombre de réductions de 2 cm pour obtenir ces 6 cm, par une division ($6 : 2 = 3$) ou une multiplication lacunaires ($2 \times \ldots = 6$). (Cette procédure correspond à la résolution de l'équation $5 + 21 - 2x = 20$)
- La différence de 6 cm peut aussi être déterminée entre l'allongement $7 \times 3 = 21$ (cm) et les $15 = 20 - 5$ (cm) de l'augmentation globale.

Voici l'analyse de la tâche élaborée a priori pour « Les hirondelles » :
- Reconnaître l'ordre chronologique et les variations entre les états successifs d'une grandeur. Etat initial : ouverture de la fenêtre avec un nombre inconnu d'hirondelles - départ de 17 hirondelles (première variation) et état intermédiaire plus petit que l'état initial - arrivée de 12 hirondelles (deuxième variation) et état final, de 36, plus grand que l'état intermédiaire. Identifier l'inconnue : l'état initial.
- Traduire les variations par les opérations adaptées et effectuer les calculs correspondants ou opérer sur des dessins ou des objets en recourant au comptage :

  Soit dans l'ordre chronologique, par essais successifs avec une hypothèse de départ (par exemple $20 - 17 + 12 = 15$, « trop petit », ... pour aboutir à $41 - 17 + 12 = 36$),

  Soit en remontant dans le temps à partir de 36 en étant bien conscient qu'il s'agit d'utiliser les opérations réciproques des précédentes : $36 - 12 + 17 = 41$.

  On peut aussi faire le bilan des deux variations : « diminution de 5 ($17 - 12$) par rapport à l'état initial ».

Alors que l'analyse de la tâche du problème « Hirondelles et colombes » se présente ainsi :

- Reconnaître l'ordre chronologique et les variations entre les états successifs de deux grandeurs. Etat initial : ouverture de la fenêtre avec un nombre inconnu d'hirondelles et de colombes - départ de 11 hirondelles et 6 colombes (première variation) et état intermédiaire plus petit que l'état initial - arrivée de 7 hirondelles et 11 colombes (deuxième variation) et état final, de 23 hirondelles et 13 colombes, plus grand que l'état intermédiaire. Identifier l'inconnue : l'état initial (nombre total d'hirondelles et de colombes).
- Comme c'est le nombre total d'oiseaux au départ qui est demandé, deux raisonnements sont possibles :

  Le premier portant sur le nombre total d'oiseaux à chaque étape ;

  Le deuxième sur le nombre de chaque catégorie d'oiseaux à chaque étape.
- Traduire les variations par les opérations adaptées et effectuer les calculs correspondants ou opérer sur des dessins ou des objets en recourant au comptage :

  soit dans l'ordre chronologique, par essais successifs avec une hypothèse de départ portant, soit sur le nombre total d'oiseaux (par exemple 20 – 17 + 18 = 21, « trop petit », ... pour aboutir à 35 – 17 + 18 = 36), soit d'une part sur le nombre d'hirondelles et d'autre part sur le nombre de colombes pour aboutir à 27 – 11 + 7 = 23 et 8 – 6 + 11 = 13 et terminer en totalisant le nombre de colombes et d'hirondelles : 27 + 8 = 35

  soit en remontant dans le temps à partir du nombre total d'hirondelles et de colombes 36 en étant bien conscient qu'il s'agit d'utiliser les opérations réciproques des précédentes : 36 – 18 + 17 = 35 ou séparément à partir du nombre d'hirondelles (23 – 7 + 11 = 27) et de colombes (13 – 11 + 6 = 8) et terminer en totalisant le nombre de colombes et d'hirondelles : 27 + 8 = 35

  On peut aussi faire le bilan des deux variations soit pour chaque catégorie d'oiseaux : « diminution de 4 (11 – 7) par rapport à l'état initial pour les hirondelles et augmentation de 5 (11 – 6) pour les colombes », soit pour l'ensemble des oiseaux : augmentation de 1 (18 – 17) par rapport à l'état initial.

2.4.2. Le recours à la théorie de Gérard Vergnaud

Dans les analyses de la tâche présentées précédemment on parle explicitement « transformations » et nous connaissons bien leur importance dans l'apprentissage des mathématiques ainsi que les différentes typologies de transformations qui interviennent dans un processus de résolution.
En nous référant à G. Vergnaud (1994), nous voyons de près la structure « détaillée » des énoncée en jeu.
Pour Vergnaud, surtout *Ce qui se passe dans le temps peut être décrit sous la forme d'une suite de transformations* (p. 38) et nos énoncés se développent effectivement dans le temps, ce qui implique une transformation ou une suite de transformations reliant un état initial et un état final.
Ces trois éléments, état initial, état final et la (ou les) transformation(s) n'ont pas le même statut.
En ce qui concerne le problème « Le nez Pinocchio », la situation est du type suivant :

État initial **: connu**
État final **: connu**

Recherche des transformations (une connue et complexe et l'autre **inconnue** qui peut encore se décomposer en trois transformations ; 7(+ 3) et x(-2))

En ce qui concerne le problème "Les hirondelles" la situation est du type suivant :
État initial **: inconnu**
Transformation : **connu** (- 17)
État intermédiaire : **inconnu**
Transformation : **connu** (+ 12)
État final : **connu**

Les problèmes « Hirondelles et colombes » et « Les hirondelles » ont la même structure. Au contraire du problème « Le nez de Pinocchio », ils requièrent, en plus d'un compte à rebours, **un retour indirect dans le temps**, aspect qui en augmente sensiblement la complexité, pour trouver l'état initial **inconnu**.

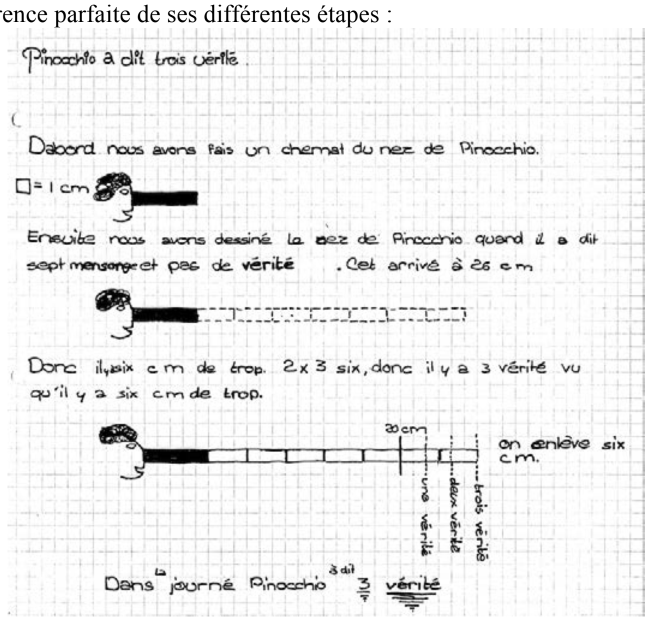
2.5. Le rôle irremplaçable des explications des élèves dans leur langage

Une importance fondamentale est attribuée, pour les problèmes du RMT, à l'analyse a posteriori qui permet d'aller bien au-delà des points attribués, destinés à établir un classement.
Les analyses a posteriori, qui offrent des données statistiques intéressantes, permettent « d'entrer dans le monde des élèves », lesquels, au travers de leurs explications exprimées dans un grande diversité formes qui vont de la langue naturelle au langage iconique, graphique, … nous indiquent les chemins qu'ils ont parcouru pour résoudre un problème donné. Elles nous permettent de comprendre où se sont situés les éventuels obstacles et erreurs.
Elles nous surprennent parfois par les procédures que nous, adultes, n'avions pas imaginées.
E. Monnier, dans un article de Science & Vie, qui a dédié un de ses « cahiers » entier à l'écriture (Cfr, bibliographie,

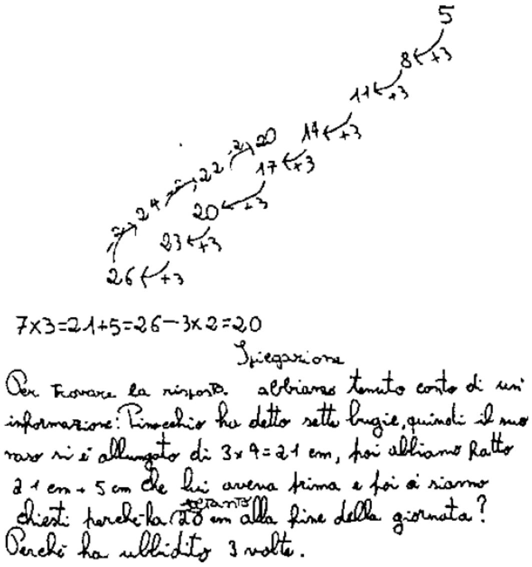
p. 40), cite l'anthropologue britannique Jack Goody pour arriver à clarifier que *seule l'écriture a permis de développer les notions aristotéliciennes de contradiction ou de syllogisme. Contrairement à un exposé oral, qui ne peut être contredit que dans l'instant, le texte écrit permet une critique différée par un public différent. Il s'intègre à un corpus permanent d'arguments que l'on peut confronter, dont on peut comparer le début et la fin, examiner à loisir chacune des étapes. L'esprit critique ne serait donc véritablement né qu'avec l'écriture.*

2.5.1. Nos petits "Vergnaud" avec un langage naturel et iconique

La situation « état-transformation-état » du problème « Le nez de Pinocchio », est représentée de manière exemplaire dans la solution proposée par une classe de catégorie 3 de la Suisse romande, avec le recours à un schéma qui met bien en évidence la **recherche des transformations**. Le schéma est en plus illustré en langue naturelle avec une cohérence parfaite de ses différentes étapes :



Les transformations, dont une est donnée mais complexe et l'autre est **inconnue** - qui peut encore se décomposer en trois transformations ; 7 × (+ 3) et x × (-2) - sont parfaitement gérées par une classe di Parma de catégorie 4, au moyen d'un schéma fléché : l'explication en langue naturelle montre la clarté des idées des enfants qui demandent « pourquoi a-t-il seulement 20 cm à la fin de la journée ? » et donnent la réponse « parce qu'il a obéi trois fois ! » trouvant ainsi ce que nous avons indiqué ci-dessus par le recherche de x dans x × (-2) :

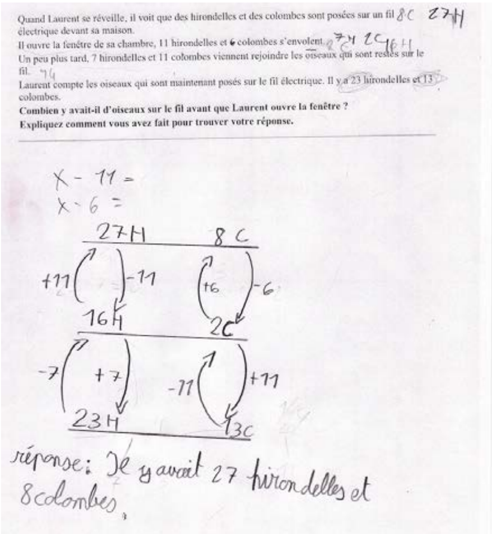


Alors que les deux copies précédentes utilisent un langage iconique pour la recherche de la solution suivi d'une explication en langue naturelle, dans d'autres cas la recherche de la solution s'est déroulée de manière appropriée

- que nous pourrions même qualifier de savante – selon une analyse de type « hypothético-déductif » de l'énoncé, avec les passages logiques que nous avons mis en évidence en bleu
Si Pinocchio a son nez de 5 cm et qu'il a dit 7 mensonges et que son nez augmente de 3 cm à chaque mensonge, Pinocchio a donc son nez de 26 cm. Mais, vu que son nez doit être de 20 cm il a donc dit 3 fois la vérité.
7×3 = 21+5 = 26 – (3×2) = 20.

En effet, selon Piaget, on sait que, à cet âge, le élèves sont au stade des **opérations concrètes** (ils commencent à conceptualiser des raisonnements logiques) et n'ont pas encore atteint celui des **opérations formelles** (raisonnements hypothético-déductifs).

Dans le cas du problème « Les hirondelles » ou de celui des « Hirondelles et colombes » **l'état initial inconnu** et le **retour nécessaire dans le temps** ont vraisemblablement constitué un gros obstacle sur le chemin d'une résolution correcte pour de nombreux groupes d'élèves.
Ceci n'empêche pas que dans certains cas, les élèves ont parfaitement géré la situation comme le montre par exemple la copie suivante dans laquelle le recours à un langage iconique illustre parfaitement le **parcours temporel** nécessaire pour arriver à la solution :



On trouve aussi, dans le cas du problème des « Hirondelles et colombes » de beaux exemples « d'analyses séquentielles implicites » de l'énoncé permettant une résolution correcte :
On a compté combien d'hirondelles et de colombes sont venues ou parties. 11 hirondelles sont parties et 7 sont revenues. Il y en a 4 de moins qu'au départ. 6 colombes sont parties 11 sont revenues. Il y en a 5 de plus qu'au départ.
On fait : 23 + 4 = 27, 13 - 5 = 8 et 27 + 8 = 35 oiseaux

La diversité des langages utilisés par les élèves va certainement au-delà des prévisions des auteurs de l'énoncé.

2.5.2. L'importance des explications des élèves dans le cas de réponses erronées

Bien que le problème « Le nez de Pinocchio » ait été résolu correctement par environ 70% des classes auxquelles il a été proposé, il faut regarder attentivement le 30% des autres copies pour comprendre le type d'erreurs ou de confusions apparues dans certaines classes.
Par exemple, lorsqu'on se trouve confronté à une solution comme celle-ci :
1) 7 x *5 = 35 (mensonges durant toute la journée)*
2) 35 – 20 = 15
3) 15 : 2 = 7,5 qui sont les vérités. (Catégorie 5 – I)
C'est l'explication en langue naturelle qui clarifie le fait que les « nombres purs (ou abstraits) » sont devenus prioritaires sur les « grandeurs » et sur les « mesures » qui ont ainsi perdu toute signification. Et ainsi, puisqu'il s'agit désormais de « nombres purs », on peut accepter un nombre décimal pour les vérités.

L'opération n° 1 est 7 mensonges fois 5, la mesure du nez, et comme cela j'ai trouvé 35 mensonges en tout. Puis j'ai fait l'opération n° 2 : les mensonges dits dans toute la journée moins la mesure du nez de Pinocchio à la fin *de la journée et alors le résultat 15 est la mesure de combien le nez de Pinocchio s'est raccourci. Enfin, pour l'opération n° 3, j'ai divisé par 2 la mesure de combien le nez s'est raccourci, la mesure de combien chaque vérité fait raccourcir le nez et j'ai trouvé le nombre de vérités : 7,5.*

2.5.2.1. Le problème « Les hirondelle » ; réponse « 31 »

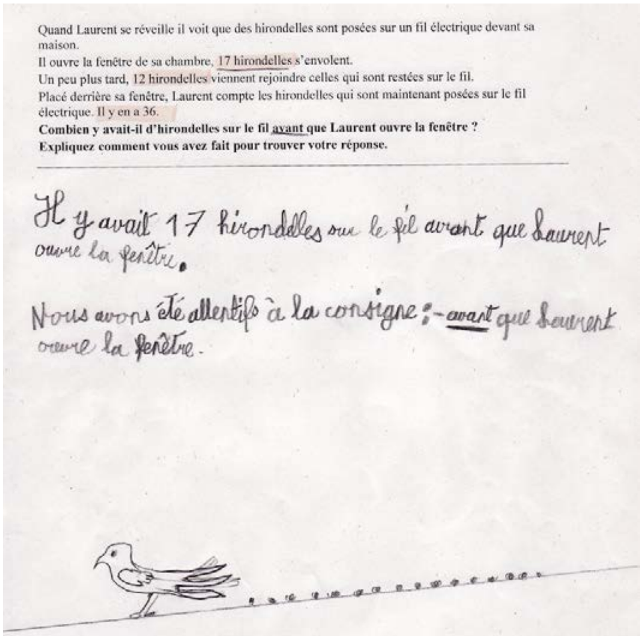
Même si les données de ce problème sont formulées par des phrases courtes (selon les critères d'élaboration des problèmes concernant le contexte), la vraie difficulté, comme souligné précédemment, se situe au niveau de la « structure mathématique » exigeant de recourir à une opération inverse liée au retour dans le temps.
On trouve en effet des copies, soit de Suisse romande soit de Parme, où les opérations directes (36 – 17 + 12 = 31), ont été appliquées en lieu et place des opérations inverses : 36 – 12 + 17 = 41. Les transformations (- 17) et (+ 12), puisqu'il s'agit de remonter dans le temps, « changent de signe ».
La « structure » du problème n'a pas été comprise.

36 – 17 = 29 + 12 = 41 *Noi abbiamo fatto così: abbiamo usato il 36 dopo abbiamo sottratto le 17 rondini che sono volate via e il risultato è 29, poi abbiamo aggiunto 12 rondini e infine abbiamo capito che prima che Lorenzo aprisse la finestra sul filo c'erano 41 rondini.*	*36 – 17 + 12 = 31* *Il y a 31 hirondelles avant que Laurent ouvre la fenêtre.* *Laurent ouvre la fenêtre et voit 17 hirondelles s'envoler. Un peu plus tard il voit 12 hirondelles qui viennent rejoindre celles qui sont restées sur le fil. Après Laurent il en voit 36 sur le fil électrique.*

(Évidemment le résultat 41, du premier exemple, est dû à une erreur de calcul).

2.5.2.1. Problème « Les hirondelles » : réponses « 48 » ou « 17 »

Pour les copies selon lesquelles les élèves sont arrivés à la réponse 48 au lien de 41, au-delà de l'opération 36 + 12, qu'ils indiquent, c'est l'explication en langue naturelle qui est importante pour comprendre le malentendu dans lequel ils se sont engagés comme dans l'exemple suivant : *On a vu qu'il y avait 12 hirondelles qui viennent d'arriver sur le fil et il y avait 36 hirondelles déjà sur le fil. Donc on a calculé 12 + 36 = 48 hirondelles.*
Ici **les deux premières phrases ne sont pas prises en considération** et l'explication nous montre aussi le malentendu selon lequel les 13 hirondelles se sont posées sur le fil lorsqu'il y en avait déjà 36.
Pour le cas de la réponse 17, comme le montre cette copie :


Quand Laurent se réveille il voit que des hirondelles sont posées sur un fil électrique devant sa maison.
Il ouvre la fenêtre de sa chambre, 17 hirondelles s'envolent.
Un peu plus tard, 12 hirondelles viennent rejoindre celles qui sont restées sur le fil.
Placé derrière sa fenêtre, Laurent compte les hirondelles qui sont maintenant posées sur le fil électrique. Il y en a 36.
Combien y avait-il d'hirondelles sur le fil avant que Laurent ouvre la fenêtre ?
Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

Il y avait 17 hirondelles sur le fil avant que Laurent ouvre la fenêtre.

Nous avons été attentifs à la consigne : avant que Laurent ouvre la fenêtre.

L'explication des élèves montre clairement que, puisque la demande contient « avant », c'est comme si les phrases successives n'avaient plus rien à voir avec le problème.
Les élèves ont directement relié la demande aux deux phrases initiales et ils le disent : *« nous avons été attentifs à la consigne : avant que Laurent ouvre la fenêtre »*

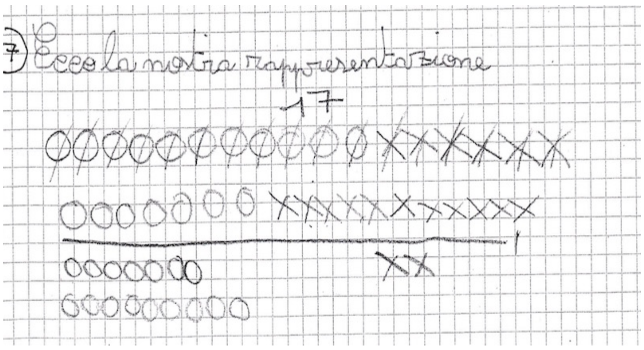
Ils soulignent aussi le « avant » qui figure dans la question, en plus de souligner l'expression « 17 hirondelles ».

En effet, comme le souligne J. Julo (1995), *l'analyse des représentations particularisée, dans le cas d'une situation de résolution de problème, va consister à analyser la manière dont nous comprenons cette situation et dont nous interprétons la problématique qui lui est propre mais aussi la manière dont cette compréhension intervient dans la recherche et la découverte de la solution.*

Et ce sont justement les explications des élèves ou de ceux qui ont résolu le problème qui nous permettent de comprendre comment la situation a été effectivement interprétée.
L'attention des enfants qui ont trouvé 17 comme réponse a été concentrée sur les mots « avant que » et tout le reste n'a pas été pris en compte.
Encore une fois, la recherche de **l'état initial** semble déstabiliser la gestion complexe de la reconstruction du déroulement et conduit, comme dans le cas de cet exemple, à une simplification de la situation par le choix de « l'expression linguistique » la plus évidente, annulant la phrase « Un peu plus tard, 12 hirondelles viennent rejoindre celles qui sont restées sur le fil. »
Il serait intéressant de reprendre le problème avec cette classe et d'ouvrir une discussion avec les élèves en partant du rôle de cette phrase. S'agit-il d'une phrase qui est utile pour la résolution du problème ou d'une phrase sans utilité. Et si elle est inutile, pourquoi pensez-vous qu'elle a été placée dans l'énoncé du problème ?

2.5.3 La richesse de la multiplicité des langages

Dans une cohabitation constructive de symboles, représentations graphiques, langue naturelle, … dans les copies, on trouve en effet souvent plus d'un type de langage aux fins de gérer les situations et les réponses.
Ces différents langages se soutiennent mutuellement, comme dans le cas de la copie suivante où l'analyse attentive de l'énoncé exprimée en langue naturelle s'appuie sur une représentation graphique comme **support pour la gestion des transformations :**
1) *Premièrement nous avons lu attentivement le problème.*
2) Pour nous aider nous avons dessiné les données …
3) *Les hirondelles sont des cercles et les colombes des croix.*
4) *Selon les indications ... biffé les 17 hirondelles.*
5) *Selon les données suivantes* ... *dessiné hirondelles et colombes* ... *puis ajouté, selon les dernières données le nombre des cercles additionné au hirondelles précédentes qui font … et 13 pour les colombes.*
6) *Maintenant ... le total est 35 (27 hirondelles et 8 colombes.*
7) *Voici notre représentation.*



C'est à nous, adultes, de percevoir toute la complexité des raisonnements qui s'ébauchent dans la tête des élèves et qu'ils expriment dans leurs différents langages, révélateurs de raisonnements corrects, incompréhensions, erreurs, obstacles, etc.
Dans l'exemple précédent, la représentation graphique est une synthèse parfaite du développement temporel su problème.

3. Un peu plus tard, avec le langage algébrique en perspective

Les problèmes précédents montrent avec évidence la richesse des expressions adoptées par les jeunes élèves pour expliquer des raisonnements et démarches complexes puisqu'elles exigent de traduire des remontées dans le temps par des inversions d'opérations arithmétiques.

Nous abordons un nouvel exemple de problème, destiné aux élèves plus âgés, qui, toujours selon Piaget, entrent dans le stade des opérations formelles, avec les intentions suivantes :

- d'illustrer une nouvelle fois les deux pensées de N. Rouche sur l'intrication de nos problèmes avec la langue naturelle qui permet à la pensée de s'exprimer et de F. Speranza sur les idées scientifiques qui se précisent justement au travers du langage avec lequel elles sont formulées,
- de passer un peu de temps sur les textes que nous écrivons et sur ceux par lesquels les élèves nous répondent,
- de faire quelques considérations sur la manière d'interpréter nos textes respectifs dans le cadre de la communication entre interlocuteurs, qui s'expriment selon des modes différents : des jargons au langage académique, en passant par les dialectes, discours algébriques, langue naturelle.

ENTRAÎNEMENTS CYCLISTES /Cat. 7, 8, 9, 10

Jean s'entraîne pour sa prochaine course de vélo sur trois parcours : un long, un moyen et un court. Lors de son entraînement d'hier, Jean a effectué deux fois le parcours long, deux fois le parcours moyen et une fois le parcours court, pour un total de 42 km.

Aujourd'hui, en répétant cinq fois le parcours moyen, il a parcouru 5 km de moins qu'hier.

Son entraînement de demain prévoit un total de 48,8 km avec quatre parcours longs et un court. Pour le dernier entraînement avant la course, après-demain, Jean fera une fois le parcours long, trois fois le moyen et deux fois le court.

Combien de kilomètres fera Jean lors de son dernier entraînement ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

3.1. La langue des adultes

Dans un premier temps, nous nous arrêterons sur la langue adoptée par les adultes lorsqu'ils s'adressent aux élèves par l'énoncé du problème, ou lorsqu'ils s'adressent à leurs collègues dans l'analyse a priori, description de la tâche mathématique, analyse de la tâche de l'élève et critères d'attribution des points.

3.1.1. La langue de l'énoncé

Comme tous nos énoncés, celui-ci est rédigé par des adultes, enseignants en général, qui s'efforcent d'adopter un langage destiné aux élèves (que ceux-ci doivent pourvoir interpréter et déchiffrer seuls, sans l'aide de leur enseignant absent de la classe lors de l'épreuve selon les règles de notre rallye) :

Les phrases sont courtes, claires, précises : les 4 courses, les 4 jours, l'ordre temporel est respecté, les distances exprimées dans la même unité. Le contexte se veut « réel » et non fictif, avec une pointe d'ingénuité mais à peu près « crédible » : programme d'entraînements, Jean, les trois parcours …

Le problème n'est pas « méchant » : il n'y a pas de données superflues à première vue ! (On verra cependant que la sériation – inutile - des parcours en « court », « moyen » et « long » a induit certains élèves en erreur).

Le style est celui des « problèmes de mathématique » : un peu lourd et répétitif, pas très poétique, avec une pointe d'ennui ?

Il n'y a qu'une question : « combien de … » à réponse unique et incontestable.

En bref, on s'est donné de la peine d'écrire un texte permettant à l'élève « Tout le monde » de s'approprier le problème, répondant aux critères de notre grille d'élaboration. Mais derrière les mots il y a toujours des implicites pour le lecteur. Par exemple, l'élève ne le sait pas, mais pour les auteurs du texte, c'est clair, comme le dit notre rubrique « tâche mathématique » :

Déterminer la longueur d'un trajet, $a + 3b + 2c$, composé de trois parcours a, b, c : connaissant la longueur de trois autres trajets composés des mêmes parcours : $2a + 2b + c = 42$; $5b = 42 - 5$; $4a + c = 48,8$; ou, dans l'analyse de la tâche : *résoudre le système de trois équations à trois inconnues …*

3.1.2. L'analyse a priori du problème

Après la description de la « tâche mathématique » il reste deux rubriques dans l'analyse a priori du problème : l'analyse de la tâche de l'élève et les critères d'attribution des points.

Il est aussi intéressant de voir comment s'expriment les adultes lorsqu'ils s'adressent à d'autres adultes, dans un langage « rigoureux » qui doit tout de même être compréhensible par des enseignants généralistes qui ne sont pas « prof de maths ». Voici le texte de « l'analyse de la tâche » :

- *Comprendre que la longueur de chaque entraînement s'exprime à l'aide de celle des trois parcours et qu'il est nécessaire de trouver les longueurs de ces trois parcours à partir des relations données.*
- *Constater que la relation entre les entraînements des deux premiers jours « 5 de moins » permet de calculer directement la longueur du parcours moyen, $(42 - 5) : 5 = 7,4$ (km)*
- *Pour déterminer la longueur du parcours long et du court, tenir compte de la composition des deux autres entraînements de 42 km et de 48,8 km. Il y a plusieurs manières de faire :*

  Par exemple, après substitution des deux longueurs des parcours moyens dans le premier entraînement par 7,4, on obtient pour deux parcours longs et un court : $42 - 2 \times 7,4 = 27,2$ en km. La différence entre ce dernier *et le troisième entraînement, 48,8 – 27,2 = 21,6 est due à la présence de deux longs parcours. On en tire la longueur, en km du long parcours : 21,6 : 2 = 10,8. Puis, par substitution, on trouve la longueur du parcours court : 48,8 – 4 × 10,8 = 5,6 en km*

- *Conclure que Jean au cours de son dernier entraînement, parcourra 10,8 + 3 × 7,4 +2 × 5,6 = 44,2, en km.*

Ou : résoudre le système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 42 \\ 5y = 37 \\ 4x + z = 48{,}8 \end{cases}$$

ou de deux équations à deux inconnues : après avoir déterminé la longueur du parcours moyen.

Ou : procéder par essais et ajustements, mais, vu la présence de nombres décimaux, la démarche peut être longue.

Ce texte n'est pas de lecture facile, il fait appel à des écritures arithmétiques, puis algébriques, le lecteur doit bien « s'accrocher » pour suivre le fil des différentes procédures de résolution.

Lorsqu'on passe aux « critères d'attribution des points », toujours entre adultes, le langage devient plus synthétique :

4 *Réponse correcte (44,2 km) avec explications claires de la procédure suivie (inventaire des essais ou détail du calcul du parcours moyen et substitutions et comparaisons pour les autres ou résolution d'un système linéaire)*

3 *Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes*
ou découverte des trois longueurs (5,2 ; 7,4 et 10,8) avec détail des calculs ou vérification sur les trois entraînements
ou réponse erronée due à une seule erreur de calcul, avec une procédure correcte et bien expliquée

2 *Réponse correcte sans explication*
ou découverte des trois longueurs sans explication mais avec une seule vérification
ou présence d'au moins trois essais avec contrôle des contraintes sur les longueurs des parcours

1 *Début de recherche (par exemple, la mention d'un ou deux essais,* avec contrôle*)*
ou seulement la longueur du parcours moyen : 7,4 km

0 *Incompréhension du problème*

Il n'y a plus de phrases complètes du point de vue grammatical, ce sont des instructions et l'on remarque qu'on laisse au destinataire une grande responsabilité d'interprétation comme par exemple, différencier les expressions en bleu ci-dessus. La précision du langage a ici des limites liées à la finalité de l'attribution des points, tâche d'évaluation ou de jugement extrêmement délicate.

3.2. La langue des élèves

La première chose que l'on trouve souvent dans les copies des élèves est une trace de leur appropriation de la situation. On n'est pas encore dans la résolution, mais on réécrit les données à sa manière

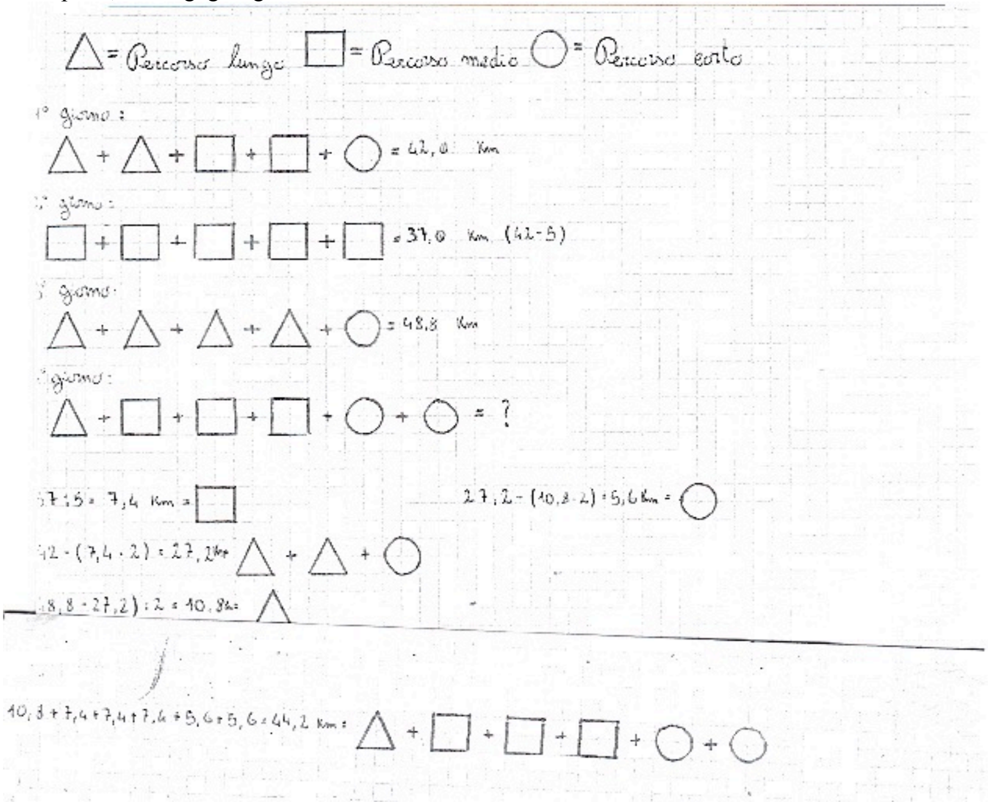
3.2.1. Traduction des données par les élèves

Les relations entre les trois parcours décrits par l'énoncé nous sont retournées dans les explications de très nombreuses copies, en langage « élève ».

Exemple 1, en langage synthétique

Ieri = 2 p.lung - 2p.medio - 1p.corto.
42 km = somma dei percorsi di ieri
Oggi = 5p.medio – 5 km di ieri
Domani = 48,8 km = 4p.lungo – 1p.corto
Dopodomani= 1p.lungo - 3p.medio - 2 quello corto

Exemple 2, en langage figuratif



Exemple 3, (cat 9) en langage préalgébrique

IERI = 2 L + 2 M + 1 C = 42 km
OGGI = 5 M = IERI – 5 km = 42 – 5 = 37 km
DOMANI = 4 L + 1 C = 48,8 km
DOPO DOMANI = 1 L + 1 Quanti km farà dopo domani?

3.2.2. Première démarche, pour le parcours moyen

La très grande majorité des groupes ont calculé la longueur du parcours moyen d'après la deuxième information de l'énoncé :
Aujourd'hui, en répétant cinq fois le parcours moyen, il a parcouru 5 km de moins qu'hier ».
Il s'agit alors de deux opérations successives, élémentaires pour des élèves de 13 ans ou plus en effectuant la transformation d'hier à aujourd'hui des 5 km en moins puis de la division par 5 :
(42 – 5) : 5 = 7,4 (km)
correspondant à la résolution de l'équation en revenant dans le temps : 5 m + 5 = 42
Per trovare i chilometri dell'ultimo allenamento di Giovanni siamo partiti con trovare il valore del percorso medio : infatti la seconda affermazione dice che Giovanni ha percorso 5 volte il percorso medio con un totale di 5 km in meno rispetto ai 42 km del primo giorno, perciò abbiamo fatto 42 – 5 = 37, 37 : 5 = 7,4 . Il percorso medio à perciò lungo 7,4.
Pour trouver les km du dernier entraînement de Jean, nous avons commencé par trouver la valeur du parcours moyen : en effet la deuxième information dit que Jean a parcouru 5 fois le parcours moyen avec un total de 5 km de moins par rapport au premier jour ; c'est pour cela que nous avons fait 42 – 5 = 37, 37 : 5 = 7,4. Le parcours moyen est de longueur 7,4.

3.2.3. La substitution

Lorsque la longueur du parcours moyen est déterminée il faut en tenir compte, dans une démarche déductive, pour la suite de la résolution et passer à l'étape suivante, c'est-à-dire substituer à « parcours moyen » deux fois la valeur 7,4 dans la relation donnée par le premier entraînement (hier) et l'exprimer dans un des langages à disposition des élèves.
- en langage algébrique (1% à 2% en catégories 8 à 10)

Il s'agit de passer de $c + 2m + 2l = 42$
à $c + 14{,}8 + 2l = 42$
puis à $c + 2l = 27{,}2$

- en langue naturelle (environ 25% en catégorie 7, de 35 à 50% en catégorie 8, de 60 à 70% en catégories 9 et 10)

- *(8^e) Nous savons que 37 :5 = parcours moyen, cela donne 7,4 km. Ensuite nous pouvons voir que si on enlève 2 fois 7,4 à 42 cela donne 27,2 km.*

- *(9^e) Per trovare questo risultato abbiamo calcolato il percordo medio facendo 37 :5 = 7,4 km. Dopo abbiamo tolto i due percorsi medi dal primo allentamento ottenendo 27,2 km ;*

3.3. La démarche logico-déductive

Après la rédaction du problème en langage des adultes, et sa traduction en langage d'élèves, nous venons de voir les tâches préliminaires de la résolution : la détermination du parcours moyen dans l'entraînement d'aujourd'hui et sa substitution dans les entraînements d'hier et de demain pour arriver finalement au « noyau » du problème qu'une partie des groupes a abordé par essais successifs sans toujours arriver à la solution correcte et qu'une autre partie a cherché à résoudre par une démarche déductive en affrontent les deux relations simultanément.

en langue naturelle :
- (hier) 1 parcours court et 2 parcours longs représentent 27,2 (km)
- (demain) 1 parcours court et 4 parcours longs représentent 48,8 (km)

ou en langage algébrique, qui fait apparaître les ressemblances encore plus clairement et conduit à une résolution de type algorithmique « par soustraction » :
- (hier) $c + 2l = 27{,}2$
- (demain) $c + 4l = 48{,}8$

=> $2l = 48{,}8 - 27{,}2 = 21{,}6$ => $l = 10{,}8$

3.3.1. Démarche « par comparaison et soustraction »

Un des très rares exemples relevé, qui s'approche du langage algébrique (cat 9) :

…
2A + C = 42 km – (7,4•2) = 27,2 km
2A = 48,8 km - 27,2 km = 21,6 km
A = 21,6 : 2 = 10,8 km
A + 3B + 2C = 10,8 km + (7,4 • 3)km + 2(27,2 – 21,6 km = 44,2 km

Mais la grande majorité des copies sont rédigées en langue naturelle de l'élève, selon un mode rhétorique :
- (cat 8) *... Donc deux fois le grand parcours et une fois le petit donne 27,2 km et si on soustrait 48,8 km à 27,2 km cela nous donne deux fois le parcours long. 21,6 : 2 = 10,8.*

- (cat 9) *... a 27,2 km facevano parte 2 percorsi lunghi e 1 corto, poi abbiamo tolto al terzo allenamento. Al terzo allenamento rimanevano 2 percorsi lunghi : 21,6 km che poi abbiamo diviso par 2 trovando 10,8 km che equivalgono alla lunghezza del percorso lungo. Infine per trovare il persorso corto abbiamo tolto dal primo allenamento, cioè 42 km, 2 percorsi lunghi, cioè 21,6 km, et 2 percorsi medi, cioè 14,8 km, rimaneva cosi un percorso corto, cioè 5,6 km. ...*

Un autre exemple en langage rhétorique dans toute sa splendeur :

- le texte explique après la substitution :

  ... On note maintenant que la donnée obtenue (valeur du parcours moyen) *se répète deux fois dans l'entraînement du premier jour, additionné au double de la distance du parcours long et à la distance du parcours court. Par conséquent il faut soustraire à la longueur totale de référence le double produit du parcours moyen. On relève ensuite que dans l'entraînement du troisième jour on retrouve le résultat qu'on vient d'obtenir additionné à deux autres fois le long parcours. Par conséquent il faut soustraire à la longueur totale de l'entraînement du troisième jour deux fois le double produit du long parcours additionné au parcours*

court obtenant deux fois le parcours. Puis diviser par 2 et trouver la longueur unitaire. …

La rigueur du langage semble « impressionnante », de loin, mais révèle les limites de précision de la rhétorique quand on entre dans une lecture détaillée (marquée en bleu ci-dessus).

3.3.2. Démarche « par multiplication »

En langage algébrique de l'adulte :
$c + 2l = 27{,}2$ => $2c + 4l = 54{,}4$
$c + 4l = 48{,}8$ => $c + 4l = 48{,}8$
=> $c = 54{,}4 - 48{,}8 = 5{,}6$

Il s'agit d'un autre algorithme de résolution, qu'on appelle parfois « par multiplication » des deux membres d'une équation avant de procéder par « comparaison ou soustraction ». (Apparu dans 5 % à 10% des copies, mais sans les écritures symboliques)
On relève à ce propos, comme dans la démarche « par comparaison et soustraction », les limites du langage rhétorique :
On « sent » très bien que les élèves ont perçu les deux relations et sont capables de les comparer ou de les « manipuler ». Ils sont dans le registre numérique des mesures de longueur, même s'ils parlent encore de « parcours » et ajoutent des « km » à leurs opérations.

Les langages qui mêlent les mots aux signes d'opération révèlent le besoin de symbolismes pour réduire la longueur des phrases.

3.3.3. Démarche « par essais »

Cette procédure a été relevée dans environ 30 % des copies de catégorie 7 et 20% en catégorie 8 et rarement en catégories 9 et 10 et Le langage permettant de rendre compte de ces essais est descriptif, avec connecteurs logique typiques de la dichotomie : si / alors / /donc/ affirmation ou négation.
- …

On y est allé par déduction en s'aidant du parcours d'hier.
Si** long = 10 **alors** court = 42 – 2 · 10 – 7,4 · 2 = 7,2 pour le parcours court et pour demain 4 · 10 + 7,2 = **47,2 et non 48,8 donc c'est faux.
Si long = 10,7 alors court = 42 – 2 · 10,7 – 7,4 · 2 = …
Si** long = 10,8 **alors** court = 42 – 2 · 10,8 – 7,4 · 2 = 5,6 pour le court et pour demain 4 · 10,8 + 5,6 = 48,8, **ça joue

Dans certains cas les élèves se limitent à évoquer la procédure:

- *Abbiamo scoperto che il percorso lungo è 18,4 km, il percorso media è 8 km e il percorso corto è di 4 km. Nel ultimo allenamento Giovanni ha percorso 50,4 km*
  (Ce dernier résultat est cohérent avec les choix précédents, mais faux)

3.4. Corrélations entre les résultats, l'âge et le langage

Les indices de réussite du problème sont d'ordre statistique, le grand nombre des copies (2222) permet toutefois d'en tirer des observations significatives.
La première est l'influence de l'âge des élèves sur les moyennes de points attribués, qui passent, de la catégorie 7 à la catégorie 10 respectivement, de 1,6 ; 2,2 ; 2,9 ; 3,2 : pour ce type de problème où il s'agit de gérer un système de trois relations (équations linéaires) avec trois indéterminées, il est évident que les élèves de 15 ans réussissent mieux que leurs camarades de 12 ans.
L'analyse a posteriori conduite sur plusieurs centaines de copies de trois sections (FC, SR et PR) montre que la fréquence des raisonnements déductifs puis « génériques » augmente aussi sensiblement avec l'âge des élèves.
Ce type de raisonnements exige aussi un langage plus rigoureux qu'une simple description des essais : il faut décrire les étapes de la résolution, substituer les valeurs intermédiaires au fur et à mesure de leur découverte, être conscient des opérations mentales effectuées afin de pouvoir les décrire.
Par conséquent il y a une corrélation évidente entre les capacités de raisonnement des élèves, et le langage pour les expliciter.

3.4.1. Les erreurs et le langage

Les copies examinées nous ont montré une grande variété de procédures pour arriver à la solution correcte du problème et aussi une grande variété de langage pour les décrire. Il vaut la peine d'examiner aussi les erreurs ou les incapacités d'arriver à une réponse correcte et la qualité des langages utilisés pour en rendre compte. On peut ainsi constater qu'une langue naturelle « riche » n'est pas synonyme de rigueur et logique :
Voici un exemple d'explications en langage « riche » (récit abondant, phrases longues, indicateurs temporels … mais avec de nombreux illogismes ou affirmations erronées, en bleu) :

- (Cat. 7) *Abbiamo trovato i percorsi medi di oggi che è 37 : 5 = 7,4 km poi abbiano sottratto 7,4 × 2 - 42 = 27,2 km. Abbiamo visto che domani Giovanni farà 48,8 km, di quelli sono 4 percorsi lunghi, quindi abbiamo ipotizzato che un percorso lungo ha 0,2 km, poi siamo tornati sulla giornata di ieri e abbiamo moltiplicato quel 0,2 che è 0,4 per poi sottrarlo 27,2 che fa 26,8 poi tolto il 0,8 – 2 unità = 24 : 2 = 12 + 0,2 = 12,2 = percorso lungo. Quindi il percorso lungo è 12,2 quello medio 7,4 e infine quello corto 2,8.*
  Infine per trovare quanti kilometri che ha fatto Giovanni di dopo domani che è 40 km.
  (Traduction *: Nous avons trouvé les parcours moyens d'aujourd'hui qui sont 37 : 5 = 7,4 km puis nus avons soustrait 7,4 × 2 - 42 = 27,2 km. Nous avons vu que demain Jean fera 48,8 km, dont 4 parcours longs, par conséquent nous avons fait l'hypothèse qu'un parcours long est de 0,2 km, puis nous sommes revenus à la journée d'hier et avaons multiplié ce 0,2 qui donne 0,4 pour ensuite le soustraire de 27,2, ce qui donne 26,8, puis retiré le 0,8 – 2 unités = 24 : 2 = 12 + 0,2 = 12,2 = le parcours long. Donc le parcours long est 12,2, le moyen est 7,4 et le enfin le court est 2,8. Enfin pour trouver combien de kilomètres que Jean a fait après demain, c'est 40 km).*
  (Ce dernier résultat n'est pas cohérent avec les précédents).

En langage « pauvre » les exemples d'erreurs ne manquent pas non plus :

- (Cat. 7) *On a calculé 42 – 5 = 37 pour diviser 37 : 5 = 7,4 un parcours moyen = 7,4 un parcours court = 5,2 un parcours long = 10,9 10.9 × 4 +5,2 = 48,8 10,9 + 22,2 + 10,4 = 43,5 Jean aura fait 43,3 à son dernier entraînement*

- (Cat. 7) *Lors de son dernier entraînement, Jean fera 40,3 kilomètres*. (phrase recopiée de l'énoncé) *Par coup de chance : (12,1 + 7,4 + 7,4 + 7,4 + 3 + 3 = 40,3) ...*

- *Un parcours moyen fait : 7 km car 42 – 5 = 37 et 5 × 7 = 35. Il fera 35 km.*

- *On fait 4 × 42 = 168 – 5 = 163 – 48,8 = 114,2 donc ça fait le résultat.*

3.5 Langage et pensée

Le problème « Entraînement cyclistes » est révélateur de l'usage d'un langage naturel pour l'élève pour exprimer la pensée qui a conduit la recherche des différentes longueurs de parcours. On y trouve des mots, des phrases, des nombres, des signes d'égalité et d'opérations, mais aussi des symboles pour raccourcir les écritures. Par exemple la *longueur du parcours moyen*, devient *parcours moyen*, puis *moyen*, puis *M* … .
Ces écritures sont là pour réduire la longueur des textes et mettre en évidence les grandeurs ou les valeurs encore indéterminées.
Elles portent aussi en elles le passage des objets physiques – les parcours avec leur représentations spatiales et matérielles – à leurs mesures, qui sont des « nombres de km » et certaines fois aux nombres « désincarnés » (nombres réels).
Il y a là tous les ingrédients nécessaires à l'introduction des symbolismes algébriques.
On peut rappeler que, historiquement, le langage algébrique a mis des siècles à se développer et passer de la rhétorique aux symbolismes actuels en passant par des formes intermédiaires.
Le langage algébrique est actuellement proposé dans les programmes de toutes les classes de nos catégories 8 à 10. Mais réfléchit-on toujours à la manière de l'aborder ?
Dans nos « Entraînement cyclistes » on part d'un contexte. Les symboles pour représenter les parcours sont une création des élèves, répondant à leurs besoins. Ce ne sont pas des *x* ou des *y* tombés du ciel qu'on va devoir combiner avec des opérations arithmétiques.

4. Que faire des langages des élèves

En s'intéressant à la manière dont nous nous adressons aux élèves et à la manière dont ceux-ci nous expriment leur pensée, nous découvrons ou redécouvrons la diversité des langages des uns et des autres. L'élaboration et l'analyse a postériori des problèmes du RMT constituent un milieu privilégié pour la mise en évidence de la diversité de ces langages ; les exemples des quatre problèmes examinés précédemment l'attestent ; comme l'attestent aussi toutes les observations et réflexions conduites sur les autres problèmes dans le dispositif de conception et d'analyses du RMT.
Au-delà de la mise en évidence de la diversité de langage, on peut élaborer quelques éléments de réponses à la question de l'usage de ces données. Faut-il se contenter de les constater ou peut-on en tirer profit, en particulier pour les langages des élèves ?
Il semble tout d'abord important **de les reconnaître :** savoir qu'ils existent, qu'ils ont droit à leur existence, qu'ils apparaissent spontanément dans toutes les productions d'élèves que nous examinons, qu'ils sont différents de nos langages d'adultes et que c'est bien naturel. On devrait sur ce point faire le rapprochement avec le jeune enfant en train de s'approprier sa langue maternelle ou à quelqu'un qui apprend une langue étrangère. Dans ces cas d'apprentissage d'une nouvelle langue, on adopte une attitude d'écoute et d'accueil d'expressions qui ne sont pas encore celles de l'adulte mais qui sont en évolution naturelle.
Après avoir reconnu les différents langages, il paraît nécessaire **de chercher à les comprendre** : derrière les mots, les signes et les dessins, il y a des représentations mentales qui peuvent révéler des obstacles, des conceptions erronées ou incomplètes … déterminants pour les interventions didactiques qui suivent la résolution du problème.
Finalement, il s'agit d'y **répondre dans un langage approprié :** utiliser avec les élèves un langage plus évolué que le leur tout en restant à leur portée ; en traduisant leurs expressions et symboles dans une langue plus rigoureuse, en faisant comprendre les raisons de cette évolution, en encourageant les expressions correctes, …

Toutes ces attitudes, de l'écoute au dialogue, sont celles de l'enseignant qui s'abstient de juger ou d'imposer mais qui cherche à participer à la construction de connaissances par l'élève et d'une amélioration de la manière de les exprimer. Et nous retrouvons ainsi le titre de cette réflexion : ***Nous écrivons … donc nous sommes.***

Bibliographie

Bartezzaghi S: 2017, *Parole in gioco*, Bompiani.
CREM: 1999, *La matematica dalla scuola materna alla maturità*, A cura di L. Grugnetti e V. Villani, BO: Pitagora Editrice.
Julo J. : 1995, *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*.
Piaget J. Inhelder B. : 1959, *La genèse des structures logiques élémentaires : classifications et sériations*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé
Monnier E. : 2017, 'Et l'homme se mit à écrire, *L'écriture, comment elle a changé le monde,* Les cahiers Science&Vie., N° 172.
Speranza F.: 1997, *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.
Vergnaud G. : 1994, *L'enfant la mathématique et la réalité*.

LA LOGIQUE COMME OUTIL D'ANALYSE POUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES[1]

Vincent Degauquier[2]

1 Introduction

Deux traits semblent communs à tous les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin. D'une part, tout énoncé de problème est formulé, totalement ou partiellement, en langue naturelle. L'usage fait de la langue dans la formulation d'un problème est d'ailleurs rarement anecdotique. Dans la plupart des énoncés de problème figurent en effet des phrases contenant des informations nécessaires à sa résolution. D'autre part, toute résolution de problème nécessite d'effectuer, à des degrés divers, des raisonnements. Quel que soit le domaine mathématique dont relève un problème ou l'année d'étude des élèves auxquels il s'adresse, sa résolution consiste à déduire certaines informations à partir d'autres contenues dans l'énoncé.

Par ailleurs, la logique nous enseigne que la correction d'un raisonnement repose essentiellement sur la structure logique des expressions qui le composent. Autrement dit, la structure logique des expressions constitutives d'un raisonnement permet à elle seule de déterminer si ce raisonnement est correct. À titre d'exemple, le raisonnement présenté ci-dessous[3] est correct quelles que soient les propriétés désignées par les mots « homme » et « mortel » et quel que soit l'objet désigné par le mot « Socrate ».

$$\begin{array}{c}\text{Tout homme est mortel.}\\ \underline{\text{Socrate est un homme.}}\\ \text{Socrate est mortel.}\end{array}$$

Pour s'en convaincre, constatons que ce raisonnement reste correct lorsque l'on y substitue le mot « cheval » au mot « homme », le mot « véloce » au mot « mortel » et le mot « Bucéphale » au mot « Socrate ».

$$\begin{array}{c}\text{Tout cheval est véloce.}\\ \underline{\text{Bucéphale est un cheval.}}\\ \text{Bucéphale est véloce.}\end{array}$$

Si résoudre un problème nécessite d'effectuer des raisonnements corrects à partir de phrases de la langue naturelle et si effectuer des raisonnements corrects nécessite d'identifier – de quelque façon que ce soit – la structure logique des expressions qui le composent, alors résoudre un problème nécessite d'identifier la structure logique des phrases de la langue naturelle.

Cet article a pour objectif d'établir deux points. Le premier est que la plupart des phrases en langue naturelle, sinon toutes, sont ambiguës eu égard à leur structure logique. Le second est que cette ambiguïté peut avoir une incidence sur la résolution de problèmes mathématiques. Pour ce faire, nous examinerons la langue naturelle à la lumière du langage de la logique contemporaine. Aussi, nous proposerons une analyse logique de phrases en langue naturelle, dont certaines sont issues d'un problème du Rallye Mathématique Transalpin.

Notre propos s'organise en quatre parties. Tout d'abord, nous exposerons les motivations philosophiques qui sont à l'origine du langage de la logique contemporaine. À cette occasion, nous évoquerons deux étapes décisives de son développement, à savoir le projet d'une langue symbolique universelle imaginé par G. W. Leibniz (1646–1716) et la *Begriffsschrift* élaborée par G. Frege (1848–1925). Ensuite, nous présenterons le langage de la logique des prédicats du premier ordre avec égalité. Nous détaillerons alors, à l'aide d'exemples empruntés à l'arithmétique, les différents types de symboles qui constituent son alphabet ainsi que les règles syntaxiques qui définissent l'ensemble des expressions bien formées de ce langage. Une fois le langage de la logique dépeint, nous montrerons qu'il constitue un outil précieux pour l'analyse des langues naturelles. Nous constaterons que la plupart des phrases françaises, sinon toutes, sont ambiguës en ce sens que plusieurs analyses logiques en sont possibles. Enfin, nous analyserons un problème issu du Rallye Mathématique Transalpin. Nous montrerons que certaines

[1] Cet article s'inscrit dans le cadre du projet Loglang mené par le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques il reprend la conférence prononcée par l'auteur lors de l'ouverture de la vingt et unième rencontre de l'ARMT, à Charleroi (Belgique), le 27 octobre 2017.

[2] Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) asbl, Belgique.

[3] La ligne qui sépare les prémisses de la conclusion du raisonnement se lit « donc ».

phrases figurant dans l'énoncé du problème sont ambiguës relativement à leur structure logique et que cette ambiguïté touche à la signification même du problème.

2 Les origines du langage de la logique

Les motivations philosophiques qui sont à l'origine du langage de la logique contemporaine résultent d'un double constat. D'une part, certaines vérités ne peuvent être établies avec certitude qu'en s'assurant de la correction de nos raisonnements. Parmi ces dernières figurent les vérités mathématiques. Même si l'intuition peut nous amener à conjecturer certaines propriétés mathématiques, elle n'en garantit pas pour autant l'exactitude. Seul un raisonnement correct permet de les établir avec certitude. D'autre part, les langues naturelles sont incapables d'exprimer adéquatement les structures logiques sur lesquelles repose la correction des raisonnements. L'opacité de la structure logique des phrases des langues naturelles constitue en effet un obstacle à la conduite des raisonnements.

2.1 Projet d'une langue symbolique universelle

L'idée suivant laquelle l'élaboration d'une langue symbolique universelle constitue une voie privilégiée vers la certitude fut, semble-t-il, formulée pour la première fois par Leibniz. Cette langue aurait pour vocation de formuler des raisonnements de telle façon qu'il serait possible de s'assurer de leur correction au moyen de méthodes purement arithmétiques. Précisons, au départ d'une citation de Leibniz lui-même, en quoi consiste cette langue (Leibniz, 1903).

> *L'unique moyen de redresser nos raisonnemens est de les rendre aussi sensibles que le sont ceux des Mathematiciens, en sorte qu'on puisse trouver son erreur à vue d'œil, et quand il y a des disputes entre les gens, on puisse dire seulement : contons, sans autre ceremonie, pour voir lequel a raison.*
>
> *Si les paroles estoient faits suivant un artifice que je voy possible, mais dont ceux qui ont fait des langues universelles ne se sont pas avisés on pourroit arriver à cet effect par les paroles mêmes, ce qui seroit d'une utilité incroyable pour la vie humaine ; Mais en attendant il y a un autre chemin moins beau, mais qui est deja ouvert, au lieu que l'autre deuvroit estre fait tout de nouveau. C'est en se servant de characteres à l'exemple des mathematiciens, qui sont propres de fixer nostre Esprit, et en y adjoutant une preuve des nombres.*
>
> *Car par ce moyen ayant reduit un raisonnement de morale, de physique, de médecine ou de Metaphysique a ces termes ou characteres, on pourra tellement a tout moment l'accompagner de l'epreuve de nombres, qu'il sera impossible de se tromper si on ne le veut bien. Ce qui est peut estre une des plus importantes decouvertes dont on se soit avisé de long temps.*

Selon Leibniz, une langue adaptée à la conduite de nos raisonnements devrait être symbolique. Dans la mesure où les symboles permettent d'appréhender les concepts plus adéquatement que les mots, cette langue s'inspirerait davantage de celle des mathématiques que de la langue naturelle. De plus, la langue imaginée par Leibniz devrait être universelle. Étant admis que la correction d'un raisonnement repose exclusivement sur la structure logique des expressions qui y figurent, cette langue permettrait de déterminer si un raisonnement est correct quel que soit le domaine de connaissance dont il relève.

2.2 Élaboration d'une écriture conceptuelle

Certes, Leibniz est le premier à imaginer une langue symbolique universelle et à en percevoir l'intérêt pour effectuer des raisonnements. Pourtant, il n'en propose aucune description précise. S'inscrivant dans le projet initié par Leibniz, Frege élabore près de deux siècles plus tard une écriture conceptuelle spécifiquement dédiée à la conduite des raisonnements. C'est cette *Begriffsschrift*[4] qui marque véritablement la naissance du langage de la logique contemporaine (Frege, 1879). Notons cependant que bien que la plupart des concepts constitutifs de la logique contemporaine soient présents dans cet ouvrage, l'écriture conceptuelle de Frege demeure très éloignée, dans sa présentation, du langage de la logique tel qu'on peut le trouver aujourd'hui dans les ouvrages de logique.

---

[4] Nous avons choisi de traduire cette expression par « écriture conceptuelle » plutôt que par « idéographie ». En cela, nous suivons la traduction anglaise proposée par J. L. Austin (Frege, 1960).

> *De sorte que [...] quelque chose d'intuitif ne puisse pas s'immiscer de façon inaperçue, tout devait reposer sur l'absence de lacunes dans la chaîne de déductions. Comme je m'efforçais à répondre à cette exigence le plus strictement possible, je trouvai un obstacle dans l'inadéquation de la langue ; malgré toutes les lourdeurs provenant de l'expression, plus les relations devinrent complexes, moins elle laissa atteindre la précision que mon but exigeait. De ce besoin naquit l'idée de la présente écriture conceptuelle. Elle doit ainsi d'abord servir à vérifier de la manière la plus sûre la force concluante d'une chaîne de déductions et à indiquer toute présupposition qui veut s'insinuer de façon inaperçue de sorte que sa provenance puisse être recherchée. C'est pourquoi j'ai renoncé à exprimer tout ce qui est sans signification pour la* déduction.

L'écriture conceptuelle de Frege résulte donc de l'impossibilité d'exprimer dans la langue naturelle et de façon parfaitement précise les mécanismes déductifs qui assurent la correction des raisonnements. En ce sens, il semble demeurer dans la langue naturelle une forme d'opacité irréductible qui rend toute expression intrinsèquement ambigüe relativement à sa structure logique. L'écriture conceptuelle se démarque de la langue naturelle précisément en cela qu'elle tient compte uniquement de ce qui détermine la correction des raisonnements, à savoir la structure logique des expressions qui les composent.

3 Le langage de la logique contemporaine

Si le langage de la logique contemporaine est héritier de l'écriture conceptuelle de Frege, cette dernière est elle-même inspirée du langage de l'arithmétique[5]. À ce titre, deux observations préliminaires concernant le langage de l'arithmétique semblent éclairantes pour appréhender celui de la logique.

D'une part, tous les symboles n'y désignent pas des concepts de même nature. En effet, ils peuvent aussi bien désigner des nombres que des fonctions ou des relations. D'autre part, tous les symboles ne désignent pas un concept spécifique. Alors que certains symboles désignent un concept déterminé, d'autres sont susceptibles d'en désigner plusieurs.

L'usage conjoint de symboles dont l'interprétation peut varier et d'autres dont l'interprétation est fixe confère à certaines expressions arithmétiques leur statut de vérité universelle. Une expression arithmétique est vraie en vertu de sa structure. Dans le langage de l'arithmétique, comme dans celui de la logique, ce sont les symboles dont l'interprétation est fixe qui déterminent la structure d'une expression. Aussi, dès lors que les symboles $+$, 0 et $=$ reçoivent leur interprétation usuelle, l'expression arithmétique $x + 0 = x$ demeure vraie quelle que soit la valeur assignée à x. En ce sens, la vérité d'une expression arithmétique repose sur les symboles dont l'interprétation est fixe tandis que son universalité repose sur les symboles dont l'interprétation est variable.
Afin d'illustrer les deux observations qui précèdent, les symboles qui figurent dans l'expression $x + 0 = x$ sont classés dans le tableau ci-dessous selon la nature des concepts qu'ils désignent et le caractère fixe ou variable de cette désignation.

	Interprétation fixe	Interprétation variable
Nombre	0	x
Fonction	$+$	
Relation	$=$	

Un *langage prédicatif du premier ordre avec égalité* (ou *langage logique*) est composé d'un alphabet et d'une syntaxe.

3.1 Alphabet

Un *alphabet* est un ensemble de symboles comprenant :

- les symboles logiques : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, =$
- les variables : $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$
- les parenthèses :), (

[5] Le mot « arithmétique » désigne ici la discipline mathématique qui a pour objet les propriétés générales des nombres, les fonctions sur les nombres et les relations entre les nombres (Tarski, 1994).

Outre ces symboles, un alphabet peut comprendre :

- des symboles prédicatifs n-aires $(n > 0)$: p^n, q^n, r^n, s^n, p_1^n, …
- des symboles propositionnels : p, q, r, s, p_1, …
- des symboles fonctionnels n-aires $(n > 0)$: f^n, g^n, h^n, f_1^n, …
- des constantes : a, b, c, d, a_1, …

Les symboles prédicatifs, propositionnels et fonctionnels ainsi que les constantes d'un alphabet forment l'ensemble des *symboles propres* de cet alphabet. Dans la mesure où deux alphabets ne peuvent différer que par l'ensemble de leurs symboles propres, spécifier un alphabet revient à en spécifier les symboles propres.

3.2 Syntaxe

Une expression d'un langage est une suite finie de symboles de l'alphabet de ce langage. Certaines expressions d'un langage sont appelées des termes et d'autres des formules. Ces expressions sont formées au moyen de règles syntaxiques exhaustives. De cette façon, les termes et les formules d'un langage sont uniquement les expressions construites conformément à ces règles.

Un *terme* est une expression formée à partir des règles suivantes.

- Toute variable est un terme.
- Toute constante est un terme.
- Tout symbole fonctionnel n-aire suivi de n termes est un terme.

Une *formule* est une expression formée à partir des règles suivantes.

- Tout symbole propositionnel est une formule.
- Tout symbole prédicatif n-aire suivi de n termes est une formule.
- Si t_1 et t_2 sont des termes, alors $t_1 = t_2$ est une formule.
- Si A est une formule, alors $\neg A$ est une formule.
- Si A et B sont des formules, alors $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ et $(A \rightarrow B)$ sont des formules.
- Si α est une variable et A est une formule, alors $\forall\alpha\ A$ et $\exists\alpha\ A$ sont des formules.

3.3 Sémantique

Les symboles d'un langage logique peuvent être répartis en différentes catégories suivant le type de concept qu'ils désignent. Les symboles prédicatifs n-aires désignent des relations à n arguments[6]. Les symboles propositionnels désignent des propositions. Les symboles fonctionnels n-aires désignent des fonctions à n arguments. Les constantes désignent des objets.

Les symboles logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$ et $\exists$ désignent des opérateurs qui expriment respectivement les concepts de négation, conjonction, disjonction, implication, quantification universelle et quantification existentielle. Ces concepts sont volontiers traduits en français par les expressions « ne … pas », « et », « ou », « si … alors », « tous » et « au moins un ». Le symbole logique $=$ désigne, quant à lui, la relation binaire d'identité.

Les variables, comme les constantes, désignent des objets. Cependant, contrairement aux constantes, les variables ne désignent pas un objet spécifique. Elles sont ainsi susceptibles de désigner n'importe quel objet.

Les parenthèses ne possèdent pas, à proprement parler, de signification. Elles sont des symboles de ponctuation. En effet, les règles syntaxiques adoptées dans cet article rendent nécessaire l'usage de ce type de symboles afin d'éviter toute forme d'ambiguïté[7].

Par ailleurs, il est possible de distinguer les symboles d'un langage logique relativement au degré de variabilité de l'interprétation qu'ils peuvent recevoir. Les symboles logiques possèdent une interprétation qui est fixée quel que soit le contexte[8]. Les symboles prédicatifs, propositionnels et fonctionnels ainsi que les constantes possèdent une

---

[6] Lorsqu'une relation n'admet qu'un seul argument, elle est assimilée à une propriété.

[7] Les parenthèses ne sont pourtant pas essentielles aux langages logiques. Comme l'illustre la notation polonaise, il est possible de s'en passer tout en évitant l'ambiguïté.

[8] La notion informelle de contexte fait ici écho au concept de modèle en logique (Shoenfield, 1967).

interprétation qui peut varier d'un contexte à l'autre. Les symboles de variable possèdent une interprétation qui peut varier au sein d'un même contexte.

Ces deux catégorisations des symboles d'un langage logique peuvent être combinées et synthétisées sous la forme du tableau suivant.

	Interprétation fixée quel que soit le contexte	Interprétation variable d'un contexte à l'autre	Interprétation variable au sein d'un même contexte
Objet		a, b, c, d	x, y, z
Fonction		f^n, g^n, h^n	
Proposition		p, q, r, s	
Relation	$=$	p^n, q^n, r^n, s^n	
Opérateur	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$		

L'interprétation des termes et des formules d'un langage logique est définie à partir de celle des symboles de sorte que tout terme désigne un objet et que toute formule est susceptible de vérité ou de fausseté.

4 Une analyse logique des langues naturelles

Une analyse logique d'une phrase de la langue naturelle consiste à en identifier les constituants logiques ainsi que les relations qu'ils entretiennent[9]. Autrement dit, analyser logiquement une phrase revient à lui associer une formule d'un langage logique sur base d'un vocabulaire fixé préalablement (Quine, 1965 ; Ducrot, 1973 ; Crabbé, 2017).

Un *vocabulaire* V_L pour un langage logique L consiste à associer à tout symbole propre de L une expression de la langue naturelle de sorte qu'à des symboles distincts correspondent des expressions distinctes. Autrement dit, un vocabulaire V_L est une application injective de l'ensemble des symboles propres de L dans l'ensemble des expressions de la langue naturelle[10].

Une *analyse logique* d'une phrase relativement à un vocabulaire V_L est une traduction de cette phrase par une formule de L. Il est à noter que la possibilité de proposer une traduction (adéquate) d'une phrase dépend directement du vocabulaire choisi. Bien que nous n'abordions pas explicitement la question épineuse des critères qui permettent de juger du caractère adéquat d'une traduction, celle-ci demeure en filigrane de notre propos tout au long de cet article.

Une phrase est *ambiguë* si elle admet plusieurs analyses logiques relativement à un même vocabulaire. Nous distinguons deux formes d'ambiguïté, l'une qui est constitutive et l'autre qui est relationnelle.

Une phrase est ambiguë constitutivement si elle admet des analyses logiques qui diffèrent par leurs constituants logiques. Plus précisément, une phrase est *ambiguë constitutivement* s'il en existe au moins deux analyses logiques qui sont relatives au même vocabulaire mais diffèrent par l'ensemble des symboles propres qui y figurent.

Une phrase est ambiguë relationnellement si elle admet des analyses logiques qui partagent les mêmes constituants mais diffèrent par les relations qu'ils entretiennent. Plus précisément, une phrase est *ambiguë relationnellement* s'il en existe au moins deux analyses logiques qui sont relatives au même vocabulaire et ne diffèrent pas par l'ensemble des symboles propres qui y figurent.

Remarquons qu'il suit immédiatement de ces définitions que tout phrase ambiguë l'est nécessairement constitutivement ou relationnellement.

---

[9] Le concept d'analyse logique est assimilable à celui de structure logique.

[10] Notons que l'assignation d'une expression de la langue naturelle à un symbole propre d'un langage logique doit respecter certaines règles. Dans la mesure où l'étude de ces règles nécessiterait de rentrer dans des considérations linguistiques qui dépassent largement le cadre de notre propos, nous les passerons sous silence.

4.1 Ambiguïté constitutive

Afin d'illustrer l'ambiguïté constitutive des phrases de la langue naturelle, différentes analyses logiques de la phrase ci-dessous sont proposées.

Cinq est différent de la racine carrée de dix.

Soit le langage logique L dont les symboles propres sont : p, p^1, r^2, s^2, f^1, g^2, a, b, c, d. Soit également le vocabulaire V_L suivant :

p	Cinq est différent de la racine carrée de dix.
p^1	différent de la racine carrée de dix
r^2	différent de …
s^2	racine carrée de …
f^1	la racine carrée de …
g^2	la racine … de …
a	cinq
b	la racine carrée de dix
c	dix
d	deux

Analyse logique 1 : p

Cette analyse logique est relative à V_L et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est$\{p\}$. Bien que cette traduction puisse sembler fort grossière, elle n'en demeure pas moins pertinente dans la mesure où elle rend compte adéquatement de la structure propositionnelle de la phrase. En effet, aucune mention explicite n'y est faite des opérateurs propositionnels de négation, conjonction, disjonction et implication.

Analyse logique 2 : p^1a

Cette analyse logique est relative à V_L et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p^1, a\}$. Cette traduction est conforme à la théorie aristotélicienne des syllogismes en ce sens qu'elle rend compte de la structure logique de la phrase au travers de la distinction entre sujet et prédicat. En effet, elle signifie que la propriété d'être différent de la racine carrée de dix s'applique au nombre cinq. L'inconvénient de cette approche est qu'elle ne permet pas d'exprimer les relations à plusieurs arguments.

Analyse logique 3 : r^2ab

Cette analyse logique est relative à V_L et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{r^2, a, b\}$. Il s'agit d'une traduction qui rend compte de la notion de dissemblance au moyen d'une relation à deux arguments. Cette traduction se distingue des interprétations mathématiques usuelles où la notion de dissemblance n'est pas conçue comme une relation primitive mais bien comme la négation de la relation d'identité.

Analyse logique 4 : $\neg\, a = b$

Cette analyse logique est relative à V_L et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{a, b\}$. Dans cette traduction, contrairement à la précédente, la notion de dissemblance est conçue comme la négation de la relation d'identité. En mathématiques, le symbole logique de négation précédant une formule identitaire est bien souvent délaissé au profit d'une notation plus compacte faisant intervenir le symbole $\neq$.

Analyse logique 5 : $(\exists x\, (s^2xc \wedge \forall y\, (s^2yc \to y = x)) \wedge \neg\, s^2ac)$

Cette analyse logique est relative à V_L et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{s^2, a, c\}$. La notion de racine carrée est ici interprétée comme une relation plutôt que comme une fonction. Cette traduction exprime l'idée suivant laquelle dix possède exactement une racine carrée et cinq n'est pas cette racine carrée. Cette analyse logique n'est pas sans rappeler la problématique des descriptions définies traitée par Russell (Russell, 1920).

Analyse logique 6 : $\neg\, a = f^1c$

Cette analyse logique est relative à V_L et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{f^1, a, c\}$. Cette traduction, qui se rapproche davantage de l'interprétation mathématique usuelle, rend compte de la notion de racine carrée au moyen d'une fonction à un argument.

Analyse logique 7 : $\neg\ a = g^2dc$

Cette analyse logique est relative à V_L et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{g^2, a, d, c\}$. Dans cette traduction, la notion de racine carrée est conçue comme une fonction à deux arguments tels que le premier est l'indice de la racine et le second est son radicand.

Nous constatons que toutes ces analyses logiques sont relatives au vocabulaire V_L mais diffèrent par l'ensemble des symboles propres qui y figurent. Aussi, pouvons-nous conclure que la phrase étudiée est ambiguë constitutivement. Cette ambiguïté est qualifiée de « constitutive » dans la mesure où elle repose sur l'identification des éléments conceptuels mobilisés par la phrase (quelles que soient les relations qu'ils entretiennent). Déterminer l'ensemble des symboles propres qui doivent figurer dans l'analyse logique d'une phrase revient en fait à identifier l'ensemble des concepts mobilisés par cette phrase. En ce sens, l'ambiguïté constitutive met en évidence que plusieurs découpages conceptuels peuvent être associés à une même phrase.

En général, l'identification des constituants logiques d'une phrase dépend du contexte de son énonciation. C'est pourquoi il semble illusoire de pouvoir identifier de façon univoque les constituants logiques d'une phrase, si élémentaire soit-elle. À ce titre, toute phrase peut être considérée comme ambiguë constitutivement.

4.2 Ambiguïté relationnelle

Afin d'illustrer l'ambiguïté relationnelle des phrases de la langue naturelle, différentes analyses logiques de la phrase ci-dessous sont proposées.

Les multiples de neuf et de douze sont des multiples de trois.

Soit le langage logique L' dont les symboles propres sont : p_3^1, p_9^1, p_{12}^1. Soit également le vocabulaire $V_{L'}$ suivant :

p_3^1	nombre naturel multiple de trois
p_9^1	nombre naturel multiple de neuf
p_{12}^1	nombre naturel multiple de douze

Analyse logique 1 : $\forall x\ ((p_9^1x \rightarrow p_3^1x) \wedge (p_{12}^1x \rightarrow p_3^1x))$

Cette analyse logique est relative à $V_{L'}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p_3^1,\ p_9^1,\ p_{12}^1\}$. Cette traduction exprime l'idée suivant laquelle tout nombre naturel multiple de neuf est multiple de trois et tout nombre naturel multiple de douze est également multiple de trois.

Analyse logique 2 : $\forall x\ ((p_9^1x \vee p_{12}^1x) \rightarrow\ p_3^1x)$

Cette analyse logique est relative à $V_{L'}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p_3^1,\ p_9^1,\ p_{12}^1\}$. Cette traduction, plus libre, rend compte de l'idée suivant laquelle tout nombre naturel multiple de douze ou de neuf est multiple de trois.

Analyse logique 3 : : $\forall x\ ((p_9^1x \wedge p_{12}^1x) \rightarrow\ p_3^1x)$

Cette analyse logique est relative à $V_{L'}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p_3^1,\ p_9^1,\ p_{12}^1\}$. L'idée véhiculée par cette traduction est que tout nombre naturel qui est multiple à la fois de douze et de neuf est multiple de trois.

Nous constatons que ces analyses logiques sont relatives au vocabulaire $V_{L'}$ et ne diffèrent pas par l'ensemble des symboles propres qui y figurent. Aussi, pouvons-nous conclure que la phrase étudiée est ambiguë relationnellement. L'aspect relationnel de cette ambiguïté est suggéré par le fait que même si l'identification des constituants logiques d'une phrase est arrêtée, il est possible d'en donner différentes traductions selon l'identification des relations logiques qu'entretiennent ces constituants. Autrement dit, différentes articulations peuvent être envisagées pour un même découpage conceptuel.

Il est à noter également que si les trois analyses logiques exposées antérieurement sont vraies en arithmétique élémentaire, elles ne sont pas logiquement équivalentes[11]. En effet, la première et la deuxième sont équivalentes entre elles mais la troisième n'est pas équivalente aux deux précédentes. En fait, la première analyse, comme la deuxième, entraîne logiquement la troisième. Deux analyses logiques qui sont relatives au même vocabulaire et ne diffèrent pas par l'ensemble des symboles propres qui y figurent ne sont donc pas nécessairement logiquement équivalentes.

Par ailleurs, il est possible de déduire de la définition de langage logique que, quelle que soit l'analyse logique qui est proposée d'une phrase, il en existe une autre dont les constituants logiques sont identiques et qui lui est logiquement équivalente. À ce titre, toute phrase peut être considérée comme ambiguë relationnellement.

5 La résolution de problèmes

L'ambiguïté logique de la langue naturelle maintenant constatée, il s'agit de montrer que cette ambiguïté peut avoir une incidence sur la résolution de problèmes mathématiques. Pour ce faire, la présente section est consacrée à l'analyse d'un problème issu du Rallye Mathématique Transalpin. Il s'agit du dix-neuvième problème de la seconde épreuve du quatorzième RMT, intitulé « Chasse au trésor ».

> *L'autre jour, en fouillant dans le grenier, Marc a découvert une vieille malle qui contenait un parchemin et un coffre. En lisant le parchemin, il a compris que le coffre contenait un trésor protégé par une serrure avec une combinaison à 3 chiffres (de 1 à 9). En outre, le parchemin donnait ces informations :*

a) *Dans* $\langle 3,4,5\rangle$ *un seul des chiffres est correct, mais n'est pas bien placé.*
b) *Dans* $\langle 2,3,6\rangle$ *aucun de ces chiffres n'est correct.*
c) *Dans* $\langle 6,7,8\rangle$ *un seul chiffre est correct et bien placé.*
d) *Dans* $\langle 4,7,2\rangle$ *un seul chiffre est correct et bien placé.*
e) *Dans* $\langle 8,5,9\rangle$ *deux chiffres sont corrects, mais un seul est bien placé.*
f) *Dans* $\langle 5,8,2\rangle$ *un seul chiffre est correct et bien placé.*

> *Pouvez-vous aider Marc à trouver la bonne combinaison pour ouvrir le coffre ?*
> *Expliquez comment vous avez résolu ce problème.*[12]

5.1 Analyse de l'énoncé du problème

Plutôt que de proposer une analyse logique de la totalité du problème, nous focaliserons notre attention sur l'expression « un seul chiffre est correct et bien placé ». Cette expression apparaît à trois reprises dans l'énoncé du problème ; nous limiterons notre analyse à la phrase dans laquelle figure la dernière occurrence.

Dans $\langle 5,8,2\rangle$ *un seul chiffre est correct et bien placé.*

Soit le langage logique L'' dont les symboles propres sont : p^1, q^1, r^1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9. Soit également le vocabulaire $V_{L''}$ suivant :

p^1	chiffre bien placé dans $\langle 5,8,2\rangle$
q^1	chiffre correct
r^1	chiffre figurant dans $\langle 5,8,2\rangle$
c_i	le chiffre « i » $(1 \leq i \leq 9)$

Analyse logique forte : $(\exists! x\,(r^1x \wedge q^1x) \wedge \forall y\,((r^1y \wedge q^1y) \rightarrow p^1y))$

[11] Pour s'en convaincre, une analyse similaire à celle proposée ci-dessus peut être appliquée à la phrase « Les multiples de trois et de quatre sont des multiples de douze. ».

[12] La bonne combinaison mentionnée dans l'analyse *a priori* du problème est $\langle 5,7,9\rangle$.

Cette analyse logique[13] est relative à $V_{L''}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p^1, q^1, r^1\}$. L'interprétation de la phrase correspondant à cette traduction est qu'il existe exactement un chiffre correct dans $\langle 5,8,2 \rangle$ et que ce chiffre est en outre bien placé.

Analyse logique faible : $\exists! x\ ((r^1x \wedge q^1x) \wedge p^1x)$

Cette analyse logique est relative à $V_{L''}$ et l'ensemble des symboles propres qui y figurent est $\{p^1, q^1, r^1\}$. Elle traduit l'idée selon laquelle il existe exactement un chiffre dans $\langle 5,8,2 \rangle$ qui est à la fois correct et bien placé.

Dans la mesure où elles sont relatives au même vocabulaire et les symboles propres qui y figurent sont identiques, ces deux analyses logiques témoignent de l'ambiguïté relationnelle de la phrase considérée. D'autre part, elles ne sont pas logiquement équivalentes. Dans le cadre de la logique formelle, il est en effet possible de montrer que l'analyse forte entraîne l'analyse faible alors que l'analyse faible n'entraîne pas l'analyse forte.

5.2 Analyse d'un raisonnement

Afin de mettre en exergue l'impact que peut avoir cette ambiguïté logique sur la résolution du problème, nous nous proposons d'examiner le raisonnement suivant[14].

Dans $\langle 5,8,2 \rangle$ le chiffre « 5 » est correct.
Dans $\langle 5,8,2 \rangle$ un seul chiffre est correct et bien placé.
____
Dans $\langle 5,8,2 \rangle$ le chiffre « 5 » est bien placé et tous les autres sont incorrects.

Notre analyse du raisonnement s'inspire du projet leibnizien d'une langue symbolique universelle. En cela, elle consiste à traduire dans un langage logique chacune des phrases qui composent le raisonnement de sorte à pouvoir ensuite juger de sa correction sur base d'un système déductif approprié[15].

Dans cette perspective, la première et la troisième phrase du raisonnement sont analysées relativement au vocabulaire $V_{L''}$. La première phrase exprime l'idée que le chiffre « 5 » figure dans $\langle 5,8,2 \rangle$ et que ce chiffre est correct. Aussi peut-elle être fidèlement traduite par la formule $(r^1c_5 \wedge q^1c_5)$. La troisième phrase, quant à elle, signifie que le chiffre « 5 » est bien placé dans $\langle 5,8,2 \rangle$ et que tout chiffre différent de « 5 » qui figure dans $\langle 5,8,2 \rangle$ est nécessairement incorrect. Ce que l'on traduira volontiers par la formule $(p^1c_5 \wedge \forall x\ ((r^1x \wedge \neg\, x = c_5) \rightarrow \neg\, q^1x))$.

Selon que l'on opte pour l'analyse logique forte ou l'analyse logique faible de la deuxième phrase du raisonnement, celui-ci donne lieu à deux formulations distinctes dans le langage logique L'':

Formulation du raisonnement basée sur l'analyse logique forte

$$\frac{\begin{array}{c}(r^1c_5 \wedge q^1c_5)\\ (\exists! x\ (r^1x \wedge q^1x) \wedge \forall y\ ((r^1y \wedge q^1y) \rightarrow p^1y))\end{array}}{(p^1c_5 \wedge \forall x\ ((r^1x \wedge \neg\, x = c_5) \rightarrow \neg\, q^1x))}$$

Formulation du raisonnement basée sur l'analyse logique faible

$$\frac{\begin{array}{c}(r^1c_5 \wedge q^1c_5)\\ \exists! x\ ((r^1x \wedge q^1x) \wedge p^1x)\end{array}}{(p^1c_5 \wedge \forall x\ ((r^1x \wedge \neg\, x = c_5) \rightarrow \neg\, q^1x))}$$

---

[13] Le symbole $\exists$ suivi d'un point d'exclamation se lit « il existe *exactement* un ». Formellement, $\exists! \alpha\, A$ est une abréviation de $\exists\alpha\ (A \wedge \forall\beta\ (A[\alpha := \beta] \rightarrow \beta = \alpha))$ où β est une variable distincte de α qui ne figure pas dans la formule A (Kleene, 1952).

[14] Une variante de ce raisonnement figure dans l'analyse *a priori* du problème.

[15] Nous entendons par là tout système axiomatique qui satisfait le théorème de complétude pour la logique classique du premier ordre avec égalité.

Alors que le raisonnement basé sur l'analyse logique forte est correct, celui basé sur l'analyse logique faible ne l'est pas. Afin d'établir cette double affirmation, nous privilégierons un argument informel à un examen technique s'appuyant sur un système déductif.

Dans le cas de l'interprétation forte, nous supposons que le chiffre « 5 », qui figure dans ⟨5,8,2⟩, est correct et qu'un seul chiffre figurant dans cette combinaison est correct. Il s'ensuit que tout chiffre autre que « 5 » figurant dans ⟨5,8,2⟩ est incorrect. Par ailleurs, nous supposons également que le seul chiffre correct figurant dans ⟨5,8,2⟩ est en outre bien placé. Comme ce chiffre est « 5 », nous en déduisons qu'il est bien placé dans la combinaison. En conséquence, le chiffre « 5 » est bien placé dans ⟨5,8,2⟩ et tout autre chiffre y figurant est incorrect.

Au contraire, dans le cas de l'interprétation faible, la dernière phrase du raisonnement ne peut être déduite des deux précédentes. Autrement dit, la vérité des deux premières phrases n'entraîne pas la vérité de la troisième. Il existe en effet un contre-exemple où le chiffre « 8 » est correct et bien placé, le chiffre « 5 » est correct mais n'est pas bien placé et le chiffre « 2 » n'est ni correct ni bien placé. Un tel contre-exemple rend vraies les prémisses du raisonnement alors qu'il rend fausse sa conclusion.

En résumé, nous constatons que l'ambiguïté logique d'une phrase figurant dans l'énoncé d'un problème peut avoir une incidence sur la correction des raisonnements effectués dans le cadre de sa résolution. Suivant que l'on opte pour une analyse logique plutôt qu'une autre, un même raisonnement peut être considéré comme correct ou incorrect.

5.3 Analyse de la solution du problème

Dans la mesure où l'ambiguïté logique influe sur les cheminements déductifs qui conduisent à la solution d'un problème, il n'est pas rare qu'elle donne lieu à des réponses différentes[16]. Le problème qui nous occupe fait pourtant exception à cette règle. En effet, que l'on retienne l'analyse logique forte ou l'analyse logique faible, la solution qu'il convient d'y apporter demeure inchangée. À cet égard, deux remarques nous semblent essentielles.

Premièrement, l'ambiguïté logique d'une phrase n'est pas toujours aisée à déceler. En effet, il ne suffit pas, lors de la relecture d'un problème, de comparer les réponses apportées par chacun pour s'assurer que ce problème échappe à toute ambiguïté préjudiciable à sa bonne compréhension. En revanche, il est nécessaire pour cela d'examiner l'enchaînement des raisonnements effectués et d'en vérifier la correction. C'est seulement de cette façon qu'une ambiguïté comme celle que nous avons traitée peut éventuellement être identifiée.

Deuxièmement, l'ambiguïté logique peut avoir un impact sur le degré de complexité d'un problème. Comme nous l'avons mentionné, l'analyse logique forte entraîne l'analyse logique faible. Cela signifie que si un cheminement déductif effectué au départ de l'énoncé du problème est correct relativement à l'analyse faible, alors il est également correct relativement à l'analyse forte[17]. Au contraire, certains cheminements déductifs corrects relativement à l'analyse forte ne le sont pas relativement à l'analyse faible. Il apparaît donc qu'identifier un cheminement déductif permettant de résoudre le problème est davantage aisé lorsqu'on adopte l'analyse logique forte que lorsqu'on adopte l'analyse logique faible.

6 Conclusion

Il ressort de la présente discussion que les phrases en langue naturelle sont ambiguës eu égard à leur structure logique et que cette ambiguïté peut avoir une incidence sur la résolution de problèmes.

À la lumière du langage de la logique contemporaine, nous avons distingué deux formes d'ambiguïté, l'une qui est constitutive et l'autre qui est relationnelle. L'ambiguïté constitutive traduit l'idée que plusieurs découpages conceptuels peuvent être associés à une phrase. En ce sens, une phrase est ambiguë constitutivement si elle admet des analyses logiques qui diffèrent par leurs constituants logiques. D'autre part, l'ambiguïté relationnelle capture l'idée que plusieurs articulations conceptuelles peuvent être associées à une phrase. En ce sens, une phrase est ambiguë relationnellement si elle admet des analyses logiques qui partagent les mêmes constituants mais diffèrent par les relations qu'ils entretiennent.

[16] Le problème du RMT « Des carrés sur une figure » (25.II.04) en est un bon exemple. Un examen des copies d'élèves de la Section belge nous a en effet permis d'identifier deux analyses logiques du problème conduisant à des solutions différentes.

[17] L'argument formel qui sous-tend notre propos est le suivant. Soient deux formules A et B telles que le raisonnement $A\ donc\ B$ est correct. Alors, pour toute formule C et toute suite de formules Γ, si $\Gamma, B\ donc\ C$ est correct, alors $\Gamma, A\ donc\ C$ est également correct.

Qu'elle soit constitutive ou relationnelle, l'ambiguïté d'une phrase peut bien souvent être levée grâce au contexte de son énonciation. En effet, le contexte permet habituellement d'identifier, parmi les différentes analyses logiques possibles, celle qui est la plus pertinente et, partant, qu'il convient de retenir. Toutefois, il arrive que le contexte d'énonciation ne permette pas d'identifier une unique analyse logique. Un cas particulièrement critique d'ambiguïté survient lorsque plusieurs analyses logiques pertinentes sont envisageables et que ces analyses ne sont pas logiquement équivalentes. Le problème du RMT intitulé « Chasse au trésor » illustre ce cas de figure.

Notre examen de ce problème révèle que deux analyses logiques pertinentes et non logiquement équivalentes peuvent être associées à l'une des phrases qui figurent dans l'énoncé. Il s'avère que cette ambiguïté touche à la signification du problème tout entier au point que sa résolution appelle des cheminements déductifs différents selon que l'on opte pour une analyse logique plutôt qu'une autre. En outre, nous avons constaté que l'ambiguïté logique d'une phrase n'est pas toujours aisée à déceler et qu'elle peut avoir une incidence sur le degré de complexité d'un problème.

En général, l'ambiguïté logique des langues naturelles nous semble constituer un défi didactique plutôt qu'une déficience à laquelle il conviendrait de remédier. Dans une telle perspective, il apparaît alors que l'identification de structures logiques adéquates à la résolution d'un problème est un objet d'apprentissage et que toute résolution de problème comporte une marge interprétative irréductible.

7 Références

Crabbé, M. (2017). *La loglangue facile en quinze leçons.* Accessible en ligne à l'adresse : http://logoi.be/crabbe/textes/loglangue.pdf.

Ducrot, O. (1973). *La preuve et le dire. Langage et logique*. Paris : Maison Mame.

Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle (Saale) : Louis Nebert.

Frege, G. (1960). *The foundations of arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number* (trad. J. L. Austin). New York : Harper Torchbooks.

Kleene, S. C. (1952). *Introduction to metamathematics*. Amsterdam : North-Holland Publishing Company.

Leibniz, G. W. (1903). Projet et Essais pour arriver à quelque certitude pour finir une bonne partie des disputes et pour avancer l'art d'inventer. In L. Couturat (Ed.), *Opuscules et fragments inédits de Leibniz* (pp. 175–182). Paris : Félix Alcan.

Quine, W. V. O. (1965). *Elementary logic. Revised edition*. New York : Harper Torchbooks.

Russell, B. (1920). *Introduction to mathematical philosophy.* New York : Dover Publications.

Shoenfield, J. (1967). *Mathematical logic*. Reading (Massachusetts) : Addison-Wesley Publishing Company.

Tarski, A. (1994). *Introduction to logic and to the methodology of the deductive sciences*. Oxford : Oxford University Press.

LA LOGICA COME STRUMENTO DI ANALISI PER LA RISOLUZIONE DI PROBLEMI[1]

Vincent Degauquier[2]

1 Introduzione

Due aspetti sembrano comuni a tutti i problemi del RMT. Da una parte l'enunciato del problema è formulato, del tutto o in parte, in lingua naturale. L'uso che viene fatto della lingua nella formulazione di un problema è del resto raramente aneddotico. Nella maggior parte degli enunciati figurano in effetti frasi contenenti informazioni necessarie alla risoluzione. D'altra parte la risoluzione di un problema richiede, a livelli diversi, di fare ragionamenti.

Qualunque sia l'argomento di un problema o il livello scolastico degli allievi al quale è proposto, la sua risoluzione consiste nel dedurre certe informazioni a partire da altre contenute nell'enunciato.

Del resto, la logica ci dice che la correttezza di un ragionamento riposa essenzialmente sulla struttura logica delle espressioni che lo compongono. In altre parole, solo la struttura logica delle espressioni costitutive di un ragionamento permette di determinare se tale ragionamento è corretto. A titolo di esempio, il ragionamento presentato più sotto[3] è corretto qualunque siano le proprietà designate dai termini "uomo" e "mortale" e qualunque sia l'oggetto designato dal termite "Socrate".

Tutti gli uomini sono mortali.
Socrate è un uomo.
―――――――――
Socrate è mortale

Per convincercene, osserviamo che questo ragionamento continua a essere corretto quando sostituiamo il termine "cavallo" al termine "uomo", il termine "veloce" al termine "mortale" e il termine "Bucefalo" al termine "Socrate".

Tutti i cavalli sono veloci.
Bucefalo è un cavallo.
―――――――――
Bucefalo è veloce.

Se risolvere un problema richiede di effettuare ragionamenti corretti a partire da frasi della lingua naturale e se effettuare ragionamenti corretti necessita di identificare – in qualunque modo – la struttura logica delle espressioni che la compongono, allora risolvere un problema richiede di identificare la struttura logica delle frasi della lingua naturale.

Questo articolo si pone come obiettivo di stabilire due punti. Il primo è che la maggior parte delle frasi in lingua naturale, se non tutte, sono ambigue rispetto alla loro struttura logica. La seconda è che questa ambiguità può influenzare la risoluzione dei problemi matematici.

A tal fine, esamineremo la lingua naturale alla luce del linguaggio della logica contemporanea. Proporremo inoltre un'analisi logica di frasi in lingua naturale alcune delle quali sono tratte da un problema del Rally Matematico Transalpino.

Questa proposta è organizzata in quattro parti. Dapprima, esporremo le motivazioni filosofiche che sono all'origine del linguaggio della logica contemporanea. In questa parte evocheremo due tappe decisive del suo sviluppo, e cioè il progetto di una lingua universale immaginata da G. W. Leibniz (1646–1716) e la *Begriffsschrift* elaborata da G. Frege (1848–1925). In secondo luogo presenteremo il linguaggio della logica dei predicati di primo ordine con uguaglianza. Dettaglieremo quindi, con l'aiuto di esempi tratti dall'aritmetica, i diversi tipi di simboli che costituiscono il suo alfabeto ma anche le regole sintattiche che definiscono l'insieme delle espressioni ben formate di tale linguaggio. Una volta illustrato il linguaggio della logica, mostreremo che esso costituisce uno strumento prezioso per l'analisi della lingua naturale. Constateremo che la maggior parte delle frasi della lingua "francese", se non tutte, sono ambigue nel senso che ne sono possibili diverse analisi logiche. Infine analizzeremo un problema del Rally Matematico Transalpino. Mostreremo che alcune frasi che figurano nell'enunciato del problema sono ambigue in relazione alla loro struttura logica e che questa ambiguità riguarda il significato stesso del problema.

[1] Questo articolo si inscrive nell'ambito del progetto Loglang svolto dal "Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques" e riprende la conferenza dell'autore presentata nella giornata di apertura del ventunesimo incontro dell'ARMT a Charleroi (Belgio), il 27 ottobre 2017.

[2] "Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques" (CREM) asbl, Belgique.

[3] La riga che separa le premesse dalla conclusione del ragionamento va letta come "dunque".

2 Le origini del linguaggio della logica

Le motivazioni filosofiche che sono all'origine del linguaggio della logica contemporanea derivano da una duplice osservazione. Da una parte, certe verità non possono essere stabilite con certezza se non assicurandosi della correttezza dei nostri ragionamenti.
Fra queste figurano le verità matematiche. Anche se l'intuizione ci può portare a congetturare certe proprietà matematiche, essa non ne garantisce l'esattezza. Solo un ragionamento corretto permette di stabilirle con certezza.
D'altra parte le lingue naturali sono incapaci di esprimere adeguatamente le strutture logiche sulle quali si basa la correttezza dei ragionamenti.
L'opacità della struttura logica delle frasi delle lingue naturali costituisce in effetti un ostacolo allo svolgimento dei ragionamenti.

2.1 Progetto di una lingua simbolica universale

L'idea secondo cui l'elaborazione di una lingua simbolica universale costituisce una via privilegiata verso la certezza fu, sembra, enunciata esplicitamente per la prima volta da Leibniz. La vocazione di tale lingua sarebbe quella di formulare ragionamenti in modo che sia possibile assicurarsi che siano corretti tramite metodi puramente aritmetici. Precisiamo in che cosa consista questa lingua partendo da una citazione dello stesso Leibniz. (Leibniz, 1903).

> *L'unico modo per rettificare i nostri ragionamenti è quello di renderli precisi come quelli dei matematici, in modo che si possano trovare gli errori a colpo d'occhio e quando ci siano controversie tra le persone, si possa dire soltanto: contiamo, senza altre cerimonie, per vedere chi ha ragione.*
>
> *Se le parole furono create seguendo un artificio che io vedo possibile, ma di cui coloro che hanno creato linguaggi universali non si sono resi conto, si potrebbe arrivare a questo effetto attraverso le parole stesse, e ciò sarebbe di un'utilità incredibile per la vita umana. Ma nel frattempo c'è un altro cammino meno bello, ma che è già aperto, mentre l'altro dovrebbe essere rifatto. È quello di servirsi di caratteri come fanno i matematici, che sono in grado di fissare la nostra Mente, e aggiungendo una prova con i numeri.*
>
> *Perché avendo ridotto in tal modo un ragionamento della morale, della fisica, della medicina o della metafisica a questi termini o caratteri, potremo certamente accompagnarlo con la prova dei numeri, in modo che sarà impossibile sbagliarsi se non lo vogliamo. Cosa che può essere una delle scoperte più importanti di cui si sia avuto notizia da lungo tempo.*

Secondo Leibniz, una lingua adatta a condurre i nostri ragionamenti dovrebbe essere simbolica. Nella misura in cui i simboli permettono di identificare i concetti in maniera più adeguata rispetto alle parole, questa lingua si ispirerebbe più a quella della matematica che alla lingua naturale. Inoltre la lingua immaginata da Leibniz dovrebbe essere universale. Ammesso che la correttezza di un ragionamento riposi esclusivamente sulla struttura logica delle espressioni che vi figurano, questa lingua permetterebbe di determinare se un ragionamento è corretto qualunque sia l'ambito di conoscenza sul quale si basa.

2.2 Elaborazione di una scrittura concettuale

Certo, Leibniz è il primo a immaginare una lingua simbolica universale e a percepirne l'interesse per effettuare dei ragionamenti. Non ne propone, però, alcuna descrizione precisa. Inserendosi nel progetto iniziato da Leibniz, Frege elabora, circa due secoli più tardi, una scrittura concettuale specificamente adeguata allo sviluppo dei ragionamenti. È questo Begriffsschrift[4] (Ideografia) che segna veramente la nascita del linguaggio della logica contemporanea (Frege, 1879).
Si noti comunque che benché la maggior parte dei concetti costitutivi della logica contemporanea siano presenti in quest'opera, la scrittura concettuale di Frege rimane molto lontana, nella sua presentazione, dal linguaggio della logica come la si può trovare oggi nei testi di logica.

> *Per evitare che in questo tentativo si introducesse inavvertitamente alcunché di intuitivo, tutto doveva svolgersi senza la minima lacuna entro la catena deduttiva. Cercando di soddisfare nel modo più rigoroso a questa esigenza, incontrai un ostacolo nell'inadeguatezza*

---

[4] Abbiamo deciso di tradurre questa espressione con "scrittura concettuale" piuttosto che con "ideografia". Seguiamo in tal modo la traduzione inglese proposta da J. L. Austin (Frege, 1960).

> *della lingua; malgrado la pesantezza d'espressione, più diventano complesse le relazioni, meno la lingua permette di raggiungere quella precisione che il mio intento esigeva. Da questa necessità nacque l'idea dell'ideografia citata qui.*
> *Essa deve dunque servire anzitutto a esaminare nel modo più sicuro la connessione di una catena deduttiva e a mettere in evidenza ogni ipotesi che voglia insinuarvisi inosservata, affinché, infine, si possa indagare sulla sua origine. Perciò si è rinunciato ad esprimere tutto ciò che è senza importanza per la consequenzialità delle deduzioni. (Trad. di L. Geymonat e C. Mangione[5])*

La scrittura concettuale di Frege scaturisce dunque dall'impossibilità di esprimere nella lingua naturale e in modo perfettamente preciso i meccanismi deduttivi che assicurano la correzione dei ragionamenti. In tal senso sembra rimanere nella lingua naturale una forma di opacità irriducibile che rende una qualunque espressione intrinsecamente ambigua rispetto alla sua struttura logica. La scrittura concettuale si scosta dalla lingua naturale proprio nel tener conto unicamente di ciò che determina la correttezza dei ragionamenti, cioè la struttura logica delle espressioni che li compongono.

3 Il linguaggio della lingua contemporanea

Se il linguaggio della logica contemporanea è erede della scrittura contemporanea di Frege, quest'ultima, da parte sua, prende le mosse da quello dell'aritmetica. A questo proposito due osservazioni preliminari sul linguaggio dell'aritmetica sembrano chiarificatrici per affrontare quello della logica.
Da un lato tutti i simboli non rappresentano concetti della stessa natura. Difatti possono rappresentare tanto numeri quanto funzioni o relazioni. D'altra parte tutti i simboli non rappresentano un concetto specifico. Infatti, mentre certi simboli rappresentano un concetto completamente determinato, altri possono rappresentare concetti differenti.
L'uso congiunto di simboli la cui interpretazione può variare e di altri la cui interpretazione è fissata, conferisce a certe espressioni aritmetiche il loro statuto di verità universale. Un'espressione aritmetica è vera in virtù della sua struttura. Nel linguaggio dell'aritmetica, come in quello della logica, sono i simboli la cui interpretazione è fissa che determinano la struttura di un'espressione. E così, visto che i simboli $+$, 0 e $=$ assumono la loro interpretazione usuale, l'espressione aritmetica $x + 0 = x$ rimane vera qualunque sia il valore assegnato a x. In tal senso, la verità di un'espressione aritmetica riposa sui simboli la cui interpretazione è fissa mentre la sua universalità riposa sui simboli la cui interpretazione è variabile.
Al fine di illustrare le due osservazioni precedenti, i simboli che figurano nell'espressione $x + 0 = x$ sono classificati nella tabella che segue secondo la natura dei concetti che designano e il carattere fisso o variabile di questa designazione.

	Interpretazione fissa	Interpretazione variabile
Numero	0	x
Funzione	$+$	
Relazione	$=$	

Un *linguaggio predicativo del primo ordine con uguaglianza (o linguaggio logico)* è composto da un alfabeto e una sintassi.

3.1 Alfabeto

Un *alfabeto* è un insieme di simboli che comprendono:
- I simboli logici: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$, $=$
- Le variabili: x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, …
- Le parentesi:), (

Oltre a questi simboli, un alfabeto può comprendere:
- simboli predicativi n-ari ($n > 0$): p^n, q^n, r^n, s^n, p_1^n, …
- simboli proposizionali: p, q, r, s, p_1, …
- simboli funzionali n-ario ($n > 0$): f^n, g^n, h^n, f_1^n, …
- costanti: a, b, c, d, a_1, …

[5] Per la versione italiana del presente articolo si veda: Logica e aritmetica / Gottlob Frege; scritti raccolti a cura di Corrado Mangione; prefazione di Ludovico Geymonat. - Torino: Boringhieri, 1965. - 608 p.; 22 cm. (Trad. di Ludovico Geymonat e Corrado Mangione).

I simboli predicativi, proposizionali e funzionali così come le costanti di un alfabeto formano l'insieme dei *simboli propri* di questo alfabeto. Nella misura in cui due alfabeti differiscono solo per l'insieme dei loro simboli caratteristici, identificare un alfabeto significa identificarne i simboli caratteristici.

3.2 Sintassi

Un'espressione di un linguaggio è una sequenza finita di simboli dell'alfabeto di tale linguaggio. Alcune espressioni di un linguaggio sono chiamate termini e altre formule. Queste espressioni sono formate mediante regole sintattiche esaustive.
Dunque, i termini e le formule del linguaggio sono soltanto le espressioni costruite seguendo queste regole.

Un *termine* è un'espressione formata a partire dalle regole che seguono.

- Ogni variabile è un termine.
- Ogni costante è un termine.
- Ogni simbolo funzionale n-ario seguito da n termini è un termine.

Una *formula* è un'espressione formata a partire dalle regole che seguono.

- Ogni simbolo proposizionale è una formula.
- Ogni simbolo predicativo n-ario seguito da n termini è una formula.
- Se t_1 e t_2 sono termini, allora $t_1 = t_2$ è una formula.
- Se A è una formula, allora $\neg A$ è una formula.
- Se A e B sono formule, allora $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ e $(A \rightarrow B)$ sono formule.
- Se α è una variabile e A è una formula, allora $\forall \alpha$ A e $\exists \alpha$ A sono formule.

3.3 Semantica

I simboli di un linguaggio logico possono essere suddivisi in diverse categorie secondo il tipo di concetto che designano. I simboli predicativi n-ari designano delle relazioni con n argomenti[6]. I simboli proposizionali designano delle proposizioni. I simboli funzionali n-ari designano funzioni a n argomenti. Le costanti designano oggetti.

I simboli logici $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$ e $\exists$ designano operatori che esprimono rispettivamente i concetti di negazione, congiunzione, implicazione, quantificazione universale e quantificatore esistenziale. Questi concetti sono tradotti abitualmente in italiano come "non", "e", "o", "se… allora", "per ogni", "esiste". Il simbolo logico $=$ designa, da parte sua, la relazione binaria di identità.

Le variabili, come le costanti, designano oggetti. Però, contrariamente alle costanti, le variabili non designano un oggetto specifico. Sono anche suscettibili di designare un qualunque oggetto.

Le parentesi non posseggono significato in senso stretto. Si tratta di simboli di punteggiatura. In effetti, le regole sintattiche adottate in questo articolo rendono necessario l'uso di questo tipo di simboli al fine di evitare una qualunque forma di ambiguità[7].

È inoltre possibile distinguere i simboli di un linguaggio logico relativamente al grado di variabilità dell'interpretazione che possono assumere. I simboli logici posseggono un'interpretazione che è fissata qualunque sia il contesto[8]. I simboli predicativi, proposizionali e funzionali ed anche le costanti posseggono un'interpretazione che può variare da un contesto all'altro. I simboli di variabile posseggono un'interpretazione che può variare in seno ad un medesimo contesto.

Queste due categorizzazioni dei simboli di un linguaggio logico possono essere combinate e sintetizzate sotto la forma della tabella che segue.

---

[6] Quando una relazione ammette un solo argomento, è assimilata a una proprietà.

[7] Le parentesi non sono comunque essenziali ai linguaggi logici. Come lo mostra la notazione polacca, è possibile non utilizzarle evitando comunque l'ambiguità.

[8] La nozione informale del contesto fa qui eco al concetto di modello in (Shoenfield, 1967).

	Interpretazione fissata qualunque sia il contesto	Interpretazione variabile da un contesto all'altro	Interpretazione variabile in seno di un medesimo contesto
Oggetto		a, b, c, d	x, y, z
Funzione		f^n, g^n, h^n	
Proposizione		p, q, r, s	
Relazione	$=$	p^n, q^n, r^n, s^n	
Operatore	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$		

L'interpretazione dei termini e delle formule di un linguaggio logico è definita a partire da quella dei simboli in modo che ogni termine designi un oggetto e che ogni formula sia suscettibile di verità o falsità.

4 Un'analisi logica delle lingue naturali

Un'analisi logica di una frase della lingua naturale consiste nell'identificarne sia i suoi componenti logici che le relazioni che intercorrono fra loro[9]. In altre parole, analizzare logicamente una frase significa associarle una formula del linguaggio della logica sulla base di un vocabolario precedentemente fissato. (Quine, 1965; Ducrot, 1973; Crabbé, 2017).

Un *vocabolario* V_L per un linguaggio logico L consiste nell'associare a ogni simbolo specifico di L un'espressione della lingua naturale in modo che a simboli distinti corrispondano espressioni distinte. In altre parole, un vocabolario V_L è un'applicazione iniettiva dell'insieme dei simboli caratteristici di L nell'insieme delle espressioni della lingua naturale[10].

Una *analisi logica* di una frase relativamente a un vocabolario V_L è una traduzione di questa frase per una formula di L. Va osservato che la possibilità di proporre una traduzione (adeguata) di una frase dipende direttamente dal vocabolario scelto. Benché non ci occupiamo qui esplicitamente della spinosa questione dei criteri che permettono di giudicare il carattere adeguato di una traduzione, essa rimane fra le righe del nostro proposito in tutto questo articolo.

Una frase è ambigua se ammette più di un'analisi logica relativamente a un medesimo vocabolario. Distinguiamo due forme di ambiguità, una costitutiva e l'altra relazionale.

Una frase è ambigua costitutivamente se ammette analisi logiche che differiscono per i loro componenti logici. Più precisamente, una frase è *ambigua costitutivamente* se esistono almeno due analisi logiche che sono relative al medesimo vocabolario ma differenti per l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano.

Una frase è ambigua relazionalmente se ammette analisi logiche che condividono gli stessi elementi costitutivi ma differenti nelle relazioni che fra essi intercorrono.

Più precisamente, una frase è *ambigua relazionalmente* se esistono almeno due analisi logiche che sono relative al medesimo vocabolario e non differiscono per quanto riguarda i simboli caratteristici che vi figurano.

Osserviamo che da queste definizioni ne discende immediatamente che ogni frase ambigua lo è necessariamente costitutivamente o relazionalmente.

4.1 Ambiguità costitutiva

Al fine di illustrare l'ambiguità costitutiva delle frasi della lingua naturale, vengono qui di seguito proposte differenti analisi logiche della seguente frase:

Cinque è diverso dalla radice quadrata di dieci.

Sia dato il linguaggio logico L i cui simboli caratteristici sono: p, p^1, r^2, s^2, f^1, g^2, a, b, c, d. Sia dato anche il vocabolario V_L seguente:

---

[9] Il concetto di analisi logica è assimilabile a quello di struttura logica.

[10] Osserviamo che l'assegnazione di un'espressione della lingua naturale a un simbolo specifico di un linguaggio logico deve rispettare certe regole. Nella misura in cui lo studio di queste regole necessiterebbe di rientrare nelle considerazioni linguistiche che superano largamente l'ambito dei nostri propositi, le passeremo sotto silenzio.

p	cinque è diverso dalla radice quadrata di dieci
p^1	differente dalla radice quadrata di dieci
r^2	differente da …
s^2	radice quadrata di…
f^1	la radice quadrata di…
g^2	la radice… di…
a	cinque
b	la radice quadrata di dieci cine
c	dieci
d	due

Analisi logica 1: p

Questa analisi logica è relativa a V_L e l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano è $\{p\}$. Benché questa traduzione possa sembrare molto grossolana, resta comunque pertinente nella misura in cui dà conto adeguatamente della struttura proposizionale della frase. In effetti, non è fatta alcuna menzione esplicita degli operatori proposizionali di negazione, congiunzione, disgiunzione e implicazione.

Analisi logica 2: p^1a

Questa analisi logica è relativa a V_L e l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano è $\{p^1, a\}$. Questa traduzione è conforme alla teoria aristotelica dei sillogismi nel senso che dà conto della struttura logica della frase con la distinzione tra soggetto e predicato. In effetti, essa significa che la proprietà di essere differente dalla radice quadrata di dieci si applica al numero cinque. L'inconveniente di tale approccio è che non permette di esprimere le relazioni a più argomenti.

Analisi logica 3: r^2ab

Questa analisi logica è relativa a V_L e l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano è $\{r^2, a, b\}$. Si tratta di una traduzione che esprime la nozione di dissimilarità tramite una relazione con due argomenti. Questa traduzione si distingue dalle interpretazioni matematiche usuali dove la nozione di dissimilarità non è concepita come una relazione primitiva bensì come la negazione della relazione di identità.

Analisi logica 4: $\neg\, a = b$

Questa analisi logica è relativa a V_L e l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano è $\{a, b\}$. In questa traduzione, contrariamente alla precedente, la nozione di dissimilarità è concepita come la negazione della relazione di identità In matematica, il simbolo logico di negazione che precede una formula identitaria è molto spesso tralasciato a favore di una notazione più compatta che fa intervenire il simbolo $\neq$.

Analisi logica 5: $(\exists x\, (s^2xc \wedge \forall y\, (s^2yc \rightarrow y = x)) \wedge \neg\, s^2ac)$

Questa analisi logica è relativa a V_L e l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano è $\{s^2, a, c\}$. La nozione di radice quadrata è qui interpretata come relazione piuttosto che come funzione. Questa traduzione esprime l'idea seguendo la quale dieci possiede esattamente una radice quadrata e cinque non è questa radice quadrata. Questa analisi logica ricorda la problematica delle descrizioni definite trattata da Russell (Russell, 1920).

Analisi logica 6: $\neg\, a = f^1c$

Questa analisi logica è relativa a V_L e l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano è $\{f^1, a, c\}$. Questa traduzione, che si avvicina in particolare all'interpretazione matematica usuale, dà conto della nozione di radice quadrata per mezzo di una funzione avente un argomento.

Analisi logica 7: $\neg\, a = g^2dc$

Questa analisi logica è relativa a V_L e l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano è $\{g^2, a, d, c\}$. In questa traduzione, la nozione di radice quadrata è concepita come una funzione a due argomenti di cui il primo è l'indice della radice e il secondo è il suo radicando.

Osserviamo che tutte queste analisi logiche sono relative al vocabolario V_L, ma diverso per i simboli caratteristici che vi figurano. Possiamo così concludere che la frase studiata è ambigua costitutivamente. Questa ambiguità è qualificata come "costitutiva" nella misura in cui essa riposa sull'identificazione degli elementi concettuali mobilizzati dalla frase (qualunque siano le relazioni che li lega). Determinare l'insieme dei simboli caratteristici che devono figurare nell'analisi logica di una frase significa identificare l'insieme dei concetti mobilizzati da questa frase.

In generale, l'identificazione dei costituenti logici di una frase dipende dal contesto della sua enunciazione. Ed è per questo che sembra illusorio poter identificare in maniera univoca i costituenti logici di una frase, per quanto elementare sia. A tale titolo, ogni frase può essere considerata come ambigua costitutivamente.

4.2 Ambiguità relazionale

Al fine di illustrare l'ambiguità relazionale delle frasi della lingua naturale, vengono di seguito proposte diverse analisi logiche della frase:

I multipli di nove e di dodici sono multipli di tre.

Sia dato il linguaggio logico L' i cui simboli caratteristici sono: p_3^1, p_9^1, p_{12}^1. Sia dato anche il vocabolario $V_{L'}$ seguente:

p_3^1	numero naturale multiplo di tre
p_9^1	numero naturale multiplo di nove
p_{12}^1	numero naturale multiplo di dodici

Analisi logica 1: $\forall x\ ((p_9^1x \rightarrow p_3^1x) \wedge (p_{12}^1x \rightarrow p_3^1x))$

Questa analisi logica è relativa a $V_{L'}$ e l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano è $\{p_3^1,\ p_9^1,\ p_{12}^1\}$. Questa traduzione esprime l'idea secondo la quale ogni numero naturale multiplo di nove è multiplo di tre e ogni numero naturale multiplo di dodici è ugualmente multiplo di tre.

Analisi logica 2: $\forall x\ ((p_9^1x \vee p_{12}^1x) \rightarrow\ p_3^1x)$

Questa analisi logica è relativa a $V_{L'}$ e l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano è $\{p_3^1,\ p_9^1,\ p_{12}^1\}$. Questa traduzione, più libera, evidenzia l'idea secondo la quale ogni numero naturale multiplo di dodici o di nove è multiplo di tre.

Analisi logica 3: $\forall x\ ((p_9^1x \wedge p_{12}^1x) \rightarrow\ p_3^1x)$

Questa analisi logica è relativa a $V_{L'}$ e l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano è $\{p_3^1,\ p_9^1,\ p_{12}^1\}$. L'idea veicolata da questa traduzione è che ogni numero naturale che è multiplo sia di dodici e sia di nove è multiplo di tre.

Constatiamo che queste analisi logiche sono relative al vocabolario $V_{L'}$ e non differiscono in merito all'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano. Possiamo così concludere che la frase studiata è ambigua relazionalmente. L'aspetto relazionale di questa ambiguità è suggerito dal fatto che anche se l'identificazione dei costituenti logici di una frase è bloccata è possibile darne diverse traduzioni secondo l'identificazione delle relazioni logiche tra i suoi costituenti. In altre parole, si può pensare a diverse articolazioni per un medesimo "taglio" concettuale.

Va anche osservato che se le tre analisi logiche esposte più sopra sono vere in aritmetica elementare, non sono peraltro equivalenti[11]. In effetti, la prima e la seconda sono equivalenti ma la terza non lo è rispetto alle prime due. E la prima analisi, così come la seconda, comportano logicamente la terza. Due analisi logiche che siano relative al medesimo vocabolario e che non differiscano per l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano non sono peraltro necessariamente logicamente equivalenti. D'altronde è possibile dedurre dalla definizione di linguaggio logico che, qualunque sia l'analisi logica proposta in una frase, ne esiste un'altra i cui costituenti logici sono identici e che gli è equivalente. In questo senso, ogni frase può essere considerata come ambigua relazionalmente.

5 La risoluzione di problemi

Constatata l'ambiguità logica della lingua naturale, si tratta di mostrare che questa ambiguità può incidere sulla risoluzione dei problemi di matematica.
A tal fine, la presente sezione è dedicata all'analisi di un problema del Rally Matematico Transalpino.

Si tratta del problema 14 della seconda prova del 19° RMT, intitolato "Caccia al tesoro".

> *L'altro giorno, rovistando in soffitta, Marco ha scoperto un vecchio baule che contiene una pergamena e uno scrigno. Leggendo la pergamena, ha capito che lo scrigno conserva un tesoro protetto da un lucchetto a combinazione numerica di 3 cifre (da 1 a 9). Inoltre la pergamena riporta queste informazioni:*

[11] Per convincersi, un'analisi simile a quella proposta sopra può essere applicata alla frase "I multipli di tre e di quattro sono multipli di dodici".

a) *in (3, 4, 5) una sola cifra è corretta, ma non è al posto giusto*
b) *in (2, 3, 6) nessuna cifra è corretta*
c) *in (6, 7, 8) una sola cifra è corretta ed è al posto giusto*
d) *in (4, 7, 2) una sola cifra è corretta ed è al posto giusto*
e) *in (8, 5, 9) due cifre sono corrette, ma solo una è al posto giusto*
f) *in (5, 8, 2) una sola cifra è corretta ed è al posto giusto*

Aiutate Marco a trovare la giusta combinazione per aprire lo scrigno.
Spiegate la strategia che avete utilizzato.[12]

5.1 Analisi dell'enunciato del problema

Piuttosto di proporre un'analisi logica della totalità del problema, focalizzeremo l'attenzione sull'espressione "*una sola cifra è corretta ed è al posto giusto"*. Quest'espressione appare a tre riprese nell'enunciato del problema; limiteremo la nostra analisi alla frase nella quale compare per ultima.

in (5, 8, 2) una sola cifra è corretta ed è al posto giusto.

Sia L'' il linguaggio logico i cui simboli caratteristici sono: p^1, q^1, r^1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9. Sia allo stesso modo $V_{L''}$ il vocabolario seguente:

p^1	cifra al posto giusto in *(5, 8, 2)*
q^1	cifra corretta
r^1	cifra che figura *(5, 8, 2)*
c_i	la cifra « i » ($1 \leq i \leq 9$)

Analisi logica forte: $(\exists!\, x\ (r^1x \wedge q^1x) \wedge \forall y\ ((r^1y \wedge q^1y) \rightarrow p^1y))$
Questa analisi logica[13] è relativa a $V_{L''}$ e l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano è $\{p^1, q^1, r^1\}$. L'interpretazione della frase corrispondente a questa traduzione è che esiste esattamente una cifra in *(5, 8, 2)* e che tale cifra è inoltre al posto giusto.
Analisi logica debole: $\exists!\, x\ ((r^1x \wedge q^1x) \wedge p^1x)$
Questa analisi logica è relativa a $V_{L''}$ e l'insieme dei simboli caratteristici che vi figurano è $\{p^1, q^1, r^1\}$. Essa traduce l'idea secondo la quale esiste esattamente una cifra in *(5, 8, 2)* che è al contempo corretta e al posto giusto.

Nella misura in cui queste due analisi logiche sono relative al medesimo vocabolario e i simboli caratteristici che vi figurano sono identici, esse testimoniano dell'ambiguità relazionale della frase considerata. D'altra parte non sono logicamente equivalenti. Nell'ambito della logica formale è in effetti possibile mostrare che l'analisi forte implica l'analisi debole, mentre l'analisi debole non implica l'analisi forte.

5.2 Analisi di un ragionamento

Al fine di mettere in evidenza l'impatto che tale ambiguità logica può avere sulla risoluzione del problema, esaminiamo il ragionamento che segue[14].

In (5, 8, 2) la cifra « 5 » è corretta.
In (5, 8, 2) una sola cifra è corretta e al posto giusto.

In (5, 8, 2) la cifra « 5 » è al posto giusto e tutte le altre sono sbagliate.

[12] La combinazione cercata menzionata nell'analisi *a priori* del problema è ⟨5, 7, 9⟩.
[13] Il simbolo ∃ seguito da un punto esclamativo si legge "esiste esattamente un". Formalmente, $\exists!\, \alpha\ A$ è un'abbreviazione di de $\exists\alpha\ (A \wedge \forall\beta\ (A[\alpha := \beta] \rightarrow \beta = \alpha))$ dove β è una variabile distinta da α che non figura nella la formule A (Kleene, 1952).
[14] Una variante di questo ragionamento figura nell'analisi *a priori* del problema.

La nostra analisi del ragionamento si ispira al progetto leibniziano di una lingua simbolica universale e consiste nel tradurre in un linguaggio logico ciascuna frase che compone il ragionamento in modo da poter poi giudicarne la correttezza sulla base di un sistema deduttivo appropriato[15].

In questa prospettiva, la prima e la terza frase del ragionamento sono analizzate relativamente al vocabolario $V_{L''}$. La prima frase esprime l'idea che la cifra « 5 » figuri in (5, 8, 2) e che questa cifra sia corretta. Può anche essere tradotta fedelmente tradotta dalla formula formule $(r^1c_5 \wedge q^1c_5)$. La terza frase, da parte sua, significa che la cifra « 5 » è al posto giusto in (5, 8, 2) e che ogni cifra diversa da « 5 » che figura in (5, 8, 2) è necessariamente errata. Aspetto che si traduce con la formula $(p^1c_5 \wedge \forall x\ ((r^1x \wedge \neg\ x = c_5) \rightarrow \neg\ q^1x))$.

Secondo che si opti per l'analisi logica forte o per l'analisi logica debole della seconda frase del ragionamento , si dà luogo a due formulazioni distinte nel linguaggio logico L'':

Formulazione del ragionamento basato sull'analisi logica forte

$$\begin{array}{c}(r^1c_5 \wedge q^1c_5)\\ (\exists!\, x\ (r^1x \wedge q^1x) \wedge \forall y\ ((r^1y \wedge q^1y) \rightarrow p^1y))\\ \hline (p^1c_5 \wedge \forall x\ ((r^1x \wedge \neg\ x = c_5) \rightarrow \neg\ q^1x))\end{array}$$

Formulazione del ragionamento basato sull'analisi logica debole

$$\begin{array}{c}(r^1c_5 \wedge q^1c_5)\\ \exists!\, x\ ((r^1x \wedge q^1x) \wedge p^1x)\\ \hline (p^1c_5 \wedge \forall x\ ((r^1x \wedge \neg\ x = c_5) \rightarrow \neg\ q^1x))\end{array}$$

Mentre il ragionamento basato sull'analisi logica forte è corretto, quello basato sull'analisi logica debole non lo è. Al fine di chiarire questa doppia affermazione, privilegiamo un'argomentazione informale a un esame tecnico appoggiandoci su un sistema deduttivo.

Nel caso dell'interpretazione forte, supponiamo che la cifra « 5 », che figura in (5, 8, 2) sia corretta e che una sola cifra che figura nella combinazione sia corretta. Ne segue che ogni altra cifra diversa da « 5 » è errata. Inoltre supponiamo ugualmente che la sola cifra corretta che figura in (5, 8, 2) sia anche al posto giusto. Poiché questa cifra è « 5 », ne deduciamo che è al posto giusto nella combinazione. Di conseguenza, la cifra « 5 » è al posto giusto in (5, 8, 2) e qualunque altra cifra che vi figura è errata.

Al contrario, nel caso dell'interpretazione debole, l'ultima frase del ragionamento non può essere dedotta dalle due precedenti. In altre parole, la verità delle due prime frasi non implica la verità della terza. Esiste in effetti un controesempio nel quale la cifra « 8 » è corretta e al posto giusto, la cifra « 5 » è corretta ma non è al posto giusto e la cifra « 2 » non è né corretta né al posto giusto. Un tale controesempio rende vere le premesse del ragionamento mentre ne falsifica la conclusione.

In sintesi, constatiamo che l'ambiguità logica che figura nell'enunciato di un problema può incidere sulla correzione dei ragionamenti effettuati nel corso della sua risoluzione. A seconda che si opti per un'analisi logica piuttosto che per un'altra, un medesimo ragionamento può essere considerato corretto o scorretto.

5.3 Analisi della soluzione del problema

Nella misura in cui l'ambiguità logica influisce sul percorso deduttivo che conduce alla soluzione di un problema non è raro che essa dia luogo a risposte differenti[16]. Il problema di cui ci stiamo occupando fa però eccezione a questa regola. In effetti, sia che si consideri l'analisi logica forte o l'analisi logica debole, la soluzione opportuna rimane invariata. A tale riguardo ci sembrano essenziali due osservazioni.

Dapprima, l'ambiguità logica di una frase non è sempre semplice da individuare. In effetti non è sufficiente, nella rilettura di un problema, confrontare le risposte apportate da ognuno per assicurarsi che tale problema sfugga a qualunque ambiguità pregiudizievole alla sua buona comprensione. È invece necessario esaminare il concatenamento dei ragionamenti effettuati e verificarne la correttezza. È solo in questo modo che un'ambiguità come quella che abbiamo trattato può eventualmente essere identificata.

In secondo luogo, l'ambiguità logica può avere un impatto sul grado di complessità di un problema. Come abbiamo detto, l'analisi logica forte implica l'analisi logica debole. Ciò significa che se un percorso deduttivo intrapreso alla lettura dell'enunciato di un problema è corretto rispetto all'analisi debole, allora è ugualmente corretto rispetto

---

[15] Intendiamo con ciò ogni sistema assiomatico che soddisfa il teorema di completezza per la logica classica di primo ordine con uguaglianza.

[16] Il problema del RMT "Quadrati in una figura" (25.II.04) ne è un buon esempio. Un esame degli elaborati degli allievi della Sezione belga ci ha permesso in effetti di identificare due analisi logiche del problema che conducono a soluzioni differenti.

all'analisi forte[17]. Al contrario, certi percorsi deduttivi corretti relativamente all'analisi forte non lo sono relativamente rispetto all'analisi debole. Sembra dunque che identificare un percorso deduttivo che permette di risolvere il problema è più agevole laddove si adotti l'analisi logica forte piuttosto che l'analisi logica debole.

6 Conclusione

Dalla presente discussione discende che le frasi in lingua naturale sono ambigue rispetto alla loro struttura logica e che questa ambiguità può incidere sulla risoluzione di problemi.

Alla luce del linguaggio della logica contemporanea abbiamo distinto due forme di ambiguità, una che è costitutiva e l'altra relazionale. L'ambiguità costitutiva traduce l'idea che possono essere associati a una frase diversi tagli concettuali. In tal senso, una frase è ambigua costitutivamente se ammette due analisi logiche che differiscono per i loro costituenti logici. D'altra parte, l'ambiguità relazionale esprime l'idea che diverse articolazioni concettuali possono essere associate a una frase. In tal senso una frase è ambigua relazionalmente se ammette analisi logiche che hanno gli stessi costituenti ma differiscono in merito alle relazioni implicate.

Che sia costitutiva o relazionale, l'ambiguità di una frase può essere sovente eliminata grazie al contesto della sua enunciazione. In effetti il contesto permette abitualmente di identificare, fra le diverse analisi logiche possibili, quella che è la più pertinente e che conviene scegliere. Tuttavia, succede che il contesto di enunciazione non permetta di identificare un'unica analisi logica. Un caso particolarmente critico di ambiguità si manifesta quando si presentano diverse analisi logiche pertinenti e che queste analisi non sono logicamente equivalenti. Il problema del RMT intitolato "Caccia al tesoro" illustra questo caso.

Il nostro esame di questo problema rivela che due analisi logiche pertinenti e non logicamente equivalenti possono essere associate a una delle frasi che figurano nell'enunciato. Si scopre che questa ambiguità riguarda il significato dell'intero problema al punto che la sua risoluzione richiama percorsi deduttivi differenti secondo che si opti per un'analisi logica piuttosto che un'altra. Inoltre, abbiamo constatato che l'ambiguità logica di una frase non è sempre semplice da scoprire e che può avere un'incidenza sul grado di complessità di un problema.

In generale, l'ambiguità logica delle lingue naturali ci sembra costituire una scommessa didattica piuttosto che una carenza a cui si dovrebbe porre rimedio. In una tale prospettiva, emerge allora che l'identificazione di strutture logiche adeguate alla risoluzione di un problema è un obiettivo dell'apprendimento e che qualsiasi risoluzione di un problema implica un margine irriducibile di interpretazione soggetto a discussione.

7 Bibliografia

Crabbé, M. (2017). *La loglangue facile en quinze leçons*. Accessible en ligne à l'adresse : http://logoi.be/crabbe/textes/loglangue.pdf.

Ducrot, O. (1973). *La preuve et le dire. Langage et logique*. Paris : Maison Mame.

Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle (Saale) : Louis Nebert.

Frege, G. (1960). *The foundations of arithmetic. A logico-mathematical enquiry into the concept of number* (trad. J. L. Austin). New York : Harper Torchbooks.

Kleene, S. C. (1952). *Introduction to metamathematics*. Amsterdam : North-Holland Publishing Company.

Leibniz, G. W. (1903). Projet et Essais pour arriver à quelque certitude pour finir une bonne partie des disputes et pour avancer l'art d'inventer. In L. Couturat (Ed.), *Opuscules et fragments inédits de Leibniz* (pp. 175–182). Paris : Félix Alcan.

Quine, W. V. O. (1965). *Elementary logic. Revised edition*. New York : Harper Torchbooks.

Russell, B. (1920). *Introduction to mathematical philosophy.* New York : Dover Publications.

Shoenfield, J. (1967). *Mathematical logic*. Reading (Massachusetts) : Addison-Wesley Publishing Company.

Tarski, A. (1994). *Introduction to logic and to the methodology of the deductive sciences*. Oxford : Oxford University Press.

[17] L'argomento formale che sottintende il nostro proposito è il seguente. Siano A e B due formule tali che il ragionamento $A\ dunque\ B$ è corretto. Allora, per ogni formula C e ogni successione di formule Γ, se $\Gamma, B\ dunque\ C$ è corretto, allora $\Gamma, A\ dunque\ C$ è ugualmente corretto.

LINGUAGGIO E COMUNICAZIONE: RI-PARTIAMO DALL'ANALISI A POSTERIORI

Carla Crociani, Rita Spatoloni[1]

Introduzione

La padronanza della lingua in tutti i suoi aspetti è inscindibile dall'acquisizione dei concetti: la conoscenza, prima di divenire patrimonio dell'individuo, necessita di essere mediata e questo avviene soprattutto attraverso il linguaggio. Proprio quest'ultimo, in quanto canale di comunicazione, deve essere conosciuto e inteso in maniera univoca sia dall'emittente che dal destinatario. In riferimento alla matematica le affermazioni di Grugnetti e Jaquet ribadiscono: *un qualunque concetto di matematica, nel suo processo di acquisizione, necessita di attività che consentano all'allievo di mobilizzare le proprie conoscenze pregresse, di esprimere le proprie idee, intessute anche di tentennamenti ed 'errori' che, in un certo senso, costituiscono le sue personali 'epistemologie implicite'. E la lingua naturale diventa imprescindibile in questo processo.*[2]

Il tema del 21° Convegno ha posto l'attenzione sul linguaggio nella sua duplice accezione: scrittura e lettura. Ciascuna di queste può essere a sua volta esaminata rispetto a due o più aspetti:

- *scrittura* del testo di un problema da parte di insegnanti che vogliono proporlo ai propri allievi; *scrittura* degli allievi che spiegano la strategia risolutiva utilizzata sia ai propri compagni, sia all'insegnante che l'ha proposto (ancora due aspetti da esaminare);
- *lettura* di un testo da parte degli allievi per appropriarsi della situazione problematica descritta; *lettura* da parte degli insegnanti di ciò che gli allievi hanno prodotto per comprendere come hanno saputo descrivere le competenze e le strategie messe in gioco.

Tutto questo tenendo sempre conto delle molteplici *sfumature* proprie del linguaggio comune.

Se la considerazione degli aspetti linguistici è importante in senso generale, essa risulta indispensabile quando ci si riferisce al settore della didattica e, in particolare, della didattica della matematica. In questo campo è particolarmente necessario, infatti, tenere in considerazione gli aspetti linguistici specifici, ma anche sviluppare negli allievi la capacità di integrarli con il linguaggio comune.

Troppo spesso la matematica è stata (ed è ancora) ritenuta una disciplina rigida, connotata da un linguaggio che, necessitando di univocità, non può avvalersi di circonlocuzioni tratte dall'uso quotidiano, ma deve utilizzare solo le strutture specifiche. Tra gli insegnanti si sentono spesso frasi del tipo: "*In matematica bisogna esprimersi utilizzando il linguaggio specifico della disciplina e non essere approssimativi*". Ma… come si impara tutto questo?

Il titolo del 21° Incontro Internazionale ha sottolineato quanto, nei problemi del RMT, sia la scrittura del testo di un problema da parte dell'autore, sia la spiegazione del procedimento risolutivo fornita dagli allievi, debbano più volte passare per le varie fasi: *leggere, riformulare, scrivere, redigere…* Per questo motivo ai Gruppi di Lavoro è stato assegnato il compito di avviare un confronto sia *sulle competenze comunicative degli adulti concernenti la redazione degli enunciati che sull'analisi e trattamento delle risposte degli allievi allo scopo di riflettere sullo stato dell'arte delle competenze matematiche.*

Nella convinzione che l'esame attento dei risultati e, soprattutto, quello degli elaborati prodotti dagli allievi, costituiscano una base essenziale per la riflessione non solo sui contenuti appresi ma, in particolare, sui processi stessi dell'apprendimento, abbiamo deciso di proporre al gruppo di lavoro "numerazione" l'analisi dei due problemi *Lancio nei cesti* (25.II.5) e *Barattolo di fagioli* (25.II.15)[3]. La scelta è stata determinata da motivazioni diverse: l'appartenenza all'ambito dell'aritmetica e della numerazione, i risultati poco soddisfacenti, la possibilità di analizzare gli elaborati di tutte le categorie che interessano gli afferenti al nostro Gruppo, ma anche, e soprattutto, il fatto che questi problemi ci permettono di esaminare due aspetti legati al linguaggio, diversi tra loro: nel primo alcuni vocaboli percepiti come parole chiave, nel secondo espressioni diverse con le quali si può presentare uno stesso concetto matematico. Il primo problema è destinato alle categorie più basse ed il testo, nelle intenzioni, doveva essere chiaro e adatto per le categorie interessate: la descrizione di un contesto di gioco, i vocaboli semplici ed univoci per illustrare la situazione problematica presentata, le variabili numeriche scelte in modo da favorire un riconoscimento della "posizionalità" nella scrittura di un numero. A posteriori, il linguaggio non è risultato così chiaro come previsto, si sono potute raccogliere e registrare varie interpretazioni; inoltre gli alunni non hanno visto il problema come una situazione di "posizionalità".

---

[1] Sezione di Siena e coordinatrici gruppo numerazione.

[2] Grugnetti L, Jaquet F., 2016, 'Pensare, scrivere e… costruire matematica', in *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento delle discipline matematico-scientifiche*, I quaderni del Giscel (a cura di F. De Renzo, M. E. Piemontese), Aracne editrice, 83-99.

[3] In allegato.

Nel secondo problema, indirizzato a categorie più alte, oltre alla chiarezza espositiva della situazione problematica, si è "giocato" sul fatto che il linguaggio naturale permette di esprimere uno stesso concetto matematico, come quello della divisione euclidea, in due modi diversi, ponendo l'attenzione sul resto o sul complementare del resto. Nel testo i vincoli sono stati dati utilizzando entrambe queste interpretazioni. Era una difficoltà voluta per mettere in luce eventuali misconcetti legati alla divisione.
La "lingua", oltre a fornirci tante possibilità di esprimerci, con vocaboli e costrutti diversi, ci offre anche quella di spostare l'attenzione su una pluralità di punti di vista e, pur illustrando una stessa situazione, ce ne fa cogliere sfaccettature differenti. In matematica, questo può aiutare a capire sempre meglio la complessità della situazione esaminata, sviluppando così la comprensione di un concetto, di una sequenza di deduzioni logiche, …
La presenza di insegnanti/ricercatori di lingua francese nel nostro gruppo ha permesso anche di discutere e riflettere su quanto la scelta di vocaboli e di espressioni differenti, dovuta proprio alla diversità del linguaggio naturale utilizzato (le corrispondenze per passare da una lingua all'altra non sono mai biunivoche), abbia inciso sulla presenza o sull'assenza di errori dipendenti dall'interpretazione.

1. Il problema "Lancio nei cesti"

Riportiamo il testo del problema sia nella versione italiana che in quella francese.

LANCIO NEI CESTI (Cat. 3, 4, 5)
In palestra l'insegnante propone ai bambini un nuovo gioco. Ciascun bambino dovrà lanciare palline da tennis in 2 cesti disposti uno accanto all'altro. Se la pallina entra nel cesto di destra si guadagna un punto, se invece entra in quello di sinistra si guadagnano 10 punti.
Anna lancia 12 palline e nessuna di esse va fuori dai cesti, poi fa il totale dei punti ottenuti.
Calcolate tutti i punteggi totali che Anna può aver ottenuto.
Mostrate in modo dettagliato come li avete trovati.

LANCERS DANS DES PANIERS (Cat. 3, 4, 5)
En éducation physique, l'enseignante propose un nouveau jeu aux enfants. Chaque enfant doit lancer des balles de tennis dans deux paniers placés l'un à côté de l'autre. Si la balle entre dans le panier de droite, le joueur gagne 1 point ; si elle entre dans le panier de gauche, le joueur marque 10 points.
Anna lance 12 balles et chaque balle arrive dans l'un ou l'autre des deux paniers, puis elle fait le total des points qu'elle a obtenus.
Trouvez tous les totaux qu'Anna peut avoir obtenus.
Montrez en détails comment vous avez trouvé.

Il testo descrive una situazione problematica che richiama un contesto di gioco di azione, ma anche di sfida, in cui gli allievi si possano immedesimare. Nelle intenzioni degli autori, proprio il realismo avrebbe dovuto facilitare l'appropriazione del problema e, anche senza una comprensione completa dal punto di vista linguistico, gli allievi avrebbero dovuto capire cosa è richiesto: occorre fare il massimo dei punti, ma non sempre questo potrà accadere e, quindi, si devono cercare tutte le possibilità. Dal punto di vista matematico il problema avrebbe dovuto far emergere e riconoscere la struttura posizionale della scrittura dei numeri.

In realtà l'analisi a posteriori ha evidenziato che gli ostacoli di questo problema sono di tipo linguistico, il contesto non è stato di grande aiuto alla comprensione del testo e nessun allievo ha espressamente riconosciuto la struttura posizionale del numero.

Da un punto di vista teorico ci si poteva esprimere in modo più "asettico" proponendo un testo molto più simile ad un esercizio scolastico, del tipo:
"Ho un abaco con due aste e 12 palline.
Quanti numeri diversi posso scrivere?"

In questo modo avremmo richiamato l'attenzione degli allievi su attività di chiara impronta scolastica, però non sarebbe stato sollecitato quel processo che spinge a riconoscere e ad applicare, in contesti diversi e non noti, il contenuto matematico necessario per risolvere una situazione presentata, ovvero non sarebbe perseguito il raggiungimento della competenza[4].

[4]Secondo noi, la competenza si basa sulla conoscenza assunta in modo significativo e, perché possa venire messa in gioco in situazioni e contesti nuovi, ha bisogno di essere esercitata in un ambiente di apprendimento stimolante che sviluppi la consapevolezza di ciò che si apprende e che solleciti l'iniziativa, la creatività, la ricerca di soluzioni per il superamento di ostacoli sempre nuovi.

Le seguenti tabelle mostrano quale è stato il punteggio medio e quali sono state le occorrenze dei punteggi nelle varie categorie ottenuti durante la gara di tutte le classi partecipanti al 25° RMT.

points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 3	320	86	85	56	92	639	1.2
Cat. 4	290	87	145	104	248	874	1.9
Cat. 5	227	69	128	133	371	928	2.4
tot	**837**	**242**	**358**	**293**	**711**	**2441**	**1.9**

en %					
Cat. 3	50%	13%	13%	9%	14%
Cat. 4	33%	10%	17%	12%	28%
Cat. 5	24%	7%	14%	14%	40%
tot	**34%**	**10%**	**15%**	**12%**	**29%**

Il problema, come si legge nelle precedenti tabelle, non ha avuto molto successo in termini di punteggio medio ottenuto e la percentuale degli "0" è stata molto elevata, specialmente in categoria 3. Nonostante questo, gli insegnanti del Gruppo, che l'hanno assegnato e discusso nelle classi, hanno riferito che il problema ha avuto un alto tasso di gradimento, probabilmente per il coinvolgimento di gioco.
Nel corso della discussione abbiamo analizzato, di fronte al testo del problema, quale fosse l'obiettivo strettamente connesso al compito matematico e quali fossero le competenze necessarie per raggiungerlo. Gli allievi avrebbero dovuto fare l'inventario dei totali possibili, svolgendo il compito matematico che consiste nel trovare le differenti somme di dodici numeri uguali a 1 e/o a 10.
Tale compito richiama l'attenzione sul valore posizionale delle cifre, sul controllo del numero delle palline (12) da lanciare, sulla costruzione di un inventario esaustivo, sulla commutatività dell'addizione e sul significato dei termini.
La capacità di compilare un inventario è trasversale a tutte le discipline ed entra in gioco ogni volta che viene richiesto di classificare sulla base di un criterio o di inserire un determinato elemento in una ripartizione: si tratta, quindi, di una capacità che dovrebbe essere frequentemente sollecitata ed esercitata fin dai primi anni della scuola (e non solo).
Tutto sembra alla portata di allievi delle categorie a cui il problema è stato proposto, ma ci sono state delle sorprese.
Per quanto riguarda il significato dei termini utilizzati nel testo, ci siamo resi conto che gli allievi, pur conoscendo i vocaboli "totale", "punti" e "punteggio" non hanno saputo dare loro il giusto significato all'interno della frase e del contesto[5]. Pertanto le frasi che hanno creato i maggiori problemi interpretativi sono state:

… poi fa il totale dei punti ottenuti.

Calcolate tutti i punteggi totali che Anna può aver ottenuto.

***…** puis elle fait le total des points qu'elle a obtenus.*

***Trouvez tous les totaux qu'Anna peut avoir obtenus**.*

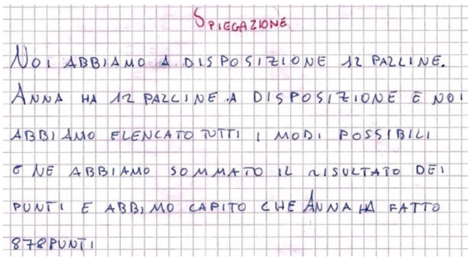
Nelle intenzioni degli autori, *totale dei punti ottenuti* era *uno dei possibili punteggi* (la somma di 12 termini 1 e/o 10) e *tutti i punteggi totali* erano *tutti i possibili punteggi*; la presenza dei vocaboli "punteggi" e "totali" è risultata una ridondanza che ha fatto perdere il controllo dell'espressione completa e che ha fatto scattare la ricerca "del totale dei totali".

In francese non c'è stato questo problema, ma nel testo si parla solo di *punti* e non di punteggi e di *totali* che Anna può aver ottenuto: ciò supporta la nostra ipotesi.

Un'altra riflessione ha preso avvio dal fatto che il significato del vocabolo "totali" ha prevalso su tutto il resto della frase. È una questione di contratto didattico? Questo vocabolo viene introdotto molto presto in matematica come termine specifico e, forse, viene percepito dagli alunni come una parola che, ogni volta che si presenta, richiede di addizionare tutti i "numeri". Talvolta, sia nella pratica didattica quotidiana che in certi quaderni operativi, si trovano più pagine che stimolano la ricerca di «*paroline matematiche*» che costituiscono indizi *chiave* per eseguire determinate operazioni ma che non risultano chiavi risolutive, bensì semplici "agganci" per indirizzare e che, purtroppo e molto spesso, impediscono una riflessione puntuale e consapevole.
In particolare *punteggi totali* ha avuto varie interpretazioni:

[5] Non solo si deve conoscere il significato delle singole parole ma è necessario capire il senso di tutto un discorso in relazione al contesto presentato.

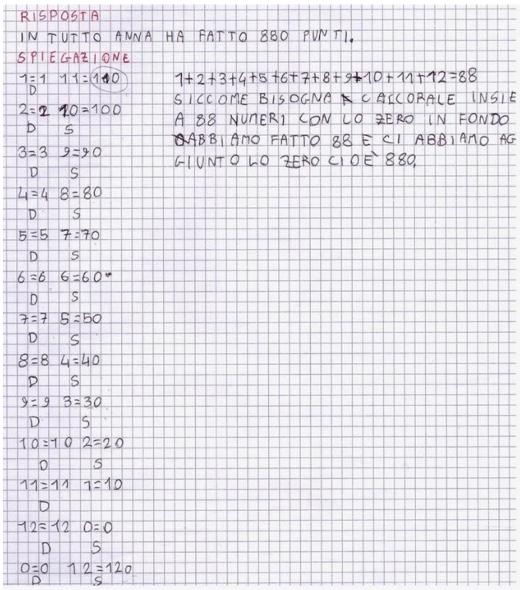
1. *possibili punteggi in un cesto, poi nell'altro e* totale *di tutti*



Noi abbiamo a disposizione 12 palline. Anna ha 12 palline a disposizione e noi abbiamo elencato tutti i modi possibili e ne abbiamo sommato il risultato dei punti e abbiamo capito che Anna ha fatto 878 punti

La situazione problematica è ben gestita e gli allievi mostrano una buona capacità di rappresentazione, ma perdono di vista l'obiettivo, lo scopo del gioco: sommano separatamente i possibili punti in ciascuno dei due canestri, ne fanno il totale separatamente e poi fanno il totale dei totali, sbagliando talvolta anche le somme.

In particolare, scrivendo 800+78 gli allievi dimostrano di non padroneggiare l'operazione di addizione quando lavorano con la posizionalità. Avrebbero dovuto accorgersi dell'errore visto che sommano termini ognuno dei quali differisce per una decina da quelli sommati in precedenza



Questa rappresentazione è più "simbolica" (meno ancorata ai canestri e alle palline), mostra una maggior padronanza con l'operazione di addizione sulla base del valore posizionale.

Nel testo, infatti, si legge:

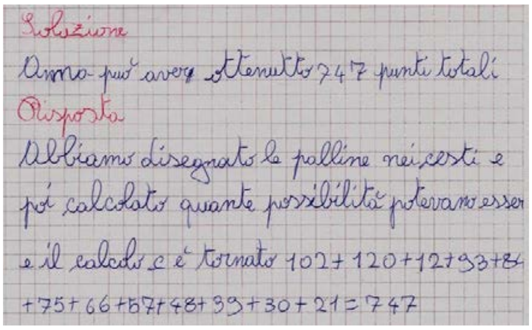
"1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=88

siccome bisogna calcolare insieme a 88 numeri con lo zero in fondo abbiamo fatto 88 e ci abbiamo aggiunto lo zero cioè 880

(sbagliano però la somma: 78 e non 88)

Questa interpretazione porta allo stesso numero (858) come risultato, ma gli esempi citati non mostrano lo stesso risultato perché sono presenti ulteriori errori.

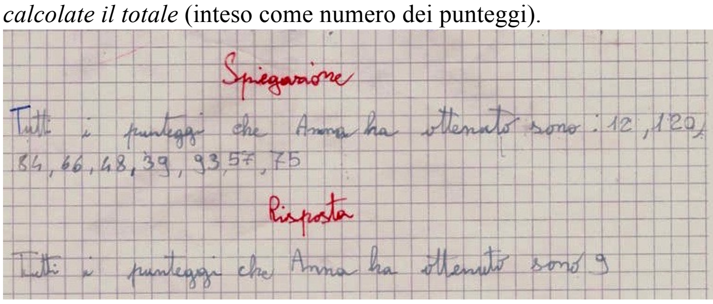
2. *totale di tutti i possibili punteggi*


Soluzione
Anna può aver ottenuto 747 punti totali
Risposta
Abbiamo disegnato le palline nei cesti e poi calcolato quante possibilità potevano esser e il calcolo c'è tornato 102+120+12+93+84 +75+66+57+48+39+30+21=747

Soluzione
Anna può aver ottenuto 747 totali
Risposta
Abbiamo disegnato le palline nei cesti e poi calcolato quante possibilità potevano essere e il calcolo c'è tornato 102+120+12+93+84+75+66+57+48+99+30+21=747

3. *numero totale di tutti i possibili punteggi*

Il seguente elaborato mostra chiaramente che gli allievi hanno capito che i *punteggi che Anna può aver ottenuto* sono il *totale dei punti ottenuti* (il fatto che ne dimenticano quattro è un altro problema, come il fatto di mostrare confusione fra *spiegazione e risposta*) ma hanno interpretato l'espressione *calcolate tutti i punteggi totali* come *calcolate il totale* (inteso come numero dei punteggi).


Spiegazione
Tutti i punteggi che Anna ha ottenuto sono: 12, 120, 84, 66, 48, 39, 93, 57, 75
Risposta
Tutti i punteggi che Anna ha ottenuto sono 9

Spiegazione
Tutti i punteggi che Anna ha ottenuto sono: 12, 120, 84, 66, 39, 93, 57, 75
Risposta
Tutti i punteggi che Anna ha

Come abbiamo osservato in precedenza, la versione francese non ha avuto questo problema di interpretazione perché in tale versione si parla solo di *totali e non punteggi totali.*

Sempre in riferimento al significato dei termini presenti nella versione italiana, si poteva essere più chiari anche evitando l'uso delle due espressioni *totale dei punti* e *punteggi totali*[6].

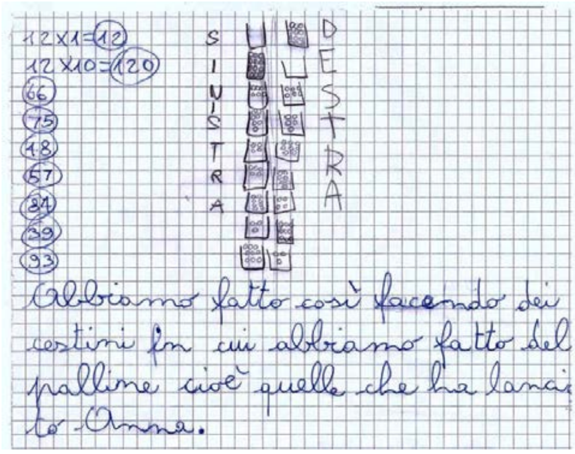
Qual è l'esperienza che possono avere gli allievi con il vocabolo *punteggio*? I videogiochi? Lo sport? Nelle classifiche i punteggi totali si ottengono sommando i punti totali acquisiti in ogni "partita".

Il contesto presentato in questo problema doveva invitare a calcolare non i punti acquisiti in ogni partita (lancio di 12 palline), bensì a calcolare quanti avrebbero potuto essere i punti che Anna fa nella sua unica partita giocata, sapendo che non fallisce un canestro, ma non sapendo quante palline centrano l'uno o l'altro dei canestri.

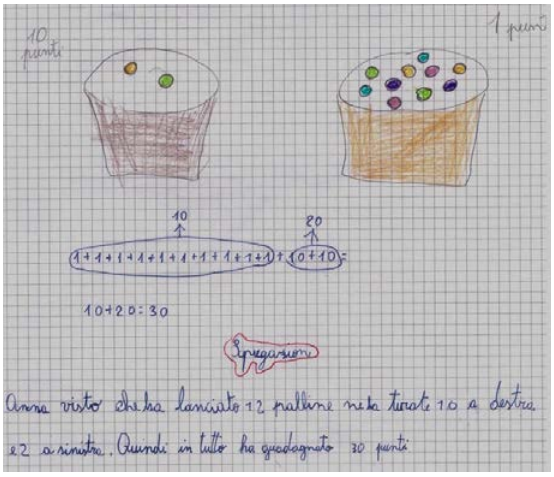
In riferimento al controllo del numero delle palline e alla capacità organizzativa spesso gli alunni si sono persi perché comunque predomina l'aspetto rappresentativo: la drammatizzazione del contesto. Il linguaggio grafico è importante in matematica ma deve essere sistematico e chiaro per tutti, si deve evolvere dal disegno reale, strettamente legato al contesto, a quello più simbolico. Gli allievi devono, tuttavia, vivere in prima persona le fasi di questa evoluzione. Per esempio, una possibile strategia da utilizzare con l'obiettivo di potenziare lo sviluppo di questa capacità, è quella di far nascere nella classe l'abitudine di descrivere ai compagni e all'insegnante quali sono state le scelte grafiche adottate nell'esecuzione di un compito.

I due esempi successivi si riferiscono all'organizzazione nella ricerca e rappresentazione: nel primo si nota una non-organizzazione, nel secondo una eccessiva cura nel disegno (ci vuole del tempo per disegnare) che fa perdere di vista il vero obiettivo.

[6] Totale dei punti è già punteggio, punteggio totale non ha molto senso.

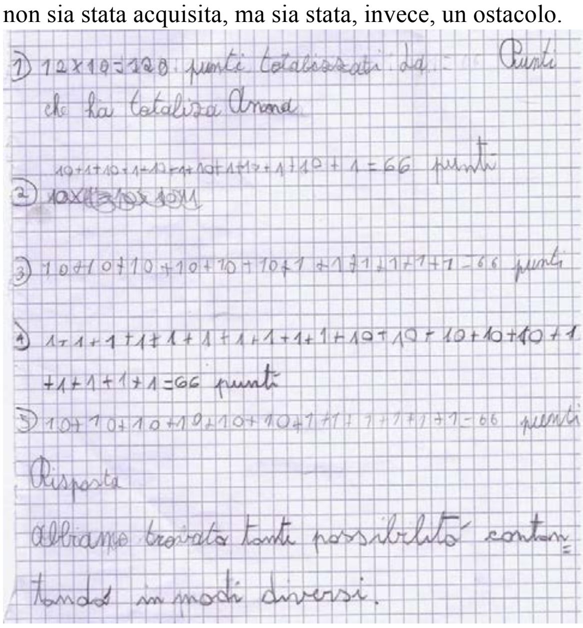


Abbiamo fatto così facendo dei cestini in cui abbiamo fatto delle palline cioè quelle che ha lanciato Anna.



Anna visto che ha lanciato 12 palline ne ha tirate 10 a destra e 2 a sinistra. Quindi in tutto ha guadagnato 30 punti

L'inventario dei totali possibili richiede una buona strutturazione delle somme, composte ognuna di 12 termini 1 e/o 10. Questa organizzazione deve prevedere tutti i casi possibili e un modo di contarli, tenendo conto della commutatività dell'addizione[7]. Tale proprietà viene presentata molto presto nella scuola Primaria, con il rischio di diventare uno stereotipo vuoto; il seguente elaborato, che non è l'unico di questo tipo, mostra come tale *competenza* non sia stata acquisita, ma sia stata, invece, un ostacolo.



1) *12x10=120: Punti che ha totalizza Anna*
   10+1+10+1+10+1+10+1+10+1+10+1=66 punti
2) *(cancellato)*
3) *10+10+10+10+10+10+1+1+1+1+1+1=66 punti*
4) *1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+10+10+10+10 + 10+1+1+1+1+1+1=66 punti*
5) *10+10+10+10+10+10+1+1+1+1+1+1=66 punti*

Risposta

Abbiamo trovato tante possibilità contando in modi diversi.

Troppo spesso il contratto didattico *allievo-insegnante* spinge gli allievi a dare delle risposte senza spiegare il processo che li ha condotti ad ottenerle, perché l'insegnante non ne ha bisogno: "*sa*".

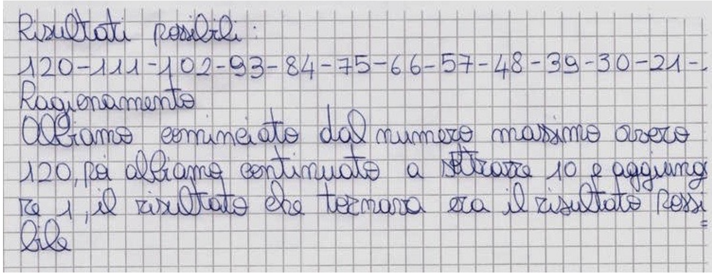
È fondamentale, invece, che essi si abituino a "comunicare" il loro pensiero e il loro operato in modo chiaro ed esaustivo, senza che l'insegnante debba aggiungere "*la propria sapienza*" per interpretarlo. E' proprio in questo sforzo di comunicazione che l'alunno chiarisce, in primo luogo a se stesso[8], le idee e, nel seguito, sviluppa gradualmente il concetto di dimostrazione e ne comprende il ruolo fondamentale in matematica e non solo!

[7] Ci sono 924 sequenza diverse che portano a 66 punti come totale, basta calcolare le permutazioni di 12 oggetti di cui 6 sono uguali fra loro e gli altri 6 uguali fra loro (nell'elaborato successivo ne riportano 4).

[8] Quanti fra noi si sono chiariti concetti se non quando si sono trovati a doverli spiegare ad altri!

È altresì importante che gli insegnanti richiedano ai propri alunni spiegazioni chiare dei loro ragionamenti e delle loro convinzioni, poiché in questo modo saranno in grado di risalire ad un eventuale errore o di riconoscere l'ostacolo incontrato dall'allievo nella sua strategia risolutiva.

Qui di seguito riportiamo un esempio di… *linguaggio chiaro solo per "chi sa"*.



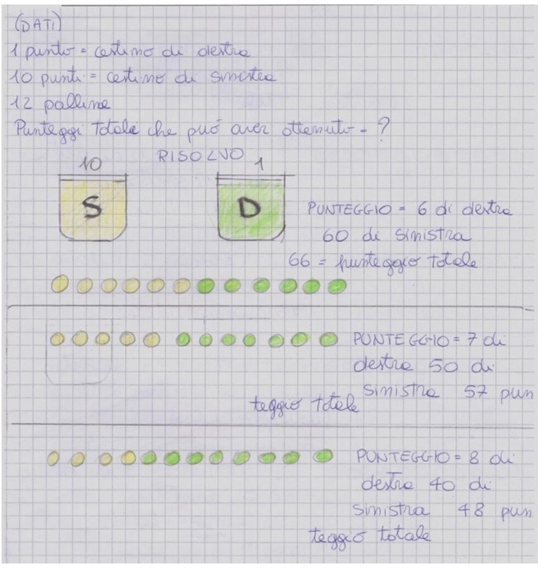
Risultati possibili:
120-11-102-93-84-75-66-57-48-39-30-21-12
Ragionamento
Abbiamo cominciato dal numero massimo ovvero 120, poi abbiamo continuato a sottrarre 10 e aggiungere 1, il risultato che tornava era il risultato possibile

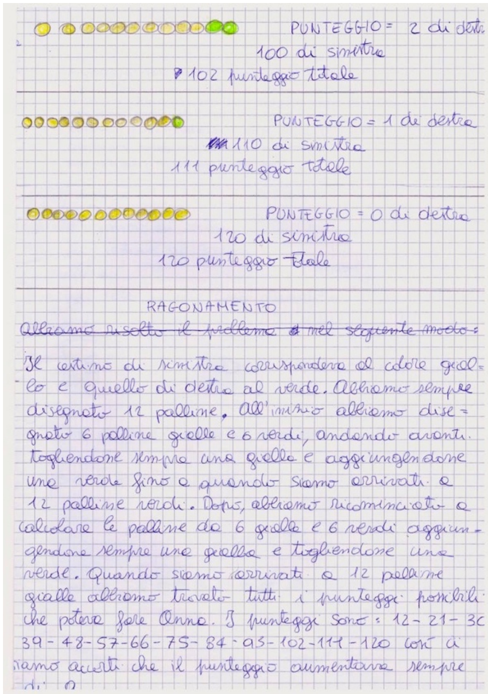
La spiegazione non ripercorre i passi del ragionamento seguito, che potrebbe essere del tipo:

- si ipotizzano tutte le palline nel cesto di destra: massimo punteggio ottenibile;
- si toglie una pallina dal cesto di destra e si mette in quello di sinistra (il numero delle palline deve rimanere sempre 12), questo equivale a togliere 10 punti ed aggiungerne 1 (cioè a togliere 9 punti);
- si continua così sempre togliendo una pallina dal cesto di sinistra e ponendola in quello di destra fino ad arrivare a 12 palline nel cesto di destra: punteggio minimo.

Da quanto gli allievi hanno scritto non si capisce se hanno ragionato in questo modo oppure se hanno percepito una regolarità e hanno fatto l'osservazione alla fine, dopo aver trovato le soluzioni per altra via.

Possiamo confrontare quest'ultimo elaborato con il successivo in cui il linguaggio utilizzato e le spiegazioni fornite sono rivolte anche a "*chi non sa*"!



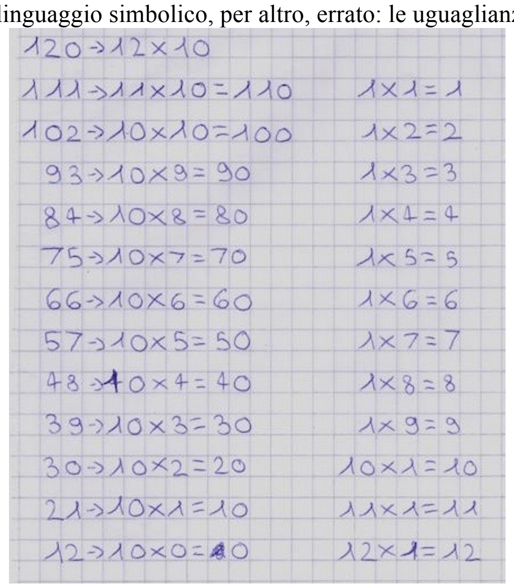


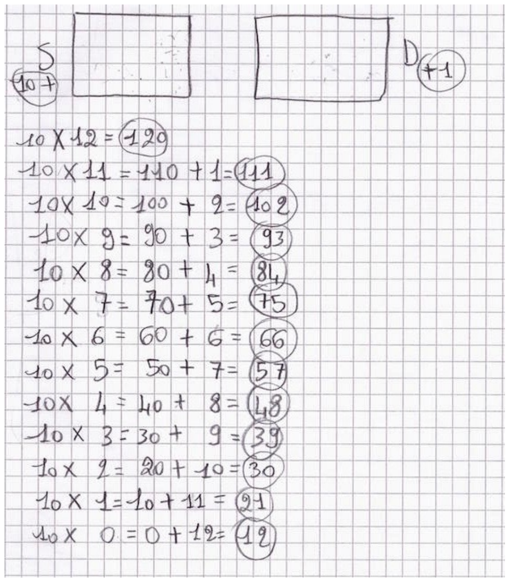
Il cestino di sinistra corrispondeva al colore giallo e quello di destra al verde. Abbiamo sempre disegnato 12 palline. All'inizio abbiamo disegnato 6 palline gialle e 6 verdi, andando avanti togliendone sempre una gialla e aggiungendone una verde fino a quando siamo arrivati a 12 palline verdi. Dopo abbiamo ricominciato a calcolare le palline da 6 gialle e 6 verdi aggiungendone sempre una gialla e togliendone una verde. Quando siamo arrivati a 12 palline gialle abbiamo trovato tutti i punteggi possibili che poteva fare Anna. I punteggi sono 12-21- 30-39-48-57-66-75-84-93-102-111-120 così ci siamo accorti che il punteggio aumentava sempre di 9.

L'uso di due colori diversi per i due cesti e le relative palline rende ancora più chiara la loro spiegazione, il dominio della situazione problematica, raggiunto anche con l'impegno di chiarezza nella spiegazione, consente loro di porre l'attenzione sulle regolarità.

Negli elaborati successivi si vedono ancora esempi di scrittura rivolta a "*chi sa*", l'elaborato a sinistra mostra l'utilizzo di un simbolismo che permette di essere sintetici ma, *chi non sa* che cosa capisce?

Dall'elaborato a destra si capisce che la situazione è stata ben dominata (in modo molto organizzato che permette di non perdere soluzioni), ma le spiegazioni necessarie per "*chi non sa*" mancano completamente, si utilizza un linguaggio simbolico, per altro, errato: le uguaglianze scritte sono tutte false.





C'è anche chi, ancora più stringatamente ha scritto solamente:

"*Anna potrebbe aver fatto qualunque punteggio maggiore di 12 e minore di 120*" e… non si sono persi a scriverli tutti!

2. Dall'analisi a posteriori alle proposte emerse nel gruppo di lavoro

Dopo aver condiviso le osservazioni e i commenti ricavati dalle analisi a posteriori condotte dagli afferenti al nostro gruppo di lavoro (facendo riferimento agli elaborati provenienti dalla propria sezione di appartenenza e di cui abbiamo illustrato nel precedente paragrafo), si è proceduto cercando di apportare delle modifiche al testo ufficiale in modo da renderlo il più chiaro possibile, alla luce delle interpretazioni emerse. La presenza di tre ricercatori di lingua francese nel gruppo ha favorito il confronto fra la versione italiana e quella francese: a volte le *espressioni* diverse dovute comunque alla lingua diversa (non si può tradurre alla lettera) hanno creato *sfumature* di significato e, di conseguenza, ostacoli interpretativi differenti.

Non sempre nel gruppo siamo stati subito d'accordo sulle proposte di modifica del testo, ma questo ha contribuito ad arricchire la discussione.

Tra le discordanze ci sono state quelle relative alla lunghezza e al linguaggio del testo: alcuni degli insegnanti afferenti al gruppo ritengono che sia troppo lungo e che si debba ridurre, per altri la lunghezza non dà fastidio perché il contesto di gioco favorisce la comprensione; l'uso dell'aggettivo indefinito *ciascuno* è sembrato difficile per la comprensione dal momento che tale aggettivo è meno usato a livello orale; anche parlare di totale dei punti e di punteggi totali è risultato poco appropriato e, a tale proposito, va inoltre considerato che nel testo francese, nel quale non c'era questa ambiguità ma si parlava solo di punti, non ci sono state interpretazioni errate in questo senso.

Nella versione francese *Anna lancia 12 palline e nessuna di esse va fuori dai cesti* è tradotto con *Anna lance 12 balles et chaque balle arrive dans l'un ou l'autre des deux paniers*.

Solo una *sfumatura,* si dice la stessa cosa. Ma non è così.

A priori la versione francese potrebbe sembrare più semplice perché la frase utilizza una forma al positivo, invece questo ha indotto in errore gli allievi. La frase al positivo ha comportato l'uso del connettivo "o" e gli studenti hanno avuto difficoltà ad interpretarlo. È più facile immaginare che nessuna pallina vada fuori piuttosto che tutte siano dentro.

Alla fine del dibattito è stato redatto il seguente testo, concordato per una sperimentazione in varie classi ed in varie categorie.

Lancio nei cesti-revisione

In palestra l'insegnante propone ai bambini un nuovo gioco: lanciare palline da tennis in due cesti disposti uno accanto all'altro.

Se la pallina entra nel cesto di destra si guadagna un punto, se invece entra in quello di sinistra si guadagnano 10 punti.

Anna lancia 12 palline e nessuna di esse va fuori dai cesti, poi calcola il suo punteggio[9].

Quali sono i punteggi che Anna potrebbe aver ottenuto?

Mostrate tutte le possibilità e come le avete trovate.

In questo modo sono stati eliminati l'aggettivo *ciascuno* e la frase impersonale, l'uso del verbo al futuro (tenendo conto del fatto che gestire il fattore temporale può creare problemi), l'ambiguità dei due vocaboli, *punti* e *punteggi*, vicini ma diversi nel significato anche se per *sfumature,* il vocabolo *totale* che può evocare la necessità di sommare più addendi; è stata inoltre ribadita l'importanza dei capoversi alla fine di ogni frase e quella di lasciare il condizionale nella domanda per indirizzare i giovani allievi alla ricerca di più soluzioni.

Il gruppo ha concordato la seguente sperimentazione: testare il problema revisionato nelle classi di categoria 3 (alunni a coppie), raccogliere e registrare i risultati.

3. Il problema Barattolo di fagioli

Riportiamo il testo del problema sia nella versione italiana che in quella francese

BARATTOLO DI FAGIOLI (Cat. 8, 9, 10)
Marco chiede al suo amico Carlo il numero esatto di fagioli contenuti in un barattolo di vetro, sapendo che:

- il numero cercato è compreso fra 1400 e 1700;
- se si raggruppano i fagioli per 2 ne avanza sempre uno;
- se si raggruppano i fagioli per 3, i mucchietti formati sono completi;
- se si raggruppano i fagioli per 5 ci vorrebbero altri 3 fagioli per completare i mucchietti;
- se si raggruppano i fagioli per 7 alla fine avanzano 5 fagioli.

Qual è il numero dei fagioli contenuti nel barattolo ?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

SAC DE HARICOTS (Cat. 8, 9, 10)
Marc demande à son ami Charles le nombre exact de haricots contenus dans un grand sac, sachant que :

- le nombre cherché est compris entre 1400 et 1700 ;
- si on regroupe les haricots par 2 il en reste un ;
- si on regroupe les haricots par paquets de 3, il n'en reste pas ;
- si on regroupe les haricots par paquets de 5, il faudrait 3 autres haricots pour compléter le dernier paquet ;
- si on regroupe les haricots par paquets de 7, il reste 5 haricots.

Quel est le nombre de haricots contenus dans le grand sac ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Questo problema è stato giustamente indirizzato a categorie più alte rispetto a quelle del precedente perché, nonostante i concetti in gioco siano argomento di scuola Primaria, è la capacità di decodifica che richiede una maggiore maturazione. I risultati piuttosto deludenti mostrano, ancora una volta, che i concetti di multiplo, divisore, resto della divisione euclidea, fondamentali in aritmetica, non sono acquisiti nemmeno in categorie alte.

La seguente tabella mostra la statistica dei punteggi ottenuti in tutte le sezioni in occasione della gara:

[9] Nel corso della discussione gli insegnanti hanno sostenuto che questo non sarebbe stato un problema (i bambini sono abituati).

points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 8	346	194	70	85	78	773	1.2
Cat. 9	59	46	15	24	41	185	1.7
Cat. 10	53	37	11	21	40	162	1.7
tot	**458**	**277**	**96**	**130**	**159**	**1120**	**1.3**

en %					
Cat. 8	45%	25%	9%	11%	10%
Cat. 9	32%	25%	8%	13%	22%
Cat. 10	33%	23%	7%	13%	25%
tot	41%	25%	9%	12%	14%

Sulla base delle competenze che gli allievi devono mettere in gioco abbiamo cercato, anche in questo caso, di esaminare il compito matematico richiesto: determinare l'unico numero compreso tra 1400 e 1700, sapendo che i resti delle divisioni di questo numero per 2, 3, 5 e 7 sono, rispettivamente, 1, 0, 2 e 5.

Il testo non sembra difficile grazie alla sua struttura in forma di elenco, tuttavia compaiono, anche in questo caso, differenze tra la versione italiana e quella francese e quest'ultima, ad opinione di tutti i componenti del gruppo, si è rivelata molto più chiara:

- "*se si raggruppano i fagioli per 2 ne avanza sempre uno,* l'avverbio "*sempre*" non è presente in francese, in effetti è superfluo e può disturbare;
- "*avanzare*" in francese è sempre tradotto con "*restare*" che fa subito pensare al resto in una divisione; nella lingua italiana "*avanzare*" assume significati diversi, propri e figurati, talvolta anche opposti tra loro, da considerare in base al contesto: può essere usato per indicare ciò che è in eccesso, in sovrabbondanza, ma anche, in particolare nel linguaggio colloquiale e in alcuni contesti di denaro, come il dover qualcosa a qualcuno, avvicinandosi all'idea di complementare del resto
- "*se si raggruppano i fagioli per 5 ci vorrebbero altri 3 fagioli per completare i mucchietti,* in francese è *se si raggruppano i fagioli per 5 ci vorrebbero altri 3 fagioli per completare l'ultimo mucchietto*"; questa espressione è più chiara in quanto evoca l'immagine visiva che l'ultimo dei mucchietti, nella suddivisione di 5 in 5, è incompleto: ci vorrebbero altri 3 fagioli, di conseguenza ne ha solo 2;
- "*se si raggruppano i fagioli per 7 alla fine avanzano 5 fagioli* in francese il termine "*alla fine*" non è presente in effetti è del tutto superfluo.

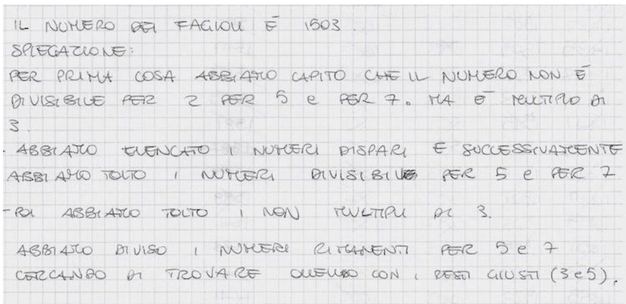
L'ostacolo maggiore per la risoluzione di questo problema è stato quello di dover dominare il concetto di divisione con resto in presenza di due espressioni differenti usate per indicare il resto della divisione stessa: resto come quantità che "avanza" e resto da scoprire attraverso il riconoscimento del suo complementare. Tale ostacolo, che era stato voluto a priori, ha evidenziato proprio quello che si temeva: poca elasticità sulla comprensione del "resto".

Sia l'enunciato (*…il numero esatto…)* che la domanda (*Qual è il numero…)* indirizzano verso una soluzione unica. In effetti gli allievi hanno sempre fornito un'unica soluzione ma rimane il dubbio se essi abbiano giustamente colto il significato di queste espressioni linguistiche, utilizzandole secondo il corretto significato, oppure si siano fermati alla prima soluzione trovata. Questo dubbio è ben motivato perché in tutti i casi di errata interpretazione delle clausole 4 e/o 5 le soluzioni sarebbero state comunque due.

Nel caso di interpretazione della quarta clausola con "3" inteso come resto e non complementare del resto le soluzioni sarebbero state ***1503*** e ***1608***[10]. Negli elaborati esaminati questi due numeri sono ricorrenti, ma il 1503 si trova con maggiore frequenza, probabilmente perché è il primo nell'ordine della ricerca.

Il seguente elaborato ne è un esempio

[10] Basta cercare i multipli di 3 compresi fra 1400 e 1700 le cui unità siano 3 oppure 8 (multipli di 5 più 3 unità) che divisi per 7 abbiano resto 5 (1413, 1428, …+$_{15}$…).


IL NUMERO DEI FAGIOLI È 1503.
SPIEGAZIONE:
PER PRIMA COSA ABBIAMO CAPITO CHE IL NUMERO NON È DIVISIBILE PER 2 PER 5 E PER 7. MA È MULTIPLO DI 3.
- ABBIAMO ELENCATO I NUMERI DISPARI E SUCCESSIVAMENTE ABBIAMO TOLTO I NUMERI DIVISIBILI PER 5 E PER 7
- POI ABBIAMO TOLTO I NON MULTIPLI DI 3.
ABBIAMO DIVISO I NUMERI RIMANENTI PER 5 E 7 CERCANDO DI TROVARE QUELLO CON I RESTI GIUSTI (3 E 5).

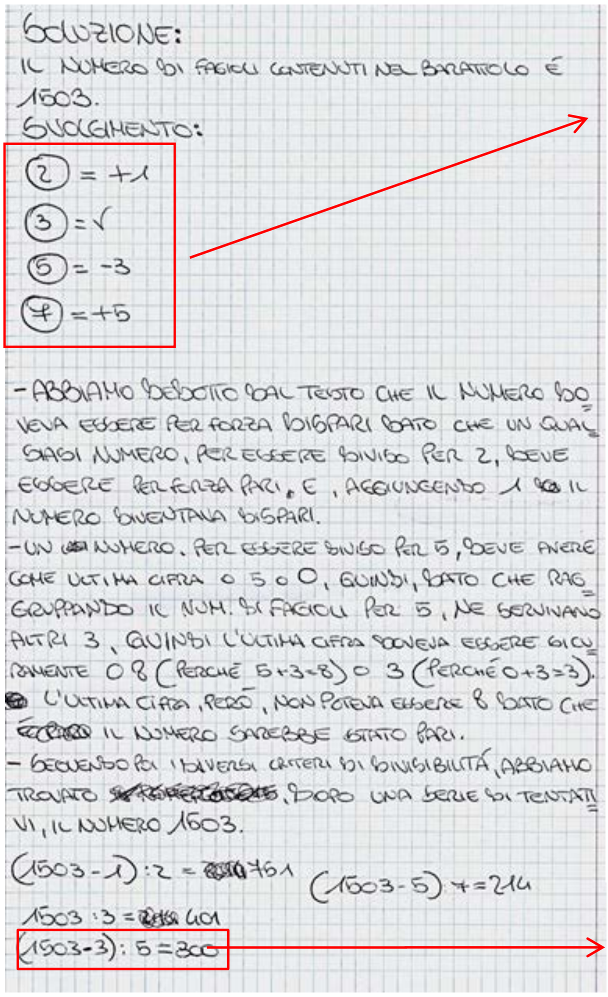
Il numero di fagioli è 1503.

Spiegazione

Per prima cosa abbiamo capito che il numero non è divisibile per 2 per 5 e per 7. Ma è multiplo di 3.

- *Abbiamo elencato i numeri dispari e successivamente abbiamo tolto i numeri divisibili per 5 e per 7*
- *Poi abbiamo tolto i non multipli di 3.*
- *Abbiamo diviso i numeri rimanenti per 5 e per 7 cercando di trovare quello con i resti giusti (3 e 5)*

È interessante il seguente elaborato anche da un punto di vista comunicativo:

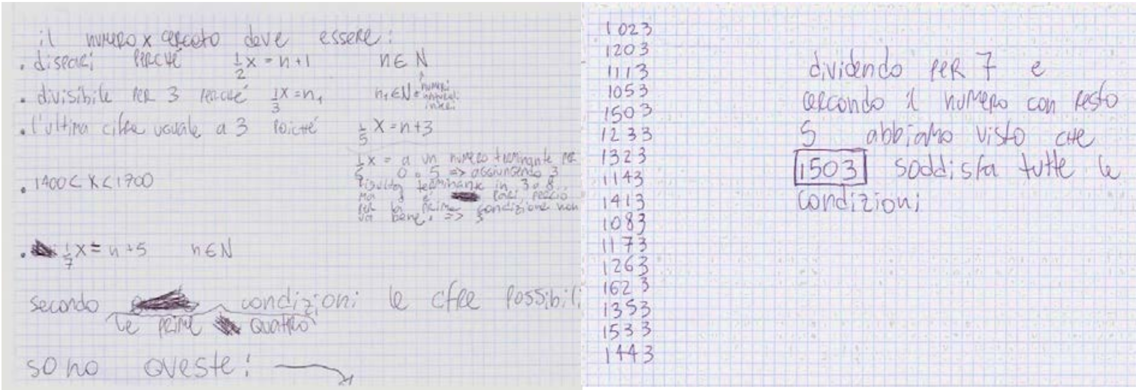

SOLUZIONE:
IL NUMERO DEI FAGIOLI CONTENUTI NEL BARATTOLO È 1503.
SVOLGIMENTO:
(2) = +1
(3) = √
(5) = -3
(7) = +5
- ABBIAMO DEDOTTO DAL TESTO CHE IL NUMERO DOVEVA ESSERE PER FORZA DISPARI DATO CHE UN QUALSIASI NUMERO, PER ESSERE DIVISO PER 2, DEVE ESSERE PER FORZA PARI, E, AGGIUNGENDO 1 IL NUMERO DIVENTAVA DISPARI.
- UN NUMERO, PER ESSERE DIVISO PER 5, DEVE AVERE COME ULTIMA CIFRA O 5 O 0, QUINDI, DATO CHE RAGGRUPPANDO IL NUM. DI FAGIOLI PER 5, NE SERVIVANO ALTRI 3, QUINDI L'ULTIMA CIFRA DOVEVA ESSERE SICURAMENTE O 8 (PERCHÉ 5+3=8) O 3 (PERCHÉ 0+3=3).
L'ULTIMA CIFRA, PERÒ, NON POTEVA ESSERE 8 DATO CHE IL NUMERO SAREBBE STATO PARI.
- SEGUENDO POI I DIVERSI CRITERI DI DIVISIBILITÀ, ABBIAMO TROVATO, DOPO UNA SERIE DI TENTATIVI, IL NUMERO 1503.
(1503 - 1) : 2 = 751
(1503 - 5) : 7 = 214
1503 : 3 = 501
(1503 - 3) : 5 = 300

linguaggio simbolico è fortemente scorretto, anche se *chi sa* riesce ad interpretare:
"c'è 1 fagiolo in più per essere un multiplo di2,
è un multiplo di 3,
mancano 3 fagioli per essere un multiplo di 5
ci sono 5 fagioli in più per essere un multiplo di 7"

- *Abbiamo dedotto dal testo che il numero doveva essere per forza dispari dato che un qualsiasi numero, per essere diviso per 2, deve essere per forza pari e, aggiungendo 1 il numero diventava dispari.*
- *Un numero, per essere diviso per 5 deve avere come ultima cifra o 5 o 0, quindi , dato che raggruppando il num. di fagioli per 5, ne servivano altri 3, quindi l'ultima cifra doveva essere sicuramente o 8 (perché 5+3= 8) o 3 (perché 0+3= 3).*
- *L'ultima cifra, però, non poteva essere 8 dato che il numero sarebbe stato pari.*
- *Seguendo poi i diversi criteri di divisibilità, abbiamo trovato, dopo una serie di tentativi, il numero 1503.*

secondo la loro *traduzione* precedente avrebbero dovuto sommare 3 anziché sottrarlo

Da notare che, come spesso succede, la spiegazione della strategia utilizzata per arrivare alla soluzione è solo una verifica: 1503 secondo loro soddisfa tutte le clausole imposte dal problema. In particolare nel seguente elaborato di categoria 10 si possono osservare la notazione simbolica, del tutto inappropriata, la stesura ed il controllo dell'elenco dei possibili numeri, molto carente.



Il numero x cercato deve essere:

dispari perché $\frac{1}{2}x = n + 1$ $n \in N$ $\frac{1}{2}x = n + 1$ $n \in N$ *numeri naturali interi*

divisibile per 3 perché $\frac{1}{3}x = n$ $n \in N$

l'ultima cifra uguale a 3 perché $\frac{1}{5}x = n + 3$

$\frac{1}{5}x =$ *a un numero terminante per 0 o 5* ➡ *aggiungendo 3 risulta terminare in 3 o 8, ma 8 è pari perciò per la prima condizione non va bene.* ➡*3*

1400<x<1700

$\frac{1}{7}x = n + 3$

Secondo le prime quattro condizioni le cifre possibili

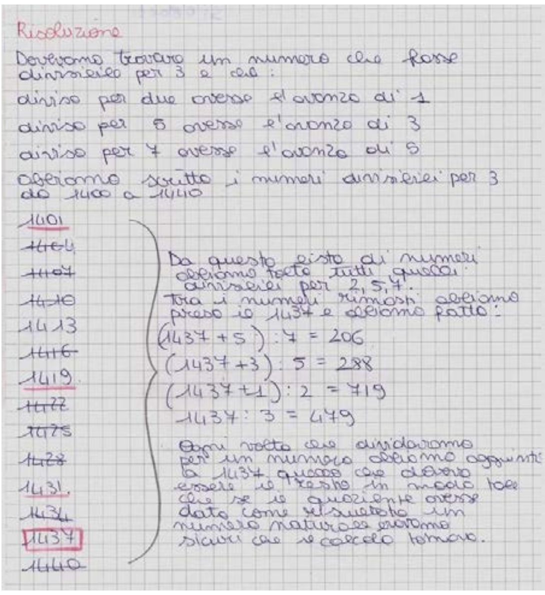
1023 1203 1113 1053 1503 1233 1323 1143 1413 1083 1173 1263 1623 1353 1533 1443

La notazione simbolica utilizzata dal gruppo dei risolutori è solo "stenografia", nel senso che è solo un modo per riscrivere i dati. Gli studenti non si rendono conto che matematicamente questa scrittura è scorretta: il simbolo "*n*" dovrebbe rappresentare sempre la stessa quantità. Essi abbandonano questa impostazione *algebrica,* non gestibile e forniscono un elenco di numeri del tutto fuori luogo ma che, rii-analizzato a posteriori, ci dà alcune informazioni interessanti:

- resto 1 nella divisione per 2 fornisce numeri dispari che, interpretando nella quarta clausola il 3 come resto, devono terminare tutti per 3;
- l'intervallo indicato non è così importante, qualche vincolo meno importante può essere ignorato;
- l'algoritmo per individuare i numeri divisibili per 3 è conosciuto.

È interessante illustrare il seguente elaborato di categoria 8 dove gli allievi sentono il bisogno di tradurre in un altro linguaggio i dati del testo ed in questo passaggio commettono il solito errore di interpretazione della quarta clausola come se 3 fosse il resto nella divisione per 5. Ma non solo, commettono anche un ulteriore errore che li porta in definitiva a trovare *un numero che sia nella divisione per 5 che per 7 abbia resto 2*.

Anche con questa scorretta interpretazione le soluzioni sarebbero state due. Infatti «il numero cercato *n* si sarebbe potuto esprimere come *n = k35+2* per un opportuno k e, nell'intervallo *1400-1700*, con *n* dispari e multiplo di *3* si hanno due possibili valori di k: *41 e 47* da cui si ottengono le soluzioni *n:* ***1437*** *e* ***1647***.



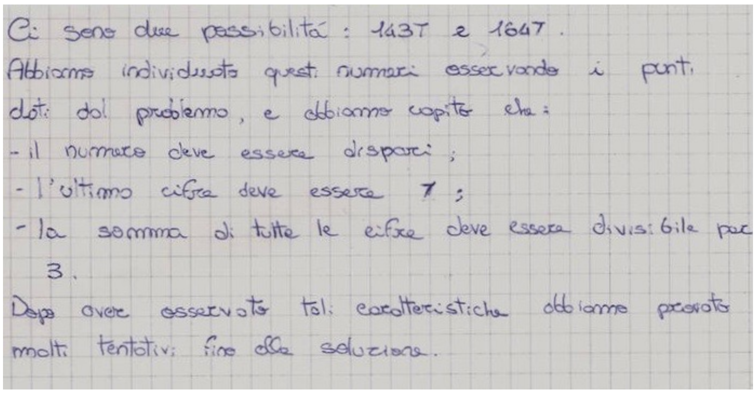
Dovevamo trovare un numero che fosse divisibile per 3 e che:
diviso per due avesse avanzo di 1
diviso per 5 avesse l'avanzo di 3
diviso per 7 avesse l'avanzo di 5
Abbiamo scritto i numeri divisibili per 3 da 1400 a 1440
Da questa lista di numeri abbiamo tolto tutti quelli divisibili per 2, per 5, per 7.
Tra i numeri rimasti abbiamo preso il 1437 e abbiamo fatto:
(1437 + 5) : 7= 206
(1437 + 3) : 5= 288
(1437 + 1) : 2= 719
1437 : 3 = 479
Ogni volta che dividevamo per un numero abbiamo aggiunto a 1437 quello che doveva essere il resto in modo tale che se il quoziente avesse dato come risultato un numero naturale eravamo sicuri che

La traduzione "operativa" della loro interpretazione avrebbe dovuto essere

Diviso per 2 avesse l'avanzo di 1	*(1437-1) : 2 (oppure (1437+1) : 2) è un numero intero*
diviso per 5 avesse l'avanzo di 3	*(1437-3) : 5 è un numero intero*
diviso per 7 avesse l'avanzo di 5	*(1437-3) : 5 è un numero intero*

mentre essi traducono
(1437+1) : 2 *è un numero intero*
(1437+3) : 5 *è un numero intero*
(1437+5) : 7 *è un numero intero*
che vuol dire che stanno cercando, senza rendersene conto, un numero che sia dispari, che aumentato di 3 sia un multiplo di 5 e che aumentato di 5 sia un multiplo di 7, ovvero un numero che sia nella divisione per 5 che per 7 abbia resto 2[11].

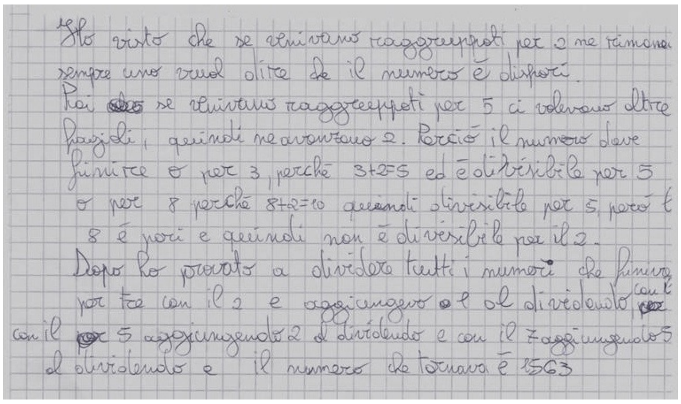
Nel seguente elaborato sono state trovate entrambe le soluzioni dovute all'interpretazione errata della quarta e quinta clausola come "resto 2 nella divisione sia per 5 che per 7". La spiegazione che viene fornita non aiuta la comprensione ed inoltre non risulta di alcun aiuto nemmeno per chi deve trovare l'errore nel ragionamento seguito: i passaggi descritti sono più "sentenze" che spiegazioni. Da un punto di vista comunicativo possiamo dire che la spiegazione fornita non è di aiuto né per "*chi non sa*", né per "*chi sa*".



Ci sono due possibilità: 1437 e 1647. Abbiamo individuato questi numeri osservando i punti dati dal problema, e abbiamo capito che:
-il numero deve essere dispari;
-l'ultima cifra deve essere 7;
-la somma di tutte le cifre deve essere divisibile per 3.
Dopo aver osservato tali caratteristiche abbiamo provato molti tentativi fino alla soluzione.

[11] In questo caso interpretano bene la quarta clausola, la più difficile, ma si confondono sull'ultima: forse la presenza dei numeri 7 e 5, la cui differenza è 2 come 2 era la differenza fra 5 e 3, li ha tratti in inganno.

Fra gli altri c'è stato anche chi ha interpretato "a rovescio"[12] la quarta e quinta clausola e ha dato la risposta 1563, numero che diviso per 5 ha resto 3 e diviso per 7 ha resto 2. Un esempio è dato dal seguente elaborato.

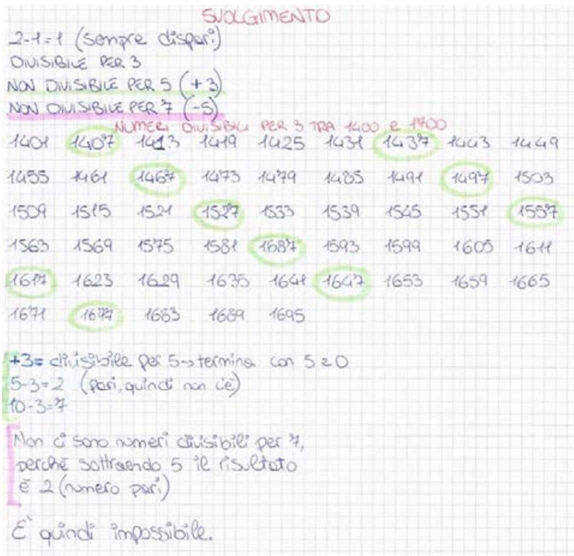


Ho visto che se venivano raggruppati per 2 ne rimaneva sempre 1, vuol dire che il numero è dispari.

Poi se venivano raggruppati per 5 ci volevano altri 3 fagioli, quindi avanzano 2. Perciò il numero deve finire o per 3, perché 3+2=5 ed è divisibile per 3 o per 8 perché 8+2=10, quindi è divisibile per 5, però l'8 è pari e quindi non è divisibile per il 2.

Dopo ho provato a dividere tutti i numeri che finivano per tre con il 2 e aggiungevo 1 al dividendo, con il 5 aggiungendo 2 al dividendo e con il 7 aggiungendo 5 al dividendo e il numero che tornava è 1563.

Con questa interpretazione le soluzioni dovevano essere ancora due: 1493 e 1563.
C'è anche chi, per la difficoltà di gestione del resto, risponde che il problema è impossibile!



Svolgimento
2-1=1(sempre dispari)
divisibile per 3
Non divisibile per 5 (+3)
Non divisibile per 7 (-5)
Numeri divisibili per 3 tra 1400 e 1700
(evidenziano: *1407-1437-1467-1497-1527- 1557-1587-1617-1647-1677*)
+3= divisibile per 5→ termina con 5 e 0
5-3=2 (pari, quindi non c'è)
10-3=7
Non ci sono numeri divisibili per 7, perché sottraendo 5 il risultato è 2 (numero pari)
E' quindi impossibile.

È un peccato perché è stato compreso che il numero doveva terminare con 7, ma ci si confonde perché 5 è quanto avanza, alla fine, al numero quando viene diviso per 7. Si comprende nell'immediato, ma non si conserva e utilizza al momento opportuno.

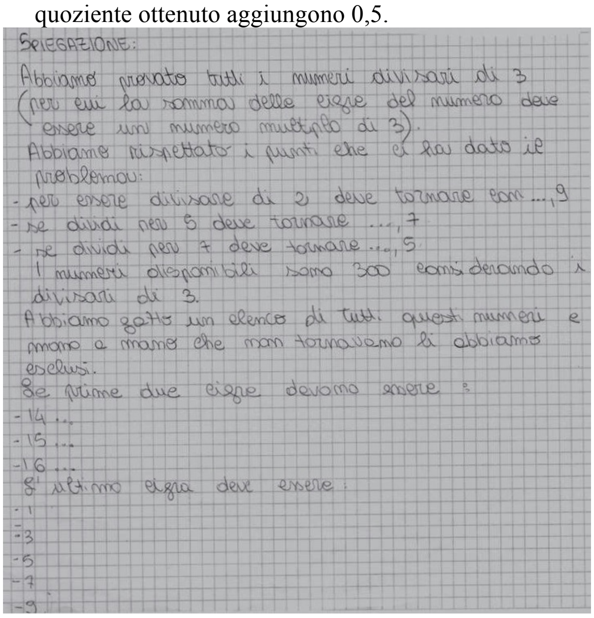
Sono interessanti i seguenti tre elaborati, tutti di categoria 8, nei quali l'uso errato della virgola nella gestione del resto nelle divisioni porta a considerare i "decimi di fagiolo". Probabilmente l'impiego massiccio della calcolatrice fa perdere di vista il significato completo della divisione.

Nel primo forse gli allievi interpretano il resto *r* nella divisione come ciò che manca, in termini di decimi, per avere il quoziente intero:

- dividendo per 2 avanza 1 fagiolo viene interpretato come *mancano 9 decimi per avere l'intero* e quindi al quoziente ottenuto (di tre cifre nella parte intera) aggiungono 0,9. (Nella divisione per 2 avanza 1 fagiolo o manca 1 fagiolo è del tutto analogo);
- dividendo per 5 mancano 3 fagioli viene interpretato come *mancano 7 decimi per avere l'intero* e quindi al quoziente ottenuto aggiungono 0,7;

[12] "se si raggruppano i fagioli per 5 alla fine avanzano 3 fagioli; se si raggruppano i fagioli per 7 ci vorrebbero altri 5 fagioli per completare i mucchietti". E' quanto dire cercare un numero che diviso per 5 ha resto 3 e diviso per 7 ha resto 2.

- dividendo per 7 avanzano 5 fagioli viene interpretato come *mancano 5 decimi per avere l'intero* e quindi al quoziente ottenuto aggiungono 0,5.


SPIEGAZIONE:
Abbiamo provato tutti i numeri divisori di 3 (per cui la somma delle cifre del numero deve essere un numero multiplo di 3).
Abbiamo rispettato i punti che ci ha dato il problema:
- per essere divisore di 2 deve tornare con ...,9
- se dividi per 5 deve tornare ...,7
- se dividi per 7 deve tornare ...,5.
I numeri disponibili sono 300 considerando i divisori di 3.
Abbiamo fatto un elenco di tutti questi numeri e mano a mano che non tornavano li abbiamo esclusi.
Le prime due cifre devono essere:
- 14...
- 15...
- 16...
L'ultima cifra deve essere:
- 1
- 3
- 5
- 7
- 9

Spiegazione

Abbiamo provato tutti i numeri divisori di 3 (per cui la somma delle cifre del numero essere un numero multiplo di 3).

Abbiamo rispettato i punti che ci ha dato il problema:

-per essere divisore di 2 deve tornare con …,9

-se dividi per 5 deve tornare …,7

se dividi per 7 deve tornare …,5

I numeri disponibili sono 300 considerando i divisori di 3.

Abbiamo fatto un elenco di tutti, questi numeri a mano a mano che non tornavano li abbiamo esclusi.

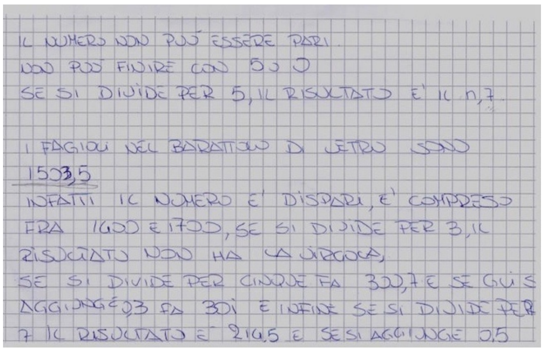
Le prime due cifre, devono essere:

14 … 15 … 16…

L'ultima cifra deve essere:

1 3 5 7

Nel secondo si calcolano addirittura i decimi di fagiolo


IL NUMERO NON PUÒ ESSERE PARI
NON PUÒ FINIRE CON 5 O 0
SE SI DIVIDE PER 5, IL RISULTATO È IL n.7
I FAGIOLI NEL BARATTOLO DI VETRO SONO 1503,5
INFATTI IL NUMERO È DISPARI, È COMPRESO FRA 1400 E 1700, SE SI DIVIDE PER 3, IL RISULTATO NON HA LA VIRGOLA, SE SI DIVIDE PER CINQUE FA 300,7 E SE CI SI AGGIUNGE 0,3 FA 301 E INFINE SE SI DIVIDE PER 7 IL RISULTATO È 214,5 E SE SI AGGIUNGE 0,5

Il numero non può essere pari

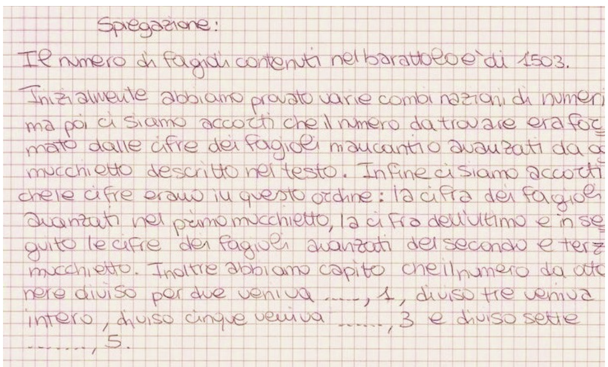
Non può finire con 5 o 0

Se si divide per 5, il risultato è il n.7

I fagioli nel barattolo di vetro sono <u>*1503,5*</u>

Infatti il numero è dispari, è compreso tra 1400 e 1700, se si divide per 3, il risultato non ha la virgola, se si divide per cinque fa 300,7 e se ci si aggiunge 0,3 fa 301 e infine se si divide per 7 il risultato è 214,5 e se si aggiunge 0,5 fa 215.

Nel terzo *il resto* diventa la prima cifra decimale nella scrittura decimale del numero cercato

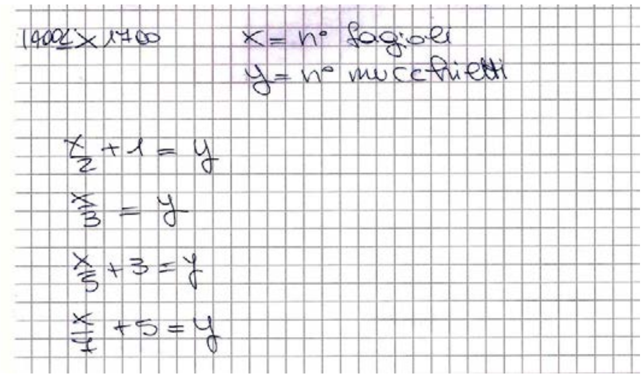

Spiegazione:
Il numero di fagioli contenuti nel barattolo è di 1503.
Inizialmente abbiamo provato varie combinazioni di numeri ma poi ci siamo accorti che il numero da trovare era formato dalle cifre dei fagioli mancanti o avanzati da ogni mucchietto descritto nel testo. Infine ci siamo accorti che le cifre erano in questo ordine: la cifra dei fagioli avanzati nel primo mucchietto, la cifra dell'ultimo e in seguito le cifre dei fagioli avanzati del secondo e terzo mucchietto. Inoltre abbiamo capito che il numero da ottenere diviso per due veniva ...,1, diviso tre veniva intero, diviso cinque veniva ...,3 e diviso sette ...,5.

Spiegazione

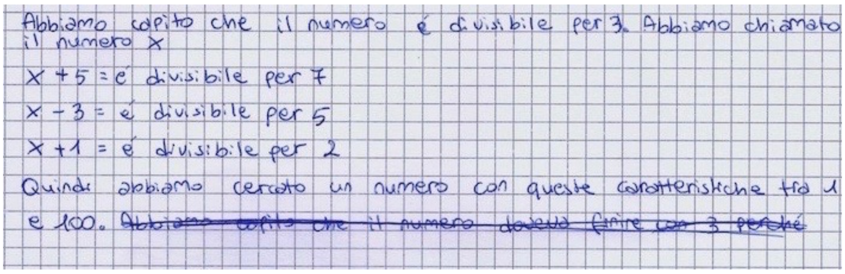
Il numero di fagioli contenuti nel barattolo è 1503. Inizialmente abbiamo provato varie combinazioni di numeri ma poi ci siamo accorti che il numero da trovare era formato dalle cifre dei fagioli mancanti o avanzati da ogni mucchietto descritto nel testo. Infine ci siamo accorti che le cifre erano in questo ordine: la cifra dei fagioli avanzati nel primo mucchietto, la cifra dell'ultimo e in seguito le cifre dei fagioli avanzati nel secondo e terzo mucchietto. Inoltre abbiamo capito che il numero da ottenere diviso per due veniva…,1, diviso per tre veniva intero, diviso cinque veniva…,3 e diviso sette ….,5.

In quest'ultimo elaborato c'è anche da notare l'uso indifferente di *"cifra"* – *"numero"* e *"ci vorrebbero ancora"* –*"avanzare"* ,

In categoria 10 si hanno altri esempi di utilizzo dell'algebra ma mal gestiti



Non si rendono conto che y in ogni divisione è sempre diverso!



Abbiamo capito che il numero è divisibile per 3. Abbiamo chiamato il numero x
x+5=è divisibile per 7
x-3= è divisibile per 5
x+1= è divisibile per2
Quindi abbiamo cercato un numero con queste caratteristiche tra 1 e 100.

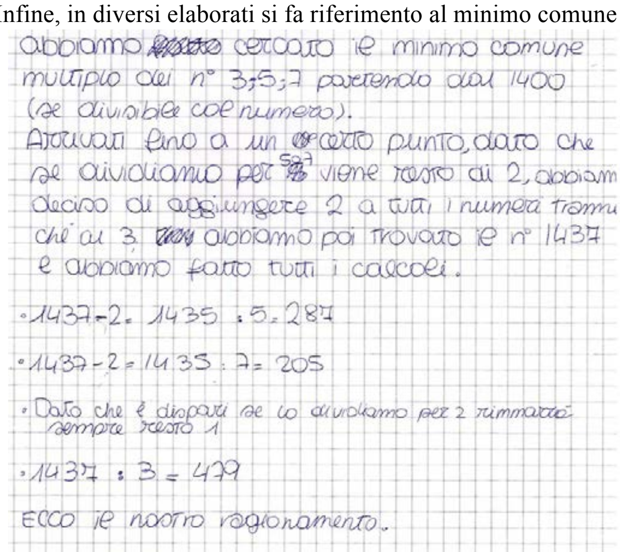
Da notare l'uso inappropriato del simbolo dell'uguaglianza e l'uso dell'incognita x ma… considerano:

«x+5 è divisibile per 7» anziché «x-5 ….»

«x-3 è divisibile per 5» anziché «x+3 …» o «x-2 ….»

Scambiano in definitiva il resto con il complementare del resto.

Infine, in diversi elaborati si fa riferimento al minimo comune multiplo tra i divisori.



Abbiamo cercato il minimo comune multiplo dei n° 3;5;7 partendo dal 1400 (se divisibile col numero).
arrivati fino ad un certo punto, dato che se dividiamo per 5 o 7 viene resto 2, abbiamo deciso di aggiungere 2 a tutti i numeri tranne che ai 3 abbiamo poi trovato il n° 1437 e abbiamo fatto tutti i calcoli.
1437-2=1435:5=287
1437-2=1435:7=205
Dato che è dispari se lo dividiamo per 2 rimarrà sempre 1
1437:3=479
Ecco il nostro ragionamento.

Dagli elaborati emerge la necessità di lavorare molto sul concetto di resto in una divisione, sul significato delle cifre decimali e sul linguaggio simbolico, mentre sembrano acquisiti i criteri di divisibilità.

Il linguaggio diverso utilizzato per esprimere la quarta e quinta clausola si è rivelato un ostacolo maggiore delle aspettative.

Questo ha suggerito di sperimentare in classe una delle due versioni seguenti della quarta e quinta clausola:

Versione A:

- *«se si raggruppano i fagioli per 5 alla fine avanzano (*restano*) 2 fagioli»*
- *«se si raggruppano i fagioli per 7 alla fine avanzano (*restano*) 5 fagioli»*

Oppure alla francese, **versione B:**

- *«se si raggruppano i fagioli per 5 ci vorrebbero altri 3 fagioli per completare l'ultimo mucchietto*
- *«se si raggruppano i fagioli per 7 ci vorrebbero altri 2 fagioli per completare l'ultimo mucchietto*

ma anche di sperimentare nella scuola primaria il livello di comprensione del concetto di divisione in presenza del riferimento al resto o al suo complementare con problemi analoghi nella struttura ma con variabili didattiche semplificate

4. Primi risultati della sperimentazione relativa al problema Barattolo di fagioli

La proposta concordata è stata accettata sia per le classi delle categorie 6-7-8 che per classi di categoria inferiore.

In quest'ultimo caso la sperimentazione è stata realizzata in due modi diversi.

- Il problema è stato proposto con una modifica della variabile numerica (numero compreso tra 40 e 90) ma ripetendo le condizioni in modo del tutto analogo all'originale. Le due clausole finali sono state intese nello stesso modo confermando l'errore di interpretazione.
- Le insegnanti di due classi di categoria 5 hanno deciso di svolgere un laboratorio con l'obiettivo di lavorare sulla padronanza del linguaggio per esprimere in modi diversi uno stesso concetto e in particolare sul concetto di resto nella divisione, sul significato dei numeri decimali e sul passaggio dal linguaggio verbale a quello simbolico.

Il laboratorio si è svolto con le seguenti modalità:

- la classe è stata suddivisa in 4 gruppi di alunni;
- ad ogni gruppo è stata consegnata una versione diversa del problema da risolvere in 50 minuti (oltre al testo originale e alle versioni A e B le cui modifiche sono sopra-riportate è stata consegnata la versione tradotta fedelmente dal francese, sulla quale non è presente l'avverbio "sempre" e si fa riferimento all'ultimo mucchietto da completare);
- dopo la soluzione ogni gruppo ha letto il testo del problema risolto (consegnato, a questo punto, anche ai bambini degli altri gruppi) e ha spiegato alla classe sia la soluzione che il ragionamento effettuato per la scelta delle strategie risolutive adottate;
- conclusa la presentazione del lavoro, l'insegnante ha chiesto agli allievi se avevano notato delle differenze nei testi dei problemi ricevuti (l'intervento dell'insegnante ha avuto lo scopo di stimolare un'ulteriore riflessione centrata proprio sulla componente linguistica);
- prima di riferire a tutta la classe, agli allievi è stata data la possibilità di confrontarsi nel piccolo gruppo (15 minuti) per concordare un'opinione motivata;
- al termine del confronto si è aperta una discussione nel corso della quale il portavoce di ogni gruppo ha riferito e condiviso con l'intera classe le opinioni emerse.

Tutti si sono resi conto delle differenze tra i testi, hanno considerato quali tra questi risultavano più semplici per la comprensione del problema e ne hanno spiegato il motivo; il lavoro si è concluso con l'ordinamento dei problemi dal più difficile al più semplice per la comprensione.

Si riportano, di seguito, alcuni commenti tratti dalla discussione.

Il **testo originale** risulta il più complicato nel linguaggio per i seguenti motivi:

- se si raggruppano i fagioli per 2 ne avanza sempre uno,
  "*quella parola sempre ci ha fatto confondere bastava dire ne avanza 1*";
- se si raggruppano i fagioli per 5 ci vorrebbero altri 3 fagioli per completare i mucchietti;
  "*In questo caso ci diceva quanti fagioli servono per completare il mucchietto da 5, e ci è voluto un po' per capirlo*";
- se si raggruppano i fagioli per 7 alla fine avanzano 5 fagioli,
  "*qui al contrario ci dice quanti ne avanzano se raggruppi per 7, e noi pensavamo come prima, poi abbiamo capito che era il contrario di prima*".

Il testo **versione B** risulta un po' meno complicato del precedente perché:

- le ultime due richieste erano simili
  "*ti dice direttamente per entrambi i raggruppamenti quanti fagioli servono per completare i mucchietti, quindi occorre ragionare sempre nello stesso modo*".

Il testo **versione A,** viene considerato il più facile di tutti *"è più facile capire ne restano… piuttosto che ne mancano… per completare"*.

5. Conclusioni

Nella risoluzione dei problemi del RMT l'allievo svolge il duplice compito, quello di capire ciò che è presentato nel testo del problema (ed eventualmente di spiegarlo ai propri compagni che non l'hanno ben chiaro) e poi di trovare una strategia risolutiva da spiegare, da condividere, talvolta da modificare o da difendere. In tutti questi momenti che lo vedono protagonista, il linguaggio, come strumento di comunicazione, è essenziale. È proprio la richiesta di spiegare il procedimento seguito nella risoluzione di un problema che spinge gli allievi a migliorare la propria comunicatività.

Da questa considerazione e dall'analisi a posteriori degli elaborati è scaturita la nostra riflessione sulla comunicazione: verbale (orale o scritta), grafica (iconica o simbolica) ma anche gestuale (mimica, drammatica) …. Gli allievi devono familiarizzare con tutte queste modalità per scoprire le potenzialità che ciascuna di esse può avere in relazione al contesto, all'oggetto dell'argomento da comunicare e al "ricevente la propria comunicazione", in modo da comprendere ed essere compresi.

L'attività di risoluzione dei problemi del RMT è senz'altro utile anche in questo senso in quanto occasione per sperimentare i diversi modi di comunicare, non esclusa la drammatizzazione. Di quanto gli allievi più piccoli si servano di quest'ultima ci possiamo rendere conto analizzando gli elaborati in particolare quelli di categoria 3, dai quali emerge con chiarezza quanto essi abbiano il bisogno di sentirsi interpreti, di calarsi nella situazione presentata per cercare di risolvere il problema con un frequente e forte coinvolgimento della sfera emotiva. Non è raro trovare, nella descrizione del procedimento, i nomi propri degli allievi che hanno lavorato sul problema, utilizzati per indicare i soggetti descritti dal testo: segnale che rivela quanto essi si siano posti nel ruolo di protagonisti della situazione da risolvere.

I problemi analizzati in questo articolo ci hanno permesso di osservare come spesso gli allievi siano approssimativi nella lettura (decodifica del messaggio scritto) e manchino di chiarezza espositiva nei confronti di "*chi non sa*": l'insegnante (o il correttore) capisce il significato di certe tabelle, rappresentazioni o verbalizzazioni ma, se uno stesso elaborato fosse presentato ad un compagno che non conosce l'argomento, questo risulterebbe per lui incomprensibile. D'altra parte occorre tenere presente l'implicito che, per gli studenti, le risposte e le spiegazioni sono destinate agli insegnanti "*che sanno*" e che, in genere, sono ben disposti a metterci del proprio per capire cosa l'alunno intenda *comunicare* (d'altra parte, se volessimo diversamente, dovremmo esplicitarlo).

Proprio ri-partendo dalle spiegazioni sugli elaborati ci siamo resi conto di quanto sia opportuno poter riflettere in classe sulla sottile ma profonda differenza fra spiegazione e verifica. Organizzare attività mirate in questo senso potrà agevolare la successiva comprensione del significato di dimostrazione.

Inoltre, di fronte alle risposte incompatibili con i dati del problema, gli insegnanti potrebbero proporre ai loro allievi un nuovo testo, analogo al precedente, i cui dati conducano alla risposta data al problema originale. Questo procedimento, se sistematico, potrebbe avviare gli allievi a verificare sempre la compatibilità delle proprie soluzioni con i dati disponibili.

Nel corso del lavoro, il Gruppo ha potuto confrontarsi e riflettere sul fatto che, in entrambi i problemi esaminati, gli allievi hanno mostrato di possedere le conoscenze specifiche richieste (non ci sono stati errori nel conteggio riguardo la posizionalità base 10 nel problema *Lancio nei cesti* e i criteri di divisibilità sono ben ricordati nel problema *Il barattolo di fagioli*), ma questo non è stato sufficiente per ottenere dei risultati apprezzabili.

A livello di comunicazione, negli elaborati si ritrovano frequentemente scritture o rappresentazioni che si rifanno alla "simbologia" propria della matematica, purtroppo sono spesso riportate in modo confuso o parziale e anche su questo, come gruppo di insegnanti e ricercatori, ci siamo interrogati: la sintesi delle scritture matematiche dovrebbe forse nascere come esigenza personale e maturare poco a poco, stimolata da proposte di lavoro che la pongano come obiettivo e che ne alimentino la necessità. Spesso le scritture matematiche sono utilizzate per scrivere più velocemente non per essere compresi universalmente!

L'analisi a posteriori realizzata sui due problemi scelti ha fornito numerosi spunti di riflessione e discussione. Possiamo ritenere che sia fondamentale non trascurare l'aspetto della revisione degli elaborati degli allievi anzi, quanta più attenzione sarà dedicata a questa attività, da parte degli insegnanti e dei ricercatori, tanto più essa produrrà effetti positivi sull'azione didattica complessiva e sulla qualità dell'apprendimento sviluppato negli allievi.

ALLEGATI

5. LANCIO NEI CESTI (Cat. 3, 4, 5)

In palestra l'insegnante propone ai bambini un nuovo gioco. Ciascun bambino dovrà lanciare palline da tennis in 2 cesti disposti uno accanto all'altro. Se la pallina entra nel cesto di destra si guadagna un punto, se invece entra in quello di sinistra si guadagnano 10 punti.

Anna lancia 12 palline e nessuna di esse va fuori dai cesti, poi fa il totale dei punti ottenuti.

Calcolate tutti i punteggi totali che Anna può aver ottenuto.

Mostrate in modo dettagliato come li avete trovati.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare le differenti somme di dodici numeri uguali a 1 e/o a 10.

Analisi del compito

- Comprendere le regole del gioco e capire che ogni pallina da tennis assume un valore diverso: vale 1 punto se si trova nel cesto di destra, vale 10 punti se si trova in quello di sinistra.
- Rendersi conto che ci sono più soluzioni, cioè più punteggi totali possibili, che dipendono dal numero di palline entrate in ciascuno dei cesti.
- Immaginare o disegnare la situazione e calcolare ogni volta il punteggio.
- Ci sono più modi di organizzare i calcoli: addizionare i termini uno ad uno (per es. 1+1+1+1+...+10+10) oppure, tenendo sotto controllo il numero degli "1" e quello dei "10", effettuare le combinazioni di moltiplicazioni e addizioni (per es. 5×1+7×10).

Oppure,

- calcolare il punteggio più basso, 12 (corrispondente a 12 palline nel cesto di destra) e trovare poi i successivi punteggi, togliendo 1 e aggiungendo 10, fino ad arrivare a 120 (corrispondente a 12 palline nel cesto di sinistra): 12; 12-1+10= 21; 21-1+10=30; 30-1+10= 39; … ; 111-1+10=120 (ovvero, aggiungendo 9 ogni volta).
- In alternativa, partire dal punteggio più alto, 120, e successivamente togliere 10 e aggiungere 1 (cioè togliere 9 ogni volta) fino ad arrivare a 12.
- La ricerca potrebbe essere organizzata in una tabella che metta in evidenza nello stesso tempo le scomposizioni del 12 in somme di due interi e i numeri ottenuti.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (12-21-30-39-48-57-66-75-84-93-102-111-120) con un procedimento organizzato, una tabella o una descrizione dettagliata della procedura seguita

3 Risposta corretta che riporta tutte le possibilità, ma con una descrizione poco chiara della procedura seguita (tralasciati uno o più passaggi)
oppure risposta incompleta per mancanza di uno dei possibili punteggi o un solo errore di calcolo, ma con dettaglio della ricerca

2 Risposta incompleta per mancanza da due a quattro dei possibili punteggi o due o tre errori di calcolo, ma con dettaglio della ricerca
oppure risposta incompleta per mancanza di uno dei possibili punteggi, o con un solo errore di calcolo, ma senza dettagli sulla ricerca
oppure risposta corretta senza spiegazione

1 Risposta incompleta per mancanza da cinque a sette punteggi possibili o quattro o cinque errori di calcolo, ma con dettaglio della ricerca
oppure risposta incompleta per mancanza da due a quattro dei possibili punteggi, o due o tre errori di calcolo, ma senza dettagli sulla ricerca

0 Incomprensione del problema o ogni altra risposta

Livello: 3, 4, 5

Origine: Siena

15. BARATTOLO DI FAGIOLI (Cat. 8, 9, 10)

Marco chiede al suo amico Carlo il numero esatto di fagioli contenuti in un barattolo di vetro, sapendo che:

- il numero cercato è compreso fra 1400 e 1700;
- se si raggruppano i fagioli per 2 ne avanza sempre uno;
- se si raggruppano i fagioli per 3, i mucchietti formati sono completi;
- se si raggruppano i fagioli per 5 ci vorrebbero altri 3 fagioli per completare i mucchietti;
- se si raggruppano i fagioli per 7 alla fine avanzano 5 fagioli.

Qual è il numero dei fagioli contenuti nel barattolo ?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare l'unico numero compreso tra 1400 e 1700 sapendo che i resti delle divisioni di questo numero per 2, 3, 5 e 7 sono, rispettivamente, 1, 0, 2 e 5.

Analisi del compito

- Capire che, trattandosi di un numero elevato, è estremamente improduttivo lavorare operativamente con oggetti o disegni, per cui è opportuno ricorrere alla scrittura di numeri e a relazioni numeriche.
- Trovare un metodo di eliminazione o di scelta che eviti di eseguire troppe divisioni per determinare i resti.
- La ricerca va fatta su tutti i numeri compresi fra 1400 e 1700, eliminando di volta in volta quelli che:
  - terminano con una cifra pari (0, 2, 4, 6, 8) per rispettare la seconda condizione,
  - non sono divisibili per 3 per rispettare la terza condizione,
  - non terminano per 7 per rispettare la quarta condizione (la cifra delle unità di un multiplo di 5 diminuito di 3 è 7
    o 2, quest'ultima da eliminare per la seconda condizione).
- A questo punto scrivere tutti i numeri dispari compresi fra 1400 e 1700 che terminano con la cifra 7 e che sono multipli di 3. Si può ridurre l'insieme dei numeri da esaminare per trovare i multipli di 3, considerando che se d e c indicano le cifre delle decine e delle centinaia del numero cercato, allora $1+c+d+7$ deve essere un multiplo di 3, con $c + d \leq 18$. Si ottengono così: 1407, 1437, 1467, 1497, 1527, 1557, 1587, 1617, 1647, 1677.
- Infine trovare che solo il numero 1587 soddisfa alle cinque condizioni: $(226 \times 7) + 5 = 1587$.

Oppure,

- scrivere tutti i multipli di 7 aumentati di 5 fra 1400 e 1700, eliminare tra questi i numeri pari e conservare solo quelli che finiscono con 7 (1447, 1517, 1587, 1657) per arrivare a 1587, che è l'unico ad essere anche multiplo di 3.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (1587) con i dettagli di una ricerca sistematica

3 Risposta corretta con dettagli di una ricerca non esaustiva

2 Risposta corretta senza spiegazione o risposta sbagliata a causa di un errore di calcolo in una ricerca sistematica

1 Inizio di ricerca corretta

0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: Riva del Garda e *Il sacchetto di biglie,* 10.II.13

LANGAGE ET COMMUNICATION : RE-PARTONS DE L'ANALYSE A POSTERIORI

Carla Crociani, Rita Spatoloni[1]

Introduction

La maîtrise de la langue dans tous ses aspects est indissociable de l'acquisition des concepts : la connaissance, avant de devenir patrimoine de l'individu, nécessite d'être médiatisée et ceci se produit surtout à travers le langage. C'est lui précisément qui, en tant que canal de communication, doit être connu et compris de manière univoque par l'émetteur comme par le destinataire. En référence aux mathématiques les affirmations de Grugnetti et Jaquet réaffirment : *tout concept de mathématiques, dans son processus d'acquisition, nécessite des activités qui permettent à l'élève de mobiliser ses propres connaissances déjà acquises, d'exprimer ses propres idées, même enchevêtrées d'hésitations et « d'erreurs » qui, dans un certain sens, constituent son « épistémologie implicite »). Et il faut absolument tenir compte de la langue naturelle dans ce processus*[2].

Le thème de la 21e Rencontre était celui du langage dans sa double acception : celle de la lecture et celle de l'écriture. Chacune d'elles peut être à son tour examinée par rapport à deux ou plusieurs aspects :

- *écriture* du texte d'un problème de la part d'enseignants qui veulent le proposer à leurs élèves ; *écriture* des élèves qui expliquent les stratégies de résolution, soit à leurs camarades, soit à l'enseignant qui l'a proposé (encore deux aspects à examiner) ;
- *lecture* d'un texte de la part des élèves pour s'approprier la situation problématique décrite ; *lecture* de la part des enseignants de ce que les élèves ont produit pour comprendre comme ils ont su décrire leurs savoirs mobilisés et leurs stratégies.

Tout ceci en tenant toujours compte des multiples nuances propres au langage commun.

Si la considération des aspects linguistiques est importante en sens général, elle résulte indispensable lorsqu'on se réfère au secteur de la didactique et, en particulier, de la didactique des mathématiques. Dans ce champ il est particulièrement nécessaire, en effet, de prendre en considération les aspects linguistiques particuliers, mais même de développer chez les élèves la capacité de les compléter avec le langage commun.

Trop souvent les mathématiques ont été et sont encore retenues une discipline rigide, connotée d'un langage qui, en nécessitant d'univocité, ne peut pas se servir de circonlocutions tirées d'emploi quotidien, mais doivent utiliser seulement les structures particulières. Parmi les enseignants on sent souvent des phrases du type : « En mathématiques il faut s'exprimer en utilisant le langage spécifique de la discipline et ne pas être approximatif ». Mais … comment apprend-on tout ceci ?

Le titre de la 21e rencontre Internationale souligne combien, dans les problèmes de RMT, soit l'écriture du texte d'un problème par l'auteur, soit l'explication de la procédure résolutive fournie par les élèves, doivent passer plusieurs fois par les diverses phases : *lire, reformuler, écrire, rédiger*… Pour cette raison la tâche des Groupes de Travail a été d'entamer une confrontation soit *des compétences communicatives des adultes concernant la rédaction d'énoncés soit de l'analyse et du traitement des réponses des élèves pour réfléchir sur l'état des compétences mathématiques.*

Etant convaincus que l'examen attentif des résultats et, surtout des explications des élèves, constituent une base essentielle pour la réflexion, non seulement sur les notions apprises mais, surtout, sur les processus d'apprentissage, nous avons décidé de proposer à notre Groupe l'analyse des deux problèmes *Lancers dans des paniers* (25.II.5) et *Sac de haricots* (25.II.15). Le choix a été déterminé selon différentes motivations : l'appartenance au domaine de l'arithmétique et de la numération, des résultats peu satisfaisants, la possibilité d'analyser toutes les catégories qui intéressent les membres de notre Groupe, et surtout, le fait que ces problèmes nous permettent d'examiner deux aspects différents liés au langage : dans le premier quelques termes perçus comme mots-clés, dans le second des expressions diverses avec lesquelles on peut présenter un même concept mathématique.

Le premier problème est destiné aux catégories les plus jeunes et l'énoncé, dans les intentions des auteurs, devait être clair et adapté aux destinataires : la description d'un contexte de jeu, des termes simples et univoques pour illustrer la situation problématique présentée, les variables numériques choisies de façon à favoriser une reconnaissance de la position des chiffres dans l'écriture d'un nombre. A posteriori, le langage ne s'est pas révélé

[1] Section de Sienne et coordinatrices du groupe numération.

[2] Grugnetti L, Jaquet F., 2016, 'Pensare, scrivere e… costruire matematica', in *Educazione linguistica e apprendimento/insegnamento des discipline matematico-scientifiche*, I quaderni del Giscel (a cura di F. De Renzo, M. E. Piemontese), Aracne editrice, 83-99.

aussi clair que prévu, on a pu observer des interprétations très diverses et, en outre les élèves n'ont pas vu le problème comme une situation de « numération de position ».

Dans le second problème, adressé à des catégories plus élevées, outre la clarté descriptive de la situation problématique, on « a joué » sur le fait que le langage naturel permet d'exprimer un même concept mathématique, comme celui de la division euclidienne, selon deux approches différentes, en s'intéressant au reste ou au complémentaire du reste. Dans l'énoncé les contraintes sont données en utilisant ces deux approches simultanément. Il s'agissait d'une difficulté voulue pour mettre en lumière d'éventuelles conceptions erronées dans le concept de division.

La « langue », en plus de nous fournir beaucoup de possibilités de nous exprimer, avec des mots et des tournures différentes, nous offre aussi celle de déplacer l'attention sur une pluralité de points de vue et, même pour décrire une même situation, nous en fait percevoir des facettes différentes. En mathématiques, ceci peut aider à saisir toujours mieux la complexité de la situation examinée, en développant ainsi la compréhension d'un concept, d'une séquence de déductions logiques, …

La présence d'enseignants/chercheurs de langue française dans notre groupe a aussi permis de discuter et de réfléchir sur l'importance du choix des paroles et expressions différentes, dues justement à la diversité du langage naturel utilisé (les correspondances pour passer d'une langue à l'autre ne sont jamais biunivoques), qui influence la présence ou l'absence d'erreurs dépendantes de l'interprétation.

1. Le problème *Lancers dans des paniers*

Voici le problème en versions italienne et française :

LANCIO NEI CESTI (Cat. 3, 4, 5)
In palestra l'insegnante propone ai bambini un nuovo gioco. Ciascun bambino dovrà lanciare palline da tennis in 2 cesti disposti uno accanto all'altro. Se la pallina entra nel cesto di destra si guadagna un punto, se invece entra in quello di sinistra si guadagnano 10 punti.
Anna lancia 12 palline e nessuna di esse va fuori dai cesti, poi fa il totale dei punti ottenuti.
Calcolate tutti i punteggi totali che Anna può aver ottenuto.
Mostrate in modo dettagliato come li avete trovati.

LANCERS DANS DES PANIERS (Cat. 3, 4, 5)
En éducation physique, l'enseignante propose un nouveau jeu aux enfants. Chaque enfant doit lancer des balles de tennis dans deux paniers placés l'un à côté de l'autre. Si la balle entre dans le panier de droite, le joueur gagne 1 point ; si elle entre dans le panier de gauche, le joueur marque 10 points.
Anna lance 12 balles et chaque balle arrive dans l'un ou l'autre des deux paniers, puis elle fait le total des points qu'elle a obtenus.
Trouvez tous les totaux qu'Anna peut avoir obtenus.
Montrez en détail comment vous avez trouvé.

L'énoncé décrit une situation problématique qui se situe dans un contexte de jeu, d'action, mais aussi de défi, dans lequel les élèves peuvent s'identifier. Dans les intentions des auteurs, ce réalisme aurait dû faciliter l'appropriation du problème et, même sans une compréhension complète du point de vue linguistique, les élèves auraient dû comprendre ce qui est demandé : il faut faire le maximum des points, mais on sait qu'on ne pourra pas toujours y arriver et, par conséquent on doit chercher toutes les possibilités. Du point de vue mathématique le problème aurait dû faire émerger et reconnaître la structure positionnelle de l'écriture des nombres.

En réalité l'analyse à posteriori a montré que les obstacles de ce problème sont de type linguistique, le contexte n'a pas aidé à la compréhension du texte et aucun élève n'a expressément reconnu la structure positionnelle de l'écriture du nombre.

D'un point de vue théorique on pouvait s'exprimer de manière plus « aseptique » en proposant un texte ressemblant à un exercice scolaire, du type :

J'ai un boulier avec deux tiges et 12 boules

Combien de nombres différents puis-je y former ? »

De cette façon nous aurions attiré l'attention des élèves sur une activité typiquement scolaire, sans solliciter ce processus qui incite à reconnaître et à appliquer, dans des contextes différents et inconnus, le contenu mathématique nécessaire pour la résolution du problème, ou aussi sans mettre en œuvre la compétence visée[3].

Les tableaux qui suivent montrent les occurrences et les moyennes des points attribués, pour ce problème, lors de l'évaluation des copies des classes participant au 25e RMT, catégories par catégories.

points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 3	320	86	85	56	92	639	1.2
Cat. 4	290	87	145	104	248	874	1.9
Cat. 5	227	69	128	133	371	928	2.4
tot	**837**	**242**	**358**	**293**	**711**	**2441**	**1.9**

en %					
Cat. 3	50%	13%	13%	9%	14%
Cat. 4	33%	10%	17%	12%	28%
Cat. 5	24%	7%	14%	14%	40%
tot	**34%**	**10%**	**15%**	**12%**	**29%**

Ce problème, comme on le voit dans les tableaux précédents, n'a pas eu beaucoup de succès selon les points attribués[4] et les pourcentages de « 0 point » très élevés, spécialement en catégorie 3. Malgré ceci, les enseignants du Groupe, qui l'ont proposé dans leurs classes et l'ont discuté, ont rapporté que le problème a généré un taux de satisfaction élevé, probablement par son lien avec une situation de jeu.

Au cours de la discussion nous avons analysé, en rapport avec l'énoncé du problème, quel était l'objet strictement lié à la tâche mathématique et ce qu'étaient les compétences nécessaires pour l'atteindre. Les élèves auraient dû faire l'inventaire des totaux possibles, en accomplissant la tâche mathématique qui consiste à trouver les différentes sommes de douze nombres égaux à 1et/ou à 10.

Cette tâche exige de fixer son attention sur la valeur positionnelle des chiffres, sur le contrôle du nombre des billes à lancer (12), sur la construction d'un inventaire exhaustif, sur la commutativité de l'addition et sur la signification des termes.

La capacité de dresser un inventaire est transversale à toutes les disciplines et entre en jeu chaque fois que l'on demande une classification selon un critère ou d'insérer un élément déterminé dans une répartition. Il s'agit par conséquent d'une capacité qui devrait être fréquemment sollicitée et exercée dès les premières années d'école (et non seulement).

Tout semble à la portée d'élèves des catégories auxquelles le problème a été proposé, mais il y a eu des surprises.

En ce qui concerne la signification des termes utilisés dans l'énoncé, nous nous sommes rendu compte que les élèves, bien que connaissant les mots « total », « points » et « totaux » n'ont pas su leur donner une signification correcte au sein de la phrase et du contexte[5]. Par conséquent les phrases qui ont créé les difficultés majeures d'interprétation ont été :

… puis elle fait le total des points qu'elle a obtenus.

***Trouvez tous les totaux** (**Calcolate tutti i punteggi totali**) **qu'Anna peut avoir obtenus**.*

Dans les intentions des auteurs, « le total des points obtenus » était une des sommes possibles (la somme de 12 termes 1 et/ou 10) et « tous les totaux » (« tutti i punteggi totali ») qu'Anna peut avoir obtenue représentait tous scores possibles ; la présence des mots « punteggi » (scores) et des « totaux » était une redondance de la version italienne qui a fait perdre le contrôle de l'expression complète et qui a déclenché la recherche « du total des totaux ».

(En français il n'y a pas eu ce problème, car la redondance avait été évitée : L'expression italienne ***Calcolate tutti punteggi totali che Anna può aver ottenuto*** aurait pu se traduire littéralement par ***Trouvez tous les « scores » totaux qu'Anna peut avoir obtenus*** mais cette expression redondante a été évitée.*)*

Une autre réflexion vient de la signification du mot « total » qui a prévalu sur tout le reste de la phrase. Est-ce une question de contrat didactique ? Ce mot est introduit très vite en mathématiques comme terme spécifique, peut-être perçu par les élèves comme devant être utilisé chaque fois que se présente une addition de tous les « nombres » présents. Certaines fois, soit dans la pratique didactique quotidienne que dans certains cahiers d'opérations, on

---

[3] Selon nous, la compétence se base sur la connaissance assumée de manière significative et, pour qu'elle puisse être mise en jeu en situations ou contextes nouveaux, elle a besoin d'être exercée dans une ambience d'apprentissage stimulant qui développe la conscience de ce que l'on apprend et qui sollicite l'initiative, la créativité, la recherche de solutions pour surmonter des obstacles toujours nouveaux.

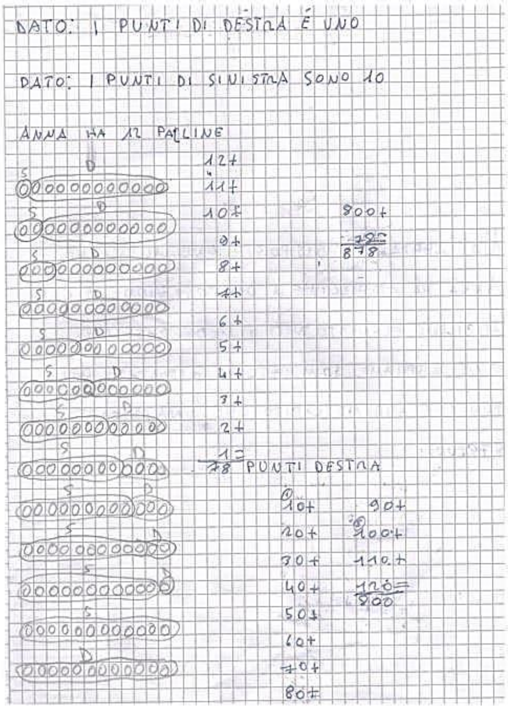
[4] Les points sont attribués selon des critères détaillés allant globalement de 0 (incompréhension du problème) à 4 (réponse correcte bien expliquée) en passant par 1 (début de résolution), 2 (réponse correcte sans explications) 3 (réponse correcte avec explications partielles ou peu claires). Pour plus de détails, voir Annexes.

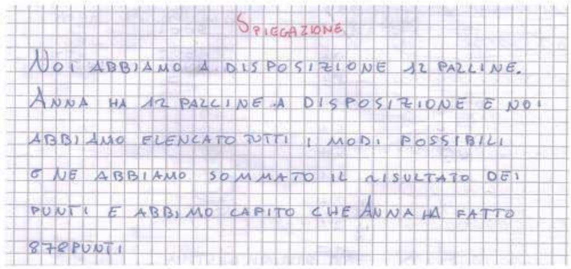
[5] Non seulement on doit connaître la signification des mots particuliers mais il est nécessaire de comprendre le sens de tout un discours par rapport au contexte décrit.

trouve de nombreuses pages qui stimulent la recherche de « mots à connotation mathématique » qui constituent des indices-clés pour exécuter des opérations déterminées qui n'ont rien avoir avec les relations à prendre en compte dans la résolution d'un problème. Ce sont plutôt de simples « accrochages » qui, malheureusement et très souvent, empêchent une réflexion ponctuelle et consciente.

En particulier l'expression italienne « punteggi totali » (points totaux) a été interprétée de façons diverses_

3. *Scores possibles dans un panier puis dans l'autre suivi du « total »*



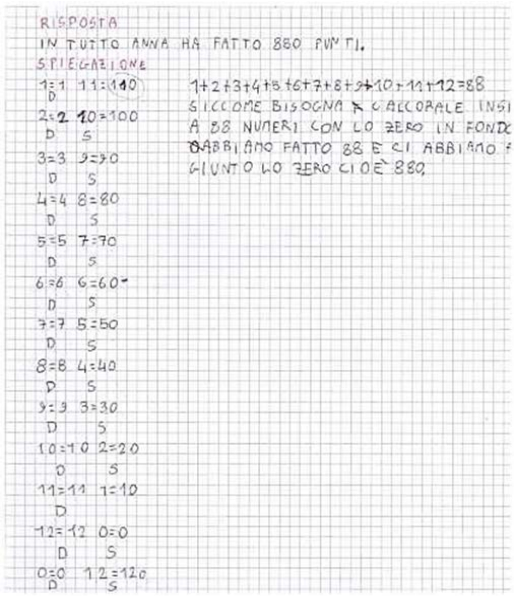


Nous avons 12 balles à disposition. Anna a 12 balles à disposition et nous avons fait l'inventaire de toutes les manières possibles et avons additionné le résultat des points et avons compris qu'Anna a fait 878 tirs.

La situation problématique est bien gérée et les élèves montrent une bonne capacité de représentation, mais ils perdent de vue l'objectif, le but du jeu : ils additionnent séparément les points possibles dans chaque des deux paniers, en font les totaux séparément et ensuite ils font le total des totaux, en se trompant parfois dans les additions.

En particulier, la somme 800 aurait dû être 780 par analogie avec la somme 78 ; ce qui montre une lacune dans la « positionnalité » des dizaines et unités.

Cette interprétation conduit au même nombre (858) con apparaître le même résultat pour cause d'erreurs ultérieures.



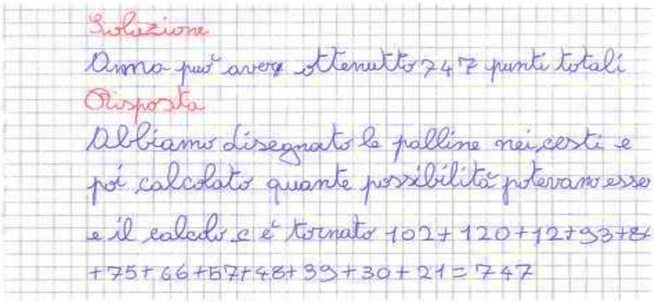
Cette représentation, plus « symbolique » (moins liée aux paniers et aux balles), montre une meilleure maîtrise de l'addition du point de vue de la valeur positionnelle des chiffres.

Dans le texte, on lit en effet :

« 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=88

puisqu'il faut calculer ensemble 88 nombres avec le zéro à la fin, nous avons fait 88 et avons ajouté le zéro, ce qui fait 880. (compte tenu de l'erreur : 88 au lieu de 78)

2 Total de tous les scores possibles

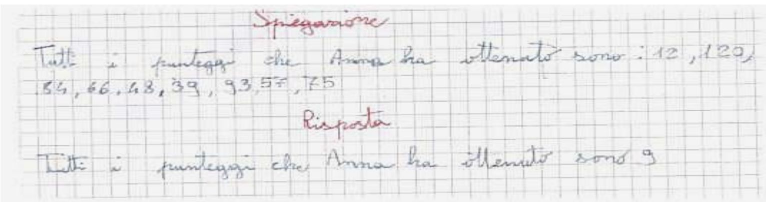

Soluzione
Anna può avere ottenuto 747 punti totali
Risposta
Abbiamo disegnato le palline nei cesti e
poi calcolato quante possibilità potevano esse
e il calcolo c'è tornato 102+120+12+93+84
+75+66+57+48+39+30+21=747

Solution
Anna peut obtenir 747points au total
Réponse
Nous avons dessiné les balles dans les paniers et calculé combien il pouvait avoir de possibilités et le calcul nous donne 102+120+12+93+84+75+66+57+48+99 +30+21=747

Ils n'oublient que le 111 [858-747=111] parmi tous les totaux possibles.

3 Nombre de tous les totaux possibles

La copie suivante montre clairement que les élèves ont compris que les *totaux que Anna peut avoir obtenus* sont le *total des points obtenus* (le fait qu'ils en oublient 4 est un autre problème, comme le fait de confondre explication *et réponse*) mais ils ont interprété l'expression *calculez tous les scores totaux* come *calculez le total* (compris comme nombre de scores).


Spiegazione
Tutti i punteggi che Anna ha ottenuto sono: 12, 120,
84, 66, 48, 39, 93, 57, 75
Risposta
Tutti i punteggi che Anna ha ottenuto sono 9

Explication
Tous les scores (punteggi) qu'Annaha obtenus sont: 12, 120, 84, 66, 39, 93, 57, 75
Réponse
Tous les scores que Anna a obtenus sont 9

Comme nous l'avons observé précédemment, la version française n'a pas eu ce problème d'interprétation parce que l'énoncé ne parle que de *totaux* (scores) et non de *« scores totaux »* (punteggi totali)

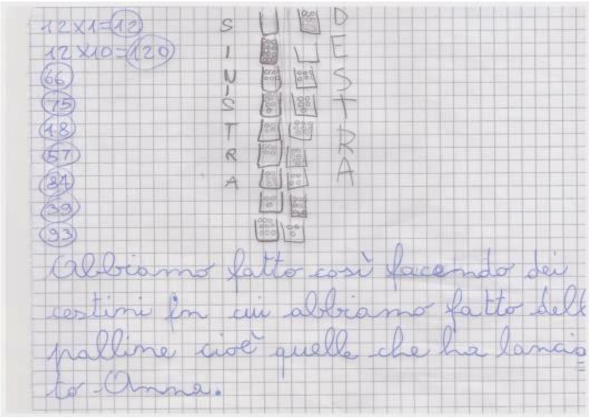
En se référant toujours à la signification des termes de la version italienne il aurait été plus clair aussi d'éviter les deux expressions *« total des points » et « points totaux »*.

Quelle expérience peuvent avoir les élèves avec les mots *« points totaux »* ? les jeux vidéo ? le sport ? Dans les classements les scores sont les totaux des points acquis dans chaque « partie ».

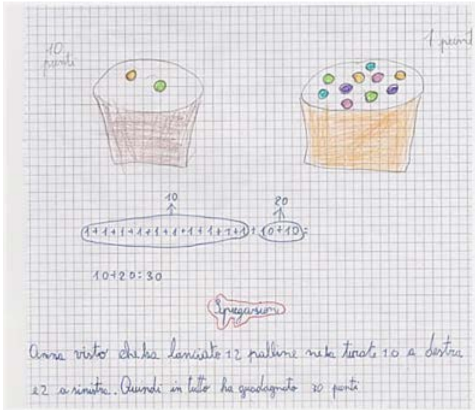
Le contexte de ce problème devait inviter à ne pas calculer les points acquis de chaque partie (lancer de 12 balles), mais combien de points aurait pu obtenir Anna dans l'unique partie jouée, sachant qu'elle ne manque jamais un panier, mais ne sachant pas le nombre de balles dans l'un et dans l'autre.

En référence au contrôle du nombre des balles et à la capacité d'organisation, les élèves se sont souvent perdus parce l'aspect représentatif domine : la mise en scène du contexte. Le langage graphique est important en mathématique mais doit être systématique et clair pour tous s'il doit évoluer du dessin réel strictement lié au contexte à un langage plus symbolique. Les élèves doivent, de toute manière, vivre en personne les phases de cette évolution. Par exemple, une stratégie possible permettant de développer cette capacité, est celle de prendre l'habitude, en classe, de demander aux élèves de décrire à leurs camarades et à l'enseignant leurs choix de représentations graphiques dans l'exécution de leur tâche de résolution.

Les deux exemples suivants se réfèrent à l'organisation de la recherche et représentation : dans le premier on note une non-organisation, dans le second un appel excessif au dessin (il faut du temps pour dessiner) qui fait perdre de vue l'objectif :

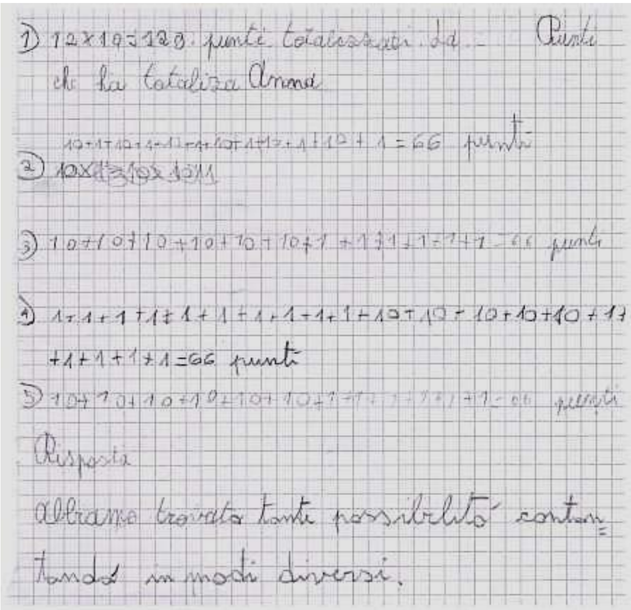


Nous avons fait des paniers dans lesquels nous avons mis les balles qu'Anna a lancées.



Vu que Anna a lancé 12 balles, elle en a tiré 10 à droite et 2 à gauche. Elle a ainsi gagné 30 points

L'inventaire des totaux possibles demande une bonne structuration des sommes, composées chacune de 12 termes 1 et/ou 10. Cette organisation doit prévoir tous les cas possibles et une manière de les dénombrer, en tenant compte de la commutativité de l'addition[6]. Cette propriété est présentée très tôt à l'école primaire, avec le risque de devenir un stéréotype vide ; la copie suivante, qui n'est pas l'unique de ce type, montre que cette *compétence* n'est non seulement pas acquise, mais constitue plutôt un obstacle.



1) *12x10=120 : Points qu'Anna a totalisés*
   10+1+10+1+10+1+10+1+10+1+10+1=66 points
2) *(effacé)*
3) *10+10+10+10+10+10+1+1+1+1+1+1 =66 points*
4) *1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+10+10 +10+10+ 10+1+1+1+1+1+1=66 points*
5) *10+10+10+10+10+10+1+1+1+1+1+1 =66 points*

Réponse

Nous avons trouvé tant de possibilités en les comptant de manières différentes.

Trop souvent le contrat didactique *élève-enseignant* incite les élèves à donner des réponses sans expliquer le processus qui les a conduits à les obtenir, parce que l'enseignant n'en a pas besoin : il « *sait* ».

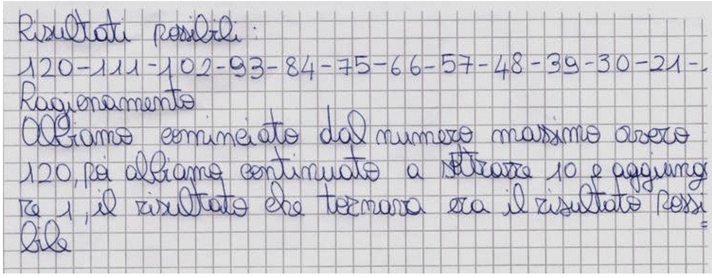
Il est en revanche fondamental, qu'ils s'habituent à « communiquer » leur pensée et leurs manières d'opérer de façon claire et exhaustive, sans que l'enseignant doive ajouter ses « *propres savoirs* » pour les interpréter. C'est précisément dans cet effort de communication que l'élève clarifie, pour lui-même en premier lieu[7], les idées et, ensuite, développe graduellement le concept de démonstration pour en comprendre le rôle fondamental, et non seulement en mathématiques !

[6] Il y a 924 séquences dont la somme est 66 points, il suffit de calculer les permutations de 12 objets dont 6 sont égaux entre eux et les 6 autres aussi égaux entre eux (il y en a 4 dans la copie qui suit).

[7] Pour combien d'entre nous certains concepts ne se sont clarifiés que lorsque nous avons dû les expliquer à d'autres!

Il est aussi important que les enseignants demandent à leurs élèves des explications claires de leurs raisonnements et de leurs convictions, puisque c'est de cette façon qu'ils seront en mesure de revenir sur une éventuelle erreur ou de reconnaître l'obstacle rencontré dans leur stratégie résolutive.

Nous donnons ici un exemple de *langage clair seulement pour « qui sait »*.



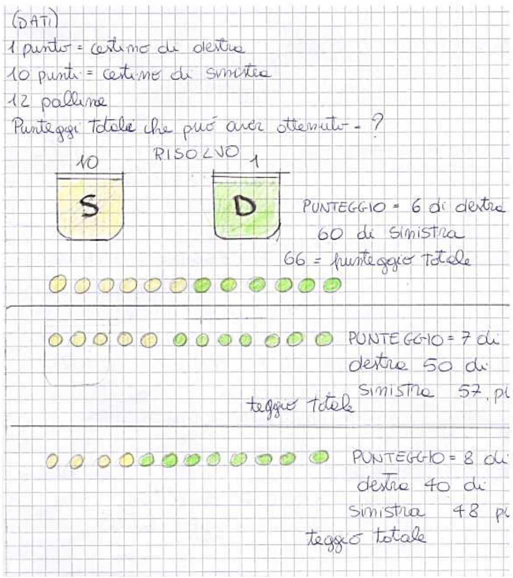
Résultats possibles :
120-111-102-93-84-75-66-57-48-39-30-21-12
Raisonnement
Nous avons commencé par le nombre maximum, 120, puis nous avons continué à soustraire 10 et ajouter 1, le résultat obtenu était le résultat possible.

L'explication ne reprend pas le cheminement du raisonnement suivi, qui pourrait être du type :

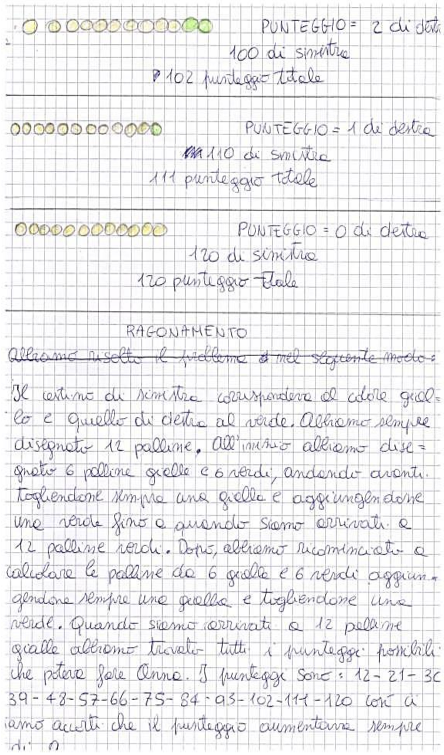
- on suppose toutes les balles dans le panier de droite : plus grand résultat réalisable ;
- on enlève une balle du panier de droite et on la met dans celui de gauche (le nombre des balles doit rester toujours 12), ceci équivaut à enlever 10 points et en ajouter 1 (c'est-à-dire à enlever 9 points) ;
- on continue ainsi toujours en enlevant une balle du panier de droite en la mettant dans celui de gauche jusqu'à arriver à 12 billes dans le panier de gauche : j'obtiens le minimum de points.

D'après ce que les élèves ont écrit on ne comprend pas s'ils ont raisonné de cette façon ou s'ils ont perçu une régularité et en ont fait l'observation à la fin, après avoir trouvé les solutions par une autre voie.

Nous pouvons confronter cette dernière copie avec la suivante dans laquelle le langage utilisé et les explications fournies sont adressées aussi à *« qui ne sait pas »* !



Le panier de gauche est jaune et celui de droite est vert. Nous avons toujours dessiné 12 balles. Au début nous avons dessiné 6 balles jaunes et 6 vertes, puis nous avons continué à retirer toujours une jaune et ajouter une verte jusqu'à être arrivés à 12 balles vertes. Après, nous avons recommencé à calculer les balles depuis 6 jaunes et 6 vertes en ajoutant toujours une jaune et retirant une verte.

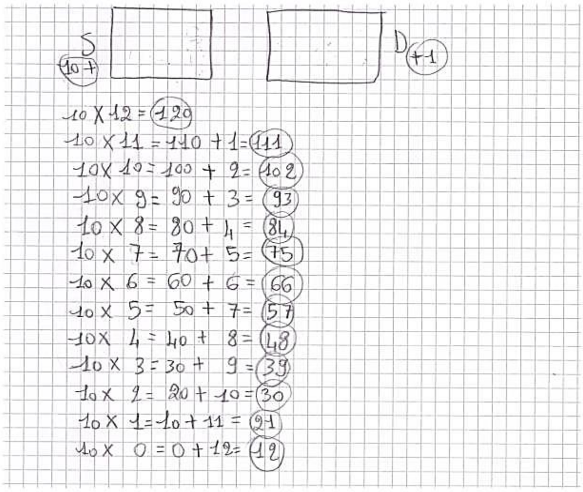


Quand nous sommes arrivés à 12 balles jaunes nous avons trouvé tous les points possibles que pouvait faire Anna. Les points sont 12-21-30-39-48-57-66-75-84-93-102-111-120 nous nous sommes rendu compte que les points augmentés de 9.

L’usage de deux couleurs différentes pour les deux paniers et les balles correspondantes rend encore plus claire leur explication, le domaine de la situation problématique, atteint aussi par l’engagement de clarté des explications, leur permet de porter l’attention sur les régularités.

Dans les copies suivantes on voit encore des exemples d’écritures adressées à « *celui qui sait »*, la copie de gauche montre l’utilisation d’un symbolisme qui permet d’être synthétique, mais « *celui qui ne sait pas »* peut-il le comprendre *?*

De la copie de droite on comprend que la situation a été bien maîtrisée (de manière très organisée qui permet de ne pas oublier de solutions), mais les explications nécessaires pour « *celui qui ne sait pas »* manquent complètement, le langage utilisé est symbolique, avec des erreurs : les égalités écrites sont toutes fausses.



Il y a aussi une copie, encore plus synthétique où les élèves ont écrit seulement :

« *Anna pourrait avoir obtenu n’importe quels points totaux » plus grands que 12 et plus petits que 120* et n’ont pas pris la peine de les écrire tous !

2. De l’analyse a posteriori aux propositions du groupe de travail

Après avoir partagé les observations et les commentaires extraits des analyses à posteriori conduites par les membres de notre groupe de travail (en faisant référence aux copies provenant de leur section que nous avons citées dans le paragraphe précédent), nous avons cherché d'apporter des modifications au texte original de façon à le rendre le plus clair possible, à la lumière des interprétations apparues. La présence de trois chercheurs de langue française dans le groupe a favorisé la comparaison entre les versions italienne et française : parfois les *expressions* différentes dues à la langue (on ne peut pas traduire mot à mot) ont créé des *nuances* dans leur signification et, par conséquent, des obstacles d’interprétations différentes.

Nous n’avons pas toujours été tout de suite d'accord au sein du groupe sur les propositions de modification du texte, mais ceci a contribué à enrichir la discussion.

Parmi les désaccords il y a eu ceux qui se rapportent à le longueur et au langage du texte : quelques enseignants du groupe pensent qu’il est trop long et qu'on doit le réduire, pour d’autres la longueur ne gêne pas parce que le contexte de jeu favorise la compréhension ; l’usage de l'adjectif indéfini *chacun* semble difficile pour la compréhension, du moment que cet adjectif est moins utilisé oralement ; parler de total des points et de scores totaux a paru peu judicieux et, à ce propos on a constaté que dans le texte français, dans lequel il n'y avait pas cette ambiguïté car on parlait seulement de points, il n'y a pas eu d’interprétations erronées.

Dans la version française la phrase dont la version italienne se traduirait mot à mot par « *Anna lance 12 balles et aucune d’entre elles ne manque les paniers »* est traduite par Anna *lance 12 balles et chaque balle arrive dans l’un ou l’autre des deux paniers*.

Ne s’agit-il que d’une *nuance,* une autre façon de dire la même chose pourrait-on penser ? Mais il n’en est rien.

A priori la version française pourrait sembler plus simple parce que la phrase est sous forme positive, alors qu’en fait elle induit en erreur. La phrase positive introduit le connecteur « ou » que les élèves ont des difficultés à interpréter. Il est plus facile d’imaginer qu’aucune balle manque le panier plutôt que toutes y entrent.

A la fin du débat, c’est l’énoncé suivant qui a été rédigé, sur lequel on s’accorde selon une expérimentation dans plusieurs classes de catégories différentes.

Lancers dans des paniers – nouvelle version
En éducation physique, l'enseignante propose un nouveau jeu aux enfants : lancer des balles de tennis dans deux paniers placés l'un à côté de l'autre.
Si la balle entre dans le panier de droite, on gagne 1 point ; si en revanche elle entre dans le panier de gauche, on gagne 10 points.
Anna lance 12 balles et aucune d'entre elles ne manque les paniers, puis elle calcule son total de points.
Quels sont les totaux qu'Anna peut avoir obtenus ?
Montrez toutes les possibilités et comment vous avez trouvé.

De cette manière on a éliminé : l'adjectif *chacun* et la phrase impersonnelle, l'usage du futur (tenant compte du fait que gérer le facteur temps peut créer un problème). En plus dans la version italienne on a éliminé l'ambiguïté des deux termes, *points et « punteggi »*, voisins mais de significations différentes même s'il ne s'agit que de *nuances,* et le terme « *totale* » qui accompagnait « punteggi » qui peut évoquer la nécessité d'additionner plusieurs termes. En revanche l'importance des inversions à la fin des phrases a été confirmée et le conditionnel de la demande conservé pour inciter les élèves à la recherche de plusieurs solutions.

Le groupe s'est accordé sur l'expérimentation suivante : proposer le problème dans sa nouvelle version en clases de catégorie 3 (où les élèves travaillent par deux), recueillir et enregistrer les résultats.

3. Le problème *Sac de haricots*

SAC DE HARICOTS (Cat. 8, 9, 10)
Marc demande à son ami Charles le nombre exact de haricots contenus dans un grand sac, sachant que :
- le nombre cherché est compris entre 1400 et 1700 ;
- si on regroupe les haricots par 2, il en reste un ;
- si on regroupe les haricots par paquets de 3, il n'en reste pas ;
- si on regroupe les haricots par paquets de 5, il faudrait 3 autres haricots pour compléter le dernier paquet ;
- si on regroupe les haricots par paquets de 7, il reste 5 haricots.

Quel est le nombre de haricots contenus dans le grand sac ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

BARATTOLO DI FAGIOLI (Cat. 8, 9, 10)
Marco chiede al suo amico Carlo il numero esatto di fagioli contenuti in un barattolo di vetro, sapendo che:
- il numero cercato è compreso fra 1400 e 1700;
- se si raggruppano i fagioli per 2 ne avanza sempre uno;
- se si raggruppano i fagioli per 3, i mucchietti formati sono completi;
- se si raggruppano i fagioli per 5 ci vorrebbero altri 3 fagioli per completare i mucchietti;
- se si raggruppano i fagioli per 7 alla fine avanzano 5 fagioli.

Qual è il numero dei fagioli contenuti nel barattolo ?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Ce problème s'adresse à des catégories plus hautes que le précédent parce que, bien que les concepts en jeu soient du niveau de l'école primaire, la décodification demande une maturité plus élevée des capacités. Les résultats plutôt décevants montrent, encore une fois, que les concepts de multiple, diviseur, reste de la division euclidienne, fondamentaux en arithmétique, ne sont pas acquis même dans les catégories plus élevées.

Les tableaux suivants donnent la statistique des points attribués sur l'ensemble les sections du RMT :

points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 8	346	194	70	85	78	773	1.2
Cat. 9	59	46	15	24	41	185	1.7
Cat. 10	53	37	11	21	40	162	1.7
tot	**458**	**277**	**96**	**130**	**159**	**1120**	**1.3**

en %					
Cat. 8	45%	25%	9%	11%	10%
Cat. 9	32%	25%	8%	13%	22%
Cat. 10	33%	23%	7%	13%	25%
tot	41%	25%	9%	12%	14%

Sur la base des compétences que les élèves doivent mobiliser nous avons cherché, aussi dans ce cas, d'expliciter la tâche mathématique exigée : déterminer l'unique nombre compris entre 1400 et 1700, sachant que les restes des divisions de ce nombre par 2, 3, 5 et 7 sont respectivement 1, 0, 2 et 5.

L'énoncé ne semble pas difficile grâce à sa structure sous forme d'inventaire, cependant, dans ce cas aussi, il y a des différences entre les versions italienne et française, cette dernière, selon l'avis de tous les membres du groupe, étant beaucoup plus claire :

- (italien) « *si on regroupe les haricots par 2 il en reste toujours un »,* l'adverbe « *toujours* » n'est pas présent en français, il est en effet superflu et peut déranger ;
- « *avanzare* » est toujours traduit en français par « *rester »* qui fait tout de suite penser au reste d'une division ; en italien « *avanzare* » a plusieurs significations, propres et figurées, parfois aussi opposées entre elles, à considérer selon le contexte : peut indiquer ce qui est en trop ou en surabondance, mais aussi, en langue parlée et dans quelques contextes monétaires, comme ce qu'on doit à quelqu'un, se rapprochant de l'idée de complémentaire du reste.
- « *se si raggruppano i fagioli per 5 ci vorrebbero altri 3 fagioli per completare i mucchietti,* devient en français : *« si on regroupe les haricots par paquets de 5, il faudrait 3 autres haricots pour compléter le dernier paquet ;* cette expression est plus claire car elle évoque l'image du dernier paquet, dans la partition de 5 en 5, qui est incomplet à cause des 3 haricots qui manquent et par conséquent n'est constitué que de 2 haricots ;
- "*se si raggruppano i fagioli per 7 alla fine avanzano 5 fagioli* ; en français les termes « *à la fin* » inutiles, ne sont pas présents.

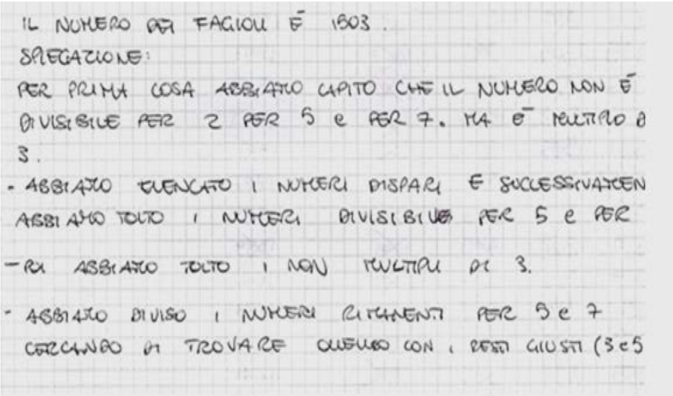
L'obstacle majeur pour la résolution de ce problème a été celui de devoir maîtriser le concept de division avec reste en présence de deux expressions différentes indiquant le reste de la division elle-même : reste comme quantité qui « reste » et reste à découvrir par la reconnaissance de son complémentaire. Cet obstacle, voulu a priori, a justement mis en évidence ce qu'on craignait : peu de « souplesse » sur la compréhension du « reste ».

Tant l'énoncé (… *le nombre exact …)* que la demande (*Quel est le nombre…)* vont en direction d'une solution unique. En effet les élèves ont toujours donné une solution unique mais le doute subsiste : ont-ils bien compris la signification de cette expression, ou se sont-ils arrêtés à la première solution trouvée. Ce doute est fondé parce que dans tous les cas d'interprétation erronée d'une ou deux des conditions 4 et 5, il y aurait eu deux solutions.

Dans le cas de l'interprétation de la quatrième condition avec « 3 » compris comme reste et non comme son complémentaire, les solutions seraient ***1503*** e ***1608***[8]. On retrouve ces deux nombres dans les copies examinées, mais le 1503 apparaît plus fréquemment, probablement parce qu'il est le premier à être découvert.

La copie suivante en donne un exemple :

[8] Il suffit de chercher les multiples de 3 compris entre 1400 et 1700 dont le chiffre des unités est 3 ou 8 (multiples di 5 plus 3 unités) qui, divisés par 7 ont un reste de 5 (1413, 1428, …+$_{15}$…).



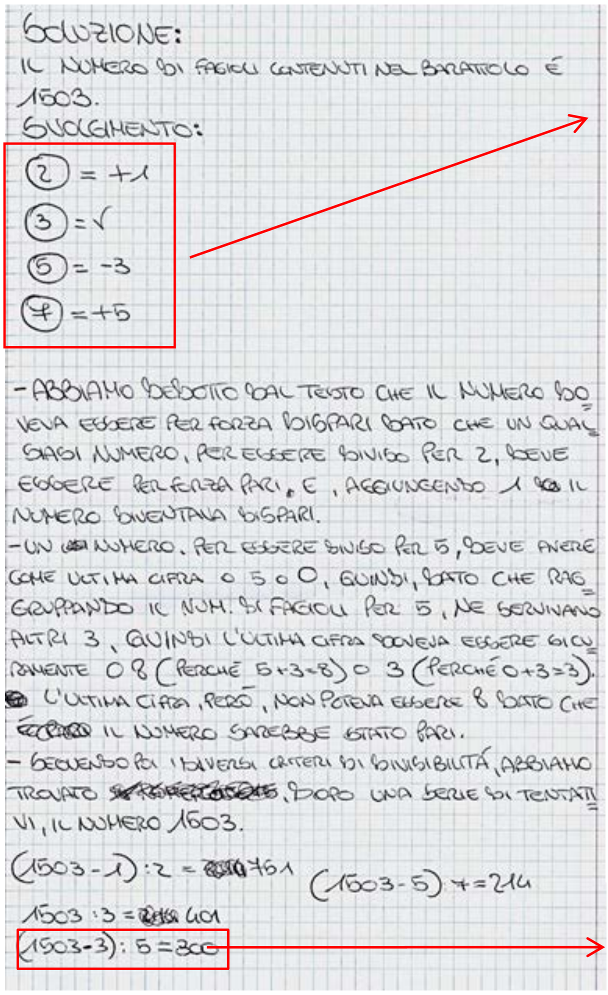
Le nombre des haricots est 1503.

Explications

En premier nous avons compris que le nombre n'est pas divisible par 2 par 5 et par 7. Mais est multiple de 3.

- *Nous avons fait la liste des nombres impairs et ensuite nous avons retiré les nombres divisibles par 5 et par 7*
- *Et nous avons retiré les non multiples de 3.*
- *Nous avons divisé les nombres restants par 5 et 7 en cherchant ceux avec les restes justes (3 e 5)*

La copie suivante est intéressante aussi du point de vue de la communication :

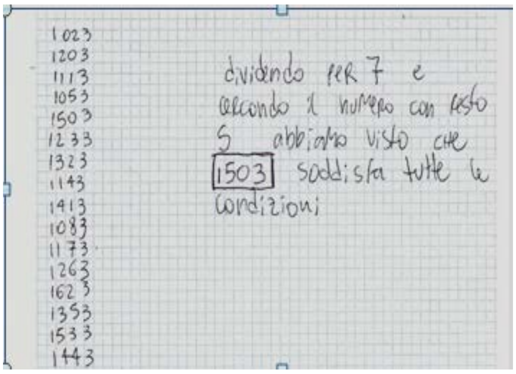


langage symbolique et incorect, même si *celui qui sait* peut l'interpréter :
- il y a 1 haricot de plus pour avoir un multiple de 2,
- c'est un multiple di 3,
- il manque 3 haricots pour avoir un multiple de 5
- il y a 5 haricots de plus pour avoir un multiple de 7"

- *Nous avons déduit de l'énoncé que le nombre devait être impair vu que n'importe quel nombre doit être pair pour être divisé par 2, et en ajoutant 1 le nombre devient impair.*
- *Un nombre, pour être divisé par 5 doit avoir 5 ou 0 comme dernier chiffre, donc, vu qu'en groupant les haricots par 5, il en faut 3 autres, donc le dernier chiffre doit être sûrement ou 8 (parce que 5+3= 8) ou 3 (parce que 0+3= 3).*
- *Mais le dernier chiffre, ne pouvait pas être 8 vu que le nombre aurait été pair.*
- *Ensuite selon les différents critères de divisibilité, nous avons trouvé le nombre 1503 après une série d'essais.*

selon leur *«traduction»* précédente ils auraient dû additionner 3 plutôt que le soustraire

On note que, comme il arrive souvent, les explications de la stratégie utilisée pour arriver à la solution ne sont qu'une vérification : 1503 selon eux satisfait toutes les conditions imposées. En particulier, dans la copie suivante de catégorie 10 on observe la notation symbolique, tout à fait inappropriée, et des insuffisances dans la rédaction et dans le contrôle de l'inventaire des nombres possibles.



Le nombre x cherché doit être:

impair parce que $\frac{1}{2}x = n + 1$ $\;n \in N$ *nombres entiers naturels*

divisible par 3 parce que $\frac{1}{3}x = n$ $\quad n \in N$

le dernier chiffre égal à 3 parce que $\frac{1}{5}\mathrm{x} = \mathrm{n} + 3$

$\frac{1}{5}x =$ *a un nombre se terminant par 0 ou 5* ➔ *ajoutant 3 il se termine par 3 ou 8 mais 8 est pair et alors pour la première condition ça ne va pas .* ➔ *3*

1400 < x < 1700

$\frac{1}{7}\mathrm{x} = \mathrm{n} + 3$

Selon les quatre premières conditions les chiffres possibles sont :

1023 1203 1113 1053 1503 1233 1323 1143 1413 1083 1173 1263 1623 1353 1533 1443

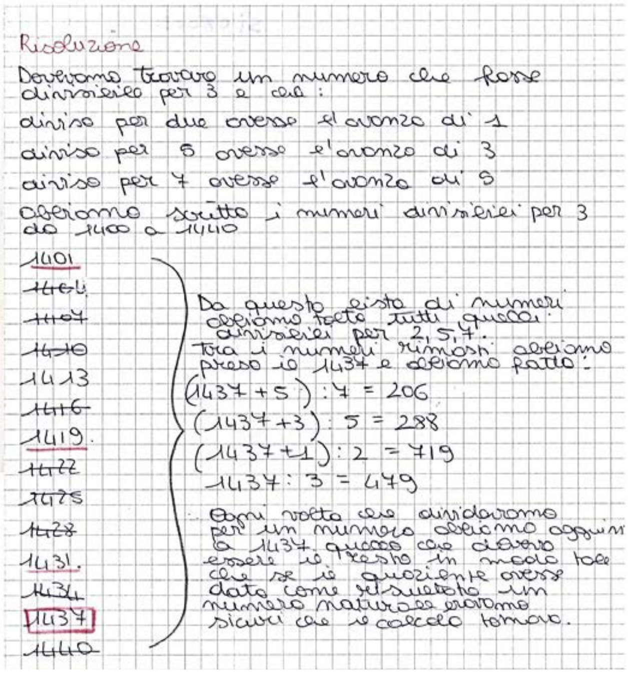
En divisant par 7 et cherchant le nombre avec un reste de 5 nous avons vu que 1503 satisfait toutes les conditions.

La notation symbolique utilisée par le groupe est seulement « sténographique », dans le sens qu'il s'agit d'une manière de reporter les résultats. Les étudiants ne se rendent pas compte que cette écriture est incorrecte : le symbole « *n* » devrait représenter toujours la même quantité. Ils abandonnent cette traduction *algébrique,* non gérable et fournissent un inventaire des nombres hors de propos mais qui, réexaminé a posteriori, nous donne quelques informations intéressantes :

- Le reste 1 de la division par 2 donne les nombres impairs qui, interprétant la quatrième condition dans le sens « 3 est le reste », doivent tous se terminer par 3 ;
- L'intervalle indiqué n'est pas très important, quelques contraintes moins importantes peuvent être ignorées ;
- L'algorithme de la divisibilité par 3 est connu.

Il est intéressant de montrer la copie suivante, de catégorie 8 où les élèves sentent le besoin de traduire dans un autre langage les données de l'énoncé et commettent l'erreur classique d'interprétation de la quatrième condition comme si le reste de la division par 5 était 3. Mais non seulement, ils commettent encore une autre erreur qui les conduit en définitive à trouver *un nombre dont le reste est 2, dans la division par 5 comme dans celle par 7.*

Avec cette interprétation incorrecte, il y aurait aussi deux solutions. En effet, « le nombre cherché *n* aurait pu être exprimé par *n =35k + 2* pour un certain *k* et, dans l'intervalle *1400 - 1700*, avec *n* impair et multiple de 3, il y a deux valeurs possibles de *k* : *41*et *47* desquelles on tire les solutions *n :* ***1437*** et ***1647***.



On devait trouver un nombre qui soit divisible par 3 et qui :
divisé par 2 aurait un reste de 1
divisé par 5 aurait un reste de 3
divisé par 7 aurait un reste de 5
Nous avons écrit les nombres divisibles par 3 de 1400 ä 1440
De cette liste de nombres nous avons retiré ceux divisibles par 2, 5, et 7.
Parmi les nombres restants nous avons pris le 1437 et nous avons fait :
(1437 + 5) : 7= 206
(1437 + 3) : 5= 288
(1437 + 1) : 2= 719
1437 : 3 = 479
Chaque fois que nous divisions par un nombre nous avons ajouté à 1437 ce qui devait être le reste de manière que si le quotient avait donné un nombre naturel comme résultat nous étions sûrs que le calcul était correct.

La traduction « opérative » de leur interprétation aurait dû être :

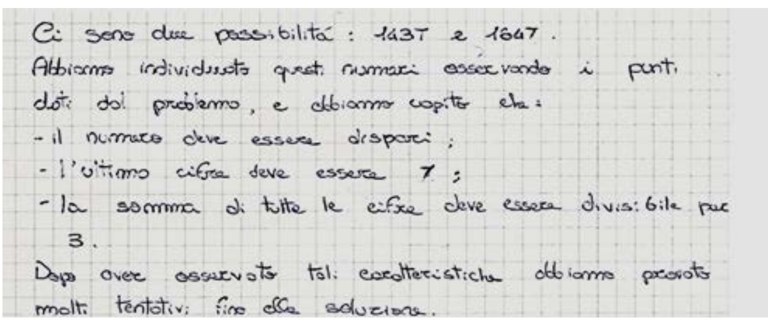
Divisé par 2 aurait un reste de 1	*(1437 - 1) : 2 (ou (1437 + 1) : 2) est un nombre entier*
Divisé par 5 aurait un reste de 3	*(1437 - 3) : 5 est un nombre entier*
Divisé par 7 aurait un reste de 5	*(1437 - 3) : 5 est un nombre entier*

alors qu'ils traduisent :

(1437 + 1) : 2 *est un nombre entier*
(1437 + 3) : 5 *est un nombre entier*
(1437 + 5) : 7 *est un nombre entier*

ce qui signifie qu'ils cherchent, sans s'en rendre compte, un nombre qui soit impair, qui augmenté de 3 soit un multiple de 5 et qui augmenté de 5 soit un multiple de 7, c'est-à-dire un nombre qui ait un reste dans la division soit par 5 que par 7[9].

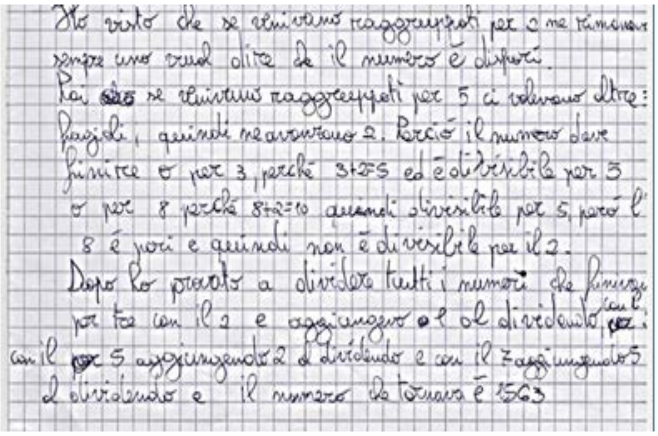
Dans la copie suivante on trouve à la fois les solutions dues à l'interprétation erronée des conditions 4 et 5, comme « reste 2 dans la division soit par 5 que par 7 ». L'explication fournie n'aide pas la compréhension et, en plus, ne favorise même pas celui qui doit trouver l'erreur dans le raisonnement qui la suit : les passages décrits sont plus des « sentences » que des explications. Du point de vue de la communication nous pouvons dire que l'explication fournie n'aide ni « *celui qui ne sait pas* », ni « *celui qui sait* ».



Il y a deux possibilités : 1437 et 1647. Nous avons trouvé des nombres en observant les données du problème, et nous avons compris que :
- le nombre doit être impair ;
- le dernier chiffre doit être 7 ;
- la somme de tous les chiffres doit être divisible par 3.
Après avoir observé ces caractéristiques nous avons essayé de nombreuses tentatives jusqu'à la solution.

[9] Dans ce cas, ils interprètent bien la 4° condition, la plus difficile, mais ils font une confusion sur la dernière : peut-être la présence des nombres 7 et 5, dont la différence est 2, comme 2 était la différence entre 5 et 3, les a trompés.

Parmi les autres copies, il y en a aussi qui interprètent « à l'envers » [10] la quatrième et la cinquième conditions et donnent comme réponse 1563, nombre qui divisé par 5 a un reste de 3 et divisé par 7 a un reste de 2. En voici un exemple :



Ho visto che se venivano raggruppati per 2 me rimaneva sempre uno quindi vuol dire che il numero è dispari.
Poi se venivano raggruppati per 5 ci volevano altri 3 fagioli, quindi ne avanzavano 2. Perciò il numero deve finire o per 3, perché 3+2=5 ed è divisibile per 5 o per 8 perché 8+2=10 quindi divisibile per 5, però l'8 è pari e quindi non è divisibile per il 2.
Dopo ho provato a dividere tutti i numeri che finivano per tre con il 2 e aggiungevo 1 al dividendo, con il 5 aggiungendo 2 al dividendo e con il 7 aggiungendo 5 al dividendo e il numero che tornava è 1563

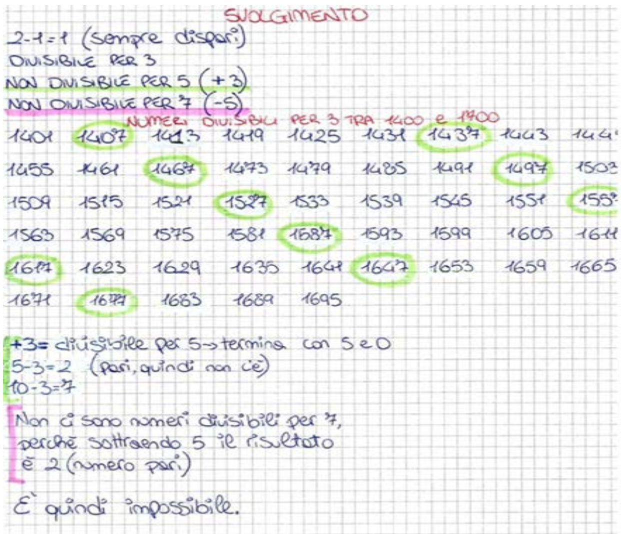
J'ai vu que s'ils sont regroupés par 2 il en reste toujours 1 ce qui veut dire que le nombre est impair.

Puis regroupés par 5 il faut 3 autres haricots donc il en reste 2. Ainsi le nombre doit finir ou par 3, parce que 3+2=5 et est divisible par 3 ou par 8 parce que 8+2=10, donc divisible par 5, mais le 8 est pair et par conséquent il n'est pas divisible par le 2.

Après j'ai essayé de diviser tous les nombres qui se terminaient par 2 par trois avec le 2 et ajoutant 1 au dividende, avec le 5 ajoutant 2 au dividende et avec le 7 ajoutant 5 au dividende et le nombre qui allait est 1563.

Avec cette interprétation il aurait dû y avoir deux solutions : 1493 e 1563.

Il y en a aussi qui, devant la difficulté de gérer le reste, répondent que le problème est impossible !



SVOLGIMENTO
2-1=1 (sempre dispari)
DIVISIBILE PER 3
NON DIVISIBILE PER 5 (+3)
NON DIVISIBILE PER 7 (-5)
NUMERI DIVISIBILI PER 3 TRA 1400 E 1700

1401	1407	1413	1419	1425	1431	1437	1443	1449
1455	1461	1467	1473	1479	1485	1491	1497	1503
1509	1515	1521	1527	1533	1539	1545	1551	1557
1563	1569	1575	1581	1587	1593	1599	1605	1611
1617	1623	1629	1635	1641	1647	1653	1659	1665
1671	1677	1683	1689	1695				

+3= divisibile per 5 → termina con 5 e 0
5-3=2 (pari, quindi non c'è)
10-3=7
Non ci sono numeri divisibili per 7, perché sottraendo 5 il risultato è 2 (numero pari)
È quindi impossibile.

Déroulement
2-1=1 toujours impair)
divisible per 3
Non divisible par 5 (+3)
Non divisible per 7 (-5)
Nombres divisibles par 3 entre 1400 et 1700
(les entourent: *1407-1437-1467-1497-1527-1557- 1587-1617-1647-1677*)
+3= divisible par 5 → se terminent parc5 te 0
5-3=2 (pair, donc il n'y en a pas)
10-3=7
Il n'y a pas de nombres divisibles par 7, parce que soustrayant 5 le résultat est 2 (nombre pair)
Et donc impossible.

C'est dommage parce que ces élèves ont compris que le nombre devait se terminer par 7, mais se sont trompés parce que 5 est ce qui reste à la fin du nombre divisé par 7. Ils ont compris à l'instant mais ne l'ont pas conservé au moment opportun.

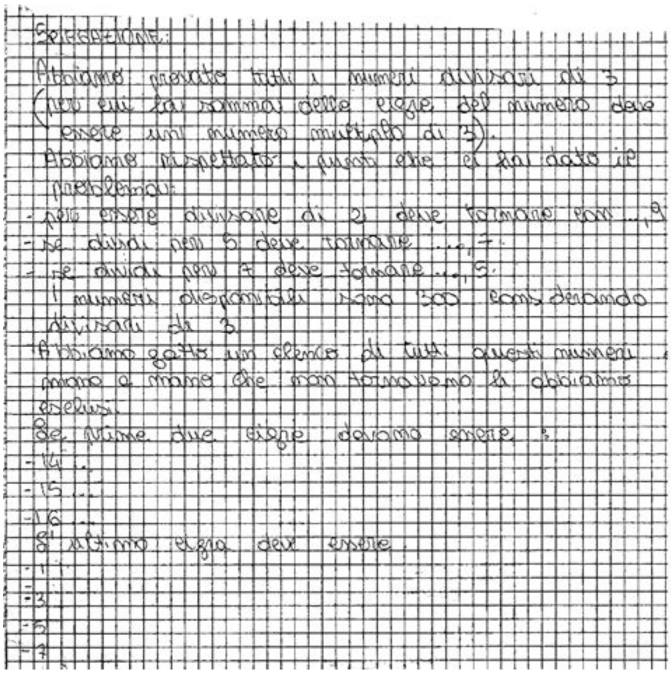
Les trois copies suivantes sont intéressantes, toutes de catégorie 8. L'usage erroné de la virgule dans la gestion du reste de la division conduit à considérer des « dixièmes de haricots ». Probablement l'emploi systématique de la calculatrice fait perdre de vue la signification complète de la division.

Dans la première les élèves ont peut-être interprété le reste r de la division comme ce qui manque, en termes de dixièmes, pour avoir un quotient entier :

- « divisé par 2 il reste 1 haricot » est interprété comme *il manque 9 dixièmes pour avoir le nombre entier* et on ajoute 0,9 au quotient obtenu (de trois chiffres de sa partie entière). (Dans la division par 2 il reste 1 haricot ou manque 1 haricot sont deux expressions analogues) ;
- « divisé par 5 il manque 3 haricots » est interprété comme *il manque 7 dixièmes pour avoir le nombre entier* et on ajoute 0,7 au quotient obtenu ;

[10] "si on regroupe les haricots par paquets de 5, il faudrait 3 autres haricots pour compléter le dernier paquet ; si on regroupe les haricots par paquets de 7, il reste 5 haricots. C'est comme dire chercher un nombre qui divisé par 5 a un reste de 3 et divisé par 7 a un reste de 2.

- « divisé par 7 il manque 5 haricots » est interprété comme *il manque 5 dixièmes pour avoir le nombre entier* et on ajoute 0,5 au quotient obtenu ;



Explication

Nous avons essayé tous les nombres diviseurs de 3 (pour qui la somme des chiffres du nombre doit être un nombre multiple de 3).

Nous avons respecté les points que nous a donnés le problème:

- pour être diviseur de 2 il doit être comme …,9

-si il se divise par 5 il doit être …,7

- si il se divise par 7 il doit être …,5

Il y a 300 nombres disponibles considérant les diviseurs de 3.

Nous avons fait une liste de tous ces nombres et au fur et à mesure qu'ils n'allaient pas nous les avons exclus.

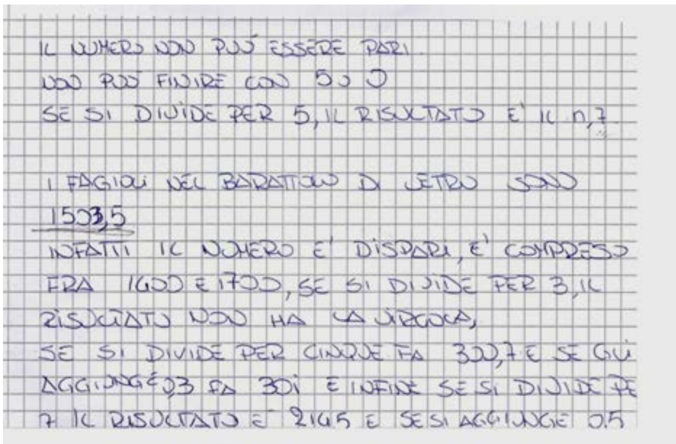
Les deux premiers chiffres doivent être:

14 … 15 … 16…

Le dernier chiffre doit être :

1 3 5 7

Dans la deuxième on calcule en fait les dixièmes de haricots



Le nombre ne peut pas être pair

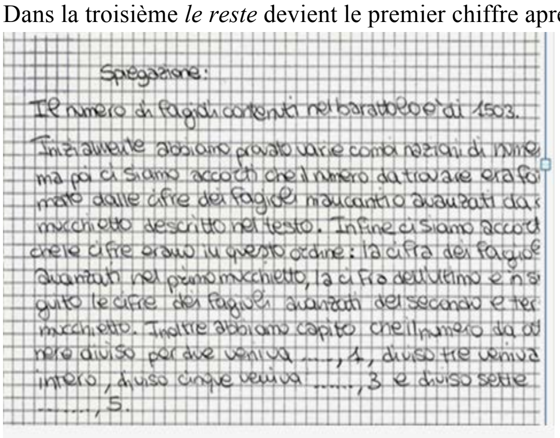
Il ne peut finir par 5 ou 0

Si on le divise par 5, le résultat est n,7

Il y a <u>1503,5</u> haricots dans le sac

En fait, le nombre est impair et compris entre 1400 et 1700, si on le divise par 3, le résultat n'a pas de virgule, si on le divise par cinq cela fait 300,7 et si on ajoute 0,3 cela fait 301et enfin si on le divise par 7 le résultat est 214,5 et si on ajoute 0,5 cela fait 215.

Dans la troisième *le reste* devient le premier chiffre après la virgule dans l'écriture décimale du nombre cherché :



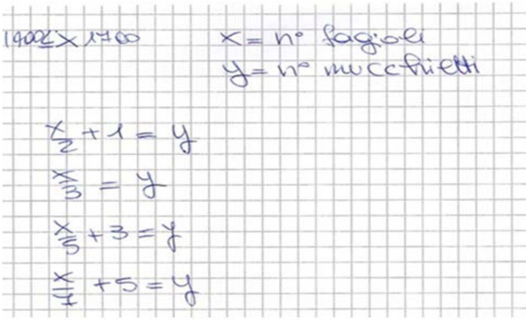
Explication

Il y a 1503 haricots dans le sac.

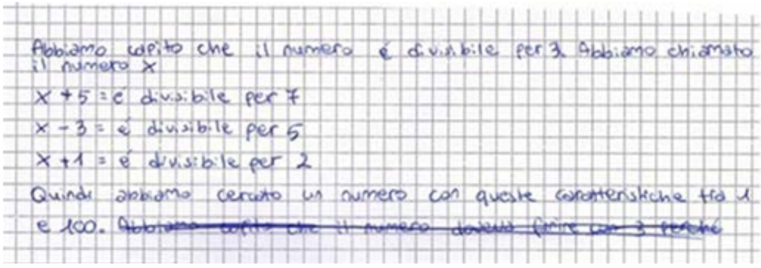
Initialement nous avons essayé différentes combinaisons mais nous nous sommes rendu compte que le nombre à trouver était formé des chiffres des haricots manquants ou restants de chaque paquet décrit dans l'énoncé. Enfin nous nous sommes rendu compte que les chiffres étaient dans cet ordre : le chiffre des haricots restants dans le premier paquet, le chiffre du dernier et ensuite le chiffre des haricots restants dans les deuxième et troisième paquets. Nous avons en outre compris que le nombre à obtenir divisé par deux était…,1, divisé par trois était entier, divisé par cinq était ….,3 et divisé par sept ….,5.

Dans cette dernière copie il faut aussi relever l'usage indifférent de *« chiffre »* - *« nombre »* et *« il faudrait encore »* - *« rester »,*

En catégorie 10 on trouve d'autres exemples d'utilisation de l'algèbre, mais mal gérés :



Les élèves ne se rendent pas compte que le *y* de chaque division est toujours différent !



Nous avons compris que le nombre est divisible par 3. Nous avons appelé le nombre x
x + 5 = est divisible par 7
x – 3 = est divisible par 5
x + 1 = est divisible par 2
Nous avons donc cherché un nombre avec ces caractéristiques entre 1 et 100.

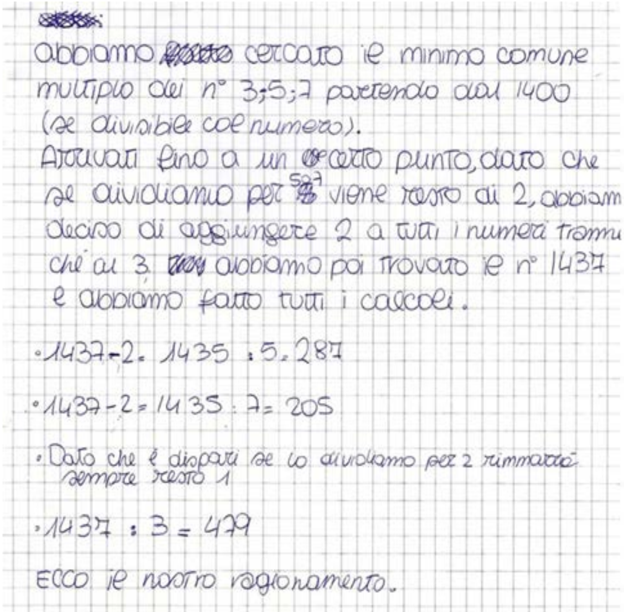
On note l'usage inapproprié du symbole de l'égalité et l'usage de l'inconnue ons mais … ils considèrent que :

« *x* + 5 = *est divisible par 7* » au lieu de « *x* – 5 ... »

« x – 3 = est divisible par 5 » au lieu de « x + 3 … » ou « *x* - 1 … »

Ils confondent le reste avec le complémentaire du reste.

Enfin, plusieurs copies se réfèrent au plus petit multiple commun des diviseurs.



Nous avons cherché le plus petit multiple commun des nombres 3; 5; 7 en partant de 1400 (si divisible avec le nombre).
Arrivés à un certain point. vu que si on divise par 5 ou 7 le reste est 2, nous avons décidé d'ajouter 2 à tous les nombres sauf au 3 nous avons alors trouvé 1437 et nous avons fait tous les calculs.
1437 – 2 = 1435 : 5 = 287
1437 – 2 = 1435 :7 = 205
Vu qu'il est impair si on le divise par 2 il restera toujours 1
1437 : 3 = 479
C'est notre raisonnement.

Des copies, émerge la nécessité de travailler sur le concept de reste d'une division, sur la signification des chiffres décimaux et sur le langage symbolique, alors que les critères de divisibilité semblent acquis.

La différence de langage pour exprimer la quatrième et la cinquième condition s'est révélée un obstacle majeur. Ceci nous a suggéré d'expérimenter en classe une des deux versions suivantes de la 4^e et 5^e conditions :

Version A :

- *« si on regroupe les haricots par 5, à la fin il y a une solde (reste) de 2 haricots »*

- *« si on regroupe les haricots par 7, à la fin il y a une solde (reste) de 5 haricots »*

Ou selon la formulation de l'énoncé d'origine en français, **version B :**

- *« si on regroupe les haricots par 5, il faudrait 3 autres haricots pour compléter le dernier paquet »*
- *« si on regroupe les haricots par 7, il faudrait 2 autres haricots pour compléter le dernier paquet »*

mais aussi d'expérimenter à l'école primaire le niveau de compréhension du concept de division avec une référence au reste ou à son complémentaire avec des problèmes de structures analogues mais de valeurs plus simples des variables didactiques.

4. Premiers résultats de l'expérimentation relative au problème Sacs de haricots.

La proposition a été adoptée pour des classes de catégories 6-7-8 et pour des classes de catégorie inférieure.

Dans ces derniers cas l'expérimentation a été réalisée selon deux modalités différentes.

- Le problème a été proposé avec un autre choix des variables numériques (entre 40 et 90) mais avec l'énoncé d'origine. Les deux conditions finales ont été interprétées de la même manière, confirmant l'erreur d'interprétation.
- Les enseignants des deux classes de catégorie 5 ont décidé d'organiser un laboratoire dans le but de travailler sur la maîtrise du langage pour exprimer un même concept de manières différentes, en particulier sur le reste de la division, sur la signification des nombres décimaux et sur le passage du langage verbal au langage symboliques.

Le laboratoire s'est déroulé selon les modalités suivantes :

- les classes ont été réparties en 4 groupes d'élèves ;
- chaque groupe a reçu une version différente du problème, à résoudre en 50 minutes (en plus de l'énoncé d'origine et des versions A et B une quatrième version est la traduction mot à mot de la version française dans laquelle ne figure pas l'adverbe « toujours » et où l'on se réfère au dernier paquet à compléter) ;
- après la résolution, chaque groupe a lu l'énoncé du problème résolu (distribué alors aussi aux élèves des autres groupes) et a expliqué à la classe, tant la solution que le raisonnement suivi pour le choix de la stratégie adoptée ;
- après ces présentations, l'enseignant a demandé aux élèves s'ils avaient noté des différences entre les énoncés des problèmes reçus (l'intervention de l'enseignant avait le but de stimuler une réflexion ultérieure sur la composante linguistique) ;
- avant d'en parler en classe entière, la possibilité a été donnée aux élèves de débattre en petits groupes (15 minutes) pour s'entendre sur une opinion motivée ;
- en fin des débats, une discussion s'est ouverte au cours de laquelle les porte-paroles de chaque groupe ont rapporté leurs opinions et en ont discuté avec la classe entière.

Tous se sont rendu compte des différences entre les énoncés, ont déterminé ceux qui paraissaient les plus simples pour la compréhension du problème et en ont expliqué les raisons ; le travail s'est conclu par le classement des énoncés du plus difficile au plus simple pour la compréhension.
Voici quelques commentaires tirés de cette discussion.

L'énoncé d'origine utilise un langage plus complexe pour les raisons suivantes :

- si on regroupe les haricots par 2 il en reste toujours 1,

  « *le mot toujours nous a induit en erreur, il suffisait de dire il en reste 1* »

  si on regroupe les haricots par 5 il faudrait 3 autres haricots pour compléter le paquet,

  « *dans ce cas on disait combien de haricots il fallait pour compléter le paquet de 5 et il nous a fallu un peu de temps pour comprendre »*

  si on regroupe les haricots par 7 à la fin il reste 5 haricots,

  « *ici au contraire on dit combien il en reste si on les regroupe par 7 et nous avons pensé comme avant, puis nous avons compris que c'était le contraire d'avant* »

La **version B** est un peu moins compliquée que la précédente parce que :

- Les deux dernières conditions étaient semblables

  « *on te dit directement pour les deux regroupements combien il faut de haricots pour compléter les paquets, donc on peut raisonner de la même façon* »

La **version A,** est considérée comme la plus facile de toutes « *c'est plus facile de comprendre il en reste, plutôt qu'il en manque ... pour compléter* ».

5. Conclusions

Par la résolution des problèmes du RMT l'élève a la double tâche de comprendre le texte de l'énoncé (et éventuellement de l'expliquer à ses camarades pour qui il n'est pas clair) puis de rechercher une stratégie résolutive à expliquer, partager et parfois modifier ou défendre. Au cours de toutes ces étapes où il est protagoniste en tant qu'instrument de communication, le langage est essentiel. C'est justement la demande d'expliquer la procédure de résolution du problème qui incite les élèves à améliorer leur façon de communiquer.

Ces considérations et l'analyse des copies nous ont conduit à réfléchir sur la communication : verbale (orale ou écrite), graphique (iconique ou symbolique) mais aussi gestuelle (mimique, scénarisation) … Les élèves doivent se familiariser avec toutes ces modalités pour découvrir les potentialités que chacune d'entre elles peut avoir en relation avec le contexte, le thème à communiquer au « récepteur de ses arguments », afin de comprendre et d'être compris.

Dans ce sens, l'activité de résolution des problèmes du RMT est bénéfique puisqu'elle constitue une occasion d'expérimenter les différentes modalités de communiquer, sans exclure la mise en scène. Les élèves les plus jeunes font appel à cette dernière modalité et nous pouvons nous en rendre compte en examinant les copies, en particulier celles de catégorie 3 d'où émerge clairement le besoin de se sentir interprètes dans la situation de résolution, avec une fréquente et forte implication de la sphère émotive. Il n'est pas rare de trouver, dans la description de la procédure, les noms des élèves qui s'y sont engagés ; signe qu'ils se sont mis dans le rôle de ceux qui ont résolu le problème.

Les problèmes analysés dans cet article nous ont permis d'observer combien souvent les élèves sont approximatifs dans la lecture (décodage du message écrit) et confus dans les explications pour « *celui qui ne sait pas* ». Certains tableaux, représentations ou verbalisations sont compréhensibles pour l'enseignant (ou la personne qui corrige) mais ne le sont pas pour un camarade qui ne connaît pas la notion exposée. D'autre part il faut être conscient que, pour les élèves, les réponses et explications sont, implicitement, destinées à l'enseignant « *qui sait* » et qui, en général, est disposé à mettre du sien pour comprendre ce que l'élève entend *communiquer* (et qui, s'il avait voulu en savoir plus, aurait dû l'expliciter).

En re-partant des explications figurant sur les copies, nous nous sommes vraiment rendu compte de l'opportunité de réfléchir en classe sur la différence subtile mais profonde entre explication et vérification. Des activités prévues à cet effet pourront favoriser la future compréhension de la signification de la démonstration.

Une réponse incompatible avec les données du problème pourrait, en outre, suggérer aux enseignants de proposer une variante de l'énoncé conduisant à la réponse fournie à l'énoncé d'origine. Ce serait une manière d'habituer les élèves à vérifier la compatibilité de leurs solutions avec les données disponibles.

Au cours de ses travaux, le Groupe a pu réfléchir au fait que, pour les deux problèmes, les élèves ont montré la maîtrise des connaissances spécifiques requises (il n'y avait pas d'erreurs de position des chiffres en base 10 dans le problème *Lancers dans des paniers* et les critères de divisibilité sont bien connus pour le problème *Le sac de haricots*), mais ce n'était pas suffisant pour obtenir des résultats suffisants.

Au niveau de la communication, on retrouve souvent dans les copies des écritures ou représentations qui se réfèrent aux symboles spécifiques des mathématiques, mais qui sont malheureusement notées de manière confuse ou partielle. En tant que groupe d'enseignants et chercheurs nous nous sommes demandés si la synthèse des écritures mathématiques pourrait naître comme une exigence personnelle et mûrir peu à peu, sous la stimulation de propositions de travail qui la proposeraient comme objectif et qui en feraient ressentir la nécessité. Ces écritures mathématiques sont souvent utilisées pour écrire plus rapidement et non pour être comprises universellement !

Vu que la correction est différente de l'évaluation, l'enseignant y trouvera en plus une occasion de contrôler l'évolution de l'apprentissage.

L'analyse a posteriori des deux problèmes a fourni de nombreux sujets de réflexion et discussion. Nous estimons fondamental l'activité de lecture des copies des élèves et pensons que plus les enseignants et chercheurs y accordent de l'attention, plus elle produira d'effets positifs sur l'action didactique qui en découlera et sur la qualité des apprentissages pour les élèves.

ANNEXES

5. LANCERS DANS DES PANIERS (Cat. 3, 4, 5)

En éducation physique, l'enseignante propose un nouveau jeu aux enfants. Chaque enfant doit lancer des balles de tennis dans deux paniers placés l'un à côté de l'autre. Si la balle entre dans le panier de droite, le joueur gagne 1 point ; si elle entre dans le panier de gauche, le joueur marque 10 points.

Anna lance 12 balles et chaque balle arrive dans l'un ou l'autre des deux paniers, puis elle fait le total des points qu'elle a obtenus.

Trouvez tous les totaux qu'Anna peut avoir obtenus.

Montrez en détails comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les différentes sommes de 12 nombres égaux à 1 ou à 10.

Analyse de la tâche

- Comprendre la règle du jeu et comprendre que chaque balle de tennis rapporte un nombre de points différent : elle vaut 1 point si elle est lancée dans le panier à droite et 10 points si elle va dans le panier de gauche.
- Se rendre compte qu'il y a plusieurs sommes possibles, qui dépendent du nombre de balles entrées dans chacun des paniers.
- Imaginer ou dessiner la situation et calculer à chaque fois les points correspondants.
- Il y a plusieurs manières d'organiser les calculs : additionner les termes un à un (par exemple 1+1+1+1+…+10+10) ou en tenant compte des nombres de 1 et de 10, effectuer les combinaisons de multiplications et additions (par exemple 5×1 + 7×10).

Ou : calculer le score le plus bas, 12 (correspondant à 12 balles dans le panier de droite), trouver le score suivant en enlevant 1 et en ajoutant 10, et ainsi de suite jusqu'à arriver à 120 (correspondant à 12 balles dans le panier de gauche) : 12 ; 12–1+10 = 21 ; 21–1+10 = 30 ; 30–1+10 = 39 ; … ; 111–1+10 = 120 (c'est-à-dire additionner 9 à chaque fois).

- De façon symétrique, partir du score le plus élevé, 120, puis, à chaque fois, soustraire 10 et ajouter 1 (c'est-à-dire soustraire 9 à chaque fois) jusqu'à arriver à 12.
- La recherche peut être organisée en un tableau qui met en évidence à la fois la décomposition de 12 en sommes de deux entiers et le nombre obtenu.

Attribution des points

4 Réponse correcte (12-21-30-39-48-57-66-75-84-93-102-111-120) avec une procédure organisée, un tableau ou une explication détaillée de la procédure suivie

3 Réponse correcte énumérant toutes les réponses mais avec une explication peu claire (omettant une ou plusieurs étapes), ou réponse partielle par manque d'un des scores possibles ou une erreur de calcul, mais avec le détail de la recherche

2 Réponse partielle (il manque entre deux et quatre scores possibles), ou deux ou trois erreurs de calcul, mais avec le détail de la recherche

ou réponse partielle par manque d'un des scores possibles, ou avec une seule erreur de calcul, mais sans détails sur la recherche

ou réponse correcte sans explication

1 Réponse partielle où il manque de cinq à sept scores possibles) ou bien quatre ou cinq erreurs de calcul, mais avec les détails de la recherche

ou réponse partielle où il manque de deux à quatre scores possibles, ou bien deux ou trois erreurs de calcul, mais sans détails sur la recherche

0 Incompréhension du problème ou toute autre réponse

Niveaux : 3, 4, 5

15. SAC DE HARICOTS (Cat. 8, 9, 10)

Marc demande à son ami Charles le nombre exact de haricots contenus dans un grand sac, sachant que :

- le nombre cherché est compris entre 1400 et 1700 ;
- si on regroupe les haricots par 2 il en reste un ;
- si on regroupe les haricots par paquets de 3, il n'en reste pas ;
- si on regroupe les haricots par paquets de 5, il faudrait 3 autres haricots pour compléter le dernier paquet ;
- si on regroupe les haricots par paquets de 7, il reste 5 haricots.

Quel est le nombre de haricots contenus dans le grand sac ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer l'unique nombre compris entre 1400 et 1700, quand les restes des divisions de ce nombre par 2, 3, 5 et 7 sont respectivement 1, 0, 2 et 5.

Analyse de la tâche

- Comprendre que s'agissant d'un grand nombre, il n'est pas possible de travailler avec des objets ou des dessins. Il est nécessaire d'utiliser l'écriture des nombres dans des relations numériques.
- Trouver une méthode d'élimination ou de choix qui évite de faire trop de divisions pour déterminer les restes.
- La recherche doit être faite sur tous les nombres compris entre 1400 et 1700, en éliminant successivement :
-   - ceux qui se terminent par un chiffre pair (0, 2, 4, 6, 8) pour respecter la deuxième condition,
-   - ceux qui ne sont pas divisibles par 3 pour respecter la troisième condition,
-   - ceux qui ne se terminent pas par 7 pour respecter la quatrième condition (le chiffre des unités d'un multiple de 5 moins 3 est 7 ou 2, qui est à éliminer d'après la deuxième condition).
- Arrivé à ce point, il reste à écrire tous les nombres impairs compris entre 1400 et 1700 qui se terminent par le chiffre 7 et qui sont multiples de 3. On peut réduire l'ensemble des nombres à examiner pour trouver les multiples de 3 (si d et c désignent les chiffres des dizaines et des unités du nombre cherché : $1 + c + d + 7$ est multiple de 3 avec $c + d \leq 18$). On obtient : 1407, 1437, 1467, 1497, 1527, 1557, 1587, 1617, 1647, 1677.
- Trouver enfin que le nombre 1587 est le seul qui réponde aux cinq conditions : $(226 \times 7) + 5 = 1587$.

Ou bien

- écrire tous les multiples de 7 augmentés de 5 entre 1400 et 1700, éliminer les nombres pairs et conserver seulement ceux qui finissent par 7 (1447, 1517, 1587, 1657) pour arriver à conserver seulement 1587, qui est l'unique nombre multiple de 3.

Attribution des points

4 Réponse correcte (1587) avec les détails d'une recherche systématique

3 Réponse correcte (1587) avec les détails d'une recherche non exhaustive

2 Réponse correcte sans explications ou réponse fausse à cause d'une erreur de calcul dans une recherche systématique

1 Début de recherche correcte

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Riva del Garda et *Le sachet de billes*, cat. 7, 8, 10.II.13

AIRES DE POLYGONES SUR QUADRILLAGE

François Jaquet

Introduction

Depuis plus d'une dizaine d'années, le groupe « Géométrie plane » de l'ARMT se penche sur la construction du concept d'aire par les élèves, au cours de leur scolarité obligatoire. De nombreux problèmes sur ce thème ont été élaborés, puis analysés, en particulier sur la détermination de l'aire de polygones sur quadrillage.

L'analyse des résultats d'un de ces problèmes, présentée ici, permet d'éclairer le long parcours de l'élaboration de ce concept d'aire et d'en percevoir les différentes étapes au cours desquelles les « savoirs » se construisent progressivement, s'entremêlent, se complètent mutuellement pour arriver finalement à la capacité de « déterminer l'aire d'un polygone dont les sommets se situent sur des nœuds d'un quadrillage ».

Nous présenterons ici, dans l'ordre : l'énoncé du problème et quelques commentaires sur son élaboration, suivi des résultats globaux et des critères d'attribution des points et qui permettent d'établir un indice de difficulté ou de facilité.

Viendront ensuite la description des procédures adoptées par les groupes d'élèves qui sont arrivés à la solution, c'est-à-dire de ceux qui affichent une maîtrise suffisante pour accomplir la tâche demandée.

Puis on abordera la partie de l'analyse des copies qui permet de percevoir où se situent les véritables enjeux de la tâche de résolution que l'examen des réponses correctes ne permet pas d'identifier puisque les obstacles y sont surmontés. On relèvera, à ce stade de l'analyse, les erreurs ou procédures inefficaces, révélatrices des différentes étapes dans la construction du savoir « déterminer l'aire d'une figure sur quadrillage ».

Finalement, on se permettra quelques considérations sur l'exploitation didactique qu'on pourrait tirer de ce problème et de son analyse.

1. Le problème et son élaboration

COMPARAISON DE FIGURES

Patricia et Brigitte observent ces trois polygones et se demandent s'ils ont tous la même aire.

Dites si les aires de ces trois polygones sont les mêmes ou sont différentes.
Montrez comment vous êtes arrivés à vos réponses.

En première lecture, on découvre une activité dont on pourrait rédiger l'énoncé sous forme « d'exercice traditionnel » du genre « Calculez l'aire de chacun de ces trois polygones. ». Elle est ici à peine habillée par un contexte fictif de deux personnages, Patricia et Brigitte, dont les auteurs imaginent qu'elles se posent des questions à propos de la comparaison des trois aires. Mais c'est une règle des « problèmes » du RMT : pour les distinguer des « exercices » ou autres applications de notions déjà exposées en classe, on les insère dans un contexte, en prenant garde que celui-ci ne soit pas trop gênant pour empêcher l'appropriation de la situation par les élèves.

Au-delà des réflexions sur l'originalité du problème, il faut en connaître les origines et finalités. Il a été préparé par le groupe de travail « Géométrie plane » de l'ARMT et proposé lors de la première épreuve du 26^{e} RMT aux classes de catégories 6 à 8 (de 11 à 14 ans).

Il fait suite à une longue série d'autres problèmes sur la comparaison d'aires de figures dessinées sur une trame quadrillée dont les énoncés, résultats et observations des copies d'élèves ont fait l'objet de nombreuses analyses. (Voir *Banque de problèmes du RMT*[1] famille de tâches *Comparer des aires*[2]) Elles ont permis au groupe de travail de rédiger ainsi une analyse a priori de la tâche de résolution :

- *Comprendre, à la lecture de la question et à l'observation des figures que pour comparer les aires, il s'agit de déterminer chacune des trois aires, avec une unité commune.*
- *Constater que les trois figures ne sont ni des rectangles, ni des triangles pour lesquels on dispose de formules, que la présence du quadrillage permet d'utiliser le carreau comme unité commune et qu'il faudra décomposer les figures en carreaux entiers ou parties de carreaux ou en figures de base : rectangles, triangles ou demi-rectangles.*

---

[1] Banque de problèmes du RMT. Pour s'y rendre, aller sur le site www.armtint.org

[2] Dans la Banque de problèmes, aller sous « Famille CA/P), entre autres : *RMT 2005* (13.I.02 ; cat. 3-4) ; *Feuilles mortes* (18.I.05 ; cat. 3-5) ; *Fleur ou fusée ?* (20.II.11 ; cat. 6-8) ; *Le coeur de Martine* (22.I.09 ; cat. 5-6) ; *Les deux poissons* (25.F.06 ; cat. 4-6)

Les procédures de détermination de l'aire sont multiples, et différentes d'une figure à l'autre et d'un groupe d'élèves à un autre, en particulier :

- *comptage une à une des unités entières, puis reconstitution d'unités par déplacements des parties non entières,*
- *décomposition de la figure en rectangles et triangles qui peuvent reconstituer un rectangle par déplacements,*
- *perception du triangle rectangle comme demi-rectangle,*
- *les triangles non rectangles sans angle obtus sont décomposés en deux triangles rectangles,*
- *calcul de l'aire du rectangle circonscrit à la figure totale suivi de la soustraction des aires des rectangles et/ou triangles complémentaires,*
- *appel à la formule de l'aire du triangle.*

Trouver l'aire des trois figures, en carreaux, par exemple :

Pour A : un rectangle de 6 × 7 dont on retire quatre triangles de 5 × 1, de 6 × 1, de 6 × 3 de 5 × 2 et un rectangle de 2 × 1: 42 – 2,5 – 3 – 9 – 5 – 2 = 20,5.

Pour B : un rectangle de 6 × 2 et un triangle de 6 × 3 : 12 + 9 = 21 ou compensations de carreaux pour le triangle.

Pour C : décomposition en un rectangle et trois triangles. 6 + 2 + 10 + 3 = 21.

Conclure que les trois aires ne sont pas égales : 20,5 ; 21 et 21 (en carrés du quadrillage).

Ou, calcul des aires à partir de mesures prises, en cm ou mm, sur les polygones qui composent les figures. (Cette procédure exige des mesures prises au mm près, les calculs précis de chaque aire et la prise en compte rigoureuse des erreurs dues aux approximations pour être certain que l'aire de A est inférieure aux aires de B et C).

Les catégories des classes ont été déterminées en fonction des résultats des problèmes précédents, en étant conscients que la tâche exige une grande rigueur et précision pour arriver aux trois aires exactes, mais qu'elle n'est pas insurmontable pour des élèves de 11 à 12 ans (catégorie 6) travaillant en groupe, même si l'on peut s'attendre à des réponses partielles ou approximatives. Les analyses a posteriori des problèmes analogues avaient montré que la grande majorité des élèves de cet âge sont capables de s'approprier la situation et de s'engager dans la détermination des aires.

Les aires des trois polygones (20,5 ; 21 et 21) sont très proches l'une de l'autre. On élimine ainsi le risque que les élèves se limitent à une estimation visuelle, sans entrer dans une recherche plus précise.

Les polygones sont non convexes, deux d'entre eux, B et C, sont facilement décomposables en triangles et rectangles dont certains côtés se mesurent par un simple comptage sur le quadrillage; le triangle de B complémentaire au rectangle de 2 × 6 a, volontairement, un angle obtus ; pour A la décomposition en triangles dont les côtés se déterminent facilement n'est pas possible, il doit être inscrit dans un rectangle dont on peut « soustraire » des triangles dont les côtés et hauteurs sont entiers.

La formulation de la question : *Dites si les aires de ces trois polygones sont les mêmes ou sont différentes* ne laisse aucune incertitude par rapport à des demandes plus ouvertes comme, par exemple, *Ces trois polygones ont-ils la même aire ?* ou *Qu'en pensez-vous* ? Ce sont les contraintes des critères d'attribution des points qui l'exigent (Voir plus loin, sous le tableau des résultats). Pour les problèmes du RMT on évite les questions avec réponse « oui » ou « non » où le hasard crée des interférences avec les évaluations des raisonnements et explications complètes.

La dernière hypothèse de l'analyse de la tâche concernant la détermination des aires à partir de mesures prises sur les figures a été évoquée par le groupe et maintenue tout en étant conscient que cette démarche ne peut aboutir à une réponse certaine, au vu des imprécisions de la démarche.

Une remarque encore : il a paru inutile de préciser que la trame sur laquelle sont dessinés les trois polygones est à maille carrée et que les sommets sont situés sur des nœuds de ce quadrillage. C'est parfaitement clair pour les élèves, comme nous avons pu le constater pour les problèmes précédents, et allège ainsi l'énoncé, alors qu'un texte de manuels scolaires est soumis à des conditions de rigueur extrême. Nous savons par ailleurs que les élèves reçoivent les problèmes sous forme de photocopies dont on ne peut pas garantir la précision au mm près.

2. Résultats

Voici les points attribués aux 3265 copies de 18 sections du RMT :

points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 6	667	331	147	167	34	1346	0,9
Cat. 7	293	356	194	230	66	1139	1,5
Cat. 8	158	216	133	185	88	780	1,8
tot	**1118**	**903**	**474**	**582**	**188**	**3265**	**1,3**

en %

Cat. 6	50%	25%	11%	12%	3%
Cat. 7	26%	31%	17%	20%	6%
Cat. 8	20%	28%	17%	24%	11%
tot	34%	28%	15%	18%	6%

selon les critères définis a priori pour l'attribution des points par les jurys de chaque section :

4 Réponse correcte : les trois aires ne sont pas égales, avec leurs valeurs : A : 20,5 ; B : 21 et C : 21 (l'unité « carreaux du quadrillage » peut être implicite). On accepte que l'inégalité ne soit pas mentionnée explicitement

ou, en cas de mesures en cm ou mm, réponse correcte : (les trois aires ne sont pas égales) avec les valeurs des aires accompagnées dans ce cas de calculs précis au mm près et tenant compte explicitement des erreurs d'approximation

3 Réponse avec deux aires trouvées correctement et une erreur pour la troisième (par exemple, les trois aires sont égales 21, 21, 21)

ou aires calculées correctement d'après des mesures au mm près, sans mention explicite des erreurs dues aux approximations

2 Réponse avec une aire trouvée et erreurs pour les deux autres

ou aires calculées d'après des mesures correctes au mm près mais avec une erreur, sans mention explicite des erreurs dues aux approximations

1 Le calcul des aires de chacune des trois figures comporte une erreur

ou aires calculées d'après des mesures correctes au mm près mais avec deux ou trois erreurs, sans mention explicite des erreurs dues aux approximations

ou réponse « les trois aires ne sont pas égales » sans indiquer les aires avec seulement une description du genre : on a compté les carrés

0 Incompréhension du problème

ou détermination très approximative des aires, avec plus de trois erreurs

ou réponse « les trois aires ne sont pas égales » sans autre indication

Commentaires

2.1. Fidélité et validité.

Les points de 0 à 4 ont été attribués par des jurys de deux personnes en général, selon les critères ci-dessus. En principe, chaque jury examine toutes les copies du même problème pour toute sa section, afin de minimiser les différences d'interprétation des critères ; mais celles-ci peuvent exister d'un jury à l'autre, c'est-é-dire d'une section à l'autre. Il faut donc être conscient du biais introduit par ces 18 jurys (au moins) différents ainsi que ceux qui sont liés aux nombres des classes au sein de chaque section, aux caractéristiques des classes : effectif, enseignant, habitudes, programmes scolaires, … Les moyennes de points ne sont donc que des indicateurs globaux de réussite.

2.2. Evolution d'une catégorie à l'autre.

Les indicateurs précédents, bien qu'étant approximatifs, témoignent cependant d'une progression sensible de la catégorie 6 (proche du critère « 1 point ») à la catégorie 8 (plus proche du critère « 2 points »). Cette évolution est plus sensible en observant les pourcentages de « 0 point » proche de 50% en catégorie 6 réduits à 20% en catégorie 8.

Globalement, le tableau des résultats montre que le problème *Comparaison de figures* n'est pas « facile » pour des élèves de catégorie 6 et se révèle encore bien « consistant » pour des élèves de catégorie 8.

3. Les procédures de résolution

Les résultats statistique précédents sont établis par quelques personnes seulement, une vingtaine de jury, qui ont examiné les copies pour leur attribuer des points. Ils sont encore « désincarnés ». Ce n'est qu'au moment de l'examen des copies qu'on peut les interpréter de manière qualitative, sans cependant pouvoir en savoir plus que ce qui figure sur la feuille rendue par le groupe.

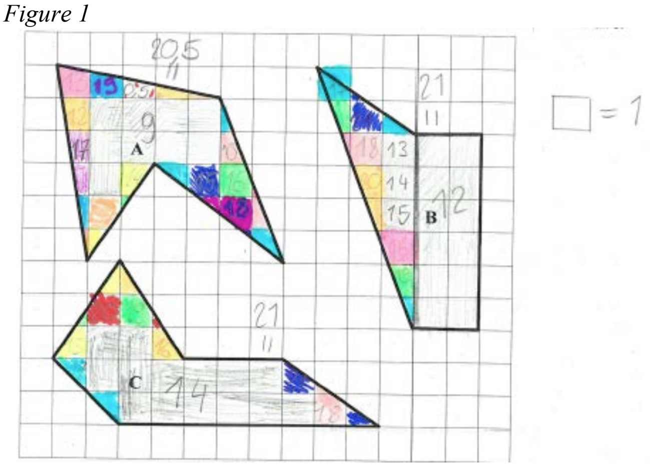
(Sur les 3265 copies rendues, nous en avons examiné 1050, de quatre sections, pour l'attribution des points dont 350 pour une analyse a posteriori plus détaillée.)

Le lecteur de l'article, qui vient de lire le problème et a tenté de le résoudre, est naturellement intéressé de connaître les démarches des groupes d'élèves pour les comparer avec la sienne. Les auteurs du problème le sont aussi, d'autant plus qu'ils tiennent à vérifier si leur analyse de la tâche a priori tient la route.
Nous commençons donc par nous intéresser aux « réussites » du problème en présentant quelques copies conformes à cette analyse a priori : tout d'abord celles de la recherche d'aire par comptage des carrés, puis, celles par décomposition des polygones en figures connues et enfin celles par prise de mesures, en cm, sur les figures.

3.1 Unité par unité

Cette procédure est la plus fréquente parmi les classes de sixième arrivées aux trois solutions, mais aussi parmi les autres qui n'ont trouvé qu'une ou deux aires ou encore qui n'ont pas maîtrisé le comptage.
En observant les copies suivantes (*fig 1* à *3*) on se rend compte de la consistance de la tâche : pour pouvoir compter les carrés, il faut recomposer ceux qui ne sont pas entiers, indiquer ces recompositions par des couleurs (*fig 1*) ou des traits (*fig. 2*) ou encore des numéros des carrés (*fig. 3*).
Les savoirs mathématiques mobilisés sont simples : reconnaître une unité adéquate de mesure d'aire, le carré du quadrillage, implicitement ou explicitement (*fig. 1*) puis additionner ces unités (*fig. 2*).
Le langage n'est pas celui des mathématiciens mais il suffit amplement à expliquer la procédure et la réponse : B et C ont la même aire (21) mais celle de A vaut 0,5 de moins (*fig. 1*), par conséquent les trois polygones n'ont pas la même aire.
C'est au niveau de « compétences » que l'on peut apprécier la qualité du travail de ces groupes : précision des observations et des notations absolument nécessaires en particulier pour le demi-carré de la figure A.
Ces compétences ne sont encore à la portée que d'une minorité de groupes, elles ne sont pas liées aux apprentissages scolaires et nous pouvons penser que la résolution de problèmes en coopération favorise leur développement.

Figure 1



C + B = même aire
A = 0,5 –
Ces polygones n'ont pas la même aire

Figure 2

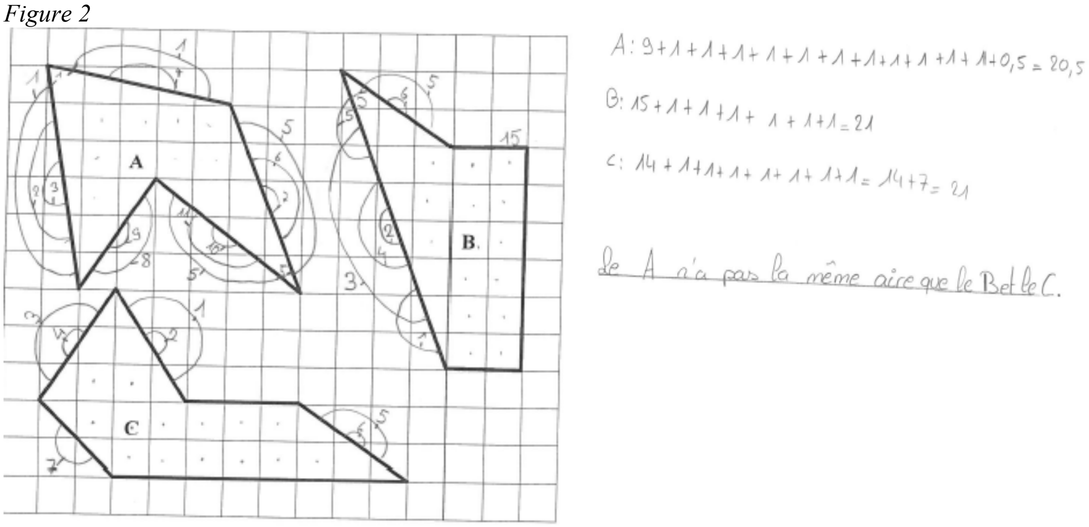
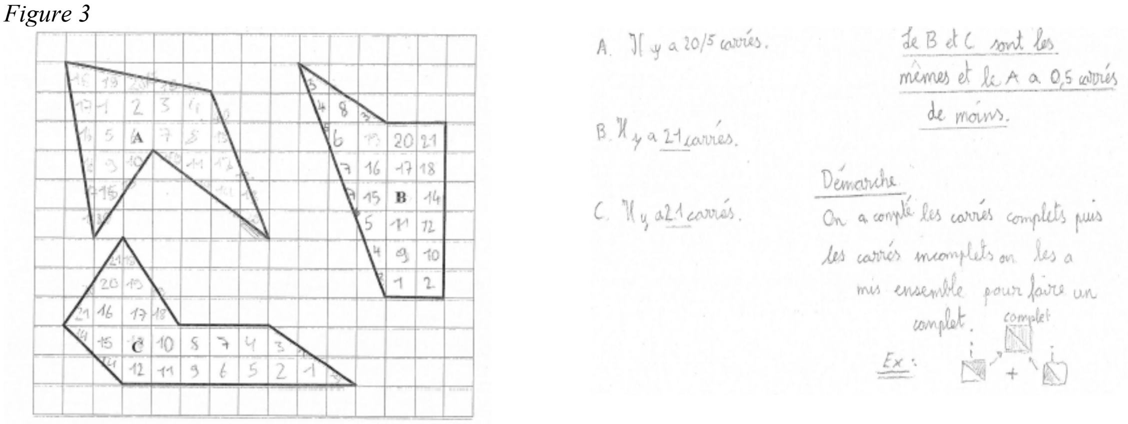


Figure 3



3.2. Décomposition en figures connues

Pour éviter le comptage un à un des carrés unités, de nombreux groupes ont décomposé chaque polygone en rectangles et triangles.

Cette décomposition est assez facile pour la figure C (*fig. 4*) mais présente un obstacle pour la figure B que de très nombreux groupes décomposent en un rectangle de 2 × 6, partie droite de la figure et deux triangles sur la gauche séparés par un prolongement de la largeur supérieure du rectangle. Le groupe qui a présenté la décomposition de B de la *figure 4*, comme quelques autres, est arrivé à une aire de 21 carrés par une compensation peu convaincante en arrondissant par compensation les deux aires de ces triangles à 6 et à 3. D'autres, la majorité, ne maîtrisent pas la compensation.

La méthode efficace dans ce cas de la figure B serait de la décomposer en un rectangle et un seul triangle, dont un côté est déterminé (6) et pourrait faire office de « base » dans le langage habituel si on se rend compte que la « hauteur » correspondante l'est aussi (3). De très rares groupes ont procédé ainsi, mais de manière un peu chanceuse comme celui de la *figure 6* qui trouve une aire de 9 pour ce triangle mais commet un « lapsus » à propos de son écriture : 8 × 3/2 au lieu de 6 × 3/2, signe de l'attrait de la longueur 8 pour la mesure de la « base ».

Pour la figure A, l'obstacle de la décomposition « additive » en triangles et rectangles est encore plus difficile à surmonter. On le constate sur la (*fig. 4*) : un partage en figures élémentaires en suivant le quadrillage aboutit à des aires approximatives pour la plupart, qui ne permettent pas d'obtenir la précision de 20,5 pour l'aire. Pour éviter ces approximations ou recompositions carré par carré, il faut penser non pas à décomposer la figure mais à l'inscrire dans un rectangle et faire appel à la différence d'aires. Ce saut d'ordre conceptuel sera discuté plus loin dans cet article.

Figure 4

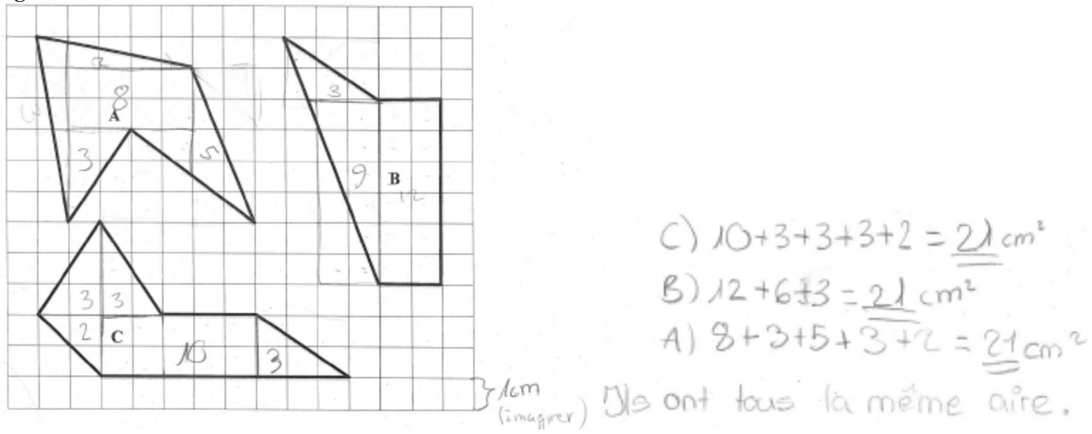


Figure 5

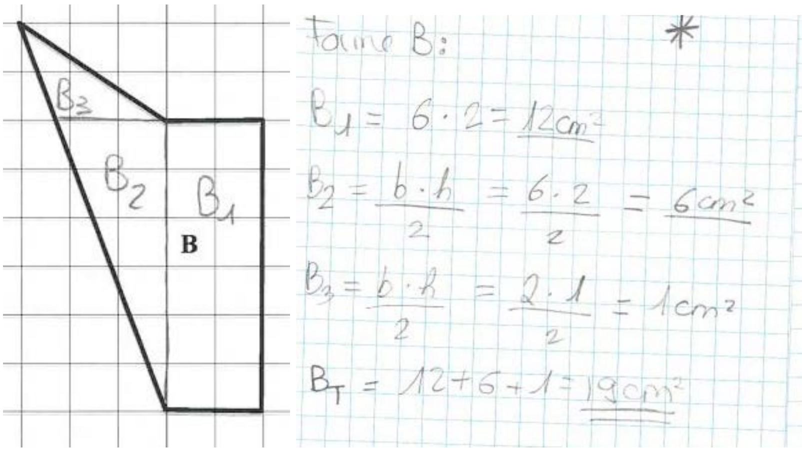
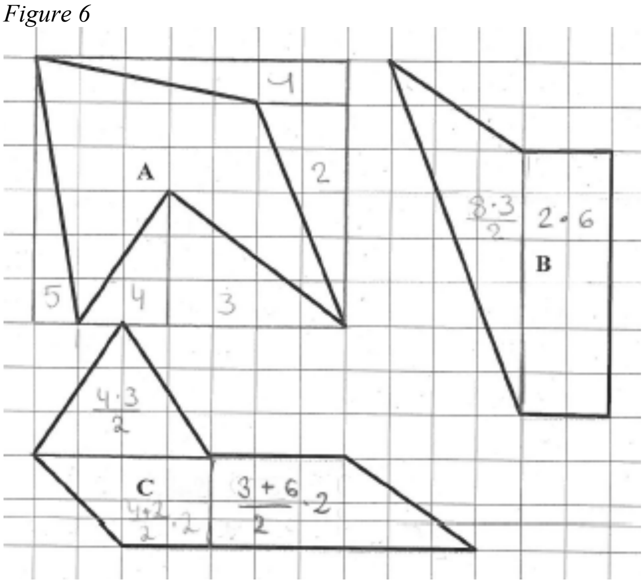


Figure 6



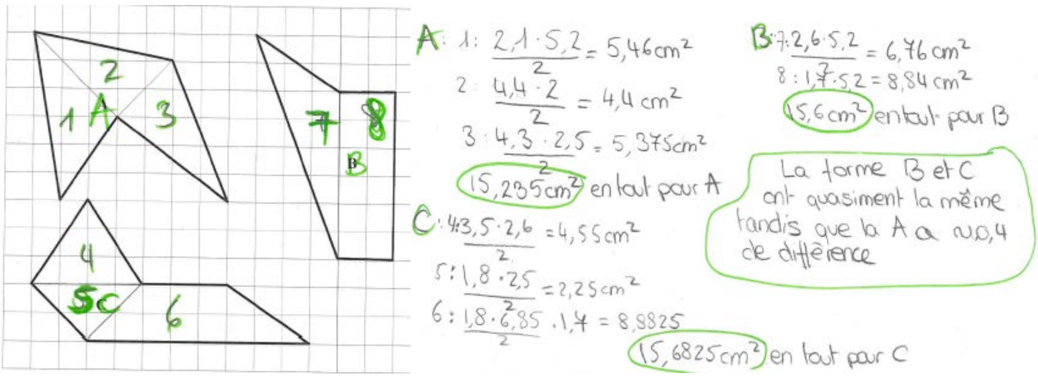
3.3. Prise de mesures

L'analyse a priori cite explicitement la procédure de prises de mesures en cm sur les trois polygones, en soulignant que *cette procédure exige des mesures prises au mm près, les calculs précis de chaque aire et la prise en compte rigoureuse des erreurs dues aux approximations pour être certain que l'aire de A est inférieure aux aires de B et C.*

Près de 25% des groupes ont effectivement choisi de mesurer des longueurs sur les figures avec une règle graduée, évidemment sans succès puisque la précision des instruments, même au demi-millimètre près, ne permet pas de décider, ni que l'aire de B est égale à l'aire de C, ni que celle de A est inférieure aux deux autres.

Seule une copie sur les 350 examinées en détail (*figure 7*) fait explicitement allusion à l'incertitude liée à la prise de mesures en disant que *La forme B et C ont quasiment la même tandis que la A a environ 0,4 de différence.*

figure 7



Les autres copies avec des calculs d'aires corrects correspondant à des mesurages précis aboutissent à des réponses « non, toutes les figures ont des aires différentes »

Exemple 1: (cat 7)

- *... Il poligono A l'abbiamo diviso in un trapezio, un triangolo scaleno e un triangolo isoscelo e abbiamo calcolato l'area delle tre figure e le abbiamo sommate, il risultato è stato 17,51 cm².*
  ... B ... in un triangolo equilatero, un triangolo rettangolo e un rettangolo ... 17,67 cm².
  ... C ... in due triangoli equilateri, un triangolo rettangolo et un rettangolo ... 16,945 cm².
  Quindi i tre poligoni non sono equivalenti.
  (... Nous avons divisé le polygone A en un trapèze, un triangle scalène et un triangle isocèle et nous avons calculé l'aire des trois figures et les avons additionnées, le résultat était 17,51 cm².
  ... B ... en un triangle équilatéral, un triangle rectangle et un rectangle ... 17,67 cm².
  ... C ... en deux triangles équilatéraux, un triangle rectangle et un rectangle ... 16,945 cm².
  Donc les trois polygones ne sont pas équivalents.)
  Il faut remarquer à ce propos que les triangles équilatéraux cités ne le sont pas vraiment mais les mesures et les calculs sont corrects.

Les élèves de ces catégories, même ceux de 13 à 14 ans, sont encore loin de pouvoir aborder les concepts d'estimation et d'incertitude.

D'une façon générale, les procédures par mesurage n'ont que très rarement donné des résultats acceptables (même en tenant compte de l'impossibilité de comparer ainsi les aires des trois polygones) en raison des grosses imprécisions dans la prise des mesures, des choix inadéquats de la base et de la hauteur des triangles et des applications erronées de la formule (b × h) / 2.

4. L'aire et sa mesure

Le tableau des résultats montre qu'une faible minorité des copies (6%) ont obtenu les « 4 points » déterminés par les critères d'attribution : *Réponse correcte : les trois aires ne sont pas égales, avec leurs valeurs : A : 20,5 ; B : 21 et C : 21 (l'unité « carreaux du quadrillage » peut être implicite). ...*

Si on leur ajoute les 18% » et les 25% de ceux qui ont obtenu respectivement « 3 points » avec deux aires déterminées correctement et « 2 points » avec une seule des aires, on est encore bien au-dessous de la moitié de ce qu'on pourrait juger comme « réussite » ou « réussite partielle » de la tâche, sur l'ensemble des trois catégories.

De leur côté, les copies ayant obtenu « 0 point » ou « 1 point » (34% et 28%) sont nettement majoritaires et témoignent de difficultés dans le processus de la détermination des aires de ces trois polygones.

Si l'on veut en savoir plus sur la nature des obstacles non surmontés, c'est précisément en observant cette majorité de copies et en ré-analysant la tâche de résolution.

Nous le ferons ici en quatre étapes qui nous paraissent révélatrices d'une construction progressive du concept d'aire et de sa mesure.

4.1. La grandeur « aire »

Pour les élèves, les polygones A, B, C sont des figures géométriques imprimées sur leur feuille d'énoncé, dont les contours sont des segments noirs d'une certaine épaisseur, déterminant une partie intérieure elle-même subdivisée en carreaux du quadrillage.
Les deux personnages, Patricia et Brigitte, se demandent *si les trois polygones ont la même aire* et la question demande de dire *si les aires de ces trois polygones sont les mêmes ou différentes.*
Il s'agit donc en premier lieu d'interpréter le mot « aire » puis les expressions « même aire » ou « aires différentes » à propos de chacun des trois polygones, objets qui portent en eux plusieurs caractéristiques : forme, couleur, épaisseur des traits, longueurs des côtés, « étendue » ou « espace de la feuille » occupé par la partie intérieure …
Les élèves, qui ont déjà une longue expérience de ce type de question, savent qu'il n'y a que deux de ces caractéristiques qu'on peut envisager dans cette situation : celles qui se rapportent soit au contour de la figure, soit à son intérieur ; c'est-à-dire la grandeur « longueur » ou la grandeur « aire » mentionnée dans l'énoncé.
Les grandeurs longueur et aire se côtoient dans les problèmes de géométrie plane, (auxquelles se joindra celle de volume en géométrie dans l'espace).
L'examen des copies de notre problème *Comparaison de figures* a montré que la plupart des groupes ont fait le bon choix entre ces deux grandeurs alors que la confusion est plus fréquente chez les élèves plus jeunes. La « confusion aire-périmètre » n'apparaît plus que dans 2 à 3 % des cas, en catégories 6 et parfois 7, alors qu'on la rencontre souvent, dans des problèmes analogues, en catégories 3 à 5.
Exemple 2 (cat. 7)

- *Sono diversi, abbiamo calcolato il perimetro e abbiamo visto che erano diversi.*
  Il poligono A misura 22,5 cm. Il poligono B misura 12,5 cm . Il poligono C misura 18,5 cm (Elles sont différentes, nous avons calculé le périmètre et avons vu qu'elles étaient différentes ...)
  (En plus, dans cette copie, un côté a été oublié pour le périmètre de B comme pour celui de C).

Il y a aussi quelques réponses plus difficiles à interpréter comme celle-ci, où l'on ne sait pas si la comparaison « plus petite et plus grande » se rapporte à la grandeur « aire », mentionnée, ou à une autre caractéristique des figures.
Exemple 3 (cat. 6)

- *Le aree di ogni poligono sono differenti, perché essendo più piccole e più grandi fra loro risulta impossibile che i poligoni abbiano la stessa area. (Les aires de chaque polygone sont différentes parce que, étant entre elles plus petite et plus grande il est impossible que les polygones aient la même aire).*

4.2. L'unité de mesure de l'aire

La reconnaissance de la grandeur « aire » étant attestée, il faut aborder la question de sa mesure.
On peut comparer des grandeurs, les additionner et les fractionner sans faire appel aux nombres. Ces derniers n'apparaîtront qu'au moment du passage à la mesure, que l'énoncé du problème ne demande pas explicitement.
Certaines copies présentent des découpages et collages ou mentionnent des comparaisons par superpositions, mais sans jamais arriver à recouvrir exactement un polygone par un autre.
La seule démarche efficace ici passe par la détermination du « nombre » de « carreaux du quadrillage » contenus dans chaque polygone. Ce nombre est la « mesure » de l'aire, il est indissociable de l'unité proposée par le quadrillage : un de ses carrés. (Nous avons vu précédemment que la mesure en cm^2 est à écarter)
Comme il y a des carreaux entiers et des parties de carreaux, il faut recomposer ces dernières pour former des carreaux entiers. C'est évident pour la grande majorité des groupes, mais on trouve encore quelques copies (un faible pourcentage, de 3 à 5%, en catégorie 6 avant tout) qui ne distinguent pas les carreaux entiers des parties de carreaux et les additionnent pour en trouver 34 en A, 28 en B et 28 en C.
Exemple 4, aboutissant à cette réponse (avec une petite partie de carré négligée - 33 au lieu de 34 - pour la figure A) où le regroupement des carrés est mentionné mais n'est resté qu'au stade des « bonnes intentions » :

- *Per primo, abbiamo contato i quadratini completi di tutte le figure. Il poligono A misura (solo con i quadrati completi) 9 cm^2 ... B 15* cm^2, *... C 14 cm^2. Poi abbiamo preso i quadratini incompleti e con le parti avanzate abbiamo costruito dei quadrati completi; cosi siamo riusciti a ottenere le aree delle tre figure. Il poligono A misura 33 cm^2, il poligono B misura 28 cm^2, e la figura C misura tanto quanto la figura B. Perciò abbiamo costatato che i poligoni non sono uguali, però fanno eccezione i poligone B e C che hanno appunto la stessa area, mentre il poligono A supera di 5 cm^2 gli altri poligoni.*
  (Nous avons d'abord compté les carrés complets de toutes les figures. Le polygone A mesure (seulement avec les carrés complets) 9 cm^2 ... B 15 cm^2, *... C 14 cm^2. Puis nous avons pris les carrés incomplets et avec les parties qui restent nous avons formé des carrés complets ; nous sommes ainsi arrivés à obtenir les aires des*

trois figures. Le polygone A mesure 33 cm^2, le polygone B mesure 28 cm^2, et la figure C mesure la même chose que la figure B. Comme ceci nous avons constaté que les polygones ne sont pas égaux, mais B et C qui ont la même aire font exception alors que le polygone A vaut 5 cm^2 de plus que les autres polygones.)

On trouve aussi quelques cas où seuls les carrés entiers ont été pris en compte. On ne peut pas alors savoir si les élèves ignorent les parties de carrés par « oubli » ou parce qu'ils estiment que ce n'est pas nécessaire de les prendre en compte pour la comparaison.

Exemple 5 (cat 6)

- *Contando solamente i quadretti interi di ogni figura, si capisce che non hanno la stessa area.*
  (En comptant seulement les carreaux entiers de chaque figure, on comprend qu'elles n'ont pas la même aire).
  A = 9 quadretti interi (carreaux entiers)
  B = 15 quadretti interi (carreaux entiers)
  C = 14 quadretti interi (carreaux entiers)

On pourrait donc penser que, aux quelques exceptions près citées ci-dessus, la très grande majorité des groupes d'élèves sont bien convaincus de la nécessité de rassembler les parties non entières pour former des carrés entiers, c'est-à-dire l'unités de mesure d'aire.

Mais un doute subsiste à la lecture des copies : la partie descriptive de la démarche fait explicitement référence au comptage des carreaux entiers ou reconstitués pour chaque polygone alors que la mesure finale s'exprime,

- soit par un nombre suivi de l'unité : « carré » ou parfois « u » ou parfois « u^2 »
- soit par un nombre seul,
- soit par un nombre suivi de l'unité : « cm^2 ». (V. *Exemple 4*)
- soit par un nombre suivi de l'unité : « cm ».

Si le nombre seul est le résultat d'un comptage d'objets, les carrés, on peut considérer que les élèves n'ont pas jugé nécessaire de préciser l'unité car c'est évident pour eux.

Si la mesure est suivie de « cm^2 », deux hypothèses sont possibles : les élèves ont estimé que les carreaux ont 1 cm de côté (V. *figure 4*) ou ils sont si habitués à utiliser cette unité d'aire qu'ils la notent mécaniquement sans se préoccuper de son opportunité.

Si la mesure est suivie de « cm », ils n'ont vraisemblablement pas perçu le sens de l'unité de mesure.

4.3. La détermination de la mesure de l'aire par dénombrement des unités

Le dénombrement des unités est très souvent approximatif, en raison des recompositions de carrés entiers et aussi de la manière de compter un à un les carrés sans en oublier.

Les copies qui aboutissent aux aires A = 20,5 ; B = C = 21 (en carrés du quadrillage) ou à des réponse voisines comprises entre 20 et 22 portent en général des traces du comptage et des regroupements : numéros ou marques au sein des carrés, flèches, correspondance de couleurs, …

Les réponses plus éloignées, avec parfois des écarts de 4 à 10 carrés entre les trois aires ne présentent aucune trace et la description se limite à quelques mots du genre : « on a compté les carrés ».

Ceci nous permet de dire qu'un dénombrement des unités n'est pas une tâche anodine, pour être efficace il nécessite des traces écrites comme support de comptages et de vérifications ultérieures.

Il faut souligner encore que la reconstitution de carrés exige une analyse visuelle fine des différentes parties. Elle fait intervenir la reconnaissance des déplacements effectués comme étant des isométries, même si elle reste implicite : translations, symétries centrales, rotations.

4.4. La détermination de la mesure de l'aire par « calcul »

Pour éviter le comptage un à un des unités d'aires, une partie des groupes ont décomposé les polygones en rectangles, triangles et parfois trapèzes (pour la figure C).

Pour être efficace, la décomposition est soumise à une condition : certains côtés des nouvelles figures doivent suivre les lignes du quadrillage, d'un nœud à un autre, afin qu'on puisse déterminer leurs longueurs exactement, en unités qui sont des côtés des carrés du quadrillage.

S'il s'agit de triangles rectangles, dont les côtés de l'angle droit sont sur les lignes du quadrillage, l'aire se calcule facilement comme celle d'un demi-rectangle ou à l'aide de la formule de l'aire d'un triangle.

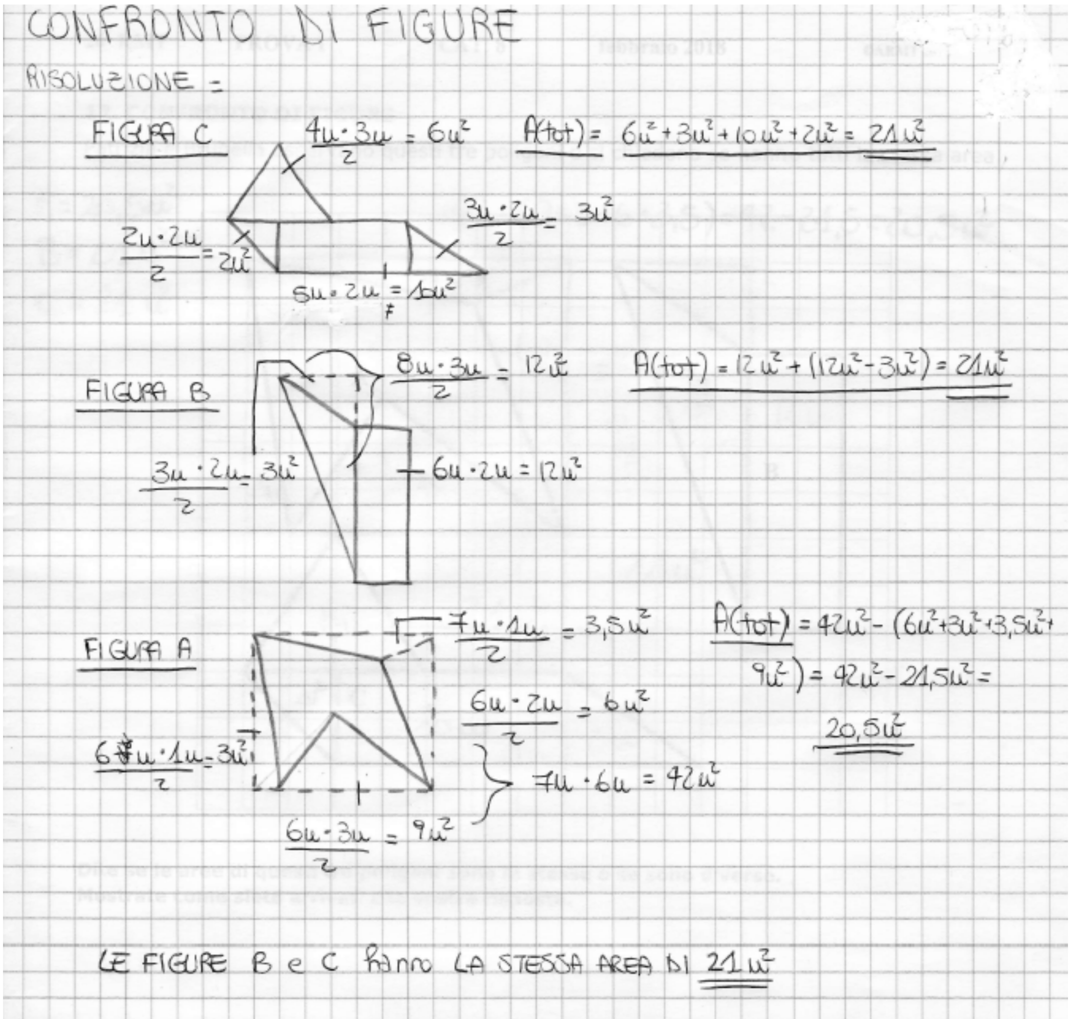
S'il s'agit de triangles non rectangles, ils peuvent être envisagés comme des demi-parallélogrammes, eux-mêmes équivalents à des rectangles ; ou, en faisant appel à la formule, ce sera le côté sur les lignes du quadrillage qui sera la « base » et la distance entre cette base et le sommet opposé qui sera la « hauteur ».

Les *figures 4*, *5* et *6* montrent comment peut se décomposer efficacement le polygone C. La décomposition du polygone B dans les *figures 4* et *5* ne convient pas car la « base » du triangle supérieur n'a pas une longueur entière en côtés de carré du quadrillage.

Pour le polygone A, la décomposition en triangles dont la longueur de certains côtés est déterminée par le quadrillage n'est pas possible. (*figures 4* et *7*). Il faut passer d'une décomposition additive de l'aire du polygone à une décomposition « soustractive » à partir de son rectangle circonscrit dont on va retirer des triangles complémentaires ayant un côté sur les lignes du quadrillage. Il s'agit d'un saut épistémologique qui mérite d'être

signalé car il confirme ce qui a déjà été observé lors de l'analyse a posteriori d'autres problèmes de la même famille de tâches.[3]
Cette décomposition est donc une tâche dont la difficulté varie selon le polygone : facile pour C, plus difficile pour B et non évidente pour A si l'on ne conçoit qu'une partition de la figure.
La décomposition efficace étant réalisée, vient le moment délicat du calcul de l'aire des différentes figures, puis celle de chaque polygone par additions ou soustractions.
Il s'agit d'appliquer les formules des aires, du rectangle et surtout du triangle, A = (b × h) /2. Cette dernière apparaît explicitement dans la moitié des copies où l'aire est déterminée par calcul à partir des unités déterminées par le quadrillage ou des mesures en cm prises sur les figures.
Le taux d'efficacité de l'application de ces formules est tout à fait comparable à celui des procédures par comptage des unités :
- 24% en moyenne (de 15% à 33% de la catégorie 6 à la catégorie 8) des groupes déterminent correctement deux ou trois des aires des polygones proposés (« 4 et 3 points » réunis), ce qui correspond à une efficacité satisfaisante des formules ;
- 15% (de 11% à 17%) ne déterminent correctement qu'une des aires ; l'efficacité peut être considérée comme « moyenne » dans ce cas ;
- 62% (de 75% à 48%) ne déterminent correctement aucune des trois aires (« 1 et 0 point » réunis) ce qui signifie que si les formules ont été appliquées, elles sont inefficaces dans ces cas.
Les applications inefficaces de la formule d'aire du triangle sont dues à différentes difficultés, entre autres :
- Le choix opportun des longueurs à prendre en compte ou à mesurer sur la figure : une « base » n'est pas forcément un segment horizontal ou au bas de la figure comme son nom pourrait le faire croire, une « hauteur » n'est pas forcément verticale ou n'est pas forcément à l'intérieur du rectangle ou n'est confondue avec un côté du triangle que dans certains cas. On constate par exemple que l'aire du triangle à gauche du rectangle du polygone B n'est pour ainsi dire jamais calculée à partir de la base, côté droit « vertical de 6 unités et de la « hauteur », distance de 3 unités horizontalement (il y a contradiction chez les élèves, d'une parte entre « base » et segment « vertical », d'autre parte entre « hauteur » - segment à l'intérieur du triangle et « hauteur » - distance sans le support d'un segment intérieur).
- La prise de mesure précise, que ce soit à la règle ou en unités du quadrillage au cas où les mesures des segments à prendre en compte ne sont pas des nombres entiers.
- La conscience qu'il y a deux types de grandeurs en présence : les longueurs et les aires, avec leurs unités respectives cm ou unités du quadrillage et cm^2 ou carreaux du quadrillage.
- Le choix de la formule adéquate dépendant de la reconnaissance des propriétés de la figure (triangle, rectangle, trapèze …
- Les différente opérations arithmétiques à effectuer : multiplications, division par 2, additions ou soustractions.
En guise de résumé de ce chapitre sur l'aire et sa mesure, nous proposons l'examen de la copie suivante, élaborée par une classe de catégorie 8 :

[3] Voir en particulier la fiche *Fleur ou fusée* (20.II.11) de la banque de problèmes du RMT



Les segments à mesurer sont bien choisis ; leurs mesures sont correctes ; les deux types de grandeurs sont notés précisément par les unités des mesures : *u* et u^2 ; les formules sont choisies de manière adéquate (on remarque au passage que l'aire du triangle de la figure B s'obtient par une soustraction et non directement par (6 × 3)/2), les calculs sont corrects (il y a 14 opérations !).
Cette copie représente l'aboutissement de la construction des savoirs sur l'aire de polygones dont les sommets sont sur des nœuds d'un quadrillage. Elle est « parfaite » et laisse à penser que tout est pour le mieux dans le meilleur des mondes possibles puisque ces élèves sont arrivés au niveau du professeur. Il faut toutefois relever qu'il ne s'agit que d'une exception parmi le millier de celles qui ont été analysées a posteriori et qu'elle est unique parmi les 6% de celles qui ont été analysé en détail et à qui ont été attribués « 4 points » !

5. Au-delà du problème *Comparaison de figures*

Nous venons d'examiner un problème particulier de géométrie - sur le thème spécifique de l'aire de polygones dont les sommets se situent sur les nœuds d'un quadrillage - les résultats globaux et quelques données issues de l'analyse a posteriori d'un millier de copies, dont 350 examinées de manière plus approfondie.
Le tableau des points attribués laisse perplexe, au vu de la grande proportion des groupes d'élèves (plus de la moitié) qui n'ont pas pu trouver une seule des trois aires correctes des polygones.
On peut estimer que la tâche est bien lourde ou que le problème est « trop difficile » mais on ne peut pas attribuer cette difficulté à une ambition excessive au niveau des savoirs mathématiques en jeu : comparer des aires, choisir une unité pertinente pour les mesurer, compter ces unités une à une après recomposition de parties, ou utiliser la formule de l'aire du rectangle ou ce celle du triangle, figures qu'on peut aussi envisager plus simplement comme demi-rectangles ou un demi-parallélogrammes.
Tous ces savoirs figurent aux programmes de tous les pays ou régions dont les classes participent au RMT, de la catégorie 6 à la catégorie 8. On pourrait rétorquer : « Oui, mais … en catégorie 6, chez nous, on s'en tient aux comparaisons d'aires sans calcul, par manipulation ou comptages ». Or c'est justement une procédure des plus adéquates pour résoudre ce problème.

La progression de la catégorie 6 (moyenne de 0,9 points) à la catégorie 8 (moyenne de 1,8 points) est significative mais dans cette dernière catégorie il y a encore 48 % de groupes dont les recherches d'aires sont inefficaces.
Il faut donc aller au-delà des programmes et penser à la formation des maîtres, aux manuels et finalement aux habitudes et pratiques de classe.
Du côté des formules on est en droit de se demander comment celle, fondamentale, de l'aire du rectangle a été abordée. Les élèves ont-ils été sensibilisés au très délicat problème qui se rapporte au « miracle » du produit de deux mesures de la grandeur « longueur » aboutissant à une mesure d'une grandeur différente « l'aire » ou leur a-t-on simplement dit que pour trouver l'aire d'un rectangle il faut multiplier sa longueur par sa largeur ?
Toujours à propos des formules, les élèves ont-ils découvert par eux-mêmes celle du triangle, à partir de celle du rectangle ou ont-ils dû seulement la mémoriser, puis l'appliquer progressivement aux triangles qui ont une base horizontale, puis à d'autres ou la base n'est plus horizontale, mais est toujours le plus long côté … ? A l'observation des copies de *Confrontation de figures*, (triangle du polygone B) on pourrait croire qu'ils n'ont jamais rencontré le cas où la hauteur n'est pas un segment à l'intérieur du triangle.
Toujours à propos de la formule de l'aire du triangle, les élèves ont-ils rencontré des problèmes de proportionnalité entre la mesure de la base (ou de la hauteur) et celle de l'aire ? Par exemple où l'on demande où se situe, sur un côté, l'extrémité d'un segment issu du sommet opposé qui doit partager un triangle en deux parties triangulaires dont l'aire de l'une est le double de l'aire de l'autre ? C'est la tâche du problème *Potager I* (26.II.12) hors de portée de plus de la moitié des groupes d'élèves de catégories 6 à 8 et réussie seulement par moins de 10% d'entre eux.
A propos de la mesure d'aire suggérée par le quadrillage, les élèves ont-ils résolu des problèmes où une de leur tâche est de choisir une unité, commune et permettant de déterminer exactement les longueurs à prendre en considération pour le calcul de l'aire ?
Toutes les interrogations ci-dessus – et il y en beaucoup d'autres - impliquent des réflexions sur les parcours d'apprentissage pour construire des savoirs nécessaires à la détermination des aires des trois polygones de *Confrontation de figures*. Plus généralement, on perçoit au travers des copies d'élèves que ceux-ci n'ont pas l'habitude de résoudre des problèmes de géométrie plane. Ils ont besoin de situations où ils doivent s'interroger, repartir des origines, voire changer de point de vue à propos de concepts élémentaires que l'on croît acquis par la pratique d'exercices répétitifs, d'applications aveugles de formules, de procédures algorithmiques.
Ces construction et reconstructions se déroulent sur des années et ne sont jamais définitives ; c'est le rôle des problèmes, les vrais, de les susciter.
Par exemple, pourquoi ne pas entreprendre, avec des élèves de catégorie 8 à partir d'un problème adapté à leur âge, une réflexion sur des notions abordées deux ans plus tôt comme l'opération de multiplication dans les nombre naturels, ses liens avec l'addition, ses représentions par des aires de rectangles, la nécessité de remplacer les additions répétées par des multiplications lorsque les nombres sont très grands, l'extension aux nombres non entiers, le passage de la multiplication de deux nombres à celle de deux longueurs avec une réflexion sur le fossé qui les séparent et leurs analogies d'ordre numérique,… puis de reprendre ces notions en y incluant la fameuse division par 2 de la formule du triangle et le sens que l'on peut y donner dans ses représentations géométriques.
En choisissant cette voie des problèmes, il est évident qu'on ne se simplifie pas la gestion du temps ni de la « progression » dans le parcours d'apprentissage ; on se situera toujours aux limites de l'inconnu et de la fréquence des interrogations et des découvertes qu'il suscite. La « voie royale » de la succession d'exercices et d'entraînements est plus facile à programmer et paraît beaucoup plus sûre et sécurisante ; mais en observant les difficultés des élèves face à notre problème *Confrontation de figures*, on peut se permettre de penser que c'est celle qui leur a été proposée.
Alors, pourquoi ne pas choisir la voie de la découverte, parsemée de problèmes du RMT ?

AREE DI POLIGONI SU UNA QUADRETTATURA

François Jaquet

Introduzione

Da più di una decina di anni il gruppo "Geometria piana" dell'ARMT volge la propria attenzione alla costruzione del concetto di area da parte degli allievi nel corso della loro scolarità obbligatoria. Su questo tema sono stati elaborati e successivamente analizzati numerosi problemi riguardanti in particolare la determinazione dell'area di poligoni su una quadrettatura.

L'analisi dei risultati di uno di tali problemi presentata in questo articolo permette di fare luce sul lungo percorso dell'elaborazione del concetto di area e di percepire le diverse tappe nel corso delle quali i "saperi" si costruiscono progressivamente, si intrecciano, si completano mutualmente, per arrivare infine alla capacità di "determinare" l'area di un poligono i cui vertici si trovano sui nodi di una quadrettatura.

Presentiamo qui dapprima, nell'ordine: l'enunciato del problema e qualche commento sulla sua elaborazione, i risultati globali e i criteri di attribuzione dei punteggi che permettono di definire un indice di difficoltà o di facilità.

A seguire descriviamo le procedure adottate dai gruppi di allievi che hanno trovato la soluzione, cioè di coloro che mostrano un grado di gestione dell'enunciato sufficiente per portare a termine il compito richiesto.

Verrà poi affrontata l'analisi degli elaborati che permettono di percepire dove si situino le vere chiavi del compito di risoluzione, che l'esame delle risposte corrette non consente di identificare, in quanto gli ostacoli sono superati. In questo stadio dell'analisi, si rileveranno gli errori o le procedure inefficaci rivelatrici delle diverse fasi nella costruzione del "saper determinare l'area di una figura posta su una quadrettatura".

E per finire ci permettiamo di fare qualche considerazione sulle indicazioni didattiche che potremmo trarre da questo problema e dalla sua analisi.

1. Il problema e la sua elaborazione

CONFRONTO DI FIGURE

Patrizia e Brunella osservano questi tre poligoni e si chiedono se hanno tutti la stessa area.

Dite se le aree di questi tre poligoni sono le stesse o se sono diverse.
Mostrate come siete arrivati alla vostra risposta.

A una prima lettura ci sembra si tratti di un'attività il cui enunciato potrebbe essere redatto in forma di "esercizio tradizionale" del tipo "Calcolate l'area di ciascuno di questi tre poligoni".

Qui è invece inserito in un contesto fittizio con due personaggi, Patrizia e Brunella, e dove gli autori del problema immaginano che tali personaggi si pongano delle domande a proposito del confronto delle tre aree.

Questa però è una regola dei "problemi" del RMT: per distinguerli dagli "esercizi" o da altre applicazioni di nozioni già esposti in classe, vengono inseriti in un contesto cercando di evitare che il contesto stesso non funga da freno all'appropriazione della situazione da parte degli allievi.

Al di là delle riflessioni sull'originalità del problema, è necessario conoscerne le origini e le finalità: è stato preparato dal gruppo di lavoro "Geometria piana" dell'ARMT e proposto nella prima prova del 26° RMT alle classi delle categorie da 6 a 8 (da 11 a 14 anni).

Fa seguito a una lunga serie di altri problemi sul confronto di aree di figure disegnata su una quadrettatura i cui enunciati, risultati e osservazioni sugli elaborati degli allievi sono stati oggetto di numerose analisi (si veda la *Banca di problemi del RMT*[1] famiglia di compiti *Confrontare aree.*[2]) e hanno permesso al gruppo di lavoro di redigere così un'analisi a priori del compito di risoluzione:

- *Capire, dalla lettura dell'enunciato e dall'osservazione delle figure, che per confrontarle bisogna calcolare le aree secondo un'unità comune*
- *Constatare che le tre figure non sono né dei rettangoli, né dei triangoli per i quali si possono applicare formule note, che la presenza della quadrettatura permette di scegliere il quadretto come unità comune e che bisognerà scomporre le figure in quadretti interi o parti di quadretti o in figure di base: rettangoli, triangoli o semi rettangoli.*

---

[1] Banca di problemi del RMT. Il sito relativo ha un link a partire dal sito site www.armtint.org

[2] Nella Banca di Problemi, andare su "Famiglie" CA/P), fra gli altri: *RMT 2005* (13.I.02; cat. 3-4); *Cadono le foglie* (18.I.05; cat. 3-5); *Fiore o razzo?* (20.II.11; cat. 6-8); *Il cuore di Martine* (22.I.09; cat. 5-6); I due pesci (25.F.06; cat. 4-6).

Le procedure di determinazione dell'area sono molteplici e differenti da una figura all'altra e da un gruppo di alunni all'altro, in particolare

- *conteggio una a una delle unità intere, poi ricostituzione di unità per spostamento di parti non intere.*
- *scomposizione della figura in rettangoli e triangoli che possono ricostituire un rettangolo per spostamento*
- *percezione del triangolo rettangolo come semi rettangolo*
- *i triangoli non rettangoli senza angoli ottusi sono scomposti in due triangoli rettangoli*
- *calcolo dell'area del rettangolo circoscritto alla figura totale seguito dalla sottrazione delle aree dei rettangoli e/o dei triangoli complementari*
- *applicazione della formula per l'area del triangolo*

- *Trovare l'area delle tre figure, in quadretti, per esempio:*

  Per A: un rettangolo di 6 × 7 da cui si tolgono quattro triangoli di 5 × 1, di 6 × 1, di 6 × 3, di 5 × 2 e un rettangolo di 2 × 1: 42 – 2,5 –3 – 9 – 5 –2 = 20,5.

  Per B: un rettangolo di 6 × 2 e un triangolo di 6 × 3 : 12 + 9 = 21 o compensazione di quadretti per il triangolo

  Per C: scomposizione in un rettangolo e tre triangoli: 6 + 2 + 10 + 3 = 21
- *Concludere che le tre aree non sono uguali e che misurano rispettivamente 20,5; 21 e 21. (in quadretti della quadrettatura)*

Oppure:

Calcolo delle aree a partire da misure prese, in cm o mm, sui poligoni che compongono le figure. (Questa procedura esige delle misure prese circa al mm, i calcoli precisi di ogni area e la presa in carico rigorosa degli errori dovuti alle approssimazioni per essere certi che l'area di A sia inferiore alle aree di B e C).

Le categorie alle quali proporre il problema sono state determinate in funzione dei risultati dei problemi precedenti, coscienti del fatto che il compito per la risoluzione esige rigore e precisione per arrivare alle tre aree "esatte", ma che tale compito non è insormontabile anche per allievi di 11/12 anni (categoria 6) che lavorano in gruppo, anche se ci si potrebbe attendere risposte parziali o approssimative. Le analisi a posteriori dei problemi analoghi avevano mostrato che la gran parte degli allievi di quest'età sono capaci di appropriarsi della situazione e di impegnarsi nella determinazione delle aree.

Le aree dei tre poligoni (20,5; 21 e 21, in quadretti della quadrettatura) sono molto vicine una all'altra. Si elimina così il rischio che gli allievi si limitino a una stima visiva delle aree stesse senza svolgere una ricerca più precisa.

I poligoni sono "non convessi" e due fra essi, B e C, sono facilmente scomponibili in triangoli e rettangoli alcuni lati dei quali si misurano con un semplice conteggio sulla quadrettatura; il triangolo di B complementare al rettangolo 2 × 6 ha, volontariamente, un angolo ottuso; per A la scomposizione in triangoli i cui lati si determinano facilmente non è possibile, deve essere inscritto in un rettangolo dal quale si possono "sottrarre" dei triangoli con lati e altezze le cui misure sono numeri interi..

La formulazione della domanda: *Dite se le aree di questi tre poligoni sono le stesse o se sono diverse* non lascia nessuna incertezza in rapporto a domande più aperte del tipo *Questi tre poligoni hanno la medesima area?* Oppure *Che cosa ne pensate?* In effetti la domanda di questo problema rispetta i vincoli dei criteri di attribuzione dei punteggi (si veda più sotto, dopo la tabella dei risultati). Nel caso dei problemi del RMT, si evitano le domande con risposta "sì" o "no" o ancora con risposta data "a caso" e che crea dalle interferenze con le "valutazioni" dei ragionamenti e delle spiegazioni complete.

L'ultima ipotesi dell'analisi del compito che riguarda la determinazione delle aree a partire da misure prese sulle figure era stata evocata dal gruppo di lavoro e mantenuta nella formulazione finale dell'analisi a priori, coscienti del fatto che questa procedura non possa portare a una risposta certa a seguito delle imprecisioni della procedura.

Ancora un'osservazione: è sembrato inutile precisare che la trama sulla quale sono disegnati i tre poligoni è a maglie quadrate e che i vertici si trovano sui nodi di questa quadrettatura. Per gli allievi ciò è perfettamente chiaro e lo si era già constatato per i problemi precedenti. È stato così possibile alleggerire l'enunciato, al contrario di un testo scolastico sottoposto a condizioni di rigore estremo. Sappiamo comunque che gli allievi ricevono i problemi in forma di fotocopie delle quali non è possibile garantire una precisione a meno di un millimetro.

2. Risultati

I punteggi attribuiti ai 3265 elaborati di 18 sezioni del RMT sono i seguenti:

punteggi	0	1	2	3	4	Totale	m
Cat. 6	667	331	147	167	34	1346	0,9
Cat. 7	293	356	194	230	66	1139	1,5
Cat. 8	158	216	133	185	88	780	1,8
tot	**1118**	**903**	**474**	**582**	**188**	**3265**	**1,3**

in %

Cat. 6	50%	25%	11%	12%	3%
Cat. 7	26%	31%	17%	20%	6%
Cat. 8	20%	28%	17%	24%	11%
tot	34%	28%	15%	18%	6%

Secondo i criteri definiti a priori per l'attribuzione dei punteggi da parte delle commissioni di ciascuna sezione:

4 Risposta corretta: le tre aree non sono uguali A: 20,5; B: 21 e C: 21 (in quadretti della quadrettatura). Si accetta che la disuguaglianza non sia menzionata esplicitamente; per ognuna delle aree però sono richiesti la descrizione dei calcoli o i conteggi. (In caso di misure in cm o mm, la disuguaglianza o l'uguaglianza delle aree devono essere accompagnate da calcoli precisi, che tengono conto esplicitamente degli errori di approssimazione)

3 Risposta corretta, con le tre aree trovate, ma con i dettagli dei calcoli solamente per una o due tra di esse
oppure risposta corretta per due delle aree e errore sulla terza, con dettaglio dei calcoli
oppure aree calcolate a partire da misure corrette al mm, senza menzione esplicita agli errori dovuti alle approssimazioni

2 Risposta corretta, con le tre aree trovate, senza il dettaglio dei calcoli
oppure risposta corretta per una sola delle tre aree e un solo errore per ognuna delle altre due, ogni volta con il dettaglio dei calcoli
oppure risposta corretta con il calcolo corretto per due aree, con il dettaglio dei calcoli, ma il calcolo della terza non è stato affrontato o contiene più di un errore
oppure risposta errata (le aree dei tre poligoni sono uguali) dovuta a degli errori di calcolo nella determinazione dell'area di A, con il dettaglio delle operazioni

1 Determinata soltanto l'area di una o due delle figure, senza dettagli
oppure risposta approssimativa a partire da misure prese sui poligoni che compongono le figure

0 Incomprensione del problema

Commenti

2.1. Fedeltà e validità

I punteggi da 0 a 4 sono stati attribuiti da commissioni formate per la maggior parte da due persone, secondo i criteri precedenti. In linea di massima ogni commissione esamina tutti gli elaborati dello stesso problema per tutta la sezione al fine di minimizzare le differenze di interpretazione dei criteri che peraltro possono esistere da una commissione all'altra, cioè da una sezione all'altra. Bisogna pertanto essere coscienti delle alterazioni legate a queste 18 commissioni (o più) differenti, ma anche al numero di classi di ciascuna sezione, alle caratteristiche delle classi: numero di allievi, insegnante, abitudini, programmi… Le medie dei punteggi sono dunque solo indicatori globali di riuscita.

2.2. Evoluzione da una categoria all'altra

Gli indicatori precedenti, benché approssimativi, testimoniano comunque dell'esistenza di una progressione sensibile dalla categoria 6 (vicino al punteggio "1") alla categoria 8 (più vicino al punteggio "2"). Questa evoluzione è più sensibile se si osservano le percentuali dei "0 punti", vicine al 50% in categoria 6 e ridotte al 20% in categoria 8.
Globalmente la tabella dei risultati mostra che il problema *Confronto di figure* non è facile per allievi di categoria 6 e si rivela ancora ben "consistente" per allievi di categoria 8.

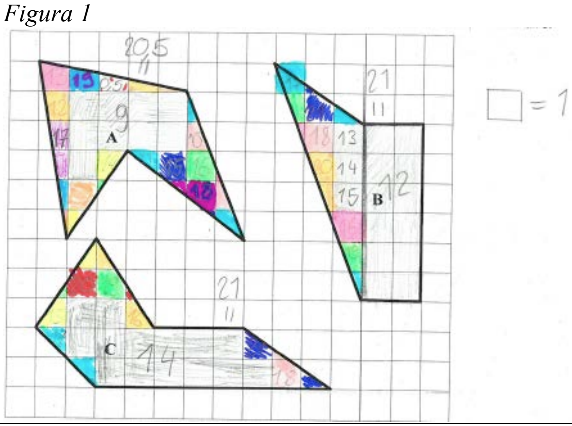
3. Le procedure di risoluzione

I risultati statistici precedenti dipendono in sostanza solo da qualche persona, una ventina di commissioni, che hanno esaminato gli elaborati al fine di attribuire i punteggi. Sono ancora “incorporei”: è solo al momento di un’analisi a posteriori degli elaborati che si può interpretarli in maniera qualitativa senza comunque saperne di più rispetto a ciò che figura sul foglio risposta consegnato dal gruppo.
(Sui 3265 elaborati consegnati ne abbiamo analizzati 1050, di quattro sezioni, in merito all’attribuzione dei punteggi e 350 per un’analisi a posteriori più dettagliata.)
Il lettore dell’articolo che legga il problema e tenti di risolverlo è naturalmente interessato alle procedure dei gruppi di allievi per confrontarle con la sua. Lo sono anche gli autori del problema che vogliono peraltro verificare se la loro analisi a priori funziona.
Cominciamo dunque a interessarci alle “riuscite” del problema presentando qualche elaborato conforme all’analisi a priori: dapprima quelli relativi alla ricerca dell’area per conteggio dei quadrati, poi quelli per scomposizione dei poligoni in figure note e infine quelli con il ricorso alle misure, in centimetri, sulle figure.

3.1 Unità per unità

Questa procedura è la più frequente nelle classi di categoria 6 che hanno trovato le tre aree, ma anche tra altre che hanno trovato solo una o due aree o ancora che non hanno gestito bene il conteggio.
Nell’osservare gli elaborati che seguono (*figg.* 1, 2, 3) ci si rende conto della ricchezza del compito: per poter contare i quadratini è necessario ricomporre quelli che non sono interi, indicare queste ricomposizioni con dei colori (*fig. 1*) o delle linee (*fig. 2*) o ancora numero di quadretti (*fig. 3*).
I saperi matematici mobilizzati sono semplici: riconoscere un’unità adeguata alla misura di area, il quadretto della quadrettatura, implicitamente o esplicitamente (*fig. 1*) poi addizionare queste unità (*fig. 2*).
Il linguaggio non è quello dei matematici ma è sufficiente a spiegare la procedura e la risposta: B e C hanno la medesima area (21) ma quella di A vale 0,5 di meno (*fig. 1*), di conseguenza i tre poligoni non hanno la stessa area.
È a livello di “competenze” che possiamo apprezzare la qualità del lavoro di questi gruppi: precisione delle osservazioni e delle notazioni assolutamente necessarie in particolare per i semi-quadrati della figura A.
Queste competenze sono alla portata solo di una minoranza di gruppi e non sono legate ad apprendimenti scolastici. Possiamo pensare che la risoluzione di problemi in cooperazione favorisca il loro sviluppo.

Figura 1



C + B = medesima area
A = 0,5 –
Questi poligoni non hanno la stessa area

Figura 2

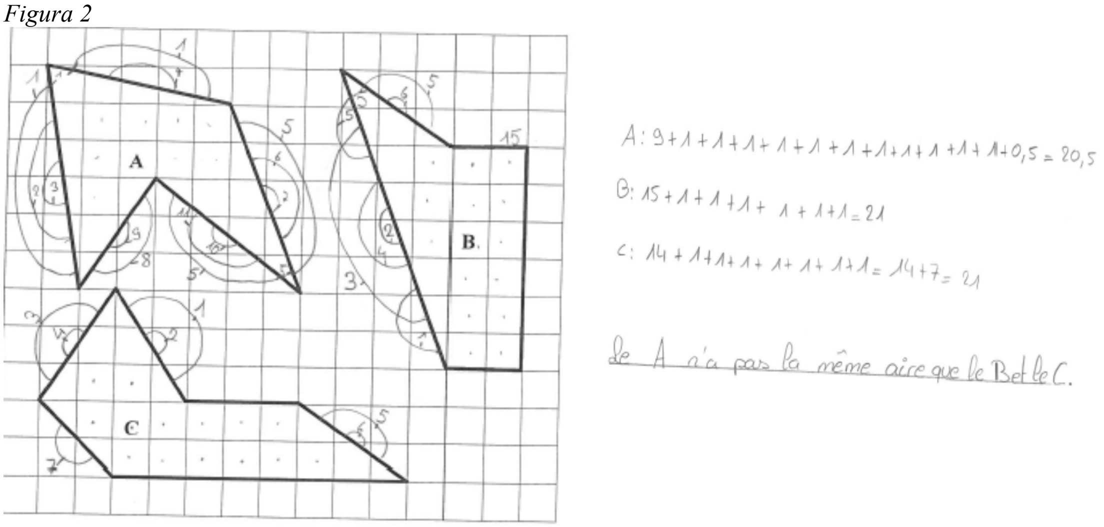
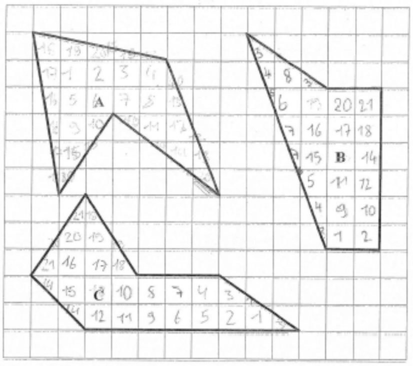
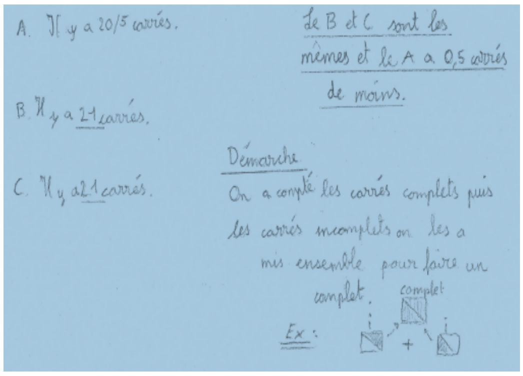


Figura 3





3.2 Scomposizione in figure note

Per evitare il conteggio uno a uno dei quadretti unità, numerosi gruppi hanno scomposto ogni poligono in rettangoli e triangoli.

Questa scomposizione è abbastanza semplice per la figura C (*fig. 4*), ma presenta un ostacolo per la figura B che numerosi gruppi scompongono in un rettangolo di 2 × 6, a destra della figura e due triangoli a sinistra separati da un prolungamento della larghezza superiore del rettangolo. Il gruppo che ha presentato la scomposizione di B della *figura 4*, come altri, è arrivato a un'area di 21 quadretti con una compensazione poco convincente arrotondando proprio per compensazione le due aree di questi triangoli da 6 e da 3. Altri, la maggioranza, non gestiscono bene la compensazione.
Il metodo efficace nel caso della figura B sarebbe di scomporla in un rettangolo e un solo triangolo di cui un lato è determinato (6) e potrebbe essere utilizzato come "base" in un linguaggio abituale se ci si rende conto che "l'altezza" corrispondente è anch'essa determinata (3). Pochissimi gruppi hanno proceduto in quel modo ma in maniera un po' fortunata, come nel caso della *figura 6* dove viene trovata un'area di 9 per questo triangolo ma commette un "lapsus" a proposito della scrittura: 8 × 3 / 2 al posto di 6 × 3 / 2, segno dell'attrazione della lunghezza 8 per la misura della "base".
Per la figura A, l'ostacolo della scomposizione "additiva" in triangoli e rettangoli è ancora più difficile da sormontare. Lo si nota sulla *figura 4*: una suddivisione in figure elementari seguendo la quadrettatura porta in genere ad aree approssimative che non permettono di ottenere la precisione di 20,5 per l'area. Per evitare queste approssimazioni o ricomposizioni quadratino per quadratino bisogna pensare non a scomporre la figura, bensì a inscriverla in un rettangolo e a fare appello alla differenza di aree (*fig. 6*). Questo salto di ordine concettuale sarà discusso più avanti.

Figura 4

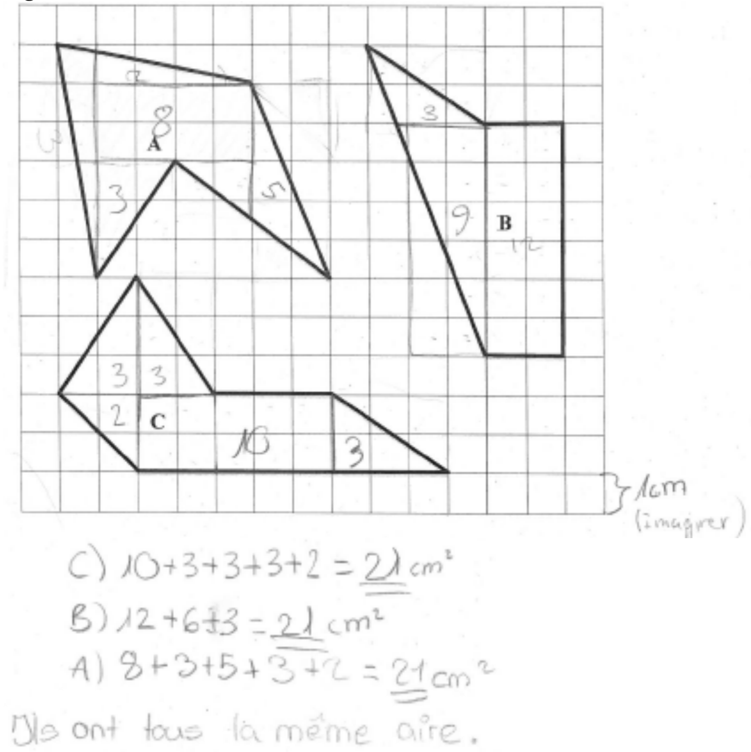


Figura 5

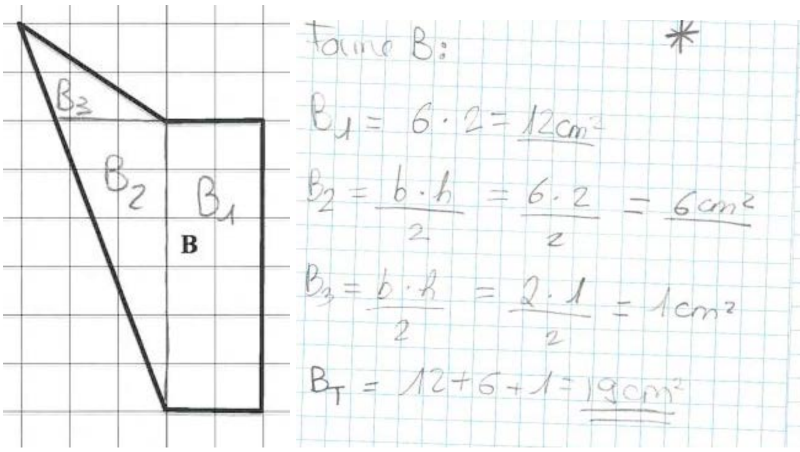
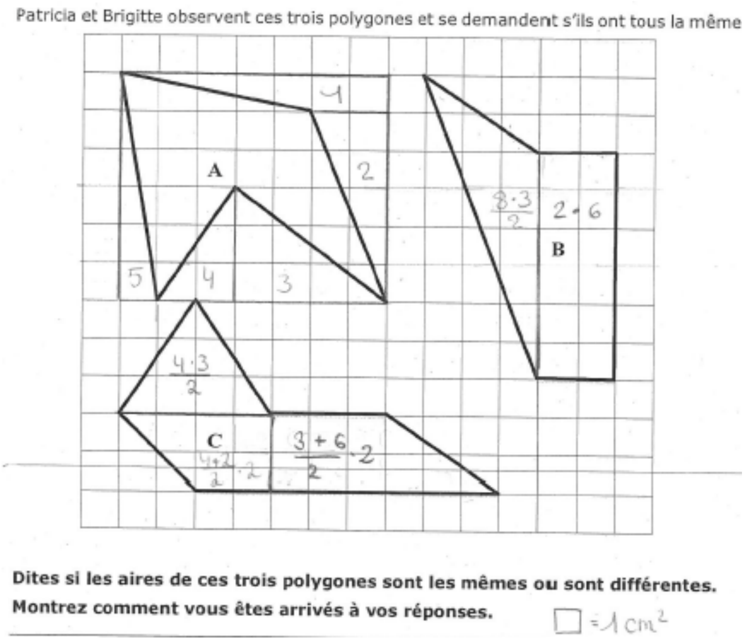


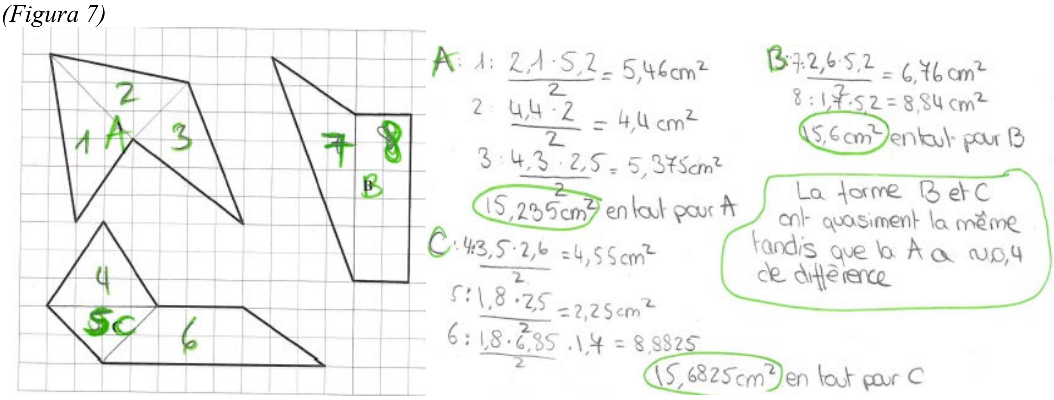
Figura 6



3.3. Aree ottenute a partire da misure

L'analisi a priori cita esplicitamente la procedura con le misure in centimetri prese sui tre poligoni sottolineando che *questa procedura esige delle misure prese circa al millimetro, i calcoli precisi di ogni area e la presa in carico rigorosa degli errori dovuti alle approssimazioni per essere certi che l'area di A sia inferiore alle aree di B e C.*
In effetti il 25% circa dei gruppi ha scelto di misurare le lunghezze dei lati sulle figure con un righello, evidentemente senza successo poiché anche con strumenti "precisi" a meno di un millimetro, non si riesce a stabilire né che l'area di B è la medesima di quella di C, né che quella di A è minore delle altre due.
Solo un elaborato sui 350 analizzati in dettaglio (*figura 7*) fa esplicitamente allusione all'incertezza legata all'aver preso le misure dicendo che *Le forme B e C hanno quasi la stessa mentre la A ha circa 0,4 di differenza.*

(Figura 7)



Gli altri elaborati con calcoli d'area corretti che riguardano misure precise conducono a risposte "no, tutte le figure hanno aree differenti.
Esempio 1: (cat. 7)

- *… Il poligono A l'abbiamo diviso in un trapezio, un triangolo scaleno e un triangolo isoscele e abbiamo calcolato l'area delle tre figure e le abbiamo sommate, il risultato è stato 17,51 cm^2.*
  … B … in un triangolo equilatero, un triangolo rettangolo et un rettangolo… 17,67 cm^2.
  … C … in due triangoli equilateri, un triangolo rettangolo et un rettangolo… 16,945 cm^2.
  Quindi i tre poligoni non sono equivalenti.

Bisogna osservare a tale proposito che i triangoli equilateri citati in effetti non sono equilateri, ma le misure e i calcoli sono corretti.
Gli allievi di queste categorie, anche quelli di 13/14 anni non riescono ancora a approcciare concetti quali stima e incertezza.

In generale, le procedure tramite misure hanno dato molto raramente risultati accettabili (anche tenendo conto dell'impossibilità di confrontare in questo modo le aree dei tre poligoni) a causa delle grosse imprecisione nella misurazione, delle scelte inadeguate della base e dell'altezza dei triangoli e delle applicazioni errate della formula (b × h) / 2.

4. L'area e la sua misura

La tabella dei risultati mostra che solo una minoranza di elaborati (il 6%) ha ottenuto i "4" punti determinati dai criteri di attribuzione dei punteggi:
Risposta corretta: tre aree non sono uguali A: 20,5; B: 21 e C: 21 (in quadretti della quadrettatura). Si accetta che la disuguaglianza non sia menzionata esplicitamente; per ognuna delle aree però sono richiesti la descrizione dei calcoli o i conteggi. (In caso di misure in cm o mm, la disuguaglianza o l'uguaglianza delle aree devono essere accompagnate da calcoli precisi, che tengono conto esplicitamente degli errori di approssimazione)
Se aggiungiamo il 18% dei "3 punti" e il 25% dei "2 punti", cioè con rispettivamente due delle tre aree, o una sola, con calcolo esatto, siamo ancora al di sotto della metà di quella che potremmo giudicare come "riuscita parziale" del compito, sull'insieme delle tre categorie.
Da parte loro gli elaborati che hanno ottenuto "0 punti" o "1 punto" (34% e 28%) sono nettamente maggioritari e evidenziano le difficoltà nel processo di determinazione delle aree di questi tre poligoni.
Nell'analizzare questa maggioranza di elaborati e riprendendo l'analisi del compito si può cercare di saperne di più sulla natura degli ostacoli non superati.
Lo faremo in quattro tappe che ci paiono rivelatrici di una costruzione progressiva del concetto di area e della sua misura.

4.1. La grandezza "area"

Per gli allievi i poligoni A, B, C sono figure geometriche stampate sul loro foglio con l'enunciato e i contorni che sono dei segmenti in nero con un certo spessore che determinano una parte interna suddivisa anch'essa in quadretti della quadrettatura.
I due personaggi, Patrizia e Brunella, si chiedono *se i tre poligoni hanno tutti la stessa area* e la domanda dell'enunciato richiede di dire se *le aree di questi tre poligoni sono le stesse o se sono differenti.*
Si tratta in primo luogo di interpretare il termine "area", poi le espressioni "stessa area" o "aree differenti" a proposito di ciascuno dei tre poligoni, oggetti che contengono diverse caratteristiche: forma, colore, spessore dei segmenti, lunghezza dei lati, "estensione" o "spazio del foglio" occupato dalla parte interna…
Gli allievi, che hanno già una lunga esperienza di questo tipo di questioni, sanno che ci sono solo due caratteristiche che si possono prendere in considerazione in questa situazione: quelle che si riferiscono o al contorno della figura o al suo interno; cioè la grandezza "lunghezza" o la grandezza "area" menzionata nell'enunciato.
Le grandezze lunghezza e area "si intersecano" nei problemi di geometria piana (ai quali si aggiungerà quella del volume in geometria dello spazio).
L'esame degli elaborati del nostro problema *Confronto di aree* ha evidenziato che la maggior parte dei gruppi ha fatto la scelta corretta fra queste due grandezze mentre la confusione è più frequente nel caso di allievi più giovani.
La "confusione area-perimetro" appare solo nel 2 o 3% dei casi, in categoria 6 e talvolta in categoria 7, mentre la si incontra sovente in problemi analoghi nelle categorie da 3 a 5.
Esempio 2 (cat. 7)
- *Sono diversi, abbiamo calcolato il perimetro e abbiamo visto che erano diversi.*
  Il poligono A misura 22,5 cm. Il poligono B misura 12,5 cm. Il poligono C misura 18,5 cm.
  (inoltre, in questo elaborato, sia per il perimetro di B che per quello di C un lato è stato "dimenticato").

Si trova anche qualche risposta più difficile da interpretare come quella che segue nella quale non sappiamo se il confronto (più piccolo o più grande" riguarda la grandezza "area", menzionata, o a un'altra caratteristica delle figure.
Esempio 3 (cat. 6)
- *Le aree di ogni poligono sono differenti, perché essendo più piccole e più grandi fra loro risulta impossibile che i poligoni abbiano la stessa area.*

4.2. L'unità di misura dell'area

Una volta sancito il riconoscimento della grandezza "area", bisogna affrontare la questione della sua misura.
Possiamo confrontare grandezze, addizionarle e frazionarle senza far appello ai numeri. Questi ultimi interverranno solo al momento del passaggio alle misure che l'enunciato del problema non richiede esplicitamente.
Alcuni elaborati presentano ritagli e ricomposizioni dove vengono menzionati confronti per sovrapposizione, ma senza arrivare mai a ricoprire esattamente un poligono con l'altro.
La sola procedura efficace qui passa per la determinazione del "numero" di "quadretti della quadrettatura" di ciascun poligono. Questo numero è la "misura" dell'area ed è indissociabile dall'unità proposta dalla quadrettatura: uno dei suoi quadretti (abbiamo visto in precedenza che la misura in centimetri quadrati è da scartare).
Poiché ci sono quadretti interi e parti di quadretti, bisogna ricomporre questi ultimi per formare quadretti interi. È evidente per la maggior parte dei gruppi, ma c'è ancora qualche caso (una bassa percentuale, dal 3 al 5% in categoria 6, in particolare) che non distinguono i quadretti interi dalle parti di quadretti e li addizionano per trovarne 34 in A, 28 in B e 28 in C.
Esempio 4, che arriva a questa risposta (con una piccola parte di quadratini dimenticati - 33 al posto di 34 - per la figura A) dove è menzionato il raggruppamento dei quadratini che è rimasto, però, allo stadio delle "buone intenzioni":

- *Per prima, abbiamo contato i quadratini completi di tutte le figure. Il poligono A misura (solo con i quadrati completi) 9 cm*^{2}*... B 15* cm^2, *... C 14 cm*^{2}*. Poi abbiamo preso i quadratini incompleti e con le parti avanzate abbiamo costruito dei quadrati completi; cosi siamo riusciti a ottenere le aree delle tre figure. Il poligono A misura 33 cm*^{2}*, il poligono B misura 28 cm*^{2}*, e la figura C misura tanto quanto la figura B. Perciò abbiamo costatato che i poligoni non sono uguali, però fanno eccezione i poligoni B e C che hanno appunto la stessa area, mentre il poligono A supera di 5 cm*^{2} *gli altri poligoni.*

Troviamo anche qualche caso dove stati presi in considerazione solo i quadratini interi. Non possiamo dunque sapere se gli allievi ignorano le parti di quadretto per "dimenticanza" o perché stimano che non sia necessario considerarli per il confronto.

Esempio 5 (cat. 6)

- *Contando solamente i quadretti interi di ogni figura, si capisce che non hanno la stessa area.*
  A = 9 quadretti interi
  B = 15 quadretti interi
  C = 14 quadretti interi

Potremmo dunque pensare che, a parte qualche eccezione citata più sopra, la maggioranza dei gruppi di allievi siano convinti della necessità di ricomporre le parti non intere per formare quadretti interi, cioè l'unità di misura dell'area.
Dalla lettura degli elaborati, rimane però un dubbio: la parte descrittiva della procedura fa esplicitamente riferimento al conteggio dei quadretti interi ricomposti per ciascun poligono dove la misura finale si esprime,
- sia con un numero seguito dall'unità: "quadretto" o talvolta "u" o anche, talvolta, "u^2
- sia con un numero solo,
- sia con un numero seguito dall'unità: "cm^2". (si veda *Esempio 4*)
- sia con un numero seguito dall'unità: "cm".

Se il numero solo è il risultato di un conteggio di oggetti, i quadretti, possiamo pensare che gli allievi non abbiano stimato necessario precisare l'unità perché evidente per loro.
Se la misura è seguita da "cm^2", sono possibili due ipotesi: gli allievi hanno stimato che i la lunghezza del lato di un quadratino misuri 1 cm (si veda la *figura 4*) o che sono così abituati a utilizzare questa unità d'area che la indicano meccanicamente senza preoccuparsi della sua opportunità.
Laddove la misura sia seguita da "cm", gli allievi non hanno verosimilmente percepito il senso dell'unità di misura.

4.3. La determinazione della misura dell'area per conteggio delle unità

Il conteggio delle unità è molto spesso approssimativo in ragione delle ricomposizioni di quadretti interi e anche della maniera di contare uno a uno i quadretti senza dimenticarne alcuno.
Gli elaborati che arrivano alle aree A = 20,5; B = C = 21 (in quadretti della quadrettatura) o a risposte vicine comprese tra 20 e 22 portano in generale tracce di conteggio e raggruppamento: numeri o segni all'interno dei quadrettini, frecce, corrispondenza di colori, …
Le risposte più lontane, con talvolta scarti da 4 a 10 quadretti tra le tre aree non presentano tali tracce e la descrizione si limita a qualche termine del genere: "abbiamo contato i quadretti".
Questo ci permette di dire che un conteggio delle unità non è un compito irrilevante; per essere efficace necessita di tracce scritte come supporto per il conteggio e verifiche ulteriori.
Bisogna sottolineare ancora che la ricostituzione di quadretti esige un'analisi visiva fine delle diverse parti. E ciò fa intervenire il riconoscimento degli spostamenti effettuati come isometrie, anche se restano implicite: traslazioni, simmetrie centrali, rotazioni.

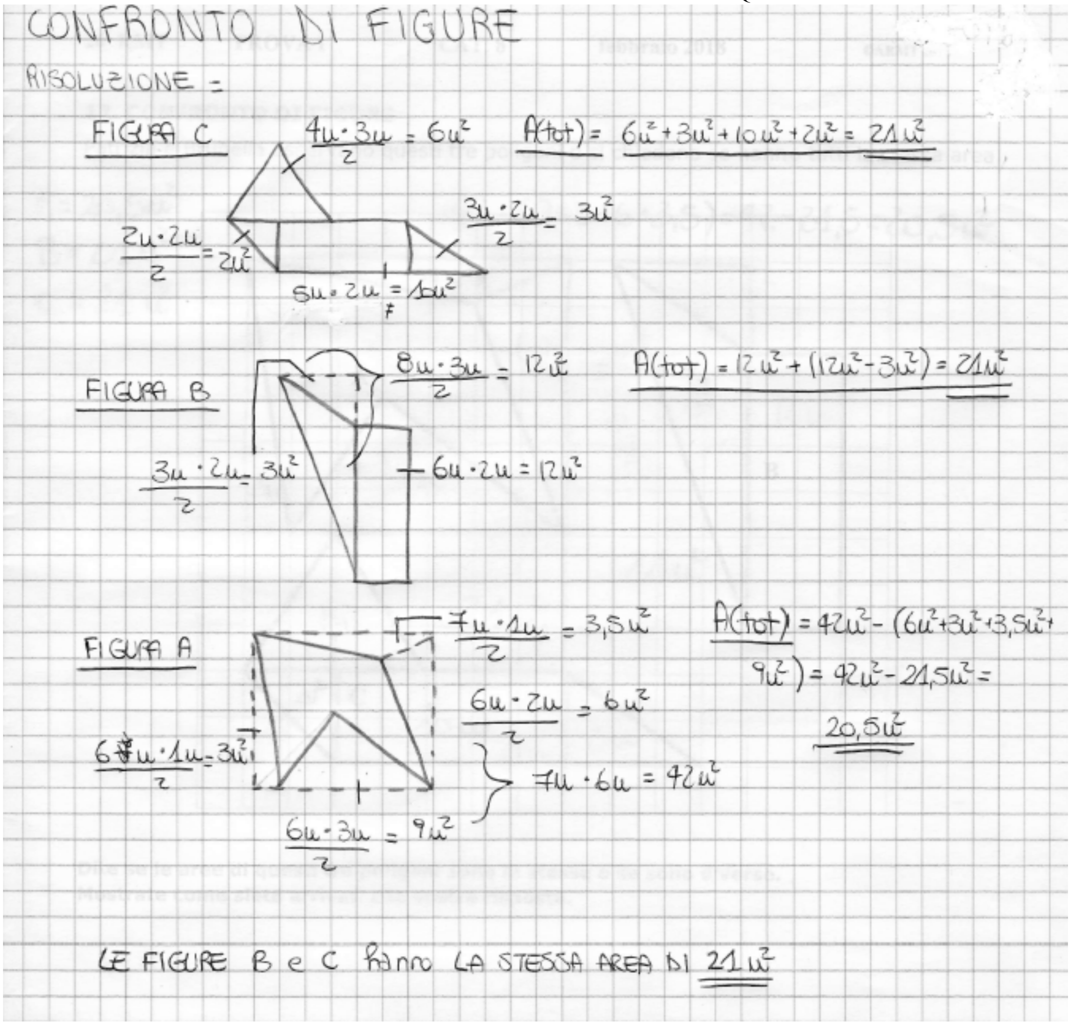
4.4. La ricerca delle misure dell'area con conteggio delle unità

Per evitare il conteggio uno a uno delle unità d'area una parte dei gruppi ha scomposto i poligoni in rettangoli, triangoli e talvolta trapezi (per la figura C).
Per essere efficace, la scomposizione deve rispettare una condizione: alcuni lati delle nuove figure devono seguire le linee della quadrettatura, da un nodo all'altro, perché si possano determinare esattamente le loro dimensioni, in unità che sono i lati dei quadrettini della quadrettatura.
Nel caso di triangoli rettangoli, i cui cateti sono sulle linee della quadrettatura, l'area si calcola facilmente come quella di un semi-rettangolo o con il ricorso alla formula dell'area del triangolo.
Invece i triangoli non rettangoli possono essere visti come semi-parallelogrammi, anch'essi equivalenti a rettangoli; o ancora facendo appello alla formula e il lato su una linea della quadrettatura fungerà da "base" mentre la distanza fra questa base e il vertice opposto ne sarà "l'altezza".
Le *figure 4*, *5* e *6* mostrano in quale modo possa essere scomposto efficacemente il poligono C. Mentre la scomposizione del poligono B nelle *figure 4* e *5* non va bene perché la "base" del triangolo superiore non ha una lunghezza intera in lati dei quadrettini della quadrettatura.
Nel caso del poligono A, la scomposizione in triangoli la cui lunghezza di alcuni lati sia determinata dalla quadrettatura non è possibile (*figure 4* e *7*). Bisogna passare da una scomposizione additiva dell'area del poligono a una scomposizione "sottrattiva" a partire dal suo rettangolo circoscritto dal quale si tolgono i triangoli complementari aventi un lato sulle linee della quadrettatura. Si tratta di un salto epistemologico che merita di essere segnalato in quanto conferma ciò che era già stato osservato all'atto delle analisi a posteriori di altri problemi della medesima famiglia di compiti.[3]
Questa scomposizione è dunque un compito la cui difficoltà varia a seconda del poligono: facile per C, più difficile per B e non evidente per A se si pensa solo alla suddivisione della figura.
Una volta realizzata la scomposizione più efficace, viene il momento delicato del calcolo dell'area delle differenti figure, poi quella di ciascun poligono per addizione o sottrazione.
Si tratta di applicare le formule delle aree del rettangolo e soprattutto del triangolo $A = (b \times h) /2$. Quest'ultima appare esplicitamente nella metà degli elaborati nei quali l'area è determinata con il calcolo a partire dalle unità determinate dalla quadrettatura o dalle misure in centimetri prese sulle figure.
Il tasso di efficacia dell'applicazione di queste formule è confrontabile con quello delle procedure per conteggio di unità:
- il 24% in media (dal 15% al 33% dalla categoria 6 alla categoria 8) dei gruppi determina correttamente due o tre delle aree dei poligoni proposti («4 e 3 punti» riuniti), cosa che corrisponde a una efficacia soddisfacente delle formule;
- il 15% (dall'11% al 17%) determina correttamente solo un'area; l'efficacia può essere considerata come "media", in questo caso;
- il 62% (dal 75% al 48%) non determina correttamente alcuna delle tre aree («1 e 0 punti» riuniti), ciò significa che, benché le formule siano state applicate, in questo caso si sono rivelate inefficaci.

Le applicazioni inefficaci della formula d'area del triangolo sono dovute a diverse difficoltà, fra le altre:
- la scelta opportuna delle lunghezze da prendere in considerazione o da misurare sulla figura: una "base" che non è detto che sia orizzontale o in basso nella figura come il "nome" potrebbe far credere, una "altezza" che non è detto che sia verticale o che non sia all'interno del rettangolo o ancora non coincida con un lato del triangolo salvo in alcuni casi. Constatiamo per esempio che l'area del triangolo a sinistra del rettangolo del poligono B non è, per così dire, mai calcolata a partire dalla base, lato destro "verticale di 6 unità e della "altezza", distanza di 3 unità orizzontalmente (c'è una contraddizione negli allievi, da una parte tra "base" e segmento "verticale", e dall'altra tra "altezza" – segmento all'interno del triangolo e "altezza" – distanza senza il supporto di un segmento interno).
- La misurazione precisa, sia con il righello sia in unità di quadrettatura, nel caso in cui le misure dei segmenti da prendere in considerazione non siano numeri interi.
- La coscienza che si è di fronte a due tipi di grandezze: le lunghezze e le aree, con le loro unità rispettive centimetri o lati della quadrettatura e centimetri quadrati o quadretti della quadrettatura.
- La scelta della formula adeguata che dipende dal riconoscimento delle proprietà della figura (triangolo, rettangolo, trapezio…)
- Le diverse operazioni aritmetiche da effettuare: moltiplicazioni, divisione per 2, addizione o sottrazione.

A guisa di sintesi di questo capitolo sull'area e la sua misura proponiamo l'esame dell'elaborato che segue, realizzato da una classe di categoria 8:

[3] Si veda in particolare la scheda *Fiore o razzo* (20.II.11) della Banca di Problemi del RMT.



I segmenti da misurare sono ben scelti; le loro misure sono corrette; i due tipi di grandezze sono annotate con precisione con le unità di misura: u e u^2; le formule sono scelte in maniera adeguata (osserviamo che l'area del triangolo della figura B si ottiene con una sottrazione e non direttamente con 6 × 3)/2), i calcoli son corretti (ci sono 14 operazioni!).

Questo elaborato rappresenta la conclusione della costruzione dei saperi sull'area di poligoni i cui vertici sono nodi di una quadrettatura. È "perfetto" e fa pensare che tutto vada per il meglio poiché questi allievi sono arrivati al livello dell'insegnante. Bisogna comunque rilevare che si tratta solo di un'eccezione tra le migliaia di quelli che sono stati analizzati a posteriori e che è unica fra il 6% di quelle analizzate in dettaglio e che hanno ricevuto "4 punti"!

5. Al di là del problema *Confronto di figure*

Abbiamo analizzato un problema di geometria particolare - sul tema specifico dell'area di poligoni i cui vertici si situano sui nodi di una quadrettatura -, i risultati globali e qualche dato scaturito dell'analisi a posteriori di un migliaio di elaborati, di cui 350 analizzati in maniera più approfondita.

La tabella dei punteggi attribuiti lascia perplessi per il grande numero di gruppi di allievi (più della metà) che non sono riusciti a trovare neanche alcuna area corretta delle tre dei poligoni.

Si potrebbe pensare che il compito sia difficoltoso o che il problema sia "troppo difficile", ma non possiamo attribuire questa difficoltà a un'ambizione eccessiva a livello dei saperi matematici in gioco: confrontare aree, scegliere un'unità pertinente per le misure, contare queste unità una a una dopo ricomposizione di parti, o utilizzare la formula dell'area del rettangolo o di quella del triangolo, figure che si possono pensare più semplicemente con semi rettangoli o semi parallelogrammi.

Tutti questi saperi figurano nei programmi di tutti i paesi delle classi che partecipano al RMT delle categorie da 6 a 8. Potremmo dire "Sì ma… in categoria 6, da noi, ci fermiamo ai confronti d'area senza calcoli, con manipolazione o conteggio" Bene, questa è proprio una delle procedure più adeguate per risolvere il problema.

La progressione dei risultati positivi dalla categoria 6 (media di 0,9 punti) alla categoria 8 (media di 1,8 punti) è significativa ma in quest'ultima categoria c'è ancora il 48% dei gruppi le cui ricerche sulle aree sono inefficaci.
Bisogna allora andare al di là dei programmi e pensare alla formazione degli insegnanti, ai libri di testo e infine alle abitudini e alle pratiche di classe.
Per quanto riguarda le formule ci sentiamo in dovere di chiederci come sia stata introdotta quella fondamentale dell'area del rettangolo. Gli allievi sono stati sensibilizzati al problema molto delicato relativo al "miracolo" del prodotto di due misure della grandezza "lunghezza" che porta a una misura di una grandezza differente "l'area" o è stato semplicemente detto loro che per trovare l'area di un rettangolo bisogna moltiplicare la sua lunghezza per la sua larghezza?
Sempre a proposito di formule, gli allievi hanno scoperto autonomamente quella del triangolo a partire da quella del rettangolo oppure hanno dovuto solo memorizzarla, poi applicarla progressivamente ai triangoli che hanno una base orizzontale, poi ad altri nei quali la base non è più orizzontale, ma è sempre il lato più lungo…? All'osservazione degli elaborati del problema *Confronto di figure* potremmo pensare che non abbiano mai incontrato il caso in cui l'altezza non è un segmento interno al triangolo (si veda triangolo del poligono B).
E ancora a proposito della formula dell'area del triangolo, gli allievi hanno incontrato problemi di proporzionalità tra la misura della base (o dell'altezza) e quella dell'area? Per esempio dove si situa, su un lato, l'estremità di un segmento con un estremo sul vertice opposto che deve dividere un triangolo in due parti triangolari la cui area dell'uno è doppia dell'area dell'altro? È il compito del problema *Orto I* (26.II.12) fuori dalla portata di più della metà dei gruppi di allievi delle categorie da 6 a 8 e risolto da meno del 10% fra loro.
A proposito della misura dell'area suggerita dalla quadrettatura gli allievi hanno risolto dei problemi dove uno dei compiti è quello di scegliere un'unità comune e che permette di determinare le lunghezze da prendere in considerazione per il calcolo dell'area?
Tutte le domande precedenti - e ve ne sono molte altre – implicano delle riflessioni sui percorsi di apprendimento per costruire dei saperi necessari alla determinazione dell'area dei tre poligoni del *Confronto di* aree. Più generalmente percepiamo, tramite gli elaborati degli allievi che questi ultimi non hanno l'abitudine a risolvere problemi di geometria piana. Hanno bisogno di situazioni nelle quali devono porsi domande, ripartire dalle origini, o ancora cambiare punto di vista a proposito di concetti elementari che pensiamo acquisiti dalla pratica di esercizi ripetitivi, di applicazioni meccaniche di formule, di procedure algoritmiche.
Queste costruzioni e ricostruzioni si sviluppano nel corso degli anni e non sono mai definitive; promuoverle è il ruolo dei problemi, quelli veri.
Per esempio, perché non intraprendere, con gli allievi di categoria 8 a partire da un problema adatto alla loro età, una riflessione su nozioni viste nei due anni precedenti come l'operazione di moltiplicazione nell'insieme dei naturali, i suoi legami con l'addizione, le sue rappresentazioni con le aree di rettangoli, la necessità di sostituire le addizioni ripetute con moltiplicazioni quando i numeri sono molto grandi, l'estensione ai numeri non interi, il passaggio dalla moltiplicazione di due numeri a quella di due lunghezze con una riflessione sul fossato che le separa e la loro analogia di ordine numerico,… poi riprendere queste nozioni includendovi la famosa divisione per 2 della formula del triangolo e il senso che si può dare alle sue rappresentazioni geometriche.
Scegliendo la strada dei problemi è evidente che non si semplifica la gestione del tempo né della "progressione" nel percorso di apprendimento; ci si situerà sempre ai limiti dell'ignoto e della frequenza degli interrogativi e delle scoperte che suscita. La "via reale" della successione di esercizi e di allenamenti è più semplice da programmare e sembrerebbe molto più sicura e rassicurante, ma se si osservano le difficoltà degli allievi di fronte al nostro problema *Confronto di figure* possiamo permetterci di pensare che sia questa quella che è stata loro proposta.
Allora, perché non scegliere la via della scoperta costellata di problemi del RMT?

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

LES DEUX RECTANGLES / I DUE RETTANGOLI

Maddalena Asara, Brunella Brogi, Fabio Brunelli, Speranza Dettori, Florence Falguère, Lucia Grugnetti, François Jaquet, Elisabetta Mari, André Nguyen, Elsa Renna, Patrizia Sabatini, Rosanna Sanna, M. Agostina Satta

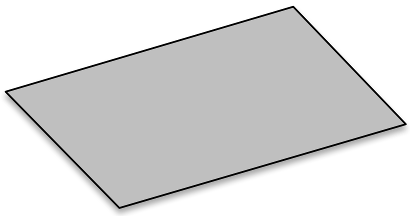
Groupe Géometrie Plane (pour les grands)/Gruppo Geometria Piana (per i grandi)

L'étude proposée ici, sur le problème « Les deux rectangles », concerne l'analyse à posteriori des copies des sections auxquelles appartiennent certains membres du sous-groupe « pour le grands » du Groupe géométrie plane et elle est présentée en version bilingue.

L'approfondimento proposto qui, sul problema "I due rettangoli", riporta l'analisi a posteriori degli elaborati delle sezioni alle quali afferiscono alcuni dei membri del sottogruppo "per i grandi" del Gruppo geometria piana ed è presentato in versione bilingue.

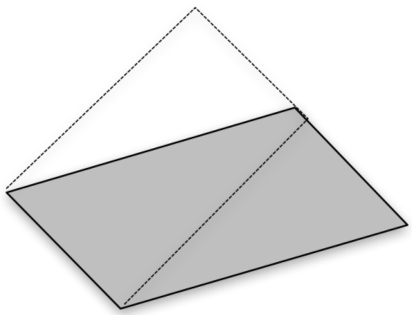
Les deux rectangles (25.I.13 Cat. 7, 8)

Antoine et Blanche veulent transformer le parallélogramme ci-dessous en un rectangle.

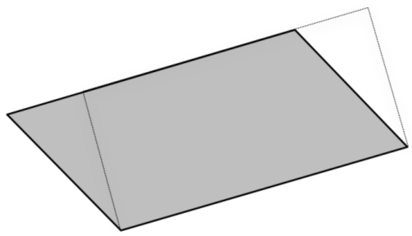


Ils procèdent de manières différentes :

- Antoine dessine un rectangle dont l'un des deux petits côtés coïncide avec l'un des petits côtés du parallélogramme et dont l'autre petit côté n'a qu'une partie en commun avec le côté opposé du parallélogramme.
- Blanche dessine un rectangle dont l'un des grands côtés coïncide avec l'un des grands côtés du parallélogramme et dont l'autre grand côté n'a qu'une partie en commun avec le côté opposé du parallélogramme.



dessin d'Antoine



dessin de Blanche

Antoine et Blanche obtiennent ainsi deux rectangles différents.

Les deux rectangles ont-ils la même aire, ou l'un a-t-il une aire plus grande que l'autre ?

Justifiez votre réponse.

De l'Analyse a priori à l'analyse a posteriori

Tâche mathématique

Comparer l'aire de deux rectangles construits sur un même parallélogramme (le premier sur une paire de côtés parallèles, le second sur l'autre paire de côtés parallèles).

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

Observer les figures, reconnaître le parallélogramme en gris et les deux rectangles d'Antoine et Blanche et se rendre compte que ces deux rectangles ne sont pas égaux (ils n'ont pas les mêmes dimensions) mais qu'ils pourraient avoir la même aire comme le suggère la question ; ce qui est l'enjeu du problème.

Constater qu'aucune mesure n'est donnée dans l'énoncé et qu'il faudra faire un choix entre :

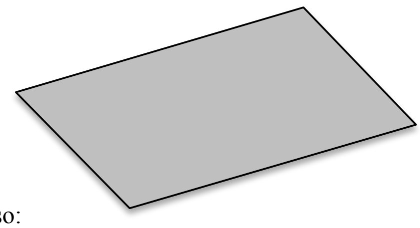
- prendre des mesures sur les deux dessins donnés ou
- travailler par une méthode générique (raisonnement indépendant du cas particulier).

La méthode des mesures exige la connaissance de la formule du calcul de l'aire du rectangle et par conséquent la reconnaissance de la longueur et de la largeur sur chacune des figures, la lecture précise de la règle graduée, le choix de l'opération (la multiplication des deux mesures) et son algorithme de calcul (ou le maniement de la calculatrice). La méthode générique (indépendante des mesures effectives) consiste à consater que, dans chacune des deux constructions, le triangle gris et le triangle blanc peuvent se superposer exactement par un déplacement : une translation (dont la longueur et la direction sont celles du côté commun du rectangle et du parallélogramme). Après avoir reconnu le type de déplacement, il faut savoir qu'il ne modifie pas l'aire du triangle déplacé et que la somme des aires de la partie fixe et de celle du triangle déplacé ne varie pas et, par conséquent que, pour chaque figure, l'aire du parallélogramme est la même que celle du rectangle.

Finalement, par « transitivité », il faut déduire que, vu que le parallélogramme des deux figures est le même, l'aire des deux rectangles est aussi la même

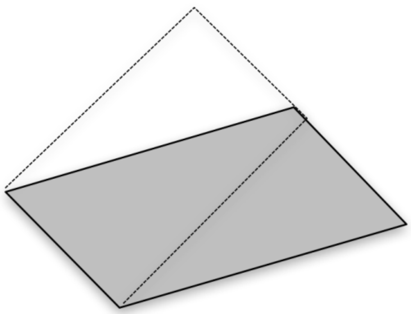
I due RETTANGOLI (25.I.13 Cat. 7, 8)

Antonio e Bianca vogliono trasformare il parallelogramma qui disegnato in un rettangolo:

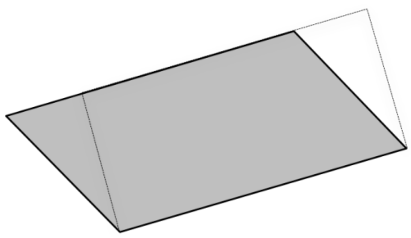


Per far ciò procedono in modo diverso:

- Antonio disegna un rettangolo in cui uno dei due lati minori coincide con uno dei due lati minori del parallelogramma e l'altro lato minore ha solo una parte in comune con il lato opposto del parallelogramma.
- Bianca disegna un rettangolo in cui uno dei due lati maggiori coincide con il lato maggiore del parallelogramma e l'altro lato maggiore ha solo una parte in comune con il lato opposto del parallelogramma.



disegno di Antonio



disegno di Bianca

Antonio e Bianca ottengono così due rettangoli diversi.

I due rettangoli hanno la stessa area oppure l'area di uno è più grande di quella dell'altro?
Giustificate la vostra risposta.

Dall'Analisi a priori all'analisi a posteriori

Compito matematico

Confrontare le aree di due rettangoli diversi costruiti a partire da uno stesso parallelogramma (il primo su una coppia di lati paralleli, l'altro sull'altra coppia di lati paralleli).

Compito per la risoluzione e saperi mobilizzati

Osservare le figure, riconoscere il parallelogramma in grigio e i due rettangoli di Antonio e Bianca e rendersi conto che questi due rettangoli non sono uguali (non hanno le medesime dimensioni), ma che potrebbero avere la stessa area come è suggerito dalla domanda; cosa che è peraltro la sfida del problema.

Constatare che nell'enunciato non è data alcuna misura e che bisognerà fare una scelta fra:

- prendere delle misure sui due disegni dati oppure
- lavorare seguendo un ragionamento generale (indipendente dal caso particolare).

Il metodo delle misure esige la conoscenza della formula per il calcolo dell'area del rettangolo e di conseguenza il riconoscimento della lunghezza e della larghezza per ciascuna figura, la lettura precisa del righello, la scelta dell'operazione (moltiplicazione delle due misure) e il suo algoritmo di calcolo (o il buon uso della calcolatrice).

Il ragionamento generale (indipendente dalle misure effettive) consiste nel constatare che, in ciascuna delle due costruzioni, il triangolo grigio e il triangolo bianco possono sovrapporsi esattamente con uno spostamento: una traslazione (dove la lunghezza e la direzione sono quelle del lato comune al rettangolo e al parallelogramma). Dopo aver riconosciuto il tipo di spostamento, bisogna essere consci che quest'ultimo non modifica l'area del triangolo traslato e che la somma delle aree della parte fissa e quella del triangolo traslato non variano e, di conseguenza che per ciascuna figura, l'area del parallelogramma è la stessa di quella del rettangolo.

Infine, per "transitività", bisogna dedurre che, visto che il parallelogramma delle due figure è il medesimo, anche 'area dei due rettangoli è la stessa.

Mots clés / Parole-chiave

rectangle, parallélogramme, mesure des côtés, aire, périmètre, multiplication.

rettangolo, parallelogramma, misura dei lati, area, perimetro, moltiplicazione.

Résultats / Risultati

Sur 1922 classes de 20 sections / Su 1922 classi di 20 sezioni

Punteggi Points	0	1	2	3	4	N	m
Cat 7	443	213	249	129	83	1117	1.3
Cat 8	277	167	142	132	87	805	1.5
tot	720	380	391	261	170	1922	1.4

selon les critères suivants de l'attribution des points / secondo i criteri seguenti dell'attribuzione dei punteggi:

4 Réponse correcte (les deux rectangles ont la même aire) avec une justification :

soit une application de la formule de l'aire du rectangle et du parallélogramme : produit d'une mesure du côté commun à celui du rectangle et de celle de sa « hauteur » correspondante, pour chacun des rectangles, en mentionnant la transitivité permettant de passer d'un rectangle à l'autre,

soit la mention de l'égalité des triangles, pour chaque figure, avec quelques éléments de justification sur l'égalité des côtés ou le mouvement de translation conduisant à l'équivalence de chacun des deux rectangles avec le parallélogramme, puis par transitivité des deux rectangles entre eux

3 Réponse correcte (les deux rectangles ont la même aire) :

avec une justification du genre de celle de l'attribution précédente, mais incomplète (sans préciser pourquoi les triangles sont égaux, ni parler de transitivité …)

ou réponse correcte fondée sur des mesures (indiquées, avec le détail des calculs), mais qui admet toutefois explicitement l'imprécision de la procédure (par exemple : les deux rectangles ont la même aire, on l'a vérifié avec nos mesures)

ou réponse fondée sur des découpages et superpositions (avec le dessin des pièces) qui admet que la réponse dépend de la précision des découpages (l'équivalence peut être acceptée ou niée)

2 Réponse fondée sur des mesures avec le détail des calculs et cohérente avec les résultats obtenus sans se rendre compte que la réponse dépend des approximations (l'équivalence peut être acceptée ou niée)

ou réponse fondée sur des découpages et superpositions (avec le dessin des pièces) sans se rendre compte que la réponse dépend des approximations (l'équivalence peut être acceptée ou niée)

1 Réponse correcte (les deux rectangles ont la même aire) sans aucune explication
0 Incompréhension de problème ou réponse incorrecte sans explication
4 Risposta corretta (i due rettangoli hanno la stessa area) con spiegazione: affermazione che i due triangoli sono uguali con qualche elemento di giustificazione sull'uguaglianza dei lati o esplicitazione della traslazione che porta all'equivalenza dei due rettangoli con il parallelogramma e poi, per transitività, all'equivalenza dei due rettangoli oppure utilizzando ritagli e sovrapposizione precisa dei pezzi oppure spiegazione che si basa sulle formule delle aree riconoscendo che in ogni rettangolo un lato è altezza del parallelogramma
3 Risposta corretta sulla base di ritagli e sovrapposizione di pezzi in modo impreciso (ritaglio e/o incollaggio che mostrano strisce mancanti o pezzi sovrapposti non dovuti) senza altre giustificazioni
oppure risposta corretta con una spiegazione basata sull'uguaglianza dei triangoli senza esplicitare la motivazione dell'uguaglianza e/o senza menzionare la transitività
oppure risposta corretta con una spiegazione come punteggio 4 per un solo rettangolo
oppure risposta corretta basata sulle misure dei lati e calcoli delle aree che portano a differenza di pochi millimetri ma osservazione sull'imprecisione delle misure per accettare l'equivalenza
2 Risposta basata sulle misure dei lati con calcoli corrispondenti con negazione dell'equivalenza coerente con i risultati ottenuti
1 Risposta corretta senza alcuna spiegazione
0 Incomprensione del problema oppure risposta errata senza spiegazione

Observations a posteriori centrées en particulier sur le type de langage utilisé par les élèves pour expliquer leur réponse / Osservazioni a posteriori incentrate in particolare sul tipo di linguaggio utilizzato dagli allievi per spiegare la loro risposta

Ont été analysées les copies des sections de : Franche-Comté (FC, en noir dans suite), Sassari (SS en rouge), Suisse romande (SR en orange), Rozzano (RZ en vert), Parme (PR en bleu) et Sienne (SI en violet).
Il s'agit des sections auxquelles appartiennent les membres du sous-groupe « pour les grands » (de la catégorie 6 à la catégorie 10) du Groupe géométrie plane.

Sono stati analizzati gli elaborati delle sezioni di: Franche-Comté (FC, in nero nel seguito), Sassari (SS in rosso), Svizzera romanda (SR in arancione), Rozzano (RZ in verde), Parma (PR in blu) e Siena (SI in viola).
Si tratta delle sezioni alle quali afferiscono i membri del sottogruppo "per i grandi" (dalla categoria 6 alla categoria 10) del Gruppo geometria piana.

La classification qui suit, va des réponses correctes et complètes aux copies blanches.

La classificazione che segue, va dalle risposte corrette e complete agli elaborati consegnati in bianco.

l / Risposte "sì, i due rettangoli hanno la stessa area" con ragionamento generale e spiegazioni "complete"

Cat. 7 - 8 4 + 12 = 16
Cat. 7 - 8 3+ 1= 4
Cat. 7 - 8 11 + 8 = 19
Cat. 7 - 8 2 + 1 = 3
Cat. 7 - 8 1+3=4
Cat. 7 - 8 6 + 29 = 35

FC
Le déplacement des triangles de chaque figure est indiqué par une flèche, ou des couleurs, ou par découpage et collage.
Les explications littérales, lorsqu'elles figurent font appel à des expressions comme « déplacé », « enlever et remettre », « découpage de ce qui dépasse et remise de l'autre côté », mais souvent formulées maladroitement.

La traslazione dei triangoli di ciascuna figura è indicata con una freccia, o dei colori, o ancora con ritaglio e collage.
Le spiegazioni con linguaggio naturale, quando vi figurano, si richiamano ad espressioni come "spostato", "togliere e rimettere", ritaglio di ciò che sporge e sistemazione dall'altra parte", ma sovente formulate in maniera un po' maldestra.

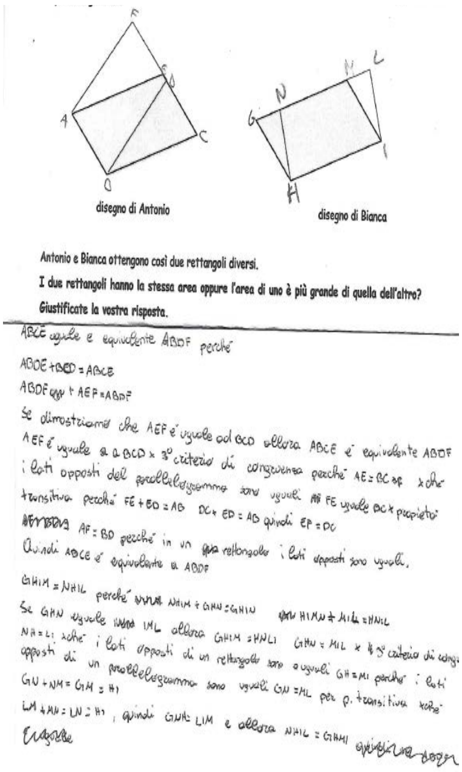
- *Antoine enlève un bout du parallélogramme et remet la même proportion de l'autre côté du parallélogramme ce qui fait un rectangle.*
- *Nous avons remarqué que la surface rose pouvait se superposer sur la surface verte* (triangles coloriés sur le dessin) *et que les deux ensembles formaient le parallélogramme de base.*

L'égalité du rectangle et du parallélogramme est implicite dans la description du déplacement ou explicitée par des expressions comme : *même aire déplacée* ; *remettre la même surface à un autre endroit* ; *se superposent exactement* ; *aucun bout n'a été enlevé ou rajouté, il a juste été déplacé…* ; *les triangles s'emboîtent parfaitement* ; …
L'uguaglianza tra rettangolo e parallelogramma è implicita nella descrizione dello spostamento o esplicitata con espressioni del tipo: *medesima area spostata; rimettere la stessa superficie da un'altra parte; si sovrappongono esattamente; nessun pezzo è stato tolto o aggiunto; è stato solo spostato…*; *i triangoli si adattano perfettamente*; …
La transitivité s'exprime par de petites phrases comme : *vu qu'on est parti du même parallélogramme* ; *sachant que c'est le même parallélogramme pour les deux …* ; *les deux rectangles ont la même aire que le parallélogramme de départ* ; *étant donné que A et B utilisent le même parallélogramme de départ et coupent seulement des bouts pour les déplacer, l'aire ne change pas* ; …
La transitività si esprime con brevi frasi come: *vu qu'on est parti du même parallélogramme* ; *sachant que c'est le même parallélogramme pour les deux …* ; *les deux rectangles ont la même aire que le parallélogramme de départ* ; *étant donné que A et B utilisent le même parallélogramme de départ et coupent seulement des bouts pour les déplacer, l'aire ne change pas* ; …

SS
La traslazione dei triangoli di ciascuna figura è indicata con tratteggi e simboli.
- *I due rettangoli hanno la stessa area.*
- *Nel primo rettangolo creato da Antonio si scompone la figura in due parti, poi una parte viene riportata nel lato opposto della figura ricreando il parallelogrammo iniziale. Con ciò l'area resta sempre uguale alla figura iniziale.*
- *Nel rettangolo di Bianca è stata tagliata una parte e riportata in un altro lato per ricreare il parallelogramma. Creato il parallelogramma la superficie rimane sempre la stessa della figura iniziale. Dunque se la prima figura è uguale al parallelogramma e la seconda pure le due figure sono congruenti.* (probabilmente volevano dire che le figure sono equivalenti oppure confondono l'equivalenza con la congruenza).

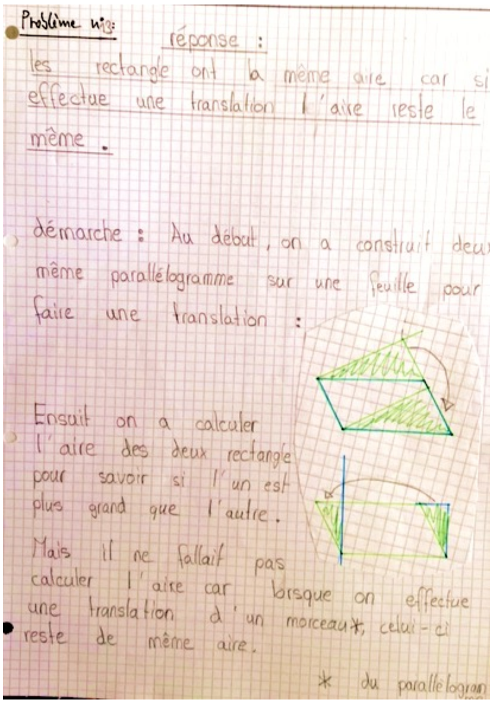
RZ
La traslazione dei triangoli è indicata con disegno, con i colori o con ritaglio e collage o con le lettere.
- *"Il lato minore del rettangolo di Antonio coincide con una delle basi del parallelogramma e il lato maggiore del suo rettangolo coincide con l'altezza relativa a quella base, quindi l'area del rettangolo è uguale a quella del parallelogramma. Nel rettangolo di Bianca il lato maggiore coincide con una delle due basi e il lato minore con l'altezza relativa a quella base, quindi ha l'area uguale a quella del parallelogramma. Se entrambi i rettangoli hanno l'area uguale a quella del parallelogramma. I due rettangoli hanno la stessa area"*

In un elaborato è stato utilizzato il criterio di congruenza dei triangoli.

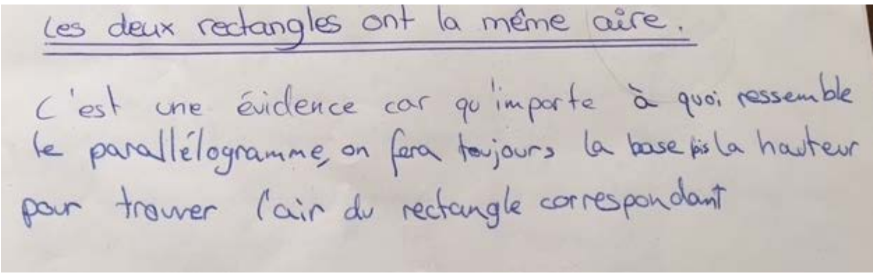


SR

Esempio con spiegazione nella quale il termine "traslazione" è indicato esplicitamente e poi utilizzato correttamente



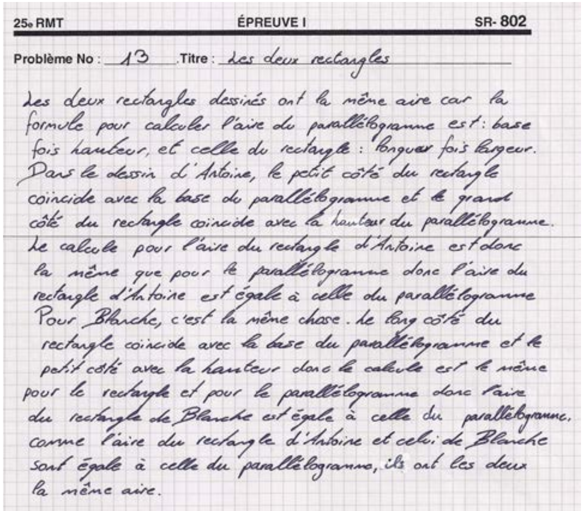
Esempio molto interessante di pensiero chiaro e sintetico che conduce alla generalizzazione



Les deux rectangles ont la même aire.

C'est une évidence car qu'importe à quoi ressemble le parallélogramme, on fera toujours la base fois la hauteur pour trouver l'air du rectangle correspondant

Autre exemple où les élèves s'appuient sur la formule donnant l'aire d'un parallélogramme



25e RMT ÉPREUVE I SR- 802

Problème No : 13 Titre : Les deux rectangles

Les deux rectangles dessinés ont la même aire car la formule pour calculer l'aire du parallélogramme est : base fois hauteur, et celle du rectangle : longueur fois largeur. Dans le dessin d'Antoine, le petit côté du rectangle coincide avec la base du parallélogramme et le grand côté du rectangle coincide avec la hauteur du parallélogramme.
Le calcule pour l'aire du rectangle d'Antoine est donc la même que pour le parallélogramme donc l'aire du rectangle d'Antoine est égale à celle du parallélogramme
Pour Blanche, c'est la même chose. Le long côté du rectangle coincide avec la base du parallélogramme et le petit côté avec la hauteur donc le calcule est le même pour le rectangle et pour le parallélogramme donc l'aire du rectangle de Blanche est égale à celle du parallélogramme, comme l'aire du rectangle d'Antoine et celui de Blanche sont égale à celle du parallélogramme, ils ont les deux la même aire.

PR

a) *...Utilizzando il criterio di equiscomponibilità ovvero, scomponendo il parallelogramma di partenza in un triangolo e in un rettangolo abbiamo scoperto che togliendo il triangolo BCF, ottenuto dalla scomposizione e posizionandolo sul lato AD, abbiamo trovato il rettangolo di Antonio. Lo stesso abbiamo fatto con il disegno di Bianca ponendo il triangolo BAG sul lato DC. Sapendo però che con il criterio dell'equiscomponibilità mediante somma di figura l'area resta sempre immutata, il rettangolo di Bianca e quello di Antonio sono equivalenti.*

b) *(figura con frecce) traslando ABE nella prima figura in DFC si ottiene il rettangolo avente la stessa area del parallelogramma. Nella figura 2 si prende ABF e lo si trasla in CED e si ottiene il rettangolo avente la stessa area del parallelogramma perciò entrambe le figure hanno la stessa area del parallelogramma quindi sono equivalenti.*

SI

Cat. 7**:** 6 elaborati che hanno riportato il punteggio 4.

In nessun elaborato compare il termine **traslazione**, tuttavia questa viene mostrata attraverso la colorazione dei triangoli accompagnata da note esplicative; in un caso attraverso il ricorso a una freccia per indicare lo spostamento dei triangoli; con il ritaglio dei triangoli e il collage.

Nelle spiegazioni con **linguaggio naturale** compare il termine <u>spostamento</u>:

- *"Il triangolo ABC si sposta e si mette al posto del triangolo DEF"*;
- *"Nel disegno di Bianca, per trovare il rettangolo, si sposta il parallelogramma. Durante lo spostamento la parte colorata in azzurro si recupera nella parte colorata in verde"*;
- *"Se la parte verde si sovrappone a quella rossa il parallelogramma ritorna uguale"*.

Oppure compare il termine <u>ritaglio</u>:

- *"Per risolvere il problema abbiamo ritagliato dalla brutta il rettangolo disegnato da Antonio. Lo abbiamo ritagliato in due parti ricavando un trapezio e un triangolo. Lo abbiamo sovrapposto al rettangolo di Bianca e abbiamo visto che l'area era la stessa"*. (Sull'elaborato sono incollati i due rettangoli bicolori, ma non viene mostrata la loro sovrapposizione).

L'**uguaglianza** tra rettangolo e parallelogramma è implicita nella descrizione dello spostamento:

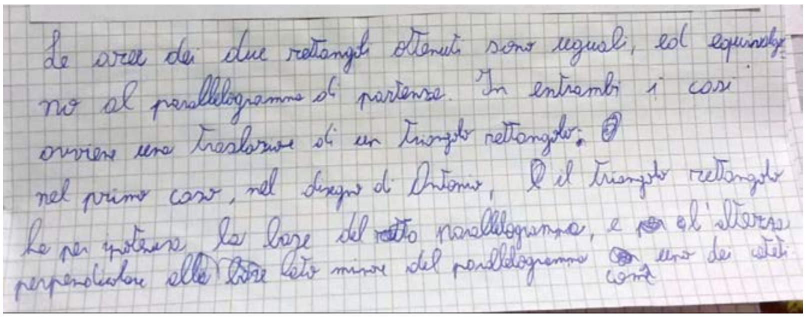
- *"I due rettangoli hanno la stessa area perché entrambi hanno l'area equivalente all'area del parallelogramma di partenza. Abbiamo visto che l'area è equivalente a quella del parallelogramma di partenza perché …* (segue il disegno)*".*
- *"Hanno la stessa area perché tagliando un pezzo del parallelogramma che poi lo abbiamo coinciso per formare un rettangolo".*

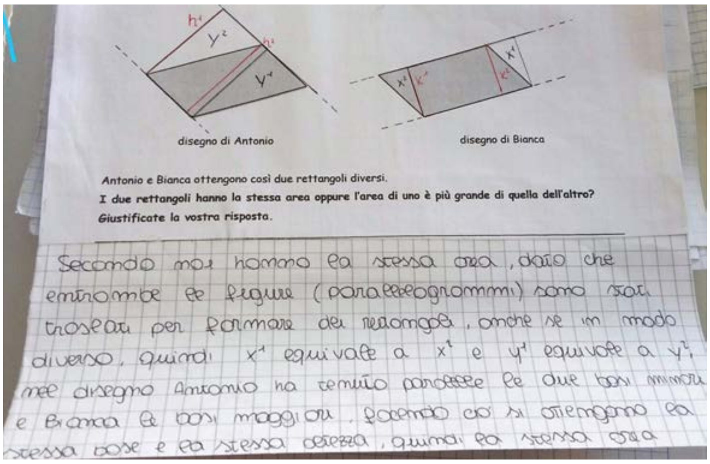
La **transitività** si esprime con brevi frasi come:

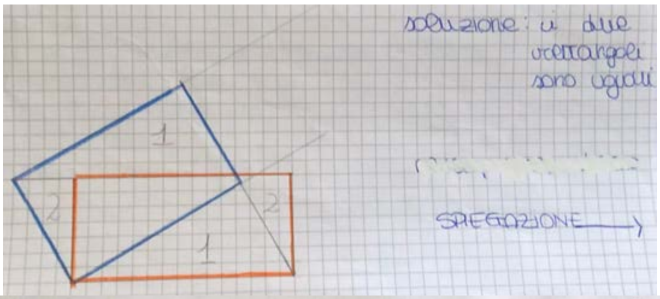
- *Il parallelogramma ed i rettangoli hanno la stessa area e visto che siamo partiti dallo stesso parallelogramma, i rettangoli hanno la stessa area".*
- *"Siccome i "nuovi" rettangoli sono con l'area uguale a quella iniziale, l'area dei due rettangoli è uguale"*

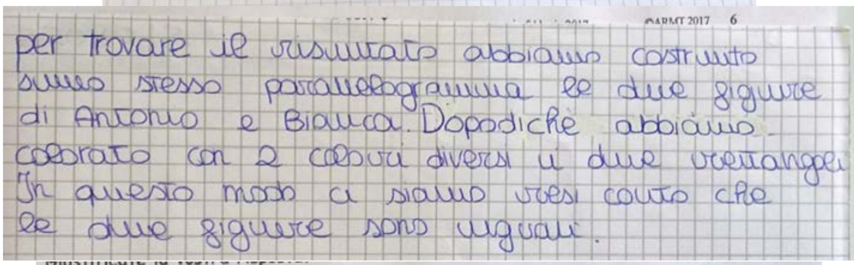
Cat 8:

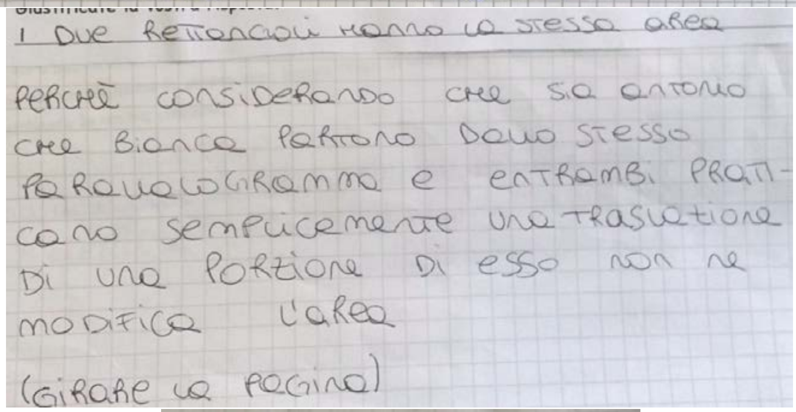
I triangoli sono spesso riconosciuti come congruenti ma solo raramente è esplicitata la **traslazione** (vedi elaborato più sotto), mentre spesso si trovano frasi dove è espressa con il linguaggio naturale come: "*Ha tolto e ha messo lo stesso triangolo...";* altri verbi frequentemente usati sono: staccare, riportare, spostare, trasportare, sovrapporre, aggiungere. Per rafforzare il concetto, in molti elaborati sono presenti frecce che rappresentano il movimento.
La strategia risolutiva mediante ritaglio delle figure è stata usata raramente; in alcuni elaborati affermano: "*Se tagliamo e incolliamo*" senza, però, mostrarlo.

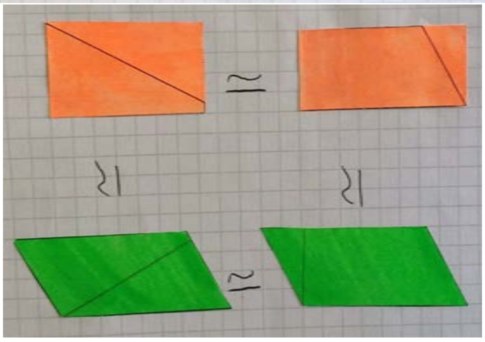












A2. Réponses « oui les deux rectangles ont la même aire » par raisonnement générique avec explications où la transitivité n'est pas affirmée explicitement ou des confusions subsistent / Risposte "sì i due rettangoli hanno la stessa area" con ragionamento generale con spiegazioni nelle quali la transitività non è affermata esplicitamente o dove sussiste qualche confusione

Cat. 7 - 8 11 + 13 = 24
Cat. 7 - 8 2 + 1= 3
Cat. 7 - 8 7 + 21 = 38
Cat. 7 - 8 4 + 4 = 8
Cat. 7 - 8 18 + 10=28
Cat. 7 - 8 18 + 18 = 36

FC

Le déplacement des triangles de chaque figure est indiqué comme précédemment et aboutit à la reconnaissance, pour chaque construction, de l'équivalence entre le parallélogramme et le rectangle, sans toutefois justifier l'équivalence des deux rectangles en disant explicitement que le parallélogramme de départ est le même.
La transitivité reste implicite, vraisemblablement car elle est évidente pour les élèves.
Lo spostamento dei triangoli di ciascuna figura è indicato come in precedenza e porta al riconoscimento, per ciascuna costruzione, dell'equivalenza tra il parallelogramma e il rettangolo, senza peraltro giustificare l'equivalenza dei due rettangoli dicendo esplicitamente che il parallelogramma di partenza è il medesimo.
La transitività resta implicita, forse perché è evidente per gli allievi
Les deux rectangles ont la même aire car dans les deux cas les enfants ont juste déplacé des parcelles d'aire. Ils n'ont ni enlevé ni rajouté de l'aire.
Les deux rectangles ont la même aire car si l'on retire la partie blanche d'Antoine et qu'on change de côté et de sens la partie blanche de Blanche alors les deux rectangles ont la même aire.

Il peut y avoir des confusions entre rectangles et parallélogrammes
Ci possono essere delle confusioni tra rettangoli e parallelogrammi
Dans la figure 1 le triangle ADC est égal au triangle DEF donc l'aire du rectangle est égale à l'aire du parallélogramme. Dans la figure 2 le triangle ADC est égal au triangle DEF. Donc l'aire du parallélogramme. Donc les deux figures ont la même aire.

ou entre les formules base × hauteur et longueur × largeur
o tra le formule base × altezza e lunghezza × larghezza
Si on fait base × hauteur cela nous donne l'aire du parallélogramme et celle de chaque rectangle car b × h est égal à Longueur × largeur. Donc l'aire des rectangles sont égales à l'aire du parallélogramme ce qui nous amène à dire que les deux rectangles ont la même aire. (sur les deux dessins b et h sont indiqués avec les mêmes lettres)

SS

Negli elaborati non è presente alcun riferimento ai pezzi che vengono spostati.

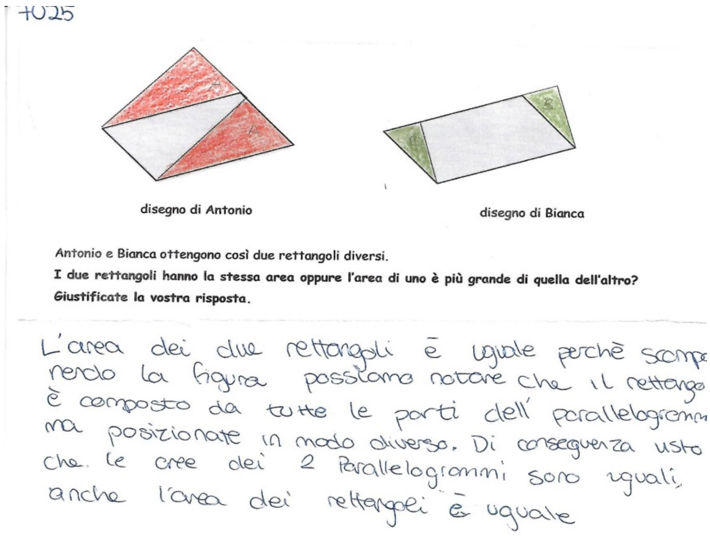
Esempi di risposte

- *L'area dei rettangoli è uguale perché sia Antonio che Bianca partono usando lo stesso parallelogramma e quindi per formare il rettangolo entrambi prendono una parte di area e la spostano in modo da formare il rettangolo.*
- *Hanno la stessa area perché la base del rettangolo del disegno di Antonio coincide con la base del parallelogramma e l'altezza del rettangolo con quella del parallelogramma e così accade anche con il disegno di Bianca.*
- *Le due aree sono uguali perché Bianca e Antonio hanno spostato delle parti del parallelogramma formando un rettangolo e non aggiungendo parti per formare la figura. Antonio per formare la figura ha tracciato una diagonale ha diviso il parallelogramma in due parti uguali e poi ha preso una parte l'ha rivoltata formando un rettangolo. Bianca per formare il rettangolo ha tracciato l'altezza di una parte del parallelogramma aggiungendola al di fuori della figura e formando così il rettangolo.*
- *Hanno la stessa area. Abbiamo osservato che le parti non coincidenti di ogni parallelogramma coincidono con la parte fuori di essa.*
- *Hanno la stessa area perché sono formati dagli stessi pezzi anche se composti in modo diversi.*

RZ

Equiscomponibilità:

- *"visto che le due figure partono dallo stesso parallelogramma, applicando la teoria dell'equiscomponibilità le aree risultano uguali"*



+025

disegno di Antonio

disegno di Bianca

Antonio e Bianca ottengono così due rettangoli diversi.
I due rettangoli hanno la stessa area oppure l'area di uno è più grande di quella dell'altro?
Giustificate la vostra risposta.

L'area dei due rettangoli è uguale perchè scompo
nendo la figura possiamo notare che il rettango
è composto da tutte le parti dell' parallelogramm
ma posizionate in modo diverso. Di conseguenza visto
che le aree dei 2 Parallelogrammi sono uguali,
anche l'area dei rettangoli è uguale

PR

c) *I due rettangoli sono equivalenti perché nel disegno di Antonio il lato minore è in comune e il lato maggiore del rettangolo è l'altezza del parallelogramma. Nel disegno di Bianca il lato maggiore del rettangolo è in comune con il parallelogramma (la base) e il lato minore del rettangolo coincide con l'altezza del parallelogramma. Quindi il rettangolo disegnato da Antonio è uguale al parallelogramma e il rettangolo disegnato da Bianca è uguale al parallelogramma. Considerando che i parallelogrammi sono uguali, di conseguenza lo sono anche i rettangoli.*

d) *Sono congruenti perché sia Antonio che Bianca hanno spostato una parte del parallelogramma per "riattaccarla" nel lato opposto.*
L'area dei due rettangoli è uguale perché tutti e due sono partiti dallo stesso parallelogramma di base sia Bianca che Antonio hanno ritagliato una parte di parallelogramma e l'hanno aggiunta nella parte opposta.

SI

Cat. 7: 18 elaborati che hanno riportato il punteggio 3.

In un elaborato compare il termine **traslazione**:

- *"Abbiamo diviso il parallelogramma in triangoli, uno di questi che era all'estremità del lato l'abbiamo traslato al lato opposto, così tornando un rettangolo, che essendo formato dalla stessa area del parallelogramma sono equivalenti al parallelogramma e tra i due rettangoli".*

Negli altri elaborati si ricorre al ritaglio e al collage o alla colorazione dei triangoli.

Nelle spiegazioni con **linguaggio naturale** compare il termine "spostamento" (*"spostando i triangoli neri che restavano fuori della figura, nella parte bianca interna rimanente, tutta la parte nera sarebbe rientrata nella nuova figura)*, oppure *"parte aggiunta e parte tolta"*, oppure *"se si prende la parte del parallelogramma che sta fuori del perimetro del rettangolo e la si mette all'interno dello spazio bianco, coincide perfettamente in entrambi i casi.*

In un elaborato gli alunni sono ricorsi alla misurazione dei lati dei triangoli spostati e ne hanno verificato la congruenza, ma non sono riportate né le misure, né i calcoli svolti.

L'**uguaglianza** tra rettangolo e parallelogramma è implicita nella descrizione dello spostamento:

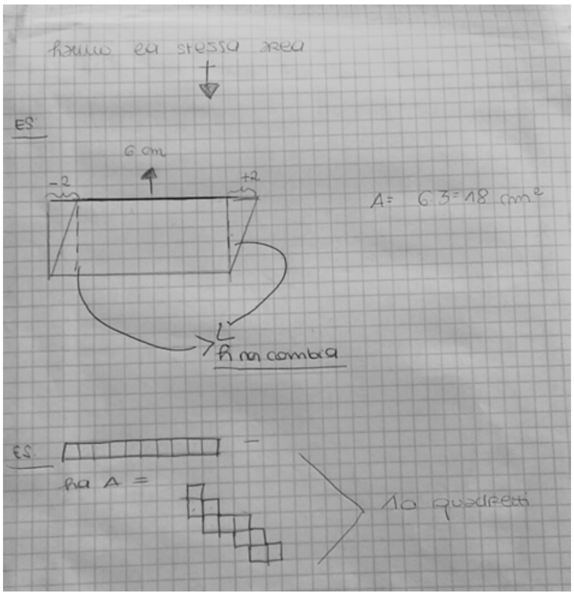
- *"Abbiamo da subito pensato fossero uguali, poiché togliendo una parte di una figura, per poi riaggiungerla con una posizione diversa, l'area non cambia. Per dimostrarlo abbiamo provato a misurare le figure per calcolare l'area. Il risultato non è stato soddisfacente, infatti tornavano disuguali. Allora abbiamo provato a disegnarle con misure arrotondate. Così facendo abbiamo confermato la nostra teoria: l'area dei rettangoli risultano uguali per il motivo illustrato precedentemente".*
- *"L'area dei due rettangoli è uguale perché a nessuna delle due figure è stato aggiunto qualcosa, ma sono state solamente spostate parti del parallelogramma, quindi anche se con metodi diversi, l'area delle due figure è la stessa [...] poi per confermare abbiamo misurato le dimensioni della figura di Antonio e di Bianca con un righello e abbiamo ottenuto la conferma* (non sono riportati misure e calcoli)*".*

Oppure non c'è una giustificazione motivata: *"Su qualsiasi lato del parallelogramma si costruisca un rettangolo le aree sono congruenti".*

La **transitività** si esprime con brevi frasi come:

- *"L'area del parallelogramma è uguale all'area di entrambi i rettangoli e di conseguenza questi ultimi sono equivalenti".*
- *"Siccome i "nuovi" rettangoli sono con l'area uguale a quella iniziale, l'area dei due rettangoli è uguale".*
- *"Dato che il parallelogramma di base è sempre lo stesso e il pezzo tagliato è sempre lo stesso che viene incollato dalla parte opposta per ogni figura, le due aree dei rettangoli sono uguali".*

Cat 8**:** 18 elaborati
La parola **equiscomponibilità** è menzionata con una certa frequenza o comunque spiegata da frasi del tipo: "*Hanno la stessa area per il criterio di equiscomponibilità: l'area di una figura non cambia se essa viene scomposta e poi riassemblata con forme diverse. Dal momento che Antonio e Bianca sono partiti dalla stessa figura, le loro figure finali, seppure con la forma diversa, hanno perciò la stessa area*", oppure:
" *Antonio ha ritagliato una parte del parallelogramma spostandola, in modo da formare un rettangolo; facendo questo non ha utilizzato parti in più, solamente parti del parallelogramma, mantenendo la stessa area. Bianca ha ritagliato una parte del parallelogramma spostandolo dalla parte opposta del parallelogramma ma in modo da formare un rettangolo. Anche qui si mantiene la stessa area del parallelogramma. Tutti e due i rettangoli hanno la stessa area*".
Spesso, forse perché come concetto viene dato per scontato dagli alunni, gli elaborati riportano frasi dove l'equiscomponibilità è liquidata molto brevemente come: "*scomponendo le varie parti a formare un rettangolo l'area sarà sempre la stessa" o "Cambiando posizione dei componenti l'area non cambia*".
Nell'elaborato che segue gli alunni si premurano di spiegare che cos'è l'equiscomponibilità:



A3. Réponses « oui les deux rectangles ont la même aire » sans explications, ou en référence à des manipulations, ou à des comparaisons de côtés. / Risposte "sì i due rettangoli hanno la stessa area" senza spiegazioni, o in riferimento a manipolazioni o a confronto di lati.

Cat. 7 - 8	4 + 6 = 10
Cat. 7 - 8	1+3 = 4
Cat. 7 - 8	1 + 2 = 3
Cat. 7 - 8	2 + 3 = 5
Cat. 7 - 8	36 + 15=51
Cat. 7 - 8	3 + 26 = 79

FC

Dans certains cas, il y a deux découpages : celui des rectangles en pointillés puis un second, très problématique consistant à redécouper un rectangle en petites parties pour le faire coïncider avec l'autre.

In certi casi, ci sono due ritagli: quello dei rettangoli tratteggiati poi un secondo, molto problematico e che consiste nel ritagliare un rettangolo in piccole parti per farlo coincidere con l'altro.

- Les deux rectangles ont la même aire car on a découpé les deux rectangles en pointillés puis les avons superposés et découpé et nous avons remarqué qu'ils avaient la même aire

Dans d'autres cas l'explication n'est pas suffisante et repose seulement sur les côtés communs.

In altri casi la spiegazione non è sufficiente e riposa solo sui lati comuni.

- Oui, les deux rectangles ont la même aire car au début le parallélogramme était le même pour Antoine et Blanche car Antoine a pris les longueurs des petits côtés du parallélogramme et que Blanche a pris les longueurs des grands côtés du parallélogramme de base.

- Oui, ils ont la même aire si l'un des côtés du rectangle coïncide avec l'un des côté du parallélogramme donc l'aire sera la même.

SS

-Risposta con spiegazione molto "sintetica"

-*Abbiamo osservato le due figure sono equivalenti anche se Antonio e Bianca l'hanno disegnata diversamente.*

RZ

Argomentazioni non sufficienti

" i due rettangoli hanno la stessa area perché nessuna parte è stata cancellata ma è stata solo spostata e quindi l'area è sempre uguale"

"i due rettangoli hanno la stessa area, perché hanno origine dallo stesso parallelogramma e sono stati ottenuti dallo spostamento di alcune parti dell'area di origine, mantenendole, quindi uguale in entrambi i rettangoli.

PR

Abbiamo visto che i rettangoli erano uguali, solo che erano disposti diversamente.

I due rettangoli sono uguali perché discendono dallo stesso parallelogramma.

e) I due rettangoli hanno la stessa area perché il parallelogramma di partenza è lo stesso anche se si suddivide in parti diverse.

SI

Cat. 7 - 2 elaborati che hanno riportato il punteggio 3:

- *"Abbiamo preso i due rettangoli. Se messi uno sopra l'altro sono diversi, ma se uno lo scomponiamo e lo riassembliamo sopra l'altro i due rettangoli sono uguali. Così si può dedurre che hanno la stessa area"*. Il collage non è presente.
- *"Abbiamo ritagliato le due figure che proponevano i ragazzi; poi abbiamo sovrapposto i due rettangoli e vedendo che sono uguali, abbiamo dedotto che avessero la stessa area"*. (Sono incollati i due rettangoli, che non sono sovrapponibili).

Cat. **7** - 47 elaborati che hanno riportato il punteggio 1. A differenza di quanto indicato nell'analisi a priori per l'attribuzione del punteggio 1 (risposta corretta senza alcuna spiegazione), una spiegazione, seppure parziale, è sempre presente. 4 elaborati che hanno riportato il punteggio 2. Tra questi si individuano:

a) 10 elaborati che hanno riportato il punteggio 1, la risposta è corretta ma la giustificazione è parziale, per esempio:
- *"L'area è uguale perché si parte dallo stesso parallelogramma".*
- *"I due rettangoli hanno la stessa area perché l'area del rettangolo e quella del parallelogramma sono equivalenti".*
- *"Hanno l'area uguale perché se consideriamo una certa parte della figura sono uguali".*
- *"I due rettangoli hanno la stessa area perché in entrambi i disegni il parallelogramma è stato inclinato diversamente".*

b) 2 elaborati nei quali la giustificazione non è corretta:
- *"I rettangoli costruiti hanno la stessa area perché se i due rettangoli vengono sovrapposti sono uguali".*
- *"Le aree dei due rettangoli sono uguali perché tracciando la diagonale si ottiene 2 triangoli rettangoli uguali"*

c) 12 elaborati con risposte che fanno riferimento al confronto dei lati, per esempio:

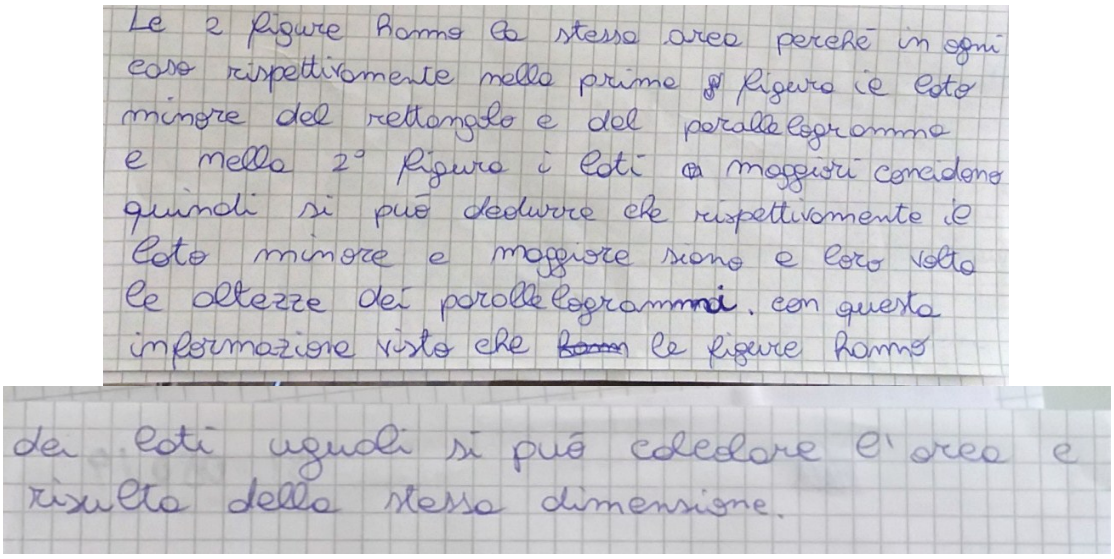
- *“Hanno la stessa area perché: spostando i lati obliqui la lunghezza dei lati non cambiano e quindi il parallelogramma si trasforma in un rettangolo”.*
- *“I due rettangoli hanno la stessa area perché comunque non cambia la misura dei lati, anche se si spostano rimangono invariati, quindi qualunque sia la sua area rimane la stessa”.*
- *“Dunque i due rettangoli hanno la stessa area perché un rettangolo coincide dal lato minore e ha la lunghezza del parallelogramma e l’altro coincide con il lato maggiore e ha la stessa altezza del parallelogramma”.*
- *“L’area dei due rettangoli è uguale perché i lati obliqui sono stati spostati perpendicolari alla base”.*
- *“Hanno la stessa area perché i lati coincidono”.*
- *“L’area dei due rettangoli è uguale […] i due lati minori del rettangolo di Antonio sono più lunghi di quelli di Bianca, ma i lati maggiori del rettangolo di Bianca sono maggiori di quelli di Antonio quindi la loro area è uguale”.*
- *“Le aree sono identiche perché uno è più stretto ma più lungo, mentre l’altro è più basso ma più largo”.*
- *“I due rettangoli hanno la stessa area perché ognuno di questi ha la stessa base e la stessa altezza del parallelogramma iniziale”.*

d) 27 elaborati con risposte che fanno riferimento alla manipolazione dei *“triangoli scuri”* e dei *“triangoli bianchi”*, senza il ricorso a un collage, per esempio:

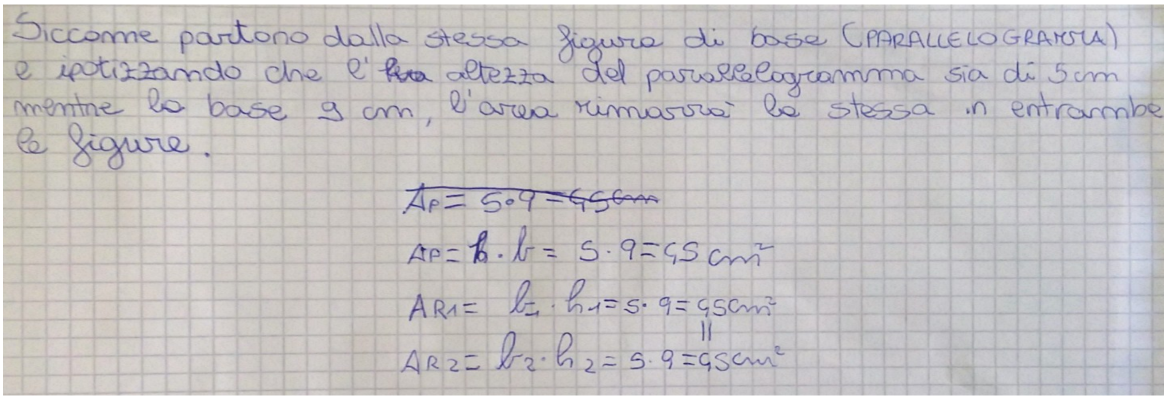
- *“I due rettangoli hanno la stessa area perché Antonio e Bianca hanno fatto la stessa cosa, soltanto che Antonio ha usato il lato minore e Bianca ha usato il lato maggiore e quindi si trovano in posizioni diverse”.*
- *“L’area è uguale perché la costruzione con i triangoli è uguale per tutti e due i rettangoli”.*
- *“L’area è uguale perché il parallelogramma di partenza è lo stesso e le parti tolte vengono poi rimesse adiacenti ad un altro lato”.*
- *“I rettangoli hanno la stessa area perché tagliando non viene tolto ne aggiunti pezzi”.*
- *“Le aree del parallelogramma sono uguali e quindi se togliamo una stessa parte da una e la rimettiamo e facciamo uguale con le altre le aree sono uguali”.*
- *“L’area dei due parallelogrammi è uguale perché sono stati formati da due parallelogrammi congruenti”.*
- *“Le due aree sono uguali perché le ha spostate e non ingrandite”.*
- *“Abbiamo notato che l’area è la stessa perché si parte dallo stesso parallelogramma solo che i pezzi sono stati tagliati in modo differente”.*

Cat 8 - 26 elaborati, molti dei quali fanno riferimento alla base e all’altezza delle figure, anche se spesso con frasi troppo brevi per dare conferma al correttore che la risposta sia corretta; ad es. nella risposta: *“Le aree sono uguali perché sia la base sia l’altezza sono uguali”* non è chiaro a quale figura ci si riferisca e soprattutto come si può affermalo.

In 6 elaborati di Cat 8, invece, il confronto tra la base e l’altezza dei rettangoli e del parallelogramma sono più soddisfacenti.


Le 2 figure hanno la stessa area perche in ogni caso rispettivamente nella prima ~~f~~ figura il lato minore del rettangolo e del parallelogramma e nella 2° figura i lati ~~a~~ maggiori coincidono quindi si può dedurre che rispettivamente il lato minore e maggiore sono a loro volta le altezze dei parallelogrammi. con questa informazione visto che ~~hanno~~ le figure hanno dei lati uguali si può calcolare l'area e risulta della stessa dimensione.

Nell'elaborato sotto troviamo interessante l'uso di altre misure *("ipotizziamo che l'altezza sia di 5 cm…")* perché, a mio parere, indica una tendenza alla generalizzazione


Siccome partono dalla stessa figura di base (PARALLELOGRAMMA) e ipotizzando che l' ~~h~~ altezza del parallelogramma sia di 5 cm mentre la base 9 cm, l'area rimarrà la stessa in entrambe le figure.

$\cancel{A_P = 5 \cdot 9 = 45 cm}$

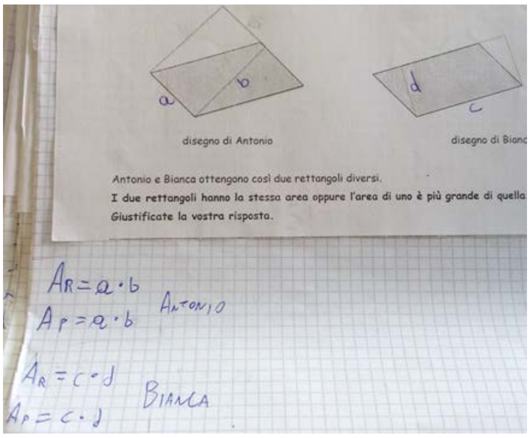
$A_P = h \cdot b = 5 \cdot 9 = 45 cm^2$

$A_{R1} = b_1 \cdot h_1 = 5 \cdot 9 = 45 cm^2$

$A_{R2} = b_2 \cdot h_2 = 5 \cdot 9 = 45 cm^2$

Altri elaborati riportano le seguenti risposte:
- *"Sì, sono uguali perché nel rettangolo di Bianca il lato maggiore corrisponde al lato maggiore del parallelogramma e l'altezza coincide sia nel parallelogramma che nel rettangolo; stessa cosa in quello di Antonio: il lato minore corrisponde al lato minore del parallelogramma e le altezze corrispondono sia nel parallelogramma che nel rettangolo"*
- *"I rettangoli hanno la stessa area ed hanno la stessa area del parallelogramma perché entrambi hanno un lato in comune e la relativa altezza"*
- *"Siccome è stata usata la stessa figura di base l'area dei rettangoli è la stessa, anche perché un rettangolo costruito con le stesse dimensioni del parallelogramma ha la sua stessa area"*

Dell'elaborato sotto, anche se assente la motivazione del perché il lato del rettangolo sia l'altezza del parallelogramma, colpisce la sintesi e la chiarezza



B1. Réponse correcte par mesurage et approximations / Risposte corrette tramite misurazioni e approssimazioni

Cat. 7 - 8 3 + 0 = 3
Cat. 7 - 8 3 + 1 = 4
Cat. 7 - 8 0 + 0 = 0
Cat. 7 - 8 2 + 3 = 5

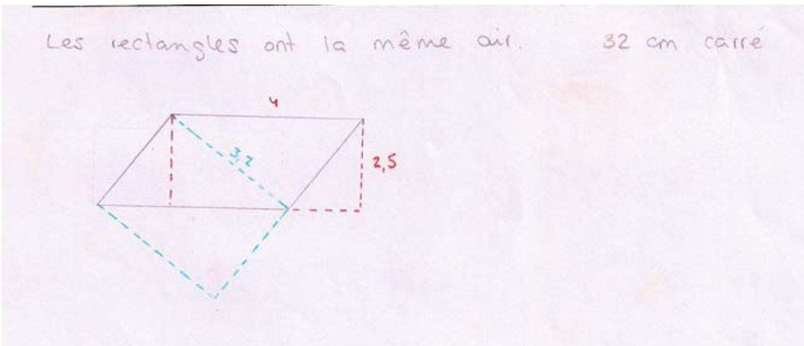
FC

In qualche caso gli allievi si rendono conto che le aree che hanno trovato con i calcoli sulla base di misure sono molto simili.

Dans quelques cas seulement, les éléves se rendent compte que les aires calculées sur la base de mesures sont très proches :

- *Les deux rectangles devraient avoir la même aire mais lorsqu'on calcule ... on ne trouve pas pareil. Il doit y avoir une erreur sur le schéma. ils devraient avoir la même aire car ils partent du même parallélogramme et l'utilisent en entier.* (Les deux rectangles différents, sont reconstitués par découpages et collages précis).
- *Les deux rectangles font presque la même aire, nous avons calculé ... 2,1 × 3,5 = 7,35 et 1,9 × 4 = 7,6. Le résultat est pratiquement le même.*
- (Dessin correct des deux rectangles, différents, puis) :
  Le dessin d'Antoine mesure 2,2 × 3,6 = 7,92. 7,92 arrondi à l'unité donne 8.
  Le dessin de Blanche mesure 1,9 × 4 = 7,6. 7,6 arrondi à l'unité donne 8.
  Donc les deux rectangles ont la même aire s'ils sont arrondis.

SR
Exemple où les élèves ne s'encombrent point des incertitudes sur la mesure (Cat. 8):



SI
Cat. 7 - 1 elaborato che ha riportato il punteggio 3:
"Abbiamo misurato la base e l'altezza dei rettangoli, dopodiché li abbiamo ritagliati. Infine abbiamo applicato la formula dell'area del rettangolo vedendo che hanno la stessa area. Il primo rettangolo = b = 1,9 cm h= 3,0 cm = A = 5,7 cm^2. Il secondo rettangolo = b = 3,4 cm h= 1,7 cm = A = 5,7 cm^2"

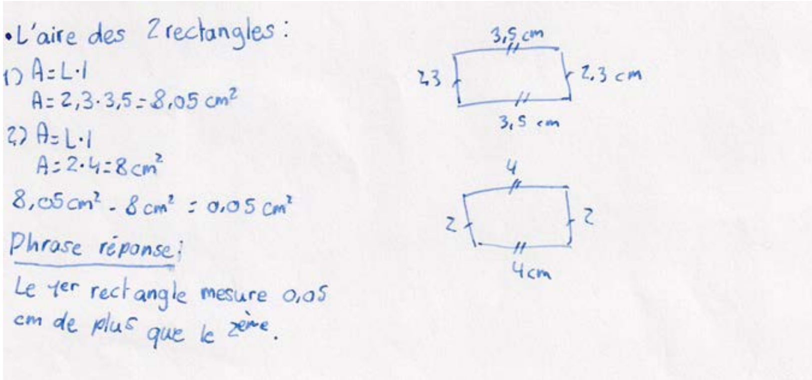
Cat. 7 - 1 elaborato che ha riportato il punteggio 1. Vengono riportati le misure e i calcoli, il risultato viene approssimato, senza far riferimento all'approssimazione:
"Rettangolo Antonio: 2,2 x 3,6 = 8 cm^2. Rettangolo Bianca: 4 x 2 = 8 cm^2".

B2. Réponse « non » par mesurage précis / Risposta "no" con misurazioni accurate

Cat. 7 - 8 18 + 8 = 26
Cat. 7 - 8 3+5= 8
Cat. 7 - 8 12 + 11 = 23
Cat. 7 - 8 3 + 2 = 5
Cat. 7 - 8 33+11=44
Cat. 7 - 8 57 + 30 = 87

FC
Dans ces cas, les élèves ont mesuré, avec une précision de 1 à 2 mm près, les côtés de chaque rectangle, puis ont effectué les multiplications correspondantes et ont trouvé des produits différents. Ils en concluent que les aires des deux rectangles sont différentes.
In questi casi gli allievi hanno misurato, con una precisione da 1 a 2 mm circa, i lati di ciascun rettangolo, poi hanno effettuato le moltiplicazioni corrispondenti e hanno trovato dei prodotti diversi. Hanno concluso che le aree dei due rettangoli sono differenti.

SR
Exemple de copie où la croyance en la mesure est fortement ancrée. De telles copies sont nombreuses, en catégorie 8 comme en catégorie 7.



SS: osservazione: idem quella descritta per FC

RZ: stesso procedimento

SI

- Cat. 7

a) In 54 elaborati si fa riferimento alla misurazione dei lati e all'uso della formula A = b x h per il calcolo dell'area. Attraverso questo procedimento, il valore dell'area delle due figure risulta diverso, a volte maggiore quello di Antonio, a volte maggiore quello di Bianca, non si accenna all'approssimazione dei risultati ottenuti. Per esempio:

- *"Disegno di Antonio = B = 3,6 x H =2,2 =A = 3,6 x 2,2 = 7,92 cm^2. Disegno di Bianca = B = 4,1 x H =2 =A = 4,1 x 2 = 8,2 cm^2".*
- *"Disegno di Antonio: A = b x h = 3,6 x 2,2 = 7,92 cm. Disegno di Bianca: = A = b x h = 4 x 2 = 8 cm".*
- *"Antonio 3,5 x 2,3 = 8,05 cm. Bianca 4 x 1,9 = 7,6 cm".*
- *"Disegno di Antonio = 8,14 cm^2, disegno di Bianca = 8,40 cm^2".*
- *"Disegno di Antonio = 8,28 cm^2, disegno di Bianca = 8,2 cm^2".*
- *"Abbiamo misurato i lati con il righello e con la squadra l'altezza [...] la prima area misura 7,35 cm^2; la seconda area misura 7,6 cm^2".*

b) In 2 elaborati gli alunni fanno riferimento alla sovrapponibilità dei triangoli grigi e bianchi di ciascuna figura, per giustificare l'equivalenza del parallelogramma con ciascun rettangolo, ma si avvalgono anche della misurazione dei lati (non riportano le misure) e dell'uso della formula A = b x h arrivando a due diversi prodotti e, quindi, alla risposta sbagliata. Nel terzo elaborato si legge:

- *"I due rettangoli non sono equivalenti. Per capirlo abbiamo sviluppato due modi. Il primo era, attraverso la misura in centimetri dei lati, calcolare l'area e il rettangolo di Bianca misurava 8,82 cm^2 e quello di Antonio 8,74 cm^2. Il secondo modo era vedere se i due rettangoli coincidevano perfettamente ai parallelogrammi (uguali) e quindi, da questo, capire se erano a loro volta uguali le aree (dei rettangoli). Bianca ha creato un rettangolo equivalente al parallelogrammo di base, mentre Antonio ha creato un rettangolo non coincidente/equivalente all'area del parallelogrammo di base e quindi l'area (del rettangolo) risultava diversa da quella di Bianca".*

B3. Réponse « non » par mesurage imprécis ou erreurs de calcul / Risposta "no" con misurazioni imprecise

Cat. 7 - 8 9 + 1 = 10
Cat. 7 - 8 5+2= 7
Cat. 7 - 8 4 + 1 = 3
Cat. 7 - 8 3 + 1 = 4
Cat. 7 - 8 5+2=7
Cat. 7 - 8 18+ 11 = 29

FC

Même procédure et conclusion que précédemment, mais les mesurages sont imprécis à plus de 2 mm près ou les calculs sont erronés

Stessa procedura e conclusione precedenti, ma le misure sono imprecise (per più di 2 mm) o i calcoli sono errati.

SS

- Abbiamo moltiplicato il lato minore per il lato maggiore di ciascun rettangolo e quindi l'area di Bianca è uguale a 8,4 mentre quella di Antonio è uguale a 7, 2.

SI
Cat. 7 - 18 elaborati, 4 dei quali hanno riportato il punteggio 1; 6 elaborati hanno riportato il punteggio 2, gli altri punteggio 0.
In un elaborato manca la risposta, sono riportate le misure, poco accurate, dei lati dei due rettangoli e i valori delle due aree 9 cm (rettangolo di Antonio) e 8,4 cm (rettangolo di Bianca). La formula è corretta, i lati dei due rettangoli sono indicati con lettere che non compaiono sui rispettivi disegni.
In un altro elaborato il rettangolo di Antonio è più piccolo (15,84) rispetto a quello di Bianca (16), ma non sono riportate né le formule usate, né le unità di misura.
In un altro si legge: *"L'area dei due rettangoli non è uguale perché l'altezza del primo è 2,2 cm mentre quella del secondo è 2 cm, mentre le due basi sono uguali".*
- *"Abbiamo moltiplicato B x h trovando l'area diversa".*
- *"L'area del rettangolo di Antonio misura 8,75 cm mentre l'area di quello di Bianca misura 8 cm".*
Cat. 8 - *11 elaborati.*
In diversi fogli risposta viene affermato che le aree sono diverse in base alle misurazioni effettuate ma non sono riportate né le misure dei lati, né dell'area. Altre volte riportano solo il valore dell'area, senza mostrare i calcoli.

La sezione di Sassari ha ritenuto opportuno, sulla base delle risposte, integrare:
B4 Risposta NO perché confrontano le aree mettendo a confronto le lunghezze dei lati.

Cat 7 e 8 - 1+0= 1
Quello di Antonio è più grande perché coincidono il lato minore per 0,3 cm mentre quello di Bianca coincide parzialmente il lato maggiore per 3,1 cm e quindi il lato occupa più spazio creando un'area più grande.

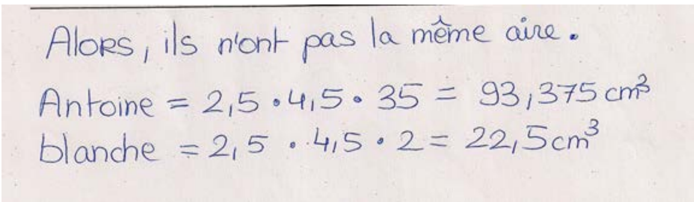
C1. Mesurages mais formules erronées pour le parallélogramme / Misurazioni ma formule errate per il parallelogramma

Cat. 7 - 8	3 + 3 = 6
Cat. 7 - 8	3 +0= 3
Cat. 7 - 8	2 + 1 = 3
Cat. 7 - 8	0 + 0 = 0
Cat. 7 - 8	3 + 0=3
Cat. 7 - 8	0 + 0 = 0

FC
Les élèves calculent l'aire du parallélogramme par le produit des deux longueurs de ses côtés.
Dans certains cas la confusion concerne une des figures et la conclusion est que les deux rectangles ont des aires différentes.
Dans d'autres cas, la confusion concerne les deux figures et la conclusion est que les deux rectangles ont la même aire.
Dans d'autres cas encore, les aires des parallélogrammes sont calculées avec la formule erronée pour conclure que les rectangles ont des aires différentes mais que les deux parallélogrammes ont la même aire, différente de celle des rectangles !
Gli allievi calcolano l'area del parallelogramma tramite il prodotto di due lunghezze dei suoi lati.
In alcuni casi, la confusione riguarda una delle figure e la conclusione è che i due rettangoli hanno aree differenti.
In altri casi, la confusione riguarda le due figure e la conclusione è che i due rettangoli hanno la medesima area.
In altri casi ancora, le aree dei parallelogrammi sono calcolate con una formula errata per concludere che i rettangoli hanno aree differenti, ma che i due parallelogrammi hanno la stessa area, diversa da quella dei rettangoli!

4,2 × 4 = 8,8 aire du parallélogramme
2 × 3,5 = 7 aire du rectangle d'Antoine
1,9 × 4 = 7,6 aire du rectangle de Blanche
Les deux rectangles n'ont pas la même aire car le rectangle à Blanche est plus grand et l'aire du parallélogramme est de 8,8 donc ils ne peuvent pas avoir une aire correcte.

SR
Exemple de copie où la confusion est énorme (Cat. 7)


Alors, ils n'ont pas la même aire.
Antoine = 2,5 • 4,5 • 35 = 93,375 cm^3
blanche = 2,5 • 4,5 • 2 = 22,5 cm^3

SS
Calcolo dell'area dei parallelogrammi moltiplicando le misure approssimate delle lunghezze dei lati, non mettono a confronto le aree dei rettangoli e concludono affermando che i due disegni sono isoperimetrici.
Calcolano l'area dei parallelogrammi moltiplicando la base per l'altezza.

C2. Mesurages mais formules erronées pour le rectangle ou le parallélogramme / Misurazioni ma formule errate per il rettangolo o il parallelogramma

Cat. 7 - 8	6 + 6 = 12
Cat. 7 - 8	**1 + 3 = 4**
Cat. 7 - 8	0 + 0 = 0
Cat. 7 - 8	28 + 4 = 32

On trouve de tout ici / Qui si trova di tutto
formule fantasiose del tipo *L × l × 2* per i parallelogrammi; *4 × 4 : 2 = 8*; *4 : 2 = 8 e 4 × 4 : 2 = 8* per le due figure; *ils n'ont pas la même aire car Blanche a trouvé L x l = 4,2 × 4,2 × 2,3 × 2, 3 = 93,3156 …*

SI
a) In 21 elaborati di categoria 7, che hanno riportato il punteggio 0, si fa riferimento al confronto delle aree dei due rettangoli calcolate nei modi più fantasiosi. Dato l'errore commesso nel calcolo delle aree, la risposta è sbagliata, risultando ora maggiore l'area di Antonio, ora quella di Bianca. In alcuni casi sono riportate le misure effettuate sulle figure, in altri i lati vengono nominati con lettere che non compaiono sui disegni. Viene calcolata l'area del parallelogramma moltiplicando la misura dei lati (*2,2 x 4 = 8,8*). Per calcolare l'area del rettangolo in più elaborati si usa la formula (b *x* B *x* h)/2. In altri casi non è riportata la formula usata, ma solo il risultato (25,6 per il rettangolo di Antonio, 31 per quello di Bianca) senza le unità di misura. In un elaborato si fa riferimento all'ampiezza degli angoli. Per calcolare l'area del rettangolo viene usata la formula *"area x altezza : 2"*. Alcuni esempi:
- *"Abbiamo moltiplicato l x l x l e abbiamo visto che quello di Antonio è il più grande tra i due (17,6 e 9,66)".*
- *"Le due aree sono uguali perché calcolando la differenza tra il lato minore del rettangolo di Bianca e di quello di Antonio e facendo la stessa cosa per i lati maggiori e aggiungendo la differenza del lato di un rettangolo all'altro si ottiene la stessa area"*. Non è riportato nessun calcolo.
- *"Antonio (2,3 +4)x3,6/2 = 11,34 cm^2. Bianca (4,1 +5,1)x2/2 = 9,2 cm^2".*
- *"Antonio 4 x 2/2 = 4 cm. Bianca 3,4 x 2,3/2 = 3,41 c^2".*
- *"Antonio 4 x 4 = 16. Bianca 4 x 2 = 8".*
- *"Antonio 90° x 8 = 720°. Bianca 90° x 8 = 720°".*
- *"L'area è la stessa: 2,3 x 4 x 2 = 18,4".*

b) In 7 elaborati di categoria 7, che hanno riportato il punteggio 0, si fa riferimento al calcolo delle aree e al loro confronto, ma non è esplicitato nessun procedimento.

In tre elaborati di cat. 8 viene usata la formula dell'area del triangolo.

C3. Mesurages avec confusions aire-périmètre / Misurazioni con confusioni area-perimetro

Cat. 7 - 8	10 + 0 = 10
Cat. 7 - 8	0 + 0 = 0
Cat. 7 - 8	1 + 0 = 1
Cat. 7 - 8	1 + 0 = 1

- Ils n'ont pas la même aire car ils n'ont pas le même périmètre donc ils n'ont pas forcément la même aire.
- "L'area del disegno di Bianca è più grande dell'area del disegno di Antonio, perché facendo la somma di tutti i lati, il risultato del disegno di Bianca è maggiore di quello di Antonio".

D. Divers égalité ou inégalités / Casi diversi di uguaglianza o non uguaglianza
Il reste une partie importante des copies difficiles à répertorier vu la diversité des arguments en faveur de l'égalité, et, en cas d'inégalité, en faveur du rectangle d'Antoine ou de celui de Blanche.
Resta una parte non banale di elaborati difficili da classificare vista la diversità delle argomentazioni in favore dell'uguaglianza e, nel caso di non uguaglianza, in favore del rettangolo di Antonio o di quello di Bianca.
Si trova spesso un argomento secondo il quale, visto che si tratta del medesimo parallelogramma, le aree dei due rettangoli sono uguali.
Un argument souvent avancé est que, vu qu'il s'agit du même parallélogramme, les aires des deux rectangles sont égales.
FC
- Ils ont la même aire car le parallélogramme est la base et les deux rectangles ont la même base.
- Les deux rectangles ont la même aire car les deux parallélogrammes ont les mêmes dimensions.
- L'aire des parallélogrammes reste la même que les rectangles car le mesure reste la même.

RZ
- "I parallelogrammi sono uguali quindi spostando le loro parti l'area rimane la stessa"
Difficoltà di argomentare con chiarezza:
"I rettangoli hanno la stessa area perché hanno trasportato parte del parallelogramma dall'altra parte, formando così un rettangolo e lo hanno fatto due volte con diverse parti."

FC
On trouve aussi des arguments en « langue de bois » (ou langue de politicien) avec l'inévitable « car ».
Ci sono anche argomenti in "politichese" con l'inevitabile "poiché".
- Ils ont la même aire car ils ont la même base et que les mesures des côtés ne changent pas.
- Les deux parallélogrammes ont la même aire car les angles opposés sont de même mesure et les côtés opposés sont de même mesure. La somme des angles consécutifs est égale à 90^o donc ils sont complémentaires.
- Oui car les côtés sont proportionnels c'est-à-dire que si la longueur est longue la largeur de l'autre va augmenter et inversement.
- Ils ont la même aire car dans un parallélogramme les côtés sont égaux 2 à 2, dans les parallélogrammes = les rectangles = le rectangle de l'autre personne. Dessin d'Antoine = dessin de Blanche.

Et finalement les inévitables influences scolaires par exemple le recours à des équations inutiles du genre :
E infine le influenze dei programmi scolastici come ad esempio il ricorso ad equazioni inutili del tipo che segue.
- J'ai nommé le parallélogramme d'Antoine : A, B, C, D, E, F et celui de Blanche .... Vu qu'il n'y a pas de mesures j'ai fait : AB = x ; CD = x ; FE = x ; CE = y ; ...
o il richiamo a Talete, o ancora alla proporzionalità, …

SS
- Siccome i due ragazzi son partiti dallo stesso parallelogramma hanno costruito un rettangolo con la stessa area.

SI
Stessa frase

FC
Comparaison avec les parties de côtés partiellement en commun ou à partir des triangles blancs.
Confronto con le parti di lati parzialmente in comune o a partire dai triangoli bianchi.
- Ils n'ont pas la même aire car il ne coïncide pas avec le même côté. C'est Antoine qui a la plus grande aire car son triangle rectangle est plus grand
- Non ils n'ont pas la même aire car si on reporte les triangles de Blanche sur le parallélogramme on a le parallélogramme. Mais si on fait pareil avec celle d'Antoine on a pas le parallélogramme.
- C'est la même aire car le schéma d'Antoine est le même que Blanche mais sur la largeur.
- L'aire du rectangle de Blanche est plus grande que l'aire du rectangle d'Antoine car le rectangle de Blanche coïncide avec l'un des grands côtés du parallélogramme alors que celui d'Antoine coïncide avec l'un des petits côtés du parallélogramme donc c'est pour cela que le rectangle de Blanche a une plus grande aire que celui d'Antoine.

SS
-Sono uguali perché due dei lati del rettangolo di Bianca coincidono con i lati maggiori e in quello di Antonio un lato coincide con quello minore.
-I due rettangolo hanno l'area diversa perché nel rettangolo di Antonio i lati coincidono con i lati minori del parallelogramma. Invece nel rettangolo di Bianca sono i due lati maggiori che coincidono con i lati minori del parallelogramma.

RZ
Incertezza sull'equiestensione dei rettangoli
*"I due rettangoli hanno base e altezza differenti(l'area del rettangolo è uguale a B*h), a questo punto i due rettangoli non potranno mai avere la stessa area"*

SI
Cat. 7 - 1 elaborato che ha riportato il punteggio 1.
"L'area del rettangolo di Bianca è più grande [...] il rettangolo di Bianca ha la stessa area del parallelogramma perché il triangolino che rimane fuori combacia con il rettangolo di Bianca. Invece quello di Antonio non viene ricoperto completamente dal triangolo che sta fuori"

Cat. 8 - 11 elaborati
"*Nel disegno di Bianca il rettangolo viene costruito sui lati maggiori del parallelogramma mentre i lati obliqui si spostano ma restano della stessa misura. Nel disegno di Antonio il rettangolo viene costruito sui lati minori del parallelogramma, mentre i lati maggiori si spostano obliquamente e le loro misure diminuiscono. L'area del rettangolo di Bianca è maggiore rispetto all'area del rettangolo di Antonio"*
"Tra i due il disegno più grande è quello di Antonio perché la parte che coincide è minore di quello di Bianca"
Siena sull'incertezza dell'equiestensione:
"il rettangolo di Antonio ha l'area più grande di quello di Bianca perché il rapporto fra i lati non è uguale"
"L'area dei due rettangoli non può essere uguale perché i lati del disegno di Antonio sono diversi dai lati del disegno di Bianca e quindi le aree non possono essere uguali"
"I due rettangoli non hanno la stessa area perché la base del rettangolo disegnato da Bianca è più lunga rispetto a quella disegnata da Antonio

FC
Des superpositions ou des découpages suivis de collages sont évoqués, avec des compensations, des « dépassements » qui peuvent aboutir à l'égalité ou à l'inégalité.
Vengono richiamati sovrapposizioni o ritagli seguiti da collage, con compensazioni, "qualcosa che deborda" che possono portare all'uguaglianza o alla non uguaglianza.

SS
– L'area del disegno di Antonio è minore dell'area del disegno di Bianca per dimostrarlo abbiamo ritagliato una copia del rettangolo di Antonio e l'abbiamo confrontata con quello di Bianca così ci siamo accorti che ha un'area maggiore quello di Bianca.
– Le aree sono uguali perché la formula dell'area del parallelogramma e del rettangolo è bxh.

SI
Cat 8
In un elaborato confusione tra congruenza e equivalenza; i due rettangoli sono stati ritagliati in maniera da risultare congruenti.
Cat. **7 -** 2 elaborati che ha riportato il punteggio 0, per esempio:
- *"I due rettangoli non hanno la stessa area perché quella di Antonio è più grande"*

*C*at. 8 - 1
"I due rettangoli sono diversi perché i parallelogrammi formano due triangoli diversi"

E. Risposte errate

La sezione di Siena ha approfondito l'analisi delle risposte errate.

Cat 7 - 33 elaborati che hanno riportato il punteggio 0. 1 elaborato che ha riportato il punteggio 2 = 34

In alcuni casi gli alunni danno la risposta sbagliata perché confrontano soltanto i triangoli bianchi delle due figure, dal quale deriva che il disegno di Antonio ha l'area maggiore poiché il triangolo bianco è più grande. In un elaborato i due triangoli sono incollati l'uno sull'altro per evidenziare il confronto eseguito dal gruppo. In altri casi gli alunni non riescono a leggere le due figure: fanno riferimento a trapezi, a rettangoli visti in prospettiva, alle aree che sono diverse perché le forme sono diverse. In altri elaborati si legge *"Muovendo il parallelogramma e facendolo diventare un rettangolo"*, forse nell'esperienza degli alunni ci sono state attività con i modelli dinamici, senza tuttavia tener presente che nella modifica della forma che deriva dall' articolazione del modello i lati delle figure rimangono congruenti, cosa che non succede nel contesto del problema. E' ricorrente l'errore di considerare il lato del parallelogramma l'altezza della figura.

- *"I due rettangoli non hanno la stessa area. Abbiamo provato a dare un valore ai lati casuale e confrontando le aree abbiamo notato che non si eguagliavano".*
- *"I due rettangoli non hanno la stessa area. Attraverso dei modellini delle figure rappresentate nel problema, abbiamo scartato le parti della figura in più che non creavano un rettangolo".* Gli alunni si limitano a confrontare la forma dei due rettangoli, riprodotti mediante collage, deducendo che lo sia anche l'area.
- *Secondo noi i due rettangoli disegnati da Antonio e da Bianca non sono equivalenti. Infatti prendendo le figure dopo averle ritagliate e sovrapposte, abbiamo notato che sono diversi, inoltre anche osservando le due immagini si nota che sono diversi.*
- *"I due rettangoli non hanno la stessa area perché il disegno di Antonio è più grande e il rettangolo è più esposto verso l'esterno rispetto a quello di Bianca".*
- *"Non è la stessa area perché hanno messo i triangoli in modo diverso a quello di Bianca".*
- *"Secondo noi i due rettangoli disegnati da Antonio e da Bianca non sono equivalenti. Infatti prendendo le figure dopo averle ritagliate e sovrapposte, abbiamo notato che sono diversi, inoltre anche osservando le due immagini si nota che sono diversi".*
- *L'area del rettangolo di Bianca è minore rispetto all'area dell'altro disegno [...] i lati del disegno di Antonio sono tutti obliqui [...] sappiamo che in queste circostanze i lati obliqui sono di lunghezza maggiore rispetto ai lati dritti."*
- *"Il rettangolo di Bianca ha l'area maggiore rispetto a quello di Antonio perché lui ha disegnato la base del rettangolo spostata rispetto ai vertici opposti del parallelogramma, mentre Bianca ha disegnato le altezze del rettangolo che coincidono ai vertici del parallelogramma".*
- *"Sono diversi: il lato minore del rettangolo di Antonio è congruente al lato obliquo del parallelogramma e quello di Bianca ha invece il lato minore congruente all'altezza del parallelogramma".*
- *"Sono uguali perché hanno lo stesso diametro".*
- *"I due rettangoli non hanno la stessa area perché dal parallelogramma uno ha subito la traslazione e l'altro la rotazione".*
- *"Il rettangolo con maggiore area è quello di Antonio, perché il lato maggiore del suo triangolo è la metà del lato maggiore di quello di Bianca e del lato minore di quello di Antonio. Quindi rimane il lato opposto minore del rettangolo di Antonio e ciò avanza per i due lati minori del rettangolo di Bianca".*
- *"Hanno l'area uguale perché gli angoli e i lati coincidono".*
- *"L'area di Antonio è più piccola [...] perché il lato maggiore del parallelogramma è più grande del lato maggiore del rettangolo di Antonio".*
- *"La parte che Antonio ha aggiunto, abbiamo visto sovrapponendoli, è più grande di quella che ha aggiunto Bianca".*
- *"I due rettangoli hanno la stessa area perché sono uguali soltanto visti da una prospettiva diversa".*
- *"I due rettangoli sono uguali perché i lati sono uguali".*
- *"Abbiamo visto che girando le figure erano entrambe dei trapezi e così abbiamo calcolato l'area dei due trapezi [...] è maggiore l'area del trapezio di Antonio".*
- *"Le due aree sono uguali, perché i parallelogrammi sono identici. Pur avendo l'area disegnata in modo diverso".*
- *"Muovendo il parallelogramma e facendolo diventare un rettangolo abbiamo visto che i lati e l'area sono gli stessi".*
- *"Abbiamo provato a ridisegnare i 3D le stesse figure [...] e abbiamo capito che è la stessa area".*
- *"E' più grande quello di Antonio [...] il lato maggiore passa attraverso tutto il parallelogramma e quindi deve essere per forza più lungo del lato maggiore del parallelogramma stesso. Quello di Bianca ha invece i lati maggiori coincidenti come quello del parallelogramma".*

Nella sezione di Siena, oltre il 35% degli elaborati ottiene 0 punti; tra i vari motivi emerge una certa difficoltà di lettura delle immagini (ad esempio interpretate in prospettiva, o nel riconoscimento dei rettangoli). Le figure coinvolte vengono difficilmente gestite, anche perché sono coinvolti parallelogrammi, rettangoli, triangoli e trapezi. In molti elaborati, probabilmente c'è stata una reale comprensione del problema ma il punteggio attribuito è basso perché le risposte risultano ambigue o incomplete: emerge, quindi, una certa superficialità nell'argomentazione ma soprattutto una diffusa povertà linguistica.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

LE PRÉ DU PÈRE FRANÇOIS

Michel Henry, Angela Rizza

Pour le Groupe Fonctions[1]

Identification

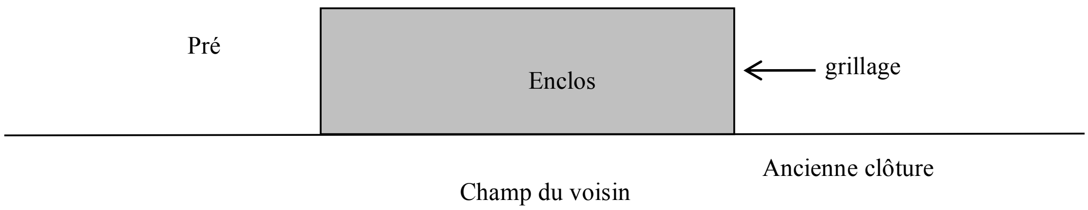
Rallye : 18.II.19
Catégories : 9, 10
Domaine conceptuel : fonctions, équations , systèmes d'équations, nombres réels
Familles de tâches : variables et formules, équations du second degré

Résumé

Trouver les dimensions d'un rectangle de 40 m^2 et de 20 m de périmètre partiel, composé de trois côtés, dans un contexte d'enclos rectangulaire protégé par un grillage (équation du second degré à racines irrationnelles à approcher convenablement).

Énoncé du problème

Le père François possède un pré en bordure du champ d'un voisin, une ancienne clôture rectiligne séparant les deux propriétés. Pour faire l'essai d'une nouvelle semence, le père François veut réserver dans son pré, le long du champ voisin, un enclos rectangulaire de 40 m^2.
Pour éviter que ses bêtes, qui paissent dans son pré, aillent piétiner sa nouvelle plantation, il veut installer un grillage formant les trois autres côtés de la zone rectangulaire à réserver. Il dispose d'un grillage d'une longueur de 20 m qu'il veut utiliser entièrement (voir la figure).



Quelles seront, au décimètre près, les mesures des côtés de l'enclos rectangulaire de Père François ? Expliquez comment vous avez trouvé.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

Il s'agit d'abord de s'approprier la situation et de comprendre que les côtés de la clôture peuvent varier, alors que l'aire du rectangle et la longueur de la clôture restent constants. Il faut ensuite traduire sous forme d'équations les relations entre les variables. Par exemple, si on appelle x la longueur du côté du rectangle parallèle à la vieille clôture (la base) et y celle du côté perpendiculaire (hauteur), on obtient les équations : $xy = 40$ et $x + 2y = 20$.
Plusieurs démarches sont alors possibles :

1) Travailler par essais, éventuellement en s'aidant d'un tableau. Les essais peuvent être effectués en fixant la valeur d'une variable ; on obtient alors la valeur de l'autre variable à partir d'une des deux équations et on utilise la seconde équation pour vérifier. Ou bien on peut faire varier en même temps les valeurs de x et y dans les deux formules.

2) Reconnaître l'ensemble des deux équations comme un système : les solutions à trouver pour x et y doivent être valables pour les deux les équations écrites. Pour le résoudre, il faut exprimer une variable en fonction de l'autre

[1] Le groupe "Fonctions" qui a analysé ce problème dans le cadre de la rencontre ARMT de Luxembourg en 2013, était composé de Lucia Argilla, Maria Cristina Bonomi, Sandro Deplano, Valeria Ferrari, Mathias Front, Annie Henry, Michel Henry, Rosa Iaderosa, Ana Paula Jahn, Francesca Ricci, Angela Rizza.

pour obtenir une équation à une inconnue ; par exemple remplacer dans la seconde équation y par 40/x, et obtenir l'équation du second degré : $x^2 - 20x + 80 = 0$.

On peut résoudre cette équation en utilisant la formule (seulement en cat.10) ou par approximations successives. Dans ce cas on peut considérer la fonction $y = x^2 - 20x + 80$ et donner à la variable x plusieurs valeurs de façon à trouver comme images pour y deux nombres de signes opposés. La recherche peut être faite d'abord avec des valeurs entières de x et on affine ensuite à partir des subdivisions en dixièmes des intervalles trouvés.

3) À partir des deux relations $xy = 40$ et $x + 2y = 20$, tracer les courbes correspondantes, déterminer les deux points d'intersection et interpréter leurs coordonnées dans le contexte du problème.
Une autre résolution graphique possible consiste à tracer la parabole d'équation $y = x^2 - 20x + 80$ et à déterminer ses points d'intersection avec l'axe des abscisses. Une fois trouvées les deux solutions du problème, les donner avec l'approximation demandée.

Mots-clés

Variables, fonctions, équations, graphique cartésien, approximations de mesures, nombres réels.

Points attribués

Le problème a été donné dans 142 classes de la catégorie 9 et 108 de la catégorie 10.
Les résultats sont indiqués dans le tableau suivant:

Points attribués	0	1	2	3	4	*N. classes*	*m*
Catégorie 9	74	13	10	2	1	142	0,42
Catégorie 10	60	13	8	7	11	108	0,96
Ensemble	68	13	9	4	5	250	0,66

Selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

4 Les deux couples solutions (5,5 m et deux fois 7,3 m, ou 14,5 m et deux fois 2,8 m), avec une explication claire pour obtenir l'équation et une présentation de la démarche d'approximations ou la résolution par radicaux.

3 Les deux couples solutions, avec une explication claire pour obtenir l'équation, sans la méthode de résolution ou un résultat obtenu par tâtonnement non ordonné.

2 Un seul couple de solutions avec des explications cohérentes sur la manière de le trouver.

1 Démarche cohérente pour interpréter les données de l'énoncé et aboutir à une équation, sans sa résolution.

0 Incompréhension du problème ou non respect d'une contrainte.

Procédures, obstacles et erreurs relevées

Au préalable, signalons un obstacle dû à l'interprétation de la figure. Les élèves en déduisent à tort des informations supplémentaires, par exemple que la base doit être plus grande que la hauteur (avec comme conséquence une solution unique au problème) ou bien qu'il y a un rapport entre les côtés, à trouver par des mesures sur la figure.
Il est possible que l'insistance de l'énoncé à se référer à la figure (« voir la figure » répété deux fois) soit liée à cette interprétation. Une autre ambiguïté possible du texte est la forme de la question : « Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse » qui peut faire penser à une solution unique.
Les procédures les plus utilisées sont la recherche par essais (cat. 9) et la résolution de l'équation du second degré (cat. 10) en utilisant la formule.
Dans le premier cas (procédure par essais) on remarque la difficulté à organiser les essais avec des nombres décimaux et à décrire les essais réalisés, qui souvent restent implicites. En outre la recherche s'arrête au premier essai satisfaisant, faisant perdre ainsi une des deux solutions du problème.
La seconde procédure (équation) met en évidence les difficultés de nature algébrique, liées à la résolution de l'équation du second degré.
Dans les deux les cas, mais surtout dans la résolution algébrique où les solutions de l'équation sont écrites avec le symbole de la racine carrée, apparaît le problème de la signification de l'approximation « au décimètre près» demandée.
Comme nous l'avons déjà dit, figure parmi les procédures erronées la lecture sur le schéma du rapport entre les côtés (exemple 1:3 ou bien 1:4), donnée qui est utilisée à la place d'une de celles de l'énoncé Dans plusieurs copies on observe l'hypothèse implicite (déduite de la figure) que la base doit être plus grande que la hauteur, restriction qui entraîne à ne pas considérer ou à exclure une des deux solutions du problème.

Exploitations didactiques

Dans le cadre du rallye, le problème a obtenu un pourcentage de succès très faible (surtout en cat. 9). En effet ce problème, outre la capacité à mathématiser la situation par l'écriture d'un système et à déterminer les solutions de l'équation algébriquement ou graphiquement, demande d’autres capacités, comme celle de comprendre la situation sans se faire influencer par la figure proposée et celle de reconnaître dans des nombres irrationnels les deux couples de solutions et éventuellement de les trouver par approximation.

La richesse du problème constitue une ressource pour l'enseignant qui peut l'utiliser à différents moments de l’apprentissage et avec différents objectifs. En fonction de ces objectifs, l'enseignant peut même compléter ou partiellement modifier les questions du problème, entre autres pour lever les ambiguïtés du texte original signalées plus haut.

Proposons quelques exemples :

- Choix des variables et comparaison des équations obtenues. Le problème peut s'insérer dans l’apprentissage au début de l’algébrisation. Il constitue un exemple de situation dans laquelle l'écriture de l'équation à résoudre passe par l’écriture d'un système et dépend du choix des variables (on obtient des équations semblables mais différentes si x et y indiquent respectivement la base et la hauteur du rectangle ou vice-versa).
- Introduction des équations du second degré : le problème peut être utilisé pour faire naître l'exigence d'une méthode rapide et efficace pour la résolution de telles équations plutôt qu’une procédure de recherche par essais, longue et pas toujours fiable. À cet effet le problème peut être laissé sensiblement dans sa forme originale.
- Représentation de fonctions : le problème peut être utilisé pour donner des exemples de fonctions nées d'une situation géométrique et pour souligner le rapport de dépendance entre les variables. Dans ce but on pourrait ajouter la demande explicite d'une représentation (sous forme de tableau ou de graphique) de la fonction. En l’absence de cette demande, on observe en effet, que le recours à l’outil fonction (en particulier dans son registre graphique) n'est pas spontané. On peut associer au problème différents types de graphiques (hyperbole et droite, ou parabole, avec de légères variations aussi en relation avec le choix des variables). Un outil comme Geogebra peut être utilisé pour débarrasser les élèves des aspects techniques de la construction du graphique et focaliser leur attention sur l'interprétation même du graphique. Une comparaison entre les graphiques des figures 1 et 2 amène une réflexion sur les solutions du problème. Le graphique de la figure 1 fournit les deux valeurs des inconnues x et y, alors que celui de la figure 2 fournit seulement les valeurs de x, celles de y devant être tirées de la relation utilisée, par substitution.

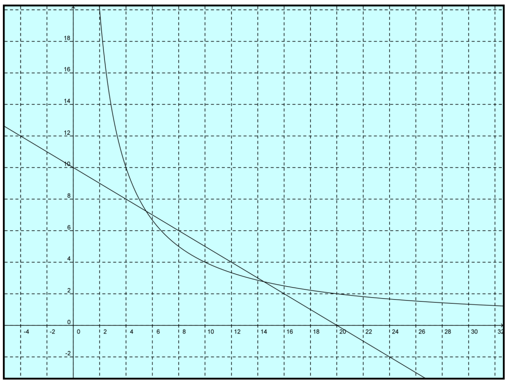


Figure 1

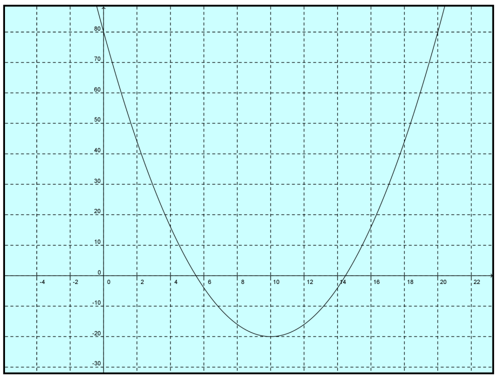


Figure 2

- Approximation : le problème peut être utilisé pour une réflexion sur la nature des nombres solutions. Il s'agit en effet de nombres irrationnels, qui peuvent être écrits en utilisant le symbole de la racine carrée, mais dont il est nécessaire de donner une valeur approchée dans une situation concrète (dans laquelle il est prévu par exemple l'achat de la clôture). Une variable didactique possible du problème peut être le degré d'approximation demandé. Il est à souligner que, en représentant les fonctions avec un logiciel comme Geogebra, la compréhension du concept de nombre irrationnel peut être favorisée grâce à l'exploration du graphique au moyen du « zoom » : le nombre irrationnel qui, initialement semble « à portée de main », devient, dans les agrandissements successifs, toujours plus inaccessible alors qu’augmente le nombre de chiffres de son écriture décimale. Dans la figure 3 on a représenté une des solutions du problème.

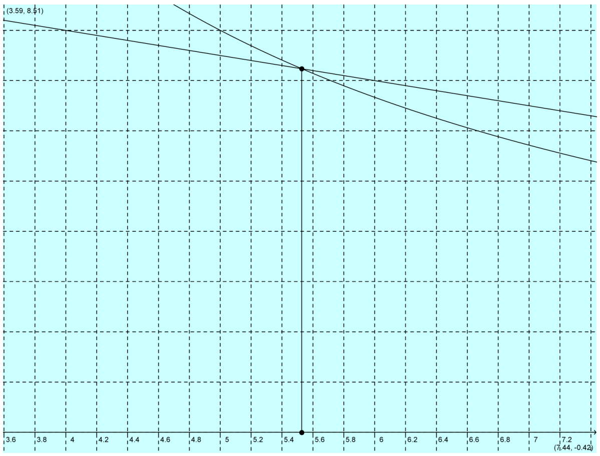


Figure 3

Pour aller plus loin

Présentation de quelques copies qui mettent en évidence les procédures, les obstacles et les erreurs énumérés dans la rubrique *Procédures, obstacles et erreurs relevées*.

Procédure de résolution par essais : elle fournit une seule des deux solutions, avec une approximation correcte :

L'equazione quindi era : $\left(\frac{20-x}{2}\right) \cdot x = 40$

$\left(10 - \frac{1}{2}x\right) \cdot x = 40$

$10x - \frac{1}{2}x^2 = 40$

$\frac{20x - x^2}{2} = \frac{80}{2}$

$20x - x^2 = 80$ PROSEGUE DI LÀ →

DA $20x - x^2 = 80$ abbiamo provato a dare un valore approssimativo alla $x = 5,5$. Trovato questo valore abbiamo trovato l'altro valore del lato : $\left(\frac{20-x}{2}\right) = \frac{20-5,5}{2} = 14,5 : 2 = 7,25$

Quindi il valore dei due lati approssimati al decimetro saranno uno 5,5 cm e l'altro 7,2 cm.

Autre exemple :

$1 \times 2 + 18 = 18 m^2$
$2 \times 2 + 16 = 32 m^2$
$3 \times 2 + 14 = 42 m^2$
$4 \times 2 + 12$
$5 \times 2 + 10$
$6 \times 2 + 8$
$7 \times 2 + 6$
$8 \times 2 + 4$
$9 \times 2 + 2$

Nous avons travailler sur le tableur et nous avons trouvé que y doit faire approximativement entre 2,76 et 2,77 et pour $x = 14,48$ et 14,46

Si $y = 2,76$ $A = 39,9648 m^2$

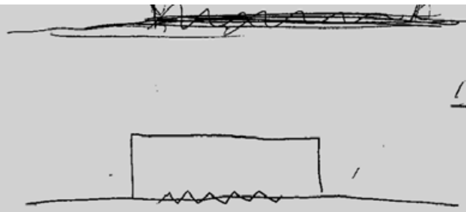
Si $y = 2,77$ $A = 40,0542 m^2$

Il manque une explicitation des essais effectués et confusion entre démonstration et vérification a posteriori :

La misura delle due basi è rispettivamente 2,77 cm e 14,46 cm
Il risultato è stato trovato dopo vari tentativi e ~~con questi dati~~ abbiamo verificato che la somma di questi era circa 20 m e il prodotto era circa 40 m²

$(2,77 \cdot 2) + 14,46 = 20\,m$
$2,77 \cdot 14,46 = 40,0542\,m^2$

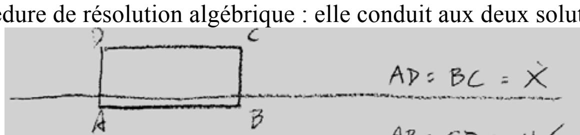
Difficulté d'organiser les tentatives : avec des nombres entiers on n'arrive pas aux solutions :



IMPOSSIBILE

$40 = 6 \cdot 8$ X
$8 \cdot 5$ X
$10 \cdot 1$ X
$1 \cdot 10$ X
$10 \cdot 4$ X
$4 \cdot 10$ X
$2 \cdot 20$ X
$20 \cdot 2$ X

Procédure de résolution algébrique : elle conduit aux deux solutions mais fait perdre le sens de l'approximation :



$AD = BC = x$

$AB = CD = y$

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x \cdot y = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 20 - 2x \\ (20 - 2x) \cdot x = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} — \\ 20x - 2x^2 = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} — \\ x^2 - 10x + 20 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 5 + \sqrt{5}$

$y_1 = 20 - 2 \cdot (5 + \sqrt{5}) = 20 - 10 - 2\sqrt{5} = 10 - 2\sqrt{5}$

$x_2 = 5 - \sqrt{5}$

$y_2 = 10 + 2\sqrt{5}$

$\Delta = 100 - 80 = 20 = 4 \cdot 5$

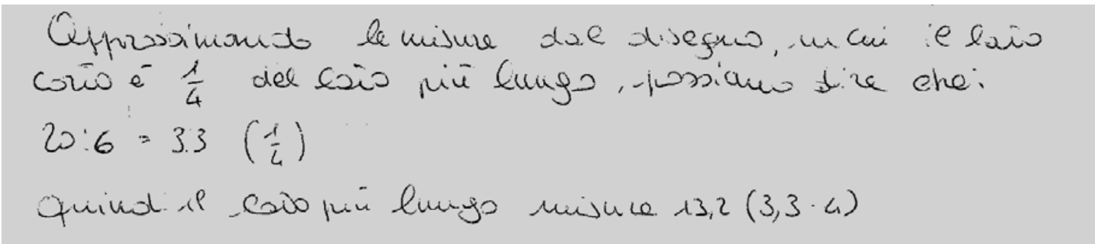
$x_{1,2} = \dfrac{10 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 5 \pm \sqrt{5}$

Le due soluzioni sono $\begin{cases} AD = 5 + \sqrt{5} \\ AB = 10 - 2\sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} AD = 5 - \sqrt{5} \\ AB = 10 + 2\sqrt{5} \end{cases}$

Introduction de l'hypothèse implicite que la base doit être plus grande que la hauteur :

x_1, x_2
$\boxed{5+\sqrt{5}}$ → non è accettabile per i LIMITI della GEOMETRIA poiché il lato minore (h) supererebbe la BASE. ⇒ IMPOSSIBILE (2 soluzioni)
$5 - \sqrt{5}$ → soluzione corretta ⇒ $x = 2.8$ m ∧ $y = 14.4$ m

Introduction du rapport des côtés induit par la figure :


Approssimando le misure dal disegno, in cui il lato corto è $\frac{1}{4}$ del lato più lungo, possiamo dire che:

20:6 = 3.3 ($\frac{1}{4}$)

Quindi il lato più lungo misura 13,2 (3,3 · 4)

Bibliographie

Henry, M. & Rizza, A. Six questions sur la notion de fonction dans les problèmes du RMT, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 8, Brigue 2008. Eds. Lucia Grugnetti & François Jaquet, ARMT, 2009, p. 143-166.

Rizza, A. & Henry, M. Idea di funzione, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 7, Bard (Valle d'Aosta) 2007. Eds. Lucia Grugnetti, François Jaquet, Gianna Bellò, Rosanna Fassy, Graziella Telatin, ARMT, 2008, p. 181-198.

Henry, A., Henry M. & Rizza, A. Funzioni per risolvere problemi, La Gazzetta di Transalpino, n.1, 2011, http://www.armtint.org/.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

IL PRATO DI ZIO FRANCESCO

Michel Henry, Angela Rizza

per il Gruppo Funzioni[1]

Identificazione

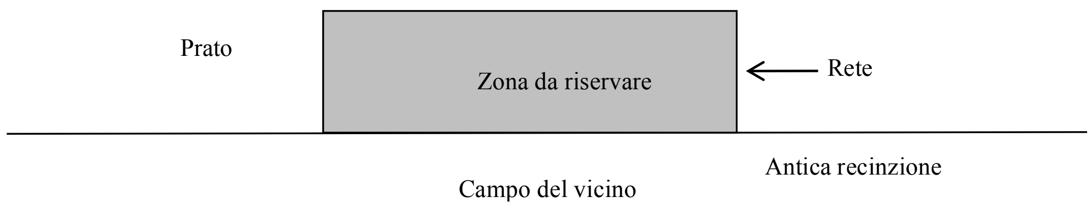
Rally: 18.II.19
Categorie: 9, 10
Ambito concettuale: Funzioni, Equazioni, Sistemi di equazioni, Numeri reali.
Famiglia del compito per la risoluzione: Variabili e formule, equazioni di secondo grado.

Sunto

Trovare le dimensioni di un rettangolo di 40 m^2 e di 20 m di perimetro parziale, composto da tre lati, che nel contesto è un recinto circondato da una rete (equazione di secondo grado con radici irrazionali che possono essere approssimate).

Enunciato del problema

Zio Francesco possiede un prato che confina con il campo di un vicino; un'antica recinzione rettilinea separa le due proprietà. Per sperimentare una nuova semina, zio Francesco vuole riservare nel suo prato una zona rettangolare di 40 m^2 confinante con la proprietà del vicino.
Per evitare che i suoi animali, che si spostano liberamente per il prato, vadano a calpestare la nuova piantagione, vuole sistemare una rete metallica che formi gli altri tre lati della zona rettangolare da riservare. Egli dispone di una rete lunga 20 m che vuole utilizzare tutta (vedere la figura).



Quali saranno, approssimate al decimetro, le misure dei lati della zona rettangolare da riservare? Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Compito per la risoluzione e saperi mobilizzati

Si tratta anzitutto di appropriarsi della situazione e di riconoscere che i lati del recinto possono variare mentre restano costanti l'area del rettangolo e la lunghezza della recinzione.
Quindi occorre tradurre in equazioni le relazioni tra le variabili. Ad esempio, se si indica con x la lunghezza del lato del rettangolo parallelo alla vecchia recinzione (base) e con y quello perpendicolare (altezza), si ottengono le equazioni: $xy = 40$ e $x + 2y = 20$.
A questo punto, si aprono diversi percorsi.

1) Operare per tentativi, eventualmente aiutandosi con una tabella. I tentativi possono essere effettuati fissando il valore di una variabile, ricavando quello dell'altra variabile da una delle due equazioni e utilizzando la seconda relazione per controllo. Oppure, in alternativa, si possono far variare contemporaneamente i valori di x e y nelle due formule.

2) Riconoscere l'insieme delle due equazioni come un sistema, nel senso che le soluzioni da trovare per x e y devono essere valide per entrambe le equazioni scritte. Per risolverlo, sostituire una variabile con una funzione

[1] Il gruppo "Funzioni" che ha analizzato questo problema nell'ambito dei lavori del convegno del Lussemburgo nel 12013 era composto da Lucia Argilla, Maria Cristina Bonomi, Sandro Deplano, Valeria Ferrari, Mathias Front, Annie Henry, Michel Henry, Rosa Iaderosa, Ana Paola Jahn, Francesca Ricci, Angela Rizza.

dell'altra per ottenere un'equazione in una incognita; per esempio sostituire nella seconda equazione y con $40/x$, ed ottenere l'equazione di secondo grado: $x^2 - 20x + 80 = 0$.

La risoluzione di questa equazione può avvenire mediante la formula risolutiva (solo per la categoria 10) o per approssimazioni successive. In questo caso è possibile considerare la funzione $y = x^2 - 20x + 80$ ed assegnare valori alla variabile x in modo da trovare due valori di y di segno opposto. La ricerca può essere fatta in un primo tempo con valori interi di x e poi raffinata con la suddivisione in decimi degli intervalli trovati.

3) A partire dalle due relazioni $xy = 40$ e $x + 2y = 20$, tracciare i grafici delle curve corrispondenti, individuarne i due punti di intersezione e interpretare le loro coordinate nel contesto del problema. Un'altra possibile risoluzione grafica consiste nel tracciare il grafico della parabola $y = x^2 - 20x + 80$ ed individuarne le intersezioni con l'asse delle ascisse. Una volta trovate le due soluzioni del problema, occorre presentarle con l'approssimazione richiesta.

Parole chiave

Variabile, funzione, equazione, grafico cartesiano, approssimazione di misure, numeri reali.

Punteggi attribuiti

Il problema è stato assegnato a 142 classi della categoria 9 e 108 della categoria 10
Si riportano i risultati nella seguente tabella:

Punteggi attribuiti	0	1	2	3	4	*N. classi*	*m*
Categoria 9	74	13	10	2	1	142	0,42
Categoria 10	60	13	8	7	11	108	0,96
Totale	68	13	9	4	5	250	0,66

Secondo i criteri dell'analisi a priori:

4 Le due coppie di soluzioni (5,5 m e due volte 7,3 m oppure 14,5 m e due volte 2,8 m), con spiegazione chiara per ottenere l'equazione e una presentazione del procedimento di approssimazione, oppure la risoluzione per radicali

3 Le due coppie di soluzioni, con spiegazione chiara per ottenere l'equazione senza esplicitazione del metodo di risoluzione
oppure un risultato ottenuto per tentativi non organizzati

2 Una sola coppia di soluzioni con spiegazioni coerenti sulla maniera di trovarle

1 Procedimento coerente per interpretare i dati dell'enunciato e arrivare ad un'equazione, senza la sua risoluzione

0 Incomprensione del problema oppure non rispetto di una condizione

Procedure, ostacoli ed errori rilevati

Preliminarmente si segnala la presenza di un ostacolo nell'interpretazione della figura. Da essa vengono erroneamente dedotte informazioni supplementari, ad esempio che la base debba essere maggiore dell'altezza (con conseguente unica soluzione del problema) oppure che vi sia un rapporto fra i lati che si debba riconoscere attraverso una misura diretta. È possibile che l'enfasi attribuita alla figura dal testo del problema ("vedere la figura" ripetuto due volte) sia correlata a questa interpretazione. Un'altra possibile ambiguità del testo è rappresentata dalla richiesta "Spiegate come avete trovato la vostra risposta" che può far pensare ad una soluzione unica.
Le procedure più utilizzate sono la ricerca per tentativi (cat.9) e la risoluzione dell'equazione di secondo grado (cat. 10) mediante la formula risolutiva.
Nel primo caso (procedura per tentativi) si nota la difficoltà di organizzare tentativi con numeri decimali e di descrivere i tentativi fatti, che spesso restano impliciti. Inoltre la ricerca viene arrestata al primo tentativo favorevole, perdendo così una delle due soluzioni del problema.
Nel secondo caso (equazione) si evidenziano difficoltà di natura algebrica, legate alla risoluzione dell'equazione di secondo grado.
In entrambi i casi, ma soprattutto nella risoluzione algebrica in cui le soluzioni dell'equazione vengono scritte in forma simbolica mediante radicali, emerge il problema di che cosa significhi l'approssimazione al decimetro richiesta.
Come già detto, tra le procedure errate si segnala la deduzione dalla figura di un rapporto fra i lati (esempio 1:3 oppure 1:4), dato che viene utilizzato al posto di uno di quelli del problema.
In diversi elaborati si osserva l'ipotesi implicita (dedotta dalla figura) che la base debba essere maggiore dell'altezza, limitazione che porta a non considerare o ad escludere una delle due soluzioni del problema.

Indicazioni didattiche

Nel contesto della gara, il problema ha ottenuto una bassissima percentuale di successi (soprattutto in cat. 9). In effetti questo problema, oltre alla capacità di matematizzare la situazione attraverso la scrittura di un sistema e a quella di determinare le soluzioni dell'equazione risolvente in modo algebrico o grafico, richiede altre capacità, come quella di comprendere la situazione senza farsi condizionare dalla figura proposta e quella di riconoscere come numeri irrazionali le due coppie di soluzioni ed eventualmente di approssimarle.

La ricchezza del problema tuttavia costituisce una risorsa per l'insegnante che lo può utilizzare in diversi momenti del percorso scolastico e con diverse finalità. In funzione di tali obiettivi, l'insegnante può anche integrare o parzialmente modificare le richieste del problema, tra le quali quelle per risolvere le segnalate ambiguità del testo originale.
Si propongono alcuni esempi:

- Scelta delle variabili e confronto fra le equazioni ottenute. Il problema può inserirsi in un percorso di avvio alla risoluzione di problemi algebrici. Esso costituisce un esempio di situazione in cui la scrittura dell'equazione risolvente passa attraverso l'impostazione di un sistema e dipende dalla scelta delle variabili (si ottengono equazioni simili ma diverse se x e y indicano rispettivamente la base e l'altezza del rettangolo o vice versa).
- Introduzione delle equazioni di secondo grado: il problema può essere utilizzato per far nascere l'esigenza di un metodo rapido ed efficace per la risoluzione di tali equazioni contrapposto ad una lunga e non sempre affidabile ricerca per tentativi. A questo scopo il problema può essere lasciato sostanzialmente nella sua forma originale.
- Rappresentazione di funzioni: il problema può essere utilizzato per dare esempi di funzioni nate da una situazione geometrica e per sottolineare il rapporto di dipendenza fra le variabili. A tal fine potrebbe essere aggiunta la richiesta esplicita di una rappresentazione (in forma di tabella o di grafico) della funzione. In mancanza di tale richiesta si è osservato, infatti, che il ricorso allo strumento funzione (in particolare nel suo registro grafico) non è spontaneo. Al problema si possono associare vari tipi di grafici (iperbole e retta o parabola, con piccole variazioni anche in relazione alla scelta delle variabili). Uno strumento come Geogebra può essere utilizzato per sollevare lo studente dagli aspetti tecnici della costruzione del grafico e focalizzare l'attenzione sull'interpretazione del grafico stesso. Un confronto fra i grafici delle figure 1 e 2 porta ad una riflessione sulle soluzioni del problema. Il grafico della figura 1 fornisce i due valori delle incognite x e y, mentre quello della figura 2 fornisce solo i valori di x, mentre quelli di y devono essere ricavati dalla relazione utilizzata per la sostituzione.

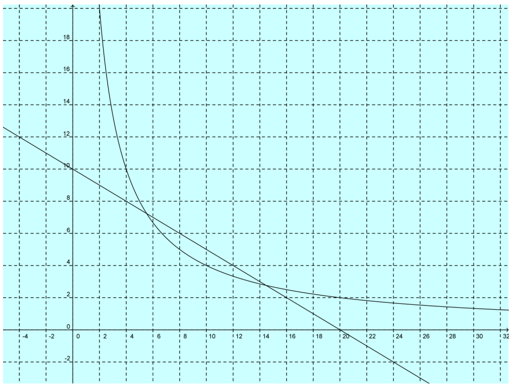


Figura 1

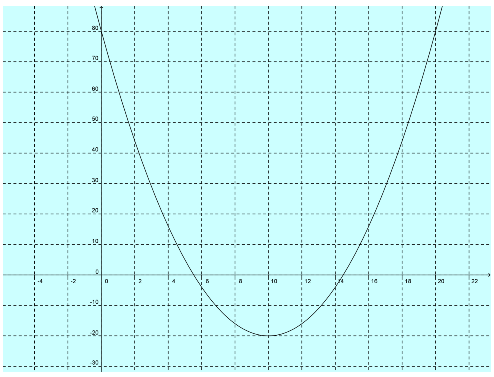


Figura 2

Approssimazione: il problema può essere utilizzato per una riflessione sulla natura dei numeri che lo risolvono. Si tratta infatti di numeri irrazionali, che possono essere scritti in forma simbolica mediante radici quadrate ma che nella situazione reale (in cui sia previsto ad esempio l'acquisto della recinzione) è necessario approssimare. Una possibile variabile didattica del problema può essere il grado di approssimazione richiesta. Si sottolinea che, rappresentando le funzioni con un software come Geogebra, la comprensione del concetto di numero irrazionale può essere favorita grazie all'esplorazione del grafico mediante lo strumento "zoom": il numero irrazionale, che inizialmente sembra "a portata di mano", nei successivi ingrandimenti diventa sempre più "sfuggente" mentre aumentano le cifre decimali dei numeri che lo racchiudono. Nella figura 3 è rappresentata una delle soluzioni del problema.

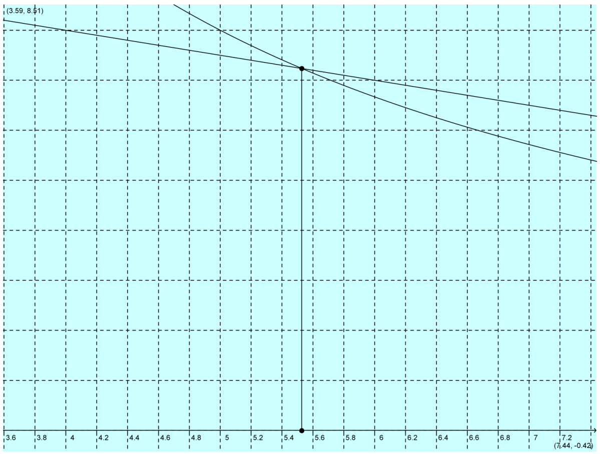
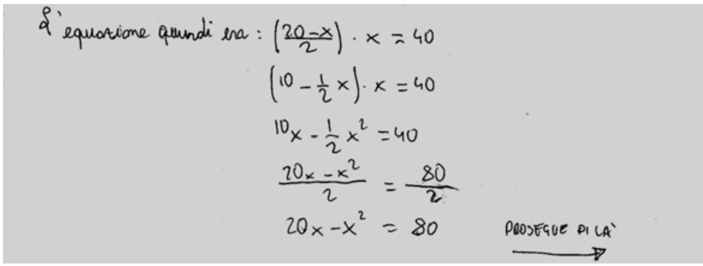


Figura 3

PER ANDARE PIÙ LONTANO

Si presentano alcuni elaborati che mettono in evidenza le procedure, gli ostacoli e gli errori elencati nella rubrica *Procedure, ostacoli ed errori rilevati*.

Procedura di risoluzione per tentativi: fornisce una sola delle due soluzioni, con la corretta approssimazione.



L'equazione quindi era: $\left(\frac{20-x}{2}\right) \cdot x = 40$

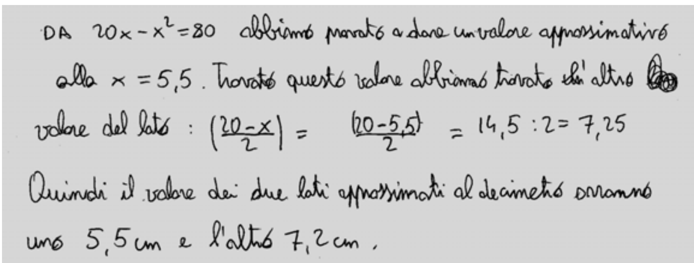
$$\left(10 - \frac{1}{2}x\right) \cdot x = 40$$

$$10x - \frac{1}{2}x^2 = 40$$

$$\frac{20x - x^2}{2} = \frac{80}{2}$$

$$20x - x^2 = 80$$

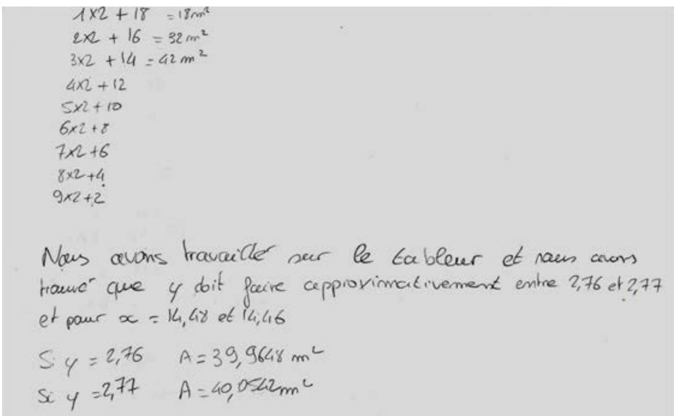
PROSEGUE DI LÀ →



DA $20x - x^2 = 80$ abbiamo provato a dare un valore approssimativo alla $x = 5,5$. Trovato questo valore abbiamo trovato l'altro valore del lato: $\left(\frac{20-x}{2}\right) = \frac{(20-5,5)}{2} = 14,5 : 2 = 7,25$

Quindi il valore dei due lati approssimati al decimetro saranno uno 5,5 cm e l'altro 7,2 cm.

Altro esempio:



$1 \times 2 + 18 = 18\,m^2$
$2 \times 2 + 16 = 32\,m^2$
$3 \times 2 + 14 = 42\,m^2$
$4 \times 2 + 12$
$5 \times 2 + 10$
$6 \times 2 + 8$
$7 \times 2 + 6$
$8 \times 2 + 4$
$9 \times 2 + 2$

Nous avons travaillé sur le tableur et nous avons trouvé que y doit faire approximativement entre 2,76 et 2,77 et pour x = 14,48 et 14,46

Si $y = 2,76$ $A = 39,9648\ m^2$
Si $y = 2,77$ $A = 40,0562\ m^2$

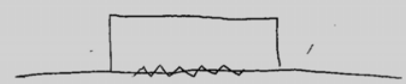
Mancata esplicitazione dei tentativi effettuati e confusione fra dimostrazione e verifica a posteriori.

La misura delle due basi è rispettivamente 2,77 cm e 14,46 cm
il risultato è stato trovato dopo vari tentativi e abbiamo verificato che la somma di questi era circa 20 m e il prodotto era circa 40 m²

$(2,77 \cdot 2) + 14,46 = 20\,m$

$2,77 \cdot 14,46 = 40,0542\,m^2$

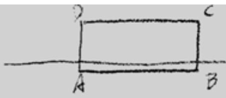
Difficoltà di organizzare i tentativi: con numeri interi non si giunge alle soluzioni.



IMPOSSIBILE

$40 = 6 \cdot 8$ X
$8 \cdot 5$ X
$10 \cdot 1$ X
$1 \cdot 10$ X
$10 \cdot 4$ X
$4 \cdot 10$ X
$2 \cdot 20$ X
$20 \cdot 2$ X

Procedura di risoluzione algebrica: conduce alle due soluzioni ma fa perdere il senso dell'approssimazione.



$AD = BC = x$

$AB = CD = y$

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x \cdot y = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 20 - 2x \\ (20 - 2x) \cdot x = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ 20x - 2x^2 = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ x^2 - 10x + 20 = 0 \end{cases}$$

$\Delta = 100 - 80 = 20 = 4 \cdot 5$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 5 \pm \sqrt{5}$

$x_1 = 5 + \sqrt{5}$

$y_1 = 20 - 2 \cdot (5 + \sqrt{5}) = 20 - 10 - 2\sqrt{5} = 10 - 2\sqrt{5}$

$x_2 = 5 - \sqrt{5}$

$y_2 = 10 + 2\sqrt{5}$

Le due soluzioni sono $\begin{cases} AD = 5 + \sqrt{5} \\ AB = 10 - 2\sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} AD = 5 - \sqrt{5} \\ AB = 10 + 2\sqrt{5} \end{cases}$

Introduzione dell'ipotesi implicita che la base debba essere maggiore dell'altezza.

x_1, x_2

$\boxed{5 + \sqrt{5}}$ → non è accettabile poiché il lato minore (h) supererebbe la BASE. ⇒ IMPOSSIBILE per i LIMITI della GEOMETRIA (2 soluzioni)

$5 - \sqrt{5}$ → soluzione corretta ⇒ $x = 2.8$ m $\wedge$ $y = 14.4$ m

Introduzione di un rapporto fra i lati dedotto dalla figura.

Approssimando le misure dal disegno, in cui il lato corto è $\frac{1}{4}$ del lato più lungo, possiamo dire che:

$20:6 = 3.3$ $\left(\frac{1}{4}\right)$

Quindi il lato più lungo misura 13,2 $(3,3 \cdot 4)$

BIBLIOGRAFIA

Henry, M. & Rizza, A. Six questions sur la notion de fonction dans les problèmes du RMT, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 8, Brigue 2008. Eds. Lucia Grugnetti & François Jaquet, ARMT, 2009, p. 143-166.

Rizza, A. & Henry, M. Idea di funzione, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 7, Bard (Valle d'Aosta) 2007. Eds. Lucia Grugnetti, François Jaquet, Gianna Bello, Rosanna Fassy, Graziella Telatin, ARMT, 2008, p. 181-198.

Henry, A., Henry M. & Rizza, A. Funzioni per risolvere problemi, La Gazzetta di Transalpino, n.1, 2011, http://www.armtint.org/.

POSTER INCONTRO ARMT DI CHARLEROI /POSTERS RENCONRE ARMT DE CHARLEROI (alcuni poster sono presentati qui in forma di articolo/certains posters sont présentés ici sous forme d'article)

Section Bourg en Bresse

« LE LAPIN NOIR ET BLANC PORTE(NT) DES LUNETTES »

OU : À LA RECHERCHE DES COMPÉTENCES DE LECTURE

Notre choix d'analyse s'était porté sur un problème du 20ème RMT, qui avait particulièrement présenté des difficultés qui semblaient provenir d'une insuffisante performance en compréhension de lecture :

9. CHAT, LAPIN, COCHON D'INDE (CAT. 5, 6, 7, 8)

Trois amies habitant trois villages voisins se rencontrent. Chacune se promène avec son animal de compagnie.

- Le chat de Mylène est tigré et adore chasser les souris.
- Louise et la fille qui possède un lapin noir et blanc portent des lunettes.
- Celle qui habite Ropraz a un cochon d'Inde.
- Claude et son amie qui habite à Corcelles adorent les bonbons.

Quel est le prénom de la fille qui habite à Carrouge ?

Quel animal a-t-elle ? Expliquez votre raisonnement.

Nous avons en évidence au plan graphique les indices grammaticaux que les élèves devaient repérer, interpréter pour avancer dans la compréhension de la situation, de la question posée et de la tâche demandée

9. CHAT, LAPIN, COCHON D'INDE (CAT. 5, 6, 7, 8)

Nous avons noté qu'au départ le problème avait pressenti pour les catégories 6, 7, 8)

Trois **amies** habitant trois **villages** voisins se rencontrent. ***Chacune*** se promène avec son **animal de compagnie.**

- Le chat de Mylène **est** tigré **et** adore chasser les souris.
- Louise **et** la fille ***qui*** possède un lapin noir et blanc **portent** des lunettes.

(Dans la version de départ, le texte était : Louise **et** la fille ***qui*** possède un lapin noir et blanc **ont** des lunettes de soleil sur le nez.

- ***Celle qui*** habite Ropraz a un cochon d'Inde.
- Claude **et** son amie qui **habite** à Corcelles **adorent** les bonbons.

(Dans la version de départ, le texte était : Lilli et son amie qui habite à Corcelles adorent les bonbons)

Quel est le prénom de la fille qui habite à Carrouge ? Quel animal a-t-elle ? Expliquez votre raisonnement.

Nous avons ensuite essayé de traduire dans un tableau synthétique :
- les **compétences de lecture** mobilisées pour chaque élément de l'énoncé,
- pour les mettre en regard ensuite des **erreurs**, anticipées ou constatées
- ainsi que des **inférences** et **déductions** logico-mathématiques à opérer pour avancer dans la résolution du problème

Phrases	**Compétences de lecture / compréhension**		**Erreurs possibles et/ou repérées dans les copies…**	**Les informations à inférer à partir du texte Et *Déductions logico-mathématiques à opérer***
Trois **amies** habitant trois **villages** voisins se rencontrent.	Catégoriser : amies et villages sont les catégories génériques des personnages et des lieux	Interpréter marqueur grammatical : **amies = filles**	1.1	Il sera question de : 3 personnes, 3 lieux
Chacune se promène avec **son animal de compagnie.**	Repérer la chaine anaphorique : « ***Chacune*** » = ***Chacune des amies = Chacune des 3 filles***	Catégoriser : **animal de compagnie.**= catégorie générique pour chat, lapin, cochon d'Inde	Texte énoncé ambigu : il est implicite que chaque fille a un animal différent 2.1 « Louise et la fille ont des animaux identiques » 2.2 « on ne sait pas si elle en a » (un animal)	Et de : 3 animaux. A chaque fille correspond un animal.
- Le chat de Mylène **est** tigré **et** adore chasser les souris.	Interpréter la valeur logique de la préposition « de » : « Le chat **de** Mylène » = « Mylène a un chat » Interpréter la convention de la majuscule qui annonce un nom propre : Mylène = prénom	Interpréter le marqueur grammatical : **est** = verbe être Distinguer homophones grammaticaux : **et** = conjonction de coordination (≠ **est** , verbe être)	3.1	Un des animaux est un chat. La propriétaire du chat est Mylène. Mylène est l'une des 3 filles
Louise **et** la fille ***qui*** possède un lapin noir et blanc **portent** des lunettes.	Repérer la chaine anaphorique : ET Interpréter les phrases complexes la fille ***qui*** possède un lapin noir et blanc = une autre fille que Louise + cette autre fille a un lapin…	Distinguer homophones grammaticaux : **et** = conjonction de coordination (≠ **est** , verbe être)	4.1 Louise ***est*** la fille qui a un lapin = Louise a un lapin…	Louise est la seconde des 3 filles. Un lapin noir et blanc est le second animal. *La propriétaire du lapin n'est ni Louise, ni Mylène (cf. phrase précédente)* *Donc c'est la 3ème fille, dont on ne sait pas encore le nom, qui a le lapin.*
	Interpréter le marqueur grammatical : **portent** = marque du pluriel => le sujet de ce verbe est : « Louise **et** la fille » *	Reconnaitre la valeur phonétique du marqueur grammatical : **Portent** se lit [pɔrt] = verbe au présent ≠ **portant** , qui se lit [pɔʀtɑ̃], participe	5.1* Un lapin noir et blanc porte des lunettes 5 .2** Un lapin noir et blanc portant des lunettes	

		présent du verbe « porter »… **		
- ***Celle qui*** habite Ropraz a un cochon d'Inde.	Repérer la chaine anaphorique : ET Interpréter les phrases complexes : une fille habite Ropraz, la même fille a comme animal un cochon d'Inde	Interpréter la convention de la majuscule qui annonce un nom propre : Ropraz = village	6.1	Ropraz est le premier lieu dont on parle. C'est la propriétaire du cochon d'Inde qui y habite. *Donc, ce n'est ni Mylène, ni celle qui a un lapin, qui habitent Ropraz.* Donc, *Louise habite à Ropraz, elle a un cochon d'Inde*
Claude **et** son amie qui **habite** à Corcelles **adorent** les bonbons	Repérer la chaine anaphorique : ET Interpréter les phrases complexes Claude est une fille + une autre fille habite à Corcelles	Interpréter le marqueur grammatical : **habite** = verbe au singulier	7.1 (confusion « culturelle » sur la double valeur du prénom Claude en français : « Claude est un garçon, il y a un piège, on ne peut résoudre le problème.… ») 7.2 Non-prise en compte du marqueur du singulier [**habite**]sur le verbe : => deux filles (Claude et son amie) habitent à Corcelles	Claude est le 3ème prénom de personnage. Claude est le prénom de la 3ème fille. Corcelles est le second nom de lieu. *Donc, celle qui habite Corcelles est Mylène.* *Et* *Donc, c'est Claude qui a un le lapin*
Quel est le prénom de **la fille** qui habite à Carrouge ?	Interpréter la convention de la majuscule qui annonce un nom propre : Carrouge = village		8.1	Carrouge est le nom du 3ème lieu. *Donc, Claude est celle qui habite à Carrouge.*
Quel animal a-t-elle ?				(voir avant dernière case ci-dessus)

Zoom sur la chaine anaphorique : les 3 personnes sont désignées par les expressions ci-contre ➔	Trois **amies** **Chacune** **Mylène** **Louise** **la fille** qui possède un lapin noir et blanc **Celle** qui habite Ropraz **Claude** et **son amie** qui habite à Corcelles **la fille** qui habite à Carrouge **elle**	9.1 (les groupes arrivent à trouver plus de trois personnes…)

Section RMT de Franche-Comté, FR-EDUC

COMPRENDRE, EXPLIQUER ET EXPLICITER

COMPRENDRE UN ÉNONCÉ, EXPLIQUER À L'ÉCRIT UNE PROCÉDURE, EXPLICITER ORALEMENT UNE PROCÉDURE

Par Francine Athias, Florence Falguères, Christine Le Moal et Michel Henry


I – Le problème étudié[1]

Julie possède 20 pièces de monnaie : un mélange de pièces de 1€ et de pièces de 2€. Si on remplaçait ses pièces de 1€ par des pièces de 2€ et ses pièces de 2€ par des pièces de 1€, elle aurait 4€ de plus. **Combien Julie a-t-elle d'euros avec ses 20 pièces ?** Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Résumé
Résoudre un système « élémentaire » de deux équations linéaires à deux inconnues avec des nombres naturels dans un contexte d'échange de pièces de monnaie. $x + y = 20$ et $2x + y = x + 2y + 4$

Comprendre
Analyse *a priori*

I.1 Analyse *a priori*

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- S'approprier la situation : comprendre que le nombre total de pièces, de 1 € et de 2 €, est 20 : qu'elle représente une certaine valeur encore inconnue, que cette valeur augmentera de 4 € si on échange la valeur de chaque pièce de 1 à 2 et de 2 à 1 (en €) et qu'il s'agira de déterminer le nombre de pièces de chaque type avant de calculer.
- Passer aux relations arithmétiques correspondantes en respectant les contraintes pour trouver chaque fois la valeur totale (multiplications par 1 ou par 2 et additions), puis addition de 4 pour passer de la première à la deuxième somme et finalement vérifier si ces sommes se retrouvent en échangeant les pièces.
- Procéder par essais : si par exemple on choisit un nombre de pièces de 1 €, (7) il faut calculer le nombre de pièces de 2 € par différence du premier et de 20, $(20 – 7 = 13)$ puis calculer la somme dans le premier cas $(7 \times 1) + (13 \times 2) = 33$, puis la somme en intervertissant le nombre de pièces $(13 \times 1) + (7 \times 2) = 27$, puis comparer les deux sommes et vérifier que la seconde vaut 4 de plus que la première $(33 – 27 = 6$, à rejeter).

  La solution apparaît avec l'essai de 12 pièces de 1 € et 8 pièces de 2 € $(12 \times 1) + (8 \times 2) = 28$ et $(8 \times 1) + (12 \times 2) = 32 = 28 + 4$.

Pour limiter les essais on peut se rendre compte par exemple, au cours des premières tentatives, qu'il doit y avoir plus de pièces de 1 € que de 2 € pour que la somme augmente.

---

[1] Il s'agit du problème 24.I.11 ; catégories: 5, 6, 7, 8, classé dans les domaines: OPN, AL de la Banque de problèmes du RMT. Conditions de passation : 7 problèmes à résoudre en 50 minutes par la classe entière, sans aucune aide extéreure, qui fournit une seule réponse avec explications par problème.

- Se convaincre que d'autres essais sont inutiles en les organisant progressivement et en constatant que l'écart entre les deux valeurs augmente régulièrement (de 2 €) lorsqu'on augmente de 1 le nombre hypothétique de pièces de 1 € (et que l'on diminue par conséquent le nombre de pièces de 2€.
- Rédiger la réponse : Julie a 8 x 2 + 12 x 1 = 28 €.

Ou, par un raisonnement générique (qui évite les essais) se rendre compte que, chaque fois que l'on remplace une pièce de 1 € par une pièce de 2 € on gagne 1 € sur la somme totale. On peut alors en déduire que le gain de 4 € sera dû au remplacement de quatre pièces de 1 € par quatre pièces de 2 €, et qu'il y a 4 pièces de 1 € de plus que de pièces de 2 €. Les 16 autres pièces se répartissent donc en 8 pièces de 1 € et 8 pièces de 2 €, dont l'échange ne modifie pas l'avoir de Julie.

I.2 Résultats

Nous avons étudié la répartition des points attribués, sur 2982 classes de 15 sections du RMT.

Points / Catégories	0	1	2	3	4	Nombre de classes	Moyenne
Cat 5	243 (43%)	96 (17%)	110 (19%)	92 (16%)	26 (5%)	567	1.23
Cat 6	347 (36%)	163 (17%)	193 (20%)	209 (22%)	40 (4%)	952	1.4
Cat 7	192 (23%)	118 (14%)	235 (28%)	220 (26%)	71 (8%)	836	1.83
Cat 8	56 (9%)	52 (8%)	196 (31%)	217 (35%)	106 (17%)	627	2.42
Total	838 (28%)	429 (14%)	734 (25%)	738 (25%)	243 (8%)	2982	1.7

5 à 7 problèmes à résoudre, une seule feuille de réponses par problème.

Attribution des points

4 Réponse juste (28 euros) avec une description de la démarche suivie (en cas de procédure par essais organisés, la liste des essais doit faire apparaître qu'il n'était pas nécessaire d'en faire d'autres après pour obtenir une autre solution)

3 Réponse juste (28 euros) avec description de la démarche peu claire ou liste des essais non organisée ne permettant pas de comprendre que la solution est unique,

ou avec une vérification seulement

ou réponse (12 pièces de 1 € et 8 pièces de 2€) sans le calcul des 28 euros, avec description de la démarche (v. 4)

2 Réponse juste, (28 euros) sans explication

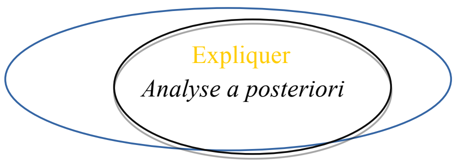
ou réponse (12 pièces de 1 € et 8 pièces de 2€), sans description de la démarche ou avec une vérification seulement

1 Réponse fausse, mais avec quelques essais qui n'ont pas abouti à la solution

0 Incompréhension du problème

I.3 Procédures, obstacles et erreurs relevés

Une premier examen rapide de copies montre que les solutions correctes sont trouvées après de nombreux essais et que seule une organisation rigoureuse de ceux-ci permet d'obtenir la solution unique, à savoir les 28 euros. Par ailleurs, la moyenne des points attribués augmente en fonction de l'âge des élèves.**Question : La réponse attendue est souvent trouvée. Par contre la moyenne des points est plutôt faible. Pourquoi ? Il nous semble donc intéressant de décrire et de comprendre ce qui se passe sur des copies (ici la catégorie 6) et ce qui se passe en classe.**



II. Analyse *a posteriori*

II.1 Les explications à l'écrit des procédures

À partir des travaux d'élèves, nous voulons montrer quelles difficultés les élèves rencontrent pour présenter leur recherche. Nous avons procédé à l'étude de 170 copies de Franche-Comté de catégorie 6 (niveau 6^{e} en France). Voici les résultats obtenus :

0 point	1 point	2 points	3 points	4 points
58	27	32	49	4
34 %	16 %	19 %	29 %	2 %

La moyenne, qui est de 1,49 sur 4, pourrait sembler révéler une grande difficulté du problème. Elle doit cependant être relativisée : 50 % des groupes répondent correctement au problème. Il est donc nécessaire de comprendre pourquoi leurs copies n'ont pas le maximum de points malgré la présence de la réponse au problème. Nous allons d'abord regarder de plus près ces copies.

Parmi les copies ayant eu 0 ou 1 point, on peut percevoir que la compréhension de l'énoncé et son appropriation s'avèrent difficiles. Les copies ne prennent pas en compte la multiplicité des contraintes.

- Pour un tiers des copies, les 20 pièces de monnaie sont partagées entre 10 de 1€ et 10 de 2€. Julie possède ainsi 30€ (ou 34€ parfois avec le « 4€ de plus »(exemple ci dessous). La phrase expliquant l'échange n'est pas du tout prise en compte.

Julie a 34€ car elle a 10 pièce de 1€ donc c'est égale à 10€ car 10×1=10 + 2×10 = 20€ car 2×10=20 donc 20 + 10 = 30€ + 4€ qu'elle aura après l'échange donc elle aura 34€

- Pour 16 % des copies, les 20 pièces sont comprises comme 20€ (exemple ci-dessous)

2×5€ 10 = 20
1× 10 = 10

2×10=20

au debut:
2×5=10
1×10=10
10+10=20€ et 20 pièce.

si on change mais qu'on prend les même calcul:
1×5=5
2×10=20
5+20=25.
Il ont toujours 20 pièce a 25€.

- Le verbe « remplaçait » est parfois compris comme « on prend 2 pièces de 1€ pour faire une pièce de 2€ » (exemple ci-dessous)

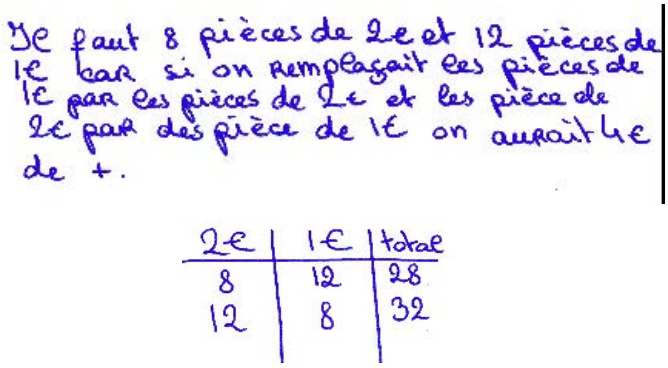
Je cherche combien a-t-elle d'euros avec 20 pièces
Il y a 3 pièces de 1€
et 9 pièces de 2€
Et l'on inverse cela fera un total de 21€.
Le total est de 24€ pour 3 pièces de 2 et 18 pièces de 1€.

- Le remplacement est bien effectué, mais il n'y a pas de comparaison avec l'état de départ.
- Les 4 € de plus ne sont pas pris en compte, ou alors compris comme « 4 fois plus ».

Conclusion sur la moitié de ces copies : les nombreuses contraintes du problème ne sont pas prises simultanément en compte. Comprendre cet énoncé s'avère avoir été difficile.

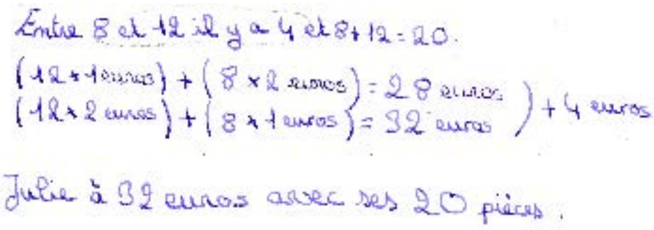
Parmi les réponses à 2 points,

1. 38 % des groupes ont juste mais n'ont fait qu'une vérification (exemple ci-dessous).

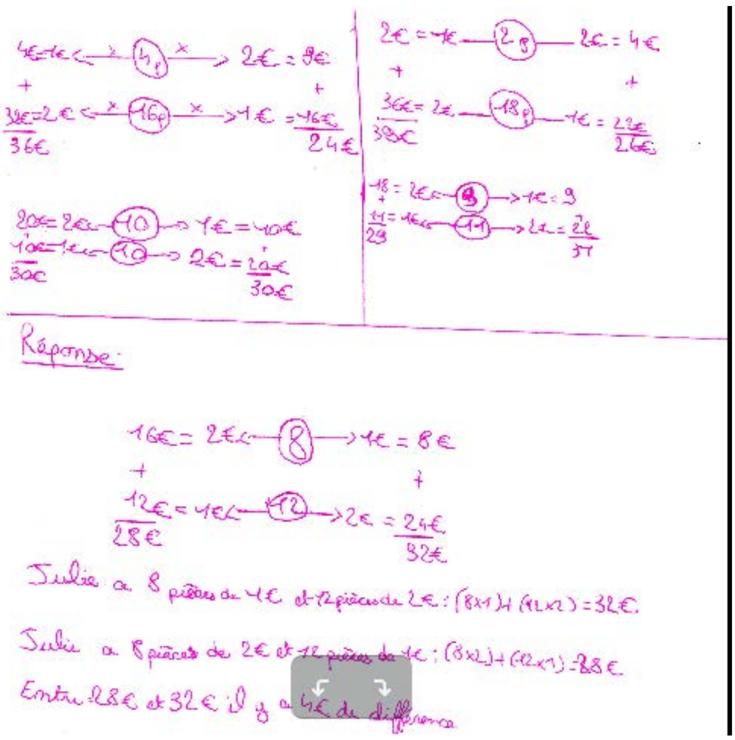


Il est nécessaire ici de s'interroger sur le barème proposé ci-dessus d'une part (3 points : réponse juste (28 euros) avec description de la démarche peu claire ou liste des essais non organisée ne permettant pas de comprendre que la solution est unique, ou avec une vérification seulement ou réponse (12 pièces de 1€ et 8 pièces de 2€) sans le calcul des 28 euros, avec description de la démarche ; 2 points : réponse juste, (28 euros) sans explication) et d'autre part sur la notation des correcteurs. Ici le groupe a obtenu 2 points. Pourtant il propose la réponse 12 pièces de 1€ et 8 pièces de €, il vérifie plus ou moins sa réponse en calculant 28€ et 32€, sans expliciter les 4€ d'écart.

2. 38 % répondent 32 € (ils donnent le montant que possède Julie après l'échange (exemple ci-dessous)



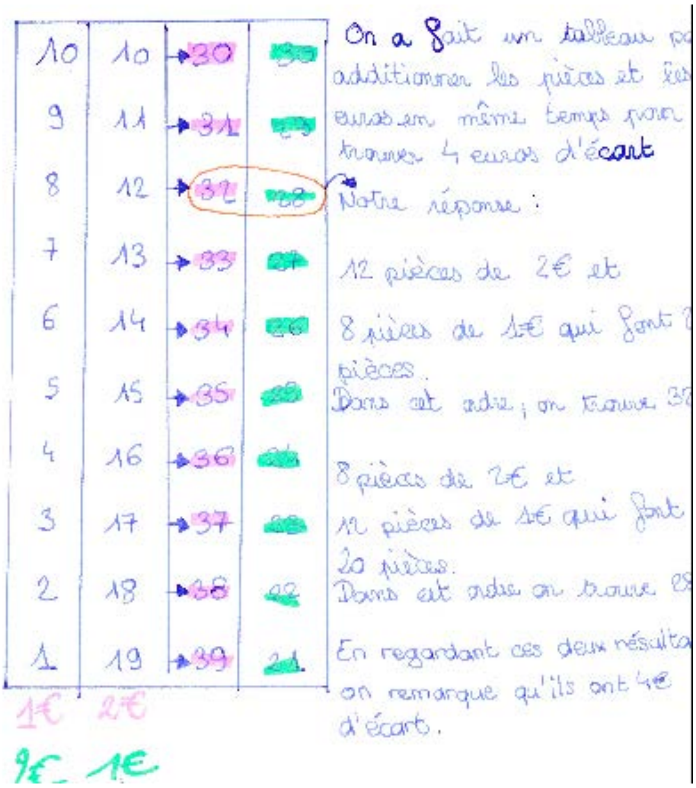
3. 24 % ont juste mais ne répondent pas à la question (ils en restent à 12 pièces de 1€ et 8 pièces de 2€). (exemple ci-dessous).



4. De plus 93 % des copies qui ont eu 3 points présentent un raisonnement juste mais ne montrent pas l'unicité de la solution.

Pour conclure sur cette analyse des copies

50% des classes ont donc bien compris et résolu le problème, mais la formulation de la question et le mode d'attribution des points ne leur ont pas permis d'avoir un bon score. Dans la rédaction du critère 4 points, il est attendu la justification de l'unicité de la solution. Le seul indice pour les élèves est d'interpréter la phrase « Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse » comme une exigence à montrer l'unicité de la solution. Non seulement il est attendu d'avoir une solution, mais en plus il est attendu de justifier qu'il n'y en a pas d'autre. Cette exigence est loin des attentes des professeurs dans les classes, quelque soit la classe. Par conséquent, nous pouvons interroger la pertinence de la formulation de la question et de l'attribution des points. Cependant, des élèves ont essayé toutes les solutions, sans s'arrêter dès qu'ils trouvent une solution (exemple ci-dessous).



10	10	→ 30	[illegible]
9	11	→ 31	[illegible]
8	12	→ 32	[illegible]
7	13	→ 33	[illegible]
6	14	→ 34	[illegible]
5	15	→ 35	[illegible]
4	16	→ 36	[illegible]
3	17	→ 37	[illegible]
2	18	→ 38	22
1	19	→ 39	21
1€	2€		
1€	1€		

On a fait un tableau p[…]
additionner les pièces et les
euros en même temps pour
trouver 4 euros d'écart
Notre réponse :
12 pièces de 2€ et
8 pièces de 1€ qui font […]
pièces.
Dans cet ordre, on trouve 3[…]
8 pièces de 2€ et
12 pièces de 1€ qui font
20 pièces.
Dans cet ordre on trouve 2[…]
En regardant ces deux résulta[…]
on remarque qu'ils ont 4€
d'écart.

Expliciter
Explicitation à l'oral

II.2 Les explicitations des procédures

Nous voulons décrire et comprendre comment les élèves restituent leur solution du problème. Pour cela, nous avons filmé des étudiants (première année de Master MEEF, mention professeur des écoles). La séance filmée pourrait être résumée de la manière suivante :

- Première phase : le professeur présente le problème
- Deuxième phase : les étudiants cherchent en groupe et doivent rédiger une réponse
- Troisième phase : un groupe de trois étudiants exposent leurs solutions
- Quatrième phase : le professeur revient sur la résolution de problème.

II.2.A Le texte des étudiants

Au cours de la deuxième phase, les étudiants ont produit le texte suivant, qui ne sera pas exploité par le professeur dans les phases suivantes.

On a procédé par tâtonnement pour résoudre le problème en se partageant les nombres à faire (de 1 à 20). Le tâtonnement n'a pas fonctionné, on essaye de chercher une autre solution pour résoudre le problème

Nous allons maintenant l'analyser**.**

Les étudiants expliquent leur procédure (« on a procédé par tâtonnement ») ainsi que leur répartition du travail (« en se partageant les nombres à faire »). Par contre ils ne précisent pas ce que représentent ces nombres. Ce qui est intéressant, ce sont les nombres qu'ils retiennent (« de 1 à 20 »).

Ils excluent le nombre 0 mais pas 20. Or prendre 20 signifie qu'il n'y aurait pas de pièces de l'autre catégorie. Ce qui revient à avoir 0. Ce « tâtonnement » porte sur les nombres à choisir, mais le mode de calcul pour écarter le nombre choisi n'est pas du tout présenté.

Leur procédure étant expliquée, ils concluent (« le tâtonnement n'a pas fonctionné »). Nous pouvons nous demander si les conditions d'une procédure d'essais-erreurs (ce qu'ils nomment tâtonnement) permettent de trouver la solution au problème. Une première condition porte sur la nature des nombres cherchés : il est nécessaire que ce soit des entiers. Ici, il s'agit du nombre de pièces de 2€ ou de 1€. Les étudiants savent que les solutions sont des entiers. Une deuxième condition porte sur la quantité de nombres à essayer. Ici il y en a 19. Les étudiants savent qu'il y a un nombre fini de réponses possibles (« de 1 à 20 »). Ils ont essayé tous les nombres (au cours des échanges, elles expliqueront « on les a tous essayés »).

Pourtant ils ne s'arrêtent pas là : ils cherchent une autre procédure pour trouver la solution. Mais il n'est pas possible de trouver d'autres nombres, solutions du problème, puisqu'ils ont essayé tous les nombres (il n'y en a qu'un nombre fini). Le tâtonnement est une procédure efficiente pour ce problème. À ce moment-là, ils ne parviennent pas à dépasser l'obstacle rencontré : tous les nombres possibles ne répondent pas au problème posé. La seule conclusion possible devrait être que le problème n'a pas de solution. Alors nous pouvons nous interroger sur leur manière d'envisager le problème. Ils remettent en cause une procédure qu'ils « savent » efficiente. Il y a donc quelque chose qui est plus fort qu'une procédure « efficiente ». Ils s'attendent à ce que le problème ait nécessairement une solution. Si la procédure ne permet pas de la trouver, c'est qu'il faut utiliser une autre procédure. Les calculs effectués dans le cadre de la procédure de « tâtonnement » ne sont pas du tout remis en question.

Une interprétation

Ce sont des étudiants. Ils mettent en œuvre une procédure non experte, qui ne leur permet pas de trouver la réponse. Ils savent que cette procédure est non experte et qu'un système de deux équations à deux inconnues devrait permettre de résoudre le problème. Par conséquent, c'est la procédure non experte qui est donc remise en cause, et non une erreur de calcul. Nous, professeurs, disons volontiers que les étudiants doivent chercher par eux-mêmes. Ces derniers pensent que ce que l'on attend d'eux, c'est d'utiliser une procédure experte. S'ils choisissent une procédure non experte, alors leur échec ne peut venir que de la procédure (puisqu'elle ne correspond pas aux attentes du professeur). Ils s'interdisent d'utiliser des procédures non expertes.

II.2.B Explicitation orale

Un étudiant V va au tableau et présente le travail du groupe.

Phase 1 : V présente une première manière de faire.
Phase 2 : V montre un deuxième essai à la demande de P.
Phase 3 : V présente une autre organisation. Ilss se sont partagées les nombres.
Phase 4 : le professeur conclut

Phase 1 : V présente une première manière de faire.

description	La feuille de V
V reprend ce que le groupe a écrit (tdp 2 : V : « Alors nous on a procédé par tâtonnement »). Puis elle expose le premier calcul. « On a commencé par dire qu'il y aurait le même nombre de pièces de 2. Donc 10. Et le même nombre de 1. Donc là on a vite vu qu'on aurait jamais 4 euros de plus ».	2€ × 10 = 20€ 1 × 10 = 10€
Le professeur cherche à avoir tous les essais (« qu'est-ce que vous avez essayé ? »). Mais V résiste (« On les a tous essayés »).	

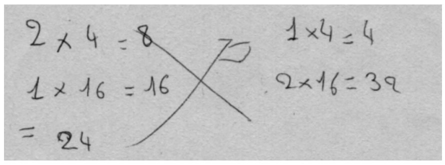
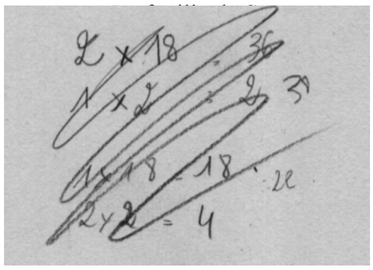
Ce qui est intéressant à repérer c'est le décalage entre son rôle de rapporteur des travaux du groupe (« Alors on a procédé par tâtonnement… ») et sa propre recherche (« on a commencé par dire »). V joue les deux rôles sans marquer de différence. En effet, aucun calcul n'est présent sur la feuille de restitution de groupe (cf ci-dessus). Seule la feuille de V comporte le calcul avec 10 pièces de 1€ et 10 pièces de 2€.

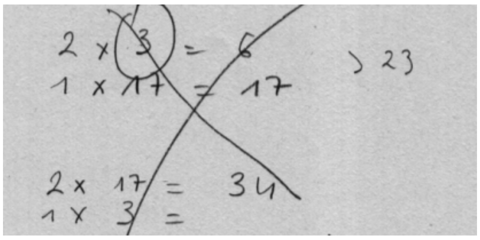
Phase 2 : V montre un deuxième essai à la demande de P.

description	La feuille de V
Le professeur insiste pour comprendre pourquoi le groupe n'a pas trouvé (P : « Bon alors pour les 2 €, vous avez d'abord essayé avec combien de pièces de 2 € »). V explique qu'ils ont choisi avec 5 pièces de 2 € (« On a essayé 5 »).	
Le professeur cherche à en savoir plus (« Donc les essais ? Vous avez fait? »). V sait et explique qu'ils ont continué (« 1 et puis 15 »). P pointe ce qui va permettre de réfuter cet essai (« Combien d'écart »). V sait que ce choix des nombres ne convient pas. Elle répond sur l'écart (« 10 »). c'est le professeur qui conclut (« Donc ça ne marche pas »). V reprend cette proposition (« Donc écart 10. Donc ça ne marche pas. Donc après on a continué »).	

Comme précédemment, V expose ses calculs mais pas ceux du groupe. V a compris le problème : il sait qu'il doit faire deux calculs : d'une part la somme obtenue avec 5 pièces de 2€ et 15 pièces de 1€, d'autre part la somme obtenue avec 5 pièces de 1€ et 15 pièces de 2€. Puis il sait qu'il doit calculer l'écart entre les deux sommes (ce qui est attesté par l'écrit de sa feuille).
Par contre, les explications orales qu'il donne sont vraiment insuffisantes pour comprendre ce qu'il a fait sur sa feuille.

Phase 3 : V présente une autre organisation. Ils se sont partagés les nombres.

Description	Les feuilles
V explique alors qu'ils se sont partagés les nombres. Puis chacun d'eux a fait des calculs. V propose 4 pièces de 2€.	La feuille de V 
Le professeur s'adresse à S (« Et vous pendant ce temps-là, qu'est-ce que vous avez fait ? »). S explique qu'il a choisi 18. Effectivement sur sa feuille, c'est le premier calcul, avec les deux sommes 38 et 22. Il a rayé cet essai.	

Le professeur se tourne alors vers M (« Pendant ce temps-là, M ? »). M explique qu'il a essayé 7. Il explique alors ses calculs (« Donc 2x7, puis 1x13. Ça ne devait pas marcher »).	

Le premier calcul de V ne fait pas apparaître l'écart, comme précédemment. Il a développé une habitude du problème : c'est la troisième sur sa feuille (le deuxième n'a pas été présenté à la classe). Il est capable de reconnaître que l'écart n'est pas 4 entre 24 et 32. Le dernier calcul proposé par M n'est pas terminé. Dès qu'il rencontre qu'un terme de la deuxième somme est 34, sachant que la première somme est 23, il arrête le calcul et explique que « ça ne devait pas marcher ». Le raisonnement implicite repose sur l'idée que la première somme 23 et la deuxième somme 34 + n, n étant un entier positif ne peuvent pas avoir 4 d'écart :
23 + 4 est nécessairement inférieur à 34 et donc à 34 + n.

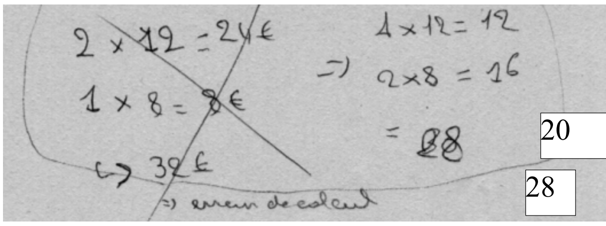
Cette procédure incomplète est intéressante, parce qu'elle peut permettre un gain de temps et met en évidence un raisonnement intéressant sur les nombres. Le professeur ne peut pas s'en rendre compte, puisque M n'en fait pas état. Pourtant résoudre des problèmes, c'est aussi développer ce type de stratégies. En tant que professeur, comment se rendre capable de voir ces stratégies, de les faire partager à l'ensemble des étudiants ?

Phase 4 : le professeur conclut

description	
Le professeur hésite puis clôt la restitution (« Ça ne fonctionnait pas non plus. Très bien. Je vous remercie »)	

Le professeur décide d'arrêter cette procédure par essais-erreurs. Cet abandon peut renforcer l'idée selon laquelle cette procédure ne permet pas de trouver la solution au problème posé. Mais il doit gérer le fait qu'un groupe n'a pas trouvé la solution. V est placé dans une position délicate par rapport à la classe lorsqu'il est au tableau. Le professeur choisit donc de ne pas prolonger l'exposition des tentatives infructueuses du groupe.

Mais alors pourquoi ces étudiants n'ont pas trouvé ? Le deuxième calcul effectué par V (qui n'a pas été exposé) consiste à essayer avec 12 pièces de 2€ et 8 pièces de 1€. La somme trouvée est 32€. Puis le deuxième calcul donne une somme égale à 20€, avec 12 pièces de 1€ (égal à 12€) et 8 pièces de 2€ (égal à 16€). Évidemment, suite à la correction du problème par un autre groupe, V se rend compte de l'erreur, comme le montre sa feuille.



Ce retour sur leurs essais successifs est fait par les étudiantes elles-mêmes. Elles valident ainsi la procédure par essais-erreurs. Ils n'avaient pas été capables de le faire seuls (cf. première partie).
Les corrections apportées sur leur feuille de recherches montrent une implication des étudiants. Le retour sur leurs propres procédures (l'inscription -erreur de calcul- en atteste) leur permet de conclure sur la validité de leur procédure. Le professeur ne peut pas voir le chemin parcouru par ces étudiants au moment du déroulement de l'action. Pourtant, s'il veut accompagner des élèves plus jeunes, par exemple du collège, comment peut-il se rendre attentif à ces procédures des élèves, pertinentes qui pourtant n'aboutissent pas ?

III. Conclusion

La prise en compte de la langue et de toutes les composantes de sa maîtrise est nécessaire dans la rédaction des problèmes. Nous avons vu des élèves qui ne comprennent pas l'énoncé (par exemple 43 % en catégorie 5). Nous avons également mis en évidence que la production des réponses et l'explication des procédures méritent une attention particulière (par exemple 50 % trouvent la réponse juste mais ne.justifient pas correctement). Nous avons présenté des élèves qui trouvent la solution mais qui sont incapables d'expliquer leur cheminement, même si nous avons remarqué des difficultés par rapport aux attentes habituelles. Nous avons examiné le cas d'étudiants qui utilisent une procédure juste et qui, pourtant ne trouvent pas la solution

Nous avons choisi de faire travailler ces problèmes du RMT auprès d'étudiants se destinant au professorat des écoles. Ceci nous amène à analyser le déroulement de l'action en classe dans la résolution de problèmes dans une situation particulière. Le professeur des étudiants se donne les moyens de comprendre ce qui se passe lorsque ces derniers cherchent un problème de RMT et proposent leur solution (finalisée ou non). Nous avons ainsi mis en évidence des difficultés auxquelles le professeur est confronté. Par exemple, dans le cas présent, un groupe ne trouve pas la solution. Les raisons de l'échec n'ont pas été reconnues par le professeur. Ce même groupe choisit une procédure pertinente mais ne parvient pas à la solution. L'impossibilité d'accéder à la solution est opaque aux étudiants (cf leur trace écrite). Le professeur ne peut pas s'en rendre compte. Ce même groupe corrige sa feuille de recherche, montrant ainsi une certaine compréhension. Là encore, le professeur ne peut pas savoir. De plus, il n'est jamais revenu sur la trace écrite des étudiants. Autrement dit, la place du professeur dans les situations de résolution de problèmes est complexe, même lorsqu'il s'agit d'étudiants. Il nous semble nécessaire d'approfondir nos descriptions et analyses de ce qui se passe dans les classes du collège, du point de vue du professeur, des élèves et du savoir mathématique. Une première étape dans les recherches que nous menons consiste à décrire et à comprendre le déroulement de l'action. Il nous faut donc continuer l'enquête...

Bibliographie :

Houdement C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 67 -96.

Sensevy, G. (2011). Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique. De Boeck.

Sezione di Milano con la collaborazione della sezione di Parma

ARGOMENTAZIONE E RISOLUZIONE DI PROBLEMI

I problemi del Rally matematico transalpino e la ricchezza delle argomentazioni prodotte

A cura di Rosa Iaderosa

Nelle attività matematiche l'argomentazione viene comunemente intesa come *un aspetto della comunicazione* tra i componenti di un gruppo al fine di discutere sui concetti, o costruire concetti. Essa è utilizzata anche come **esplicitazione dei processi di pensiero e della loro struttura.** Si tratta quindi di un'attività che si esplica prevalentemente attraverso un discorso verbale, orale o scritto. Per argomentare "…si considerano quei processi eminentemente discorsivi che concernono il pensiero matematico; essi risultano da un **intreccio dialettico** tra *rappresentazioni simboliche* (i segni dell'aritmetica, le figure della geometria) e le *attività discorsive* su questi con cui il soggetto dà significato agli enunciati matematici, che **sono sempre di tipo misto** (segni specifici del linguaggio simbolico proprio della matematica e parole del linguaggio naturale)…" (*dal documento UMI, Matematica 2001*) .

Si può intendere in generale l'attività argomentativa come un discorso:

- che permette al soggetto di tornare su ciò che si è fatto, visto (ecc.), producendo interpretazioni, spiegazioni, risposte a domande del tipo "perché è così?"
- che permette al soggetto di anticipare fatti, situazioni, ecc., producendo previsioni, discorsi ipotetici su mondi possibili, risposte a domande "*come sarà*?", "*come potrebbe essere*?"…

Nelle attività di risoluzione di problemi all'alunno è richiesto di analizzare le situazioni per tradurle in termini matematici, riconoscere schemi ricorrenti, stabilire analogie con modelli noti, scegliere le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni, …) e concatenarle in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema. Gli allievi discutono tra pari e cercano di esporre e illustrare, documentare i procedimenti seguiti.

Nelle attività di risoluzione dei problemi gli allievi argomentano per:

esplorare consapevolmente una situazione problema o una configurazione geometrica e descriverne caratteristiche, proprietà varianti e invarianti, ***ipotizzare*** la validità di una strategia, ***esplicitare*** verbalmente, motivare e spiegare varie fasi di una procedura e dei risultati ottenuti , ***spiegare*** quando e perché **il controllo** ci ha consentito di rivedere la strategia ci consente di rivedere la strategia risolutiva, ***riflettere*** sulle procedure scelte e ritornare su queste scelte ***motivandole*** , ***interpretare e reinterpretare*** in un contesto i risultati ottenuti attraverso l'utilizzo di un **modello**.

Qui di seguito alcuni esempi significativi di come, su problemi del RMT proposti in "verticale", si possano osservare ***diversi livelli di competenza argomentativa.***

Siamo infatti convinti che **la competenza argomentativa si evolva soprattutto attraverso la capacità di coordinare varie rappresentazioni (verbale, iconica, numerica o simbolica) nel presentare i problemi e la loro risoluzione.**

Fra gli elaborati di seguito riportati sono presenti, oltre ad elaborati della sezione di Milano, anche elaborati della sezione di Parma.

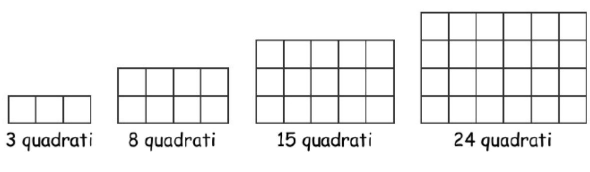
Il problema delle griglie

25° RMT PROVA I gennaio-febbraio 2017 ©ARMT 2017 8

6. GRIGLIE (Cat. 4, 5, 6)

Asmine disegna una serie di griglie rispettando la seguente regola: per ogni nuova griglia aggiunge una riga e una colonna di quadretti alla griglia precedente.

Queste sono le quattro griglie che ha già disegnato:

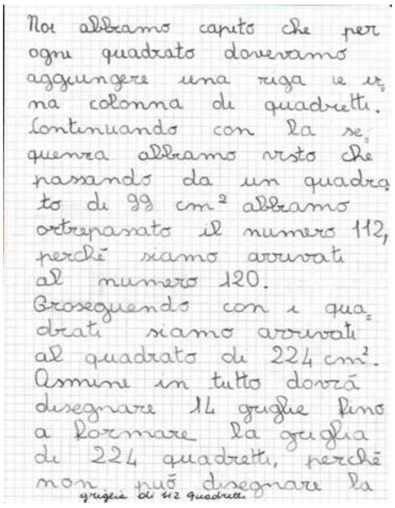


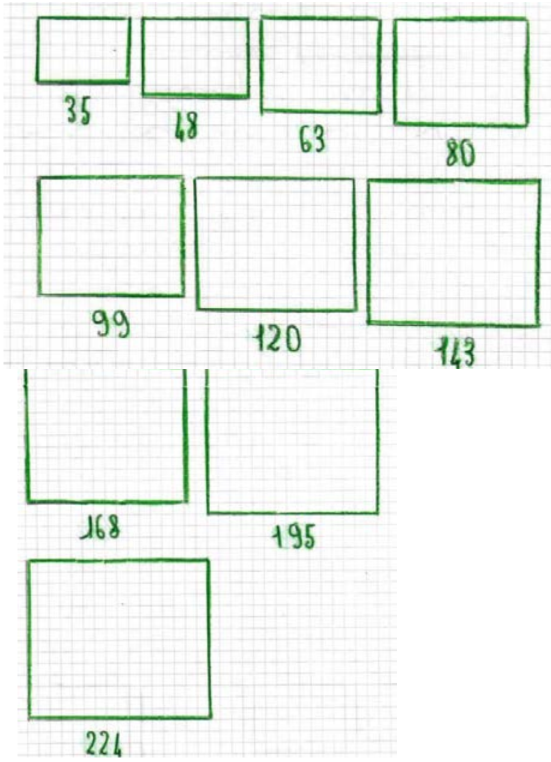
Continuando a costruire griglie rispettando la stessa regola, potrà costruire una griglia di esattamente 112 quadratini?

E una di esattamente 224?

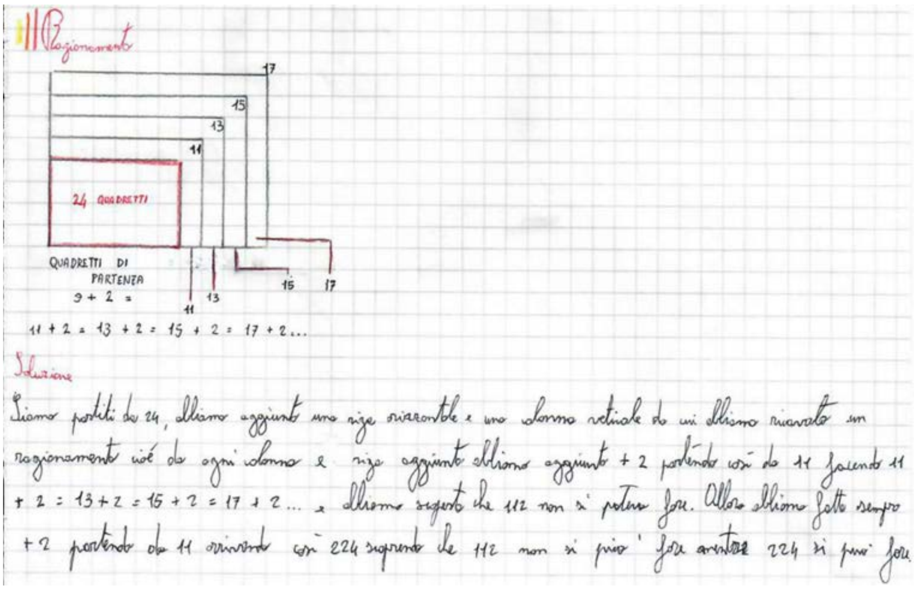
Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

Gli elaborati della Categoria 4:
anche nei problemi con risposta corretta prevale la strategia grafica, gli allievi prevalentemente completano i disegni e contano il progressivo aumentare delle caselle nelle griglie rettangolari. A volte compaiono i calcoli effettuati in sequenza, **ma nella maggior parte dei casi c'è solo la procedura, non commentata**. **Solo un elaborato presenta disegno e verbalizzazione del ragionamento, ma in modo molto semplice**



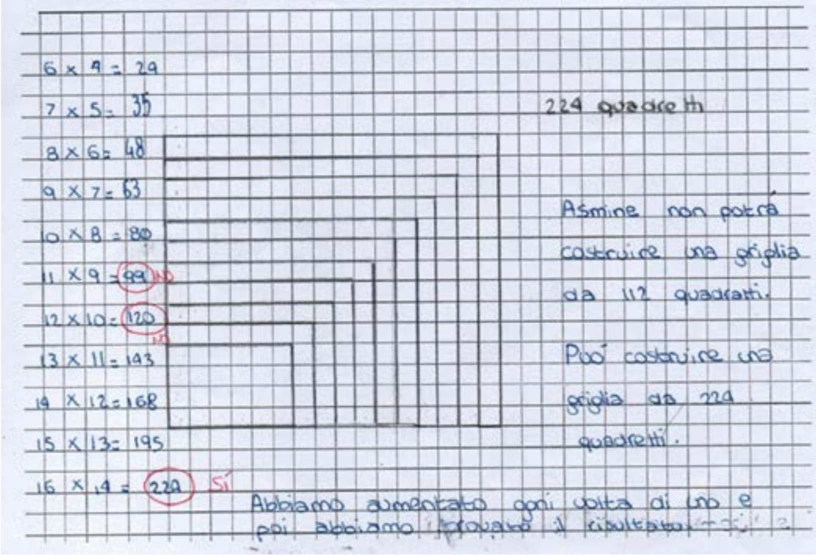


Gli elaborati della categoria 5:
compaiono spiegazioni verbali affiancate ai disegni delle griglie, in questo caso con un maggiore coordinamento tra le due rappresentazioni. Quindi in questa categoria cominciano a coesistere almeno due tipologie di spiegazioni, per lo più verbale e grafica, oppure verbale e procedurale con i calcoli.



Gli elaborati della Categoria 6:
Gli elaborati di questa categoria mostrano una certa evoluzione:

i disegni non si presentano più in forma svincolata tra loro ma sono quasi sempre presentati in una figura che raccoglie le varie griglie incasellandole tra loro; le varie rappresentazioni si coordinano in maniera più armonica.



25e RMT **FINALE** **maggio 2017** ©ARMT 2017 21

14. SALTI DI CANGURO (Cat. 7, 8, 9, 10)

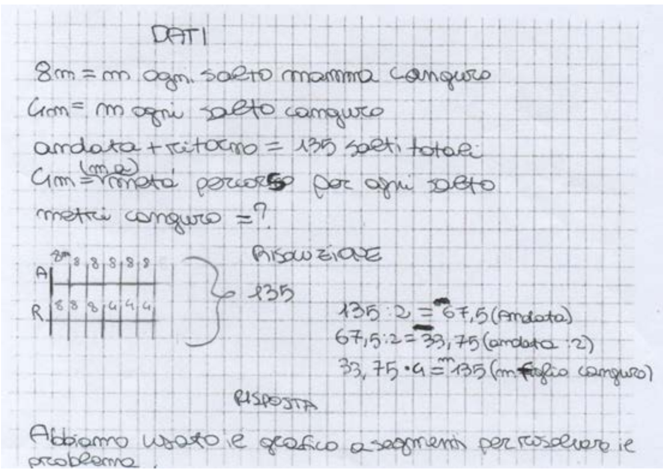
Mamma canguro esce dalla tana con il suo piccolo nel marsupio e attraversa la radura per raggiungere il ruscello. Procede con andatura regolare compiendo salti di 8 m ciascuno. Al ritorno fa di nuovo esattamente lo stesso percorso procedendo ancora con salti di 8 m. A metà strada, però, si ferma, fa uscire il piccolo dal marsupio e continua il percorso, fino alla tana, saltando insieme a lui con salti regolari di 4 m ciascuno.

Alla fine, mamma canguro, tra andata e ritorno, ha fatto in tutto 135 salti, tra salti di 8 m e salti di 4 m.

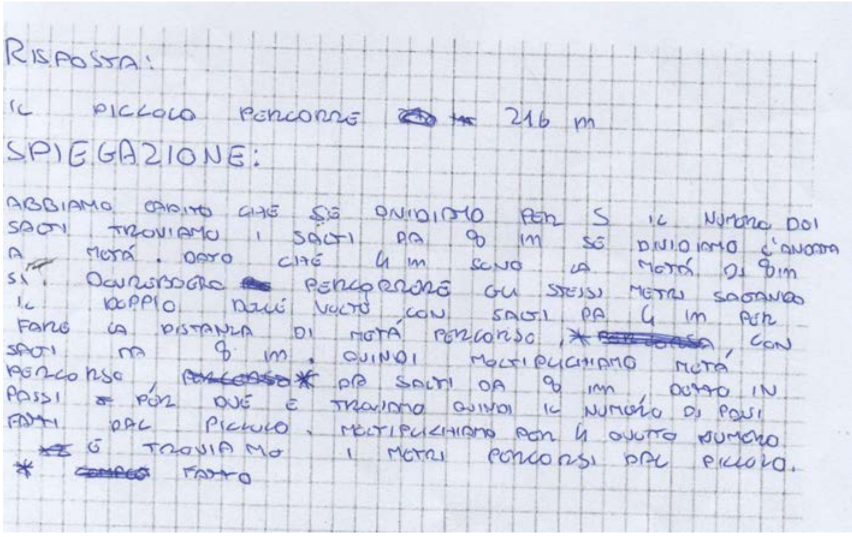
Quanti metri ha percorso il piccolo canguro saltando sulle proprie zampe?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Categoria 7



la rappresentazione mostra l'utilizzo di una strategia grafica indotta e poco interiorizzata, che conduce all'insuccesso



RISPOSTA:

IL PICCOLO PERCORRE 216 m

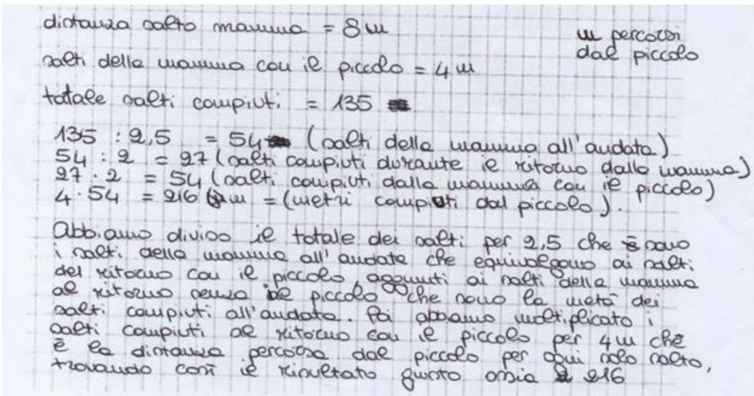
SPIEGAZIONE:

ABBIAMO CAPITO CHE SE DIVIDIAMO PER 5 IL NUMERO DEI SALTI TROVIAMO I SALTI DA 8 m SE DIVIDIAMO L'ANDATA A METÀ. DATO CHE 4 m SONO LA METÀ DI 8 m SI DOVREBBERO PERCORRERE GLI STESSI METRI SALTANDO IL DOPPIO DELLE VOLTE CON SALTI DA 4 m PER FARE LA DISTANZA DI METÀ PERCORSO, *, CON SALTI DA 8 m. QUINDI MOLTIPLICHIAMO METÀ PERCORSO * DA SALTI DA 8 m, DETTO IN PASSI, PER DUE E TROVIAMO QUINDI IL NUMERO DI PASSI FATTI DAL PICCOLO. MOLTIPLICHIAMO PER 4 QUESTO NUMERO E TROVIAMO I METRI PERCORSI DAL PICCOLO.

* FATTO

Elaborati della Categoria 8

Migliorano le argomentazioni verbali e l'armonizzazione tra più registri di rappresentazione per illustrare la strategia seguita.



distanza salto mamma = 8 m

salti della mamma con il piccolo = 4 m

m percorsi dal piccolo

totale salti compiuti = 135

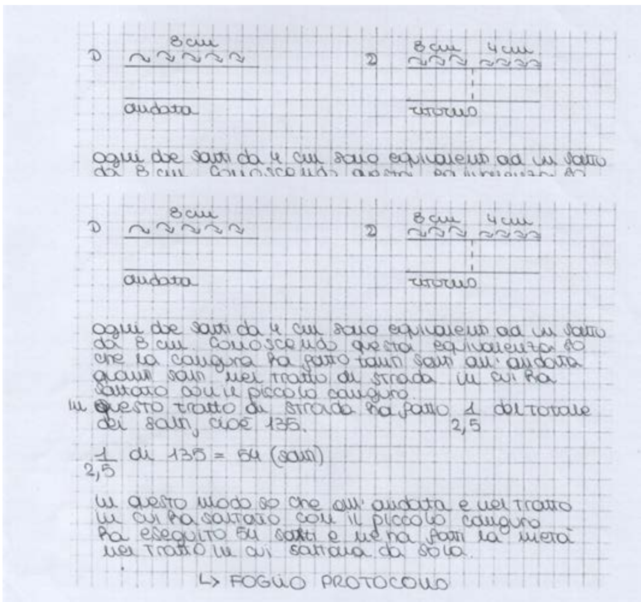
135 : 2,5 = 54 (salti della mamma all'andata)

54 : 2 = 27 (salti compiuti durante il ritorno dalla mamma)

27 · 2 = 54 (salti compiuti dalla mamma con il piccolo)

4 · 54 = 216 m = (metri compiuti dal piccolo).

Abbiamo diviso il totale dei salti per 2,5 che sono i salti della mamma all'andata che equivalgono ai salti del ritorno con il piccolo, aggiunti ai salti della mamma al ritorno senza il piccolo che sono la metà dei salti compiuti all'andata. Poi abbiamo moltiplicato i salti compiuti al ritorno con il piccolo per 4 m che è la distanza percorsa dal piccolo per ogni solo salto, trovando così il risultato giusto ossia 216



ogni due salti da 4 cm sono equivalenti ad un salto da 8 cm. Conoscendo questa equivalenza so che la canguro ha fatto tanti salti all'andata quanti salti nel tratto di strada in cui ha saltato con il piccolo canguro.

In questo tratto di strada ha fatto $\frac{1}{2,5}$ del totale dei salti, cioè 135.

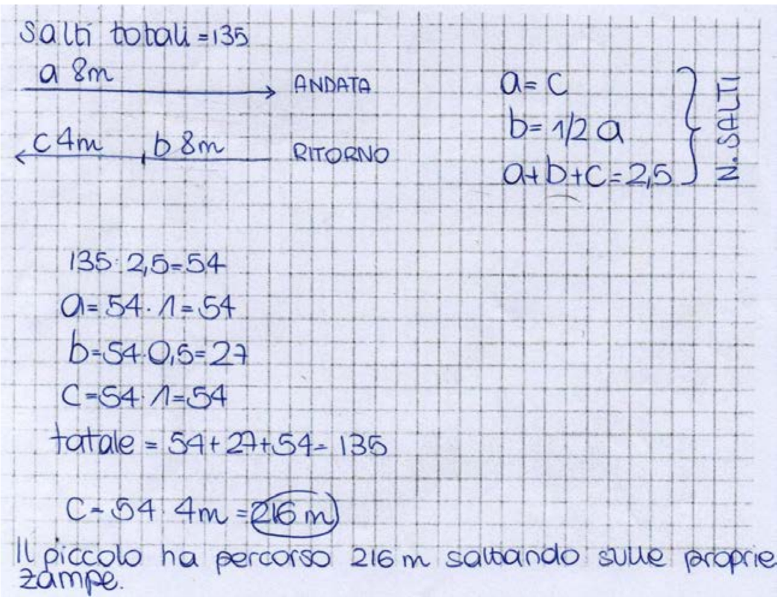
$\frac{1}{2,5}$ di 135 = 54 (salti)

In questo modo so che all'andata e nel tratto in cui ha saltato con il piccolo canguro ha eseguito 54 salti e ne ha fatti la metà nel tratto in cui saltava da sola.

↳ FOGLIO PROTOCOLLO

Categorie 9 e 10: le argomentazioni integrano rappresentazioni iconiche personali, simbolizzazioni, procedure aritmetico-algebriche con commenti verbali esplicativi.

Cat. 9



Salti totali = 135

a 8m → ANDATA

← c 4m, b 8m RITORNO

$\left.\begin{array}{l} a = c \\ b = 1/2\, a \\ a + b + c = 2{,}5 \end{array}\right\}$ N. SALTI

135 : 2,5 = 54

a = 54 · 1 = 54

b = 54 · 0,5 = 27

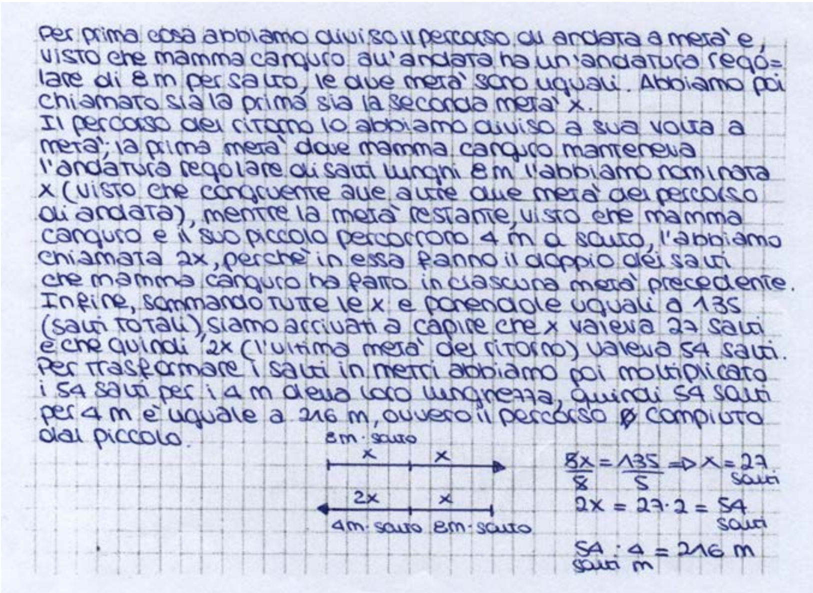
c = 54 · 1 = 54

totale = 54 + 27 + 54 = 135

c = 54 · 4m = 216 m

Il piccolo ha percorso 216 m saltando sulle proprie zampe.

Cat. 10



Per prima cosa abbiamo diviso il percorso di andata a metà e, visto che mamma canguro all'andata ha un'andatura regolare di 8 m per salto, le due metà sono uguali. Abbiamo poi chiamato sia la prima sia la seconda metà x.
Il percorso del ritorno lo abbiamo diviso a sua volta a metà; la prima metà dove mamma canguro manteneva l'andatura regolare di salti lunghi 8 m l'abbiamo nominata x (visto che congruente alle altre due metà del percorso di andata), mentre la metà restante, visto che mamma canguro e il suo piccolo percorrono 4 m a salto, l'abbiamo chiamata 2x, perchè in essa fanno il doppio dei salti che mamma canguro ha fatto in ciascuna metà precedente.
Infine, sommando tutte le x e ponendole uguali a 135 (salti totali) siamo arrivati a capire che x valeva 27 salti e che quindi 2x (l'ultima metà del ritorno) valeva 54 salti.
Per trasformare i salti in metri abbiamo poi moltiplicato i 54 salti per i 4 m della loro lunghezza, quindi 54 salti per 4 m è uguale a 216 m, ovvero il percorso ~~ø~~ compiuto dal piccolo.

8m · salto: x, x →

← 2x, x: 4m · salto, 8m · salto

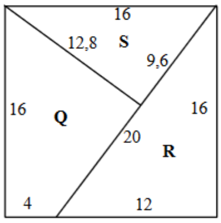
$\frac{5x}{5} = \frac{135}{5} \Rightarrow x = 27$ salti

$2x = 27 \cdot 2 = 54$ salti

54 salti · 4 m = 216 m

Sezione di Sassari

DAL PUZZLE I …



APPRENDIMENTO DI CONCETTI DI AREA E PERIMETRO ATTRAVERSO I PROBLEMI DEL RALLY MATEMATICO TRANSALPINO

A cura di Maria Agostina Satta e Rosanna Sanna

Introduzione

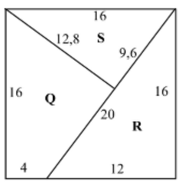
La scuola nella quale insegniamo è un Istituto comprensivo che accoglie alunni dai 6 ai 13 anni e coinvolge quindi insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado.
Nella nostra esperienza di insegnanti di scuola secondaria di primo grado abbiamo spesso rilevato che gli alunni non discriminano il concetto di area dal concetto di perimetro. Presumiamo che questo sia dovuto ad un insegnamento carente da un punto di vista manipolativo e strutturato sulla risoluzione di esercizi e non di problemi; ad esempio hanno "imparato" a calcolare il perimetro e l'area solo attraverso le "formule" con i dati espliciti e in figure standard.
Per questo motivo nella nostra scuola si è costituito un gruppo di ricerca–azione formato da docenti di matematica della scuola primaria e secondaria. Tale gruppo si è dato l'obiettivo di utilizzare i problemi del RMT per costruire un percorso in verticale incentrato su area e perimetro condividendo metodologie, strategie, materiali, linguaggio. Ci si è avvalsi via via della Banca di problemi del RMT per la ricerca degli enunciati adatti alla costruzione del percorso[69] nonché di alcuni articoli sull'argomento (si veda bibliografia).

1. Attività di laboratorio Scuola Secondaria di primo grado

Abbiamo concordato di iniziare l'attività partendo dal problema "Puzzle I"[70] per porre gli allievi di fronte all'ostacolo essenziale che risiede nella distinzione tra area e perimetro.

PUZZLE I (Cat. 6, 7, 8) (14° RMT Prova II, 2006)

Un quadrato di 16 cm di lato è stato ritagliato in tre pezzi, come mostrato nella figura :
- un primo triangolo rettangolo R i cui lati misurano 20 cm, 16 cm e 12 cm ;
- un secondo triangolo rettangolo S i cui lati misurano 16 cm, 12,8 cm e 9,6 cm ;
- un quadrilatero Q con due angoli retti.



Con il quadrilatero Q, tenuto fisso, e con entrambi i triangoli R ed S, che invece possono essere ribaltati, quanti poligoni convessi differenti (ovvero i cui angoli siano tutti inferiori ad un angolo piatto e che non siano sovrapponibili) si possono formare?

Disegnate tali poligoni e calcolate i loro perimetri.

[69] www.armtint.org/presentazione-rmt/problemi-rmt

[70] Nella Banca di problemi, nel percorso Ambito→Geometria piana→Titolo→Puzzle I

Dall'analisi delle risposte, relative alla prova del 14 ° Rally della sezione di Sassari, abbiamo evidenziato la difficoltà degli allievi a comprendere che il quadrilatero Q doveva essere tenuto fisso e nel disegnare, in cinquanta minuti, i dieci possibili poligoni.
Nel nostro percorso abbiamo modificato il testo originale integrandolo con domande mirate a scoprire se gli allievi fossero in grado di riconoscere l'invarianza della superficie al variare della forma di poligoni anche "non standard".

IL "NUOVO" PROBLEMA

Un quadrato di 16 cm di lato è stato ritagliato in tre pezzi, come mostrato in figura:

- un triangolo rettangolo R i cui lati misurano 20 cm, 16 cm e 12 cm;
- un triangolo rettangolo S i cui lati misurano 16 cm, 12,8 cm e 9,6 cm;
- un quadrilatero Q con due angoli retti.

Quanti poligoni convessi differenti (cioè non sovrapponibili) potete ottenere combinando i tre pezzi a vostra disposizione?

Per costruire i poligoni richiesti rispettate le seguenti istruzioni:

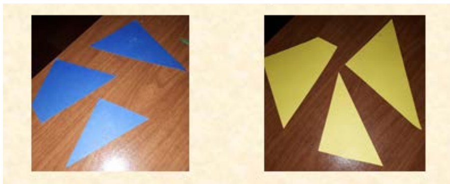
- Mantenete fissa la posizione del quadrilatero Q (quindi non potete ribaltarlo)
- Spostate i triangoli R ed S tenete presente che possono essere anche ribaltati
- **Attaccate sul cartellone i poligoni convessi ottenuti.**

Integrazioni al problema

Osservate con attenzione i Poligoni convessi che avete costruito e incollato sul cartellone.

- Scoprite qualche **proprietà rilevante**, **situazione ricorrente**, che si possa utilizzare per costruire un "***invariante***" cioè una **proprietà che permane** e che vi possa permettere di **caratterizzare tutti i poligoni convessi costruiti.**
- Quale strategia utilizzereste per determinare l'area della superficie dei poligoni convessi che possono essere costruiti utilizzando i tre pezzi? Argomentate la vostra risposta.
- Calcolate il perimetro dei 10 poligoni convessi costruiti. Che cosa osservate?
- Sulla base di ciò che avete rilevato nelle fasi precedenti che cosa potreste concludere?

Materiale utilizzato
Il Kit di lavoro, ricavato da cartoncino bicolore, era formato da:
- un triangolo rettangolo R i cui lati misurano 20 cm, 16 cm e 12 cm;
- un triangolo rettangolo S i cui lati misurano 16 cm, 12,8 cm e 9,6 cm;
- un quadrilatero Q con due angoli retti.



Ogni classe è stata suddivisa in gruppi formati da tre studenti e a ciascuno sono stati consegnati 4 o 5 kit. Il tempo necessario per la costruzione dei poligoni convessi è stato sicuramente superiore ai cinquanta minuti, e a parte alcune eccezioni, i gruppi hanno costruito tutti i possibili poligoni convessi.

Situazione didattica

Le risposte alla domanda "Cercate di trovare qualche **proprietà rilevante**, **situazione ricorrente**, che si possa utilizzare per costruire un "***invariante***" cioè una **proprietà che permane** e che vi possa permettere di **caratterizzare tutti i poligoni convessi costruiti"** ha messo in evidenza che solo un piccolo gruppo di allievi riconosce come ***"invariante***" l'area dei poligoni costruiti.
Alcune risposte degli allievi:

- *Tutte le figure hanno la stessa area.*

- *Tutte le figure hanno tre pezzi*
- *L'area di ogni poligono è esattamente uguale poiché unendo i tre pezzi si ottiene la stessa area*
- *L'area delle figure è la stessa, ma cambia il perimetro perché se divido il quadrato in tre pezzi e con questi costruisco nuove combinazioni, poiché i pezzi che compongono le figure convesse sono sempre gli stessi, esse hanno sempre la stessa area.*
- *L'area è uguale in tutte le combinazioni perché i pezzi utilizzati sono gli stessi.*

La maggior parte degli allievi non riconosce invece ***"l'invariante***" e le risposte sono le seguenti:

- *Almeno due pezzi sono dello stesso colore.*
- *I pezzi con cui sono formati hanno sempre la stessa misura.*
- *Il quadrilatero non va mai ribaltato.*
- *Tutti i poligoni hanno gli stessi pezzi.*
- *Tutti i poligoni sono convessi.*

Relativamente alla domanda "Quale strategia utilizzereste per determinare l'area della superficie dei poligoni convessi che possono essere costruiti utilizzando i tre pezzi? Argomentate la vostra risposta": solo il 20% degli allievi intuisce che è sufficiente calcolare l'area della superficie del quadrato assegnato per conoscere le aree delle superfici di tutti gli altri poligoni.
Alcune risposte degli allievi:

- *Secondo noi bisogna calcolare solo l'area di una figura perché hanno gli stessi pezzi con stessa superficie. Calcoliamo l'area del quadrato, che per noi è più semplice e quindi tutti i poligoni hanno la stessa area uguale a 256. Area del quadrato= bxh ovvero base per altezza 16x16 = 256*
- *Calcoliamo l'area del rettangolo (perché ci ricordiamo la formula) e quindi tutti gli altri poligoni hanno la stessa area.*

La maggior parte degli allievi non riesce a rispondere, oppure cerca di determinare l'area della superficie dei poligoni riportandoli su una quadrettatura, i tentativi sono però poco precisi e non portano quindi a dei risultati corretti.
Alcune risposte degli allievi:

- *Non abbiamo trovato nessuna strategia*
- *Non l'abbiamo fatto perché non ci ricordiamo le regole per calcolare l'area.*
- *L'area si può calcolare contando i quadratini che ci sono all'interno.*

Difficoltà emerse:

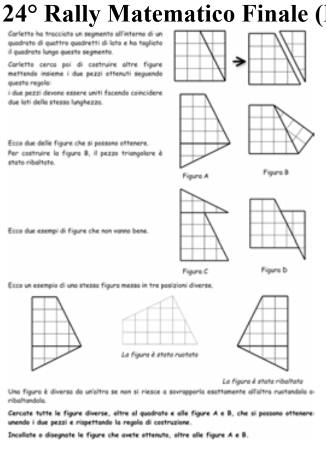
- Diversi allievi non sono convinti che poligoni con area uguale possano avere anche perimetro diverso, pur avendolo verificato attraverso l'attività.
- Calcolo dell'area della superficie dei poligoni mediante la somma delle lunghezze dei lati.
- Gli allievi misurano con il righello le lunghezze dei lati dei poligoni costruiti non accorgendosi di avere le misure delle lunghezze dei lati nella figura presente nella scheda.
- Alcuni misurano la lunghezza del perimetro misurando anche i lati interni.

Si rende necessario quindi rinforzare i seguenti concetti:

- poligoni di diversa forma possono avere uguale superficie.
- Poligoni con uguale superficie possono avere perimetri diversi.

Proponiamo il seguente problema:

- **"Il Quadrato cambia forma" 24° Rally Matematico Finale (Banca di problemi)**

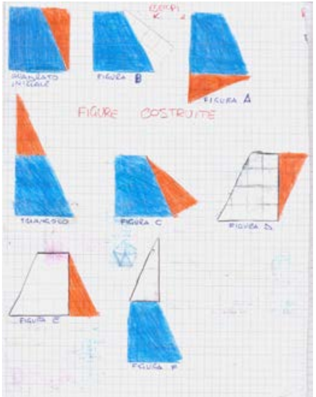


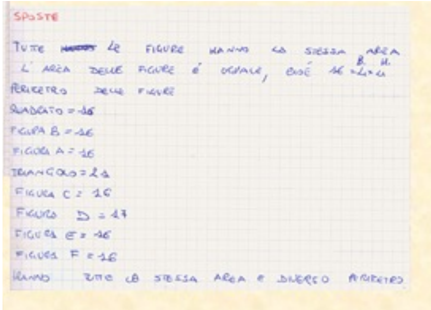
Le richieste del problema originale sono state integrate con le seguenti:

- Trovate un invariante che caratterizza tutte le figure che avete ottenuto.
- Calcolate il perimetro e l'area di tutte le figure.

- Che cosa potete concludere?

Elaborati significativi





gli allievi osservano che le figure costruite hanno tutte la stessa area.

L'attività prosegue…

Rafforzamento del concetto di superficie e calcolo dell'area di poligoni mediante scomposizione e quadrettatura con un altro problema "opportuno" ancora una volta ricercato nella Banca di problemi.

6. LE SUPERFICI DEL SIGNOR BARATTOLO (Cat. 4, 5) ©ARMT 2008 - 16° - II prova

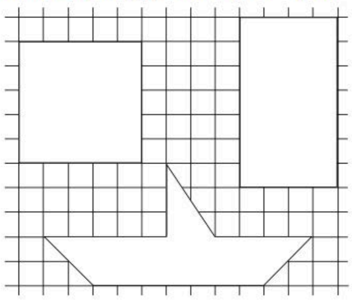
Il signor Barattolo vuole dipingere le superfici disegnate qui a fianco in modo che lo spessore della vernice sia sempre lo stesso.

Possiede tre barattoli uguali di pittura.

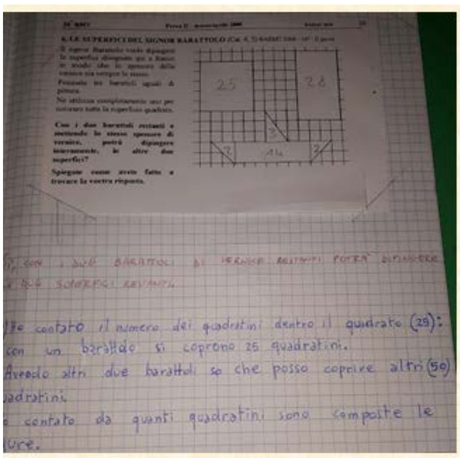
Ne utilizza completamente uno per colorare tutta la superficie quadrata.

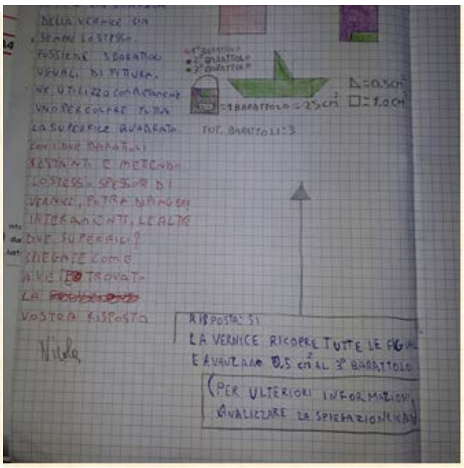
Con i due barattoli restanti e mettendo lo stesso spessore di vernice, potrà dipingere interamente, le altre due superfici?

Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

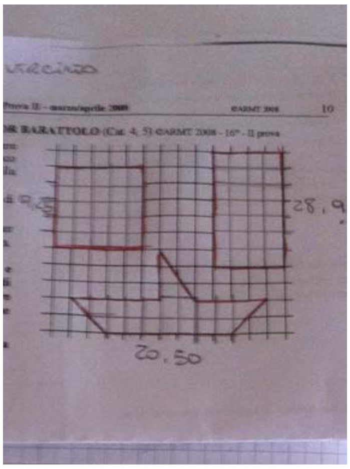


Elaborati degli allievi

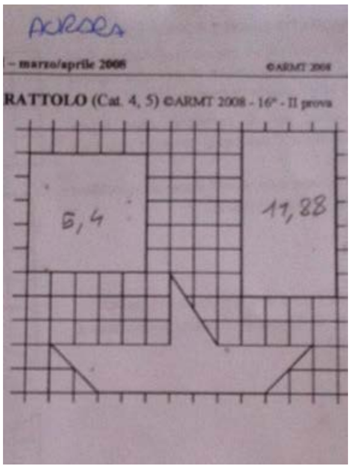




In alcuni casi, come il seguente, nel quadrato e nel rettangolo sommano le lunghezze di due dimensioni per calcolare l'area.

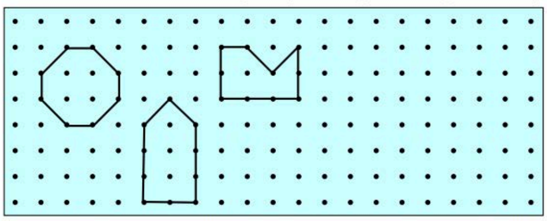


Nella barca non sanno che lunghezze devono sommare.
Si osserva che alcuni alunni continuano a calcolare l'area addizionando le misure delle lunghezze dei lati.



Osservazioni
Si riscontrano difficoltà nel calcolo dell'area di triangoli quando i lati obliqui non coincidono con le diagonali della quadrettatura. Alcuni allievi confondono ancora l'area con il perimetro.
L'attività prosegue con la proposta del seguente problema:

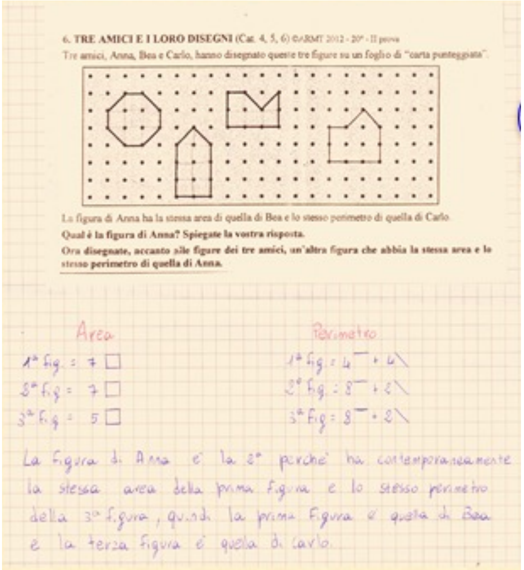
6. TRE AMICI E I LORO DISEGNI (Cat. 4, 5, 6) ©ARMT 2012 - 20° - II prova
Tre amici, Anna, Bea e Carlo, hanno disegnato queste tre figure su un foglio di "carta punteggiata".



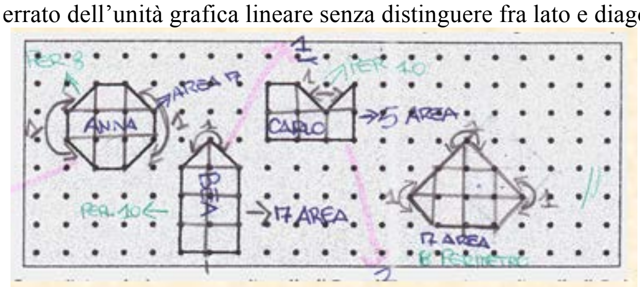
La figura di Anna ha la stessa area di quella di Bea e lo stesso perimetro di quella di Carlo.
Qual è la figura di Anna? Spiegate la vostra risposta.
Ora disegnate, accanto alle figure dei tre amici, un'altra figura che abbia la stessa area e lo stesso perimetro di quella di Anna.

Elaborati degli allievi

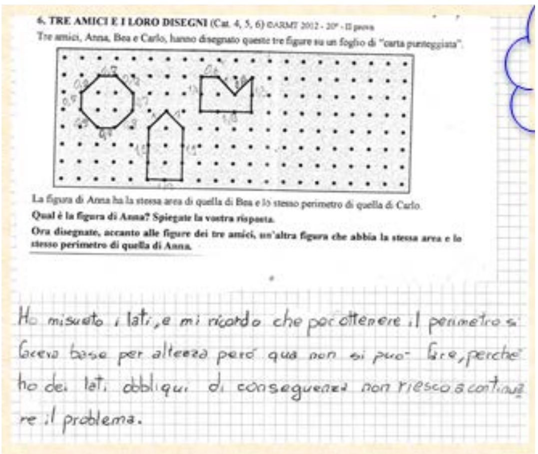
Un gruppo di allievi distingue il lato del quadrato dalla diagonale del quadretto e calcola correttamente area e perimetro.



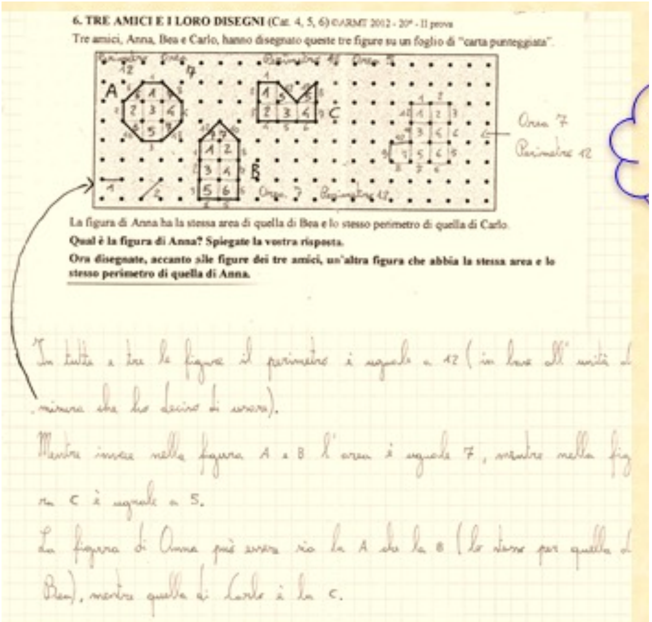
Si rileva peraltro un uso errato dell'unità grafica lineare senza distinguere fra lato e diagonale di un quadratino.



Negli elaborati che seguono



riemerge ancora confusione tra area e perimetro e crollo di certezza del "sapere"



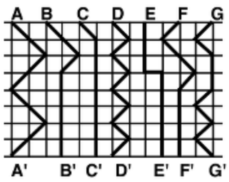
con la scelta errata dell'unità grafica

Osservazioni: quasi tutti gli allievi calcolano correttamente l'area della superficie di ciascun poligono. Commettono invece tanti errori nel calcolo del perimetro.

Non discriminano tra lato e diagonale del quadretto oppure scelgono unità di misura non corrette.

Rafforziamo la distinzione tra unità "lati" e unità "diagonali" dei quadretti di una griglia quadrettata con il seguente problema (Banca di problemi):

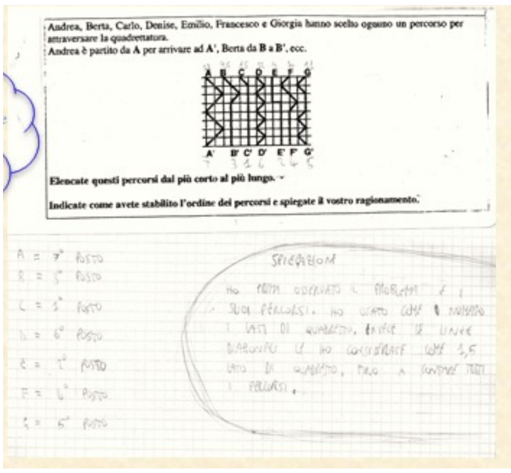
Andrea, Berta, Carlo, Denise, Emilio, Francesco e Giorgia hanno scelto ognuno un percorso per attraversare la quadrettatura.
Andrea è partito da **A** per arrivare ad **A'**, Berta da **B** a **B'**, ecc.



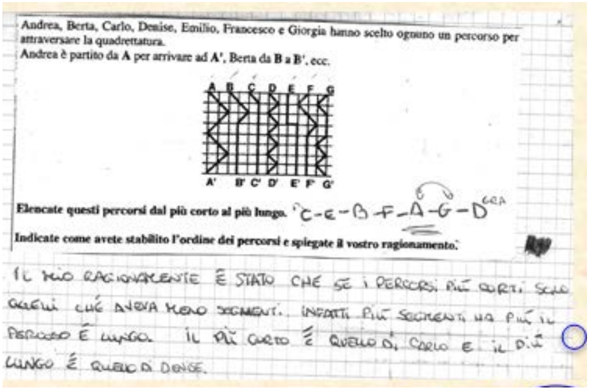
Elencate questi percorsi dal più corto al più lungo.

Indicate come avete stabilito l'ordine dei percorsi e spiegate il vostro ragionamento.

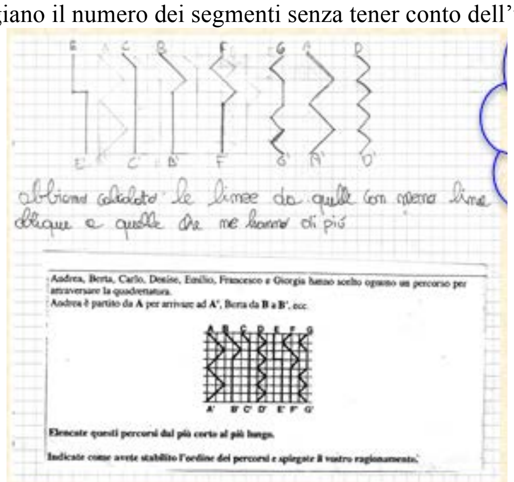
Elaborati degli allievi



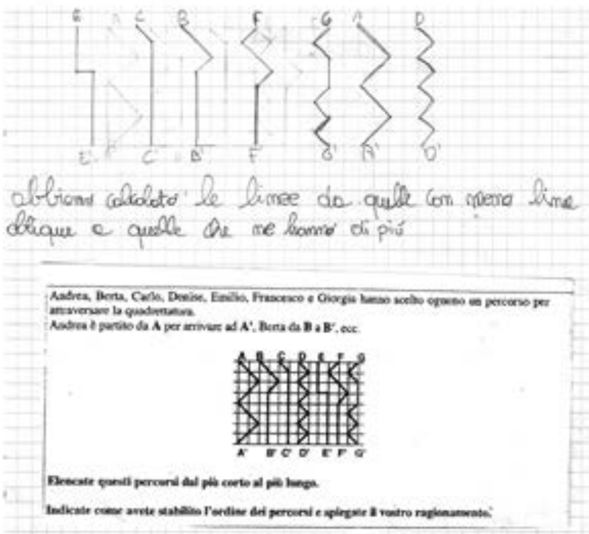
Gli allievi pongono il lato orizzontale uguale ad 1 e la diagonale uguale a 1,5



In questo caso, invece, conteggiano il numero dei segmenti senza tener conto dell'unità grafica (lato e diagonale)



Non mettono a confronto il numero dei tratti diagonali con quelli verticali. Non discriminano tra il lato diagonale "lungo" e "corto"

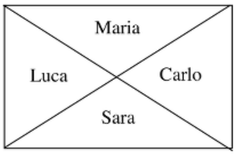


Intuiscono che i tratti diagonali hanno una lunghezza maggiore rispetto a quelli orizzontali e verticali ma non confrontano il numero dei tratti diagonali con quelle verticali ed inoltre non discriminano tra tratto diagonale "corto" e "lungo".

Verifichiamo ora se gli alunni hanno acquisito il concetto di area in problemi nei quali non viene esplicitata la parola superficie: la torta di nonna Lucia e il giardino del signor Torquato.

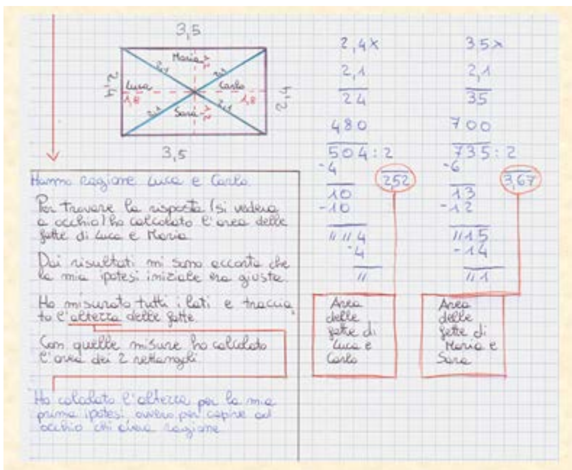
La torta di Nonna Lucia (Rally: 22.II.06) (Banca di problemi)

Nonna Lucia ha preparato una torta rettangolare al cioccolato per la merenda dei suoi nipoti Luca, Carlo, Sara e Maria.
Per darne una fetta ciascuno la divide in questo modo:

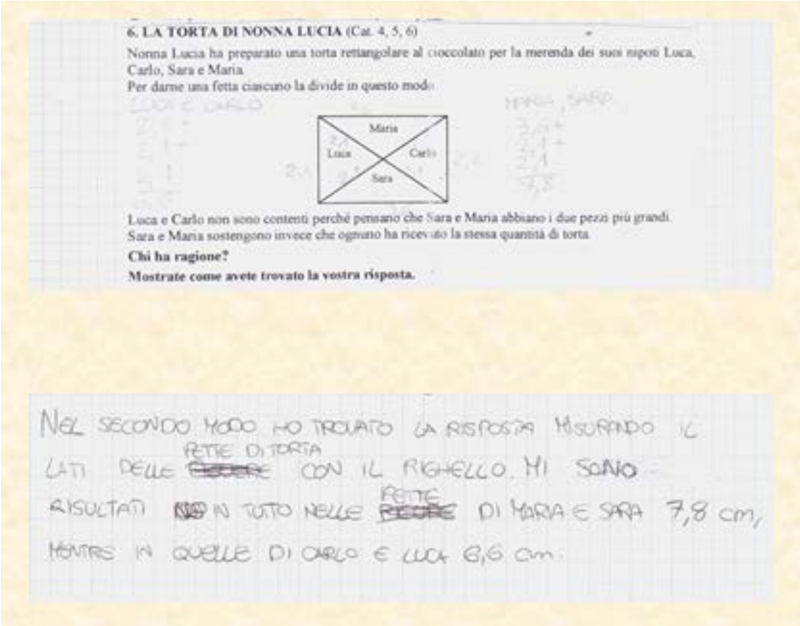


Luca e Carlo non sono contenti perché pensano che Sara e Maria abbiano i due pezzi più grandi.
Sara e Maria sostengono invece che ognuno ha ricevuto la stessa quantità di torta.
Chi ha ragione?
Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

Ma… qualcuno. per confrontare le fette calcola l’area dei triangoli, moltiplicando la lunghezza della base per l’altezza



E ancora …diversi allievi, per confrontare le fette calcolano il perimetro.



6. LA TORTA DI NONNA LUCIA (Cat. 4, 5, 6)

Nonna Lucia ha preparato una torta rettangolare al cioccolato per la merenda dei suoi nipoti Luca, Carlo, Sara e Maria.

Per darne una fetta ciascuno la divide in questo modo

Luca e Carlo non sono contenti perché pensano che Sara e Maria abbiano i due pezzi più grandi.

Sara e Maria sostengono invece che ognuno ha ricevuto la stessa quantità di torta.

Chi ha ragione?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

NEL SECONDO MODO HO TROVATO LA RISPOSTA MISURANDO I LATI DELLE ~~FIGURE~~ FETTE DI TORTA CON IL RIGHELLO. MI SONO RISULTATI IN TUTTO NELLE ~~FIGURE~~ FETTE DI MARIA E SARA 7,8 cm, MENTRE IN QUELLE DI CARLO E LUCA 6,6 cm.

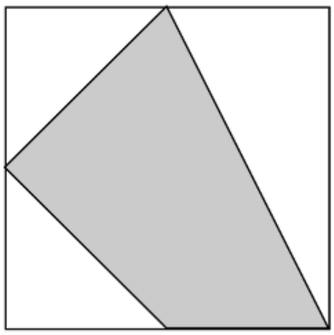
Il giardino del signor Torquato **(Banca di problemi)**

Questo è il giardino del signor Torquato:

Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca.
Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede:

"Sarà maggiore la parte con i fiori o quella con il prato?"

E voi che cosa ne pensate?
Spiegate la vostra risposta.



La maggior parte degli allievi ha fornito la risposta corretta.

2. Attività di laboratorio Scuola Primaria

Abbiamo proposto alle classi della Scuola primaria (due classi terze) l'attività tratta dal lavoro "Un Laboratorio per la prima elementare" di Monica Alberti e Paola Oggiano (L'Educazione matematica I, 2005) e abbiamo consegnato a ciascun alunno i tre pezzi del puzzle ottenuti dalla suddivisione del quadrato presente nel problema "Puzzle 1".

Gli alunni, nella costruzione delle figure, dovevano rispettare le seguenti regole:

- Utilizzare tutti e tre i pezzi.
- Far confinare i pezzi tra loro almeno per una parte.
- Non sovrapporre i pezzi.

Le figure costruite

Alle domande proposte dall'insegnante i bambini rispondono:

Quanti pezzi avete utilizzato?

- *Abbiamo utilizzato tre pezzi*

Quale forma hanno i vostri pezzi?

- *Quello con quattro punte si chiama quadrilatero*
- *Due dei nostri pezzi sono triangoli e l'altro ha quattro punte*

Osservate con attenzione i vostri pezzi e confrontateli con quelli dei compagni vicini. Sono uguali?

- *Si, secondo me si ricoprono.*

Che cosa hanno di uguale le figure incollate sul cartellone?

- *Non so rispondere*
- *Sono formate dagli stessi pezzi*
- *Abbiamo usato sempre due triangoli e una figura a quattro punte*

Conclusione

La confusione tra i concetti di area e perimetro è stata riscontrata anche all'aumentare dell'età degli allievi.
I problemi del RMT hanno rappresentato un valido supporto per costruire i concetti in modo efficace, attraverso il lavoro di gruppo e l'attività laboratoriale.

Bibliografia

Alberti M, Oggiano P., Un laboratorio per 'la prima elementare' - *L'Educazione Matematica* n° 1/2005
Bisso C., "Geometria e… dintorni" - *L'Educazione Matematica* n° 3/2004
Bisso C, 'Geometria e dintorni: in classe seconda. Ripartiamo dai tre pezzi' - *L'Educazione Matematica* n° 2/2005
Crociani C., Doretti L, Grugnetti L., ' Difficoltà nel confronto di lunghezze' – La Gazzetta di Transalpino n° 2, 09/2012
Fandino Pinilla M. I., D'Amore B., *"Area e perimetro" Aspetti concettuali e didattici* – Trento – Erickson
Grugnetti L., Jaquet F., *Risoluzione di problemi* – Lattes, 2014
Jaquet F, 'Il conflitto Area-Perimetro (prima parte)' - *L'Educazione Matematica* n° 2/2000
Jaquet F, Il conflitto Area-Perimetro (seconda parte)' - *L'Educazione Matematica* n° 3/2000

Sezione di Siena

CHIARO PER CHI SA... MA PER GLI ALTRI?

A cura delle coordinatrici[71] e di docenti afferenti alla Sezione

Introduzione

Il tema del 21° Incontro ARMT "*Leggere, riformulare, scrivere, redigere... : la lingua nei problemi del RMT, quali punti di forza e quali ostacoli?*" ha suggerito una riflessione sulle molteplici e differenti reazioni che la lettura di un testo può provocare nei destinatari. Facendo riferimento alla definizione di processo comunicativo nella teoria dell'informazione, si può affermare che in una qualsiasi forma di comunicazione, affinché il messaggio passi dalla "fonte" al "ricevente", è necessario che quest'ultimo ne conosca la chiave di decodifica e che tra i "due soggetti" si crei un rapporto dialogico che conduca ad un significato condiviso[72].
Da qui il titolo del poster della sezione di Siena: *"Chiaro per chi sa… ma per gli altri?"*.
In particolare, parlando di testi di problemi di matematica e sulla base di considerazioni tratte dall'analisi condotta per anni sugli elaborati degli allievi, abbiamo osservato come da interpretazioni non previste scaturiscano strategie risolutive e soluzioni inattese per lo stesso autore del testo. A partire da questa considerazione e con il presupposto teorico che per un'analisi coerente del processo comunicativo è necessario raccogliere le informazioni in maniera circolare[73] (andata e ritorno tra emittente e destinatario), sono state selezionate alcune attività legate ai problemi del RMT, svolte da docenti afferenti alla sezione di Siena Tali attività, illustrate nel poster di Charleroi, sono descritte più in dettaglio nei paragrafi seguenti.
Qui di seguito ci limitiamo ad una breve e generale presentazione di ciascuna di esse:
1. l'analisi di elaborati di alunni di categorie diverse è il punto di partenza per un'indagine, necessaria e fondamentale, volta a ricercare attraverso il feedback fornito dagli studenti strategie mirate al potenziamento di un corretto processo comunicativo;
2. si presenta la descrizione dettagliata, ricca, puntuale e documentata di tutte le fasi di un'esperienza che rientra nell'ambito della ricerca-azione e che si qualifica come utile strumento per insegnanti che intendano progettare percorsi didattici;
3. l'obiettivo di migliorare la capacità di comprensione del testo è perseguito attraverso un'attività fondata sul costruttivismo e sul lavoro collaborativo, guidando gli alunni stessi ad individuare e riconoscere le difficoltà e gli ostacoli, a pensare ad un modo per affrontarli e a metterlo in atto;
4. si approfondisce ancora l'aspetto della comunicazione, ma incentrandolo sul passaggio dal registro matematico a quello linguistico: l'esperienza sollecita gli allievi a prendere coscienza di quanto sia importante saper utilizzare un registro comunicativo in modo critico e non standardizzato;
5. la collaborazione tra docenti di discipline diverse, centrata sul potenziamento dell'aspetto comunicativo-argomentativo degli allievi, è perseguita attraverso un'azione che coinvolge questi ultimi nell'uso della lingua scritta e parlata, con il ricorso a diversi registri e l'introduzione di strumenti della tecnologia;
6. l'esperienza si inserisce nel contesto della progettazione trasversale dell'Istituto scolastico in cui si è svolta e mostra come, oltre la collaborazione all'interno di una scuola e nell'ottica dell'inclusione, sia possibile l'integrazione tra proposte provenienti dall'esterno e attività specificamente disciplinari.

1. Attenti a quei "2" *(a cura di Fabio Brunelli, Fabiana Ferri, Silvia Mazzucco, Bice Perna)*

Una delle caratteristiche dei problemi del RMT è la possibilità di analizzare gli elaborati degli alunni per capire quali ragionamenti, misconcetti o fraintendimenti possano averli portati ad un procedimento o ad una soluzione non attesa dai correttori o dagli ideatori stessi dei problemi.
Visto che il tema dell'Incontro di Charleroi era l'utilizzo della lingua nei problemi del RMT, abbiamo preso in considerazione un problema in cui il testo, che poteva essere interpretato in due modi, ha portato gli allievi a scegliere una strada diversa da quella indicata nell'analisi a priori, ma coerente con l'altra interpretazione, che però ha semplificato molto il problema stesso.
Per indagare ulteriormente sull'interpretazione del testo da parte degli allievi, il problema è stato proposto a classi che non avevano partecipato alla gara; è seguita poi una riflessione su ciò che gli allievi hanno compreso dalla

[71] Coordinatrici sezione: Carla Crociani, Lucia Doretti, Francesca Ricci, Lucia Salomone, Rita Spatoloni

[72] L. Cecconi-D.Olmetti Peja in *Gli strumenti dell'intervento didattico*, pp. 13-17. La Nuova Italia ed. Milano, 2000.

[73] "*La retroazione è un elemento essenziale dell'equilibrio del sistema informativo, poiché il messaggio in partenza, che rappresenta l'input (ingresso nel sistema), viene recepito e decodificato per poi essere nuovamente inviato come output (uscita dal sistema) e tale risposta diventa, a sua volta, origine di ulteriori messaggi in una circolarità incessante"* (L. Cecconi-D.Olmetti Peja in *Gli strumenti dell'intervento didattico*, p.35. La Nuova Italia ed. Milano, 2000)

lettura del testo ed infine è stata richiesta una riscrittura del testo stesso che eliminasse le ambiguità eventualmente riscontrate.
All'interno della riflessione didattica sul problema è emersa poi anche l'annosa difficoltà degli allievi nel distinguere il concetto di "cifra" da quello di "numero" che ha portato alla maggior parte degli errori.

Il problema

> **ISIDORO E IL COMPITO A PUNTATE! (Cat 3, 4) 25°RMT- II Prova**
> Lunedì Isidoro ha scritto tutti i numeri interi da 1 a 100 e ha contato le cifre "2" che ha scritto. In tutto ha contato venti cifre "2", l'ultima che ha scritto era il "2" del numero 92. Martedì continua a scrivere la successione dei numeri interi: 101, 102, 103, 104, 105, … . Ad un certo momento si accorge che nel corso di questa giornata sta scrivendo la venticinquesima cifra "2".
> **Quale numero sta scrivendo Isidoro nel momento in cui scrive la venticinquesima cifra "2"? Mostrate come l'avete trovato.**

Presentazione dell'attività

In una prima fase sono stati analizzati gli elaborati della categoria 4 della sezione di Siena svolti durante la gara.
La maggior parte delle classi ha dato la risposta "122" per aver interpretato così il testo: "Martedì, Isidoro continua a scrivere i numeri dal 101 e continua a contare dal numero 20 anche le occorrenze della cifra "2", quindi la 21a cifra 2 compare nel 102, la 22a nel 112, la 23a nel 120, la 24a nel 121 e la 25a nella cifra di mezzo del 122".
Quattro classi su 104, invece, hanno dato la risposta "203", cioè quella riportata nell'Analisi del compito con queste parole: "Dalla prima informazione dedurre che occorrono 20 cifre "2" per scrivere gli interi da 101 a 199. Scrivere poi gli interi 200, 201, 202, 203 per trovare le cinque occorrenze mancanti della cifra 2".
Un esempio del secondo tipo di risposta, cioè quello che conduce alla soluzione "203", è mostrato sotto.

Considerando come positivi i risultati compresi fra 3 e 4 punti, in cat. 3 si è avuto una percentuale di successo del 47% e in cat.4 del 46%.
In una seconda fase il problema è stato proposto a classi di categoria 6, 7 e 8 all'inizio di questo anno scolastico, in un contesto di normale attività didattica.
E'stato permesso che gli allievi risolvessero il problema a coppie, avendo a disposizione i 50 minuti canonici per la risoluzione.
I risultati positivi sono stati, in categoria 6, del 24%; in categoria 7, del 65%; in categoria 8, del 70%. C'è stato quindi un calo nel passaggio fra le categorie 3 e 4 e la 6, dove il problema è stato somministrato senza aver ripreso in classe l'argomento.
Anche in questo caso, nella stragrande maggioranza degli elaborati l'interpretazione del testo ha portato ad attribuire al numero 102 la ventunesima cifra 2, e così di seguito fino a dare la risposta "122".
Dopo una fase di confronto e discussione, nelle classi è stata sperimentata una riscrittura del testo per ovviare alle parti ritenute poco chiare. La maggior parte degli allievi ha cercato di "esplicitare" la parola *continua* in vari modi. Di seguito sono riportati alcuni esempi (le parti modificate dagli allievi, sono sottolineate).

Riscrittura a)

Isidoro e il compito a puntate.
Lunedì Isidoro ha scritto tutti i numeri da 1 a 100 e ha contato venti cifre "2", l'ultima che ha scritto era il "2" del numero 92. Martedì ricomincia da capo a contare, però questa volta comincia da 100.
Ad un certo momento si accorge che nel corso di questa giornata sta scrivendo la venticinquesima cifra "2".
Quale numero sta scrivendo Isidoro nel momento in cui scrive la venticinquesima cifra "2"?

Riscrittura b)

Lunedì Isidoro scrive tutti i numeri da 1 a 100. Vuole contare tutti i numeri 2. Arriva a 92 e si accorge che la cifra 2 del 92 è il ventesimo 2 contato oggi.
Martedì ricomincia da zero a contare tutti i 2 però parte dal numero 100. Quale numero sta scrivendo Isidoro nel momento in cui scrive il venticinquesimo "2"?

Riscrittura c)

Lunedì Isidoro ha scritto la sequenza dei numeri interi da 1 a 100 contando 20 volte la cifra 2; la ventesima volta corrisponde al numero 92.
Il giorno successivo Isidoro continua a scrivere la sequenza numerica ricominciando da 101 in poi.
Ad un certo punto si accorge che dall'inizio giornata ha scritto la cifra 2 per 25 volte.

Osservazioni nel corso dell'esperienza

Si è riscontrato negli allievi delle categorie 6, 7 e 8 un certo atteggiamento di "sufficienza" rispetto al problema proposto, perché essendo per categorie 3 e 4, era stato giudicato a priori troppo "facile". Spesso sono stati sbrigativi nelle risposte.
Alcuni studenti in difficoltà, vista la possibilità data loro di esplicitare gli ostacoli incontrati, hanno evidenziato problematiche altrimenti non identificabili. Per esempio, una ragazza ha scritto: *"Non ho capito cosa vuol dire "2",* esplicitando poi a voce che la presenza delle virgolette prima e dopo quel numero/cifra l'avevano messa in confusione.

Conclusione dei docenti

L'esperienza ha confermato ancora una volta l'importanza dell'utilizzo dei problemi del RMT nella pratica didattica, non solo per far emergere certi nodi concettuali e le relative difficoltà degli allievi (per esempio, in questo contesto, la distinzione fra cifra e numero, che merita di essere ripresa anche in categoria 6), ma anche per riflettere sui testi dei problemi proposti. La presenza di ambiguità di interpretazione del testo interferisce sulla risoluzione e può, come in questo caso, semplificarla eccessivamente limitando anche l'interesse del problema.

2. Difficoltà di pensiero o di linguaggio? *(a cura di Antonella Castellini e Paola Hippoliti con la collaborazione di Lucia Fazzino)*

Il lavoro nasce da alcune riflessioni scaturite durante l'analisi a posteriori degli elaborati della sezione di Siena del problema "*Regalo di compleanno*", somministrato nella prima prova del 25° RMT alle categorie 5, 6, 7.

REGALO DI COMPLEANNO (Cat. 5, 6, 7) 25° RMT - I Prova
I gemelli Ada, Bice e Carlo ricevono in regalo per il loro compleanno una scatola di cioccolatini ciascuno. Le tre scatole contengono lo stesso numero di cioccolatini. Dopo alcuni giorni i gemelli controllano il contenuto delle loro scatole e vedono che Ada ha mangiato 8 cioccolatini, Bice ne ha mangiati 15 e Carlo ne ha mangiati 13.
A quel punto i bambini osservano che con tutti i cioccolatini rimasti potrebbero riempire completamente due scatole e che ne avanzerebbero 6.
Quanti cioccolatini conteneva ciascuna scatola ricevuta in regalo dai gemelli?
Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

(le sottolineature nel testo del problema sono nostre, successive alla somministrazione del problema)

PROCEDURE RISOLUTIVE:
1) approccio aritmetico: per tentativi e aggiustamenti organizzati, ipotizzando il numero di cioccolatini contenuto in una scatola;
2) approccio di tipo pre-algebrico (o con ragionamento): 8+15+13+6= 42 cioccolatini per scatola (si prende coscienza del fatto che i cioccolatini mangiati più quelli "rimasti fuori" formano la terza scatola);
3) mediante una rappresentazione grafica.

I risultati globali ottenuti dalle sezioni nella soluzione del problema da parte delle classi partecipanti alla gara non sono stati positivi:

Categoria	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**N. classi**	**Media**
Cat 5	519 (56%)	196 (21%)	33 (4%)	78 (8%)	106 (11%)	932	0.99
Cat 6	743 (53%)	269 (19%)	52 (4%)	134 (10%)	201 (14%)	1399	1.13
Cat 7	410 (37%)	226 (20%)	57 (5%)	185 (17%)	240 (21%)	1118	1.66
Totale	1672 (48%)	691 (20%)	142 (4%)	397 (12%)	547 (16%)	3449	1.26

Nota: Il problema è risolto nelle condizioni particolari del RMT: classe intera, allievi in completa autonomia, da 5 a 7 problemi da risolvere, un solo foglio risposta per problema.

Il problema proposto possedeva sostanzialmente la stessa struttura matematica del problema *"Bimbi golosi"* (14° RMT, II, 8) che aveva ottenuto una buona percentuale di risposte corrette, pertanto le aspettative positive erano alte.

Ci siamo chieste perché non sia andata così!
I risultati ottenuti sono dipesi da una difficoltà legata alla complessità dei processi implicati nella ricerca della soluzione o si è trattato di difficoltà di tipo linguistico? Ci sono parole che, involontariamente, hanno agito da ostacolo ad una piena comprensione del testo o che, in qualche modo, hanno "guidato" gli allievi verso riflessioni non corrette?
Abbiamo cercato una risposta analizzando nuovamente tutti i elaborati delle classi della sezione di Siena. Poteva esserci di aiuto vedere quali procedure errate erano state utilizzate e se ce ne fosse stata qualcuna in particolare che si presentava in maniera più frequente di altre; questo ci avrebbe permesso di formulare ipotesi più puntuali.

Dall'esame compiuto è emerso che, effettivamente, ci sono state due procedure errate più comunemente utilizzate:
1) (8+15+13)−6=30 30:2 = 15 cioccolatini per ciascuna scatola,
2) (8+15+13)+6= 36 36:2 = 18 cioccolatini per ciascuna scatola.

Osservando queste procedure sono sorte nuove domande: nella prima procedura (che è anche quella più utilizzata), perché gli allievi hanno sottratto i sei cioccolatini avanzati? Perché in entrambe le procedure hanno diviso per due se, invece, le scatole erano tre?
Riesaminando il testo del problema con attenzione abbiamo rilevato alcune parole che, secondo noi, potevano presentare delle ambiguità:
1. *"potrebbero"* e "*avanzerebbero"* sono due verbi scritti al condizionale che non sono in coerenza con il resto del testo che, invece, è scritto usando il tempo presente. Inoltre, il condizionale può essere fuorviante, soprattutto per gli allievi più piccoli, perché ipotizza la fattibilità di un'azione che però non si è certi che avvenga davvero.
2. Anche le parole *"vedono*" *"osservano"* sono termini che non implicano un'azione effettiva. Dopo aver "mangiato", raramente i bambini "*osservano"*, casomai contano ed è più facile che la loro attenzione si posi sui cioccolatini rimasti, piuttosto che "*vedere"* quelli mangiati che non ci sono più.
3. Il verbo *"avanzare"* potrebbe essere interpretato come una parola-chiave per individuare "l'operazione giusta", in questo caso, erroneamente, la sottrazione. Questo potrebbe spiegare perché gli allievi abbiano sottratto i "6 cioccolatini avanzati".
Inoltre, la necessità di "sottrarre" all'inizio i cioccolatini mangiati, porta a ricercare un dato numerico da cui toglierli (manca ancora l'astrazione di togliere elementi da qualcosa che non si conosce). Non avendo tale dato, i 36 cioccolatini *mangiati* diventano essi stessi il risultato della sottrazione che gli allievi non sanno "pensare", e quindi sono visti come i *rimanenti.*
4. I numeri "particolari": il 36 si "presta bene" ad essere diminuito di 6. Inoltre sia 36 che il numero ottenuto dalla sottrazione 36 − 6, cioè 30, sono pari. Entrambi questi numeri, quindi, si prestano bene ad essere divisi per due, che è il dato relativo al numero di scatole che si riempirebbero dopo aver mangiato i cioccolatini.
5. Infine, dall'analisi delle risposte sbagliate sembra emergere il fatto che gli allievi non abbiano compreso la domanda: hanno perso di vista le tre scatole iniziali e hanno spostato l'attenzione sulle due scatole che si potrebbero riempire alla fine. Questo può aver portato ancora una volta a confondere *cioccolatini rimasti* con *cioccolatini mangiati.*
Sulla base dell'analisi fatta, abbiamo provato a riscrivere un nuovo testo nel quale abbiamo tentato di eliminare gli ostacoli linguistici individuati.

REGALO DI COMPLEANNO (Cat. 5, 6, 7) (Nuova versione)
I gemelli Ada, Bice e Carlo ricevono in regalo per il loro compleanno una scatola di cioccolatini per ciascuno. Le tre scatole contengono lo stesso numero di cioccolatini.
Dopo alcuni giorni i gemelli controllano il contenuto delle loro scatole e vedono che Ada ha mangiato 8 cioccolatini, Bice ne ha mangiati 15 e Carlo ne ha mangiati 13.
I gemelli decidono di mettere insieme tutti i cioccolatini che sono rimasti. Dopo aver risistemato i cioccolatini nelle scatole osservano che sono riusciti a riempire completamente due scatole e in più gli restano 6 cioccolatini per iniziare a riempire la terza scatola.
Quanti cioccolatini c'erano in ognuna delle tre scatole quando i gemelli le hanno ricevute in regalo?

Successivamente abbiamo somministrato il problema così riformulato ad alcune classi che non lo avevano mai affrontato, in ciascuna delle tre categorie. La modalità di somministrazione concordata è stata di far lavorare gli alunni a coppie casuali per avere una maggiore quantità di elaborati da analizzare.
I risultati ottenuti:

	Cat 5	Cat 6	Cat 7	Provato anche in cat 8
prima	75% no 25% sì	71% no 29% sì	68% no 32% sì	//
poi	44% no 56% sì	40% no 60% sì	60% no 40% sì	12% no 84% sì

I risultati in cat. 5 - La procedura errata che portava a dividere per due è visibilmente calata: si passa dal 40% di prove col testo originale al 12,5% di prove per il testo modificato. La procedura corretta (15+13+8+6) passa dal 15% al 44%, mentre quella per tentativi rimane quasi la stessa. Nella somministrazione col testo modificato non ci sono prove in bianco.

I risultati in cat. 6 e 7 - Nessun elaborato mostra un approccio algebrico anche solo tramite una rappresentazione: ci sono dei disegni ma non emerge "uguaglianza". Aumenta la procedura 36 + 6. Chi non riesce a visualizzare la terza scatola incompleta prova a partire "dalla sottrazione dei cioccolatini mangiati" ma, non riuscendo ad andare avanti, cade negli stessi errori che portano alle soluzioni 15 e 18 a conferma della difficoltà di sottrarre numeri noti da un numero che non si conosce.

Nota

Il lavoro sopra descritto costituisce un primo contributo di analisi e riflessione sul problema *"Regalo di compleanno"*. Nell'attività svolta dal gruppo Algebra a Charleroi, sono state messe a punto altre varianti del problema e programmate sperimentazioni con l'obiettivo di saperne di più sulle difficoltà incontrate dagli allievi e poter così rispondere alla domanda: "*Difficoltà di pensiero o di linguaggio?*".

3. Leggere e comprendere i testi del Rally Matematico Transalpino: noi facciamo così...

(a cura di Manuela Lucherini)

Nel corso degli anni, durante le attività con i bambini sui problemi del Rally, ho potuto verificare quanto frequentemente si presentino ostacoli relativi alla comprensione del testo. Spesso le difficoltà sono conseguenze di una lettura superficiale, che porta gli allievi a trascurare alcuni dettagli significativi, talvolta invece la presenza di termini, anche di uso comune, ma che essi non conoscono, può creare una confusione di idee che incide poi sulla comprensione di tutto il testo.

Mi viene in mente una situazione recente, non relativa ad un problema del Rally, ma ad uno "tradizionale" che avevo assegnato in classe: il testo di questo problema parlava prima di "savoiardi" e poi di "biscotti". Nell'intenzione dell'autore quest'ultimo termine era usato genericamente, riferito ai savoiardi, probabilmente per evitare una ripetizione lessicale. Alcuni bambini hanno sbagliato completamente la risoluzione perché non sapevano cosa fossero i savoiardi ed hanno confuso i dati.

Difficoltà di ordine linguistico si osservano, inoltre, nelle spiegazioni che gli alunni forniscono: spesso trascurano di evidenziare alcuni passaggi del ragionamento che hanno effettuato, senza rendersi conto che ciò potrebbe renderlo non comprensibile ad un'altra persona. Probabilmente questo avviene anche perché gli stessi bambini (di scuola primaria) che hanno risolto il problema, hanno intuito certi passaggi, ma non ne hanno cosciente consapevolezza.

L'argomento del convegno di quest'anno mi ha fatto riflettere su come potremmo cercar di rimuovere gli ostacoli di ordine linguistico.

Presentazione dell'attività

Com'è nata

Nella mia classe IV di scuola Primaria[74], abbiamo discusso sulle difficoltà incontrate nella risoluzione di un problema ed è emerso che spesso una di queste è proprio nella comprensione del testo. Sulla base di questa osservazione qualcuno degli allievi ha suggerito di usare il vocabolario per capire le parole di cui non conoscono il significato, ma ben presto molti si sono resi conto che questo non li avrebbe aiutati (è ancora più difficile capire la spiegazione del vocabolario), perché è necessario capire il senso di tutto il discorso, oltre che il significato della singola parola.

Abbiamo così deciso di svolgere alcune attività in gruppo, poiché in questo modo i bambini avrebbero potuto confrontare le proprie idee, discutere sui testi ed aiutarsi a vicenda per capirne bene il significato.

La fase esplorativa

Ho scelto di proporre problemi che ritenevo non troppo difficili, per evitare che qualcuno si scoraggiasse.

Abbiamo iniziato con la risoluzione del problema: "*Le pozzanghere*" 17.II.3 (cat. 3,4).

Non tutti gruppi sono riusciti a risolverlo correttamente, pertanto ho chiesto a quelli che lo avevano risolto di trasformare il testo, in modo da proporlo nuovamente ai compagni che avevano sbagliato. Nel trasformare il testo

[74] Classe corrispondente alla categoria 4.

avrebbero dovuto fare attenzione a non fornire aiuti o spiegazioni, ma solo a renderlo più chiaro nelle parti che, secondo loro, potevano creare, o avevano creato, difficoltà di comprensione. Avrebbero potuto anche raccontare la situazione con le loro parole, come se fosse una storia.
Gli allievi si sono impegnati seriamente in questa attività, hanno riscritto il testo con le loro parole ed hanno nuovamente proposto agli altri di risolverlo. Questa volta i bambini hanno compreso meglio la situazione e sono riusciti a risolverla correttamente.

Le fasi di sviluppo

A questo punto tutti i bambini sono stati coinvolti nel lavoro di rielaborazione ed abbiamo deciso che ogni gruppo avrebbe lavorato, secondo le regole precedentemente stabilite, su un testo che poi sarebbe stato proposto ai compagni, così come era stato trasformato. Il problema proposto è "*Una buona mira*" 22.I.5 (cat. 3,4,5)
Nella prima fase hanno interpretato il testo: "*... abbiamo letto da soli e ognuno ha fatto gli aggiornamenti che voleva, poi ce li siamo confrontati e abbiamo deciso qual era l'idea migliore*".
Nella seconda fase lo hanno rielaborato, cercando di "*trovare delle parole uguali, però più comuni e utilizzate più spesso, che si capiscono meglio*" (è stato un lavoro di ricerca di sinonimi che rientra nell'ambito dell'arricchimento lessicale e che, partendo da un bisogno concreto, potrà estendersi ed essere applicato in altri ambiti, in un'ottica di trasversalità).
Infine hanno riscritto il testo, con modalità diverse, tutte ugualmente interessanti dal punto di vista didattico: in qualche caso hanno usato parole loro, senza guardare la forma iniziale, in altri hanno solo sostituito alcuni termini con quelli nuovi per loro più comprensibili, altre volte hanno eliminato parti che, per loro, risultavano superflue.
"In questo del bersaglio invece che appeso mettiamo attaccato, poi ci sono altre parole come colpisce, invece diciamo prende" (Gemma e Ginevra).
"... invece che alla fine la situazione ... diciamo alla fine della giocata il risultato è questo" (Riccardo).
"*... e cercare di eliminare delle cose in più, così può diventare più semplice il testo. Se riduci a volte è più semplice*" (Federico).

Le osservazioni dell'insegnante

Nelle trasformazioni i bambini hanno preferito il discorso indiretto e, in generale, l'uso del tempo passato; hanno inoltre inserito termini che mettono maggiormente in risalto l'obbligatorietà di alcune condizioni.
Di solito i testi rielaborati presentano un linguaggio più immediato e più vicino al modo di esprimersi dei bambini.
L'idea di riscrivere il testo per aiutare gli altri a capirlo meglio è stata molto stimolante; inoltre, nel lavorare per raggiungere questo obiettivo, gli allievi si sono resi conto che in questo modo riuscivano a fare un'analisi più approfondita della situazione e in tal modo sarebbe stato più facile trovare la soluzione.

La documentazione

Testo originale	**Testo modificato dagli alunni**
INVOLTINI (Cat. 3, 4, 5) 20°RMT Finale La signora Tina ha ospiti a pranzo e così ha acquistato 23 fettine di carne con le quali vuole preparare due tipi di involtini. Per confezionare gli involtini, dispone su ciascuna fetta di carne una fettina di formaggio oppure una piccola salsiccia, infine li arrotola e li chiude utilizzando degli stecchini. Per poter distinguere un tipo di involtino dall'altro, la signora Tina utilizza due stecchini per quelli al formaggio ed uno solo per quelli alla salsiccia. Alla fine della preparazione ha usato 36 stecchini. **Quanti involtini alla salsiccia ha preparato la signora Tina?** **Spiegate il vostro ragionamento.**	***INVOLTINI*** La signora Tina ha persone a pranzo e così ha comprato 23 fettine di carne e ci vuole preparare due tipi di involtini. Per preparare gli involtini appoggia su ogni fetta di carne una fettina di formaggio oppure una piccola salsiccia, infine li gira e li chiude utilizzando degli stecchini. Per poter riconoscere un tipo di involtino dall'altro usa 2 stecchini per quelli al formaggio ed uno solo per quelli alla salsiccia. Alla fine della preparazione ha usato 36 stecchini. **Quanti involtini alla salsiccia in tutto?**
VENDITA DI DOLCI (Cat. 3, 4, 5) 21° RMT - II Prova La classe di Amelia ha organizzato una vendita di dolci. Vengono vendute crostatine a 3 euro l'una e tortine a 4 euro l'una. A fine giornata Amelia osserva che sono state vendute sia crostatine che tortine e che sono stati incassati in tutto 33 euro.	***VENDITA DI DOLCI*** La classe di Amelia organizza una vendita di dolci, tra cui ci sono tortine e crostatine; le crostatine costano 3 euro l'una, invece le tortine costano 4 euro. Finita la vendita l'incasso complessivo è di 33 euro.

Quante crostatine e quante tortine può aver venduto la classe di Amelia? Spiegate il vostro ragionamento.	**Quante crostatine e quante tortine può aver venduto la classe di Amelia**?

Dall'esperienza: sviluppi futuri

Nel riscrivere il testo del problema "Vendita di dolci" in realtà è stata trascurata un'informazione apparentemente insignificante "*sono state vendute sia tortine che crostatine*", ma importante ai fini della risoluzione, dato che esclude la possibilità che siano state vendute solo crostatine: questo è stato argomento di una riflessione collettiva. Un altro elemento di indagine potrebbe derivare dall'osservazione che sui testi dei bambini non viene riportata la richiesta di spiegare il ragionamento. Perché? Se gli alunni, nel corso delle prove e degli allenamenti, eseguono sempre questa parte del compito, è ormai diventata per loro una consuetudine? Oppure non ne sentono il bisogno e spiegano solo perché in presenza della richiesta?

Il lavoro iniziato dovrà proseguire in futuro e sarà svolto sistematicamente, poiché analizzare il testo, smontarlo e rielaborarlo attraverso l'uso del proprio linguaggio è l'unico modo che può consentire di comprendere a pieno la situazione presentata e di poter riuscire a risolverla. Questo ha una maggiore efficacia se viene fatto collaborando con i compagni perché è con l'ascolto degli altri, con la comprensione delle difficoltà, dei dubbi o delle spiegazioni dei coetanei, con la necessità di farsi capire, che si realizza il processo di crescita, si rafforzano le competenze linguistiche e la capacità di dare ordine e chiarezza ai propri pensieri; si compie un percorso che porta al raggiungimento di competenze sociali oggi indispensabili.

4. Capire i problemi... disegnando è più facile! *(a cura di Serena Guerri e Sara Missanelli)*

Sempre più frequentemente abbiamo a che fare con studenti di scuola secondaria di primo grado (categorie 6-8) che, di fronte ad un problema, si affidano agli algoritmi del calcolo scritto, trovando molta difficoltà a riflettere sul testo, ad utilizzare un linguaggio appropriato, a sviluppare strategie personali e senso critico.

La mancanza di riflessione critica è da attribuire a più cause, fra le quali sicuramente l'abitudine ad eseguire meccanicamente gli algoritmi di calcolo attribuendo importanza al risultato piuttosto che al processo, ma anche la mancata promozione nella pratica didattica di attività in cui si dedichi un'adeguata attenzione al testo di un problema, alla sua formulazione e al modo in cui gli allievi spiegano il procedimento risolutivo, stimolando fra loro un confronto ed una messa in comune.

Gli studenti che hanno sviluppato senso critico sono abituati a fare attenzione al contesto in cui devono operare e a porsi delle domande, aspettandosi naturalmente che i risultati siano plausibili con quelli attesi. Chi, invece, non è abituato a riflettere e a porsi domande si trova privo di "strumenti" di fronte a questo tipo di attività.

Nell'esperienza che descriviamo, relativa al problema "*Barattolo di fagioli*" (25.II.15), alcune difficoltà si sono verificate proprio nel momento in cui alcuni allievi hanno cercato di spiegare ai compagni la strategia utilizzata nella risoluzione del problema. Tuttavia, poiché si è lavorato in gruppo, si è anche riscontrato che gli studenti non si sono scoraggiati, ma si sono dati da fare per aiutarsi l'un l'altro in questo compito.

Il problema

BARATTOLO DI FAGIOLI (Cat. 8, 9, 10) 25° RMT – II Prova

Marco chiede al suo amico Carlo il numero esatto di fagioli contenuti in un barattolo di vetro, sapendo che:

- il numero cercato è compreso fra 1400 e 1700;
- se si raggruppano i fagioli per 2 ne avanza sempre uno;
- se si raggruppano i fagioli per 3, i mucchietti formati sono completi;
- se si raggruppano i fagioli per 5 ci vorrebbero altri 3 fagioli per completare i mucchietti;
- se si raggruppano i fagioli per 7 alla fine avanzano 5 fagioli.

Qual è il numero dei fagioli contenuti nel barattolo?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Attività svolta

Nella risoluzione del problema gli studenti, che hanno lavorato a gruppi, hanno privilegiato strategie coinvolgenti i concetti di multiplo e divisore. La quarta e quinta condizione del testo hanno rappresentato un ostacolo relativamente alla comprensione di quanto richiesto. Dall'analisi degli elaborati degli alunni abbiamo potuto notare che, per semplificare il testo e visualizzare meglio le richieste, gli alunni hanno utilizzato rappresentazioni grafiche di vario genere, per poi fare uso di linguaggi più formali, fino ad arrivare ad esprimersi con il linguaggio aritmetico dei numeri e operazioni. Per avere un quadro chiaro della situazione-problema hanno dapprima disegnato tutti i raggruppamenti richiesti (fig 1-2); per comprendere il significato della quarta condizione hanno riprodotto il loro ragionamento mediante un disegno (fig 3); successivamente sono passati all'utilizzo di simboli letterali (fig. 4-5); infine hanno scritto l'elenco dei numeri, cancellando di volta in volta quelli che non rispettavano le caratteristiche richieste (fig. 6), ed hanno effettuato l'operazione (fig. 7) per arrivare al risultato. Questa analisi ha rivelato la consapevolezza da parte degli studenti di non padroneggiare con sicurezza il concetto di “divisione con resto” e di curare in modo superficiale la comprensione del testo e delle richieste. La fase di correzione collettiva ha fornito all’insegnante l’opportunità di porre attenzione sul linguaggio utilizzato nel testo, di rivedere e approfondire il concetto importante di “resto” e di valorizzare i diversi tipi di procedure di risoluzione.

Conclusioni
Gli alunni hanno partecipato all’attività dimostrando un evidente interesse. Inizialmente sono sembrati un po’ spiazzati dalla richiesta del problema (*“ma come si fa???... troppi numeri!... non è possibile!!!... non ce la faremo mai!”*), poi sono apparsi entusiasti di riflettere su questioni apparentemente scontate come l’analisi del testo del problema.
Sentirsi responsabili di un lavoro di gruppo, relazionarsi con i compagni accettando le critiche, collaborare per raggiungere un obiettivo comune, superare la presunzione della correttezza della propria posizione e tollerare le opinioni altrui, spiegare i propri ragionamenti e cercare di convincere gli altri a condividerli sono stati obiettivi importanti che ciascun studente ha raggiunto mediante un personale contributo e svolgendo un proprio compito.
La curiosità di scoprire quale altra possibile strategia avrebbero potuto trovare i compagni è stata accompagnata da una sana competizione.
Tenendo presente i tempi d’attenzione che generalmente sono limitati, possiamo affermare che gli allievi hanno dimostrato capacità d’attenzione superiori a quanto accade nello svolgimento di una generica lezione frontale. È stata un’esperienza che li ha coinvolti e resi consapevoli dell’importanza di porre attenzione anche alla forma del testo ed al linguaggio utilizzato. Valutando quindi ogni variabile, è stata questa un’attività che ha confermato l’enorme bisogno di alternare metodi didattici tradizionali con opportuni momenti di confronto e riflessione.

5. L’ora di matematica... per lo sviluppo ed il potenziamento delle capacità comunicative *(a cura di Patrizia Sabatini)*

Le Indicazioni Nazionali hanno tra i principi ispiratori il rafforzamento della trasversalità tra le aree disciplinari e il superamento delle frammentazioni e dell’impostazione trasmissiva dei saperi; la matematica, tra le fondamentali competenze da raggiungere, è chiamata a contribuire “*a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri*”. Particolarmente adatte a tale proposito sono le attività laboratoriali e di problem solving; la mancanza di un percorso predefinito che gli alunni possano seguire per portare a termine il compito richiesto favorisce, inoltre, attività di ricerca e elaborazione personale e collettiva.

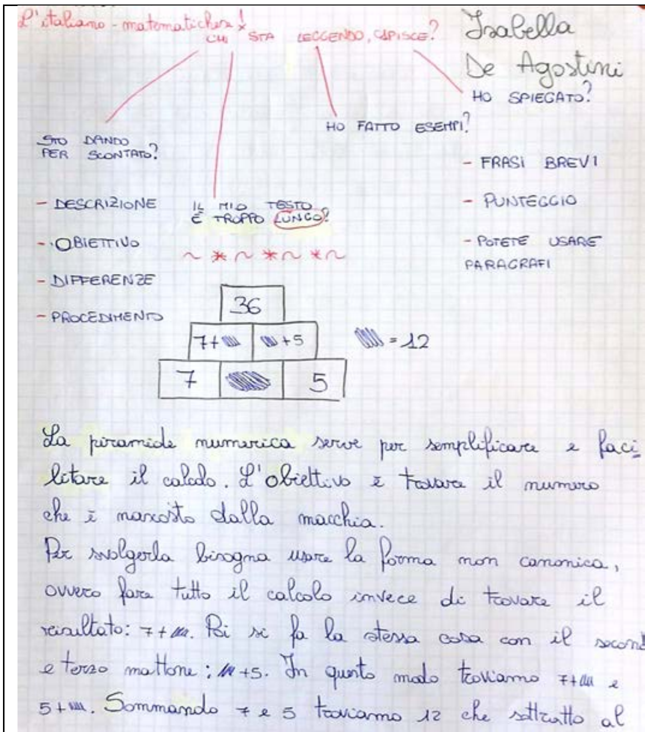
Nella scuola secondaria di primo grado "*Giovanni Papini*" di Castelnuovo Berardenga (Siena), la possibilità di lavorare sullo sviluppo ed il potenziamento delle capacità comunicative con maggiore sicurezza e consapevolezza mi è stata data dalla collaborazione di Monica Marzini, mia collega di lettere, che per circa sei settimane si è messa a disposizione nell'ora di potenziamento per aiutare gli alunni a riconoscere le difficoltà di esprimersi oralmente e nello scritto ed intervenire su di esse.
I problemi dell'ARMT stimolano la mobilizzazione dei saperi disciplinari e, a differenza di altre competizioni di matematica, sono adatti a lavorare sia sulla comprensione del testo (con l'individuazione degli ostacoli linguistici), sia sull'elaborazione della risposta, in cui il particolare impegno è sollecitato dalla richiesta: "*Mostrate come avete trovato la vostra risposta*".

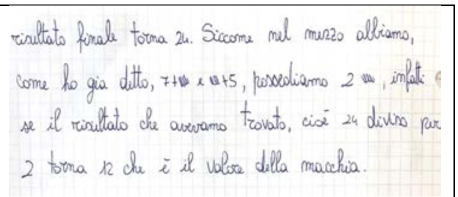
Attività in classe

Data l'esiguità delle ore a disposizione in compresenza, la mia collega ed io abbiamo deciso di lavorare sul miglioramento delle capacità comunicative necessarie per argomentare la risposta data ai problemi, potenziando l'uso della lingua naturale scritta e parlata e il ricorso ad altri registri comunicativi.
1) La prima fase è stata l'individuazione da parte mia di un problema adatto. Poiché l'obiettivo di quest'attività si voleva incentrare sull'elaborazione della risposta, ho scelto per la classe di categoria 6 in cui insegno, il problema "*Apparecchiare la tavola*" (Cat. 5-6), 25.F.07, il cui testo non mi è parso presentare particolari difficoltà di comprensione e dove può essere facilmente verificata la correttezza o meno della risposta data.
2) Il problema è stato quindi somministrato per una decina di minuti ai singoli alunni, in modo da permettere loro un'attenta lettura e di entrare nella situazione problematica. Successivamente, per la risoluzione e la stesura della risposta, il lavoro è stato svolto a coppie.
3) Prima di passare alla discussione collettiva, ogni elaborato prodotto è stato fotografato e molte spiegazioni sono state lette da uno degli autori e da me audio registrate con il tablet. In questo modo ho ottenuto una facile e fedele documentazione che mi potrebbe aiutare in futuro a rielaborare l'esperienza, ma che, soprattutto, mi è servita a sottolineare l'importanza dell'attività didattica che si stava svolgendo ed ha incentivato un ascolto attento tra pari. Questa fase, nonostante abbia creato negli alunni un leggero imbarazzo per la registrazione, ha messo in luce quanto fosse difficile far comprendere agli altri i procedimenti eseguiti; inizialmente, infatti, gli allievi tendevano a indicare solamente le operazioni che avevano portato alla risposta, trascurando le considerazioni fatte. In questa fase, la mia collega di lettere ha allora insistito, anche con la ricerca di parole chiave, sulla frase: "*Mostrate come avete trovato la risposta*" e su come sia necessario presentare a chi legge non solo i calcoli, ma "far vedere" il ragionamento che è stato fatto.
4) Successivamente, dato che in alcuni elaborati compariva solo la risposta corretta senza alcuna motivazione e in altri la risposta era seguita dalle operazioni per verificarne la correttezza ma il procedimento rimaneva oscuro, gli autori di questi elaborati sono stati invitati alla lavagna per spiegare come erano giunti alla risposta e sono stati anche sollecitati ad esprimersi nel modo che ritenevano più appropriato. Sono così emerse due principali strategie: l'uso di disegni per rappresentare gli ovetti e la risoluzione per tentativi e aggiustamenti.
E'stato interessante notare come gli alunni che non sono abituati a lavorare in matematica in modo autonomo e creativo tendevano a motivare la risposta presentando solo i calcoli, eventualmente accompagnati da poche parole, che spesso replicavano quanto già espresso con l'operazione (ad es.: "*Ho moltiplicato 12 per 5*"). Un'altra osservazione emersa sul comportamento degli allievi è che preferivano non motivare la risposta ottenuta con strategie che non riconoscevano come "ortodosse" (per esempio, l'uso di rappresentazioni grafiche), oppure presentare un elaborato in bianco piuttosto che mostrare il lavoro iniziato, e quindi solo parziale, che erano riusciti a svolgere.
5) Una volta passate in rassegna le varie strategie risolutive, incluso l'uso delle procedure per tentativi, la mia collega si è impegnata nell'individuazione di alcuni punti critici che sono emersi nello spiegare con il linguaggio naturale la strategia seguita.
Nell'argomentazione scritta e orale uno degli ostacoli più ricorrenti alla comprensione è l'assenza del soggetto nella frase: in italiano, e soprattutto nel parlato, infatti, il contesto del discorso e la desinenza del verbo permettono spesso di sottintendere il soggetto, mentre nell'argomentazione, soprattutto matematica, tale omissione può generare in chi ascolta o in chi legge fraintendimenti che ne compromettono la comprensione.
In questa fase la mia collega ha ritenuto utile proporre alla classe anche l'analisi logica di alcune semplici frasi, come: "*Mauro* (soggetto) *ha apparecchiato* (predicato verbale) *la tavola* (complemento oggetto) ", in modo da spronare gli alunni a riconoscere se la frase risulta costituita dagli elementi essenziali e quindi indurli alla riflessione e alla rielaborazione del testo.
Il confronto tra le varie risposte date e la discussione collettiva sono poi proseguite con la ricerca di ulteriori ostacoli alla comprensione e con la condivisione di alcune indicazioni per realizzare testi argomentativi chiari. Gli alunni, soprattutto a questa età, hanno difficoltà a porsi nel ruolo di chi legge o ascolta, per cui è fondamentale domandarsi sempre se il destinatario del messaggio è in grado di capire ciò che si vuole esprimere. Per rendere più chiara un'argomentazione è, inoltre, utile formulare frasi non troppo lunghe e, se si usano delle operazioni, è

auspicabile per ogni passaggio spiegare perché lo si è fatto e quali sono gli obiettivi. In alcuni contesti per aumentare la comprensione è utile fornire degli esempi, o avvalersi dell'uso di disegni, connettori grafici, tabelle e schemi.

6) Infine, tenendo presenti le indicazioni emerse durante l'attività, è stato assegnato agli alunni il compito di redigere un testo regolativo[75] sulle "piramidi numeriche della somma"[76], sulle quali avevo in precedenza lavorato in classe. Un esempio di testo prodotto da un'alunna di cat. 6 è riportato sotto.





(La piramide numerica serve per semplificare e facilitare il calcolo. L'obiettivo è trovare il numero che è nascosto dalla macchia.
Per svolgerla bisogna usare la forma non canonica, ovvero fare tutto il calcolo invece di trovare il risultato 7+■. Poi si fa la stessa cosa con il secondo ed il terzo mattone ■.+5. In questo modo troviamo 7+■.e 5+■. Sommando 7 e 5 troviamo 12 che sottratto al risultato finale torna 24. Siccome nel mezzo abbiamo, come ho già detto, 7+■ e ■+5, possediamo 2■, infatti ~~se~~ il risultato che avevamo trovato, cioè 24, diviso per 2 torna 12 che è il valore della macchia)

La produzione degli elaborati, oltre ad impegnare gli allievi sul piano linguistico, ha indotto la riflessione sui propri processi mentali ed ha favorito la messa a fuoco delle relazioni esistenti tra i numeri scritti nei mattoni. Il percorso, iniziato in ambiente aritmetico, ma volto allo sviluppo del pensiero pre-algebrico, continuerà durante l'anno scolastico con un graduale lavoro di introduzione alle equazioni sul problema "*Piramidi di mattoni (II)"* (Cat. 6, 7, 8, 9, 10), 21.I.12.

Conclusioni

I problemi del RMT offrono lo spunto per lavorare su competenze trasversali, promuovono le abilità sociali, la formazione di legami cooperativi e del gruppo classe. La necessità di lavorare insieme comporta, inoltre, un confronto fra coetanei, favorendo attività di ascolto e il miglioramento della capacità di esporre e di discutere con i compagni i ragionamenti seguiti e le procedure utilizzate. Il confronto con la docente di lettere su quanto inizialmente scritto dagli alunni ha portato alla condivisione di indicazioni utili per curare l'espressione scritta e orale. In particolare, l'attività ha permesso agli allievi di riconoscere ed intervenire su quelle che sono le principali difficoltà nella stesura di un testo argomentativo corretto ed ha fornito esempi di come si possa dare ad esso maggiore chiarezza ed esaustività con l'uso di vari registri comunicativi.

Il lavoro in compresenza con la collega di lettere, oltre ad avermi dato la possibilità di osservare attentamente il suo modo di fare lezione e di prendere alcuni preziosi spunti (la ricerca delle parole chiave, l'analisi logica delle frasi, ... l'avere pazienza!), ha portato alla realizzazione di un'attività dove l'italiano e la matematica si intrecciano tra loro, evitando che gli alunni abbiano una visione delle discipline a "comparto stagno". La stesura e la lettura dei testi prodotti ha, inoltre, permesso ad alcuni allievi timorosi della matematica di mostrarmi i loro punti di forza ed acquisire anche una maggiore disinvoltura nel relazionarsi con me.

[75] Testo regolativo: ha funzione informativa, è caratterizzato da una struttura schematica e frasi semplici. Esempi di testi regolativi sono le regole dei giochi, le istruzioni per l'uso, le ricette, ecc.

[76] Cfr. G. Navarra, A. Giacomin, *Le piramidi di numeri,* Progetto ArAl, Unità 5, Pitagora Editrice, Bologna 2003

6. Facile con il Rally! *(a cura di Brunella Brogi)*

L'Istituto Comprensivo "Il Pontormo", nel quale lavoro, si trova a Carmignano, in provincia di Prato. Come altre scuole dell'area pratese, si caratterizza per essere frequentato da molti alunni non italofoni, in particolare di nazionalità cinese che, spesso, vengono inseriti nelle classi durante il corso dell'anno scolastico, appena arrivati in Italia. Da anni tali scuole si avvalgono della collaborazione dei "facilitatori linguistici", ovvero professionisti che aiutano gli studenti non italofoni nell'apprendimento della lingua italiana e supportano i docenti nel loro lavoro quotidiano in classi plurilingue.

Nell'anno scolastico 2016-'17, con la mia classe II B (categoria 7) della scuola secondaria di I grado "Il Pontormo", ho aderito al progetto "*Per una scuola di tutti e di ciascuno. Apprendimento linguistico cooperativo per il successo formativo*", proposto dai facilitatori linguistici Dott.ssa Corinna Poggianti e Dott. Alan Pona della Cooperativa "Pane e Rose" di Prato, che da anni si occupa di facilitazione linguistica e didattica inclusiva.

Il progetto ha previsto una breve formazione dei docenti interessati e un'attività nelle classi, svolta con una didattica di tipo laboratoriale, in modalità di *cooperative-learning,* secondo il "metodo ALC" (Apprendimento Linguistico Cooperativo). Si tratta di un metodo, sperimentato da alcuni anni nelle scuole pratesi, che nasce dal presupposto che in un contesto scolastico plurilingue un clima di classe positivo, ricco di scambi significativi di collaborazione, aiuto e condivisione tra gli allievi, stimoli e faciliti gli apprendimenti. Esso integra i principi dell'Apprendimento Cooperativo, intervenendo sulla costruzione del gruppo e sulla promozione di un clima positivo in classe, con quelli della Facilitazione Linguistica, lavorando sulle abilità linguistico-comunicative per accedere alle conoscenze disciplinari con una visione interculturale.

Lo scopo del progetto era quello di *semplificare* il testo di un argomento disciplinare, al fine di renderlo fruibile agli alunni non italofoni, per i quali il linguaggio, orale o scritto, costituisce l'ostacolo maggiore nello studio di tutte le discipline. Si tratta, infatti, di un linguaggio specifico, dalle caratteristiche diverse rispetto a quello della comunicazione di base; ciò incide sull'acquisizione delle competenze e impone una rivalutazione della tempistica nonché la scelta di metodologie differenti. La semplificazione linguistica consiste nella riformulazione del testo, non più scritto con il linguaggio specifico delle discipline, ma in un linguaggio più vicino alla comunicazione di base, con una rielaborazione che ne aumenti la comprensibilità, anche tramite ridondanze, e secondo un'organizzazione logico-concettuale che ne faciliti l'elaborazione cognitiva e la comprensione.

Attività svolta in classe

Io e la collega Maria Francesca Zini, insegnante di matematica della classe II D, abbiamo pensato di usare alcuni problemi del RMT per l'attività di semplificazione linguistica da svolgere in classe, perché si prestano bene ad un'attività di tipo laboratoriale e di *cooperative-learning*, ma hanno una complessità testuale, spesso elevata, per gli alunni non italofoni. E' nato il percorso *"Facile con il Rally",* per il quale erano inizialmente previste due attività in classe, di due ore ciascuna, secondo il seguente schema, formulato dalla Dott.ssa Poggianti, attinente al modello ALC:

ATTIVITA' RELAZIONALE 15 minuti	• Breve introduzione sull'Apprendimento Cooperativo • Attività per la formazione dei gruppi: "Trova i compagni di figura". Si prevede la costituzione di 5 gruppi di 4 allievi attraverso il riconoscimento di figure geometriche e loro proprietà.
ATTIVITA' DIDATTICA 90 minuti	• Introduzione su cosa significa <u>semplificare</u> e <u>facilitare</u> un testo. Si consegna un decalogo a ciascun gruppo (decalogo a cura della facilitatrice). Lettura del "Decalogo del semplificatore" con esemplificazioni. • Si consegna ad ogni gruppo il testo di un problema del RMT (i problemi, scelti dalle insegnanti, sono diversi da gruppo a gruppo). Si individuano i seguenti ruoli: - *Lettore*: legge ad alta voce il testo del problema - *Scrittore*: scrive il testo semplificato - *Puntiglioso*: individua le parole "difficili" nel testo - *Disegnatore*: disegna gli elementi che possono facilitare la comprensione del testo • Ogni gruppo dovrà arrivare a formulare una versione semplificata del testo del problema. • In plenaria, ogni gruppo esporrà il proprio lavoro spiegando come ha fatto a semplificare il testo.
ATTIVITA' DI FEEDBACK 15 minuti	• "La prima parola che mi viene in mente!": si fa scrivere su un foglio e poi si legge ad alta voce.
ATTIVITA' RELAZIONALE 15 minuti	• Attività sull'utilizzo dell'intelligenza visuo-spaziale: "Tutti in riga!" (con figure geometriche) (preparazione del testo a cura della facilitatrice).
ATTIVITA' DIDATTICA 90 minuti	• Si ricostituiscono i gruppi dell'incontro precedente. • Si consegna a ogni gruppo il testo di un problema semplificato da un altro gruppo nell'incontro precedente. Si individuano i seguenti ruoli: - *Lettore*: legge ad alta voce il testo semplificato - *Scrittore*: scrive le procedure e i tentativi di soluzione - *Calcolatore*: esegue i calcoli (con la calcolatrice) - *Controllore*: sottolinea nel testo semplificato i dati utili del problema, controlla le procedure e i calcoli, controlla che si stia rispondendo alla domanda posta • Ogni gruppo dovrà arrivare alla soluzione del problema.
ATTIVITA' DI FEEDBACK 15 minuti	• Si consegna una scheda di riflessione metacognitiva (a cura della facilitatrice) sui ruoli, sulla capacità di collaborare all'interno del gruppo, sull'efficacia del testo semplificato per permettere a tutti di accedere al contenuto.

I problemi scelti, su suggerimento della collega Zini, sono stati i seguenti:

- *La ricompensa* (Cat. 5, 6, 7) – 17° RMT.II.10;
- *Il vigneto* (Cat. 7, 8) – 17° RMT.II.15;
- *Giochi sulla spiaggia* (Cat. 5, 6, 7) – 18° RMT.II.11;
- *Il prato di zio Francesco (I)* (Cat. 7, 8) – 18° RMT.II.14;
- *Gettoni in triangoli* (Cat. 5, 6, 7) – 18° RMT.F.9

<u>Primo incontro</u>. Oltre a me era presente in classe la facilitatrice linguistica dott.ssa Poggianti. E' stata svolta l'attività relazionale per la formazione dei gruppi. Tale formazione è stata decisa da me, affinché gli alunni con bisogni educativi speciali, linguistici o di altra natura, fossero equamente distribuiti. Sono stati formati cinque gruppi di quattro elementi ciascuno. Ad ogni alunno è stato distribuito, non casualmente, un foglietto con una proprietà di una figura piana e ciascuno ha dovuto cercare, muovendosi nella stanza, gli altri componenti del gruppo, riconoscendo altre proprietà della figura scritte sui foglietti mostrati dai compagni.

Successivamente, ad ogni gruppo è stata distribuita una copia del testo di un problema, per lavorare alla sua semplificazione linguistica in base al "*Decalogo del semplificatore*" (riportato sotto) che è stato brevemente presentato dalla facilitatrice. Una copia del decalogo è stata poi fornita a ciascun gruppo.

IL DECALOGO DEL SEMPLIFICATORE

1. USARE PAROLE SEMPLICI (PER ES. "LUCA POSSIEDE"→"LUCA HA").
2. NON TUTTE LE PAROLE VANNO SOTITUITE: QUANDO LE PAROLE SONO IMPORTANTI, DOBBIAMO LASCIARLE E METTERE DELLE IMMAGINI (PER ES. "PERIMETRO").
3. USARE FRASI BREVI.
4. RIPETERE SEMPRE IL SOGGETTO IN OGNI FRASE.
5. USARE VERBI ATTIVI AL PRESENTE O AL PASSATO PROSSIMO: NON USARE IL GERUNDIO (AD ES. "VEDENDO UN UOMO"→"PERCHE' AVEVA VISTO UN UOMO").
6. QUANDO CI SONO PIU' FRASI DA COLLEGARE, CERCHIAMO DI UNIRLE SEMPLICEMENTE (PER ESEMPIO CON *MA, PERO', QUINDI, E, ALLORA*).
7. PENSARE ALLE IMMAGINI CHE POTREBBERO RENDERE PIU' COMPRENSIBILE IL TESTO ED ACCOMPAGNARE LE PAROLE DIFFICILI.
8. SCRIVERE IN STAMPATO MAIUSCOLO, IN MODO CHIARO E ORDINATO.

All'interno di ogni gruppo, gli allievi si sono attribuiti liberamente i ruoli di *lettore*, *scrittore*, *puntiglioso* e *disegnatore*. Tutti hanno lavorato con entusiasmo e la discussione è stata animata. L'attenzione non è stata posta sulla soluzione del problema (non era questo il compito dell'attività) ma sul significato delle parole, delle quali occorreva trovare sinonimi di più facile comprensione per i compagni non italofoni. In realtà, anche alcuni alunni italiani hanno avuto difficoltà a comprendere parti del testo. In particolare mi ha colpito una ragazza con disturbo specifico dell'apprendimento che ha cercato, con varie forme di comunicazione, di far capire il testo del problema "*Il vigneto*" al compagno cinese e, al tempo stesso, ha eseguito i disegni sul testo semplificato (cfr. ALLEGATO 1). Quando alla fine dei suoi sforzi, le è sembrato che il compagno avesse capito, con gli occhi che le brillavano ha esclamato: *"Che soddisfazione Prof., quando si spiega una cosa e l'altro capisce!"*.

Per mancanza di tempo, non è stata svolta l'attività di feedback inizialmente prevista.

<u>Secondo incontro</u>. Dopo l'attività relazionale, ogni gruppo si è ricostituito come nel primo incontro e ha lavorato su un problema del RMT che non ha semplificato la volta precedente, usando la fotocopia del quaderno di lavoro di un compagno. Lo scopo, questa volta, era quello di risolvere i problemi, verificando la qualità del lavoro di semplificazione svolto da un altro gruppo. Sono emerse subito delle criticità: nella semplificazione eseguita dai compagni, in alcuni casi sono stati omessi dei dati, quindi il problema è risultato incomprensibile o non poteva essere risolto. E' stato allora necessario sospendere la fase risolutiva e discutere tutti insieme. Ad ogni gruppo è stata distribuita una fotocopia con il testo originale del problema, che è stato letto ad alta voce e confrontato con il testo semplificato, così da verificare la correttezza della semplificazione effettuata. La presenza in classe dell'insegnante di sostegno, laureata in lettere, Prof.ssa Francesca Falugiani ha costituito un'importante risorsa per l'attività di revisione in atto. In alcuni casi è stato necessario apportare delle modifiche al lavoro precedentemente svolto, come ad esempio per il problema "*La ricompensa"* (cfr. ALLEGATO 2). Durante questa discussione collegiale, uno degli alunni cinesi, che non ha preso parte al confronto, ha lavorato silenziosamente alla soluzione, sia pure parziale, del problema semplificato che era stato attribuito al suo gruppo ("*Il prato di zio Francesco"*).

Anche questa volta non è stato possibile dedicare del tempo all'attività di feedback.

<u>Terzo incontro</u>. Si è reso necessario dedicare altro tempo a questo percorso, al fine di permettere a tutti i gruppi di arrivare alla soluzione del problema assegnato la volta precedente. Dopo il lavoro risolutivo, un componente di ogni gruppo ha esposto il procedimento seguito e la soluzione trovata.

Il problema *"Il vigneto"* è risultato il più difficile da risolvere. Poiché il gruppo a cui era stato attribuito non lo aveva risolto, ho distribuito una copia del corrispondente testo semplificato a ogni gruppo, affinché tutti fossero coinvolti nella soluzione che è arrivata solo dopo che ho aiutato gli alunni nella comprensione del testo.

Conclusioni

In questa esperienza i problemi del RMT hanno coinvolto gli alunni in due tipi di situazioni problema, di carattere linguistico prima e di carattere matematico poi, confermando la loro ricchezza, sul piano dei contenuti disciplinari e delle risorse didattiche che offrono. Prima di affrontare e risolvere ciascun problema, occorreva essere tutti in grado di poterlo comprendere. Gli alunni hanno vivacemente collaborato, con lo scopo di permettere ai compagni con difficoltà linguistiche o cognitive di accedere al testo e, quindi, al problema matematico. La lingua scritta, presente nel testo, tuttavia, non ha rappresentato un ostacolo soltanto per gli alunni non italofoni. Come evidenziato da alcune semplificazioni testuali incomplete o non fedeli al testo originale, anche molti alunni italofoni hanno avuto difficoltà di accesso al lessico. Questa situazione, che giustifica la mancata soluzione del compito matematico, come riscontrato in altre esperienze svolte con i problemi del RMT, è da ricondurre spesso alla lettura superficiale, ma anche al limitato vocabolario personale di molti alunni. Ancora una volta ho invitato gli alunni a una riflessione sull'importanza della comprensione del testo, e sull'attivazione di tutte le strategie personali per farlo.

Questa esperienza ha quindi mobilitato le competenze relazionali e linguistiche degli alunni, prima ancora di quelle matematiche. Per fare matematica occorreva essere tutti in grado di parlare la stessa lingua, fosse questa verbale, iconica, non strutturata, gestuale. In una classe plurilingue l'inclusione di tutti e delle competenze di ciascuno ha permesso il fare matematica.

I problemi del RMT, per la loro natura, hanno permesso la realizzazione di un'esperienza didattica formativa, interdisciplinare e inclusiva.

ALLEGATO 1

IL VIGNETO (Cat. 7, 8) 17.II.15 **Testo originale**

E' autunno, il tempo della vendemmia. Roberto possiede un vigneto di 2 500 metri quadrati coltivato ad uva «merlot».Come ogni anno, deve portare la sua uva alla cantina locale. Questa accetta solo 150 quintali (1 quintale = 100 kg) per ettaro (10 000 m²) di uva «merlot».Roberto, quindi, deve sopprimere su ogni pianta i grappoli inutili in modo da consentire anche una maturazione ottimale dei rimanenti. Egli ha 500 piante di vite sul suo terreno. Sa che un grappolo maturo pesa in media tra 200 e 250 grammi.

Quanti grappoli può lasciare Roberto su ogni pianta per non superare i limiti imposti dalla cantina?Spiegate il vostro ragionamento.

Testo semplificato

ALLEGATO 2

<table>
<tr><th>Testo originale</th><th>Testo modificato dagli alunni</th></tr>
<tr><td>

LA RICOMPENSA (Cat. 5, 6, 7) 17.II.10

Al termine di un allenamento di minibasket, l'allenatore vuole distribuire il contenuto di un sacchetto di caramelle tra i bambini della sua squadra. Desidera che ciascun bambino ne riceva lo stesso numero.
Inizia la distribuzione dando una caramella a testa.
Dopo questo primo giro, ne fa un secondo, dando ancora una caramella a ciascuno.
Ma, subito prima di iniziare il terzo giro, si accorge che per completarlo gli mancano 5 caramelle. Decide allora di fermarsi e così gli restano 9 caramelle nel sacchetto.

Quante caramelle c'erano nel sacchetto prima della distribuzione?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

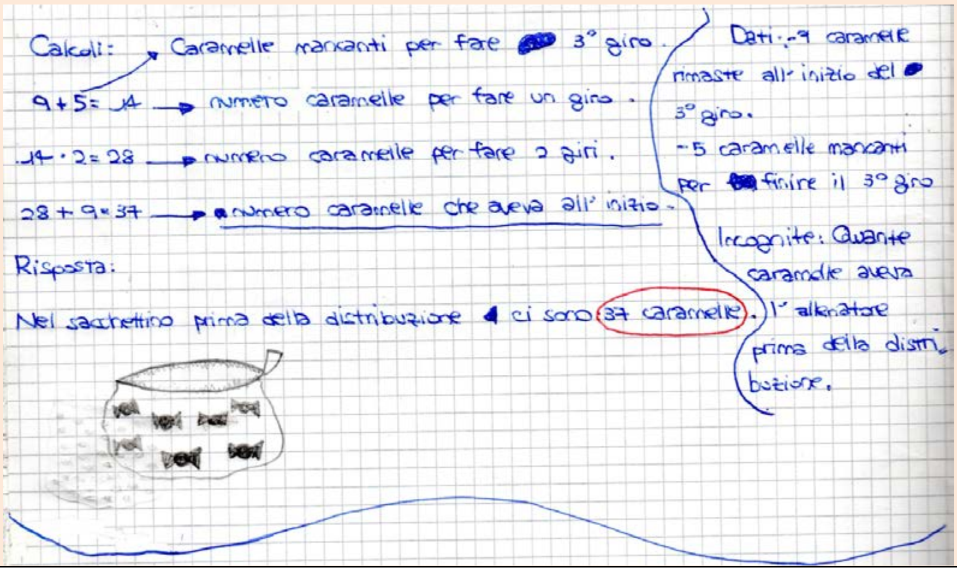
</td><td>

</td></tr>
<tr><td></td><td>

Modifica ulteriore del testo: "**non ci sono 5 caramelle per dare una caramella a ogni bambino**", in sostituzione di "**non ci sono caramelle per tutti**"

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Risoluzione



</td></tr>
</table>

(Dati*: 9 caramelle rimaste all'inizio del 3° giro; 5 caramelle mancanti per finire il 3° giro*
Incognite: Quante caramelle aveva l'allenatore prima della distribuzione.
Calcoli*:*
9+5 =14 → caramelle mancanti per fare il 3° giro
→ numero caramelle per fare un giro
14·2=28 → numero caramelle per fare 2 giri
28+9=37 → numero caramelle che aveva all'inizio
Risposta*:*
*Nel sacchetto prima della distribuzione ci sono **37 caramelle**)*

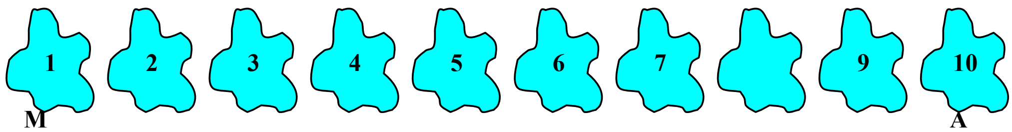
Appendice – Testi dei problemi citati *(nell'ordine in cui compaiono nei vari contributi)*

BIMBI GOLOSI (Cat. 5, 6) 14° RMT.II.8

Anna, Daniele e Alice si sono divisi un sacchetto di caramelle in modo da averne tutti lo stesso numero.
In poco tempo, però, ciascuno di loro ne mangia 14.
A questo punto, essi si rendono conto che, rimettendo insieme tutte le caramelle rimaste, il totale è uguale al numero di caramelle che ogni bambino aveva ricevuto al momento della spartizione.
Quante caramelle conteneva il sacchetto?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

LE POZZANGHERE (Cat. 3, 4) **17° RMT.II.3**

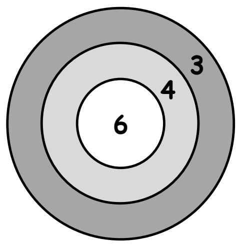
Martina e Alberto giocano sotto la pioggia e si divertono a saltare nelle pozzanghere d'acqua con i loro stivali di gomma.
Davanti alla loro casa si è formata una fila di 10 pozzanghere. Alberto, saltando, è già arrivato nell'ultima.
Propone a Martina di raggiungerlo seguendo le stesse regole che ha seguito lui: "Tra la pozzanghera dove sei e quella in cui poi salti, devono esserci sempre una o due pozzanghere, non di più. Non puoi tornare indietro".
Martina è nella prima pozzanghera.
Trovate e indicate tutti i modi che Martina può scegliere per raggiungere Alberto.



UNA BUONA MIRA (Cat. 3, 4, 5) 22° RMT.I.5

Marco ha appeso questo bersaglio alla porta della sua camera.
Oggi tira una alla volta tutte le freccette che ha e colpisce sempre il bersaglio (ogni freccetta nella zona 3 vale 3 punti, nella zona 4 vale 4 punti, nella zona 6 vale 6 punti).
Alla fine la situazione è questa:

- il numero di freccette che sono nella zona che vale 4 punti è uguale a quello delle freccette che sono nella zona che vale 3 punti
- nella zona che vale 6 punti ci sono 13 freccette.
- Il totale dei punti ottenuti è un numero compreso tra 107 e 118.



Quante freccette ci sono nel bersaglio?
Quanti sono esattamente i punti che Marco ha ottenuto?
Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

APPARECCHIARE LA TAVOLA (Cat. 5, 6) 25° RMT.F.7

Mauro, ogni sera, ha il compito di apparecchiare la tavola, ma a volte trova una scusa per non farlo.
La mamma allora gli propone un patto per i 25 giorni che mancano a Pasqua:
- *A Pasqua riceverai 3 ovetti per ogni giorno in cui hai apparecchiato la tavola e ne darai 12 a me per ogni giorno in cui non avrai svolto il tuo compito.*
A Pasqua, la mamma gli dice:
- *E' molto semplice, io non ti do nessun ovetto, ma nemmeno tu devi darne a me.*
Quanti sono i giorni in cui Mauro non ha apparecchiato la tavola durante questo periodo?
Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

GIOCHI SULLA SPIAGGIA (Cat. 5, 6, 7) 18° RMT.II.11

Oggi, sulla spiaggia, Anna, Bianca e Carla hanno giocato a bocce con i loro amici, Dario, Franco e Giorgio.
Alla fine del gioco, Dario ha ottenuto 4 punti, Franco 2 e Giorgio 3. Le bambine invece hanno totalizzato insieme 19 punti. In particolare:

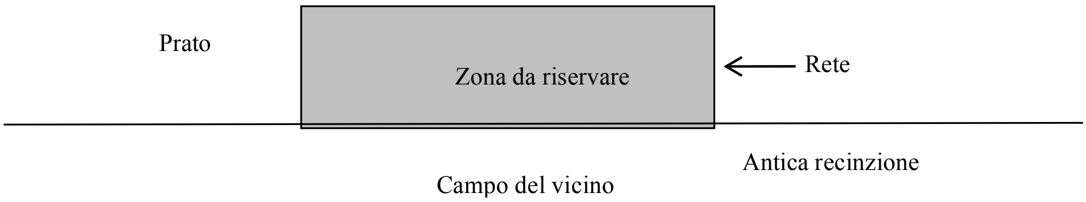
1. Anna ha realizzato lo stesso punteggio di uno dei bambini;
2. Bianca ha ottenuto il doppio dei punti di uno degli altri due bambini;
3. Carla ha ottenuto il triplo dei punti del bambino che resta.

Quanti punti può aver ottenuto ciascuna delle tre bambine?

Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

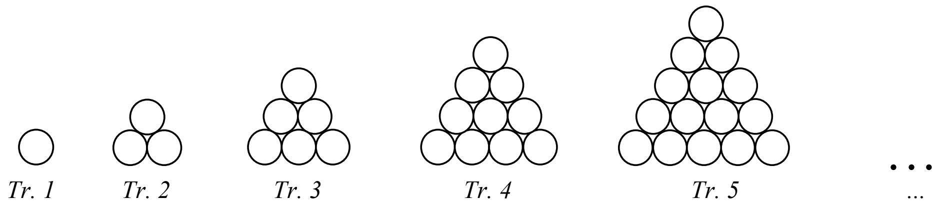
14. IL PRATO DI ZIO FRANCESCO (I) (Cat. 7, 8) 18° RMT.II.14

Zio Francesco possiede un prato che confina con il campo di un vicino; un'antica recinzione rettilinea separa le due proprietà. Per sperimentare una nuova semina, zio Francesco vuole riservare nel suo prato una zona rettangolare di 42 m^2 confinante con la proprietà del vicino (vedere la figura).
Per evitare che i suoi animali, che si spostano liberamente per il prato, vadano a calpestare la nuova piantagione, vuole sistemare una rete metallica che formi gli altri tre lati della zona rettangolare da riservare. Egli dispone di una rete lunga 20 m che vuole utilizzare tutta (vedere la figura). Per semplificare le misure delle lunghezze, desidera che siano espresse da numeri interi di metri.



Quali saranno le misure dei lati della zona rettangolare da riservare?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

GETTONI DI TRIANGOLI (Cat. 5, 6, 7) 18° RMT.F.9
Anna possiede una scatola con 120 gettoni tondi, tutti identici.
Li dispone sul tavolo e forma una successione regolare di "triangoli" nei quali i gettoni sono sistemati gli uni contro gli altri. Ecco i primi cinque triangoli:



Anna continua così e forma nuovi triangoli che hanno sempre una riga in più dei precedenti. Nel momento in cui ha finito uno di questi triangoli, si rende conto che la sua scatola è vuota e che ha utilizzato i 120 gettoni per fare tutti i triangoli.
Un po' più tardi, il suo fratellino Pierino passa davanti al tavolo e osserva le costruzioni fatte da Anna. Calcola poi il numero di gettoni di cui avrebbe bisogno per fare il triangolo successivo. Poiché non ci sono più gettoni nella scatola, disfa alcuni triangoli di sua sorella, utilizza tutti i gettoni dei triangoli che ha disfatto e finisce esattamente il triangolo che viene subito dopo quello che Anna aveva costruito per ultimo.
Quali sono i triangoli di Anna che Pierino potrebbe aver utilizzato completamente per costruire il suo?
Mostrate i dettagli dei vostri calcoli.