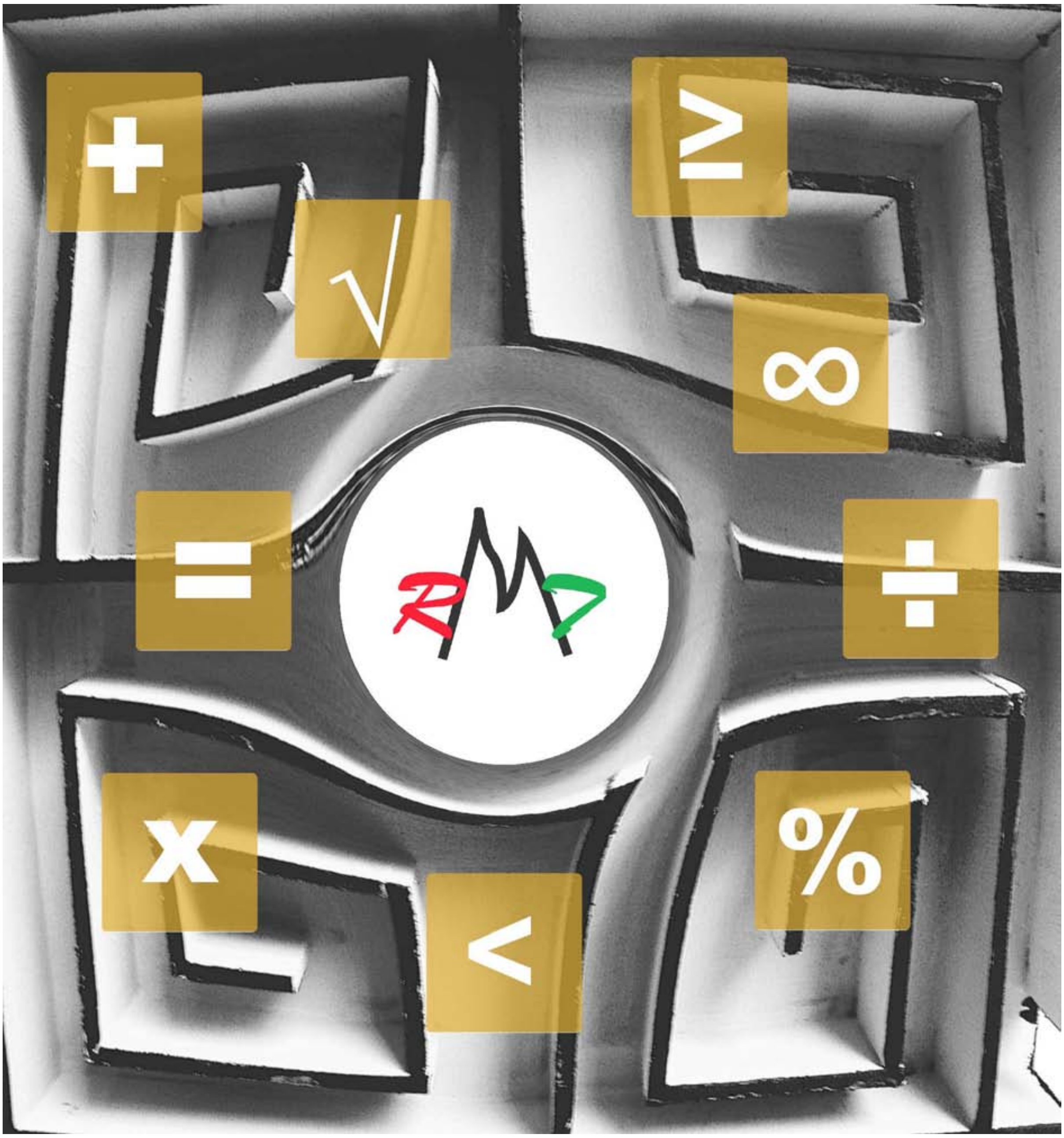
La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 5, janvier / gennaio 2017



Revue de l’Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell’Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.org

ISSN 2234-9596

TABLE DES MATIÈRES / INDICE

Numéro 5, janvier 2017/ Numero 5, gennaio 2017

F. Jaquet
Éditorial 3
Editoriale 4

Presentazione del numero 5
Présentation du numéro 6

Maria Felicia Andriani, Lucia Doretti, Maria Gabriella Rinaldi
Un esempio significativo di percorso circolare: "Bignè al cioccolato" 7
Un exemple significatif de parcours circulaire : "Éclairs au chocolat" 23

Bernard Anselmo, Michel Henry
Les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin, une ressource pour la formation des enseignants 39
I problemi del Rally Matematico Transalpino, una risorsa per la formazione degli insegnanti 53

Clara Guerrera
L'esperienza del RMT 61
L'expérience du RMT 67

Études / Approfondimenti

Michel Henry, Angela Rizza pour le groupe *Fonctions*
Les nombres de Monsieur Trapèze 73
I numeri del Signor Trapezio 85

Les posters présentés à la rencontre internationnale de Sedilo/
I poster presentati al convegno internazionale di Sedilo
Aosta, Franche-Comté, Puglia, Rozzano, Siena, L. Grugnetti-F. Jaquet 95

ÉDITORIAL : DE L'EXERCICE AU PROBLÈME

François Jaquet

Parmi ses devoirs de week-end, A., ma petite nièce actuellement en 4^{e} élémentaire (Cat 4), a passé près d'une heure en mathématiques : quatre opérations à effectuer en colonnes avec preuves, une reconnaissance de diviseurs de 120 et, enfin, la tâche suivante : *Écris les nombres de 20 à 60, entoure en jaune les multiples de 2 et en rouge les multiples de 3.*

Tout est allé très vite pour ce dernier exercice, en moins de cinq minutes : la copie de l'énoncé sur la feuille de devoirs ; l'écriture des 41 nombres de 20 à 60 ; l'extraction d'un crayon jaune et d'un rouge de leur étui ; les cercles jaunes tracés autour des multiples de 2 en moins de temps qu'il n'en faut pour le dire, le tracé des cercles rouges, immédiatement autour du 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, puis avec des sauts bien visibles de trois en trois, autour de 42, 45, … 60 ; enfin la remise des deux crayons dans leur étui, avec un sentiment affiché de satisfaction en glissant la feuille de devoirs dans le cartable, comme pour dire : « pour cette tranche de devoirs, c'est fait ! ».

Et précisément, je me suis demandé ce qu'avait fait A. durant les cinq minutes de cette activité ?
Du point de vue mathématique, pas grand-chose ! Elle a suivi scrupuleusement l'injonction d'écrire la liste de nombres demandée et d'en entourer certains. Elle n'a pris aucune décision ni sur les nombres à écrire, ni sur les couleurs. Pour le choix des nombres à entourer, comme elle me l'a expliqué plus tard, elle savait déjà qu'en rouge il s'agissait de la « tabellina del tre » (« livret ou table du trois ») qu'on peut poursuivre au delà de 30 en comptant de trois en trois et qu'en jaune des nombres pairs.
Elle n'a donc pas « construit », ni « appris », ni « répété » de connaissances ou savoirs ; elle n'a non rien « entraîné » comme elle l'a fait précédemment sur les algorithmes d'opérations en colonnes, pour lesquels un entraînement est nécessaire pour maintenir ou améliorer l'efficacité.
Si le bilan est faible en acquisitions de connaissances, il n'est cependant pas négligeable pour la formation de l'image de ce que peut être, pour elle, une « activité de mathématiques ». A. a passé cinq minutes à ne pas se poser de questions et à fonctionner en automate dans un domaine qui, pour elle, est évidemment lié aux mathématiques. J'aurais préféré qu'elle joue, lise, rêve, voire qu'elle fasse quelques petites bêtises durant ces quelques minutes de son week-end.

Et j'ai pensé alors - rêvé peut-être - à la substitution de l'exercice par le problème suivant :
Combien y a-t-il de nombres, de 20 à 60, qui sont des multiples de 2 mais ne sont pas des multiples de 3 ?

Certes, A. aurait eu besoin de plus de 5 minutes pour répondre car on ne lui dit pas ce qu'elle doit faire. Ce serait à elle de se rendre compte qu'elle n'a pas d'autre issue que d'écrire tous les nombres de 20 à 60, de repérer les multiples de 2 et de 3, de trouver une manière de les marquer avec des signes différents, de constater que certains ont les deux marques, d'autres une seule, d'autres aucune … avant de pouvoir les compter pour constater qu'il y en a 14 répondant aux conditions : 20, 22, 26, 28, 32, 34, 38, 40, 44, 46, 50, 52, 56 et 58.

C'est toute la différence entre un exercice « passe-temps » à un problème ! Mais c'est beaucoup !

Evidemment, pour en faite un problème du RMT, il faudrait y apporter un peu de substance et « habiller » cette première esquisse de situation. Si l'on reste dans le contexte du devoir de week-end, pourquoi ne pas poser des questions différentes ? la précédente à certains ; les multiples de 2 et de 3 à d'autres ; les nombres qui ne sont ni multiples de 2, ni de 3 à d'autres ; les multiples de 6 à d'autres encore ; … et le lundi, lors du retour en classe, mettre en commun ces résultats. De quoi amorcer une question plus intéressante sur les multiples commune de 2 et de 3 et les multiples de 6 ?

Une légère modification d'un énoncé suffit parfois pour amorcer une activité mathématique constructive, mais il faut encore qu'elle soit conçue comme une opportunité pour que l'élève s'y engage. C'est ainsi que sont conçus les problèmes du RMT

EDITORIALE: DALL'ESERCIZIO AL PROBLEMA

François Jaquet

Tra i suoi compiti a casa del fine settimana, A., una mia nipotina (quarta primaria – cat, 4) ha passato, per quanto riguarda la matematica, un'oretta su quattro operazioni da effettuare in colonna con le prove, il riconoscimento dei divisori di 120 e, infine, il seguente compito: *Scrivi i numeri da 20 a 60, e cerchia di giallo i multipli di 2 e di rosso i multipli di 3.*

Per quest'ultimo esercizio tutto si è svolto molto velocemente, in meno di cinque minuti: il ricopiare l'enunciato sul foglio dei compiti; la scrittura dei 41 numeri da 20 a 60; l'estrazione di una matita gialla e di una rossa dall'astuccio; i cerchietti gialli tracciati intorno ai multipli di 2 in un tempo minore di quello che servirebbe per dirlo, i cerchietti rossi intorno a 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, poi con salti ben regolari di tre in tre, intorno a 42, 45, … 60; infine il riporre le due matite nell'astuccio, con un chiaro sentimento di soddisfazione nel mettere il foglio dei compiti nella cartella come per dire "questa parte dei compiti, è fatta!".

E in effetti, mi sono chiesto ciò che avesse fatto A. durante i cinque minuti di quest'attività.
Da un punto di vista matematico, non molto! Ha seguito scrupolosamente l'istruzione di scrivere la lista dei numeri richiesti e di cerchiarne alcuni. Non ha preso alcuna decisione né sui numeri da scrivere, né sui colori. Per la scelta dei numeri da cerchiare, come mi ha spiegato più tardi, lei sapeva già che per il rosso si trattava della "tabellina del tre" e che si può proseguire dopo il 30 contando di tre in tre e che per il giallo si trattava dei numeri pari.
A. non ha dunque "costruito", né "imparato", né "ripetuto" conoscenze o saperi, non si è neanche "allenata" come aveva fatto in precedenza sugli algoritmi delle operazioni in colonna per i quali è necessario un allenamento al fine di mantenere o migliore l'efficienza.
Se il bilancio è debole in acquisizioni di conoscenze, non è però da sottovalutare per la formazione dell'immagine di quello che può essere, per lei, "un'attività matematica". A. ha passato cinque minuti a non porsi delle domande e a funzionare in maniera meccanica in un ambito che per lei è evidentemente legato alla matematica. Avrei preferito che giocasse, leggesse, sognasse, o facesse qualche birichinata durante quei cinque minuti del suo fine settimana.

E allora ho pensato – forse sognato –alla sostituzione dell'esercizio con il problema seguente:
Quanti numeri ci sono da 20 a 60 che sono multipli di 2 ma non sono multipli di 3?

Certo, A. avrebbe bisogno di più di 5 minuti per rispondere perché non le viene detto ciò che deve fare. Toccherebbe a lei rendersi conto che non può fare altro che scrivere tutti i numeri da 20 a 60, reperire i multipli di 2 e di 3, trovare un modo di segnarli in maniera differente, di osservare che certi hanno due segni, altri uno solo e altri nessuno… prima di poterli contare per constatare che ce ne sono 14 che rispondono alle condizioni del problema: 20, 22, 26, 28, 32, 34, 38, 40, 44, 46, 50, 52, 56 e 58.

Ed è tutta qui la differenza che c'è tra un esercizio "passatempo" e un problema! Ma è molto!

Evidentemente, per farne un problema del RMT, bisognerebbe renderlo più sostanzioso e "contestualizzare" questa prima bozza. Se restiamo nel contesto di compiti per il fine settimana, perché non porre delle domande differenti ai diversi allievi? Quella precedente ad alcuni; i multipli di 2 e di 3 ad altri; i numeri che non sono né multipli di 2, né multipli di 3 ad altri ancora; ma anche i multipli di 6; … e poi il lunedì, al ritorno in classe, mettere in comune i risultati. Cosa che permetterebbe di introdurre una domanda più interessante sui multipli comuni di 2 e di 3 e i multipli di 6?

Una leggera modifica di un enunciato è talvolta sufficiente a proporre un'attività matematica costruttiva, ma bisogna comunque che sia concepita come un'opportunità perché l'allievo la faccia sua. E' cosi' che sono concepiti i problemi del RMT.

Presentazione del numero

Questo numero 5 de *La Gazzetta di Transalpino* contiene due articoli, una nota su un'esperienza con il RMT in classe, una nuova rubrica con gli studi di approfondimento di schede della banca di problemi e, infine, la descrizione di alcuni dei poster presentati al convegno internazionale dell'ARMT a Sedilo, nel 2015.

- Nell'articolo ***Un esempio significativo di percorso circolare: "Bignè al cioccolato"*****, Maria Felicia Andriani, Lucia Doretti e Maria Gabriella Rinaldi** presentano il loro contributo in occasione del 17° incontro internazionale dell'ARMT a Luxembourg Ville (LU), alla Tavola rotonda organizzata per illustrare alcuni aspetti legati al tema dell'incontro: "Analisi a priori, analisi a posteriori. Un percorso circolare". In particolare affrontano la problematica del ricorso o meno a procedure risolutive di tipo algebrico o pre-algebrico nella risoluzione del problema *Bigné al cioccolato*.

- **Michel Henry e Bernard Anselmo**, nel loro articolo, ***I problemi del Rally Matematico Transalpino, una risorsa per la formazione degli insegnanti***, descrivono le fasi principali di un loro atelier tenuto ad un incontro della COPIRELEM nel mese di giugno 2015. In particolare sull'uso di problemi del RMT per la formazione degli insegnanti.

- **Clara Guerrera**, in ***L'esperienza del RMT,*** descrive dapprima il suo incontro con il RMT e successivamente alcune attività svolte nelle sue classi di scuola secondaria di secondo grado per cercare di coniugare la gara con il lavoro in classe su alcuni dei problemi delle varie prove.

- Nella nuova rubrica APPROFONDIMENTI, che ospita le note di approfondimento di schede della banca di problemi, questa volta **Angela Rizza e Michel Henry**, coordinatori del gruppo di lavoro *Funzioni* propongono uno studio a partire dal problema *I numeri del signor Trapezio* elaborato nell'ambito dei lavori del gruppo che coordinano.

- Nella rubrica dedicata ai poster presentati al convegno internazionale di Sedilo e ispirati al tema del convegno, figurano le presentazioni delle Sezioni della Franche-Comté ***Imparare insieme nel risolvere problemi***, della Puglia ***RMT, punto di forza, il lavoro di gruppo***, di Rozzano ***L'inclusione e l'integrazione a scuola: e' possibile?***, di Siena ***Imparare insieme nel risolvere problemi***, di Lucia Grugnetti e François Jaquet ***Cooperazione tra gli allievi alla lettura degli elaborati***.
  Figura anche una copia del poster presentato dalla sezione di Aosta.

Présentation du numéro

Ce numéro 5 de *La Gazette de Transalpie* contient deux articles, le récit d'une expérience avec le RMT, une nouvelle rubrique « Études » présentant des approfondissement de fiches de la banque de problèmes et enfin quelques posters présentés au congrès annuel de l'ARMT à Sedilo, en 2015.

- Dans l'article ***Un exemple significatif de parcours circulaire : « Éclairs au chocolat »***, **Maria Felicia Andriani, Lucia Doretti et Maria Gabriella Rinaldi** présentent leur contribution donnée à l'occasion de la 17e rencontre internationale de l'ARMT à Luxembourg, lors de la Table ronde organisée pour illustrer quelques aspects liés au thème de la rencontre : « Analyse à priori, analyse à posteriori. Un parcours circulaire ». On y affronte en particulier, la problématique du recours ou du non recours aux procédures de type algébrique ou pré-algébrique dans la résolution du problème *Éclairs au chocolat.*

- **Michel Henry et Bernard Anselmo**, dans leur article, ***Les problèmes du Rallye mathématique transalpin, une ressource pour la formation des enseignants***, décrivent leur atelier tenu lors du colloque de la Copirelem en juin 2015, en montrant comment exploiter un problème du RMT pour la formation des enseignants.

- **Clara Guerrera**, dans ***L'expérience du RMT,*** décrit tout d'abord sa rencontre avec le RMT puis quelques activités qu'elle a proposé dans ses classes d'un lycée industriel pour chercher à combiner le concours avec le travail en classe sur quelques problèmes de nos épreuves.

- Dans la nouvelle rubrique, **Les études**, qui accueille les développements de certaines fiches de la banque de problèmes, **Angela Rizza et Michel Henry**, proposent pour ce numéro une étude du problème *Les nombres de Monsieur Trapèze* élaborée par le groupe de travail *Fonctions* qu'ils coordonnent.

- Dans la rubrique dédiée aux posters du congrès de Sedilo et inspirés du thème de la rencontre on trouve les présentations des sections de Franche-Comté : ***Apprendre ensemble à résoudre des problèmes***, des Pouilles : ***RMT, le point fort, le travail de groupe,*** de Rozanov : ***L'inclusion et l'intégration à l'école, est-ce possible ?***, de Sienne : ***Apprendre ensemble en résolution de problèmes***, de Lucia Grugnetti et François Jaquet : ***Coopération entre élèves à la lecture des copies***.
  On y trouve encore une copie du poster de la section du Val d'Aoste.

UN ESEMPIO SIGNIFICATIVO DI PERCORSO CIRCOLARE: *"BIGNÈ AL CIOCCOLATO"*

Maria Felicia Andriani[1], Lucia Doretti[2], Maria Gabriella Rinaldi[3]

1. Introduzione

Questo articolo presenta il contributo dato dalle autrici in occasione del 17° incontro internazionale dell'ARMT a Luxembourg Ville (LU), alla Tavola rotonda organizzata per illustrare alcuni aspetti legati al tema dell'incontro: "Analisi a priori, analisi a posteriori. Un percorso circolare".

In esso si affronta la problematica del *ricorso o meno a procedure risolutive di tipo algebrico o pre-algebrico nella risoluzione del* problema Bignè al cioccolato della I Prova del 21° RMT, continuando l'analisi in tal senso di problemi di prove precedenti (Doretti et al., 2009, Andriani et al., 2013, Grugnetti et al., 2014).

L'analisi a posteriori degli elaborati mostra che anche in questo caso la grande maggioranza delle classi (in particolare di categorie 6 e 7) non è riuscita a superare la difficoltà di percepire la relazione di uguaglianza tra il quintuplo di una quantità aumentato di 4 e il doppio della stessa quantità aumentata prima di 20 ed esprimerla "in termini algebrici", ricorrendo eventualmente ad una rappresentazione grafica opportuna.

Ma una tale analisi evidenzia altresì che *a priori sono state sottostimate le difficoltà e non sono stati pienamente percepiti alcuni ostacoli, legati in particolare al contesto e alle "variabili redazionali", che hanno condizionato negativamente il lavoro degli allievi, impedendo loro l'appropriazione del problema.*

L'aver analizzato le varie difficoltà e aver riflettuto sulle loro possibili cause, ci ha permesso, in particolare, un ritorno sul problema originale spingendoci verso la preparazione di opportune sue varianti da sperimentare nelle classi o da proporre per la gara.

2. Breve storia del problema

Bignè al cioccolato è nato all'interno del Gruppo Algebra. L'obiettivo era quello di ottenere un problema risolubile non solo con strategie aritmetiche, ma anche per via algebrica e in cui il ricorso all'utilizzo dello strumento "equazione" potesse mostrare la sua efficacia rispetto ad una risoluzione per tentativi, che implicava necessariamente un certo numero di prove e di calcoli da effettuare.

Si pensava di proporlo alle categorie 8 e 9 (eventualmente anche alla 7) e quindi di rivolgersi ad allievi che molto probabilmente non avevano ancora incontrato il concetto di equazione (cat. 7 e 8), ma anche ad allievi che lo avevano già affrontato e forse anche ripreso nel primo anno della scuola secondaria di secondo grado (cat. 9).

Le finalità didattiche erano quelle di:

- testare in categorie 7 e 8 la capacità degli allievi di riconoscere e confrontare relazioni tra grandezze, di saperle rappresentare graficamente e/o tradurle in un linguaggio più o meno simbolico (pre-algebrico);
- individuare quando si potevano cogliere i primi segnali del concetto (in atto) di variabile e dell'idea di dipendenza funzionale;
- capire quanto fosse "naturale" il ricorso alla strategia algebrica in categoria 9 evidenziandone la frequenza, e verificandone, inoltre, il grado di comprensione e la correttezza nel suo utilizzo.

Nella creazione del problema, si è deciso di partire da un'equazione del tipo $a\ x + b = c\ x + d$ che avesse per soluzione un numero intero. In tale equazione, l'incognita è presente in entrambi i termini dell'uguaglianza, quindi non è possibile determinare il suo valore procedendo a ritroso con l'inversione delle operazioni, come nella forma $a\ x + b = c$. C'è pertanto la necessità di attivare altre strategie di risoluzione, da quelle per tentativi ad altre che si basano sull'applicazione intuitiva dei principi di equivalenza.

Si è scelta l'equazione $5x + 4 = 2(x + 20)$, che ha soluzione $x = 12$, e si è costruito un contesto che si pensava realistico (bar famoso per i suoi bignè, relazione tra la quantità di bignè ordinati ogni giorno lavorativo e quella dei bignè ordinati il sabato e la domenica, relazione tra bignè ordinati e venduti in una data settimana).

Il problema, proposto per la I Prova del 21° RMT, in fase di consultazione è stato considerato adeguato non solo per la categoria 7, ma anche per la categoria 6, perché si riteneva possibile che gli allievi lo risolvessero sia ricorrendo ad opportune rappresentazioni grafiche, sia procedendo in ambito numerico con tentativi organizzati. Il ricorso ad una strategia algebrica con uso di equazioni era stato ipotizzato per le categorie 8 e 9.

[1] Coordinatrice internazionale dell'ARMT e coordinatrice della Sezione Puglia: mariafelicia.andriani@fastwebnet.it

[2] Coordinatrice della Sezione Siena: lucia.doretti@unisi.it

[3] Coordinatrice della Sezione Parma: mariagabriella.rinaldi@gmail.com

Per ragioni di “economia” legate alla gara, il problema non è stato però dato nella prova alla categoria 9.
Qui di seguito è riportato il testo del problema e le categorie a cui è stato proposto nella I prova del 21° RMT.

BIGNÈ AL CIOCCOLATO (Cat. 6, 7, 8) 21° RMT

Al bar del club di vacanze Archimede, ci sono sempre ottimi bignè al cioccolato.

Ogni giorno, dal lunedì al venerdì, il bar si fa consegnare lo stesso numero di bignè, mentre il sabato e la domenica ne ordina 20 in più rispetto agli altri giorni, perché c’è maggiore richiesta.

Ogni giorno della scorsa settimana (dal lunedì alla domenica) sono stati venduti tutti i bignè. Il sabato e la domenica, complessivamente, ne sono stati venduti 4 in più di quelli che sono stati venduti durante tutto il resto della settimana.

Quanti bignè al cioccolato arrivano al bar ogni giorno della settimana?

Spiegate il vostro ragionamento.

In APPENDICE è riportata la scheda ANALISI A PRIORI del problema nella quale si prevede, in particolare, che gli allievi siano in grado di rappresentare la situazione delle quantità incognite e delle relazioni tra di esse ricorrendo al modello della bilancia a due piatti. Si ipotizza anche l’uso di procedure aritmetiche per tentativi e di procedure di tipo algebrico (almeno in cat. 8).

3. Analisi a posteriori: le difficoltà degli allievi

L’analisi a posteriori effettuata su 2325 classi di 22 sezioni mostra un insuccesso pressoché totale nelle cat. 6 e 7 (l’88% degli elaborati di cat. 6 e il 78% di elaborati di cat. 7 hanno avuto punteggio 0 o 1), mentre solo in cat. 8 un terzo circa degli elaborati rivela un'adeguata comprensione del problema.

Nella tabella seguente sono indicate, per ogni categoria, le frequenze dei diversi punteggi e la media degli stessi, assegnati secondo la griglia di Attribuzione dei punteggi, che, per comodità, riportiamo qui sotto.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette (32 bignè il sabato e la domenica, 12 bignè gli altri giorni) con spiegazioni chiare (per esempio dettaglio dei calcoli)

3 Risposte corrette ma con spiegazioni poco chiare o solo con verifica

2 Risposte corrette senza alcuna spiegazione
oppure errore di calcolo per una delle due risposte

1 Inizio di ragionamento corretto
oppure errore nell’impostazione dell’equazione dovuto alla incomprensione della richiesta “4 in più”

0 Incomprensione del problema

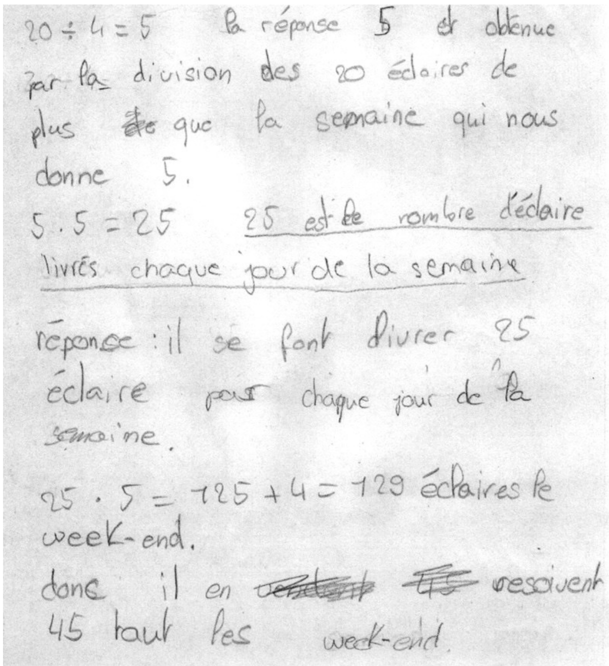
BIGNE’ AL CIOCCOLATO							
Punti	Freq. 0	Freq. 1	Freq. 2	Freq. 3	Freq. 4	Totale	m
Cat. 6	738	56	20	37	47	898	0,4
Cat. 7	576	68	29	87	60	820	0,8
Cat. 8	329	44	30	80	124	607	1,4
Totale	1643	168	79	204	231	2325	0,8
in %							
Cat. 6	82%	6%	2%	4%	5%		
Cat. 7	70%	8%	4%	11%	7%		
Cat. 8	54%	7%	5%	13%	20%		
Totale	71%	7%	3%	9%	10%		

Le difficoltà del problema sono state quindi evidentemente sottostimate e gli ostacoli non pienamente percepiti a priori.

L’esame degli elaborati ha messo in evidenza il disorientamento degli allievi di fronte al problema, confermato anche dall’alto numero dei fogli-risposta lasciati in bianco (nelle sezioni di Parma, Puglia e Siena è circa il 25%

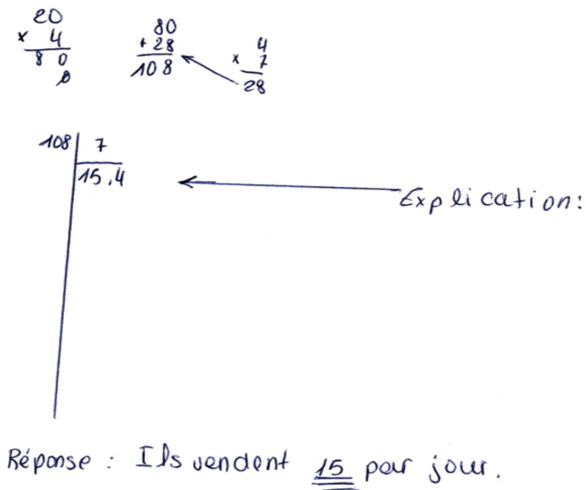
del totale) in alcuni dei quali il disagio è esplicitato da frasi del tipo: “Questo problema è impossibile”, “Mancano i dati”, “Manca il totale dei bignè”, “E' un problema senza senso!”.

La maggior parte delle risposte errate dovute a “incomprensione del problema” sono ottenute a partire dai numeri 20, 40, 5 e 2, combinati fra loro con operazioni “a caso”, come nei due esempi seguenti di cat. 6 e 7, rispettivamente.



(20:4=5 la risposta 5 è ottenuta con la divisione dei 20 bignè di più della settimana che ci dà 5.
5·5 = 25 25 è il numero dei bignè consegnati ogni giorno della settimana. Risposta: si fanno consegnare 25 bignè per ogni giorno della settimana. 25·5 = 125+4 = 129 bignè il week-end. Quindi ne ricevono 45 tutti i week-end)

Nel caso sotto riportato, dopo aver ottenuto un numero non intero con operazioni varie sui dati, lo si approssima con disinvoltura ...



(Risposta: Ne vendono 15 al giorno)

Riteniamo che in elaborati di questo tipo gli allievi siano stati influenzati dal modello di “problema aritmetico”, il solo probabilmente di cui avevano fatto esperienza, almeno in categorie 6 e 7. Poiché la strategia per risolvere problemi aritmetici è quella di eseguire una sequenza di operazioni a partire dai numeri indicati nel testo, si è proceduto in questo modo con calcoli successivi, usando i dati noti, senza preoccuparsi del significato di ciò che si stava facendo: l'obiettivo era quello di trovare valori accettabili per il problema, ovvero interi positivi, trattandosi del numero di bignè!

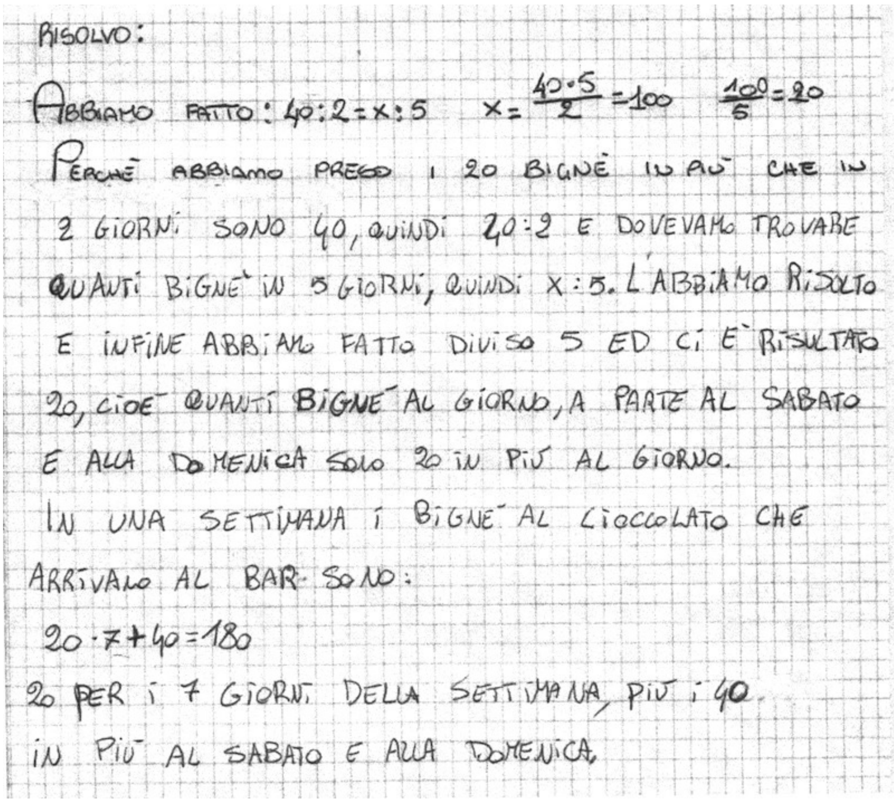
Altro fatto indicativo del disorientamento degli allievi è il seguente: in non pochi casi (il 12% degli elaborati di cat. 8 delle sezioni di Parma, Puglia, Siena) si ricorre alle proporzioni, evidentemente considerate ancora una volta la "bacchetta magica" da usare in caso di difficoltà[4], con un significativo incremento in percentuale da cat.7 a cat. 8.

Ecco due esempi:

Caso 1

"Abbiamo supposto che per risolvere il problema dovevamo usare la proporzione x : 20 = 4 : 20 perché ci dice quanti bignè arrivano al bar ogni giorno della settimana".

Caso 2


RISOLVO:

ABBIAMO FATTO: 40:2=x:5 $x=\frac{40\cdot 5}{2}=100$ $\frac{100}{5}=20$

PERCHÈ ABBIAMO PRESO I 20 BIGNÈ IN PIÙ CHE IN 2 GIORNI SONO 40, QUINDI 40:2 E DOVEVAMO TROVARE QUANTI BIGNÈ IN 5 GIORNI, QUINDI X:5. L'ABBIAMO RISOLTO E INFINE ABBIAMO FATTO DIVISO 5 ED CI È RISULTATO 20, CIOÈ QUANTI BIGNÈ AL GIORNO, A PARTE AL SABATO E ALLA DOMENICA SOLO 20 IN PIÙ AL GIORNO.

IN UNA SETTIMANA I BIGNÈ AL CIOCCOLATO CHE ARRIVANO AL BAR SONO:

20·7+40=180

20 PER I 7 GIORNI DELLA SETTIMANA, PIÙ I 40 IN PIÙ AL SABATO E ALLA DOMENICA

(Abbiamo fatto: 40 : 2 = x : 5 x = (40·5)/2=100 100/5 = 20. Perché abbiamo preso i 20 bignè in più che in 2 giorni sono 40, quindi 40 : 2 e dovevamo trovare quanti bignè in 5 giorni, quindi x : 5. L'abbiamo risolto e infine abbiamo fatto diviso 5 e ci è tornato il risultato 20, cioè quanti bignè al giorno, a parte al sabato e alla domenica sono 20 in più al giorno. In una settimana i bignè al cioccolato che arrivano al bar sono: 20·7+40 = 180, 20 per i 7 giorni della settimana, più i 40 in più al sabato e alla domenica)

E' stato naturale a questo punto cercare di approfondire la natura delle difficoltà incontrate dagli allievi e mettere a fuoco le cause del loro disorientamento di fronte al problema. Abbiamo quindi analizzato gli elaborati a nostra disposizione con particolare attenzione alle procedure risolutive e alle strategie utilizzate, sia nel caso di insuccesso che nel caso di risultato corretto.

3.1. Analisi delle difficoltà incontrate dagli allievi

L'analisi a posteriori degli elaborati delle sezioni di Parma, Puglia, Siena e Svizzera romanda ci ha permesso di individuare le seguenti difficoltà, evidenti soprattutto nelle categorie 6 e 7:

- difficoltà legate alle variabili redazionali
- difficoltà legate alla struttura matematica del problema

4 Anche in altre occasioni, si è più volte rilevato che gli allievi impostano una proporzione quando nel testo di un problema sono presenti o, come nel caso esaminato, sono ben individuabili tre numeri. Tale atteggiamento ricorrente potrebbe essere legato alla pratica didattica della risoluzione meccanica di un considerevole numero di "esercizi-problema" presenti nei testi scolastici sul calcolo del quarto proporzionale.

A tutto questo aggiungiamo anche il "contesto" che appare poco coinvolgente e lontano dall'esperienza degli allievi (quanti bignè può vendere un bar in un giorno?).

Si può anche osservare che esiste una "frattura" tra contesto e domanda: la domanda non esprime una richiesta naturale che nasce nel contesto, ma è invece la struttura narrativa che si presenta come un contenitore di dati necessari per rispondere alla domanda, che quindi appare artificiosa ed astratta. Come messo ben in evidenza in Zan (2008), tutto ciò è di ostacolo alla rappresentazione del problema e al pensiero logico necessario per la sua risoluzione.

3.1.1. Difficoltà legate alle "variabili redazionali"

L'analisi degli elaborati ha permesso di accertare che il testo si è rivelato complesso da capire, molto di più di quanto ci si aspettasse.

In effetti, per comprendere la situazione illustrata dal problema è necessario non solo interpretare correttamente ciascuna delle seguenti frasi:

A) Ogni giorno, dal lunedì al venerdì, il bar si fa consegnare lo stesso numero di bignè, mentre il sabato e la domenica ne ordina 20 in più rispetto agli altri giorni, perché c'è maggiore richiesta

B) Ogni giorno della scorsa settimana (dal lunedì alla domenica) sono stati venduti tutti i bignè. Il sabato e la domenica, complessivamente, ne sono stati venduti 4 in più di quelli che sono stati venduti durante tutto il resto della settimana

ma occorre anche capire che le informazioni in esse contenute sono collegate fra loro, ovvero che le condizioni in A, valide per ogni settimana, lo sono anche per la settimana particolare (la settimana scorsa) di cui si parla in B.

Il punto-chiave è poi la domanda che fa riconsiderare cosa succede ogni giorno di una (qualunque) settimana.

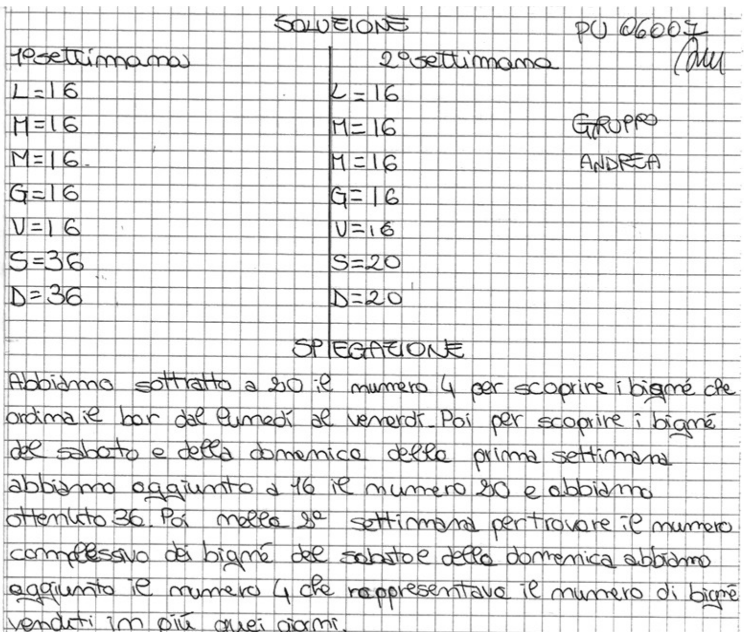
Le difficoltà di interpretazione del testo sono emerse in modo evidente dall'analisi a posteriori.

In alcuni elaborati, le due espressioni:

- "... mentre il sabato e la domenica ne ordina 20 in più rispetto agli altri giorni..." (nella frase A)
- "Il sabato e la domenica complessivamente ne sono stati venduti 4 in più di quelli che sono stati venduti durante tutto il resto della settimana" (nella frase B)

sono percepite come contraddittorie e hanno creato disagio negli allievi come è evidenziato dal seguente commento (cat. 7): « C'est un problème impossible car si il commande 20 éclairs en plus le week-end et qu'il a tout vendu la semaine, il ne peut pas vendre seulement 4 éclairs de plus le week-end » («E' un problema impossibile perché se ordina 20 bignè in più il week-end e li ha tutti venduti nella settimana, non può vendere solo 4 bignè in più il week-end»).

In altri elaborati, le informazioni delle frasi A) e B) non sono collegate tra loro e si parla, ad esempio, di "due settimane" o di "prima settimana e di seconda settimana", come nell'esempio seguente di cat. 6:


SOLUZIONE PU 06007

GRUPPO ANDREA

1° settimana	2° settimana
L=16	L=16
M=16	M=16
M=16	M=16
G=16	G=16
V=16	V=16
S=36	S=20
D=36	D=20

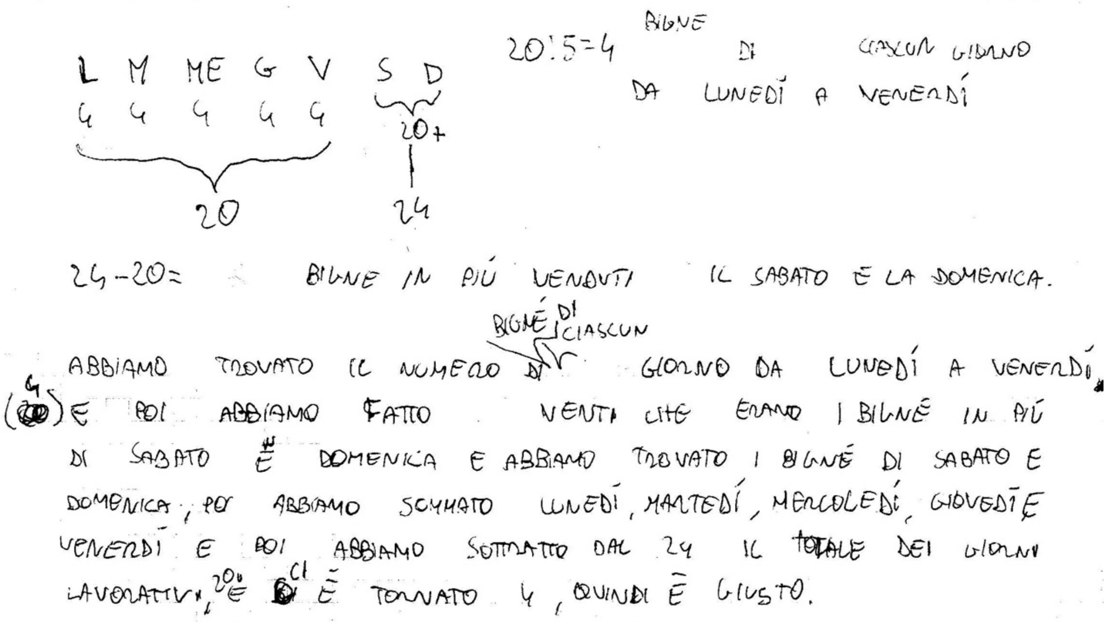
SPIEGAZIONE

Abbiamo sottratto a 20 il numero 4 per scoprire i bigné che ordina il bar dal lunedì al venerdì. Poi per scoprire i bigné del sabato e della domenica della prima settimana abbiamo aggiunto a 16 il numero 20 e abbiamo ottenuto 36. Poi nella 2ª settimana per trovare il numero complessivo dei bigné del sabato e della domenica abbiamo aggiunto il numero 4 che rappresentava il numero di bigné venduti in più quei giorni.

(Abbiamo sottratto a 20 il numero 4 per scoprire i bignè che ordina il bar dal lunedì al venerdì. Poi per scoprire i bignè del sabato e della domenica della prima settimana abbiamo aggiunto a 16 il numero 20 e abbiamo ottenuto 36. Poi nella seconda settimana per trovare il numero complessivo dei bignè del sabato e della domenica abbiamo aggiunto il numero 4 che rappresenta il numero dei bignè venduti in più in quei giorni.)

Si può ipotizzare che gli allievi siano stati influenzati dalla "non linearità" rispetto al tempo della sequenza delle informazioni e della domanda. Anche l'uso di verbi con significato diverso nelle due frasi (si fa consegnare e ordina nella prima, venduti nella seconda), può aver creato un ulteriore ostacolo al collegamento tra le informazioni in esse contenute.

Si rileva altresì che in alcuni elaborati l'espressione "... il sabato e la domenica ne ordina 20 in più rispetto agli altri giorni, ...", presente nella frase A, è stata percepita come ambigua. Deve essere intesa: "20 bignè in più sia il sabato che la domenica" o "20 bignè in più in tutto"? In alcuni elaborati si è deciso per la seconda interpretazione, come mostrato nella seguente frase (cat. 7): « Comme le texte n'est pas clair, nous avons pensé que les 20 éclairs supplémentaires livrés le samedi et le dimanche, représentent 20 éclairs en tout » ("Poiché il testo non è chiaro, abbiamo pensato che i 20 bignè supplementari ordinati sabato e domenica, rappresentano 20 bignè in tutto"). In altri elaborati l'informazione "20 bignè in più" è stata interpretata come "10 bignè in più il sabato" e "10 bignè in più la domenica". Questa interpretazione ha portato in alcuni casi a ritenere che il numero di bignè venduti ogni giorno dal lunedì al venerdì fosse 4 (e 24 quelli venduti complessivamente sabato e domenica), perché tale risultato verificava la condizioni espressa in B), come mostra il seguente esempio (cat. 6):


L M ME G V S D
4 4 4 4 4 20+
20 24
20:5=4 BIGNÉ DI CIASCUN GIORNO DA LUNEDÌ A VENERDÌ
24-20= BIGNÈ IN PIÙ VENDUTI IL SABATO E LA DOMENICA.
ABBIAMO TROVATO IL NUMERO DI BIGNÉ DI CIASCUN GIORNO DA LUNEDÌ A VENERDÌ (4) E POI ABBIAMO FATTO VENTI CHE ERANO I BIGNÉ IN PIÙ DI SABATO E DOMENICA E ABBIAMO TROVATO I BIGNÉ DI SABATO E DOMENICA, POI ABBIAMO SOMMATO LUNEDÌ, MARTEDÌ, MERCOLEDÌ, GIOVEDÌ E VENERDÌ E POI ABBIAMO SOTTRATTO DAL 24 IL TOTALE DEI GIORNI LAVORATIVI, 20, E CI È TORNATO 4, QUINDI È GIUSTO.

(Abbiamo trovato il numero di bignè di ciascun giorno da lunedì a venerdì (4) e poi abbiamo fatto venti che erano i bignè in più di sabato e domenica e abbiamo trovato i bignè di sabato e domenica, poi abbiamo sommato lunedì, martedì, mercoledì, giovedì e venerdì e poi abbiamo sottratto dal 24 il totale dei giorni lavorativi, 20, e ci è tornato 4, quindi è giusto)

Una curiosità legata alla domanda: in essa si chiede di indicare il numero di bignè ordinati ogni giorno della settimana, ma in tutte le categorie si trovano elaborati in cui si dà come risposta il numero totale dei bignè ordinati nell'intera settimana. Per tali risposte si può senz'altro ipotizzare una lettura superficiale del testo o una difficoltà nell'interpretazione dei quantificatori ("ogni giorno" equivalente a "tutti i giorni"), ma probabilmente anche un'influenza del modello di domanda standard presente in molti problemi aritmetici: "Quanto in tutto?". Ci sembra di riconoscere anche in questo un ulteriore motivo per affermare che la domanda è percepita dagli allievi "scollegata" dal contesto, nel senso di Zan (2008).

Si deve anche rilevare che la frase con cui si formula la domanda (Quanti bignè al cioccolato arrivano al bar ogni giorno della settimana?) è ambigua. L'uso di "ogni" lascia intendere che il numero sia lo stesso per tutti i giorni, senza considerare oltretutto la confusione introdotta nel testo tra "settimana" dal lunedì al venerdì e il fine settimana, sabato e domenica.

3.1.2. Difficoltà legate alla struttura matematica del problema

Per la sua natura Bignè al cioccolato è un problema non propriamente classificabile fra quelli di "tipo aritmetico" (e la sua genesi ne è una chiara testimonianza...): i numeri presenti nel testo esprimono operatori "+ 20", "+ 4" e non quantità, ed inoltre le quantità su cui operano sono incognite.

Nella struttura matematica del problema si può quindi riconoscere un'indubbia difficoltà per gli allievi, soprattutto se di categoria 6 e 7!

Si può osservare che il problema è anche descrivibile in termini "funzionali". Si possono infatti individuare due funzioni, f e g, con dominio e immagine nell'insieme dei numeri naturali, così definite:

$f(n) = 5n$, quantità di bignè venduti da lunedì a venerdì

$g(n) = 2n + 40$, quantità di bignè venduti nel fine settimana

Il numero "n" dei bignè cercato è quello per il quale vale una delle seguenti uguaglianze:

$$g(n) = f(n) + 4, \qquad f(n) = g(n) - 4, \qquad g(n) - f(n) = 4$$

[nell'ultima uguaglianza, il numero 4 rappresenta ancora una funzione (differenza di funzioni), ovvero la funzione costante che ad ogni numero naturale associa il numero 4].

4. Analisi a posteriori: le procedure corrette

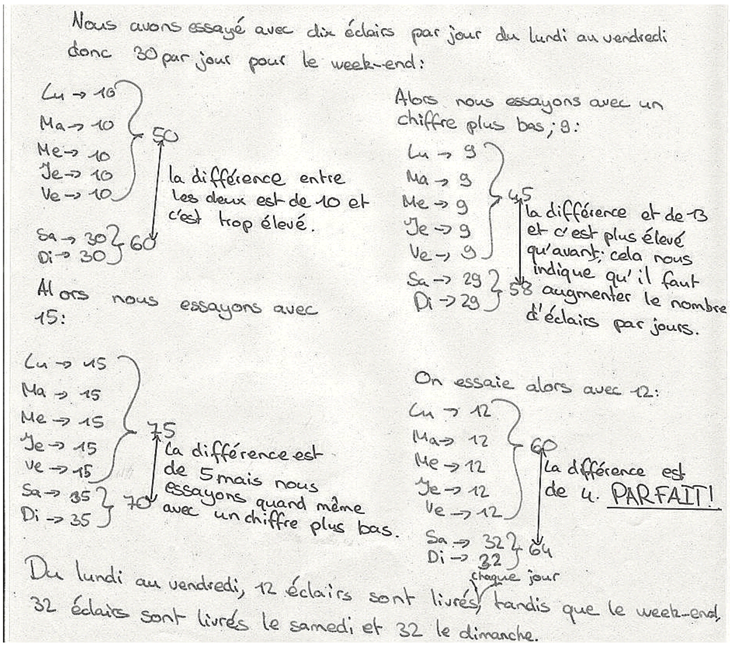
L'analisi degli elaborati fornisce anche informazioni interessanti sul modo di affrontare e risolvere il problema da parte di coloro che hanno superato le difficoltà insite nella situazione problematica, evidenziando altresì un miglioramento progressivo da cat. 6 a cat. 8 nella capacità di comprendere il testo e di mettere in atto strategie risolutive adeguate (8.3% in cat. 6, 26.0 % in cat.7, 34.5 % in cat.8).

L'analisi a posteriori mostra che, contrariamente a quanto ipotizzato a priori, solo in un numero estremamente esiguo di elaborati si ha il ricorso all'uso di una rappresentazione come quella indicata nell'analisi del compito, che richiama il modello della "bilancia a due piatti". Ancora una volta, come già rilevato in altri problemi del RMT, non sembra familiare negli allievi il ricorso a rappresentazioni per descrivere relazioni tra le quantità in gioco[5]. Questa difficoltà, che spesso persiste in cat. 8 e oltre, fa pensare che nella pratica didattica non si curi sufficientemente tale aspetto.

In ambito algebrico, è invece innegabile come il ricorso ad appropriate rappresentazioni (schemi, grafici, tabelle,...) porti a dare "senso" all'idea di equazione e ne motivi l'uso come strumento nella risoluzione di problemi (da cui poi potrà seguire la possibilità di giustificarne lo studio come oggetto matematico...).

Come era prevedibile a priori, nelle categorie 6 e 7 è stata impiegata soprattutto la strategia per tentativi, ottenuta ipotizzando un dato valore per l'incognita e facendo successivamente il controllo di tutte le altre condizioni, come mostrano gli esempi seguenti, in cui i vari tentativi sono di volta in volta visualizzati con schemi o riportati in tabelle.

[5] Il punto di vista secondo cui le rappresentazioni aiutano nella risoluzione o "danno senso" è largamente condiviso. Lo stesso G.Polya in *How to solve a problem* consiglia: "Cominciate con il fare un disegno". Occorre tuttavia chiedersi se il disegno è possibile prima di dominare tutte le relazioni in gioco o se è il dominio di queste relazioni, cioè la "soluzione", che permette il disegno. Nelle analisi a priori dei problemi del RMT, elaborate da insegnanti che già dispongono della soluzione, si trovano spesso rappresentazioni, schemi, tabelle, che sono utilizzate per "spiegare" o per "mostrare" la soluzione, gli allievi invece devono "scoprirla". Si può pensare che è solo dopo averla costruita che essi possono illustrarla, per "giustificarla" di fronte agli altri, ma anche a se stessi. La questione resta aperta.



Nous avons essayé avec dix éclairs par jour du lundi au vendredi donc 30 par jour pour le week-end:

Lu → 10, Ma → 10, Me → 10, Je → 10, Ve → 10 } 50

Sa → 30, Di → 30 } 60

la différence entre les deux est de 10 et c'est trop élevé.

Alors nous essayons avec un chiffre plus bas; 8:

Lu → 9, Ma → 9, Me → 9, Je → 9, Ve → 9 } 45

Sa → 29, Di → 29 } 58

la différence est de 13 et c'est plus élevé qu'avant; cela nous indique qu'il faut augmenter le nombre d'éclairs par jours.

Alors nous essayons avec 15:

Lu → 15, Ma → 15, Me → 15, Je → 15, Ve → 15 } 75

Sa → 35, Di → 35 } 70

La différence est de 5 mais nous essayons quand même avec un chiffre plus bas.

On essaie alors avec 12:

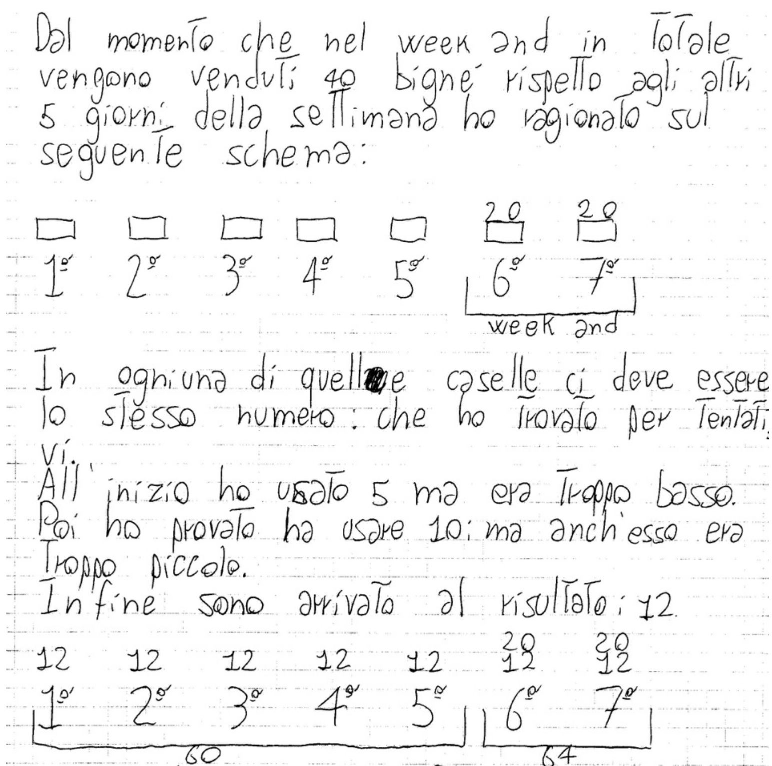
Lu → 12, Ma → 12, Me → 12, Je → 12, Ve → 12 } 60

Sa → 32, Di → 32 } 64

La différence est de 4. PARFAIT!

Du lundi au vendredi, 12 éclairs sont livrés chaque jour tandis que le week-end, 32 éclairs sont livrés le samedi et 32 le dimanche.

(Abbiamo provato con 10 bignè al giorno dal lunedì al venerdì, quindi 30 al giorno per il week- end.
[cfr I schema] *la differenza tra i due è 10 ed è troppo grande. Allora proviamo con una cifra più bassa, 8:* [cfr II schema] *la differenza è di 13 ed è più alta della precedente; questo ci indica che bisogna aumentare il numero di bignè al giorno. Allora proviamo con 15:* [cfr III schema] *la differenza è di 5 ma noi proviamo ugualmente con una cifra più bassa. Si prova allora con 12:* [cfr IV schema] *la differenza è di 4. PERFETTO!*
Dal lunedì al venerdì, 12 bignè sono consegnati ogni giorno mentre il week-end, 32 bignè sono consegnati il sabato e 32 la domenica)



Dal momento che nel week and in totale vengono venduti 40 bigne rispetto agli altri 5 giorni della settimana ho ragionato sul seguente schema:

1° 2° 3° 4° 5° 6° 7° (20 20) week and

In ognuna di quelle caselle ci deve essere lo stesso numero: che ho trovato per tentativi.
All'inizio ho usato 5 ma era troppo basso.
Poi ho provato ha usare 10: ma anch'esso era troppo piccolo.
Infine sono arrivato al risultato: 12

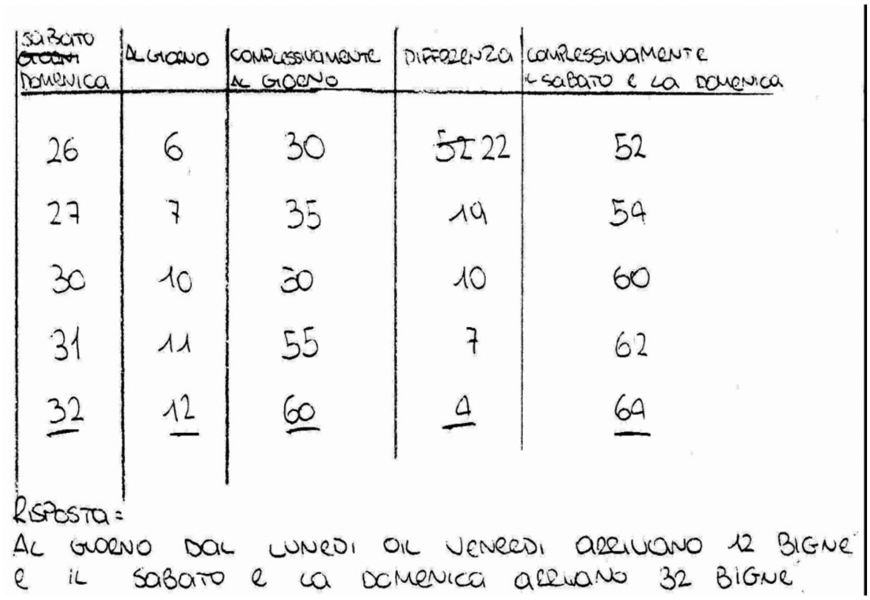
12 12 12 12 12 | 20+12 20+12

1° 2° 3° 4° 5° | 6° 7°

60 | 64

64-60=4 (proprio come sostiene il problema).

(Dal momento che nel week-end in totale vengono venduti 40 bignè rispetto agli altri 5 giorni della settimana ho ragionato sul seguente schema [cfr. elaborato]. In ognuna di quelle caselle ci doveva essere lo stesso numero: che ho trovato per tentativi. All'inizio ho usato 5 ma era troppo basso. Poi ho usato 10: ma anch'esso era troppo piccolo. Infine sono arrivato al risultato: 12 [cfr. elaborato] 64-60 = 4 (proprio come sostiene il problema))



SABATO DOMENICA	AL GIORNO	COMPLESSIVAMENTE AL GIORNO	DIFFERENZA	COMPLESSIVAMENTE IL SABATO E LA DOMENICA
26	6	30	~~52~~ 22	52
27	7	35	19	54
30	10	30	10	60
31	11	55	7	62
32	12	60	4	64

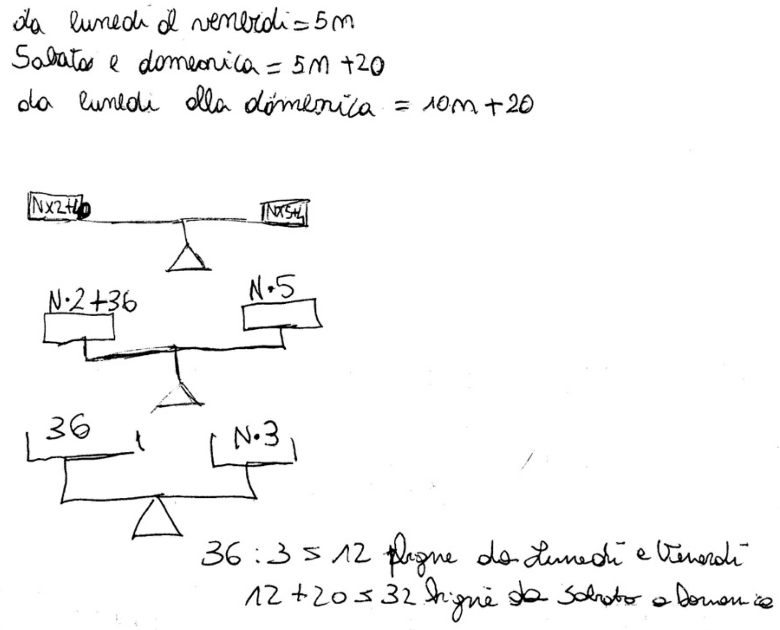
RISPOSTA:
AL GIORNO DAL LUNEDÌ AL VENERDÌ ARRIVANO 12 BIGNÈ E IL SABATO E LA DOMENICA ARRIVANO 32 BIGNÈ

(Risposta: al giorno dal lunedì al venerdì arrivano 12 bignè e il sabato e la domenica arrivano 32 bignè)

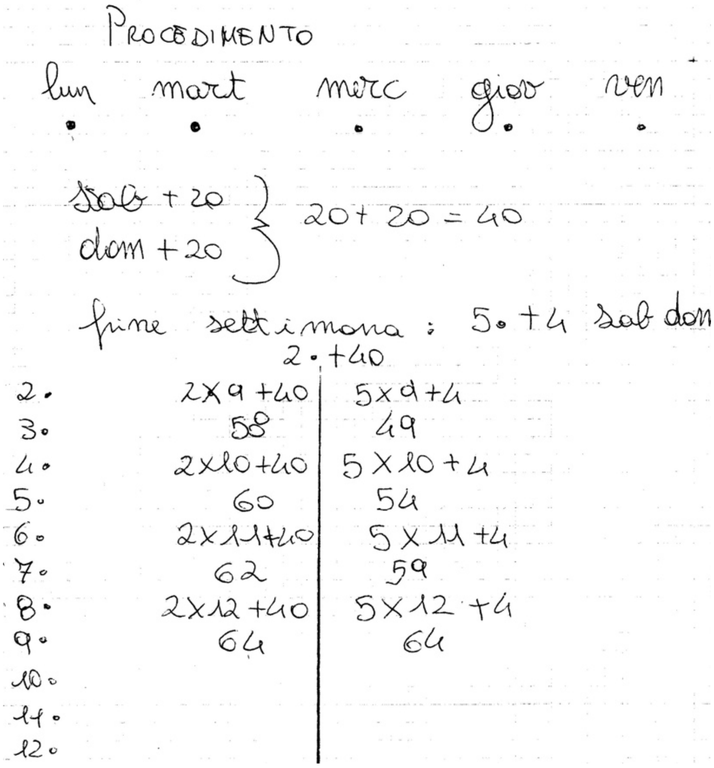
Tali procedure per tentativi fanno ipotizzare che sia più "naturale" passare attraverso il concetto (*in atto)* di funzione per introdurre equazioni [… e disequazioni!] e in particolare per avviare alla "messa in formula" in modo autonomo e con consapevolezza del suo significato.

In cat. 6 e 7 si trova anche qualche raro, ma significativo, esempio di strategia di tipo pre-algebrico o algebrico.

Nel seguente elaborato di cat. 7, ad esempio, appoggiandosi su una rappresentazione che fa riferimento alla "bilancia a due piatti", si imposta di fatto un'equazione e la si risolve. Come si può notare, la procedura utilizzata si basa sul mantenere in equilibrio la bilancia, e quindi con l'applicazione in atto dei principi di equivalenza. Inoltre, sui "piatti" della bilancia si ritrovano i valori determinati dalle funzioni f e g introdotte nel paragrafo 3, ben descritti in termini simbolici.



La fase pre-algebrica è riconoscibile invece nel seguente, interessante, elaborato di cat. 6, in cui la procedura risolutiva è per tentativi, ma l'incognita è indicata con un "puntino" e sono ben riconoscibili i "concetti in atto" di variabile, di funzione e di equazione, quest'ultima come uguaglianza di relazioni funzionali.


PROCEDIMENTO

lun mart merc gior ven

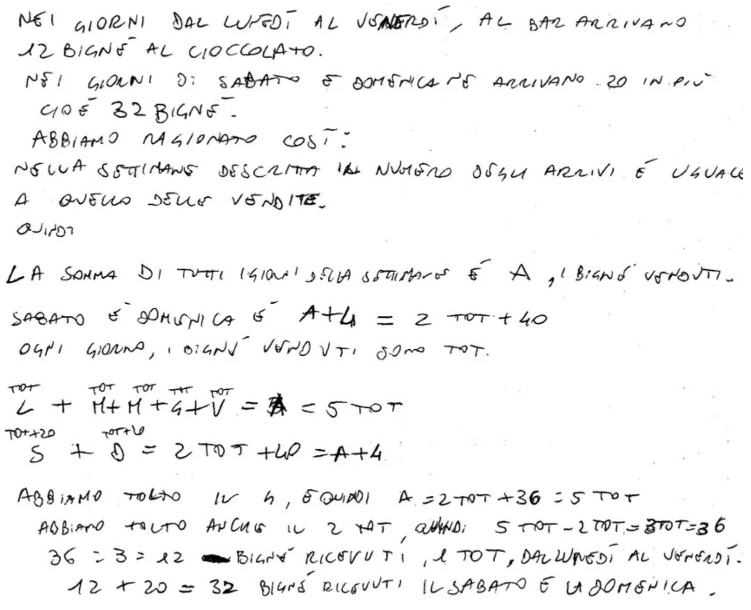
sab + 20 } 20 + 20 = 40
dom + 20

fine settimana : 5• + 4 sab dom
2• + 40

2•	2x9 +40	5x9+4
3•	58	49
4•	2x10+40	5x10 + 4
5•	60	54
6•	2x11+40	5x11 +4
7•	62	59
8•	2x12 +40	5x12 +4
9•	64	64
10•		
11•		
12•		

In cat. 8 la strategia algebrica si riscontra in circa metà degli elaborati risolti correttamente (si tratta quindi di una minoranza di casi, corrispondente a circa il 13% del totale). In tali elaborati, spesso si procede con l'impostazione formale di un'equazione, scritta anche in forme diverse rispetto a quella indicata nell'analisi a priori (ad es.: $[(x + 20 + x + 20) - 4]: 5 = x$ o anche $(x \cdot 2 + 40) - (x \cdot 5) = 4$), che poi si risolve applicando i principi di equivalenza o procedendo per tentativi.

Riportiamo di seguito un elaborato di cat. 8 che mostra invece chiaramente il "passaggio" attraverso la fase *retorica - sincopata* che, anche storicamente, ha preceduto quella del *linguaggio algebrico simbolico.*


NEI GIORNI DAL LUNEDÌ AL VENERDÌ, AL BAR ARRIVANO 12 BIGNÉ AL CIOCCOLATO.
NEI GIORNI DI SABATO E DOMENICA NE ARRIVANO 20 IN PIÙ CIOÈ 32 BIGNÉ.
ABBIAMO RAGIONATO COSÌ:
NELLA SETTIMANA DESCRITTA IL NUMERO DEGLI ARRIVI È UGUALE A QUELLO DELLE VENDITE.
QUINDI
LA SOMMA DI TUTTI I GIORNI DELLA SETTIMANA È A, I BIGNÉ VENDUTI.
SABATO E DOMENICA È A+4 = 2 TOT + 40
OGNI GIORNO, I BIGNÉ VENDUTI SONO TOT.
L + M + M + G + V = A = 5 TOT
S + D = 2 TOT + 40 = A + 4
ABBIAMO TOLTO IL 4, E QUINDI A = 2 TOT + 36 = 5 TOT
ABBIAMO TOLTO ANCHE IL 2 TOT, QUINDI 5 TOT − 2 TOT = 3 TOT = 36
36 : 3 = 12 BIGNÉ RICEVUTI, I TOT, DAL LUNEDÌ AL VENERDÌ.
12 + 20 = 32 BIGNÉ RICEVUTI IL SABATO E LA DOMENICA.

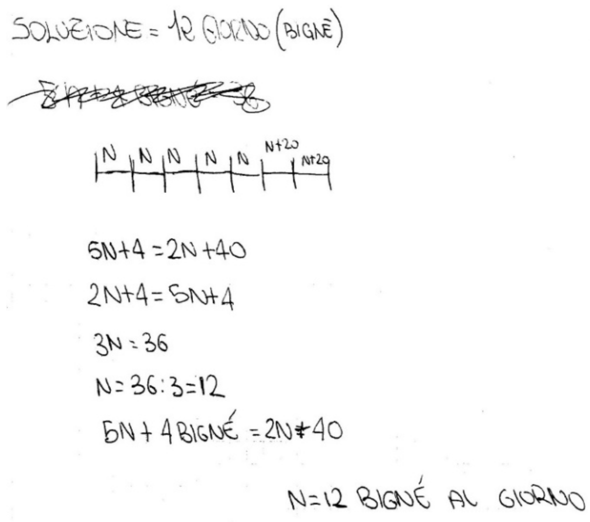
(Nei giorni dal lunedì al venerdì, al bar arrivano 12 bignè al cioccolato. Nei giorni di sabato e domenica arrivano 20 in più, cioè 32 bignè. Abbiamo ragionato così: nella settimana descritta il numero degli arrivi è uguale a quello delle vendite. Quindi la somma di tutti i giorni della settimana è A, i bignè venduti.

Sabato e domenica è A+4 = 2 tot +40 ogni giorno i bignè venduti sono tot

L (tot) +M(tot)+ M(tot)+G(tot)+V(tot)= 5 tot S(tot+20) + D(tot+20) = 2 tot+40 = A +4

Abbiamo tolto il 4, e quindi A = 2 tot +36 = 5 tot. Abbiamo tolto anche il 2 tot, 5 tot−2 tot = 3 tot = 36. 36:3 = 12 bignè ricevuti, 1 tot, dal lunedì al venerdì. 12+20 = 32 bignè ricevuti il sabato e la domenica)

Nell'elaborato che segue, di cat. 8, ci si aiuta con un disegno per dare senso all'equazione. Segue una procedura risolutiva "esperta" (al di là dell'errore "di distrazione!").


SOLUZIONE = 12 GIORNO (BIGNÈ)

5N+4 = 2N+40
2N+4 = 5N+4
3N = 36
N = 36:3 = 12
5N + 4 BIGNÉ = 2N+40

N=12 BIGNÉ AL GIORNO

Sempre in cat. 8, la strategia algebrica è presente in circa un quarto degli elaborati con strategie non corrette, (corrispondenti a circa il 7% del totale). Gli errori più frequenti sono dovuti a:

- errata traduzione della *condizione "4 in più" riferita ai bignè venduti il fine settimana (rispetto a tutti quelli venduti dal lunedì al venerdì): nel testo si parla di "4* in più", ma bisogna sottrarre 4 ai 40 bignè venduti in più complessivamente tra sabato e domenica.
- errata interpretazione del testo, ad esempio si trova scritta l'equazione 5x = 2x + 20, in cui evidentemente si è inteso che i bignè in più del sabato e della domenica sono in totale 20, anziché 40; oppure si trova indicata un'espressione algebrica e non un'equazione, ad esempio (5· x) + (x +20) + (x +20) + 4, perché non si comprende che si tratta di due espressioni diverse per la stessa quantità.

5 . Dall'analisi a posteriori all'analisi a priori: il ritorno

L'analisi a posteriori degli elaborati ha fornito una serie di informazioni che hanno permesso di arricchire le "conoscenze" sul problema. Sono state così ricavate indicazioni sia sul piano del suo utilizzo in classe, sia per la preparazione di nuovi problemi.

5.1 Indicazioni didattiche

Per le categorie 6 e 7 (ma non si esclude del tutto anche la 8), non è consigliabile proporre il problema in classe nelle condizioni di somministrazione delle prove del RMT (senza alcun aiuto dell'insegnante) per i molti ostacoli legati al contesto e alle variabili redazionali che presenta. Per rimuovere tali ostacoli appare indispensabile una "messa in comune" intermedia gestita dall'insegnante dopo la lettura dell'enunciato e una prima fase di appropriazione del problema da parte degli allievi.

Ci siamo però poste queste domande:

- Cosa succede se presentiamo il problema ad allievi di categoria 9 o 10?
- Fino a che punto le difficoltà descritte si mantengono?
- Saranno ancora privilegiate strategie per tentativi o si ricorrerà invece a procedure algebriche?
- A partire da quando si potrà osservare il sopravvento delle procedure algebriche?

Sarà proprio uno dei compiti del Gruppo Algebra cercare di dare qualche risposta alle domande precedenti attraverso sperimentazioni in classi di scuola secondaria di II grado.

5.2 Nascono nuove versioni del problema e si progettano attività nelle classi

Le difficoltà rilevate a posteriori e documentate nel paragrafo 3, ci hanno anche portato ad un ripensamento generale sul problema, spingendoci ad intervenire sugli aspetti che hanno creato difficoltà (linguaggio, contesto, struttura matematica, livello). Abbiamo così elaborato due nuove versioni del problema Bignè al cioccolato, che saranno oggetto di sperimentazioni da parte dei componenti del Gruppo Algebra. In esse si sono eliminate le difficoltà legate alle variabili redazionali, ma sono state mantenute contesto e struttura matematica nella prima versione, mentre nella seconda si è semplificato anche il confronto tra le relazioni tra i dati.

1. Esempio di versione modificata (che elimina le difficoltà legate alle variabili redazionali, ma mantiene la struttura matematica):

BIGNÈ AL CIOCCOLATO I (Cat. 6, 7, 8)

Al bar di Pietro e Anna, ci sono sempre ottimi bignè al cioccolato.

La settimana scorsa, dal lunedì al venerdì, hanno venduto ogni giorno lo stesso numero di bignè, mentre sabato e domenica ne sono stati venduti 20 in più al giorno rispetto agli altri giorni.

Pietro dice ad Anna: "Pensa che in soli due giorni, sabato e domenica, abbiamo venduto 4 bignè in più che durante tutto il resto della settimana!".

Quanti bignè al cioccolato sono stati venduti ogni giorno dal lunedì al venerdì e quanti al giorno sabato e domenica?

Spiegate il vostro ragionamento.

2. Esempio di versione modificata (che elimina le difficoltà legate alle variabili redazionali e semplifica il confronto tra le relazioni):

BIGNÈ AL CIOCCOLATO II (Cat. 6, 7, 8)

Al bar di Pietro e Anna, ci sono sempre ottimi bignè al cioccolato.

La settimana scorsa dal lunedì al venerdì hanno venduto ogni giorno lo stesso numero di bignè, mentre sabato e domenica ne hanno venduto 9 in più al giorno rispetto agli altri giorni.

Pietro dice ad Anna: "Pensa che in soli due giorni, sabato e domenica, abbiamo venduto lo stesso numero di bignè che durante tutto il resto della settimana!".

Quanti bignè al cioccolato sono stati venduti ogni giorno dal lunedì al venerdì e quanti al giorno sabato e domenica?

Spiegate il vostro ragionamento.

Si è anche prevista la possibilità di cambiare completamente contesto scegliendo qualcosa di più coinvolgente e vicino al vissuto degli allievi. L'elaborazione di un problema di questo tipo, da proporre eventualmente per una prossima edizione del RMT, sarà un ulteriore impegno del Gruppo Algebra.

Presentiamo infine un esempio di problema (per il quale ringraziamo F. Jaquet), che conserva la stessa struttura matematica, ma in un contesto concreto ed estremamente semplificato.

I BASTONCINI

Abbiamo 7 bastoncini:

5 «corti», tutti della stessa lunghezza,

2 «lunghi», misurano 20 cm in più dei «corti».

I 2 lunghi insieme misurano 4 cm in più dei cinque corti insieme.

Quanto misurano i 7 bastoncini?

Come si può notare, nel testo sono state eliminate tutte le difficoltà legate al contesto temporale, ai giorni della settimana e alle possibili errate interpretazioni. Tale versione ci pare didatticamente interessante da proporre a breve distanza di tempo dalla versione riformulata "Bignè al cioccolato I" per controllare, fra l'altro, se gli allievi riconoscono che dal punto di vista matematico si tratta dello stesso problema (la modellizzazione algebrica porta infatti alla medesima equazione!).

6. Conclusioni

Approfondire l'analisi a posteriori di un problema, inaspettatamente risultato molto più difficile di quanto previsto, è stato senz'altro interessante. Un problema per quanto possa essere ritenuto a priori un "buon problema" può, come in questo caso, presentare una serie di difficoltà che ne ostacolano l'appropriazione alla maggior parte degli allievi: ancora una volta, ciò che per l'adulto che propone il problema può sembrare chiaro non è detto lo sia per gli allievi a cui ci si rivolge!

L'analisi a posteriori di *Bignè al cioccolato,* spostandoci "sul terreno degli allievi", ci ha permesso di rilevare le difficoltà da essi incontrate, ipotizzandone anche le possibili cause, e ci ha dato nel contempo l'indicazione di non utilizzarlo in classe così com'è (almeno nella scuola secondaria di I grado). Il successivo "ritorno" sul problema, arricchito dal lavoro fatto, ci ha permesso di creare altre versioni, varianti di quello originario, aprendoci così nuove piste da esplorare.

Dopo l'Incontro internazionale, le prime varianti di "Bignè al cioccolato" sono state sperimentate in alcune classi di Scuola Secondaria di I e II grado, mentre l'ultima versione elaborata, dal titolo "Al museo" (cfr. APPENDICE), è stata inserita nella II Prova del 22° RMT. Dall'analisi a posteriori di "Al museo" si può già dire che il problema è rimasto difficile in categorie 6 e 7 con medie, rispettivamente, di 0,9 e 1,3 punti (invece di 0,4 e 0,8) e che solo a partire dalla categoria 8 i progressi sono stati più evidenti (2,2 anziché 1,4). I risultati delle sperimentazioni effettuate, così come l'analisi dettagliata del problema "Al museo", saranno oggetto di un prossimo articolo del Gruppo Algebra.

Ancora una volta si può affermare che il dispositivo del RMT e le sperimentazioni nelle classi hanno permesso di ottenere dati la cui utilità è essenziale per valutare l'apporto dei problemi nella costruzione di conoscenze o di concetti.

7. Bibliografia

Andriani A., Doretti L., Medici D., Rinaldi M.G, Salomone L.: 2013, 'Equazione come strumento e come oggetto: analisi di difficoltà ed errori/ L'équation en tant qu'outil et objet: analyse des difficultés et des erreurs', La Gazzetta di Transalpino, n° 3, 83-101

Doretti L., Medici D., Rinaldi M. G., Salomone L.: 2009, 'Dare significato ai concetti di equazione e di sistema: attività in classe con i problemi del RMT', in L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds), Rallye Mathématiques Transalpin et interculturalité/Rally Matematico Transalpino e intercultura, Vol. 8, Brigue 2008, ARMT, SCNAT, 121-142

Grugnetti L., Jaquet F., Medici D., Rinaldi M.G.: 2014, 'Verso la costruzione di concetti attraverso l'analisi delle procedure degli allievi e degli ostacoli che incontrano nella risoluzione di problemi', L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 37A, N. 2,133-161

Zan R.: 2008, 'Ricerca e RMT insieme per definire che cos'è un buon problema', in L. Grugnetti, F. Jaquet, G. Bellò, R. Fassy, G. Telatin (Eds), RMT fra pratica e ricerca in Didattica della Matematica/ RMT entre pratique et recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, Bard 2007, centro Risorse per la Didattica della Matematica, sezione della Valle d'Aosta dell'ARMT, ARMT, 19-30

APPENDICE

(21.I.10.) **BIGNÈ AL CIOCCOLATO** (Cat. 6, 7, 8)

Al bar del club di vacanze Archimede, ci sono sempre ottimi bignè al cioccolato.

Ogni giorno, dal lunedì al venerdì, il bar si fa consegnare lo stesso numero di bignè, mentre il sabato e la domenica ne ordina 20 in più rispetto agli altri giorni, perché c'è maggiore richiesta.

Ogni giorno della scorsa settimana (dal lunedì alla domenica) sono stati venduti tutti i bignè. Il sabato e la domenica, complessivamente, ne sono stati venduti 4 in più di quelli che sono stati venduti durante tutto il resto della settimana.

Quanti bignè al cioccolato arrivano al bar ogni giorno della settimana?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

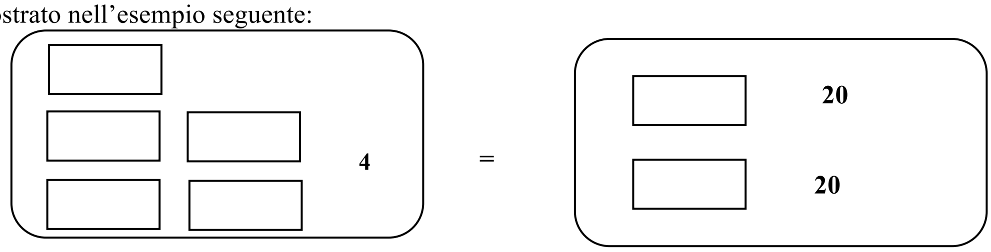
Ambito concettuale

- Aritmetica: le quattro operazioni, equivalenze - Algebra: equazioni di primo grado

Analisi del compito

- Rappresentarsi la situazione per i diversi giorni della settimana con una "quantità" quotidiana, i due "supplementi" di 20 bignè del sabato e della domenica, i "4 in più" e la relazione di uguaglianza.

  Si può pensare a dei "pacchetti" per la quantità quotidiana, o utilizzare una rappresentazione grafica della situazione che evochi i piatti di una bilancia facendo attenzione a sistemare il « 4 » sul piatto opportuno, come mostrato nell'esempio seguente:



Da lunedì a venerdì   sabato e domenica

Questa rappresentazione mentale o grafica suggerisce una semplificazione della relazione se si "tolgono" 2 "quantità" quotidiane e 4 bignè da ciascun membro dell'uguaglianza per arrivare all'equivalenza di 3 "quantità" quotidiane e di 36.

- Dedurre che, da lunedì a venerdì, arrivano al bar 12 (36:3) bignè, il sabato e la domenica 32 (12+20) bignè.

Oppure: procedere per tentativi organizzati ipotizzando un certo numero di bignè che arrivano nei giorni diversi dal sabato e dalla domenica, verificare se tutte le condizioni sono soddisfatte e altrimenti procedere aggiustando progressivamente i valori.

Per esempio, con 10 si ottiene 50 e 60, con 20: 100 e 80, con 15: 75 e 70, ci si avvicina e infine con 12 si ottiene 60 e 64, che corrisponde ai "4 di più" per il weekend.

Oppure: per via algebrica, designando con x il numero di bignè consegnati dal lunedì al venerdì e con $x + 20$ quelli consegnati nel weekend

si perviene all'equazione $5x + 4 = 2(x + 20)$ o $5x = 2(x + 20) - 4$ la cui soluzione è 12 (numero di bignè consegnati dal lunedì al venerdì) e calcolare il numero di bignè consegnati in un giorno del weekend $32 = 12 + 20$.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette (32 bignè il sabato e la domenica, 12 bignè gli altri giorni) con spiegazioni chiare (per esempio dettaglio dei calcoli)

3 Risposte corrette ma con spiegazioni poco chiare o solo con verifica

2 Risposte corrette senza alcuna spiegazione
oppure errore di calcolo per una delle due risposte

1 Inizio di ragionamento corretto
oppure errore nell'impostazione dell'equazione dovuto alla incomprensione della richiesta "4 in più"

0 Incomprensione del problema

(22.II.11.) **AL MUSEO** (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Sette amici vanno a visitare un museo. Devono scegliere tra due tipi di percorso previsti: *percorso ridotto* e *percorso completo.* Il biglietto per il percorso completo costa 10,50 euro in più dell'altro.

Tutti acquistano il biglietto per il percorso ridotto, ad eccezione di Pietro e di Anna che comprano il biglietto per il percorso completo.

All'uscita, Pietro dice ad Anna: "Noi, in due, abbiamo speso 6 euro in più di tutti gli altri insieme".

Quanto costa il biglietto per il percorso ridotto e quanto quello per il percorso completo?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

- Trovare un numero naturale tale che il suo quintuplo aumentato di 6 sia uguale al doppio del numero stesso aumentato di 21

Analisi del compito

- Procedere per tentativi organizzati ipotizzando un certo costo per il percorso ridotto, ricavare quello per il percorso completo e verificare se l'affermazione di Pietro è soddisfatta, altrimenti procedere aggiustando progressivamente i valori.
  Per esempio, se si ipotizza 10 euro per il percorso ridotto, si ottiene 41 euro per Pietro e Anna e 50 euro per gli altri, quindi non va bene; con 7 euro si ottiene 35 euro sia per Pietro ed Anna che per gli altri, quindi non va bene; con 6 euro si ottiene 33 euro per Pietro ed Anna e 30 per gli altri, e anche questo non va bene; con 5 euro si ottiene 31 euro per Pietro e Anna e 25 per gli altri e così va bene. Dedurre che il prezzo per il percorso completo è di 15,50 (= 5 + 10,50) euro.

Oppure: rappresentarsi la situazione considerando che cinque amici hanno pagato 5 volte lo stesso importo, mentre Pietro e Anna insieme è come se avessero pagato 2 volte quello stesso importo più 21 euro (10,50×2). Si può poi pensare di esprimere il confronto tra le due spese sotto forma di uguaglianza, "bilanciando" la spesa di Pietro e Anna con quella dei cinque amici: un modo è, per esempio, quello di aggiungere 6 euro alla spesa di questi ultimi (potrebbe qui essere commesso l'errore di "aggiungere" 6 a quanto speso da Pietro ed Anna!). Ottenere così che 5 volte uno stesso importo aumentato di 6 "equivale" a 2 volte lo stesso importo aumentato di 21. Da questa rappresentazione (mentale o grafica) ricavare che 3 volte lo stesso importo equivale a 15 (= 21 − 6) euro e che quindi il prezzo del biglietto per il percorso ridotto è di 5 euro (e quindi di 15,50 euro quello del percorso completo).

Oppure: per via algebrica, indicando con x il costo del biglietto per il percorso ridotto e con $x + 10{,}50$ quello per il percorso completo, impostare l'equazione $5x + 6 = 2(x + 10{,}50)$ o $5x = 2(x + 10{,}50) - 6$ la cui soluzione è 5, e quindi ricavare il costo del biglietto per il percorso completo che è 15,50.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette (5 euro per il percorso ridotto; 15,50 euro per il percorso completo) con spiegazioni chiare e, nel caso si proceda per tentativi, verifica delle condizioni

3 Risposte corrette ma con spiegazioni poco chiare o solo con verifica
oppure procedura corretta e ben spiegata, ma esplicitato solo il costo per un tipo di percorso

2 Risposte corrette senza alcuna spiegazione
oppure errore di calcolo per una delle due risposte, ma procedura corretta

1 Inizio di ragionamento corretto
oppure risposta "9 euro" dovuta al non aver posizionato bene i 6 euro di differenza nel confronto fra le due spese

0 Incomprensione del problema

UN EXEMPLE SIGNIFICATIF DE PARCOURS CIRCULAIRE: « Éclairs au chocolat »

Maria Felicia Andriani[1], Lucia Doretti[2], Maria Gabriella Rinaldi[3]

1. Introduction

Cet article présente la contribution donnée par les auteures à l'occasion de la 17e rencontre internationale de l'ARMT à Luxembourg, lors de la Table ronde organisée pour illustrer quelques aspects liés au thème de la rencontre : « Analyse a priori, analyse a posteriori. Un parcours circulaire ».

On y affronte la problématique du recours ou du non recours aux procédures de type algébrique ou pré-algébrique dans la résolution du problème *Éclairs au chocolat* de la première épreuve du 21e RMT, en poursuivant l'analyse entreprise à propos de problèmes d'épreuves précédentes (Doretti et all., 2009, Andriani et all., 2013, Grugnetti et all., 2014).

L'analyse a posteriori des copies montre que, dans ce cas aussi, la grande majorité des classes (en particulier des catégories 6 et 7) n'a pas réussi à percevoir la relation d'égalité entre *le quintuple d'une quantité augmenté de 4* et *le double de la même quantité augmenté précédemment de 20* et de l'exprimer en « termes algébriques», en recourant éventuellement à une représentation graphique opportune.

Mais une telle analyse met en évidence aussi que, **a priori**, les difficultés ont été sous-estimées et que certains obstacles n'ont pas été perçus, liés en particulier au contexte et aux « variables rédactionnelles », qui ont conditionné négativement le travail des élèves, en les empêchant de s'approprier le problème.

Le fait d''avoir analysé les différentes difficultés et d'avoir réfléchi à leurs causes possibles nous a permis, en particulier, de revenir sur le problème d'origine et de chercher à en élaborer des variantes à expérimenter en classe ou à proposer pour nos épreuves.

2. Brève histoire du problème

Éclairs au chocolat est né au sein du « Groupe Algèbre ». L'objectif était d'obtenir un problème résoluble non seulement par des stratégies arithmétiques, mais aussi par algèbre et dans lequel le recours à l'utilisation de l'outil « équation » pouvait montrer son efficacité par rapport à une résolution par essais successifs impliquant nécessairement un certain nombre de tentatives et les calculs correspondants à effectuer.

On pensait le proposer en catégories 8 et 9 (éventuellement même en catégorie 7) et donc à des élèves qui très probablement n'avaient pas encore rencontré le concept d'équation (cat. 7 et 8), et aussi à des élèves qui l'avaient déjà affronté et peut-être même repris en première année de lycée (cat. 9).

Les buts didactiques étaient de :

- tester en catégories 7 et 8 les capacités des élèves à reconnaître et confronter des relations parmi des grandeurs, de savoir les représenter graphiquement et/ou les traduire dans un langage plus ou moins symbolique (pré-algébrique)
- déterminer à quel moment on peut identifier les premières apparitions du concept (en acte) de variable et de l'idée de dépendance fonctionnelle ·;
- comprendre quand le recours à la stratégie algébrique devient « naturel » en catégorie 9, en mettant en évidence sa fréquence d'apparition, et en vérifiant, en outre, le degré de compréhension et l'efficacité de sa mise en oeuvre.

Lors de la création du problème, il a été décidé de partir d'une équation de type $ax + b = cx + d$ dont la solution est un nombre entier. Dans ce type d'équation, l'inconnue est présente dans les deux les termes de l'égalité, et par conséquent il n'est pas possible de déterminer sa valeur en « revenant en arrière » par l'inversion des opérations, comme dans la forme $ax + b = c$. Il y a par conséquent la nécessité d'activer d'autres stratégies de résolution que celles par essais ou qui se basent sur l'application intuitive des principes d'équivalence.

On a choisi l'équation $5x + 4 = 2 (x + 20)$, dont la solution est $x = 12$, et on a construit un contexte qu'on pensait réaliste (bar célèbre pour ses éclairs au chocolat, relation entre la quantité commandée chaque jour ouvrable et celle des samedi et dimanche, la relation entre le nombre d'éclairs commandés et vendus pour la semaine entière).

[1] Coordinatrice internationale l'ARMT et coordinatrice de la Section Puglia: mariafelicia.andriani@fastwebnet.it
[2] Coordinatrice de la Section Siena: lucia.doretti@unisi.it
[3] Coordinatrice de la Section Parma: mariagabriella.rinaldi@gmail.com

Lors de la phase de consultation de la première épreuve du 21° RMT, le problème a été considéré adapté pas seulement aux classes de catégorie 7, mais aussi de catégorie 6, parce qu'on estimait possible que les élèves le résolvent soit en recourant à des représentations graphiques opportunes, soit en procédant dans le domaine numérique par des essais organisées. Le recours à une stratégie algébrique avec l'emploi d'équations avait été supposé pour les catégories 8 et 9.

Pour des raison « d'économie » liées à la compétition, le problème n'a cependant pas été proposé en catégorie 9.

Nous donnons ici l'énoncé du problème et les catégories auxquelles le a été proposé lors de la première épreuve du 21^{e} RMT.

ÉCLAIRS AU CHOCOLAT (Cat. 6, 7, 8)

Au bar du club de vacances « Archimède », il y a toujours des éclairs au chocolat.

Chaque jour, du lundi au vendredi, le bar se fait livrer la même quantité d'éclairs ; tandis que le samedi et le dimanche il commande 20 éclairs de plus que les autres jours, parce qu'il y a une plus forte demande.

Chaque jour de la semaine dernière (du lundi au dimanche) tous les éclairs ont été vendus.

Durant le week-end, le bar a vendu en tout 4 éclairs de plus que ceux qui ont été vendus durant les cinq premiers jours de la semaine.

Combien d'éclairs sont-ils livrés au bar chaque jour de la semaine ?

Expliquez votre raisonnement.

En ANNEXE on trouvera l'énoncé et son analyse a priori dans laquelle on prévoyait, en particulier que les élèves seraient capables de représenter la relation entre les quantités inconnues en recourant au modèle de la balance à plateaux. On y faisait aussi l'hypothèse de procédures arithmétiques par essais et de procédures algébriques (au moins en catégorie 8).

3. Analyse a posteriori : les difficultés des élèves

L'analyse a posteriori effectuée sur 2325 classes de 22 sections fait apparaître un échec quasi total en catégories 6 et 7. (Le 88% des copies de catégorie 6 et le 78% ce celles de catégorie 7 n'ont reçu que 0 ou 1 dans l'attribution des points), alors que, en catégorie 8, un tiers seulement des copies témoignent d'une compréhension adéquate du problème.

Les fréquences des différents points et leurs moyennes figurent dans le tableau suivant, selon les critères d'Attribution des points reportés ci-dessous :

Attribution des ponts

4 Réponses correctes (32 éclairs le samedi et dimanche, 12 éclairs les autres jours) avec des explications claires (par exemple, détail des calculs)

3 Réponses correctes avec des explications peu claires ou seulement avec une vérification

2 Réponses correctes sans aucune explication
ou une erreur de calcul pour l'une des deux réponses

1 Début de raisonnement correct
ou une erreur dans l'écriture de l'équation deux à l'incompréhension de l'expression « 4 de plus que »

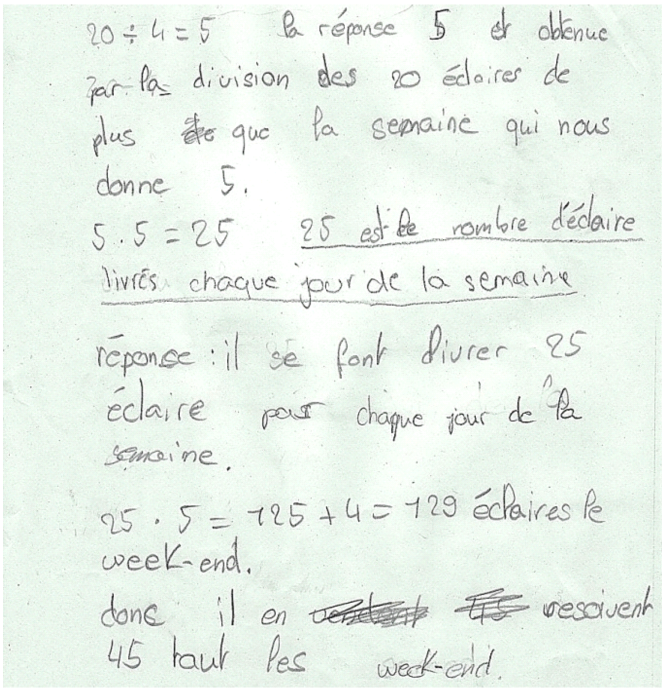
0 Incompréhension du problème

Éclairs au chocolat							
Points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 6	738	56	20	37	47	898	0,4
Cat. 7	576	68	29	87	60	820	0,8
Cat. 8	329	44	30	80	124	607	1,4
Total	1643	168	79	204	231	2325	0,8
Fréq. en %							
Cat. 6	82%	6%	2%	4%	5%		
Cat. 7	70%	8%	4%	11%	7%		
Cat. 8	54%	7%	5%	13%	20%		
Total	71%	7%	3%	9%	10%		

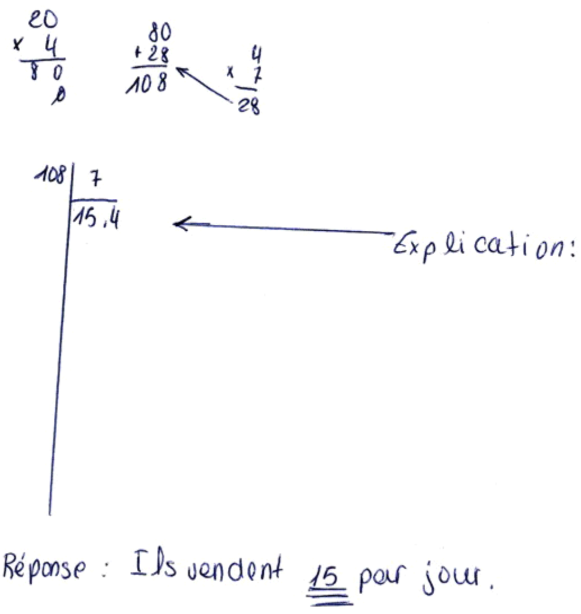
Les difficultés du problème ont été donc évidemment été sous-estimées et les obstacles non perçus à priori.

L'examen des copies a mis en évidence la désorientation des élèves face au problème, confirmée par le grand nombre de feuilles réponses laissées en blanc (dans les sections de Parme, Pouilles et Sienne elles représentent le 25% du total). Dans quelques copies le malaise est explicité par des commentaires du genre : *Ce problème est impossible*, *il manque des données*, *il manque le nombre total des éclairs*, *C'est un problème qui n'a pas de sens !*

La plupart des réponses erronées sous l'attribution « incompréhension du problème » sont obtenues à partir des nombres 20, 40, 5 et 2, combinés entre eux par des opérations « au hasard », comme dans les deux exemples suivants de catégories 6 et 7, respectivement.


20 ÷ 4 = 5 la réponse 5 et obtenue
par la division des 20 éclaires de
plus ~~été~~ que la semaine qui nous
donne 5.
5 . 5 = 25 25 est le nombre d'éclaire
livrés chaque jour de la semaine
réponse : il se font livrer 25
éclaire pour chaque jour de la
semaine.
25 . 5 = 125 + 4 = 129 éclaires le
week-end.
donc il en ~~vendent~~ ~~125~~ resoivent
45 tout les week-end.

Dans le cas ci-dessous après avoir obtenu un nombre non entier par différentes opérations à partir des données, on constate une approximation désinvolte :



Nous retenons que dans des copies de ce type les élèves ont été influencés par le modèle du problème d'arithmétique, le seul probablement dont ils disposent, au moins en catégories 6 et 7. Puisque la stratégie de résolution des problèmes d'arithmétique consiste à exécuter une séquence d'opérations à partir des nombres donnés dans le texte de l'énoncé, les élèves procèdent ainsi partant des données connues, sans chercher à donner du sens à ce qu'ils font : l'objectif étant de trouver des valeurs acceptables pour le problème, des nombres entiers positifs vu qu'il s'agit d'un nombre d'éclairs au chocolat !

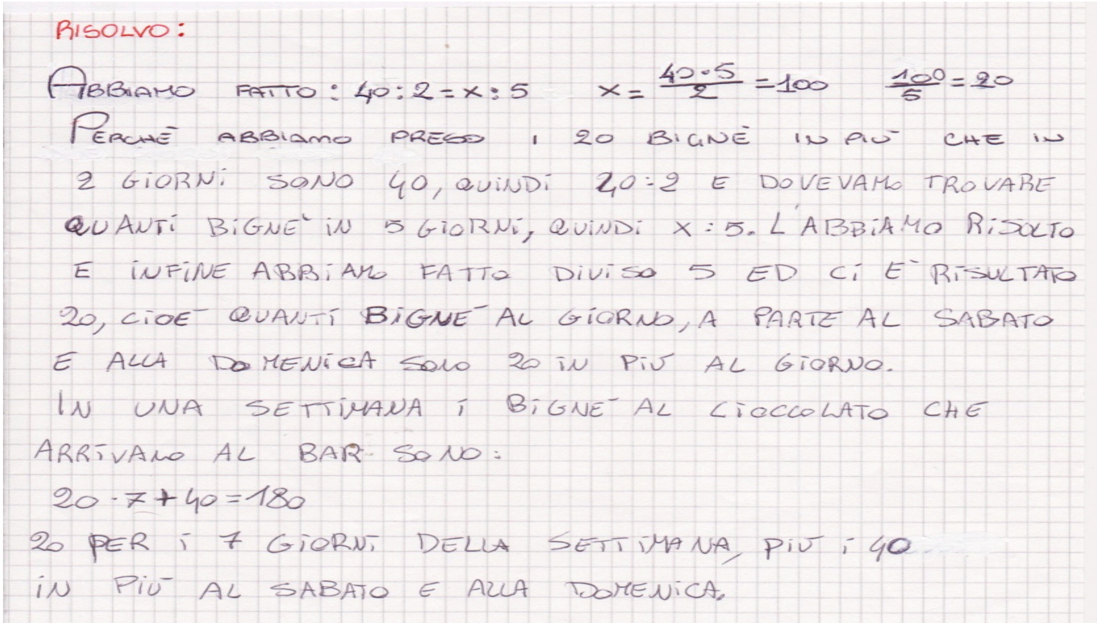
Un autre indice pertinent de la désorientation des élèves est le recours aux proportions (le 12% des copies de catégorie 8 des sections de Parme, Pouilles, Sienne), évidemment considérées comme la « baguette magique » à employer en cas de difficulté[4], avec un accroissement significatif de la catégorie7 à la catégorie 8.

En voici deux exemples :

<u>Exemple 1</u>

Nous avons supposé que pour résoudre le problème nous devions employer la proportion x : 20 = 4 : 20 parce qu'il dit combien d'éclairs arrivent au bar chaque jour de la semaine.

<u>Exemple 2</u>



RISOLVO:
ABBIAMO FATTO: 40:2=x:5 $x=\frac{40\cdot 5}{2}=100$ $\frac{100}{5}=20$
PERCHÉ ABBIAMO PRESO I 20 BIGNÈ IN PIÙ CHE IN
2 GIORNI SONO 40, QUINDI 40:2 E DOVEVAMO TROVARE
QUANTI BIGNÈ IN 5 GIORNI, QUINDI x:5. L'ABBIAMO RISOLTO
E INFINE ABBIAMO FATTO DIVISO 5 ED CI È RISULTATO
20, CIOÈ QUANTI BIGNÈ AL GIORNO, A PARTE AL SABATO
E ALLA DOMENICA SOLO 20 IN PIÙ AL GIORNO.
IN UNA SETTIMANA I BIGNÈ AL CIOCCOLATO CHE
ARRIVANO AL BAR SONO:
20·7+40=180
20 PER I 7 GIORNI DELLA SETTIMANA, PIÙ I 40
IN PIÙ AL SABATO E ALLA DOMENICA.

(On a fait 40 : 2 = x : 5 x = (40·5)/2=100 100/5 = 20. Parce que nous avons pris les 20 éclairs en plus qui en font 40 en deux jours, donc 40 : 2 et nous devions trouver combien d'éclairs en 5 jours, donc x : 5. Nous l'avons résolu puis, à la fin, nous avons divisé par 5 et nous avons trouvé 20 comme résultat; c'est-à-dire combien d'éclairs par jour à l'exception du samedi et du dimanche où il y en a 20 de plus par jour. En une semaine, les éclairs qui arrivent au bar sont 20·7 + 40 = 180, 20 pour les 7 jours de la semaine plus les 40 du samedi et du dimanche.)

A ce point, il était naturel de chercher à approfondir la nature des difficultés rencontrées des élèves et à identifier les causes de leur désorientation face au problème. Donc nous avons analysé les copies à notre disposition avec une attention particulière concernant les procédures résolutives et les stratégies utilisées, tant en cas d'échec qu'en cas de résultat correct.

3.1. Analyse des difficultés rencontrées par les élèves

L'analyse a posteriori des copies des sections de Parme, des Pouilles, de Sienne et de Suisse romande a permis d'identifier les difficultés suivantes, évidentes surtout pour les catégories 6 et 7 :
- les difficultés liées aux variables rédactionnelles
- les difficultés liées à la structure mathématique du problème

À tout ceci nous ajoutons aussi le « contexte » qui apparaît peu intéressant et loin de l'expérience des élèves (combien d'éclairs au chocolat peut vendre un bar en un jour ?).

[4] Même dans autres occasions, on a remarqué plusieurs fois que les élèves établissent une proportion lorsque dans le texte d'un problème trois nombres sont présents ou, comme dans ce cas, ils sont bien localisables. Une telle attitude récurrente pourrait être liée à la pratique didactique de la résolution mécanique d'un nombre considérable d'« exercices-problèmes » présents dans les manuels scolaires sur le calcul de la quatrième proportionnelle.

On peut même observer qu'il existe une « fracture » entre le contexte et la demande : la question n'exprime pas une demande naturelle qui naît dans conteste, mais est par contre la structure narrative qui se présente comme un conteneur de données nécessaires pour répondre à la question, que donc le apparaît artificielle et abstraite. Comme mis bien en évidence en Zan (2008), tout cela milite contre la représentation du problème et à la pensée logique nécessaire pour sa résolution.

3.1.1. Les difficultés liées aux « variables rédactionnelles »

L'analyse des copies a permis d'affirmer que le texte s'est révélé complexe à comprendre, beaucoup plus qu'on ne l'attendait.

En effet, pour comprendre la situation illustrée par le problème il est nécessaire non seulement d'interpréter correctement chacune des phrases suivantes :

A) Chaque jour, du lundi au vendredi, le bar se fait livrer la même quantité d'éclairs ; tandis que le samedi et le dimanche il commande 20 éclairs de plus que les autres jours, parce qu'il y a une plus forte demande.

B) Chaque jour de la semaine dernière (du lundi au dimanche) tous les éclairs ont été vendus. Durant le week-end, le bar a vendu en tout 4 éclairs de plus que ceux qui ont été vendus durant les cinq premiers jours de la semaine.

mais le faut aussi comprendre que les informations contenues dans chacune sont reliées entre elles, c'est-à-dire que les conditions de A, valables pour chaque semaine, le sont aussi pour la semaine particulière (la semaine passée) dont on parle en B.

Le point-clé est alors la demande qui fait reconsidérer ce qui se passe chaque jour d'une semaine (quelconque).

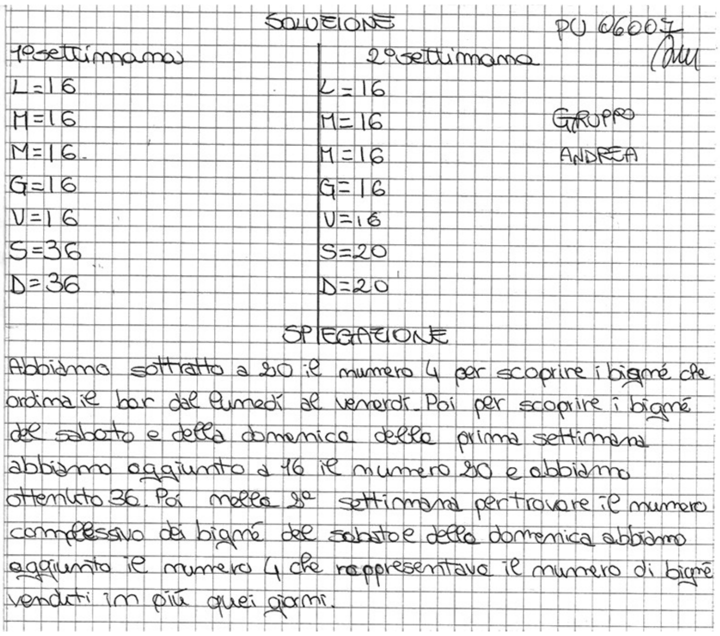
Les difficultés d'interprétation du texte sont apparues de manière évidente lors de l'analyse a posteriori.

Dans quelques copies, les deux expressions :

- « ... tandis que le samedi et le dimanche il commande 20 éclairs de plus que les autres jours.. » (phrase A)
- « Durant le week-end, le bar a vendu en tout 4 éclairs de plus que ceux qui ont été vendus durant les cinq premiers jours de la semaine » (phrase B)

sont perçues comme contradictoires et ont perturbé les élèves comme le montre le commentaire suivant (cat. 7) : « C'est un problème impossible car si il commande 20 éclairs en plus le week-end et qu'il a tout vendu la semaine, il ne peut pas vendre seulement 4 éclairs de plus le week-end.

Dans d'autres copies, les informations des phrases A) et B) ne sont pas reliées et on parle, par exemple, de « deux semaines » ou de « première semaine et de seconde semaine », comme dans l'exemple suivant (cat. 6) :


SOLUZIONE

PU 06007

GRUPPO ANDREA

1° settimana	2° settimana
L=16	L=16
M=16	M=16
M=16	M=16
G=16	G=16
V=16	V=16
S=36	S=20
D=36	D=20

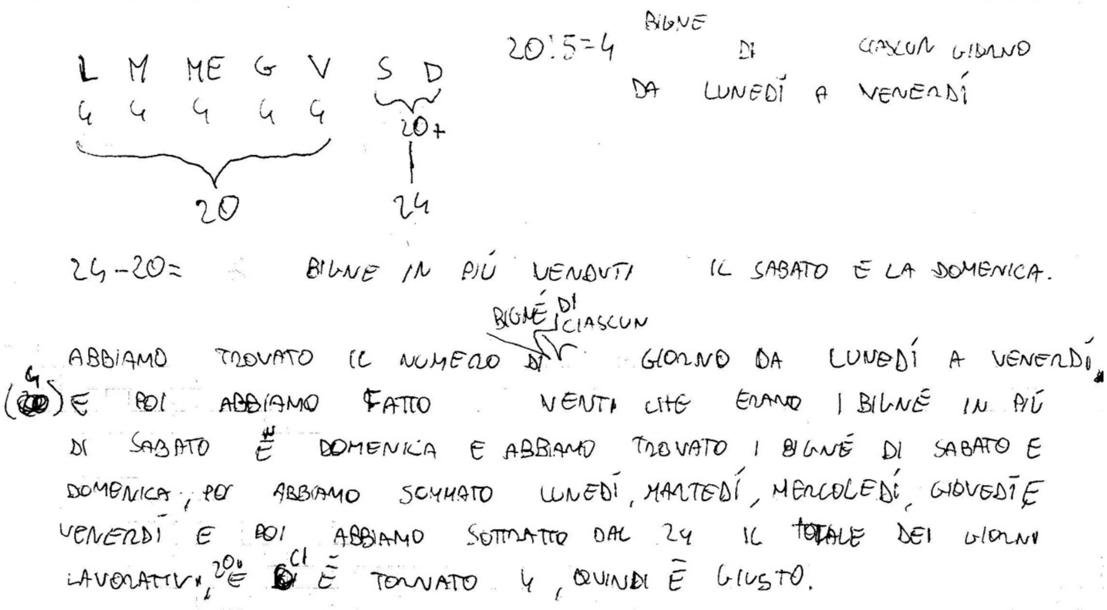
SPIEGAZIONE

Abbiamo sottratto a 20 il numero 4 per scoprire i bigné che ordina il bar dal lunedì al venerdì. Poi per scoprire i bigné del sabato e della domenica della prima settimana abbiamo aggiunto a 16 il numero 20 e abbiamo ottenuto 36. Poi nella 2a settimana per trovare il numero complessivo dei bigné del sabato e della domenica abbiamo aggiunto il numero 4 che rappresentava il numero di bigné venduti in più quei giorni.

(Nous avons soustrait à 20 le nombre 4 pour trouver les éclairs que le bar commande du lundi au vendredi. Puis pour trouver les éclairs du samedi et du dimanche de la première semaine nous avons ajouté à 16 le nombre 20 et avons obtenu 36. Puis dans la deuxième semaine pour trouver le nombre total des éclairs du samedi et du dimanche nous avons ajouté 4 qui représente le nombre des éclairs vendus en plus ces jours.)

On peut faire l'hypothèse que les élèves ont été influencés par la « non-linéarité » respectivement au temps de la séquence des informations et de la demande. L'usage de verbes aux significations différentes des deux phrases (se fait livrer et commande dans la première, vendus dans la seconde), peut aussi avoir créé un obstacle supplémentaire aux liaisons entre les informations qu'elles contiennent.

On relève encore que dans quelques copies, l'expression « ... le samedi et le dimanche il en commande 20 de plus que les autres jours, ... », présente dans la phrase A, a été perçue comme ambigüe. Doit-elle être comprise comme « 20 éclairs en plus soit le samedi soit le dimanche" ou « 20 éclairs en plus en tout » ? Quelques copies montrent que c'est la seconde interprétation qui a été choisie, par exemple dans la suivante (cat. 7) : « Comme le texte n'est pas clair, nous avons pensé que les 20 éclairs supplémentaires livrés le samedi et le dimanche, représentent 20 éclairs en tout. Dans d'autres copies l'information « 20 éclairs en plus » a été interprétée comme « 10 éclairs en plus le samedi » et « 10 éclairs en plus le dimanche ». Cette interprétation a conduit dans quelques cas à retenir que le nombre d'éclairs vendus chaque jour du lundi au vendredi était 4 (et 24 ceux vendus en tout samedi et dimanche), parce que ce résultat vérifiait la condition exprimée en B), comme le montre l'exemple suivant (cat. 6) :



(Nous avons trouvé le nombre d'éclairs de chaque jour du lundi au vendredi (4) et puis nous avons fait vingt qui étaient les éclairs en plus de samedi et dimanche et avons trouvé les éclairs de samedi et dimanche, puis nous avons additionné lundi, mardi, mercredi, jeudi et vendredi et puis nous avons soustrait de 24 le total des jours ouvrables, 20, et nous avons trouvé 4. Donc c'est juste.)

Une curiosité liée à la question : dans celle-ci on demande d'indiquer le nombre d'éclairs commandés chaque jour de la semaine, mais dans toutes les catégories on trouve des copies dans lesquelles on donne comme réponse le nombre total des éclairs commandés pour la semaine entière. Pour de telles réponses on peut sans autre faire l'hypothèse d'une lecture superficielle du texte ou d'une difficulté dans l'interprétation des quantificateurs (« chaque jour » étant considéré comme « tous les jours ») mais probablement aussi de l'influence du modèle de demande standard présent dans de nombreux problèmes arithmétiques : « Combien en tout ? ». Il nous semble aussi reconnaître en ceci une raison supplémentaire pour affirmer que la demande est perçue « détachée » du contexte, dans l'acception de Zan (2008).

Il faut encore relever que la phrase de la question (Combien d'éclairs sont-ils livrés au bar chaque jour de la semaine ?) est ambiguë. L'usage de « chaque » laisse entendre que le nombre est le même pour tous les jours, sans se rendre compte de la confusion ainsi introduite dans le texte entre « semaine » du lundi au vendredi et la fin de la semaine, ou week-end », du samedi et dimanche.

3.1.2. Les difficultés liées à la structure mathématique du problème

Par sa nature *Éclairs au chocolat* est un problème difficilement classifiable parmi ceux de « type arithmétique » (et sa genèse en témoigne clairement ...) : d'une part les nombres de l'énoncé se réfèrent à des opérateurs « +20 », « + 4 » et non à des quantités, et d'autre part les quantités sur lesquelles on opère sont inconnues.

Dans la structure mathématique du problème on peut donc reconnaître une difficulté indiscutable pour les élèves, surtout pour ceux des catégories 6 et 7 !

On peut observer que le problème est aussi descriptible en termes « fonctionnels ». On peut en effet identifier deux fonctions, f et g, sur l'ensemble des nombres naturels définies ainsi :

$f(n) = 5n$, quantité d'éclairs vendus de lundi à vendredi

$g(n) = 2n + 40$, quantité d'éclairs vendus en fin de semaine

Le nombre cherché n des éclairs est celui pour lequel une des inégalités suivantes est vérifiée :

$g(n) = f(n) + 4$, $\qquad f(n) = g(n) – 4$, $\qquad g(n) – f(n) = 4$

[dans la dernière inégalité, le nombre 4 représente encore une fonction (différence de fonctions), ici la fonction constante qui, à chaque nombre naturel, associe le nombre 4].

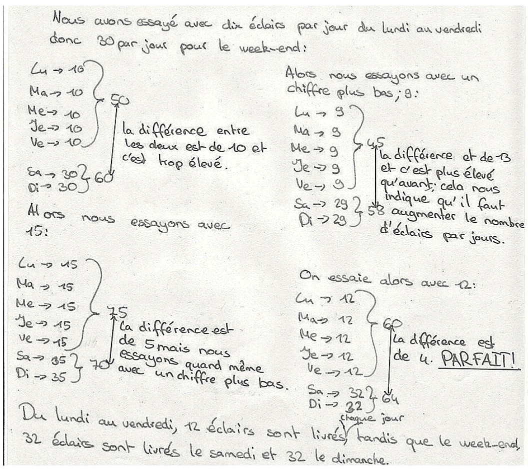
4. Analyse a posteriori : les procédures correctes

L'analyse des copies fournit aussi des informations intéressantes sur la manière d'affronter et de résoudre le problème pour ceux qui ont surmonté les difficultés inhérentes à la situation, et font apparaître une amélioration progressive de la catégorie 6 à la catégorie 8 de la capacité à comprendre le texte et d'engager une stratégie adéquate de résolution (moyennes de 8.3% en cat. 6 ; 26.0 % en cat.7 ; 34.5 % en cat.8).

L'analyse a posteriori montre que, contrairement ce qui avait été imaginé a priori, seulement un nombre très restreint de copies font état d'une représentation comme celle décrite dans l'analyse de la tâche sur le modèle d'une « balance à plateaux ». Encore une fois, comme on l'a déjà relevé dans d'autres problèmes du RMT, le recours à des représentations pour décrire des relations entre les grandeurs en jeu n'est pas familier pour les élèves[5]. Cette difficulté, qui persiste souvent encore en catégorie 8 et au-delà, fait penser que dans la pratique didactique on ne se soucie pas suffisamment de cet aspect.

Dans le cadre algébrique en revanche, il est indéniable que le recours à des représentations appropriées (schémas, graphiques, tableaux ...) donne du « sens » à l'idée d'équation et en justifie l'usage comme instrument dans la résolution de problèmes (ce qui pourra par la suite en justifier l'étude comme objet mathématique ...).

Comme il était prévisible a priori, les catégories 6 et 7 ont procédé par essais, en choisissant une valeur de l'inconnue et procèdent successivement au contrôle de toutes les conditions, comme le montrent les exemples suivants, dans lesquels les essais sont, l'un à la suite de l'autre, visualisés par des schémas ou reportés en tableaux.



Nous avons essayé avec dix éclairs par jour du lundi au vendredi donc 30 par jour pour le week-end:

Lu → 10
Ma → 10
Me → 10
Je → 10
Ve → 10
50
la différence entre les deux est de 10 et c'est trop élevé.
Sa → 30
Di → 30
60

Alors nous essayons avec un chiffre plus bas; 9:

Lu → 9
Ma → 9
Me → 9
Je → 9
Ve → 9
45
la différence et de 13 et c'est plus élevé qu'avant; cela nous indique qu'il faut augmenter le nombre d'éclairs par jours.
Sa → 29
Di → 29
58

Alors nous essayons avec 15:

Lu → 15
Ma → 15
Me → 15
Je → 15
Ve → 15
75
La différence est de 5 mais nous essayons quand même avec un chiffre plus bas.
Sa → 35
Di → 35
70

On essaie alors avec 12:

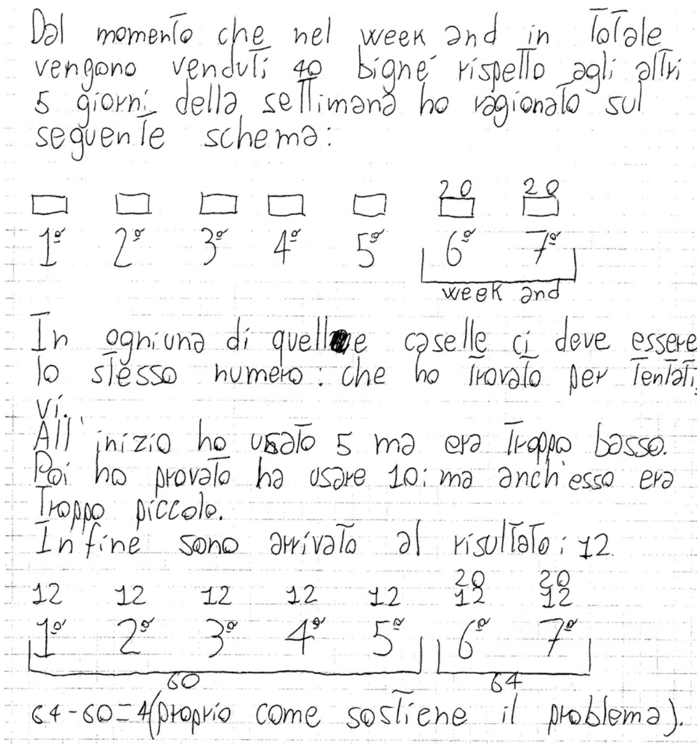
Lu → 12
Ma → 12
Me → 12
Je → 12
Ve → 12
60
La différence est de 4. PARFAIT!
Sa → 32
Di → 32
64

Du lundi au vendredi, 12 éclairs sont livrés chaque jour, tandis que le week-end, 32 éclairs sont livrés le samedi et 32 le dimanche.

[5] Le point de vue que les représentations aident à la résolution ou « donnent du sens » est largement partagé, comme le conseille Polya dans How to solve a problem : « commencez par faire un dessin » . Mais il faut cependant se demander si le dessin est possible avant de maîtriser toutes les relations en jeu ou si c'est la maîtrise de ces relations, c'est-à-dire la « solution », qui permet le dessin. Dans les analyses a priori de nos problèmes, élaborées par des professeurs qui disposent déjà de la solution, on rencontre souvent des représentations, schémas, tableaux, qui sont là pour « expliquer » ou pour « montrer » la solution ; les élèves, eux, doivent la « découvrir ». On peut penser que ce n'est qu'après l'avoir construite qu'ils peuvent l'illustrer, pour la « justifier » via-à-vis des autres mais aussi d'eux-mêmes. La question reste ouverte.

(Nous avons essayé avec 10 éclairs par jour du lundi au vendredi, donc 30 par jour pour le week- end. [schéma I] *la différence entre les deux est de 10 et c'est trop élevé. Alors nous essayons avec un nombre plus petit, 8 :* [schéma II] *la différence est de 13 et c'est plus élevé qu'avant et ceci nous indique qu'il faut augmenter le nombre d'éclairs par jour. Alors nous essayons avec 15:* [schéma III] *la différence est de 5 mais nous essayons quand même avec un chiffre plus bas. On essaye avec 12:* [schéma IV] *la différence est de 4. PARFAIT !*

Du lundi au vendredi, 12 éclairs sont livrés, tandis que le week-end, 32 éclairs sont livrés le samedi et 32 le dimanche)


Dal momento che nel week and in totale vengono venduti 40 bignè rispetto agli altri 5 giorni della settimana ho ragionato sul seguente schema:

20 20

1° 2° 3° 4° 5° 6° 7°

week and

In ognuna di quelle caselle ci deve essere lo stesso numero: che ho trovato per tentativi.
All'inizio ho usato 5 ma era troppo basso.
Poi ho provato ha usare 10: ma anch'esso era troppo piccolo.
Infine sono arrivato al risultato: 12

12 12 12 12 12 20 12 20 12

1° 2° 3° 4° 5° 6° 7°

60 64

64-60=4 (proprio come sostiene il problema).

(Du moment que durant le week-end au total 40 éclairs sont vendus par rapport aux 5 autres jours de la semaine j'ai raisonné en suivant le schéma [voir copie]. Dans chacune de ces cases il devait y avoir le même nombre que j'ai trouvé par essais. Au début j'ai pris 5 mais c'était trop peu. Puis j'ai pris 10 : mais c'était aussi trop petit. Enfin, je suis arrivé au résultat : 12 [voir copie] 64 - 60 = 4 (exactement comme le dit le problème)

SABATO ~~O~~ DOMENICA	AL GIORNO	COMPLESSIVAMENTE AL GIORNO	DIFFERENZA	COMPLESSIVAMENTE SABATO E LA DOMENICA
26	6	30	~~52~~ 22	52
27	7	35	19	54
30	10	50	10	60
31	11	55	7	62
32	12	60	4	64

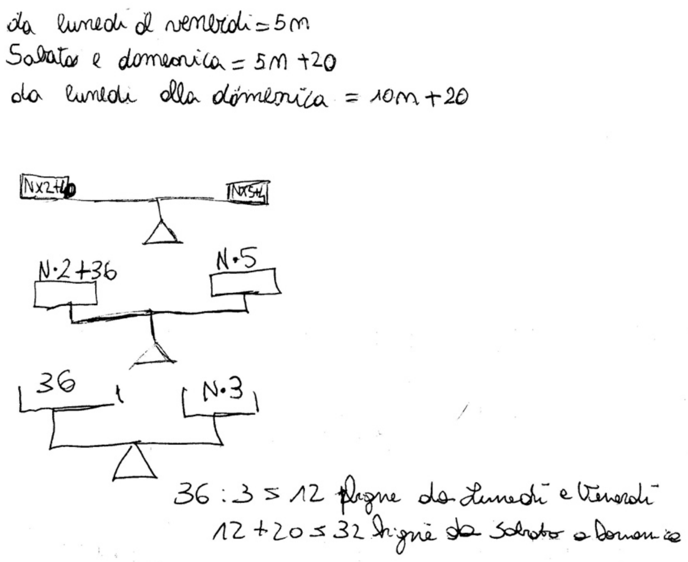
RISPOSTA:
AL GIORNO DAL LUNEDI AL VENERDI ARRIVANO 12 BIGNE E IL SABATO E LA DOMENICA ARRIVANO 32 BIGNE.

(Réponse: Du lundi au vendredi arrivent 12 éclairs et le samedi et la dimanche arrivent 32 éclairs)

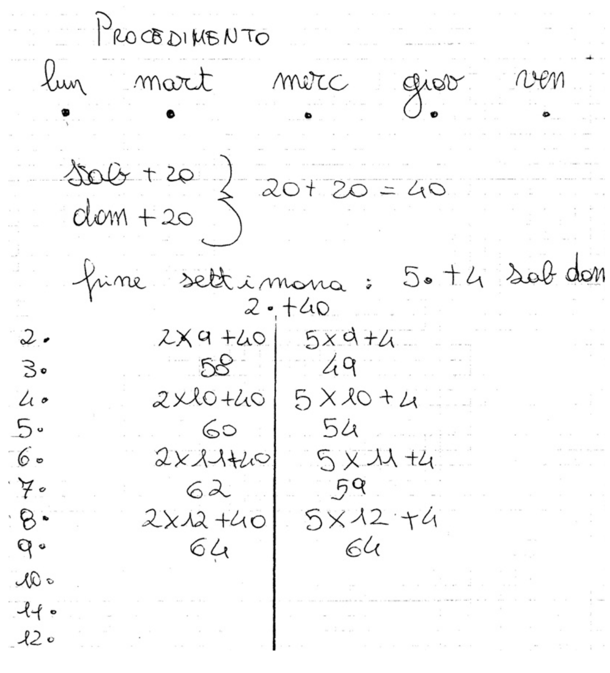
De telles procédures par essais nous conduisent à l'hypothèse qu'il est plus « naturel » de passer par le concept (*en acte)* de fonction pour introduire les équations [… et inéquations !] et en particulier pour passer à la « mise en formules » de manière autonome et en étant conscient de ce qu'elles signifient.

En catégories 6 et 7 on trouve aussi quelques exemples, rares mais significatifs, de stratégies de type pré-algébrique ou algébrique.

Par exemple, la copie suivante de catégorie 7, sur la base d'une représentation qui se réfère à la « balance à plateaux » est en fait une équation et sa résolution. Comme on peut le voir, la procédure mise en œuvre se base sur le maintien en équilibre de la balance et donc, l'application en acte des principes d'équivalence. En plus, sur les plateaux de la balance on retrouve les valeurs déterminantes des fonctions f et g introduites au paragraphe 3, bien décrites en termes symboliques.



La phase pré-algébrique se reconnaît en revanche dans l'exemple suivant, copie intéressante de catégorie 6, dans laquelle la résolution suit une procédure par essais, mais l'inconnue est notée par un « . » et où l'on reconnaît facilement les « concepts en acte » de variable, de fonction et d'équation, cette dernière comme égalité de relations fonctionnelles.



En catégorie 8 la stratégie algébrique se rencontre dans environ la moitié des copies présentant une résolution correcte (il s'agit toutefois d'une minorité de cas, correspondant à environ 13 % du total). Dans ces copies, on procède souvent par la pose formelle d'une équation, écrite aussi sous des formes différentes de celle qui est proposée dans l'analyse a priori (par exemple : $[(x + 20 + x + 20) - 4]: 5 = x$ ou aussi $(x \cdot 2 + 40) - (x \cdot 5) = 4$, résolue ensuite par application des principes d'équivalence ou par essais successifs..

Nous reportons ci-dessous une copie de catégorie 8 qui cependant, montre clairement le « passage » par une phase *rhétorique - syncopée* qui, aussi historiquement, a précédé celle du *langage algébrique - symbolique.*

NEI GIORNI DAL LUNEDÌ AL VENERDÌ, AL BAR ARRIVANO
12 BIGNÈ AL CIOCCOLATO.
NEI GIORNI DI SABATO E DOMENICA NE ARRIVANO 20 IN PIÙ
CIOÈ 32 BIGNÈ.
ABBIAMO RAGIONATO COSÌ:
NELLA SETTIMANA DESCRITTA IL NUMERO DEGLI ARRIVI È UGUALE
A QUELLO DELLE VENDITE.
QUINDI

LA SOMMA DI TUTTI I GIORNI DELLA SETTIMANA È A, I BIGNÈ VENDUTI.
SABATO E DOMENICA È A+4 = 2 TOT + 40
OGNI GIORNO, I BIGNÈ VENDUTI SONO TOT.

$\overset{TOT}{L} + \overset{TOT}{M} + \overset{TOT}{M} + \overset{TOT}{G} + \overset{TOT}{V} = A = 5\ TOT$

$\overset{TOT+20}{S} + \overset{TOT+20}{D} = 2\ TOT + 40 = A + 4$

ABBIAMO TOLTO IL 4, E QUINDI A = 2 TOT + 36 = 5 TOT
ABBIAMO TOLTO ANCHE IL 2 TOT, QUINDI 5 TOT − 2 TOT = 3 TOT = 36
36 : 3 = 12 BIGNÈ RICEVUTI, 1 TOT, DAL LUNEDÌ AL VENERDÌ.
12 + 20 = 32 BIGNÈ RICEVUTI IL SABATO E LA DOMENICA.

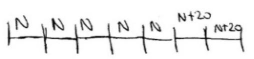
(Les jours du lundi au vendredi, arrivent au bar 12 éclairs au chocolat. Les samedi et dimanche il en arrive 20 en plus, c'est-à-dire 32 éclairs. Nous avons raisonné ainsi : dans la semaine décrite le nombre des arrivées est égal à ceux des ventes. Donc la somme de tous les jours de la semaine est A, les éclairs vendus.
Samedi et dimanche c'est A+4 = 2 tot + 40
Chaque jour il y a tot éclairs vendus,

L (tot) +M(tot)+ M(tot)+G(tot)+V(tot)= 5 tot   S(tot+20) + D(tot+20) = 2 tot+40 = A +4

Nous avons enlevé le 4, et alors A = 2 tot + 36 = 5 tot. Nous avons enlevé aussi les 2 tot,
5 tot – 2 tot = 3 tot = 36. 36:3 = 12 éclairs reçus , 1 tot, du lundi au vendredi. 12+20 = 32 éclairs reçus le samedi et le dimanche)

Dans la copie qui suit, de catégorie 8, on s'aide d'un dessin pour donner du sens à l'équation. La procédure de résolution qui suit est « experte » (malgré une erreur « d'inattention » !).

SOLUZIONE = 12 GIORNO (BIGNÈ)



5N+4 = 2N+40
2N+4 = 5N+4
3N = 36
N = 36:3 = 12
5N + 4 BIGNÉ = 2N+40

N = 12 BIGNÉ AL GIORNO

Toujours en catégorie 8, la stratégie algébrique est présente dans environ un quart des copies dont les procédures sont incorrectes, (correspondant à environ 7% du total). Les erreurs les plus fréquentes sont dues à :

- des erreurs de traduction de la *condition « 4 en plus » se référant aux éclairs vendus en fin de semaine (par rapport à tous ceux vendus du lundi au vendredi) : le texte mentionne « 4* de plus », mais il faut soustraire 4 aux 40 éclairs vendus en plus durant le week-end (samedi et dimanche).

- des erreurs d'interprétation du texte de l'énoncé ; par exemple, on trouve une équation $5x = 2x + 20$, dans laquelle il est évidemment entendu que les éclairs en plus du samedi et du dimanche sont 20 au total, plutôt que 40 ; ou des expressions algébriques à la place d'équations, par exemple $(5 \cdot x) + (x + 20) + (x + 20) + 4$ parce qu'on n'a pas perçu qu'il s'agit de deux écritures différentes pour la même quantité.

5. De l'analyse a posteriori à l'analyse a priori : le retour

L'analyse a posteriori des copies a fourni une série d'informations qui ont permis d'enrichir les « connaissances » sur le problème. Elles constituent des indications précieuses soit pour son utilisation en classe soit pour la préparation de nouveaux problèmes.

5.1 Indications didactiques

Pour les catégories 6 et 7 (mais on exclut pas du tout la catégorie 8), on ne peut pas conseiller de proposer le problème *Éclairs au chocolat* en classe dans les conditions de passation des épreuves du RMT (sans aucune aide de l'enseignant) en raison de obstacles lié au contexte et aux variables rédactionnelles. Pour atténuer ces obstacles, une « mise en commun » intermédiaire paraît indispensable, gérée par l'enseignant, après la lecture de l'énoncé et une première phase d'appropriation pour les élèves.

Nous nous sommes cependant posé ces questions :

- Qu'est-ce qui se passerait si on proposait le problème à des élèves de catégories 9 et 10 ?
- Jusqu'à quel point les difficultés décrites se maintiendront ?
- Les stratégies par essais seront-elles encore privilégiées ou les élèves feront-ils recours à des procédures algébriques ?
- À partir de quand pourra-t-on observer que les procédures algébriques l'emportent ?

Ce sera précisément une des tâches du Groupe Algèbre que de chercher quelques réponses aux questions précédentes, par des expérimentations en classes de lycée.

5.2 La naissance de nouvelles versions du problème et les projets d'activités en classe

Les difficultés relevées a posteriori et rapportées au paragraphe 3 nous ont incité à reprendre le problème et à intervenir sur ses aspects qui sont à l'origine de certains obstacles (langage, contexte, structure mathématique, niveau). Nous avons ainsi élaboré deux nouvelles versions du problème *Éclairs au chocolat*, qui feront l'objet d'expérimentations par les membres du Groupe Algèbre. Nous y avons éliminé les difficultés liées aux variables rédactionnelles, mais nous y avons maintenu le contexte et la structure mathématique dans la première version alors que, dans la seconde, nous avons simplifié aussi la confrontation des relations et des données.

1. Exemple de version modifiée (qui élimine les difficultés liées aux variables rédactionnelles, mais maintient la structure mathématique) :

ÉCLAIRS AU CHOCOLAT I (Cat. 6, 7, 8)

Au bar de Pierre et Anne il y a toujours des éclairs au chocolat.

La semaine passée, du lundi au vendredi, ils ont vendu chaque jour le même nombre d'éclairs ; tandis que le samedi et le dimanche ils en ont vendu **20 de plus par jour**, par rapport aux autres jours.

Pierre dit à Anne : « En seulement deux jours, samedi et dimanche, nous avons vendu **4 éclairs de plus** que durant tout le reste de la semaine ».

Combien d'éclairs ont-ils été vendus chaque jour du lundi au vendredi et combien le samedi et le dimanche ?

Expliquez votre raisonnement.

2. Exemple de version modifiée (qui élimine les difficultés liées aux variables rédactionnelles et simplifie la confrontation entre les relations) :

ÉCLAIRS AU CHOCOLAT II (Cat. 6, 7, 8)

Au bar de Pierre et Anne il y a toujours des éclairs au chocolat.

La semaine passée, du lundi au vendredi, ils ont vendu chaque jour le même nombre d'éclairs ; tandis que le samedi et le dimanche ils en ont vendu **9 de plus par jour**, par rapport aux autres jours.

Pierre dit à Anne : « En seulement deux jours, samedi et dimanche, nous avons vendu **le même nombre d'éclairs** que durant tout le reste de la semaine ».

Combien d'éclairs ont-ils été vendus chaque jour du lundi au vendredi et combien le samedi et le dimanche ?

Expliquez votre raisonnement.

Il est aussi prévu de modifier complètement le contexte en le choisissant plus engageant et plus proche du vécu des élèves. L'élaboration d'un problème de ce type, à proposer éventuellement pour une prochaine édition du RMT, est une des futures tâches du Groupe Algèbre.

Nous présentons enfin un exemple de problème (pour lequel nous remercions F. Jaquet), de même structure mathématique, mais dans un contexte concret extrêmement simplifié.

LES BÂTONNETS

7 bâtonnets sont donnés :

5 «courts», tous de la même longueur,

2 «longs», qui mesurent 20 cm de plus que les «courts».

Les 2 longs mis bout à bout mesurent ensemble 4 cm de plus que les 5 courts ensemble, mis bout à bout.

Combien mesurent les 7 bâtonnets ?

Comme on le voit, toutes les difficultés de l'énoncé liées au contexte temporel, aux jours de la semaine et aux possibles erreurs d'interprétation sont évacuées. Cette version nous paraît didactiquement intéressante, à proposer peu après la version reformulée de *Éclairs au chocolat I* pour contrôler, entre autres, si les élèves reconnaissent qu'il s'agit du même problème du point de vue mathématique. (La modélisation algébrique conduit en effet à la même équation !)

6. Conclusions

L'approfondissement de l'analyse a posteriori d'un problème qui s'est révélé, de manière inattendue, beaucoup plus difficile que prévu, a été très intéressant. Un problème retenu a priori comme un « bon problème » peut, comme dans ce cas, présenter une série de difficultés qui en empêchent l'appropriation pour la majorité des élèves : encore une fois, ce qui semble clair pour l'adulte qui propose le problème ne l'est pas forcément pour les élèves auxquels on s'adresse !

L'analyse a posteriori de *Éclairs au chocolat* nous a permis, en allant sur le « terrain des élèves », de constater les difficultés qu'ils rencontrent et de chercher à en comprendre les causes possibles. Elle nous a aussi permis de nous rendre compte que ce problème ne devrait pas être proposé en classe dans sa version actuelle (du moins à l'école secondaire de degré I). Les « retours » successifs sur ce problème, enrichis des expérimentations effectuées nous ont permis de créer d'autres versions, variantes du problème d'origine, et nous ouvrent de nouvelles pistes à explorer.

Après la Rencontre internationale, les premières variantes d'*Éclairs au chocolat* ont été expérimentées dans quelques classes de l'Ecole Secondaire et au Lycée, alors que la dernière version élaborée *Au musée* (voir. ANNEXE), a été insérée dans l'épreuve II du 22^{e} RMT. A la suite de son analyse a posteriori on peut déjà dire que le problème *Au musée* est resté difficile en catégories 6 et 7 avec des moyennes respectives de 0,9 et 1,3 points (au lieu de 0,4 et 0,8) et que c'est seulement à partir de la catégorie 8 que les progrès ont été plus évidents (2,2 au lieu de 1,4). Les résultats des expérimentations, ainsi que l'analyse détaillée du problème *Au musée* feront l'objet d'un prochain article du Groupe Algèbre.

Encre une fois on peut affirmer que le dispositif du RMT et les expérimentations dans les classes ont permis de recueillir des données dont l'utilisé est essentielle pour évaluer l'apport des problèmes dans la construction de connaissances ou de concepts.

7. Bibliographie

Andriani A., Doretti L., Medici D., Rinaldi M.G, Salomone L.: 2013, 'Equazione come strumento e come oggetto: analisi di difficoltà ed errori/ L'équation en tant qu'outil et objet: analyse des difficultés et des erreurs', La Gazzetta di Transalpino, n° 3, 83-101

Doretti L., Medici D., Rinaldi M. G., Salomone L.: 2009, 'Dare significato ai concetti di equazione e di sistema: attività in classe con i problemi del RMT', in L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds), Rallye Mathématiques Transalpin et interculturalité/Rally Matematico Transalpino e intercultura, Vol. 8, Brigue 2008, ARMT, SCNAT, 121-142

Grugnetti L., Jaquet F., Medici D., Rinaldi M.G.: 2014, 'Verso la costruzione di concetti attraverso l'analisi delle procedure degli allievi e degli ostacoli che incontrano nella risoluzione di problemi', L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 37A, N. 2,133-161

Zan R.: 2008, 'Ricerca e RMT insieme per definire che cos'è un buon problema', in L. Grugnetti, F. Jaquet, G. Bellò, R. Fassy, G. Telatin (Eds), RMT fra pratica e ricerca in Didattica della Matematica/ RMT entre pratique et recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 7, Bard 2007, centro Risorse per la Didattica della Matematica, sezione della Valle d'Aosta dell'ARMT, ARMT, 19-30

ANNEXE

(21.I.10) **ÉCLAIRS AU CHOCOLAT** (Cat. 6, 7, 8)

Au bar du club de vacances « Archimède », il y a toujours des éclairs au chocolat. Chaque jour, du lundi au vendredi, le bar se fait livrer la même quantité d'éclairs ; tandis que le samedi et le dimanche il commande 20 éclairs de plus que les autres jours, parce qu'il y a une plus forte demande.

Chaque jour de la semaine dernière (du lundi au dimanche) tous les éclairs ont été vendus. Durant le week-end, le bar a vendu en tout 4 éclairs de plus que ceux qui ont été vendus durant les cinq premiers jours de la semaine.

Combien d'éclairs sont-ils livrés au bar chaque jour de la semaine?

Expliquez votre raisonnement.

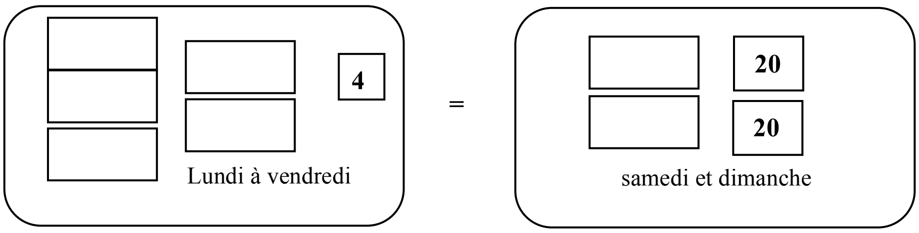
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Arithmétique : les quatre opérations, équivalences
Algèbre : équations du premier degré

Analyse de la tâche

- Se représenter la situation pour les différents jours de la semaine avec une « quantité » quotidienne, les deux « suppléments » de 20 du samedi et dimanche, les « 4 de plus » et la relation d'égalité.
  On peut penser à des « paquets » pour la quantité quotidienne, ou utiliser une représentation graphique de la situation évoquant les plateaux d'une balance en prenant garde à placer le « 4 » dans le bon plateau, par exemple :



  cette représentation, mentale ou graphique, suggère une simplification de la relation en « retirant » 2 « quantités » quotidienne et 4 de chaque membre de l'égalité pour arriver à l'équivalence de 3 « quantités » quotidiennes et de 36.
  En déduire que, chaque jour ouvrable de la semaine (lundi à vendredi), sont livrés 12 (36 : 3) éclairs, et le week-end (samedi et dimanche) 32 éclairs (12 + 20).

Ou: procéder par essais organisés en imposant un nombre d'éclairs livrés du lundi au vendredi et vérifier si les autres conditions sont remplies, sinon ajuster progressivement les valeurs.
  Par exemple, avec 10 on obtient 50 et 60, avec 20 : 100 et 80, avec 15 : 75 et 70 (on s'approche), et finalement avec 12, on obtient 60 et 64 correspondant au « 4 de plus » pour le week-end.

Ou, par voie algébrique, en désignant par x le nombre d'éclairs livrés chaque jour ouvrable par $x + 20$ ceux livrés le week-end, on aboutit à une équation $5x + 4 = 2(x + 20)$ ou $5x = 2(x + 20) - 4$ ou dont la solution est 12 (nombre d'éclairs livrés du lundi au vendredi) et calculer le nombre d'éclairs livrés un jour du week-end 32 = 12 + 20.

Attribution des points

4 Réponses correctes (32 éclairs le samedi et dimanche, 12 éclairs les autres jours) avec des explications claires (par exemple, détail des calculs)
3 Réponses correctes avec des explications peu claires ou seulement avec une vérification
2 Réponses correctes sans aucune explication
  ou une erreur de calcul pour l'une des deux réponses
1 Début de raisonnement correct
  ou une erreur dans l'écriture de l'équation due à l'incompréhension de l'expression « 4 de plus que »
0 Incompréhension du problème

(22.II.11) **AU MUSÉE** (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)
Sept amis vont visiter un musée. Ils doivent choisir entre deux types de parcours prévus : visite réduite et visite complète. Le billet pour la visite complète coûte 10,50 euros de plus que l'autre.
Cinq d'entre eux prennent chacun un billet pour la visite réduite, mais Pierre et Anne achètent chacun un billet pour la visite complète.
À la sortie, Pierre dit à Anne : « à nous deux, nous avons dépensé 6 euros de plus que les cinq autres ensemble ».
Combien coûte chacun des billets, pour la visite réduite et pour la visite complète ?
Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un nombre entier tel que son quintuple augmenté 6 soit égal au double de ce nombre augmenté de 21.

Analyse de la tâche

- Procéder par des essais organisés en supposant un certain prix pour la visite réduite, en déduire celui de la visite complète et vérifier si l'affirmation de Pierre est satisfaite. Sinon, modifier progressivement les valeurs supposées.
  Par exemple, si on suppose 10 euros pour la visite réduite on obtient 41 euros pour Pierre et Anne et 50 euros pour les autres, la différence n'est pas 6 euros ; avec 7 euros on obtient 35 euros pour Pierre et Anne ainsi que pour les cinq autres, ce qui ne va pas ; avec 6 euros on obtient 33 euros pour Pierre et Anne et 30 pour les autres, ce qui ne va pas non plus ; avec 5 euros on obtient 31 euro pour Pietro et Anne et 25 euro pour les autres, la différence est bien de 6 euros. Déduire que le prix pour la visite complète est de 15,50 euros (= 5 + 10,50).

Ou : se représenter la situation en considérant que cinq amis ont payé 5 fois le même prix, pendant que Pierre et Anne ensemble ont payé 2 fois celui-ci plus 21 euros (10,50 × 2). On peut ensuite faire la comparaison entre la dépense de Pierre et d'Anne avec celle des cinq amis, par exemple en ajoutant 6 euro à la dépense de ces derniers. Obtenir ainsi que cinq fois un même prix augmenté de 6 est égal à deux fois le même prix augmenté de 21. De cette représentation (mentale ou graphique) déduire que 3 fois le même prix est égal à 15 (= 21− 6) euros et donc que le prix du billet pour la visite réduite est de 5 euros et celui de la visite complète est de 15,50 euros.

Ou : par l'algèbre, en notant x le prix du billet de la visite réduite et x + 10,50 celui de la visite complète, établir l'équation $5x + 6 = 2(x + 10{,}50)$ ou $3x = 15$, dont la solution est 5, et en déduire le prix du billet de la visite complète : 15,50 euros.

Attribution des points

4 Réponses correctes (5 euros pour la visite réduite ; 15,50 euros pour la visite complète) avec des explications claires et, dans le cas d'une procédure par essais, vérification des conditions

3 Réponses correctes mais avec des explications peu claires ou seulement une vérification
ou bien procédure correcte et bien expliquée, mais explicitée seulement le prix d'un seul type de parcours

2 Réponses correctes sans explication
ou bien erreur de calcul pour une des deux réponses, mais procédure correcte l'

1 Début de raisonnement correct
ou bien réponse « 9 euros » dû à une mauvaise utilisation des 6 euros de différence dans la comparaison entre les deux dépenses

0 Incompréhension du problème

LES PROBLEMES DU RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN, UNE RESSOURCE POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Bernard Anselmo[1], Michel Henry[2]

Résumé
Depuis 20 ans, le Rallye Mathématique Transalpin, s'adresse aux élèves de 8 à 15 ans de différents pays. Il leur propose de résoudre par classe entière des problèmes « atypiques » sans aide de leur enseignant. Les énoncés produits, les productions recueillies, les analyses des résultats, mais aussi les récits d'expérimentation constituent une base de données importante, aussi bien d'un point de vue quantitatif que qualitatif, disponible pour la recherche et la formation des enseignants. Cette base de données a été présentée lors du colloque de la COPIRELEM (Commission permanente des IREM sur l'enseignement élémentaire) qui s'est tenu à Besançon du 16 au 18 juin 2015, sous la forme d'un atelier de trois heures montrant comment exploiter un problème du RMT pour la formation des enseignants.

Les problèmes du RMT : une ressource pour la classe, la recherche et la formation

Les problèmes du RMT présentent les spécificités suivantes :

- Ils font tous l'objet d'analyses a priori élaborées à la suite **d'une large consultation entre ses animateurs (enseignants et chercheurs**). Celles–ci décrivent les contenus mathématiques abordés, détaillent la tâche de l'élève et fournissent des critères communs permettant d'attribuer des points aux productions des élèves.
- Leur résolution est sous l'entière responsabilité de la classe qui, en **l'absence de l'enseignant habituel, doit livrer une seule copie par problème présentant ses solutions accompagnées d'explications, dans des conditions de passation déterminées (de 5 à 7 problèmes pour la classe en 50 minutes).**
- Après la passation de chaque épreuve, une synthèse des premiers résultats donne pour chaque problème une « moyenne » de points par catégorie, sur l'ensemble des classes de toutes les sections, ainsi que la répartition de ces points de 0 à 4 selon les critères définis dans l'analyse a priori. Cette synthèse est réalisée sur des **milliers de classes de pays différents. Elle donne** une indication précieuse de la « réussite » du problème, de « l'incompréhension » (0 point) jusqu'à la réponse correcte avec justifications complètes (4 points).

  Elle permet aussi, en comparant les moyennes obtenues à un même problème posé à des classes de plusieurs niveaux scolaires, de voir **l'évolution de cette réussite en fonction de l'âge des élèves.**
- **Pour de nombreux** problèmes, des analyses a posteriori sont conduites par des groupes de travail composés d'enseignants, formateurs et chercheurs de différents pays ou régions à partir des copies archivées dans les sections. Elles permettent d'identifier les procédures adoptées par les élèves lors de leur résolution, les difficultés, les obstacles, les erreurs récurrentes, le niveau de construction des concepts mathématiques, et sont utiles à la **recherche et à la formation.** Elles fournissent **de nombreuses idées** d'exploitation didactique des problèmes à l'intention des enseignants qui voudraient les insérer dans le parcours d'apprentissage de leur classe.

I EXPLOITER UN PROBLÈME DU RMT POUR LA FORMATION

Les participants de l'atelier ont suivi le début d'un dispositif de formation destiné aux enseignants du cycle 3 (niveaux 4, 5, 6) et construit autour d'un problème du RMT. Ce dispositif pourrait être repris avec d'autres problèmes tirés de la banque de l'ARMT.

1. Le dispositif de formation

1.1. Les objectifs

Outre des objectifs notionnels portés par le problème choisi, la formation vise des objectifs didactiques liés à la conception et à la conduite d'un enseignement par résolution de problèmes. Ces objectifs sont proposés aux participants sur la forme suivante :

- Conduire une analyse *a priori* d'un problème pour pourvoir ensuite mieux observer les élèves au travail ;
- Conduire une analyse *a posteriori* pour définir les objectifs de la mise en commun et la conduire en l'appuyant sur des productions d'élèves.

[1] ESPÉ Lyon 1, IREM de Lyon, ARMT bernard.anselmo@univ-lyon1.fr
[2] IREM de Franche-Comté, ARMT, michel.henry@univ-fcomte.fr

1.2. Le déroulement prévu

La formation prévue sur 3 heures s'organise en 4 temps suivis chacun d'un temps d'échanges entre participants et d'éventuels apports du formateur.

1. Résolution du problème par les participants.

Ils travaillent individuellement ou par groupe de deux et doivent identifier les connaissances mathématiques mises en jeu.

2. Analyse *a priori*

Elle est conduite par les participants eux-mêmes, réunis en groupes de 4 et guidés par un certain nombre de questions :

- Quelles sont les procédures de résolution, exactes ou erronées, que peuvent utiliser les élèves pour résoudre ce problème ?
- Quelles sont les difficultés que les élèves sont susceptibles de rencontrer ?
- Quelles sont les erreurs possibles ?
- Quelles sont les origines possibles de ces erreurs ?

3. Analyse de copies d'élèves

Chaque groupe reçoit des copies d'élèves (une quinzaine) et en effectue un classement en vue de conduire ensuite en classe une mise en commun des productions. Les critères de classement sont laissés à l'appréciation de chacun, mis en débat dans le groupe. Les objectifs de la mise en commun en classe des productions des élèves devront être précisés.

4. Bilan

Il s'agit d'explorer différentes mises en commun possibles, en listant les éléments de synthèse susceptibles de s'en dégager (statuts des dessins et des figures dans un problème de géométrie aux différents niveaux, utilisation des instruments, appels à des connaissances anciennes, institutionnalisations possibles…), les modalités selon lesquelles elles pourraient être menées et d'envisager les éventuels prolongements qui pourraient leur être donnés.

1.3. L'analyse du dispositif

Ce dispositif peut être analysé dans un modèle[3] structuré en 5 paliers d'études qui caractérisent les activités de formation selon leur nature, le positionnement du formé et les connaissances convoquées.

Dans cette structure, le temps 1 de la formation se situerait d'abord au palier 0, celui de l'activité mathématique où les participants placés en position d'élèves ont un problème à résoudre, puis au palier 1, celui d'analyse réflexive de l'activité où, en tant qu'enseignants, ils échangent sur les connaissances mathématiques mises en jeu.

Les temps 2 et 3 où les participants prennent le statut d'enseignant pour anticiper l'activité des élèves, analyser des productions et envisager leur exploitation pourraient se situer au palier 2, celui de l'analyse didactique et pédagogique. Le temps 4, celui du bilan, dans lequel les participants interrogent leurs pratiques en comparant leurs propositions, pourrait être catégorisé dans le palier 3 du modèle, celui de l'analyse réflexive de l'activité didactique et pédagogique. Ainsi le dispositif de formation apparaît d'autant plus riche qu'on imagine facilement comment il pourrait se prolonger au palier 5 du modèle dans lequel les participants prendraient la posture de chercheurs pour questionner plus avant une problématique qui se dégagerait de la formation. Nous y voyons un prolongement possible pour des recherches sur l'utilisation du RMT comme outil de formation.

2. La tarte de Mamie Lucie

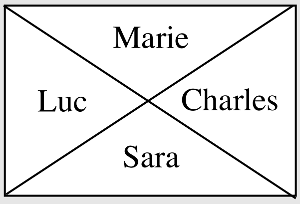
Le problème sur lequel les participants à l'atelier ont travaillé, est un problème tiré du 22^{e} RMT, il a été proposé en 2014 aux élèves de catégorie 4, 5 et 6 c'est à dire en France de CM1, CM2 et de sixième. Voici son énoncé :

[3] Les animateurs de l'atelier ont conçu leur dispositif en différents temps en relation avec les cinq paliers du modèle de formation, décrit ici, qu'ils avaient adopté.

LA TARTE DE MAMIE LUCIE

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.

Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

2.1 Résolution par les participants

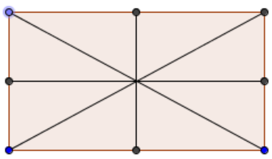
Le problème a été résolu par certains en utilisant les propriétés des axes de symétries du rectangle qui le partagent en 4 rectangles superposables puis celle des diagonales du rectangle qui partagent les rectangles obtenus en deux triangles de même aire. D'autres ont fait appel à la propriété des médianes d'un triangle qui le partage en deux triangles de même aire.

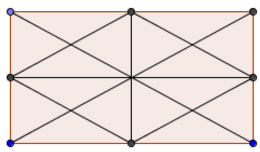
Ils ont identifié dans ce problème les connaissances sous-jacentes liées à la notion d'aire et aux propriétés géométriques du rectangle. Ils ont remarqué qu'elles seraient souvent mobilisées en actes par les élèves et parfois utilisées de façon plus explicite, par exemple dans un calcul d'aire. Il est à noter qu'à ce moment de l'atelier, la question de la généralité de la preuve n'a pas été soulevée.

2.2 Analyse a priori

Les participants à l'atelier ont anticipé un certain nombre de procédures correctes ou erronées que les élèves pourraient mettre en œuvre :

- Interprétation uniquement visuelle :
  - Les triangles de Marie et Sara ont une base plus grande donc leur aire est plus grande
  - Les triangles de Luc et Charles sont plus grands car ils sont plus hauts.
- Mesure et formule de l'aire du triangle ; erreurs de mesures ou de calcul ou d'approximation.
- Découpage/comptage : traçage d'un pavage du rectangle en huit ou en seize morceaux et comparaison des parts de gâteau par comptage des différentes partie composant chaque part.





- Découpage/superposition : découpage avec ou sans utilisation du calque, reproduction du triangle de Luc puis découpage et superposition sur le triangle de Marie.
- Utilisation d'un quadrillage puis comptage du nombre de carrés.
- Interprétation du vocabulaire de l'énoncé : « on a partagé en 4 donc ¼ chacun. »

Les participants à l'atelier ont répertorié les difficultés liées à la compréhension de la notion de partage (équitable ou non), à celle de la notion d'aire (en se limitant par exemple à une comparaison de surfaces par superposition), celles liées à la précision (des découpages, des quadrillages, des mesures…). Cette dernière interrogation les a amenés à questionner le choix des variables didactiques qui détermine pour une part les comportements des élèves et leurs apprentissages. Notamment, la dimension du rectangle représentant le gâteau, un rectangle explicitement à l'échelle ou non… permettent (ou ne permettent pas) que les élèves choisissent de travailler sur le dessin avec leurs instruments de mesures et contournent l'obstacle d'une réponse plus théorique.

On peut remarquer qu'à ce stade les participants n'ont pas explicitement cité parmi les difficultés, celle qui consiste à identifier la grandeur en jeu dans ce problème quand on parle de quantité de tarte.

2.3 Analyse des productions

Les participants à l'atelier, regroupés par 4, ont reçu une vingtaine de productions d'élèves de sixième (niveau 6) de la section de Franche-Comté (voir annexe 1). Ils ont eu pour consigne de les classer en vue de conduire ensuite une mise en commun autour de ces productions.

Les critères de tri n'ont pas été les mêmes entre les groupes, voire même au sein d'un même groupe. Si certains se sont davantage intéressés aux procédures mises en œuvre par les élèves, d'autres se sont attachés aux justifications apportés ou à la nature des arguments donnés pour répondre au problème.

Un autre critère de tri possible a été dégagé dans l'analyse a posteriori menée sur 208 copies par la section RMT de Franche-Comté (voir annexe 2) : celui du niveau de maturité géométrique accompagnant le passage d'une géométrie perceptive à une géométrie instrumentée et celui du saut épistémologique du dessin à la figure.

Ceci conduit à envisager un classement en deux catégories :

- A - travail sur le dessin géométrique, découpages, pliages, coloriages, mesures de longueurs et d'angles, calculs de périmètres et d'aires.
- B - rapport à la figure comme objet abstrait représenté par le dessin : référence explicite ou implicite à une propriété géométrique du rectangle, raisonnement généralisable à tout rectangle, comparaison d'aires par application de la formule générale, calcul littéral.

Une grille de classement peut alors être proposée (des exemples correspondants de copies sont en annexe 1) :

- A0 - Incompréhension du problème, affirmation simple, par exemple : les parts sont égales parce que chacun a reçu ¼ du gâteau (copie 6FC6032).
- A1 - Découpage du dessin donné, recompositions style puzzle et superpositions des assemblages pour faire des comparaisons (copies 6FC6045 et 6FC6178).
- A2 - Tracés sur le dessin donné, par exemple des médiatrices, et constatations visuelles (égalité des triangles rectangles, coloriages, copies 6FC6086 et 6FC6180) ou autres explications (utilisation d'un quadrillage, copie 6FC6008).
- A3 - Mesures approximatives de longueurs sur le dessin donné et calculs approchés.
  - A3a : Mesures des périmètres et réponse : « les parts sont inégales » (copie 6FC6088, 6FC6016, 6FC6144 et 6FC6103).
  - A3b : Mesures des aires par la formule de l'aire du triangle (copie 6FC6092, réponse : « les parts sont égales » et 6FC6010 et 6FC6147, réponses : « les parts sont inégales »).
  - A3c : Mesures des angles au sommet des triangles isocèles (copie 6FC6014, réponse : « les parts sont inégales »).
- B1 - Raisonnement sans reproduction du dessin : les bases sont inégales, donc les périmètres sont différents, réponse : « les parts sont inégales » (copie 6FC6085).
- B2 - Constructions sur des figures géométriques
  - B2a - Dessin d'un rectangle quelconque et tracés des médiatrices (égalité des rectangles copie 6FC6091, réponse : « les parts sont égales) ou d'un quadrillage (copie 6FC6029, réponse : « les parts sont inégales »).
  - B2b - Tracés des médiatrices : les triangles rectangles sont égaux, chacun a donc reçu 2/8^{e} de la tarte (copie 6FC6083).
- B3 - Calcul littéral des aires sans mesures : le rectangle a pour côtés L et l et la part des filles a pour aire $L\times l/2$ et celle des garçons $l\times L/2$, d'où « les parts sont égales » (copies 6FC6193 et 6FC6159).

II DISCUSSION ET PROLONGEMENTS[4]

Les différences apparues dans les critères de classement ont amené les participants à réinterroger le choix des variables didactiques effectué dans la présentation du problème : celui de donner la figure sur un papier uni ou quadrillé, ou de ne pas la donner, celui de proposer un énoncé contextualisé (partage d'une tarte) plutôt qu'un énoncé « mathématique », du type : « voici un rectangle partagé en 4 parties, ont-elles la même aire ? », moins porteur d'ambiguïté. Sur ce dernier point, l'importance de la modélisation dans l'activité mathématique a été mise en avant pour argumenter en faveur d'une présentation contextualisée.

[4] Nous nous limitons dans ce paragraphe à un compte rendu des questions qui se sont posées aux participants à l'atelier, sans questionner le dispositif de formation lui-même. Un tel prolongement qui supposerait la mise en place d'un recueil systématique de toutes les interventions, pourrait intéresser les recherches sur la formation des enseignants.

La difficulté à sélectionner des productions en vue d'organiser une mise en commun en classe a aussi été soulignée. Elle renvoie aux choix des critères de tri et donc aux objectifs que l'enseignant pourrait fixer à cette mise en commun. La richesse du problème permet plusieurs pistes d'exploitation didactique qui apparaissent après une analyse que, dans une classe ordinaire, l'enseignant n'est peut-être pas en mesure de mener seul. En ce sens, les pistes fournies dans la banque de problèmes de l'ARMT (voir la sitographie) peuvent s'avérer être une aide utile.

Sur un thème aussi essentiel que la détermination de l'aire d'un triangle, le problème de La tarte de Mamie Lucie offre de multiples possibilités d'exploitations :

- la confrontation entre une procédure par pavage ou par la recherche d'unités d'aire « non-conventionnelle » et la procédure par calcul d'un produit de mesures,
- le lien entre l'aire d'un rectangle et celle des deux triangles rectangles qui le composent,
- l'affrontement direct du conflit aire-périmètre,
- l'imprécision des mesures de longueur prises à la règle et ses effets sur le calcul des aires,
- l'approche de raisonnement déductifs à propos de la partition d'un rectangle par ses diagonales et médiatrices, des mesures des longueurs et des aires des huit triangles rectangles.

De même en formation, l'analyse croisée des productions d'élèves sur le problème de « la tarte de Mamie Lucie » peut amener à des considérations :

- d'ordre général sur les situations de recherche :
  - la diversité des démarches utilisées par les élèves ;
  - l'inventivité des élèves;
  - leur difficulté à expliquer leurs démarches par écrit …
- sur l'enseignement des grandeurs :
  - la confusion entre aire et périmètre ;
  - le fait que les élèves utilisent majoritairement la mesure ;
  - le constat que l'enseignement des grandeurs va peut-être souvent trop vite vers la mesure sans prendre suffisamment de temps pour installer le concept...
  - la nécessité d'un passage par des manipulations, pavages et conservations-comparaisons de longueurs, angles et aires, avant d'introduire des mesures.
- sur l'enseignement de la géométrie :
  - le passage d'une géométrie perceptive du dessin, à une géométrie du dessin instrumenté, où la règle et le compas sont porteurs de propriétés géométriques, puis passage de la géométrie du dessin à la géométrie des figures par la reconnaissance de propriétés communes, et enfin l'utilisation des éléments de déductions et de preuves.

Une présentation en ligne de la banque de problèmes (voir la sitographie ci-dessous) a suivi ces échanges. Elle a montré comment ce dispositif de formation pouvait être prolongé avec d'autres problèmes du même type qui peuvent être rapidement identifiés et faire l'objet d'expérimentation en classe. Elle a montré aussi comment par différentes entrées, des dispositifs de formations analogues pouvaient être élaborés dans le cadre d'autres thématiques.

III. CONCLUSION

L'atelier a permis de présenter un dispositif de formation des enseignants construit autour d'un problème du RMT et d'en montrer les potentialités.

D'autres dispositifs utilisent aussi des problèmes du RMT : en formation initiale, ils consistent par exemple à interroger les conceptions des mathématiques des étudiants stagiaires en leur faisant vivre des épreuves de rallye. En formation continue ils peuvent amener les enseignants à réfléchir sur l'apprentissage par résolution de problèmes ou le travail des élèves en collaboration.

Depuis longtemps le formateur sait qu'il peut trouver de précieuses ressources dans les rallyes mathématiques. Il dispose aujourd'hui d'un outil performant pour y accéder : la banque de problèmes du RMT.

BIBLIOGRAPHIE

ANSELMO B., HENRY M., (2015) Les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin, une ressource pour la formation des enseignants ? in *Actes du XXXXII^{e} colloque COPIRELEM*, IREM de Franche-Comté.

CHARNAY R. (2006) Potentialités et limites des problèmes du RMT, 15-24, in *Actes des journées d'études sur le rallye mathématique volume 6.* Éditeurs : GRUGNETTI L., JAQUET F., MEDICI D, RINALDI G.

DANOS A., MASSELOT P., SIMARD A., WINDERC. (1994) Analyser une ressource de formation : « exemple de la situation des annuaires » in *Actes du XXXXI^{e} colloque COPIRELEM*, IREM d'Aquitaine.

HOUDEMENT C. (2003) Autour des stratégies de formation des maitres du premier degré 23-32, in *Carnets de route de la COPIRELEM*, *Concertum Dix en de formation des professeurs des écoles en mathématiques.* Paris : ARPME

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maitres du premier degré en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, 16/3, 289-322, Grenoble : La pensée sauvage.

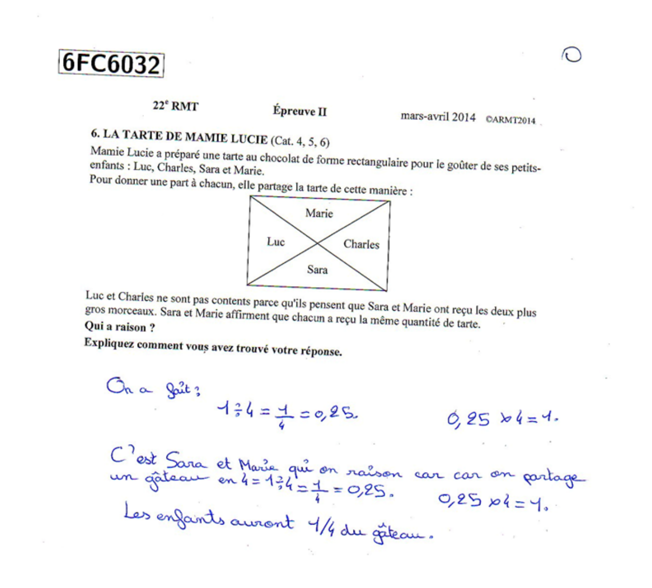
JAQUET F. (2014) *A propos de triangles.* In Math-École 222, 69-75

LE BORGNE P. (2003) Des rallyes pour faire des mathématiques autrement, 419-448, in *Actes du XXX^{e} colloque COPIRELEM*, IREM de Marseille.

SITOGRAPHIE

Association Rallye Mathématique Transalpin : http://www.armtint.org/
Banque de problèmes du RMT : http://www.projet-ermitage.org/ARMT/bd-armt.html
Étude du problème *La tarte de Mamie Lucie* :
http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=gp94-fr&flag=1&langue=fr&w=0
Association RMT section de l'Ain : http://arma01.fr/rallye/
Le RMT en Franche-Comté : http://www.apmep.fr/-Rallye-Mathematique-Transalpin-RMT

Annexe 1 (productions d'élèves)



6FC6032

0

22e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

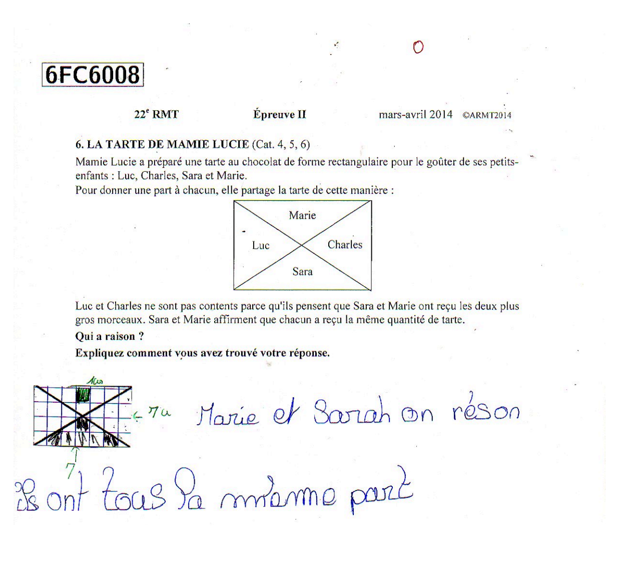
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :

Marie Luc Charles Sara

Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

On a fait : $1 \div 4 = \frac{1}{4} = 0{,}25$. $0{,}25 \times 4 = 1$.

C'est Sara et Marie qui on raison car car on partage un gâteau en $4 = 1 \div 4 = \frac{1}{4} = 0{,}25$. $0{,}25 \times 4 = 1$.
Les enfants auront 1/4 du gâteau.



6FC6008

0

22e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

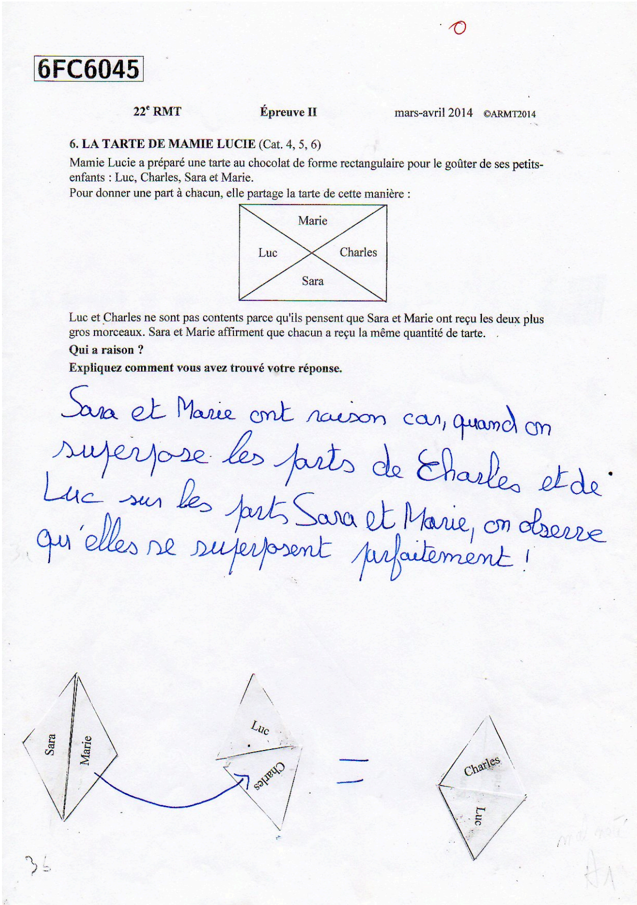
6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :

Marie Luc Charles Sara

Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

7a Marie et Sarah on réson
7
Ils ont tous la mêmme part



6FC6045

0

22e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

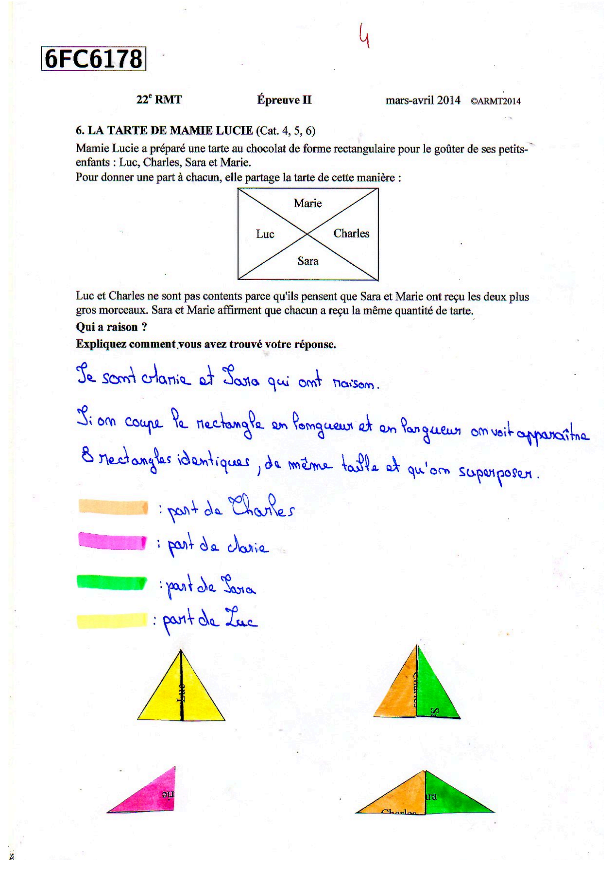
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :

Marie Luc Charles Sara

Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Sara et Marie ont raison car, quand on superpose les parts de Charles et de Luc sur les part Sara et Marie, on observe qu'elles se superposent parfaitement !

Sara Marie Luc Charles = Charles Luc



6FC6178

4

22e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :

Marie Luc Charles Sara

Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Ce sont Marie et Sara qui ont raison.
Si on coupe le rectangle en longueur et en largeur on voit apparaître 8 rectangles identiques, de même taille et qu'on superposer.

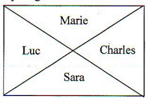
: part de Charles
: part de Marie
: part de Sara
: part de Luc

4

6FC6086

22^{e} RMT **Épreuve II** mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

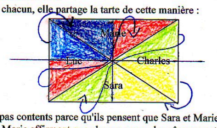
Si on coupe le rectangle en 4 et qu'on le recoupe en 4 on voit que chacun des enfants a $\frac{1}{4}$ du gâteau. Donc ce sont Sara et Marie ont raison.

4

6FC6180

22^{e} RMT **Épreuve II** mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

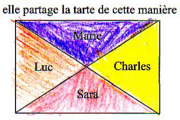
On coupe la part de Luc et Charles en 2 parties égales par les axes de symétrie du rectangle. Les 2 pars de Luc et on les superposent sur celle de Marie et on fait pareil avec celle de Charles et Sara. Donc c'est Sara et Marie qui ont raison.

4

6FC6211

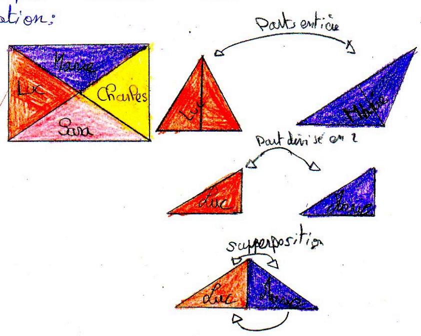
22^{e} RMT **Épreuve II** mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Sara et Marie ont raison car si on divise par deux symétriquement leurs parts. Elles se supperpose avec le symétrique de Charles et Luc.
explication:

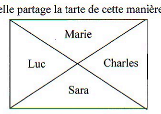


2

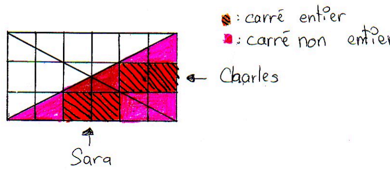
6FC6029

22^{e} RMT **Épreuve II** mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



- Sara à deux carré entier Charles aussi en à deux
- Sara à deux carré nom entier qui peuvent sássemblé et Charles aussi.
- Alors c'est Sara et Marie qui ont juste en disant qu'ils ont la même quantité de tarte.

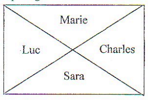
6FC6088

0

22e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

on fait 2,8×2+3,1=8,7 la part de luc et charle fait 8,7 cm.
On fait 2,8×2+4,8=10,4 la part de Sara et Marie fait 10,4 cm.
C'est luc et charle qui on raison car la part de marie et sara est de 10,4 cm et cel de luc et charle 8,7 cm donc la part de marie et sara est plus grande donc c'est luc et charle qui on raison

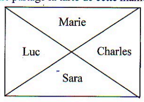
6FC6016

0

22e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :

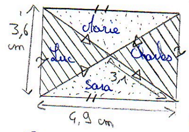


Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Nous vous présentons la tarte de Mamie Lucie pour vous montrer que Luc et Charles ont raison :



Nos calculs seront présentés grâce à Marie et Luc car ils n'ont pas les mêmes morceaux. (Luc = morceau de gauche et Marie = morceau haut, en haut). Mais nous aurions pu aussi prendre Sara et Charles.

Marie = 4,9 cm + 3,1 cm + 3,1 cm = 11,1 cm

Luc = 3,6 cm + 3,1 cm + 3,1 cm = 9,8 cm

Si on mesure les périmètres de Luc et Charles, ils ont un plus petit morceau que Sara et Marie.

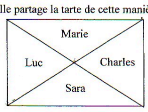
6FC6144

0

22e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Luc et charles ont raison car si on étale les mesures en formant une droite on voit que Marie et Sara ont une plus grande portion de tarte.

part de Luc

2,9 | 2,9 | 3,1

Part de marie

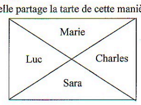
4,9 | 2,9 | 2,9

6FC6103

22e RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Je calcule le perimetre de chaque part de tarte.

Marie	Luc	Sara	Charles
2,7	2,8	2,7	2,8
+2,7	+2,6	+2,7	+2,6
+4,6	+2,6	+4,6	+2,6
10	8	10	8

Luc est Charles on raison.

Explication : j'ai calculer le perimetre de chaque part de tarte Luc est Charles le perimetre est egale a 8 cm est Sara est Marie le perimetre est egale a 10 cm.
donc Luc est Charle on une plus petite part de tarte.

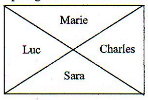
6FC6092

4

22ᵉ RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ? Marie et Sara ont raison.
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

hauteur x (base:2) = aire du triange isocèle

Sara et Marie: 1,5 x (5:2) = 3,75 cm²

Luc et Charles: 2,5 x (3:2) = 3,75 cm²

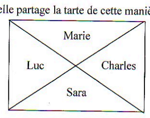
Toutes les pares ont la même aire.

6FC6010

22ᵉ RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

C'est Luc et Charles ont raison. On a fait base fois hauteur et on a divisé par 2.

3,1 × 2,5 : 155 + 620 = 7,75

4,9 × 1,5 : 245 + 490 = 7,35

7,35 ÷ 2 = 3,675

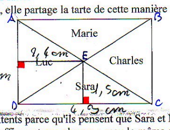
7,75 ÷ 2 = 3,875

6FC6147

22ᵉ RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

(4,9×1,5) : 2 = 3,675 l'aire du triangle EDC est de 3,675 cm²

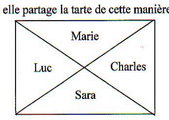
(3,1 × 2,4) : 2 = 3,75 l'air du triangle AED est de

6FC6014

22ᵉ RMT Épreuve II mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

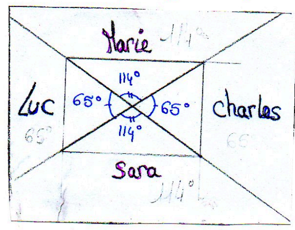
Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.
Qui a raison ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Luc et Charles ont raison. Car on a reproduit le dessin et mesurer les angles, il y a une différence de mesure.
10a Les parts ne sont pas égale. Donc Marie et Sara ont les plus grosses parts.

10b

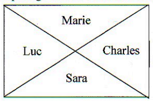


6FC6085

22e RMT **Épreuve II** mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

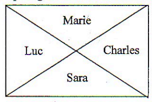
Le rectangle a deux diagonales qui se coupent et forment le milieu du rectangle. Le milieu du rectangle est aussi le milieu des deux diagonales. Ce qui pourrait faire 4 parts égales mais ces triangles n'ont pas la même mesure de base car les bases des 4 triangles (les 4 parts) sont les largeurs et longueurs du rectangle. Donc c'est Luc et Charles qui ont raison.

6FC6091

22e RMT **Épreuve II** mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



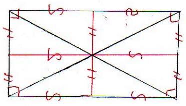
Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Si on trace les médiatrice des côtés du gateau on obtient des rectangles identiques, ce qui prouve
14a qu'il ont eu la même part donc Sara et Marie ont raison

14b

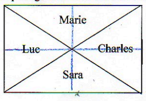


6FC6083

22e RMT **Épreuve II** mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

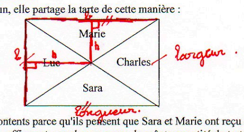
Sara et Marie ont raison car si on la coupe en 8 toutes les parts sont égals Luc a deux huitièmes et tous ses frères et sœurs aussi.

6FC6193 4

22e RMT **Épreuve II** mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

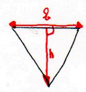
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Pour calculer l'air d'un triangle on fait : base × hauteur ÷ 2

Pour les parts de Maris et Sara on fait : longueur × la moitié de la largeur ÷ 2 = longueur ÷ 2 × largeur ÷ 2

Pour les parts de Luc et Charles on fait : largeur × la moitié de la longueur ÷ 2 = longueur ÷ 2 × largeur ÷ 2.

Donc Marie, Luc, Sara et Charles ont tous les mêmes parts.

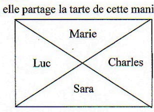


6FC6159 5

22e RMT **Épreuve II** mars-avril 2014 ©ARMT2014

6. LA TARTE DE MAMIE LUCIE (Cat. 4, 5, 6)

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Si, par exemple, la largeur du rectangle fait 6 cm et la longueur 10 cm, et comme le rectangle découpé par les diagonales fait 4 rectangles isocèles alors la hauteur du triangle de Luc ou Charles fait 5 cm et base × hauteur (6 × 5) = 30. Comme la largeur du rectangle fait 6 cm la hauteur du triangle fait 3 cm et base × hauteur (3 × 10) = 30. Sara et Marie ont donc raison.

Annexe 2 (Analyse des copies de 6ème de Franche-Comté)

Classement des 201 copies selon la grille en deux catégories A et B.

	Incompré-hension	Travail sur le dessin					Raisonnements sur la figure			
	A0 4 parts égales	A1 Per-ceptif	A2 tracés	A3a Périmè-tres	A3b aires	A3c angles	B1 bases et périmètres	B2a Égalités de rectangles	B2b partages en triangles	B3 Calculs d'aires
Total	56	28	33	33	43	3	2	5	3	2
%	27%	14%	16%	16%	21%	1%	1%	2,5%	1,5%	1%
% regroupés	27%	67%					6%			

Attribution des points, de 0 à 4 sur 201 copies, moyenne en Franche-Comté : 1,35

Points	0	1	2	3	4
Nombres de copies	123	1	11	15	51
En pourcentages	61%	0,5%	5,5%	7,5%	25,5%

Critères :

4 Réponse correcte (Sara et Marie ont raison) avec justifications claires (découpage / pliage ou dessin d'une trame et explications, ou encore calculs utilisant la formule de l'aire d'un triangle)

3 Réponse correcte avec découpage ou trame mais explications incomplètes

2 Réponse correcte avec découpage ou trame, mais sans explications, ni calculs

1 Découpage ou dessin de la trame mais sans réponse ou seulement l'affirmation que les parts de Sara et Marie sont identiques ainsi que les parts de Luc et Charles sans explication

0 Incompréhension du problème ou réponse fondée sur les périmètres des parts, celles des filles ayant un périmètre plus grand que celles des garçons.

Pour comparaison (voir la banque de problèmes de l'ARMT), voici les points attribués sur 2125 copies de 21 sections de l'ARMT. Il apparaît que ce problème mets en échec près de la moitié des élèves, un quart le réussit bien.

Points attribués	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Nb. classes**	**Moy.**
Cat 4	272 (51%)	105 (20%)	22 (4%)	36 (7%)	97 (18%)	532	1.21
Cat 5	236 (42%)	87 (16%)	47 (8%)	54 (10%)	133 (24%)	557	1.57
Cat 6	450 (43%)	132 (13%)	96 (9%)	101 (10%)	257 (25%)	1036	1.6
Total	958 (45%)	324 (15%)	165 (8%)	191 (9%)	487 (23%)	2125	1.49

Annexe 3 (extrait de la banque de problemes du RMT)

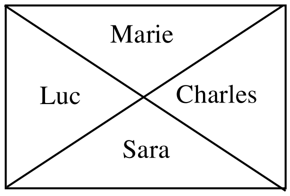
La tarte de Mamie Lucie

Identification Rallyes: 22.II.06 ; catégories: 4, 5, 6 ; domaines: GP

Résumé Montrer qu'un rectangle partagé par ses deux diagonales donne quatre parties de même aire.

LA TARTE DE MAMIE LUCIE

Mamie Lucie a préparé une tarte au chocolat de forme rectangulaire pour le goûter de ses petits-enfants : Luc, Charles, Sara et Marie.
Pour donner une part à chacun, elle partage la tarte de cette manière :



Luc et Charles ne sont pas contents parce qu'ils pensent que Sara et Marie ont reçu les deux plus gros morceaux. Sara et Marie affirment que chacun a reçu la même quantité de tarte.

Qui a raison ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- S'assurer (éventuellement) que les parts des deux filles sont égales, ainsi que les parts des deux garçons.

- Comparer ensuite une part d'une fille et une part d'un garçon :

Sans faire appel aux calculs d'aire, imaginer et/ou dessiner une trame sur la figure en traçant les médianes du rectangle, ce qui permet d'observer un « pavage » de la figure en 8 triangles rectangles, constater qu'ils sont égaux et en tirer l'égalité des parts, formées chacune de deux de ces triangles. Par mesures prises sur le dessin, se référer à la formule de l'aire d'un triangle et l'appliquer judicieusement.

L'utilisation de la formule fait intervenir la hauteur du triangle, qui n'est pas marquée ici mais qu'il faudra tracer. Ce segment divise une part triangulaire en deux triangles rectangles (du pavage précédent). En remarquant les liens (moitié et double) entre les côtés de l'angle droit de ces triangles rectangles, les côtés du rectangle (tarte), les « bases » et « hauteurs » des parts, on en déduit que les mesures nécessaires au calcul des aires à comparer sont les mêmes. Sans cette constatation, l'imprécision des mesures peut conduire à des aires différentes.

Préalablement à la prise de mesures, il s'agit de se convaincre que, si le périmètre se calcule par une addition des mesures des côtés, le calcul de l'aire exige une multiplication des mesures.

Il faut aussi se rendre compte qu'une simple compensation qualitative (plus long mais moins large) ne suffit pas pour s'assurer de l'égalité des parts.

Mots-clés

Rectangle, diagonale, triangle, équivalence, partage, aire, périmètre, mesure,

Résultats (22.II.06)

Points attribués sur 2125 copies de 21 sections

Points attribués	0	1	2	3	4	Nb. classes	moy
Cat 4	272 (51%)	105 (20%)	22 (4%)	36 (7%)	97 (18%)	532	1.21
Cat 5	236 (42%)	87 (16%)	47 (8%)	54 (10%)	133 (24%)	557	1.57
Cat 6	450 (43%)	132 (13%)	96 (9%)	101 (10%)	257 (25%)	1036	1.6
Total	958 (45%)	324 (15%)	165 (8%)	191 (9%)	487 (23%)	2125	1.49

Selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

4 points : Réponse correcte (Sara et Marie ont raison) avec justifications claires (découpage / pliage ou dessin d'une trame et explications, ou encore calculs utilisant la formule de l'aire d'un triangle)

3 points : Réponse correcte avec découpage ou trame mais explications incomplètes

2 points : Réponse correcte avec découpage ou trame, mais sans explications, ni calculs

1 point : Découpage ou dessin de la trame mais sans réponse

ou seulement l'affirmation que les parts de Sara et Marie sont identiques ainsi que les parts de Luc et Charles sans explication

0 point : Incompréhension du problème ou réponse fondée sur les périmètres des parts, celles des filles ayant un périmètre plus grand que celles des garçons.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

(Sur 124 copies de la section SR)

- Quelques rares copies font état explicitement de l'égalité des parts des deux filles, ainsi que des parts des deux garçons (par superposition, visuelle ou manipulatoire, ou par symétries axiales ou centrales suivant les niveaux). Dans la grande majorité des cas, cette égalité semble admise implicitement et c'est celle des parts d'une fille et d'un garçon qui est au centre des réflexions.

- 38 copies sur 124 (31%) font apparaître les deux médiatrices des côtés du rectangle qui le « pave » en huit triangles rectangles, permettant une comparaison directe.

  Exemple : *Explications : Comme vous pouvez le constater j'ai coupé les tranches en deux* (les deux médiatrices sont dessinées) *et ça fait des triangles rectangles et chaque tranche ont les mêmes triangles rectangles sauf qu'ils sont pas de la même manière alors chaque enfant ont la même quantité de tarte.* - 6 (5%) explications concluent à l'égalité par « compensation » qualitative.

  Exemple : ... *Celles de Marie et Sara sont plus larges et celles de Luc et Charles sont plus longues donc ils ont la même part. C'est Sara et Marie qui ont raison.*

- 33 (27%) des copies font apparaître les mesures des côtés des parts et le calcul du périmètre, et concluent que la part des filles est plus grande.

- 15 copies (12%), de catégorie 6 en majorité, présentent des produits de mesures. 12 d'entre elles se rapportent clairement à la formule de l'aire du triangle (une base et la hauteur correspondante sont mesurées). La conclusion dépend de la précision des mesures et, évidemment de la formule appliquée.

- On trouve encore quelques procédures par découpages, tentatives de pliages et recouvrements ou recherches d'autres unités, qui en général ne concluent pas à l'égalité des parts : 11 (9%) copies.

- Finalement, il y a 21 (17 %) copies blanche ou non rendues.

Exploitations didactiques

Sur un thème aussi essentiel que la détermination de l'aire d'un triangle, le problème de La tarte de Mamie Lucie offre de multiples possibilités d'exploitations :

- la confrontation entre une procédure par pavage ou par la recherche d'unités d'aire « non-conventionnelle » et la procédure par calcul d'un produit de mesures,
- le lien entre l'aire d'un rectangle et celle des deux triangles rectangles qui le composent,
- l'affrontement direct du conflit aire-périmètre,
- l'imprécision des mesures de longueur prises à la règle et ses effets sur le calcul des aires,
- l'approche de raisonnement déductifs à propos de la partition d'un rectangle par ses diagonales et médiatrices, des mesures des longueurs et des aires des huit triangles rectangles.

Bibliographie

Jaquet. F. : 2014 *A propos de triangles* In *Math-Ecole* 222 pp 69-75

I PROBLEMI DEL RALLY MATEMATICO TRANSALPINO,
UNA RISORSA PER LA FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI

Bernard Anselmo[1], Michel Henry[2]

Sunto

Da circa vent'anni il Rally matematico Transalpino si rivolge agli allievi dagli 8 ai 15 anni, di diversi paesi. Propone loro di risolvere, per classi, dei problemi "atipici" senza l'aiuto dell'insegnante. Gli enunciati prodotti, le produzioni degli allievi raccolte, le analisi dei risultati, ma anche le relazioni di sperimentazioni costituiscono una base di dati importante, sia dal punto di vista quantitativo, sia da quello qualitativo, disponibile per la ricerca e la formazione degli insegnanti. Questa base di dati è stata presentata all'incontro della COPIRELEM (Commissione permanente degli IREM sull'insegnamento elementare) che si è tenuto a Besançon dal 16 al 18 giugno 2015, sotto forma di atelier di tre ore, per mostrare come utilizzare un problema del RMT per la formazione degli insegnanti.

I problemi del RMT: una risorsa per la classe, la ricerca e la formazione

I problemi del RMT presentano le specificità seguenti:

- Per ogni problema, dopo **un'ampia consultazione fra i vari animatori (insegnanti e ricercatori),** viene redatta un'analisi a priori che descrive i contenuti matematici del problema, descrive il compito dell'allievo e indica i criteri comuni atti all'attribuzione dei punteggi relativi agli elaborati.
- La loro risoluzione ricade sotto la completa responsabilità della classe la quale, in **assenza dell'insegnante abituale, deve consegnare un solo elaborato per problema con le soluzioni e le spiegazioni, in condizioni di regole determinate (da 5 a 7 problemi per la classe in 50 minuti)**.
- Dopo lo svolgimento di ciascuna prova, una sintesi dei primi risultati dà per ciascun problema una "media" di punteggi per categoria, sull'insieme delle classi di tutte le sezioni, oltre alla ripartizione di tali punteggi da 0 a 4 secondo i criteri definiti dall'analisi a priori. Questa sintesi è realizzata sulla base del **migliaio di classi di vari paesi e fornisce** un'indicazione preziosa sulla "riuscita" del problema, dalla "incomprensione" (0 punti) fino alla risposta corretta con spiegazione completa (4 punti).

  Essa permette anche, nel confronto delle medie ottenute su uno stesso problema proposto a classi di livelli scolastici differenti, di vedere **l'evoluzione di tale riuscita in funzione dell'età degli allievi.**
- **Per numerosi** problemi sono condotte analisi a posteriori da gruppi di lavoro composti da insegnanti, formatori, ricercatori di diversi paesi o regioni a partire dagli elaborati delle classi delle diverse sezioni. Tali analisi permettono di identificare le procedure adottate dagli allievi all'atto della loro risoluzione, le difficoltà, gli ostacoli, gli errori ricorrenti, il livello di costruzione dei concetti matematici, e sono utili alla **ricerca e alla formazione.** Forniscono anche **numerose idee** di utilizzazione didattica dei problemi a quegli insegnanti che desiderano inserirli nel percorso didattico della propria classe.

I UTILIZZARE UN PROBLEMA DEL RMT PER LA FORMAZIONE

I partecipanti all'atelier sono stati impegnati nella parte iniziale di un dispositivo di formazione destinato agli insegnanti del ciclo 3 (categorie 4, 5, 6) a partire da un problema RMT. Tale dispositivo potrebbe essere ripreso con altri problemi della banca dell'ARMT.

1. Il dispositivo di formazione

1.1. Gli obiettivi

Obiettivi di tale formazione non sono solo quelli legati alle nozioni insite nel problema scelto, ma anche quelli di tipo didattico legati alla concezione e all'attuazione di un insegnamento tramite la risoluzione di problemi. Questi obiettivi sono proposti ai partecipanti nella forma seguente:

- Condurre un'analisi *a priori* di un problema per poter poi osservare meglio gli allievi al lavoro;
- Condurre un'analisi *a posteriori* basandosi sulle produzioni degli allievi.

1.2. Lo svolgimento previsto

La formazione prevista di 3 ore, è organizzata in 4 periodi seguiti, ciascuno, da uno scambio tra i partecipanti e eventuali apporti da parte dei formatori.

1 Risoluzione del problema da parte dei partecipanti.

[1] ESPÉ Lyon 1, IREM de Lyon, ARMT bernard.anselmo@univ-lyon1.fr
[2] IREM de Franche-Comté, ARMT, michel.henry@univ-fcomte.fr

Lavoro individuale o a gruppi di due: si richiede di identificare le conoscenze matematiche messe in gioco.

2. Analisi *a priori*

   Tale analisi è preparata dai partecipanti, riuniti in gruppi di 4, sulla base di alcune domande:
   - Quali sono le procedure di risoluzione corrette o errate, che possono proporre gli allievi per risolvere questo problema?
   - Quali sono le difficoltà che gli allievi potrebbero incontrare?
   - Quali sono gli errori possibili?
   - Quali sono le fonti possibili di tali errori?

3. Analisi degli elaborati degli allievi

   Ciascun gruppo riceve alcuni elaborati di allievi (una quindicina) ed effettua una classificazione in vista di una successiva messa in comune in classe. I criteri per la classificazione sono lasciati alle scelte dei partecipanti che ne discutono nel loro gruppo rispettivo. Dovranno essere precisati gli obiettivi della messa in comune in classe.

4. Bilancio

   Si tratta di lavorare su diverse messe in comune possibili, evidenziando i loro diversi elementi di sintesi (statuto dei disegni e delle figure in un problema di geometria a diversi livelli, uso degli strumenti, appello a conoscenze pregresse, istituzionalizzazioni possibili, …) e le modalità secondo le quali potrebbero essere condotte.

1.4. L'analisi del dispositivo

Questo dispositivo può essere analizzato nell'ambito di un modello[3] strutturato in 5 livelli che caratterizzano le attività di formazione secondo la loro natura, la posizione del formando e le conoscenze in gioco.

In questa struttura, il tempo 1 della formazione si situerebbe dapprima al livello 0, quello dell'attività matematica nella quale i partecipanti, che si trovano nella posizione di allievi, hanno un problema da risolvere, poi al livello 1, quello dell'analisi "riflessiva" dell'attività dove, in quanto insegnanti, hanno degli scambi sulle conoscenze matematiche messe in gioco.

I tempi 2 e 3 dove i partecipanti assumono la statuto di insegnanti per anticipare l'attività degli allievi, analizzare gli elaborati e prendere in considerazione il loro uso in classe potrebbero situarsi al livello 2, quello dell'analisi didattica e pedagogica. Il tempo 4, quello del bilancio, nel quale i partecipanti discutono le loro pratiche in classe, confrontando le loro proposte, potrebbe essere inserito al livello 3 del modello, quello dell'analisi riflessiva dell'attività didattica e pedagogica.

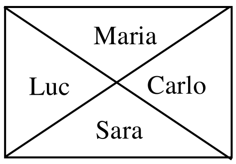
In tal modo il dispositivo di formazione appare ancora più ricco laddove si immagini in che maniera si potrebbe estenderlo fino al livello 5 del modello, nel quale i partecipanti prenderebbero l'attitudine del ricercatore per approfondire, in seguito, una problematica originata nell'ambito della formazione. Noi vi vediamo un prolungamento possibile per ricerche sull'uso del RMT come mezzo di formazione.

2. La torta di Nonna Lucia

Il problema sul quale hanno lavorato i partecipanti all'atelier è un problema relativo alla seconda prova del 22° RMT, proposto nel 2014 a classi delle categorie 4, 5 e 6.

LA TORTA DI NONNA LUCIA

Nonna Lucia ha preparato una torta rettangolare al cioccolato per la merenda dei suoi nipoti Luca, Carlo, Sara e Maria.
Per darne una fetta ciascuno la divide in questo modo:



Luca e Carlo non sono contenti perché pensano che Sara e Maria abbiano i due pezzi più grandi.
Sara e Maria sostengono invece che ognuno ha ricevuto la stessa quantità di torta.

Chi ha ragione?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

[3] Gli animatori dell'atelier hanno concepito il loro dispositivo in tempi differenti in relazione ai cinque livelli del modello di formazione, descritto qui, da loro adottato.

2.1. Risoluzione da parte dei partecipanti

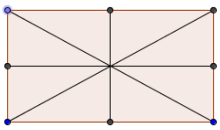
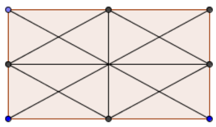
Il problema è stato risolto da alcuni utilizzando le proprietà degli assi di simmetria del rettangolo che lo divide in 4 rettangoli sovrapponibili, poi quella delle diagonali del rettangolo che dividono i rettangoli ottenuti in due triangoli aventi la medesima area. Altri hanno fatto appello alla proprietà delle mediane di un triangolo che lo dividono in due triangoli aventi la medesima area.

Hanno identificato in questo problema le conoscenze soggiacenti legate alla nozione di area e alle proprietà geometriche del rettangolo. Hanno osservato che tali proprietà sarebbero mobilizzate in modo implicito dagli allievi e talvolta utilizzate in modo più esplicito, per esempio nel calcolo dell'area. Va sottolineato che in questo momento dell'atelier, la questione della generalità della prova non è stata sollevata.

2.2. Analisi a priori

I partecipanti all'atelier hanno anticipato un certo numero di procedure corrette o errate che gli allievi potrebbero utilizzare:

- Interpretazione unicamente visiva:
    - I triangoli di Maria e Sara hanno una base più grande, dunque la loro area è più grande
    - I triangoli di Luca e Carlo sono più grandi perché sono più alti.
- Misura e formula dell'area del triangolo; errori nelle misure o nel calcolo o di approssimazione.
- Ritaglio/conteggio: disegno di una pavimentazione del rettangolo in otto o in sedici pezzi e confronto delle parti della torta per conteggio delle diverse parti che compongono ogni suddivisione.

- Ritaglio/sovrapposizione: ritaglio con o senza l'uso di carta da ricalco, riproduzione del triangolo di Luca, poi ritaglio del triangolo di Maria.
- Utilizzazione di una quadrettatura e poi conteggio del numero di quadratini.
- Interpretazione del vocabolario dell'enunciato: "abbiamo diviso in 4 dunque ¼ ciascuno".

I partecipanti all'atelier hanno classificato le difficoltà legate alla comprensione della nozione di suddivisione (equa o no), a quella della nozione d'area (limitandosi a un confronto di superfici per sovrapposizione), a quelle legate alla precisione (del ritaglio, della quadrettatura, delle misure, …). Tutto ciò li ha portati alla questione della scelta delle variabili didattiche che determinano in parte i comportamenti degli allievi e i loro apprendimenti. In particolare, la dimensione del rettangolo che rappresenta la torta, un rettangolo esplicitamente in scala o no… permette o non permette) che gli allievi scelgano di lavorare sul disegno con i loro strumenti di misura e aggirino l'ostacolo di una risposta più teorica.

Si può osservare che a questo stadio i partecipanti non hanno citato esplicitamente fra le difficoltà quella che consiste nell'identificare la grandezza in gioco in questo problema quando si parla di quantità di torta.

2.3. Analisi degli elaborati

I partecipanti all'atelier, in gruppi di 4, hanno ricevuto una ventina di elaborati di allievi di categoria 6 della sezione della Franche-Comté (si veda allegato 1, nella versione in francese). E' stato loro richiesto di classificarli in vista di una successiva messa in comune.

I criteri della classificazione non sono stati i medesimi da parte dei vari gruppi. Se alcuni si sono interessati in particolare alle procedure seguite dagli allievi, altri hanno preso in considerazione le giustificazioni apportate o la natura delle argomentazioni date per rispondere al problema.

Un altro criterio di classificazione possibile ha avuto origine dall'analisi a posteriori compiuta su 208 elaborati dalla sezione della Franche-Comté (si veda l'allegato 2): cioè, il livello di maturità geometrica che accompagna il passaggio da una geometria "di percezione" ad una geometria strumentale e quello del salto epistemologico dal disegno alla figura.

E questo porta a considerare una classificazione in due categorie:

A - lavoro sul disegno geometrico, ritagli, piegature, colorazione, misure di lunghezze e di angoli, calcolo di perimetri e aree.

B - lavoro sulla figura come oggetto astratto rappresentato dal disegno: riferimento esplicito o implicito ad una proprietà geometrica del rettangolo, ragionamento generalizzabile a tutti i rettangoli, confronto di aree tramite l'applicazione della formula generale, calcolo letterale.

E' pertanto possibile proporre una griglia di classificazione (esempi corrispondenti di elaborati si trovano nell'allegato 1, version in francese):

A0 - Incomprensione del problema, affermazione semplice, per esempio: le parti sono uguali perché ciascuno ha ricevuto ¼ della torta (elaborato 6FC6032).

A1 - Ritaglio del disegno dato, ricomposizione stile puzzle e sovrapposizione degli assemblaggi per fare confronti (elaborati 6FC6045 e 6FC6178).

A2 - Disegni sul disegno dato, per esempio delle mediane, e constatazione visiva (uguaglianza dei triangoli rettangoli, colorazione, elaborati 6FC6086 e 6FC6180) oppure altre spiegazioni (utilizzazione di una quadrettatura, elaborato 6FC6008).

A3 - Misure approssimative di lunghezze sul disegno dato e calcolo approssimato.

- A3a - Misure dei perimetri e risposta: «le parti non sono uguali» (elaborati 6FC6088, 6FC6016, 6FC6144 e 6FC6103).
- A3b - Misure delle aree con la formula dell'area del triangolo (elaborati 6FC6092, risposta: «le parti sono uguali» e 6FC6010 e 6FC6147, risposte: «le parti sono diverse»).
- A3c - Misure degli angoli al vertice dei triangoli isosceli (elaborato 6FC6014, risposta: «le parti sono diverse»).

B1 - Ragionamento senza riproduzione del disegno: le basi sono diverse, dunque i perimetri sono diversi, risposta: «le parti sono diverse» (elaborato 6FC6085).

B2 Costruzioni su figure geometriche

- B2a - Disegno di un rettangolo qualunque e disegno delle mediane (uguaglianza dei rettangoli, elaborato 6FC6091, risposta: «le parti sono uguali») oppure disegno di una quadrettatura (elaborato 6FC6029, risposta: « le parti sono diverse»).
- B2b - Disegno delle mediane: i triangoli rettangoli sono uguali, ciascuno ha dunque ricevuto i 2/8 della torta (elaborato 6FC6083).

B3 - Calcolo letterale delle aree senza le misure: il rettangolo ha per lati L e l e la parte delle femmine ha come area $L\times l/2$ e quella dei maschi $l\times L/2$, da cui «le parti sono uguali» (elaborati 6FC6193 e 6FC6159).

II DISCUSSIONE E SVILUPPI[4]

Le differenze scaturite a partire dai criteri di classificazione hanno portato i partecipanti a riprendere in considerazione la scelta delle variabili didattiche effettuata nella presentazione del problema: quella di proporre la figura su un foglio bianco oppure su un foglio a quadretti, o ancora di non dare la figura, ma anche la scelta di proporre un enunciato contestualizzato (divisione di una torta) piuttosto che un enunciato "matematico", del tipo "ecco un rettangolo diviso in 4 parti; hanno la medesima area?", che limita le ambiguità. Su quest'ultimo punto è stata evocata l'importanza della modellizzazione nell'attività matematica per argomentare in favore di una presentazione contestualizzata.

E' stata anche sottolineata la difficoltà a selezionare degli elaborati in vista di una messa in comune in classe. La ricchezza del problema permette diverse piste di utilizzazione didattica che, come appare da un'analisi, l'insegnante non può gestire da solo in una classe ordinaria. In tal senso, le piste indicate nella banca di problemi dell'ARMT (si veda la sitografia) possono costituire un utile aiuto.

Su un tema così essenziale quale quello della determinazione dell'area di un triangolo, il problema della torta di Nonna Lucia offre molteplici possibilità di utilizzazione:

- il confronto fra una procedura per pavimentazione o con la ricerca di unità di misura "non convenzionali" e la procedura tramite il calcolo di un prodotto di misure,
- il legame tra l'area di un rettangolo e quella dei due triangoli rettangoli che lo compongono,
- il conflitto area-perimetro,
- l'imprecisione delle misure di lunghezza prese con il righello e il suo effetto sul calcolo delle aree,
- l'approccio al ragionamento deduttivo a proposito della suddivisione di un rettangolo con le sue diagonali e mediane, delle misure delle lunghezze e delle aree degli otto triangoli rettangoli.

Anche nell'ambito della formazione l'analisi incrociata degli elaborati degli allievi sul problema de "La torta di Nonna Lucia" può portare ad alcune considerazioni:

[4] In questo paragrafo ci limitiamo a riportare le questioni che si sono poste i partecipanti all'atelier, senza mettere in questione il dispositivo stesso di formazione. Questo sviluppo, che presuppone l'organizzazione di una raccolta sistematica di tutti gli interventi, potrebbe interessare le ricerche sulla formazione degli insegnanti.

- di ordine generale sulle situazioni di ricerca:
  - la diversità delle procedure utilizzate dagli allievi;
  - l'inventiva degli allievi;
  - la loro difficoltà a spiegare per iscritto le loro procedure…
- sull'insegnamento delle grandezze:
  - la confusione tra area e perimetro;
  - il fatto che gli allievi utilizzano in maggioranza la misura;
  - la constatazione che l'insegnamento delle grandezze va forse troppo presto verso la misura, senza prendere il tempo sufficiente affinché si installi il concetto...
  - la necessità di un passaggio attraverso manipolazioni, pavimentazioni e conservazione-confronto di lunghezze, angoli e aree, prima dell'introduzione delle misure.
- sull'insegnamento della geometria:
  - il passaggio da una geometria percettiva del disegno ad una geometria del disegno geometrico, dove la riga e il compasso sono portatori di proprietà geometriche, poi il passaggio dalla geometria del disegno alla geometria delle figure tramite il riconoscimento di proprietà comuni, e infine, l'utilizzazione degli elementi di deduzione e di prova.

Una presentazione su Internet della banca di problemi (si veda sitografia) ha fatto seguito a questi scambi. Tale presentazione ha mostrato come il dispositivo di formazione possa essere ampliato con altri problemi dello stesso tipo che è possibile identificare rapidamente e diventare l'oggetto di una sperimentazione in classe. Ha mostrato anche come, a partire da introduzioni differenti, dispositivi di formazione analoghi possono essere elaborati nell'ambito di altre tematiche.

III CONCLUSIONE

L'atelier ha permesso di presentare un dispositivo di formazione degli insegnanti costruito con riferimento ad un problema del RMT e di mostrarne le potenzialità.

Anche altri dispositivi utilizzano problemi del RMT: nella formazione iniziale, tali dispositivi consistono ad esempio nel discutere le concezioni degli studenti nel loro rapporto con la matematica attraverso i problemi del rally. Nel caso della formazione continua, i problemi del rally possono portare gli insegnanti a riflettere sull'apprendimento tramite la risoluzione di problemi o il lavoro degli allievi in collaborazione.

Da tempo i formatori sanno che possono trovare preziosi suggerimenti nei rally matematici. Oggi dispongono di un valido mezzo per accedervi: la banca di problemi del RMT.

BIBLIOGRAFIA

ANSELMO B., HENRY M., (1995) Les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin, une ressource pour la formation des enseignants ? in *Actes du XXXXII^e colloque COPIRELEM*, IREM de Franche-Comté.

CHARNAY R. (2006) Potentialités et limites des problèmes du RMT, 15-24, in *Actes des journées d'études sur le rallye mathématique volume 6.* Éditeurs : GRUGNETTI L., JAQUET F., MEDICI D, RINALDI G.

DANOS A., MASSELOT P., SIMARD A., WINDERC. (1994) Analyser une ressource de formation : « exemple de la situation des annuaires » in *Actes du XXXXI^e colloque COPIRELEM*, IREM d'Aquitaine.

HOUDEMENT C. (2003) Autour des stratégies de formation des maitres du premier degré 23-32, in *Carnets de route de la COPIRELEM*, *Concertum Dix en de formation des professeurs des écoles en mathématiques.* Paris : ARPME

HOUDEMENT C. & KUZNIAK A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maitres du premier degré en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, 16/3, 289-322, Grenoble : La pensée sauvage.

JAQUET F. (2014) *A propos de triangles.* In Math-École 222 pp. 69-75

LE BORGNE P. (2003) Des rallyes pour faire des mathématiques autrement, 419-448, in *Actes du XXX^e colloque COPIRELEM*, IREM de Marseille.

SITOGRAFIA

Association Rallye Mathématique Transalpin : http://www.armtint.org/
Banque de problèmes du RMT : http://www.projet-ermitage.org/ARMT/bd-armt.html
Étude du problème *La tarte de Mamie Lucie* :
http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=gp94-fr&flag=1&langue=fr&w=0
Association RMT section de l'Ain : http://arma01.fr/rallye/
Le RMT en Franche-Comté : http://www.apmep.fr/-Rallye-Mathematique-Transalpin-RMT

ALLEGATO 1 (elaborati degli allievi, ≈)

ALLEGATO 2 (Analisi degli elaborati di categoria 6 della Franche-Comté)

Classificazione dei 201 elaborati secondo la griglia in due categorie A e B.

	Incom-prensione	Lavoro sul disegno					Ragionamenti sulla figura			
	A0 4 parti uguali	A1 Percet-tivo	A2 Tracce	A3a Peri-metri	A3b Aree	A3c Angoli	B1 Basi e perimetri	B2a Uguaglianza dei rettangoli	B2b Divisione in triangoli	B3 Calcoli di aree
Totale	56	28	33	33	43	3	2	5	3	2
%	27%	14%	16%	16%	21%	1%	1%	2,5%	1,5%	1%
% ragruppati	27%	67%					6%			

Attribuzione dei punteggi, da 0 a 4 su 201 elaborati, media in Franche-Comté: 1,35

Punteggi	0	1	2	3	4
Numero di elaborati	123	1	11	15	51
in percentuale	61%	0,5%	5,5%	7,5%	25,5%

Criteri:

4 Risposta corretta (Sara e Maria hanno ragione) con spiegazione chiara (ritaglio/piegatura o disegno di una trama e spiegazioni, o anche calcoli utilizzando la formula dell'area del triangolo)

3 Risposta corretta con ritaglio o disegno della trama, ma spiegazioni incomplete

2 Risposta corretta con ritaglio o disegno della trama, ma senza spiegazioni né calcoli

1 Ritaglio o disegno della trama, ma senza risposta
oppure solo l'affermazione che le parti di Sara e Maria sono uguali tra loro, così come le parti di Luca e Carlo senza spiegazione

0 Incomprensione del problema o risposta basata su considerazioni sul perimetro delle parti, avendo le parti delle femmine perimetro maggiore di quelle dei maschi

Per poter confrontare (si veda la banca di problemi dell'ARMT), ecco i punteggi su 2125 elaborati di 21 sezioni dell'ARMT. Sembra che questo problema porti all'errore la metà circa degli allievi, mentre un quarto risolve bene.

Punteggi attribuiti	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**N. classi**	**media**
Cat 4	272 (51%)	105 (20%)	22 (4%)	36 (7%)	97 (18%)	532	1.21
Cat 5	236 (42%)	87 (16%)	47 (8%)	54 (10%)	133 (24%)	557	1.57
Cat 6	450 (43%)	132 (13%)	96 (9%)	101 (10%)	257 (25%)	1036	1.6
Total	958 (45%)	324 (15%)	165 (8%)	191 (9%)	487 (23%)	2125	1.49

ALLEGATO 3 (dalla banca di problemi del RMT)

La torta di Nonna Lucia

Identificazione Rally: 22.II.06 ; categorie: 4, 5, 6 Ambiti: GP ; famiglie: ,

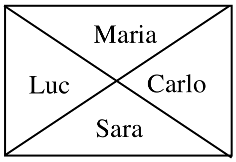
Sunto Mostrare che un rettangolo viene diviso dalle sue diagonali in quattro parti equivalenti

Enunciato

LA TORTA DI NONNA LUCIA

Nonna Lucia ha preparato una torta rettangolare al cioccolato per la merenda dei suoi nipoti Luca, Carlo, Sara e Maria.

Per darne una fetta ciascuno la divide in questo modo:



Luca e Carlo non sono contenti perché pensano che Sara e Maria abbiano i due pezzi più grandi.

Sara e Maria sostengono invece che ognuno ha ricevuto la stessa quantità di torta.

Chi ha ragione?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

Compito per la risoluzione e saperi mobilizzati

- Assicurarsi (eventualmente) che le fette delle due nipotine sono uguali fra loro, così come quelle dei due nipoti (per sovrapposizione, visiva o manipolativa, o per simmetria assiale o centrale, a seconda dei livelli).
- Confrontare poi una fetta di torta di una femmina con una fetta di un maschio, trovando una comune unità d'area.
- Senza ricorrere al calcolo delle aree, immaginare e/o disegnare una trama sulla figura tracciando le mediane del rettangolo, cosa che permette di vedere una "pavimentazione" della figura in 8 triangoli rettangoli, constatare che sono uguali e dedurre l'uguaglianza delle parti formate ciascuna da due di tali triangoli.
- Tramite misure prese sul disegno, fare riferimento alla formula dell'area di un triangolo e applicarla in modo opportuno.

L'utilizzazione della formula fa intervenire l'altezza del triangolo che qui non è tracciata (mentre in generale nei libri di testo lo è). Questo segmento divide una parte triangolare in due triangoli rettangoli (della pavimentazione precedente). Nell'osservare le relazioni (metà e doppio) tra i cateti di questi triangoli rettangoli, i lati del rettangolo (torta), le "basi" e "altezze" delle parti, si deduce che le misure necessarie al calcolo delle aree da confrontare sono le stesse. Senza questa constatazione, l'imprecisione delle misure può condurre ad aree differenti.

Prima di passare alle misure, bisogna convincersi del fatto che, se il perimetro si calcola con un'addizione delle misure dei lati, il calcolo dell'area richiede una moltiplicazione delle misure.

Bisogna anche rendersi conto che una semplice compensazione qualitativa (più lungo ma meno largo) non è sufficiente ad essere sicuri dell'equivalenza delle parti.

Parole-chiave

rettangolo, diagonale, triangolo, equivalenza, suddivisione, area, perimetro, misura

Risultati (22.II.06)

punteggi attribuiti su 2125 elaborati di 21 sezione:

Punteggi attribuiti	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**N. classi**	**m.**
Cat 4	272 (51%)	105 (20%)	22 (4%)	36 (7%)	97 (18%)	532	1.21
Cat 5	236 (42%)	87 (16%)	47 (8%)	54 (10%)	133 (24%)	557	1.57
Cat 6	450 (43%)	132 (13%)	96 (9%)	101 (10%)	257 (25%)	1036	1.6
Total	958 (45%)	324 (15%)	165 (8%)	191 (9%)	487 (23%)	2125	1.49

Secondo i criteri dell'analisi a priori:

4 punti: Risposta corretta (Sara e Maria hanno ragione) con giustificazione chiara (ritaglio/piegatura o disegno di una trama e spiegazioni, o anche calcoli utilizzando la formula dell'area del triangolo)

3 punti: Risposta corretta con ritaglio o disegno della trama, ma spiegazioni incomplete

2 punti: Risposta corretta con ritaglio o disegno della trama, ma senza spiegazioni né calcoli

1 punto: Ritaglio o disegno della trama, ma senza risposta

oppure solo l'affermazione che le parti di Sara e Maria sono uguali tra loro, così come le parti di Luca e Carlo senza spiegazione

0 punto: Incomprensione del problema o risposta basata su considerazioni sul perimetro delle parti, avendo le parti delle femmine perimetro maggiore di quelle dei maschi

Procedure, ostacoli ed errori rilevati

(Su 124 elaborati della sezione SR)

- Qualche raro elaborato fa rifermento esplicitamente all'uguaglianza delle parti delle due femmine, così come quelle dei due maschi (per sovrapposizione, visiva o manipolativa, o per simmetria assiale o centrale, a seconda delle categorie. Nella gran parte dei casi, questa uguaglianza sembra essere ammessa implicitamente, mentre è quella tra le parti di una femmina e di un maschio al centro delle riflessioni.
- 38 elaborati su 124 (31%) mostrano le due mediane dei lati del rettangolo che lo "dividono" in otto triangoli rettangoli, cosa che permette un confronto diretto.
  Esempio: *Spiegazioni: Come potete vedere ho tagliati i pezzi in due* (sono disegnate le due mediane) *e questo fa dei triangoli rettangoli e ogni pezzo ha gli stessi triangoli rettangoli solo che non sono messi nello stesso modo allora ogni bambino ha la stessa quantità di torta.*
- 6 (5%) spiegazioni arrivano all'equiestensione per "compensazione" qualitativa.
  Esempio:*... Quelle di Maria e Sara sono più larghe e quelle di Luca e Carlo sono più lunghe dunque hanno la stessa parte. Sono Sara e Maria ad aver ragione.*
- 33 (27%) elaborati contemplano le misure dei lati delle parti e il calcolo del perimetro, e concludono che la parte delle femmine è quella più grande.
- 15 elaborati (12%), in gran parte di categoria 6, presentano prodotti di misure e 12 di questi si rifanno chiaramente alla formula dell'area del triangolo (sono misurate una base e l'altezza relativa). La conclusione dipende alla precisione delle misure e, evidentemente, dalla formula applicata.
- Si trova ancora qualche procedura per ritaglio, o per tentativi di piegatura e ricoprimento o ancora ricerca di altre unità, che in generale non portano all'equivalenza delle parti: 11 (9%) elaborati.
- Infine, ci sono 21 (17 %) elaborati in bianco o non resi.

Indicazioni didattiche

Su un tema così basilare come la determinazione dell'area di un triangolo, il problema La torta di Nonna Lucia offre molteplici possibilità di lavoro in classe:

- il confronto fra una procedura per pavimentazione o la ricerca di unità d'area "non convenzionale" e la procedura con il calcolo di un prodotto di misure,
- la relazione fra l'area di un rettangolo e quella di due triangoli rettangoli che lo compongono,
- il trovarsi di fronte al conflitto area-perimetro,
- l'imprecisione delle misure di lunghezza prese con il righello e i suoi effetti sul calcolo delle aree,
- l'approccio al ragionamento deduttivo a proposito della suddivisione di un rettangolo secondo le diagonali e le mediane, delle misure di lunghezza e delle aree degli otto triangoli rettangoli.

Bibliografia

Jaquet. F. : 2014 *A propos de triangles* In *Math-Ecole* 222 pp 69-75

L'ESPERIENZA DEL RMT

Clara Guerrera[1]

INTRODUZIONE

Ho conosciuto l'ARMT nel 2012 grazie ad un'attività di aggiornamento per insegnanti intitolata "Modellazione della Matematica" presentata nella nostra scuola da Maria Polo e Sandro Deplano.
Mi sono successe varie cose interessanti.
Intanto, mi sono divertita giocando con la matematica.
Ho però scoperto di essere un'insegnante che non sempre ha la risposta immediatamente pronta ai problemi insoliti o rompicapo proposti!
Riflettendo su questo aspetto ho iniziato ad acquisire varie consapevolezze.
Ho capito che limitandomi solo a raccontare ai miei alunni che la matematica descrive tutto ciò che ci circonda quotidianamente con esempi, non sarei riuscita a coinvolgerli e a catturare il loro interesse!
Mi sono resa conto che bisognava "escogitare" degli stratagemmi perché constatassero con i fatti che la matematica va ben oltre l'applicazione di regole senza un riscontro pratico!
Per esempio, ho subito considerato la possibilità di lavorare con attività didattiche nuove supportate dai problemi del RMT per indurre gli alunni a "toccare per credere":

Durante le attività di laboratorio "modellazione della matematica" tra insegnanti, mi sono sentita a volte spiazzata perché non riuscivo ad avere tutti i procedimenti sotto controllo come succedeva in classe. Davanti a me spariva la figura dell'insegnante con tutte le risposte prontissime. Tutto ciò mi ha portato a rendermi conto che in realtà l'insegnante ha necessità anche lei o lui di pensare davanti ad un problema nuovo ed insolito, come tutti d'altronde.
In effetti, per arrivare alla soluzione, nasce l'esigenza di pensare e ragionare di più... di confrontarsi con i colleghi... e così via.
Ho capito che in tanti anni di insegnamento, avendo sempre fatto riferimento a materiali didattici molto strutturati con procedimenti risolutivi piuttosto standard, avevo perso il piacere di scoprire e di ricercare ed avventurarmi in altri tipi di problemi e ragionamenti.

PRIMI INTERVENTI DIDATTICI

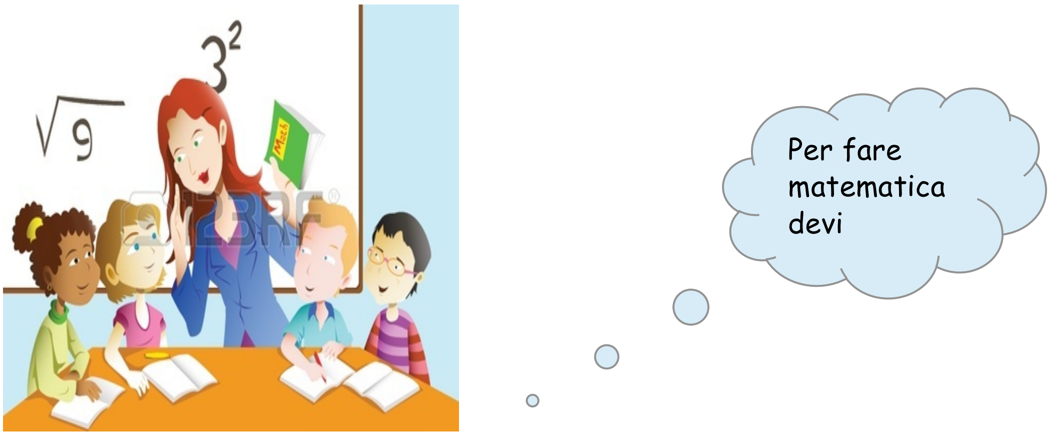
Ispirata dalle attività svolte a scuola insieme a e Maria e Sandro, ho deciso di coinvolgere gli alunni di una II A Geometri con notevoli carenze di base, la maggior parte demotivati, in un'attività dove era necessario manipolare materiale pratico: bastoncini, forme geometriche ricavate da cartoncino, mattonelle, cordoncini stecche, ecc... .
Successivamente ho proposto attività con problemi del RMT.
Gli alunni sono cambiati perché si sono divertiti ed hanno trovato l'interesse matematico!!!

Con grande sorpresa da parte di molti, gli alunni della II Geometri hanno anche vinto alla finale regionale del Rally nel 2012.

[1] Insegnante della scuola Superiore (Liceo Scientifico e corso Geometri) di Senorbì – Cagliari.

Sono cambiata come insegnante poiché ora cerco di orientare meglio gli alunni alla comprensione degli argomenti anche attraverso problemi dell'ARMT ovvero problemi particolari che catturano l'attenzione e che necessitano di un ragionamento.
Gli alunni hanno capito che non possono e soprattutto non serve più memorizzare un procedimento in quanto sono piacevolmente costretti a ragionare per determinare la soluzione di un nuovo problema.

All'inizio, il più grande ostacolo da superare, con i miei alunni, è stato il non volersi mettere in gioco e quindi non attivarsi ad avviare un ragionamento poiché secondo il loro punto di vista "La risposta o la sai o non la sai!"
Ho faticato per dimostrare che la risposta non arriva dal nulla o da una regola studiata a memoria ma da un ragionamento e questo vale anche per un insegnante!!
Ho cercato nella pratica di far notare come la risposta ad un problema arriva da tante piccole osservazioni del problema stesso ed il particolare collegamento tra questi può essere la scintilla che porta alla soluzione.
Mi sono messa al lavoro insieme agli alunni nella risoluzione di vari problemi "imprevisti" per dimostrare loro che anche io avevo la necessità di analizzare il testo, pensare e seguire un mio ragionamento giungendo a qualche risultato del problema.
Ho cercato di far capire che non necessariamente il mio procedimento risolutivo poteva essere unico o insostituibile. Ognuno di loro ha così iniziato ad acquistare più fiducia delle proprie idee che affioravano alla mente ed impiegandole nella risoluzione dei problemi si sono meravigliati di come siano potuti riuscire con successo.



Inoltre, mi sono resa conto che l'insegnante non deve assolutamente pilotare gli alunni nella fase di ragionamento altrimenti non lascerebbe loro mai la libertà di risolvere secondo il proprio pensiero. Gli alunni, influenzati dall'osservazione o dal suggerimento dell'insegnante, inavvertitamente abbandonano la propria idea.
In tal modo all'alunno viene negata l'opportunità di intraprendere un proprio ragionamento, forse originale, perdendo l'occasione di verificare ed esprimere il proprio talento.
Nelle mie classi ho iniziato a sperimentare cosa succede quando gli alunni sono messi in condizioni di lavorare

- con problemi più vicini alla loro realtà (più concreti e meno astratti)
- in completa autonomia
- in completa libertà e tranquillità "anche di sbagliare"
- con la convinzione che lo sviluppo della propria idea o ragionamento sia importante.

Scopro aspetti incredibili come:

- gli errori dei miei alunni modellano la mia professionalità come insegnante,
- tante abilità nascoste dei miei stessi alunni soprattutto di quelli che ho ritenuto negati per la matematica.

I PROBLEMI DEL RMT: DALLA GARA ALLA CLASSE

Nasce un'esigenza - Come mettere insieme i due aspetti

I problemi del RMT che sono interessanti, coinvolgenti aprono la mente all'imprevisto;
Il lavoro in classe: il bisogno di attenersi ai programmi ministeriali

Espongo qui di seguito un lavoro svolto nella classe 3a B Liceo utilizzando un problema del rally dove ho riunito i due aspetti.

Durata: 3 ore di lezione

Argomenti: sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite
Obiettivi:
- riconoscere un sistema di equazioni impossibile e un sistema determinato;
- risolvere un sistema di equazioni lineari determinato con il metodo di sostituzione e con il metodo di Gauss.

Ho somministrato il problema *Pacchetto Vacanze*
Ambito concettuale: *Aritmetica/Operazioni; Algebra/Pre-algebra*
Obiettivo preliminare che mi sono posta è stato quello di verificare se l'argomento "sistemi di equazioni" svolto in prima potesse affiorare alla loro mente come possibile procedimento risolutivo.

Il testo del problema:

(20.II.12) **PACCHETTO VACANZE** Cat. 6, 7, 8, 9)

L'agenzia TRANSALP propone 4 pacchetti differenti, A, B, C e D, per una settimana di vacanze. Ecco le quattro proposte, ciascuna comprendente quattro attività così organizzate:

A) 380 euro	**B) 340 euro**	**C) 320 euro**	**D) …. euro**
Gita all'isola	*Gita in montagna*	*Parco divertimenti*	*Gita in montagna*
Gita in montagna	*Parco divertimenti*	*Parco divertimenti*	*Parco divertimenti*
Parco divertimenti	*Gita all'isola*	*Gita in montagna*	*Gita all'isola*
Parco divertimenti	*Gita in montagna*	*Gita in montagna*	*Gita all'isola*

Il prezzo di un pacchetto è la somma dei prezzi di ciascuna attività che lo compone. L'agenzia ha però dimenticato di scrivere il prezzo del pacchetto della settimana D.

Qual è il prezzo del pacchetto della settimana D?

Spiegate il vostro ragionamento.

Che cosa è successo in classe?
Arriva la risposta di un alunno dopo 5 minuti:
confronta le attività complessive di A e B con le attività complessive di C e D ed arriva alla risposta
380 + 340 = 720 – 320 = 400

A) 380	B) 340	C) 320	D) … euro
Gita all'isola	*Gita in montagna*	*Parco divertimenti*	*Gita in montagna*
Gita in montagna	*Parco divertimenti*	*Parco divertimenti*	*Parco divertimenti*
Parco divertimenti	*Gita all'isola*	*Gita in montagna*	*Gita all'isola*
Parco divertimenti	*Gita in montagna*	*Gita in montagna*	*Gita all'isola*

Parco divertimenti = 3
Gita in montagna = 3
Gita all'isola = 2

Parco divertimenti = 3
Gita all'isola = 2
Gita in montagna = 3

Cambio solo la domanda del problema per verificare se gli alunni procedono ancora per confronti e/o tentativi per ricavare la risposta.
La domanda diventa:
Qual è il prezzo di ciascuna attività e quella del pacchetto D? Spiegate il vostro ragionamento.

A) 380	B) 340	C) 320	D) … euro
Gita all'isola	*Gita in montagna*	*Parco divertimenti*	*Gita in montagna*
Gita in montagna	*Parco divertimenti*	*Parco divertimenti*	*Parco divertimenti*
Parco divertimenti	*Gita all'isola*	*Gita in montagna*	*Gita all'isola*
Parco divertimenti	*Gita in montagna*	*Gita in montagna*	*Gita all'isola*

380-180 = 200
340–160 = 180
Parco= 200:2

Montagna + isola = 180

320 : 2 = 160
Parco + montagna = 160

Decido di cambiare non solo la domanda ma anche il prospetto dei dati in modo tale che gli allievi incomincino a sentire l'esigenza di ricorrere all'impostazione di un sistema di equazioni e comprendere che a volte è necessario ricorrervi.

PACCHETTO VACANZE (I)

L'agenzia TRANSALP propone 4 pacchetti differenti, A, B, C e D, per una settimana di vacanze. Ecco le quattro proposte, ciascuna comprendente quattro attività così organizzate:

A) 400 euro	**B) … euro**	**C) 340 euro**	**D) 420 euro**
Gita all'isola	*Parco divertimenti*	*Gita all'isola*	*Gita all'isola*
Gita all'isola	*Parco divertimenti*	*Parco divertimenti*	*Parco divertimenti*
Gita in montagna	*Gita in montagna*	*Gita in montagna*	*Gita all'isola*
Parco divertimenti	*Gita in montagna*	*Gita in montagna*	*Gita all'isola*

Il prezzo di un pacchetto è la somma dei prezzi di ciascuna attività che lo compone. L'agenzia ha però dimenticato di scrivere il prezzo del pacchetto della settimana D.

Qual è il prezzo del pacchetto della settimana D?

Spiegate il vostro ragionamento.

Tentativi degli allievi:

A) e C)
Gita all'isola = 3
Gita in montagna = 3
Parco divertimenti = 2

B) e D)
Parco divertimenti = 3
Gita all'isola = 3
Gita in montagna = 2

Con questi dati gli alunni hanno riscontrato maggiori ostacoli nei procedimenti per tentativi e per confronto e quindi hanno sentito, dopo tanto pensare, la necessità di ricorrere al sistema di equazioni.
Due o tre alunni hanno l'idea del sistema e gli altri la seguono. Dopo aver risolto con il sistema affermano: *ora abbiamo capito che è proprio necessario ricorrere al sistema perché non riuscivamo a procedere diversamente*.
Impostano il sistema di equazioni ponendo:
gita all'isola = x, gita in montagna = y e parco divertimenti = z e risolvono con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 2x + y + z = 400 \\ x + 2y + z = 340 \\ z = 420 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 400 \\ x + 2y + z = 340 \\ 3x + z = 420 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 420 - 3x = 400 \\ x + 2y + 420 - 3x = 340 \\ z = 420 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3x = -20 \\ -2x + 2y = 340 - 420 \\ z = 420 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y = -20 \\ 2x - 2y = 80 \\ z = 420 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 20 \\ 2x - 2y = -340 + 420 \\ z = 420 - 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 20 \\ x - y = 40 \\ z = 420 - 3x \end{cases}$$

Il sistema è impossibile perché c'è
un 'incongruenza $x - y = 40$ e $x - y = 20$
In tal caso il problema non ha soluzione ! !

Cambio nuovamente i dati del prospetto per somministrare agli alunni un sistema di tre equazioni in tre incognite determinato e farglielo risolvere con il metodo di Gauss.

PACCHETTO VACANZE (II)

L'agenzia TRANSALP propone 4 pacchetti differenti, A, B, C e D, per una settimana di vacanze. Ecco le quattro proposte, ciascuna comprendente quattro attività così organizzate:

A) 500 euro	**B) 420 euro**	**C) … euro**	**D) 620 euro**
Gita in montagna	*Parco divertimenti*	*Gita all'isola*	*Gita all'isola*
Gita in montagna	*Parco divertimenti*	*Gita all'isola*	*Parco divertimenti*
Gita all'isola	*Gita in montagna*	*Gita in montagna*	*Gita in montagna*
Parco divertimenti	*Gita all'isola*	*Gita in montagna*	*Gita in montagna*
			Gita in montagna

Il prezzo di un pacchetto è la somma dei prezzi di ciascuna attività che lo compone. L'agenzia ha però dimenticato di scrivere il prezzo del pacchetto della settimana D.

Qual è il prezzo del pacchetto della settimana D?

Spiegate il vostro ragionamento.

Ed infine ecco la soluzione degli allievi:

x = Gita in montagna *y = Parco divertimenti* *z = Gita all'isola*

$$\begin{cases} 2x + y + z = 500 \\ x + 2y + z = 420 \\ 3x + y + z = 620 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 500 \\ x + 2y + z = 420 \\ - 5y - 2z = - 640 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 500 \\ -3y - z = - 340 \\ - 5y - 2z = - 640 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 500 \\ - 3y - z = - 340 \\ z = 220 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 500 \\ 3y = 340 - 220 \\ z = 220 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + 40 + 220 = 500 \\ y = 120/3 \\ z = 220 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 260 = 500 \\ y = 40 \\ z = 220 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x = 500 - 260 \\ y = 40 \\ z = 220 \end{cases}$$

$x = 240/2 = 120$ (montagna)
$y = 40$ (parco divertimenti)
$z = 220$ (gita all'isola)

Infine le considerazioni degli alunni sono state le seguenti: *in effetti non saremmo potuti arrivare a comprendere che il primo sistema era impossibile, solo osservando con più attenzione la tabella ed anche con quest'ultimo non si poteva procedere diversamente.*

In qualità di insegnante mi sento di dire a tutti di credere nella matematica quando ci si avventura nella ricerca di una soluzione e continuare ad utilizzare problemi e strategie per non annoiare ma stimolare i nostri allievi perché il mondo di domani sta già formandosi anche nel loro corpo e nella loro mente!

L'EXPÉRIENCE DU RMT

Clara Guerrera[1]

Introduction

J'ai fait connaissance avec le RMT en 2012 grâce à une activité pour les enseignants intitulée « Modélisation mathématique », présentée dans notre école par Maria Polo et Sandro Deplano.
J'y ai trouvé des aspects qui m'ont paru intéressants et j'ai pris plaisir à jouer avec la mathématique.
J'ai découvert en particulier que je suis une professeure qui n'a pas toujours la réponse immédiate à des problèmes inhabituels ou à des énigmes!
En réfléchissant à ceci, j'ai pris conscience qu'en me limitant à dire à mes élèves que la mathématique décrit tout ce qui nous entoure quotidiennement, même au moyen d'exemples, je ne serais pas en mesure de les faire s'engager ou de capter leur intérêt !
Je me suis rendu compte qu'il fallait "imaginer" des stratagèmes pour qu'ils constatent que les mathématiques vont bien au-delà de l'application de règles sans liens avec la réalité !
C'est ainsi que j'ai envisagé de travailler avec de nouvelles activités éducatives, en m'appuyant sur des problèmes du RMT pour induire les élèves à « toucher pour y croire ».

Au cours des activités de laboratoire « modélisation des mathématiques » entre enseignants, j'étais parfois déconcertée parce que je ne pouvais pas contrôler toutes les procédures comme je le faisais en classe. L'image de l'enseignant qui a réponse à tout s'estompait progressivement. Tout cela m'a conduit à réaliser que, devant un nouveau problème inédit, l'enseignant a aussi besoin de réfléchir, comme n'importe qui.
En effet, pour arriver à la solution, la nécessité de penser et de raisonner plus en profondeur se fait de plus en plus vive, comme celle de se confronter entre collègues ... et ainsi de suite.
J'ai compris qu'au cours de nombreuses années d'enseignement, où je me suis appuyée sur des matériels didactique très structurés avec des procédures de résolution standard, j'avais perdu le plaisir de découvrir, de rechercher et de m'aventurer dans d'autres types de problèmes et de raisonnements.

Premières interventions didactiques

Inspirée par les activités pratiquée avec Sandro et Maria j'ai décidé d'impliquer les élèves d'une classe de IIA du cours de Géométrie, peu motivés et avec d'importantes carences de base, dans une activité où il était nécessaire de manipuler du matériel : baguettes, formes géométriques découpées dans du carton, pavés, ficelles, attaches, … Je leur ai proposé plus tard des activités à partir de problèmes du Rallye.
Les élèves ont changé d'attitude parce qu'ils ont ont eu du plaisir et ont constaté l'intérêt mathématique de ces activité ! À la surprise de tous, ils ont également remporté la finale du Rallye en 2012[2].

Mes conceptions de l'enseignement ont alors évolué sensiblement. Je cherche maintenant à mieux orienter mes élèves sur la compréhension préalable des données et relations en jeu dans les problèmes, comme ceux du RMT, qui captent l'attention et leur font comprendre l'intérêt et la nécessité de raisonnements.

Les élèves ont compris qu'ils ne peuvent plus, ou surtout qu'ils ne doivent plus, se contenter de mémoriser des procédés lorsqu'ils sont contraints, de manière naturelle, à raisonner pour trouver la démarche de résolution d'un problème.

Au début, le plus grand obstacle à surmonter pour mes élèves, a été la réticence à se mettre en jeu et par conséquent à ne pas se lancer dans une argumentation parce que, de leur point de vue « La réponse, tu la connais ou tu ne la connais pas ! »

J'ai eu de la peine à leur faire comprendre qu'une réponse ne vient pas de nulle part ou d'une procédure apprise par cœur, mais d'un raisonnement personnel, et que cela vaut également pour un enseignant !

J'ai essayé, dans la pratique, de faire remarquer que la réponse à un problème provient de nombreuses petites observations, lors de la lecture de l'énoncé et au cours de son appropriation, et que ce sont des liens entre celles-ci que peut jaillir l'étincelle qui mène à la solution.

[1] Enseignante de la Scuola Superiore (Lycée Scientifique et cours de Géométrie) de Senorbì – Cagliari.
[2] en catégorie 10

Je me suis mise au travail avec mes élèves dans la résolution de différents problèmes « déroutants » pour leur montrer que moi aussi, j'ai besoin d'analyser le texte, d'imaginer et de suivre mes raisonnements pour parvenir à une solution.

J'ai encore essayé d'expliquer que mes procédures de résolution ne sont pas nécessairement uniques ou irremplaçables.

Chacun de mes élèves a donc commencé à avoir plus de confiance dans les idées qui lui viennent à l'esprit et dans leur efficacité pour la recherche des solutions, pour constater avec plaisir qu'il est capable de réussir.

Je me suis aussi rendu compte que l'enseignant ne doit absolument pas guider les élèves durant la phase de résolution, ce qui ne leur laisse pas la liberté de conduire la recherche en fonction de leur propre pensée. Les élèves, influencés par les observation ou les suggestions de l'enseignant, abandonnent ou oublient leurs propres idées.

Ainsi l'élève ne peut plus profiter de son propre raisonnement, peut-être original, et perd l'occasion de valider ou d'exprimer ses potentialités personnelles.

Dans mes classes, j'ai commencé à observer ce qui se passe lorsque les élèves sont mis en situation de recherche :

- avec des problèmes plus proches de leur réalité (plus concrets et moins abstraits),
- en autonomie complète,
- en toute liberté et tranquillité avec aussi le « droit à l'erreur »,
- avec la conviction que le développement de leur propres idées ou raisonnements est important.

J'ai découvert ainsi des aspects inattendus pour moi :

- les erreurs de mes élèves façonnent ma professionnalitè d'enseignante ;
- les élèves, en particulier ceux que je jugeais inaptes en mathématiques, possèdent de nombreuses compétences ignorées.

LES PROBLÈMES DU RALLYE : DU CONCOURS À LA CLASSE

La naisance d'un besoin : Comment relier les deux aspects ?

<u>Les problèmes du Rallye</u>, intéressants, engageants, ouvrent l'esprit à l'inattendu ;
<u>Le travail en classe,</u> répond à la nécessité de suivre le programme national.

Je présente ci-dessous un travail effectué en classe IIIB[3] de l'école secondaire en utilisant un problème du rallye où je relie les deux aspects.

Durée: 3 heures de classe
Thème : systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues
Objectifs:
- reconnaître un système d'équations impossibles et un système déterminé;
- la résolution d'un système d'équations linéaires déterminé, par la méthode de substitution et par la méthode de Gauss.

J'ai proposé le problème *Forfaits vacances* (20^{e} RMT, 12. Cat. 6, 7, 8, 9)
Cadre conceptuel : *Arithmétique / Opérations; Algèbre / Préalgèbre*

L'objectif préliminaire que je me suis fixé était de vérifier si le concept de *systèmes d'équations* abordé en première année pouvait venir à l'esprit de mes élèves comme une procédure possible de résolution.

---

[3] Cat. 8

Enoncé du problème:

(20.II.12) **FORFAIT VACANCES** Cat. 6, 7, 8, 9)

L'agence TRANSALP propose 4 forfaits différents, A, B, C et D pour une semaine de vacances. Voici ces quatre propositions, chacune comprenant quatre activités organisées ainsi :

A) 380 euro	**B) 340 euro**	**C) 320 euro**	**D) …. euro**
Excursion dans une île	*Randonnée en montagne*	*Parc d'attractions*	*Randonnée en montagne*
Randonnée en montagne	*Parc d'attractions*	*Parc d'attractions*	*Parc d'attractions*
Parc d'attractions	*Excursion dans une île*	*Randonnée en montagne*	*Excursion dans une île*
Parc d'attractions	*Randonnée en montagne*	*Randonnée en montagne*	*Excursion dans une île*

Le prix d'un forfait est la somme des prix de chacune des activités qui le composent. L'agence a oublié d'écrire le prix du forfait de la semaine D.

Quel est le prix du forfait de la semaine D ?

Expliquez votre raisonnement.

Qu'est-ce qui c'est passé en classe ?
La réponse d'un élève arrive après 5 minutes:
Il compare les activités réunies de A et B avec celles de C et D, et arrive à la réponse
340 + 380 = 720 – 320 = 400

A) 380euro	B) 340euro	C) 320euro	D) … euro
- *Excursion dans une île* - *Randonnée en montagne* - *Parc d'attractions* - *Parc d'attractions*	- *Randonnée en montagne* - *Parc d'attractions* - *Excursion dans une île* - *Randonnée en montagne*	- *Parc d'attractions* - *Parc d'attractions* - *Randonnée en montagne* - *Randonnée en montagne*	- *Randonnée en montagne* - *Parc d'attractions* - *Excursion dans une île* - *Excursion dans une île*

Parc d'attractions = 3
Randonnée en montagne = 3
Excursion dans une île = 2

Parc d'attractions = 3
Gita all'isola = 2
Randonnée en montagne = 3

Je modifie seulement la question du problème pour voir si les élèves procèdent encore à des comparaisons et / ou tentatives d'obtenir la réponse.
La question devient :
Quel est le prix de chaque activité et du Paquet D ? Expliquez votre raisonnement.
Les élèves procèdent toujours par comparaisons …

A) 380euro	B) 340euro	C) 320euro	D) … euro
- *Excursion dans une île* - *Randonnée en montagne* - *Parc d'attractions* - *Parc d'attractions*	- *Randonnée en montagne* - *Parc d'attractions* - *Excursion dans une île* - *Randonnée en montagne*	- *Parc d'attractions* - *Parc d'attractions* - *Randonnée en montagne* - *Randonnée en montagne*	- *Randonnée en montagne* - *Parc d'attractions* - *Excursion dans une île* - *Excursion dans une île*

380 - 180 = 200
Parc = 200 : 2

340 – 160 = 180
Montagne + île = 180

320 : 2 = 160
Montagne + île = 160

Je décide de changer non seulement la demande mais aussi les nombres donnés de telle sorte que les élèves commencent à ressentir le besoin d'un système d'équations et de comprendre qu'il est parfois nécessaire d'y recourir.

FORFAIT VACANCES (I)

L'agence TRANSALP propose 4 forfaits différents, A, B, C et D pour une semaine de vacances. Voici ces quatre propositions, chacune comprenant quatre activités organisées ainsi :

A) 400 euro	**B) … euro**	**C) 340 euro**	**D) 420 euro**
Excursion dans une île	*Parc d'attractions*	*Excursion dans une île*	*Excursion dans une île*
Excursion dans une île	*Parc d'attractions*	*Parc d'attractions*	*Parc d'attractions*
Randonnée en montagne	*Randonnée en montagne*	*Randonnée en montagne*	*Excursion dans une île*
Parc d'attractions	*Randonnée en montagne*	*Randonnée en montagne*	*Excursion dans une île*

Le prix d'un forfait est la somme des prix de chacune des activités qui le composent. L'agence a oublié d'écrire le prix du forfait de la semaine B.

Quel est le prix du forfait de la semaine B ?

Expliquez votre raisonnement.

Les tentatives des élèves :

A) et C)
Excursion dans une île = 3
Randonnée en montagne = 3
Parc d'attractions = 2

B) et D)
Parc d'attractions = 3
Excursion dans une île = 3
Randonnée en montagne = 2

Avec ces données, les élèves ont rencontré des obstacles majeurs dans les procédures et tentatives de comparaison et ont donc ressenti, après beaucoup de réflexion, la nécessité de recourir au système d'équations.
Deux ou trois étudiants ont l'idée du système et les autres suivent la même solution. Après la résolution du système, ils disent: « Maintenant, nous comprenons qu'il est necessaire d'utiliser le système parce que nous ne pouvions pas procéder autrement »
Réglez le système d'équations en plaçant:
Excursion dans une île = x, Randonnée en montagne = y et Parc d'attractions = z résolus par la méthode de substitution ...

$$\begin{cases} 2x + y + z = 400 \\ x + 2y + z = 340 \\ z = 420 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 400 \\ x + 2y + z = 340 \\ 3x + z = 420 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 420 - 3x = 400 \\ x + 2y + 420 - 3x = 340 \\ z = 420 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 3x = - 20 \\ - 2x + 2y = 340 - 420 \\ z = 420 - 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} - x + y = - 20 \\ 2x - 2y = 80 \\ z = 420 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 20 \\ 2x - 2y = - 340 + 420 \\ z = 420 - 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 20 \\ x - y = 40 \\ z = 420 - 3x \end{cases}$$

Le système est impossible car il n'y a une «incohérence x - y = 40 et x - y = 20
Dans ce cas, le problème n'a pas de solution! !

Je change de nouveau les données et donne aux élèves un système de trois équations à trois inconnues à résoudre par la méthode de Gauss.

FORFAIT VACANCES (II)

L'agence TRANSALP propose 4 forfaits différents, A, B, C et D pour une semaine de vacances. Voici ces quatre propositions, chacune comprenant quatre activités organisées ainsi :

A) 500 euro	**B) 420 euro**	**C) … euro**	**D) 620 euro**
Randonnée en montagne	*Parc d'attractions*	*Excursion dans une île*	*Excursion dans une île*
Randonnée en montagne	*Parc d'attractions*	*Excursion dans une île*	*Parc d'attractions*
Excursion dans une île	*Randonnée en montagne*	*Randonnée en montagne*	*Randonnée en montagne*
Parc d'attractions	*Excursion dans une île*	*Randonnée en montagne*	*Randonnée en montagne*
			Randonnée en montagne

Le prix d'un paquet est la somme des prix de chacun des actifs qui la compose. Mais l'agence a oublié d'écrire le prix du forfait de la semaine C.

Quel est le prix pour chaque activité et le prix du paquet C?

Expliquez votre raisonnement.

Et enfin, voici la solution des élèves :

x = *Randonnée en montagne* y = *Parc d'attractions* z = *Excursion dans une 'île*

$$\begin{cases} 2x + y + z = 500 \\ x + 2y + z = 420 \\ 3x + y + z = 620 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 500 \\ x + 2y + z = 420 \\ -5y - 2z = -640 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 500 \\ -3y - z = -340 \\ -5y - 2z = -640 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 500 \\ -3y - z = -340 \\ z = 220 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 500 \\ 3y = 340 - 220 \\ z = 220 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 40 + 220 = 500 \\ y = 120/3 \\ z = 220 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 260 = 500 \\ y = 40 \\ z = 220 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 500 - 260 \\ y = 40 \\ z = 220 \end{cases}$$

x = 240/2 = 120 (montagne)

y = 40 (parc d'attaction)

z = 220 (gita all'isola)

Enfin, voici une des considérations des élèves : *En effet, nous ne serions pas arrivés à comprendre que le premier système était impossible seulement en regardant plus attentivement le tableau et même avec cela, nous ne pouvions pas procéder autrement.*

En tant qu'enseignante, j'aimerais dire à tous de faire confiance aux mathématiques lorsque vous vous aventurez dans la recherche d'une solution et de continuer à utiliser les problèmes non pour ennuyer nos élèves mais pour les stimuler parce que le monde de demain est déjà en formation dans leur corps comme dans leur esprit !

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

LES NOMBRES DE MONSIEUR TRAPÈZE

Michel Henry, Angela Rizza

Pour le Groupe Fonctions[1]

Identification
Rallye: 18-I, 13
Catégories: 6, 7, 8, 9, 10
Domaine conceptuel: Arithmétique, Algèbre, Fonctions
Familles de tâches pour la résolution : Recherche de régularités. Comptage et opérations dans N, nombres figurés, élaboration et utilisation d'une formule, suites numériques.

Résumé

Étant donné la suite des 44 premiers entiers naturels disposés en trapèze (sur la première ligne 0, 1, 2, sur la seconde ligne 3, 4, 5, 6, 7), trouver le dernier nombre de la trentième ligne.

Énoncé du problème

Monsieur Trapèze écrit les nombres naturels depuis 0, très régulièrement, en lignes et en colonnes, dans cette disposition en forme de trapèze :

					0	1	2					
				3	4	5	6	7				
			8	9	10	11	12	13	14			
		15	16	17	18	19	20	21	22	23		
	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	….	….	….

…. …. …. …. …. …. …. …. …. ….

Arrivé à 44, il fait une pause et constate qu'il est à la 6^{e} ligne, où il manque encore trois nombres.
Il décide d'écrire en tout 30 lignes complètes.

Quel sera le dernier nombre qu'il écrira dans sa 30^{e} ligne ?

Expliquez votre raisonnement.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

Domaine arithmétique

- Comprendre la règle de construction et éventuellement compléter la sixième ligne, voire la septième. (En procédant ainsi, ligne par ligne, on peut arriver au dernier nombre de la 30^{e} ligne (959). Comptage dans N.
- Ou : rechercher des régularités pour passer d'un terme au suivant d'une suite choisie qui traverse le trapèze de ligne en ligne (dans une colonne : + 4 ; + 6 ; + 8 ; + 10 ; + 12… ; … ; parallèlement au côté droit du trapèze : + 5 ; + 7 ; + 9 ; + 11 ; ... ; parallèlement au côté gauche du trapèze : + 3 ; + 5 ; + 7 ; + 9 ; + 11) ; et compléter l'alignement un à un des termes de la suite où la régularité a été observée, jusqu'à la 30^{e} ligne. *Régularité arithmétique : sommes termes à termes*.
- Ou : passer à des calculs de sommes de 30 termes issues des régularités observées. Par exemple, le 30^{e} nombre de la colonne centrale est : 1 + 4 + 6 + 8 + … + 60 = 929, puis, comme dans la 30^{e} ligne, il y a 61 nombres, celui du milieu est suivi des 30 entiers suivants. Le dernier nombre de la 30^{e} ligne est donc 929 + 30 = 959. *Régularité arithmétique : sommes partielles*.

[1] Le groupe "Fonctions" qui a analysé ce problème dans le cadre de la rencontre ARMT de Luxembourg en 2013, était composé de Lucia Argilla, Maria Cristina Bonomi, Sandro Deplano, Valeria Ferrari, Mathias Front, Annie Henry, Michel Henry, Rosa Iaderosa, Ana Paula Jahn, Francesca Ricci, Angela Rizza.

- Ou : transformer des sommes de 30 termes en produits. Par exemple, la suite des termes du côté gauche donne comme dernier terme : 2 + 5 + 7 + 9 + ... + 59 + 61 = 2 + (5 + 61) + (7 +59) + (9 + 57) + ... + (31 + 35) + 33 = 2 + 66 + 66 + ... 66 + 33 = 2 + 14 × 66 + 33 = 35 + 924 = 959. *Régularité arithmétique : sommes et produits.*

  Domaine des fonctions (algèbre)
- Ou : généraliser l'une ou l'autre des régularités observées précédemment par une procédure fonctionnelle. Par exemple, la plus simple est d'identifier le deuxième nombre de la ligne n par n^2 ; ou observer que la colonne du « 2 » contient les nombres de la forme $n(n + 1)$ .... Par exemple, comme le 2^{e} nombre de la ligne n est n^2, on peut aller à la 31^{e} ligne, trouver $31^2 = 961$, puis « reculer » de 2 pour arriver au dernier nombre de la 30^{e} ligne : 959. Pour toutes ces procédures, on peut faire appel à des tableaux ou des listes organisées. *Régularité, généralisation.*

  Domaine arithmétique (géométrie)
- Ou : calculer l'aire du trapèze avec pour petite base la première ligne constituée de 3 nombres et pour grande base la trentième ligne constituée de 61 (= 2 x 30 + 1) nombres et pour hauteur 30 lignes. Ainsi on obtient (3 + 61) x 30/2 = 960. il faut enfin enlever 1 puisque le comptage part de 0. *Formule de l'aire du trapèze*.
- Ou bien, si on transforme le trapèze en triangle en ajoutant une case comme première ligne, on obtient la configuration des nombres figurés triangulaires de $n + 1$ lignes, avec une ligne de plus que pour le trapèze. Les nombres situés à la fin des lignes sont les carrés des entiers successifs. Le nombre des cases sera donc 31 x 31 = 961. En éliminant la case ajoutée et celle contenant le zéro on obtient 959 dans la dernière case. *Nombres figurés.*

  Domaine des fonctions
- Ou bien développer un algorithme opérant en même temps sur la ligne et sur la somme des nombres. Partir de l'effectif R_n des nombres de la ligne n donnée : $R_n = R_{(n-1)} + 2$. Le dernier nombre S_n de la ligne n est obtenu comme somme $S_n = S_{(n-1)} + R_n$ avec $S_0 = -1$, $S_1 = 2$ ($S_1 = S_0 + R_1 = -1 + 3 = 2$), $S_2 = 7$.
  Suite définie par récurrence.

Mots-clés

Nombres figurés, régularité arithmétique, régularité algébrique, suites numériques, fonctions.

Points attribués

Points attribués	0	1	2	3	4	Nombres de classes	m
Cat 6, en %	51	19	9	13	8	872	1.1
Cat 7, en %	30	17	13	20	20	709	1.8
Cat 8, en %	20	16	11	20	33	462	2.3
Cat 9, en %	19	14	6	23	38	144	2.5
Cat 10, en %	15	11	8	13	53	109	2.8
Nombres de classes	784	396	236	400	480	2296	1.7

Selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

4 La réponse 959 avec explication de la démarche (pas à pas, par suite, par fonction ...)

3 La réponse 959 sans explication ou avec une démarche peu claire
ou une démarche clairement exprimée mais avec une seule erreur de calcul (addition, confusion avec la ligne précédente ou suivante ...)

2 Découverte explicite de nombres de la dernière ligne mais erreurs successives au sein de la ligne

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

La moyenne des points attribués par catégories (sur 2296 classes) augmente sensiblement de la catégorie 6 à la catégorie 10 dont le succès est quasi total.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

Pour les quatre sections FC, SR, PR et CA dont nous avons examiné les copies, nous avons fait les remarques suivantes sur l'attribution des points :

Les « 0 pt » (34% du total des copies, de 51% à 15% de la catégorie 6 à la catégorie 10)
Cette « incompréhension du problème » se manifeste par quelques feuilles blanches, des trapèzes partiellement construits (de 10 à 15 lignes complètes) avec beaucoup d'erreurs (imprécisions dans l'alignement des colonnes) et, surtout, par des **procédures faisant appel à la linéarité** du genre : *on remplit le trapèze jusqu'au dernier nombre de la dixième ligne puis on multiplie par 3 pour trouver le dernier nombre de la trentième ligne (ou jusqu'à la 15^e ligne, suivi d'une multiplication par 2 ; ou jusqu'à 47, dernier nombre de la 6^e ligne pour trouver 235 = 47 x 5 comme réponse*).
Ces **procédure linéaires** ne se rencontrent pas en catégorie 8, on en dénombre 10% en catégorie 7 et près de 20% en catégorie 6.
Autres symptômes d'incompréhension rencontrés en catégorie 6 : des multiplications dont l'un des facteurs est le nombre total de lignes (30) ou du nombre de lignes encore à compléter (24) comme 1128 = 47 x 24, 900 = 30 x 30.
Exemple, PR 631
L'ultimo numero della trentesima riga è 1128. Prima, abbiamo trovato l'ultimo numero della sesta riga, cioè 47, poi l'abbiamo moltiplicato per 24 e è risultato questo numero.

Les « 1 pt » (17% du total des copies, stable, de 17% à 11% de la catégorie 6 à la catégorie 10)
Le « début de raisonnement correct » a été parfois difficile à différencier du « 0 pt » ou du « 2 pts ».
A Besançon, nous avons attribué ce « 1 pt » aux copies qui présentent une succession régulière de nombres alignés dans le trapèze (en général sur le bord droit ou, moins souvent, dans la colonne commençant par 0) et qui ont constaté et écrit explicitement la « constance (2) des écarts des écarts » successifs. Par exemple, les derniers nombres des lignes sont 2, 7, 14, 23, 34, ..., les écarts successifs sont 5, 7, 9, 11, et les écarts de cette dernière suite sont constants : 2.
La constante 2 se retrouve aussi comme différence entre les nombres de termes par ligne : 3, 5, 7, 9, ... dont il s'agit de calculer les totaux partiels jusqu'à la 30^e ligne.
Malgré des explications parfois claires sur la procédure à suivre, par perception de la régularité, les groupes d'élèves ayant reçu « 1 pt » n'ont pas été capables de conduire les calculs très loin. Ils savent quelle addition effectuer mais ne peuvent aboutir en raison du nombre élevé de termes et car ils ne savent pas où s'arrêter.

Les « 2 pts » (10% du total des copies, stabilité d'une catégorie à l'autre)
Le critère « découverte explicite de nombres de la dernière ligne mais erreurs successives au sein de la ligne » ne répond à aucune des copies examinées. A Besançon puis pour la vérification des copies de Parma, nous l'avons adapté et avons accordé les « 2 points » aux procédures bien explicites et bien engagées mais comprenant deux ou trois erreurs, de calcul ou de détermination de la dernière ligne ou du dernier nombre de la ligne.
Il faut relever ici la difficulté du relevé des erreurs pour distinguer l'erreur unique des erreurs diverses ou répétées. Par exemple, dans la construction du trapèze, au-delà des dix premières lignes, une première erreur peut apparaître en vérifiant si le deuxième nombre de la ligne est un carré. Au cas où l'on décèle une première erreur, en général d'une unité, celle-ci peut se reporter sur les lignes suivantes mais aussi être « aggravée » d'une deuxième ou d'une troisième inattention.

Les « 3 pts » et « 4 pts » (38% du total des copies)
Nous regroupons les copies des deux groupes « 3 et 4 points » dans notre analyse car elles ne diffèrent pas sensiblement du point de vue des procédures adoptées et correspondent aux critères : « la réponse 959 avec explication de la démarche » et « la réponse 959 sans explication ou avec une procédure peu claire », ou une procédure correcte mais « avec une seule erreur de calcul (addition, confusion avec la ligne précédente ou suivante...) ».
L'explication figure d'ailleurs dans toutes les copies ayant reçu de 1 à 4 points et c'est en fait plutôt « l'efficacité dans les calculs » qui a été mesurée pour ce problème de *Monsieur Trapèze*,
Parmi les « 3 pts », il faut relever les procédures correspondant à la seconde alternative du critère : ou une démarche clairement exprimée mais avec une seule erreur de calcul (addition, confusion avec la ligne précédente ou suivante ...).
Cette « seule erreur » peut être la confusion entre « nombre de nombres » du trapèze sur les 30 premières lignes et « dernier nombre de la 30^e ligne » qui diffèrent de 1 car la numérotation commence à 0 et non à 1. Dans ce cas la réponse est 960.
Elle peut aussi être 1022 (31^e ligne) ou 898 (29^e ligne) correspondant à une erreur de comptage des lignes.
Lorsque tous les calculs sont présentés, il peut encore s'agir d'une seule erreur dans les additions successives.

Le dernier cas concerne une interprétation erronée de l'énoncé consistant à penser que M. Trapèze va encore écrire 30 lignes après la sixième alors qu'il s'agit de 30 lignes en tout (y compris les six premières après lesquelles il a fait une pause). On ne peut pas retirer plus d'un point pour cette interprétation du texte qui aurait pu être plus clair. Dans cette seconde interprétation, la réponse serait 1367.

Analyse des procédures utilisées
Sur la base de la description dans les tâches, les algorithmes sont classés (tableau 2) en vue de déterminer leur fréquence par catégorie et d'examiner l'impact de l'algorithme le plus fréquent sur les réponses correctes.

Le tableau 1 montre les données de la section de Cagliari où on identifie que l'algorithme qui a une fréquence plus élevée est A2.

	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Tot
Cat 6	3	2	3	0	0	0	0	0	0	8
Cat 7	2	2	2	0	0	0	0	0	0	6
Cat 8	1	3	1	0	0	0	1	0	0	6
Cat 9	3	2	6	0	0	0	2	1	1	15
Cat 10	0	1	5	2	0	1	0	5	0	14
	9	10	17	2	0	1	3	6	1	49

Tableau 1

Numéro de la procédure	Nom de la procédure	Comportement observé par les correcteurs.
A0	Procédure inadaptée ou pas de procédure	Incompréhension du texte et des règles.
A1	Règle de construction	Comprendre la règle de construction et éventuellement compléter la sixième ligne et voire la septième ligne. (En procédant ligne par ligne et en s'armant de patience, on peut obtenir le dernier numéro de la 30-ème ligne (959), peut-être avec quelques erreurs).
A2	Recherche de régularité	Rechercher des régularités entre les termes successifs d'une suite couvrant le trapèze de haut en bas (dans une colonne: + 4, + 6, + 8, + 10, + 12, ..., parallèlement au côté droit du trapèze + 5, + 7 + 9 + 11, ..., parallèlement au côté gauche du trapèze + 3, + 5, + 7 + 9 + 11, ...) et compléter l'alignement qui a été observé jusqu'à la 30-ème ligne. (Ceci est encore répétitif et sujet à des erreurs ou des oublis.)
A3	Calculer la somme de 30 termes	Calculer les sommes de 30 termes basés sur les régularités observées. Par exemple, le 30-ième nombre de la colonne centrale est le suivant: 1 + 4 + 6 + 8 + ... + 60 = 929 ; puis, étant donné que dans la 30-ème ligne il y a 61 nombres, le nombre médian est suivi par 30 nombres entiers successifs. Le dernier nombre de la 30-ème ligne est donc 929 + 30 = 959.
A4	Transformer des sommes en produits	Par exemple, la séquence de termes de la suite à droite donne comme dernier terme: 2 + 5 + 7 + 9 + ... + 59 + 61 = 2 + (5 + 61) + (7 +59) + (9 + 57) + ... + (31 + 35) = 2 + 66 + 66 + 66 ... + 33 = 2 + 14 × 66 + 33 = 35 + 924 = 959.
A5	Fonctions –suites	Généraliser l'une des régularités observées précédemment, au moyen d'une procédure fonctionnelle. Par exemple, le plus simple est d'identifier le second terme de la ligne n avec n^2; ou observer que la colonne de "2" contient les nombres de la forme n(n + 1). Par exemple, parce que le second terme de la ligne n est n^2, vous pouvez aller à la 31-ème ligne, trouver $31^2 = 961$, puis reculer de 2 pour obtenir 959.
A6	Figures	Les nombres du trapèze sont considérés comme des zones carrées. On calcule l'aire du trapèze et on doit retirer un seul carré, celui associé au 0.

		Cette procédure est à relier avec l'utilisation des nombres figurés.
A7	Récursivité – suites	Pour obtenir le résultat on peut développer un algorithme fonctionnant simultanément sur la ligne et sur la somme des nombres. On part de la description des nombres de la ligne de données à partir de $R_n = R_{(n-1)}+2$. Celles-ci sont reliées au nombre final obtenu comme somme de $S_n = S_{(n-1)} + R_n$ avec $S_0 = -1$, $S_1 = 2$: $S_1 = S_0 + R_1 = -1 + 3 = 2$, $S_2 = 7$.
A8	Réponse sans procédure évidente	La réponse 959 sans explication

Tableau 2

Il est significatif de comparer les procédures dans les cas où 3 points ont été attribués, majorité des scores obtenus dans les catégories 6, 7, 8.

Puisque la description de la tâche attribuait 3 points dans les trois cas distincts :

- Réponse correcte sans explication
- Réponse correcte avec une procédure peu claire
- Procédure correcte clairement expliquée avec une seule erreur de calcul.
- Cela privilégie l'erreur de calcul par rapport aux explications : correcte sans explication ou correcte avec une procédure peu claire.

		Distribution du score 3																										
		A1			A2			A3			A4			A5			A6			A7			A8			Totaux		
Categorie	Nombre de productions	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul
6	3			1		1	1																			0	1	2
7	3			1			2																			0	0	3
8	3						2												1							0	0	3
9	6			1		1	2															1	1			1	2	3
10	3						1									1			1							0	0	3
Totaux	18	0	0	5	0	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	1	1	0	0	1	3	14
		3			10			0			0			1			2			1			1			18		

Pour aller plus loin

A. Méthode « pas à pas ». *Règle de construction.*

Comme le prévoyait l'analyse a priori du problème, il y a eu quelques tentatives de compléter le trapèze jusqu'à la 30^e ligne, tentatives qui ont toutes échoué en raison des dimensions du tableau. En effet les difficultés de la méthode « un à un » arrivent vers la dixième ligne, là où les nombres ont trois chiffres.

Deux ou trois groupes ont « rallongé » leurs feuilles par collages pour arriver à y placer les lignes. En effet les difficultés de la méthode « un à un » arrivent vers la dixième ligne, là où les nombres ont trois chiffres, sont plus que vingt et ne s'écrivent plus directement « sous » ceux de la ligne précédente ; on manque d'espace ou il faut écrire les nombres trop petits et, surtout, on manque de repères verticaux car, même sur une feuille quadrillée, on est obligé de déborder des carreaux prévus au début.

Pour construire un trapèze entier dans une feuille quadrillée de 4mm x 4 mm et de format A4, il faudrait tout d'abord choisir d'écrire les lignes dans le sens de la longueur de la feuille après s'être rendu compte que la 30^e

ligne aura 61 termes, s'assurer qu'il y aura bien 30 carreaux dans le sens de la largeur et 62 dans le sens de la longueur pour déterminer les « mailles » du tableau.
Cette procédure qui paraît « primitive » à première vue, exigerait en réalité une maîtrise préalable des dimensions du trapèze complété et des contrôles réguliers au cours du remplissage car écrire les nombres de 0 à 959 sans en oublier un est une tâche très exigeante en attention.
Dans les copies d'élèves, les procédures « pas à pas » ne vont en général que jusqu'à la sixième ligne dont il suffit de compléter les trois derniers termes, ou est rarement au-delà de la dixième ligne.
Dans ces derniers cas, les élèves doivent : soit changer de procédure, soit remplacer les nombres par des points (voir 761 et 672 à scanner), soit trouver une méthode qui paraît plus courte mais qui est erronée en faisant appel aux propriétés de linéarité (déjà mentionnées sous « 0 pt »).

B. Prise en compte de régularités de la suite des derniers nombres des lignes (sur le côté droit du trapèze). *Recherche de régularités*

Cette procédure était mentionnée dans l'analyse a priori (§2) mais sans présager qu'elle serait très majoritaire. Sa fréquence est estimée à 60% des cas où une régularité a été observée.
C'est a posteriori que l'on se rend compte de son évidence ;

- les élèves savent que le nombre cherché sera sur la trentième ligne du trapèze, à droite et que le « chemin » le plus naturel pour s'y rendre est de suivre le côté droit, de la zone connue, en haut, vers le bas
- les cinq premiers nombres du côté droit sont donnés et le sixième est facile à déterminer

termes :	2	7	14	23	34	47	...

- En observant les écarts successifs entre ces nombres, on constate qu'il s'agit de la suite des nombres impairs à partir de 5 dont la raison (2) est évidente :

termes :	2		7		14		23		34		47		...	
écarts :		5		7		9		11		13		15		....

- Il suffit alors d'imaginer que la régularité se poursuivra et de procéder par additions successives de nombres impairs : 47 + 15 = 62 ; 62 + 17 = 79 ; 79 + 19 = 98 ; ...

Une majorité de copies font apparaître cette succession d'additions ou, sans les signes d'opérations, les successions correspondantes de termes, en particulier. à partir de 47, la suite 62, 79, 98, 119, 142, 167, ..., qui parfois s'arrête à 898 ou à 1022 au lieu de 959.
Ce dernier type d'erreur révèle la principale difficulté de la procédure : trouver le 30^{e} nombre de la suite ou, en termes d'efficacité, savoir où il faut s'arrêter.
Les copies ne sont en général pas explicites à ce propos, On imagine que, parfois, les lignes sont comptées au fur à mesure de l'écriture des termes, calculés à la calculatrice par l'addition des nombres impairs successifs. Dans quelques cas le dernier nombre à additionner, 61, semble avoir été déterminé à l'avance, comme 30^{e} nombre impair à partir de 3.
Une autre difficulté de la procédure, comme de toutes celles qui reconstituent une suite de nombres, est le contrôle des résultats, qui demande une attention permanente. Nous ne pouvons pas savoir par les copies comment ce contrôle a été exercé ; nous savons seulement que, globalement, la réponse 959 a été obtenue par 18% des groupes (« 4 pts »), que 12% ont commis une seule erreur (« 3 pts »), et 10% de deux à trois erreurs (« 2 pts »).
Cette proportion importante d'erreurs laisse supposer une insuffisance de la coopération au sein des groupes : un seul de ses membres se chargeant des calculs et les autres acceptant les résultats sans contrôle ni regard critique ou encore ne se sentant plus concerné par l'avancement de la suite.

C. Prise en compte de régularités dans la suite des nombres de la colonne 0, 4, 10, 18, ...

La procédure est la même que précédemment, avec une difficulté supplémentaire : arrivé à la ligne 30, il faut encore la suivre jusqu'à son extrémité à droite. Cette procédure figure aussi dans l'analyse a priori (2^{e} §). Nous ne l'avons observée que dans trois copies l'une seule ayant abouti à la réponse 959.

D. Autres procédures par suites de nombres.

On s'attendait à ce que des élèves remarquent la suite des carrés 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; ... de la deuxième ligne en oblique depuis la gauche. Elle n'a été observée qu'une seule fois et a conduit à une procédure fonctionnelle.
C'est manifestement la plus simple des procédures qui, sous forme rhétorique, s'exprime par « calculer le carré du nombre qui indique la ligne suivante et soustraire 2 » et sous forme algébrique par f : $n \longrightarrow f(n) = (n + 1)^2 - 2$ où n est le rang de la ligne, $n \in \mathbf{N}$.

E. Calcul des nombres de termes par ligne

Cette procédure n'a pas été envisagée par l'analyse a priori, elle est cependant assez fréquente. On estime qu'elle a été choisie dans 30% des cas où les élèves ont cherché à poursuivre des régularités.

Elle repose sur un constat assez évident, a posteriori : le dernier nombre de la trentième ligne est en relation étroite avec le nombre total de termes puisqu'il s'agit de la liste des nombres naturels ! Qu'ils soient disposés « en trapèze » ou en ligne n'a pas d'importance. Cette « relation étroite » est simple : le dernier nombre vaut un de moins que la nombre de termes, puisque la suite des nombres naturels commence par 0.

Dans cette conception du « dernier nombre d'une ligne », il n'y a pas besoin d'observer les écarts de la suite sur le côté droit (2 ; 7 ; 14 ; 23 ; ...) ; il suffit de compter les nombres de chaque ligne : 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; ... et/ou de constater qu'il y a à chaque ligne deux termes de plus qu'à la ligne précédente pour se convaincre que le nombre total des termes sera la somme des 30 nombres impairs à partir de 3.

On retrouve la suite de la procédure B où l'on remplace « terme » par « nb tot de termes » partant de 3 (au lieu de 2) et « écarts » par « nb de termes d'une lignes » et où l'on intervertit les deux lignes :

nb termes /ligne :	3		5		7		9		11		13		15	....
nb tot. termes :		3		8		15		24		35		48		...

Les sommes successives conduisent ici à 960, termes dans le tableau de 30 lignes, dont il faut enlever 1 pour arriver au dernier terme de la 30^{e} ligne : 959.

F. procédures par transformations de sommes en produits

L'analyse a priori (§4) proposait : « *Ou : transformer des sommes de 30 termes en produits. Par exemple, la suite des termes du côté gauche donne comme dernier terme :* $2 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 59 + 61 = 2 + (5 + 61) + (7 +59) + (9 + 57) + \ldots + (31 + 35) + 33 = 2 + 66 + 66 + \ldots 66 + 33 = 2 + 14 \times 66 + 33 = 35 + 924 = 959.$ »

Aucune trace d'une telle transformation n'a été trouvée dans les 271 copies examinées !

On peut se demander alors pourquoi les élèves ne voient pas la simplification d'une telle transformation de somme en produit et pourquoi ils se lancent dans une trentaine d'additions successives avec un risque très élevé d'erreur ?

Nous ne pouvons qu'esquisser quelques hypothèses :

- obstacle didactique de la méconnaissance ou de l'ignorance de la commutativité et de l'associativité de l'addition, ainsi que de la distributivité (factorisation) de la multiplication sur l'addition : la tradition scolaire veut qu'on opère toujours de gauche à droite, le signe « = » signifie « ça fait », ...
- obstacle du dernier terme de l'addition, qui doit être déterminé préalablement pour être en mesure d'imaginer une procédure plus simple ;
- obstacle épistémologique de la distributivité et plus généralement des relations entre addition et multiplication.
-

G. procédures fonctionnelles

On arrive ici à la problématique de la construction du concept de fonction. *Monsieur Trapèze* est un des nombreux problèmes du RMT dont le but est de déterminer (pour parodier M de la Fontaine) « Comment l'esprit vient aux filles. et évidemment aux garçons » ou « comment s'installe le concept de fonction ».

La récolte est fort modeste ici : quatre copies (sur 400 examinées) font état d'un lien direct entre le numéro de la ligne et son dernier nombre.

La carence de procédures fonctionnelle est assez surprenante. On peut se demander pourquoi un seul groupe a remarqué la suite des carrés et en a tiré immédiatement que le nombre cherché vaut 2 de moins que $961 = 31^2$? qui se trouve en deuxième position de la ligne 31.

Est-ce dû au fait que la variable n'apparaît pas clairement dans la situation ?

Si l'on présentait explicitement la recherche sous forme d'une « machine » :

Nombre à l'entrée :	1	2	3	4	...	6	7	...	9	...	30	
Nombre à la sortie		2	7	14	23	...	47	62	....	98		?

La recherche de la fonction ne s'organiserait-elle pas plus facilement, l'élève sachant qu'il doit trouver « l'image de 30 » ?

Lors de l'examen des copies, nous nous sommes encore posé d'autres questions sur le statut des découvertes de régularités dans les suites. Certains groupes proposent parfois des règles de progression à partir d'un seul couple de nombres successifs. Par exemple : « *on a vu que dans la suite 5 ; 7 ; … il y a 2 de différence, alors il y aura toujours 2 d'un nombre au suivant* ».

Dans les copies de la section de Parme, nous avons trouvé à quatre reprises une procédure que l'on pourrait qualifier de « fonctionnelle » avec quelques réserves toutefois : les élèves considèrent le trapèze au sens propre de la figure géométrique et non au sens figuré de la disposition des nombres et calculent son aire à l'aide de la formule $(b + B) * h/2$. Cette procédure fonctionne dans le cas précis de la disposition de M. Trapèze (en fait, c'est la même formule que la somme des nombres d'une progression arithmétique de 30 termes, de raison 2 dont le premier terme est 3 et le dernier 61) :

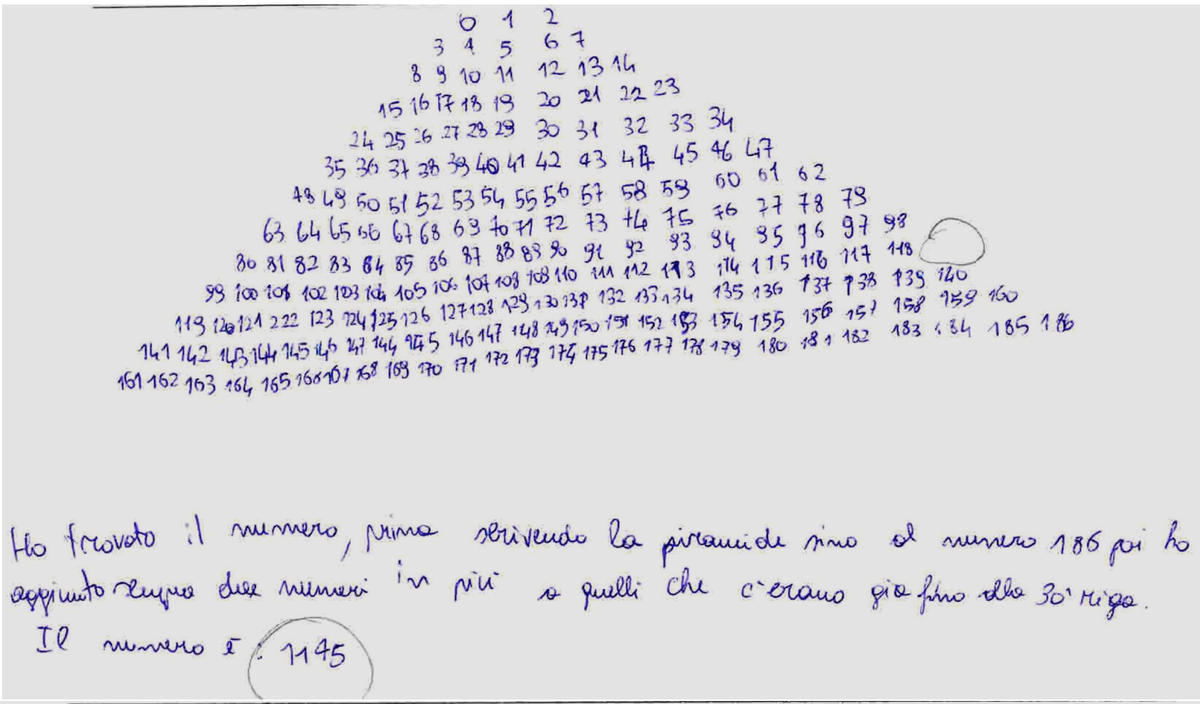
PR 744 : « *Nous avons remarqué qu'en appliquant la formule de l'aire du trapèze (b + B) × h/2, on obtient toujours le nombre suivant le dernier nombre de la grande base du trapèze. Ainsi nous avons trouvé le trente et unième nombre impair (car nous avons remarqué que le nombre des nombres de chaque ligne est égal au nombre impair qui parmi les nombres impairs est le nombre suivant le numéro de la ligne, par exemple pour la première ligne, le second nombre impair donc trois nombres) qui est 61 donc nous avons fait l'opération suivante :*

(61 + 3) × 30 / 2 = 960, puis 960 – 1 = 959.

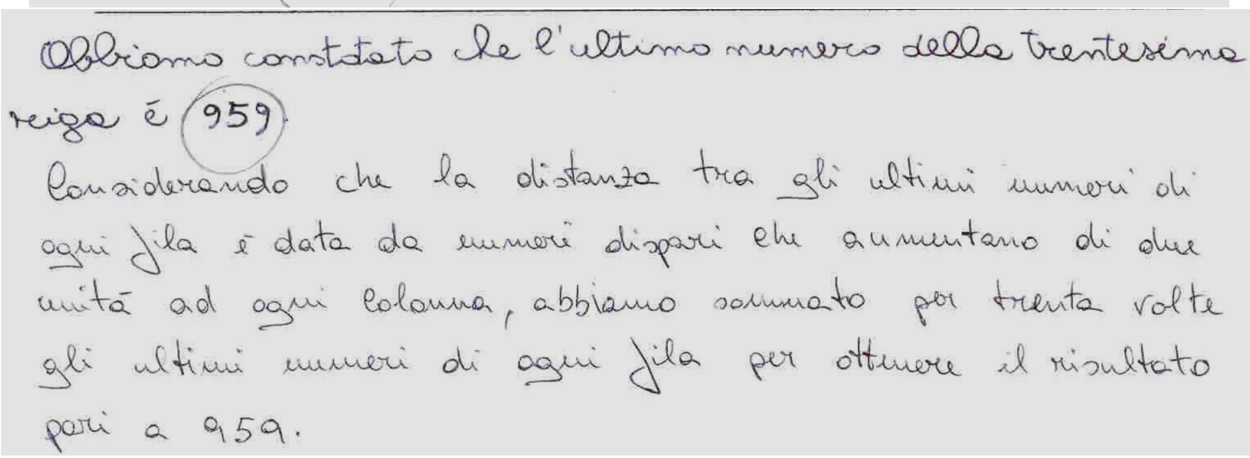
Annexes

Quelques exemples de copies

1. Procedure : Règle de construction avec erreur de report.



Ho trovato il numero, prima scrivendo la piramide fino al numero 186 poi ho aggiunto sempre due numeri in più a quelli che c'erano già fino alla 30ª riga.
Il numero è 1145



Abbiamo constatato che l'ultimo numero della trentesima riga è 959.
Considerando che la distanza tra gli ultimi numeri di ogni fila è data da numeri dispari che aumentano di due unità ad ogni colonna, abbiamo sommato per trenta volte gli ultimi numeri di ogni fila per ottenere il risultato pari a 959.

3. Procedure : géométrie des nombres figurés (CA1008)

IL NUMERO DELLA TRENTESIMA RIGA È 1077.
CI SIAMO ARRIVATI PARTENDO DAL PRESUPPOSTO CHE I NUMERI DELL'ULTIMA RIGA HANNO UNA CERTA SUCESSIONE NELLA LORO DIFFERENZA. INFATTI TRA 2 E 7 C'È 5 DI DIFFERENZA, FRA 7 E 14 C'È UN 5 E UN 2 DI DIFFERENZA, FRA 14 E 23 C'È UN 5 E DUE 2... A TAL PROPOSITO SIAMO ARRIVATI ALLA FORMULA $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ PER RICAVARE QUANTI DUE CI SONO FINO ALLA TRENTESIMA RIGA. OVVIAMENTE DOPO L'ABBIAMO MOLTIPLICATO PER DUE DATO CHE SI TRATTAVA APPUNTO DI 2. DOPODICHÉ A QUESTO NUMERO ABBIAMO SOMMATO I CINQUE CHE SONO IN TUTTO 29.
QUINDI $\frac{29\cdot\cancel{30}^{15}}{\cancel{2}_{1}} = 465\cdot 2 = 930 + (5\cdot 29) = 1075 + 2 = 1077$

QUESTO DUE È QUELLO CORRISPONDENTE ALLA PRIMA RIGA CHE NON AVEVAMO ANCORA TENUTO NEL CONTO

La découverte de la formule relative au double de la somme des nombres de 1 à n est déjà une découverte de fonction. L'application est désastreuse à cause de différentes erreurs, soit de calcul, soit d'interprétation de la formule trouvée. Elle devait être, suivant le calcul des élèves : (28 × 29)/2 = 406 × 2 = 812 + (5 × 29) = 812 + 145 = 957 + 2 = 959.

(Cette procédure qu'on peut considérer de type fonctionnel - mais difficile à valider - utilise une formule littérale pour le calcul des écarts successifs de termes de la forme « 5 + n·2 ». Une première erreur se rapporte à la valeur de « n » qui devait être 28 et non 29, une deuxième erreur vient du produit de 29 par 15 qui est 435 et non 465.

En effet : (28 × 29) + 5 × 29 + 2 = 959.

On ne relève toutefois pas de procédures fonctionnelles parmi ces classes qui, pour leur grande majorité ont opté pour les procédures B (régularités sur la suite formant le côté droit du trapèze) et E (calcul de la somme des nombres par ligne). Une seule copie utilise la formule $n(n + 1)/2$.

4. Procédure de type récursif basée sur le calcul du nombre de nombres de chaque ligne.
Première découverte : le nombre de nombres augmente (à chaque fois) de deux par rapport à la ligne précédente.
Seconde découverte : le nombre final d'une ligne est donné par la somme du nombre de nombres de la ligne avec le nombre final de la ligne précédente.

1ª riga	3
2	5 + 2 = 7
3	7 + 7 = 14
4	9 + 14 = 23
5	11 + 23 = 34
6	13 + 34 = 47
7	15 + 47 = 62
8	17 + 62 = 79
9	19 + 79 = 98
10	21 + 98 = 119
11	23 + 119 = 142
12	25 + 142 = 167
13	27 + 167 = 194
14	29 + 194 = 233
15	31 + 233 = 264
16	33 + 264 = 297
17	35 + 297 = 332
18	37 + 332 = 369
19	39 + 369 = 408
20	41 + 408 = 449
21	43 + 449 = 492
22	45 + 492 = 537
23	47 + 537 = 574
24	49 + 574 = 623
25	51 + 623 = 674
26	53 + 674 = 727
27	55 + 727 = 782
28	57 + 782 = 839
29	59 + 839 = 898
30	61 + 898 = 959

ultimo numero della 30ª riga.

RAGIONAMENTO:

Capendo che il numero delle cifre di ogni riga aumenta di due rispetto alla riga precedente e capendo che la somma del numero delle cifre di ciascuna riga con il numero finale della riga precedente abbiamo ottenuto il numero finale di ogni riga fino ad arrivare al numero finale della trentesima ed ultima riga, ossia <u>959</u>.

ÉTUDE/APPROFONDIMENTI

I NUMERI DEL SIGNOR TRAPEZIO

Michel Henry, Angela Rizza
per il Gruppo Funzioni[1]

Identificazione

Rally: 18.I.13
Categorie: 6, 7, 8, 9, 10
Ambito concettuale: Aritmetica, Algebra, Funzioni
Famiglia del compito per la risoluzione: ricerca di regolarità, conteggio e operazioni in N, numeri figurati, elaborazione e utilizzazione di una formula, successioni numeriche.

Sunto

Data la successione dei primi 44 numeri naturali disposti a trapezio (nella prima riga 0, 1, 2, nella seconda riga 3, 4, 5, 6, 7) trovare l'ultimo numero della trentesima riga.

Enunciato del problema

Il signor Trapezio ha scritto i numeri naturali da 0 in poi, in righe e colonne, in modo molto regolare, in questa disposizione a forma di trapezio:

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>24</td><td>25</td><td>26</td><td>27</td><td>28</td><td>29</td><td>30</td><td>31</td><td>32</td><td>33</td><td>34</td><td></td></tr>
<tr><td>35</td><td>36</td><td>37</td><td>38</td><td>39</td><td>40</td><td>41</td><td>42</td><td>43</td><td>44</td><td>….</td><td>….</td><td>….</td></tr>
<tr><td></td><td>….</td><td>….</td><td>….</td><td>….</td><td>….</td><td>….</td><td>….</td><td>….</td><td>….</td><td>….</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Arrivato a 44 fa una pausa e constata che questo numero è sulla sesta riga e che mancano ancora tre numeri per completarla. Decide di scrivere in tutto 30 righe complete.

Quale sarà l'ultimo numero che scriverà nella trentesima riga?

Spiegate il vostro ragionamento.

Compito per la risoluzione e saperi mobilizzati

Ambito aritmetico

- Comprendere la regola di costruzione ed eventualmente completare la sesta riga e vedere la settima. (Procedendo così di riga in riga e armandosi di pazienza si arriva all'ultimo numero della 30-esima riga (959), probabilmente con alcuni errori). *Conteggio in N.*
- Oppure: ricercare delle regolarità tra i termini successivi di una successione che attraversa il trapezio dall'alto verso il basso (in una colonna: + 4 ; + 6 ; + 8 ; + 10 ; + 12 ; ... ; parallelamente al lato destro del trapezio: + 5 ; + 7 ; + 9 ; + 11 ; ... ; parallelamente al lato sinistro del trapezio: + 3 ; + 5 ; + 7 ; + 9 ; + 11; ...) e completare l'allineamento dove è stata osservata la regolarità inserendo a uno a uno i termini mancanti fino alla 30-esima riga. (questa procedura è ancora ripetitiva e soggetta a errori o disattenzioni.) *Regolarità aritmetiche, somme termine a termine*
- Oppure: calcolare somme di 30 termini in base alle regolarità osservate. Ad esempio, il 30-esimo numero della colonna centrale è: 1 + 4 + 6 + 8 + … + 60 = 929, quindi, poiché nella 30-esima riga ci sono 61 numeri, il numero centrale è seguito da 30 interi successivi. L'ultimo numero della 30-esima riga è dunque 929 + 30 = 959. *Regolarità aritmetiche, somme parziali*

[1] Il gruppo "Funzioni" che ha analizzato questo problema nell'ambito dei lavori del convegno del Lussemburgo nel 12013 era composto da Lucia Argilla, Maria Cristina Bonomi, Sandro Deplano, Valeria Ferrari, Mathias Front, Annie Henry, Michel Henry, Rosa Iaderosa, Ana Paola Jahn, Francesca Ricci, Angela Rizza.

- Oppure: trasformare in prodotti somme di 30 termini. Ad esempio, la successione dei termini del lato sinistro dà come ultimo termine: 2 + 5 + 7 + 9 + ... + 59 + 61 = 2 + (5 + 61) + (7 +59) + (9 + 57) + ... + (31 + 35) + 33 = 2 + 66 + 66 + ... 66 + 33 = 2 + 14 × 66 + 33 = 35 + 924 = 959. *Regolarità aritmetiche, somme e prodotti.*
  Ambito: funzioni (algebra)
- Oppure: generalizzare una delle regolarità osservate precedentemente, per mezzo di una procedura funzionale. Ad esempio, la più semplice è identificare il secondo termine della riga n con n^2; o osservare che la colonna del « 2 » contiene i numeri della forma $n(n + 1)$. Ad esempio, poiché il secondo termine della riga n è n^2 si può andare alla 31-esima riga, trovare $31^2 = 961$, poi retrocedere di 2 per ottenere 959. Per tutte queste procedure, si può fare ricorso a tabelle o liste organizzate. *Regolarità, generalizzazione.*
  Ambito: aritmetica (geometria)
- Oppure calcolare l'area del trapezio con base minore la prima riga costituita da 3 numeri, con base maggiore la trentesima riga costituita da 61 (= 2 x 30 + 1) numeri e altezza 30 righe. Per cui si ottiene (3+61)x30/2= 960 occorre infine togliere 1 in quanto la numerazione parte da 0. *Formula area trapezio*
- Oppure se si trasforma il trapezio in un triangolo aggiungendo un oggetto come prima riga, si ottiene la configurazione dei numeri figurati quadrati di n+1 righe, una in più rispetto al trapezio; per cui il numero degli oggetti sarà 31x31 = 961. Eliminando l'oggetto aggiunto e quello con lo zero si ottiene il valore 959. *Numeri figurati.*
  Ambito: funzioni
- Oppure sviluppare un algoritmo operando contemporaneamente sulla riga e sulla somma dei numeri. Si parte dalla descrizione dei numeri della riga dati da $R_n = R_{(n-1)}+2$. Questi vengono collegati al numero finale ottenuto come somma $S_n = S_{(n-1)} + R_n$ con $S_0 = -1$, $S_1= 2$: $S_1 = S_0 + R_1 = -1 +3 = 2$, $S_2=7$. *Successioni definite per ricorsività.*

Parole chiave

Numeri figurati, regolarità algebriche, successioni numeriche, funzioni

Punteggi attribuiti

Punti	0	1	2	3	4	N. di elaborati	m
Cat 6, in %	51	19	9	13	8	872	1.1
Cat 7, in %	30	17	13	20	20	709	1.8
Cat 8, in %	20	16	11	20	33	462	2.3
Cat 9, in %	19	14	6	23	38	144	2.5
Cat 10, in %	15	11	8	13	53	109	2.8
N.. totale di elaborati	784	396	236	400	480	2296	1.7

Secondo i criteri dell'analisi a priori:

4 La risposta 959 con spiegazione del procedimento seguito (passo a passo, con una successione, con una funzione,…)

3 La risposta 959 senza spiegazione o con un procedimento poco chiaro un procedimento corretto chiaramente espresso ma con un solo errore di calcolo (in una addizione o confusione tra riga precedente e seguente,…)

2 Scoperta esplicita di numeri dell'ultima riga ma successivo errore all'interno della riga.

1 Inizio di ragionamento corretto

0 Incomprensione del problema

La media sui 2296 elaborati aumenta sensibilmente dalla categoria 6 alla categoria 10 dove il successo è quasi totale.

Ostacoli ed errori rilevati

Per le quattro sezioni FC, SR, PR e CA di cui sono stati esaminati gli elaborati, si possono dare le seguenti informazioni sull'attribuzione dei punteggi:

Gli "0 punti" (34% del totale delle categorie, dal 51% al 15% dalla categoria 6 alla categoria 10)

Questa "incomprensione del problema" si manifesta attraverso alcuni fogli bianchi, dei trapezi parzialmente costruiti (da 10 a 15 righe complete) con molti errori (imprecisioni nell'allineamento delle colonne) e soprattutto attraverso **procedimenti che fanno appello alla linearità** del tipo: *abbiamo riempito il trapezio fino all'ultimo numero della decima linea poi si moltiplica per 3 per trovare l'ultimo numero della*

tredicesima linea (o fino alla quindicesima linea, seguito di una moltiplicazione per 2 ; o fino a 47, l'ultimo numero della sesta linea per trovare 235 = 47 x 5 come risposta).
Queste **procedure lineari** non si incontrano nella categoria 8, se ne contano il 10% nella categoria 7 e quasi il 20% nella categoria 6.
Altri sintomi di incomprensione incontrati in categoria 6: delle moltiplicazioni di cui uno dei fattori è il numero totale delle righe (30) o il numero delle righe ancora da completare (24) come 1128 = 47 x 24, 900 = 30 x 30….
Esempio PR 631
L'ultimo numero della trentesima riga è 1128. Prima, abbiamo trovato l'ultimo numero della sesta riga, cioè 47, poi l'abbiamo moltiplicato per 24 e è risultato questo numero

Gli "1 punto" (17% del totale dei compiti, stabile, dal 17% all'11% dalla categoria 6 alla categoria 10)
A Besançon abbiamo attribuito questo "1 punto" agli elaborati che presentano una successione regolare di numeri allineati nel trapezio (in generale sul bordo destro o, meno spesso, nella colonna che comincia per 0) e che hanno constatato e scritto esplicitamente la «*costanza (2) degli scarti*» successivi. Per esempio gli ultimi numeri delle righe sono 2, 7, 14, 23, 34, ... , gli scarti successivi sono 5, 7, 9, 11, e gli scarti di quest'ultima sequenza sono costanti:2 .
La costante 2 si ritrova anche come differenza tra i numeri di termini per riga: 3, 5, 7, 9 di cui si tratta di calcolare i totali parziali fino alla 30ma riga.
Malgrado le spiegazioni a volte chiare sulla procedura da seguire, attraverso la percezione della regolarità, i gruppi di allievi che hanno ricevuto "1 punto" non sono stati capaci di gestire sempre i calcoli, sanno quale addizione effettuare ma non sanno arrivare alla soluzione corretta a causa il numero elevato di termini, perché non sanno dove fermarsi.

I "2 punti" (10 % del totale dei compiti, stabile da una categoria all'altra)
Il criterio "scoperta esplicita dei numeri dell'ultima riga ma errori successivi all'interno della linea" non corrisponde a nessuno degli elaborati esaminati. A Besançon, poi, per la verifica degli elaborati di Parma, abbiamo adattato ed accordato i "2 punti" alle procedure ben esplicitate esplicite ed piuttosto complete ma comprendenti due o tre errori di calcolo o della determinazione dell'ultima riga o dell'ultimo numero della riga.
Bisogna qui mettere in evidenza la difficoltà del rilevamento degli errori per distinguere l'errore unico dagli errori diversi o ripetuti. Per esempio, nella costruzione del trapezio, oltre le prime 10 righe, un primo errore può apparire verificando se il secondo numero della riga è un quadrato. Nel caso in cui si scopre un primo errore, in generale di una unità, questo può ripresentarsi sulle righe seguenti ma anche essere "aggravato" con una seconda o una terza disattenzione.

I "3 punti" e "4 punti" (38 % del totale degli elaborati)
Nella nostra analisi raggruppiamo gli elaborati dei due gruppi "3 punti e 4 punti" perché non vi è molta differenza tra di loro dal punto di vista delle procedure adottate e corrispondono ai criteri: "la risposta 959 con spiegazione del procedimento" e "la risposta 959 senza spiegazione o con un procedimento poco chiaro un procedimento corretto chiaramente espresso ma con un solo errore di calcolo (addizione, confusione con la linea precedente o seguente….)".
La spiegazione figura d'altronde in tutti gli elaborati che hanno ricevuto da 1 a 4 punti ed è in effetti piuttosto "l'efficacia nei calcoli" che è stata misurata per questo problema *Il signor Trapezio.*
Tra i "3 punti" bisogna rilevare le procedure corrispondenti alla seconda alternativa del criterio: o un procedimento chiaramente espresso ma con un solo errore di calcolo (addizione, confusione con la linea precedente o seguente…).
Questo "solo errore" può essere costituito da una confusione tra "numero di numeri" del trapezio sulle 30 prime righe e "l'ultimo numero della 30ema riga" che differiscono di 1 perché la numerazione comincia da 0 e non da 1. In questo caso la risposta è 960.
La risposta può essere anche 1022 (31ema riga) o 898 (29ema riga) corrispondente ad un errore di conteggio delle righe.
Nel momento in cui tutti i calcoli sono presentati, può ancora trattarsi di un solo errore nelle addizioni successive.
L'ultimo caso concerne un'interpretazione erronea dell'enunciato consistente nel pensare che il Signor Trapezio scriverà ancora 30 righe dopo la sesta mentre si tratta di 30 righe in tutto (ivi compreso le prime 6 dopo le quali ha fatto una pausa). Non si può togliere più di un punto per questa interpretazione del testo che avrebbe potuto essere più chiaro. In questa seconda interpretazione la risposta sarebbe 1367.

Analisi delle procedure utilizzate

Sulla base della descrizione del compito gli algoritmi sono classificati (Tabella 2), al fine di individuare la loro frequenza per categoria ed esaminare l'incidenza dell'algoritmo a maggior frequenza sulle risposte corrette.

La Tabella 1, riporta i dati della sezione di Cagliari dove si individua l'algoritmo che ha avuto frequenza maggiore e che è A2.

	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Tot
Cat 6	3	2	3	0	0	0	0	0	0	8
Cat 7	2	2	2	0	0	0	0	0	0	6
Cat 8	1	3	1	0	0	0	1	0	0	6
Cat 9	3	2	6	0	0	0	2	1	1	15
Cat 10	0	1	5	2	0	1	0	5	0	14
	9	10	17	2	0	1	3	6	1	49

Tabella 1

Indicatore procedura	Nome Procedura	Comportamento Osservato dai correttori
A0	Inconcludente	Incomprensione del testo e delle regole
A1	Regola di costruzione	Comprendere la regola di costruzione ed eventualmente completare la sesta riga e vedere la settima. (Procedendo così di riga in riga e armandosi di pazienza si arriva all'ultimo numero della 30-esima riga (959), probabilmente con alcuni errori).
A2	Ricercare regolarità:	Oppure: ricercare delle regolarità tra i termini successivi di una successione che attraversa il trapezio dall'alto verso basso (in una colonna: + 4; + 6; + 8; + 10; + 12; ... ; parallelamente al lato destro del trapezio: + 5; + 7; + 9; + 11; ... ; parallelamente al lato sinistro del trapezio: + 3; + 5; + 7; + 9; + 11; ...) e completare l'allineamento dove è stata osservata la regolarità inserendo uno a uno i termini mancanti fino alla 30-esima riga. (questa procedura è ancora ripetitiva e soggetta a errori o disattenzioni.)
A3	Calcola somme 30 termini	Calcolare somme di 30 termini in base alle regolarità osservate. Ad esempio, il 30esimo numero della colonna centrale è: 1 + 4 + 6 + 8 + … + 60 = 929, quindi, poiché nella 30-esima riga ci sono 61 numeri, il numero centrale è seguito da 30 interi successivi. L'ultimo numero della 30-esima riga è dunque 929 + 30 = 959.
A4	Trasforma in prodotti	Oppure: trasformare in prodotti somme di 30 termini. Ad esempio, la successione dei termini del lato destro dà come ultimo termine: 2 + 5 + 7 + 9 + ... + 59 + 61 = 2 + (5 + 61) + (7 +59) + (9 + 57) + ... + (31 + 35) + 33 = 2 + 66 + 66 + ... 66 + 33 = 2 + 14 × 66 + 33 = 35 + 924 = 959.
A5	Funzioni - successioni	Oppure: generalizzare una delle regolarità osservate precedentemente, per mezzo di una procedura funzionale. Ad esempio, la più semplice è identificare il secondo termine della riga n con n^2; o osservare che la colonna del « 2 » contiene i numeri della forma $n(n + 1)$. Ad esempio, poiché il secondo termine della riga n è n^2 si può andare alla 31esima riga, trovare 31^2=961, poi retrocedere di 2 per ottenere-959.
A6	Figure	I numeri del trapezio vengono visti come oggetti. Si calcola l'area del trapezio; all'area va tolto solo un oggetto, quello numerato con 0. Questa procedura è legata all'uso dei numeri figurati.
A7	Ricorsione -	Per arrivare al risultato si sviluppa un algoritmo operando contemporaneamente

	successioni	sulla riga e sulla somma dei numeri. Si parte dalla descrizione dei numeri della riga dati da $R_n = R_{(n-1)}+2$. Questi vengono collegati al numero finale ottenuto come somma $S_n = S_{(n-1)} + R_n$ con $S_0 = -1$, $S_1 = 2$: $S_1 = S_0 + R_1 = -1 + 3 = 2$, $S_2=7$.
A8	senza evidente procedura	La risposta 959 senza spiegazione

Tabella 2

Incrociare gli algoritmi rispetto ai punteggi è significativo nel caso del punteggio 3 che ha avuto la frequenza maggiore soprattutto nelle categorie 6, 7, 8.

Poiché la descrizione del compito attribuiva il punteggio 3 in tre casi distinti

- Corretta senza spiegazione
- Corretta con un procedimento poco chiaro
- procedimento corretto chiaramente con un solo errore di calcolo
- Prevale l'errore di calcolo alle situazioni: corretta senza spiegazione e corretta con un procedimento poco chiaro

		Distribuzione del punteggio 3																										
		A1			A2			A3			A4			A5			A6			A7			A8			Totali		
Categoria	Numero Elaborati	Senza Spiegazioni	Poco Chiaro	Errore di Calcolo	Senza Spiegazioni	Poco Chiaro	Errore di Calcolo	Senza Spiegazioni	Poco Chiaro	Errore di Calcolo	Senza Spiegazioni	Poco Chiaro	Errore di Calcolo	Senza Spiegazioni	Poco Chiaro	Errore di Calcolo	Senza Spiegazioni	Poco Chiaro	Errore di Calcolo	Senza Spiegazioni	Poco Chiaro	Errore di Calcolo	Senza Spiegazioni	Poco Chiaro	Errore di Calcolo	Senza Spiegazioni	Poco Chiaro	Errore di Calcolo
6	3			1		1	1																			0	1	2
7	3			1			2																			0	0	3
8	3						2												1							0	0	3
9	6			1		1	2															1	1			1	2	3
10	3						1									1			1							0	0	3
Totali	18	0	0	5	0	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	1	1	0	0	1	3	14
		3			10			0			0			1			2			1			1			18		

Per andare più lontano

A. Metodo "passo dopo passo" *Regola di costruzione.*

Come prevedeva l'analisi a priori del problema, ci sono stati alcuni tentativi di completare il triangolo fino alla 30-ema riga, tentativi che sono tutti falliti a causa della dimensione della tabella. Due o tre gruppi hanno "allungato" i loro fogli incollandoli per arrivare a collocarvi le righe. In effetti le difficoltà del metodo "uno a uno" arrivano verso la decima riga, là dove i numeri hanno tre cifre, sono più di 20 e non si scrivono più direttamente "sotto" quelli della riga precedente; non si ha lo spazio sufficiente o bisogna scrivere i numeri troppo piccoli e, soprattutto si manca di riferimenti verticali perché, anche in un foglio quadrettato, si è obbligati ad uscire dai quadrati previsti all'inizio.

Per poter costruire un quadrato intero in un foglio quadrettato di 4mm x 4mm e formato A4, bisognerebbe, per prima cosa scegliere di scrivere le righe nel senso della lunghezza del foglio dopo essersi reso conto che la 30-ema riga avrà 61 termini, assicurarsi che vi saranno 30 quadrati nel senso della larghezza e 62 nel senso della lunghezza per determinare le "maglie" della tabella.

Questa procedura che, a prima vista, sembrerebbe "primitiva", esigerebbe, in realtà una padronanza preliminare delle dimensioni del trapezio completato e controlli regolari nel corso del riempimento perché scrivere i numeri da 0 a 959 senza dimenticarne uno è un compito che esige molta attenzione.

Negli elaborati degli allievi le procedure "passo dopo passo" vanno, in generale, solo fino alla sesta riga di cui è sufficiente completare gli ultimi tre termini, o è raramente al di là della decima riga.

In questi ultimi casi gli allievi devono: cambiare procedura, oppure sostituire i numeri con punti, o ancora trovare un metodo che sembrerebbe più breve ma che è erroneo dal momento che fa appello alle proprietà della linearità (già menzionate in occasione di “0 punti”).

B. Presa in considerazione delle regolarità della successione degli ultimi numeri delle righe (sul lato destro del trapezio) *Ricercare regolarità*

Questa procedura era menzionata nell'analisi a priori (§ 2) ma senza presagire che sarebbe stata maggioritaria. La sua frequenza è stimata al 60% dei casi dove è stata osservata una regolarità.

E' a posteriori che ci si rende conto della sua evidenza;

- Gli allievi sanno che il numero cercato sarà sulla trentesima riga del trapezio, a destra e che il “cammino” più naturale per andarvi è di seguire il lato destro, della zona conosciuta, in alto, verso il basso
- I primi cinque numeri del lato destro sono dati ed il sesto è facile da determinare

termini 2 7 14 23 34 47

Se si osservano gli scarti successivi tra questi numeri, si constata che si tratta della successione dei numeri dispari a partire da 5 la cui ragione (2) è evidente::

termini:	2	7	14	23	34	47	...
scarti:	5	7	9	11	13	15	....

-E' sufficiente allora immaginare che la regolarità prosegua e procedere mediante addizioni successive di numeri dispari:

47 + 15 = 62; 62 + 17 = 79; 79 + 19 = 98 ; ...

Una maggioranza di elaborati indica questa successione di addizioni o, senza i segni di operazione, le successioni corrispondenti di termini, in particolare, a partire da 47, la successione 62, 79, 98, 119, 142, 167, ..., che a volte si ferma a 898 o a 1022 invece che a 859.

Quest'ultimo tipo di errore rivela la principale difficoltà del procedimento: trovare il 30-emo numero della serie o, in termini di efficacia, sapere dove bisogna fermarsi.

Gli elaborati, in generale non sono espliciti a questo riguardo. Si immagina che, talvolta, le righe siano contate man mano che si scrivono i termini calcolati alla calcolatrice addizionando i successivi numeri dispari. In alcuni casi l'ultimo numero da addizionare, 61, sembra essere stato determinato in anticipo come 30-emo numero dispari a partire da 3. Un'altra difficoltà del procedimento, come tutte quelle che ricostituiscono una successione di numeri, è il controllo dei risultati che richiedono un'attenzione permanente. Non possiamo sapere attraverso gli elaborati, come questo controllo sia stato esercitato; sappiamo solamente che, globalmente, la risposta 959 è stata ottenuta dal 18% dei gruppi (“4 punti”), che il 12% ha commesso un solo errore (“3 punti”), ed il 10%ha commesso da due a tre errori (“2 punti”).

Questa importante proporzione di errori lascia supporre che vi sia stata una insufficiente cooperazione in seno ai gruppi: uno solo dei suoi membri si è incaricato dei calcoli e gli altri hanno accettato il risultato senza controllo né sguardo critico o ancora non sentendosi più coinvolto dall'avanzamento della successione.

C. Presa in considerazione della regolarità nella successione dei numeri della colonna 0, 4, 10, 18, …

La procedura è la stessa di prima, con una difficoltà supplementare: arrivati alla riga 30 bisogna ancora seguirla fino alla sua estremità a destra.

Questa procedura figura anche nell'analisi a priori (§ 2). Noi l'abbiamo osservata solo in tre elaborati di cui uno solo è arrivato alla risposta 959.

D. Altre procedure per successioni di numeri

Ci si aspettava che gli allievi notassero la successione dei quadrati 1; 4; 9; 16; ... della seconda riga in obliquo dopo la sinistra. Essa è stata notata una sola volta ed ha condotto ad un procedimento funzionale.

E' manifestamente la più semplice delle procedure che, in forma retorica, si esprime come “calcolare il quadrato del numero che indica la riga seguente e sottrarre 2” e sotto forma algebrica con f : $n \longrightarrow f(n) = (n + 1)^2 - 2$ dove n è il rango della riga, $n \in \mathbb{N}$.

E. Calcolo dei numeri di termini per riga

Questa procedura non è stata considerata dall'analisi a priori, essa è comunque molto frequente. Si stima che sia stata scelta nel 30% dei casi dove gli allievi hanno cercato di perseguire delle regolarità.

Essa si basa su una constatazione assai evidente a posteriori: l'ultimo numero della 30-ema riga è in relazione stretta con il numero totale di termini perché si tratta della lista dei numeri naturali! Che essi siano disposti “in trapezio” o in riga non ha alcuna importanza. Questa “relazione stretta” è semplice : l'ultimo numero vale uno in meno rispetto al numero dei termini perché la successione dei numeri naturali inizia con 0.

In questa concezione dell'«ultimo numero di una riga» non c'è bisogno di considerare gli scarti della successione sul lato destro (2; 7; 14; 23; ...); è sufficiente contare i numeri di ogni riga: 3; 5; 7; 9; ... e /o constatare che in ogni riga vi sono due termini in più della riga precedente per convincersi che il numero totale dei termini sarà la somma dei 30 numeri dispari a partire da 3.

Si ritrova la successione della procedura B dove si sostituisce “termine” con “numero totale di termini” partendo da 3 (invece che da 2) e “scarti” con “numero di termini di una riga” e dove si scambiano le due righe:

n. termini /riga:	3	5	7	9	11	13	15	....
n tot. termini:	3	8	15	24	35	48	...	

Le somme successive conducono qui a 960, termini nella tabella di 30 righe, a cui bisogna sottrarre 1 per arrivare all’ultimo termine della 30-esima riga: 959.

F. Procedure per trasformazioni di somme in prodotti

L’analisi a priori (§ 4) proponeva: “trasformare somme di 30 termini in prodotti. Per esempio la somma dei termini del lato sinistro dà come ultimo termine: *2 + 5 + 7 + 9 + ... + 59 + 61 = 2 + (5 + 61) + (7 +59) + (9 + 57) + ... + (31 + 35) + 33 = 2 + 66 + 66 + ... 66 + 33 = 2 + 14 × 66 + 33 = 35 + 924 = 959.”*

Nessuna traccia di questa trasformazione è stata trovata nei 271 elaborati esaminati!

Ci si può chiedere allora perché gli allievi non vedano la semplificazione di una tale trasformazione di somma in prodotto e perché si lancino in una trentina di addizioni successive con un rischio molto elevato di errore?

Noi non possiamo che abbozzare qualche ipotesi :

- ostacolo didattico della misconoscenza o dell’ignoranza della commutatività e associatività dell’addizione, così come della distributività (fattorizzazione) della moltiplicazione rispetto all’addizione: la tradizione scolastica vuole che si operi sempre da sinistra a destra, il segno (« = ») significa (« fa »),
- ostacolo dell’ultimo termine dell’addizione che deve essere determinato innanzitutto per essere in grado di immaginare una procedura più semplice.
- ostacolo epistemologico della distributività e più generalmente delle relazioni tra addizione e moltiplicazione.

G. Procedure funzionali

Si arriva qui alla problematica della costruzione del concetto di funzione. *Il Signor Trapezio* è uno dei numerosi problemi di RMT il cui scopo è di determinare (per parodiare M de la Fontaine) “come la mente viene alle fanciulle … ed evidentemente ai fanciulli” o “come si installa il concetto di funzione”.

Nel caso del problema in oggetto, la “raccolta” è molto modesta: quattro elaborati (su 400 esaminati) considerano il legame diretto tra il numero della riga ed il suo ultimo numero.

La carenza di procedure funzionali è assai sorprendente. Ci si può domandare perché un solo gruppo abbia notato la successione dei quadrati e ne ha dedotto immediatamente che il numero cercato vale 2 di meno di 961 = 31^2 ? che si trova in seconda posizione della riga 31.

Ci si può domandare anche perché gli allievi non cerchino la maniera per passare dal numero della riga ad uno dei suoi numeri. Gli allievi i quali hanno molta ingegnosità nei problemi del genere *“Strana calcolatrice”*, nl caso di questo problema non ne fanno mostra.

E’ dovuto forse al fatto che la variabile non appaia chiaramente nella situazione?

Se si presentasse esplicitamente la ricerca sotto forma di una “macchina”:

numeri (valori) in ingresso:	1	2	3	4	...	6	7	...	9	...	30
numeri (valori) in uscita		2	7	14	23	...	47	62	....	98	?

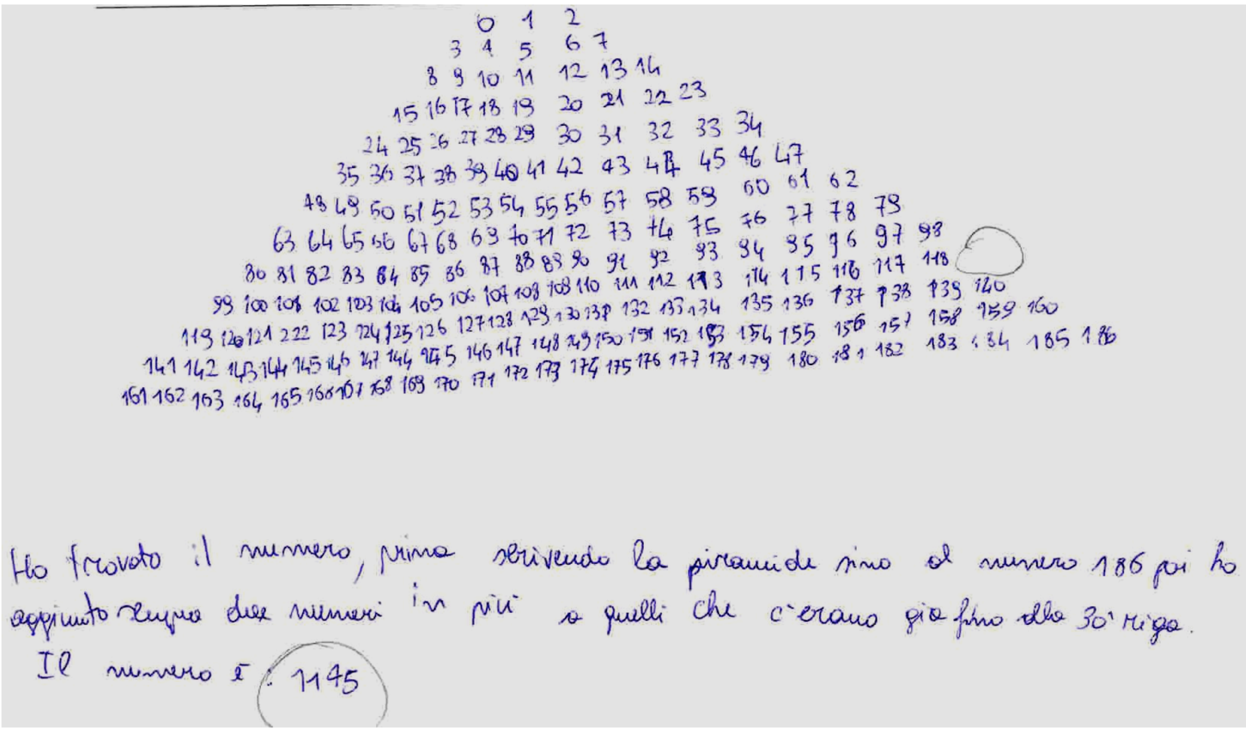
La ricerca della funzione non si organizzerebbe più facilmente laddove l’allievo sapesse che deve trovare “l’immagine di 30”? All’atto dell’analisi degli elaborati ci siamo posti altre domande sullo statuto delle scoperete di regolarità nelle successioni. Alcuni gruppi propongono talvolta regole della progressione a partire da una sola coppia di numeri successivi. Ad esempio, *“Abbiamo visto che nella successione 5. 7; ... cioé 2 come differenza, allora ci sarà sempre 2 da un numero all’altro.”* Negli elaborati della sezione di Parma abbiamo trovato per quattro volte una procedura che potrebbe essere descritta come "funzionale", però con qualche riserva: gli allievi considerano il trapezio nel senso di figura geometrica e non in senso figurato come disposizione di numeri e calcolano la sua area utilizzando la formula: (B + b) h / 2. Questa procedura funziona nel caso particolare della disposizione del Signor Trapezio (in effetti si tratta della meddesima formula della somma di numeri di una progressione aritmetica di 30 termini, di ragione 2 il cui primo termine è 3 e l’ultimo è 61).

“*Abbiamo notato che, applicando la formula per l'area del trapezio (b + B) × h / 2, otteniamo sempre il numero che segue l'ultimo numero della grande base del trapezio. Così abbiamo trovato il trentunesimo numero dispari (infatti abbiamo notato che il numero dei numeri in ogni riga è uguale al numero che, tra i numeri dispari, è il numero dopo il numero di riga, ad esempio per il primo numero di riga il secondo numero dispari...) è 61 e quindi abbiamo fatto la seguente operazione: (61 + 3) × 30/2 = 960 e 960-1 = 959.*”

Allegati

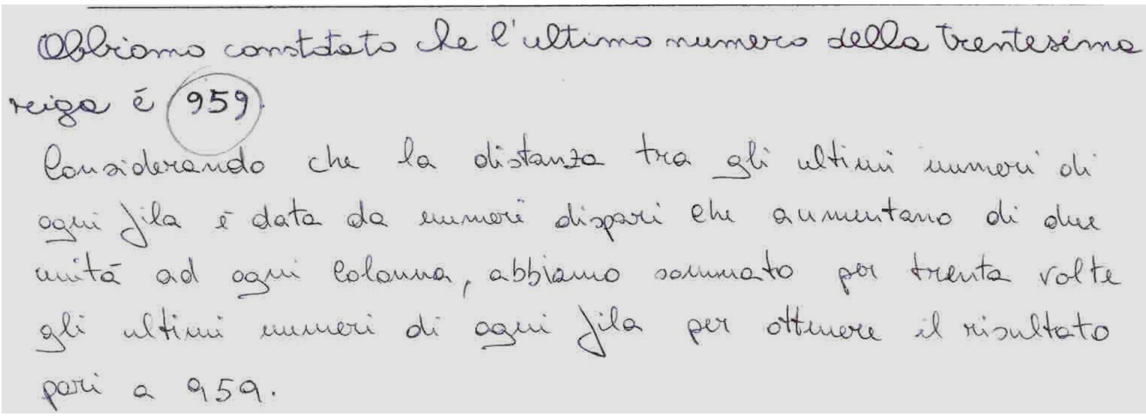
Qualche esempio di elaborati

4. Procedura: regola di costruzione con errore di riporto.



Ho trovato il numero, prima scrivendo la piramide fino al numero 186 poi ho aggiunto sempre due numeri in più a quelli che c'erano già fino alla 30ª riga.
Il numero è: 1145

5. Procedura: calcolo dello scarto (distanza tra gli ultimi numeri = numero dispari + 2)



Abbiamo constatato che l'ultimo numero della trentesima riga è 959.
Considerando che la distanza tra gli ultimi numeri di ogni fila è data da numeri dispari che aumentano di due unità ad ogni colonna, abbiamo sommato per trenta volte gli ultimi numeri di ogni fila per ottenere il risultato pari a 959.

6. Procedura geometrica relativa ai numeri figurati

IL NUMERO DELLA TRENTESIMA RIGA E' 1077.
CI SIAMO ARRIVATI PARTENDO DAL PRESUPPOSTO CHE I NUMERI DELL'ULTIMA RIGA HANNO UNA CERTA SUCESSIONE NELLA LORO DIFFERENZA. INFATTI TRA 2 E 7 C'E' 5 DI DIFFERENZA, FRA 7 E 14 C'E' UN 5 E UN 2 DI DIFFERENZA, FRA 14 E 23 C'E' UN 5 E DUE 2... A TAL PROPOSITO SIAMO ARRIVATI ALLA FORMULA $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ PER RICAVARE QUANTI DUE CI SONO FINO ALLA TRENTESIMA RIGA. OVVIAMENTE DOPO L'ABBIAMO MOLTIPLICATO PER DUE DATO CHE SI TRATTAVA APPUNTO DI 2. DOPODICHE' A QUESTO NUMERO ABBIAMO SOMMATO I CINQUE CHE SONO IN TUTTO 29.
QUINDI $\frac{29\cdot\cancel{30}^{15}}{\cancel{2}_{1}} = 465\cdot 2 = 930 + (5\cdot 29) = 1075 + 2 = 1077$

QUESTO DUE E' QUELLO CORRISPONDENTE ALLA PRIMA RIGA CHE NON AVEVAMO ANCORA TENUTO NEL CONTO

La scoperta della formula relativa al doppio della somma dei numeri da 1 ad n è già una scoperta di funzione. L'applicazione è disastrosa a causa di diversi errori sia di calcolo che di interpretazione della formula trovata. Secondo il calcolo degli allievi, si dovrebbe avere: (28 × 29)/2 = 406 × 2 = 812 + (5 × 29) = 812 + 145 = 957 + 2 = 959

(Questa procedura che possiamo considerare di tipo funzionale - ma difficile da validare - utilizza una formula letterale per il calcolo degli scarti successivi dei termini della forma "5 + n·2".

Un primo errore si riferisce al valore di "n" che doveva essere 28 e non 29, un secondo errore è il prodotto di 29 per 15 che è 435, non 465. infatti: (28 × 29) × 29 + 5 + 2 = 959.

Tuttavia non si ritrovano procedure funzionali nelle classi osservate, che per la maggior parte hanno optato per procedure B (regolarità della successione che forma il lato destro del trapezio) ed E (calcolo della somma dei numeri per riga). Un solo elaborato utilizza la formula n (n + 1) / 2.

7. Procedura di tipo ricorsivo basata sul calcolo del numero di numeri di ogni riga.

Prima scoperta: il numero di numeri aumenta (ogni volta) di due rispetto alla riga precedente.

Seconda scoperta: il numero finale di ciascuna riga è dato dalla somma del numero di numeri della riga con il numero finale della riga precedente .

1ª riga	3
2	5 + 2 = 7
3	7 + 7 = 14
4	9 + 14 = 23
5	11 + 23 = 34
6	13 + 34 = 47
7	15 + 47 = 62
8	17 + 62 = 79
9	19 + 79 = 98
10	21 + 98 = 119
11	23 + 119 = 142
12	25 + 142 = 167
13	27 + 167 = 194
14	29 + 194 = 233
15	31 + 233 = 264
16	33 + 264 = 297
17	35 + 297 = 332
18	37 + 332 = 369
19	39 + 369 = 408
20	41 + 408 = 449
21	43 + 449 = 492
22	45 + 492 = 537
23	47 + 537 = 574
24	49 + 574 = 623
25	51 + 623 = 674
26	53 + 674 = 727
27	55 + 727 = 782
28	57 + 782 = 839
29	59 + 839 = 898
30	61 + 898 = 959

ultimo numero della 30ª riga.

RAGIONAMENTO:

Capendo che il numero delle cifre di ogni riga aumenta di due rispetto alla riga precedente e capendo che la somma del numero delle cifre di ciascuna riga con il numero finale della riga precedente abbiamo ottenuto il numero finale di ogni riga fino ad arrivare al numero finale della trentesima ed ultima riga, ossia 959.

POSTER INCONTRO ARMT DI SEDILO /POSTERS RENCONRE ARMT DE SEDILO
(alcuni poster sono presentati qui in forma di articolo/certains posters sont présentés ici en forme d'article)

Sezione Aosta

Problemi come risorse
in situazioni di apprendimento cooperativo e collaborativo

Perchè un problema del Rallye? Per la varietà dei compiti matematici che rendono i problemi utili all' introduzione o allo sviluppo di concetti matematici previsti nel curricolo.

Si comincia dalla riflessione individuale

Poi ci si confronta con un compagno

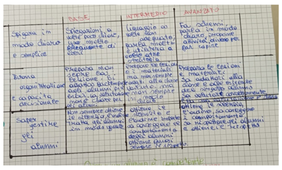
Quindi si condivide in gruppo

Perchè un problema del Rallye? Perchè se molte teste lavorano su di un compito ci vuole un compito per molte teste

Infine uno per gruppo illustra la soluzione trovata, si confrontano le strade percorse, si correggono quelle errate, si discute di quelle più economiche; ogni gruppo rivede e riporta sul proprio quaderno le strategie corrette diverse dalla propria.

Perchè un problema del Rallye come compito di un gruppo cooperativo? Per la possibilità di argomentare, giustificare le diverse scelte, i diversi percorsi che il problema prevede.

Quindi ci si autovaluta mediante una rubrica valutativa costruita tutti insieme.Si valutano la relazione ed il compito. Anche la preparazione del lavoro operata dall'insegnante è oggetto di valutazione.



Perchè l'apprendimento cooperativo e collaborativo? Perchè permette il controllo e lo sviluppo attraverso la propria disciplina delle competenze sociali, perchè rende più equo e attivo l'apprendimento.

Non c'è nulla che sia ingiusto quanto far parti uguali fra disuguali.
Da "Lettere ad una professoressa"
Lorenzo Milani

Section Franche-Comté

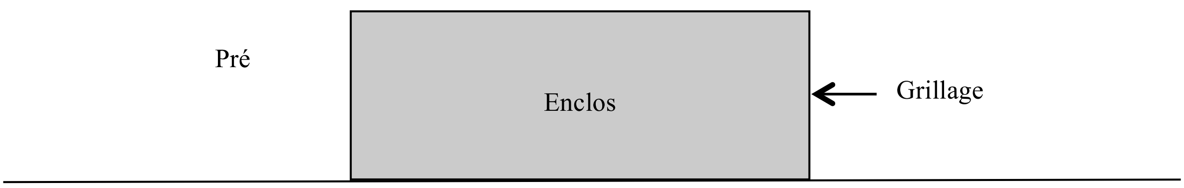
Apprendre ensemble en résolution de problèmes

Ce poster présentait une problématique pour l'étude de la transition entre arithmétique et algèbre aux niveaux 6 à 10, en vue de contribuer à la formation des enseignants et pour montrer comment ce saut épistémologique est pris en charge par les élèves lorsqu'ils sont en groupes en situation de résolution de problème.
Le problème que nous avons choisi est *Le pré du père François*, (I) et (II)

Quelques éléments de problématique du point de vue didactique :

- Quelle exploitation d'un problème du RMT en classe ?
- Quelles mises en commun, quels apprentissages ?
- Quels outils mathématiques en jeu ?
- Quels outils techniques : calculettes et tableurs ?
- Quelles variables didactiques ?
- Une équation du second degré à solutions non entières : limites de la méthode des tentatives par essais numériques.
- Représentation graphique, une ressource pour la résolution ?

Problème : Le pré du père François, RMT 18.II (I), pb 14, cat 7, 8 et (II), pb 19, cat 9, 10
Le père François possède un pré en bordure du champ d'un voisin, une ancienne clôture rectiligne séparant les deux propriétés. Pour faire l'essai d'une nouvelle semence, le père François veut réserver dans son pré, le long du champ voisin, un enclos rectangulaire de
42 m^2 (cat 7, 8) ou 40 m^2 (cat 9, 10) (voir la figure).
Pour éviter que ses bêtes, qui paissent dans son pré, aillent piétiner sa nouvelle plantation, il veut installer un grillage formant les trois autres côtés de la zone rectangulaire à réserver. Il dispose d'un grillage d'une longueur de 20 m qu'il veut utiliser entièrement (voir la figure).

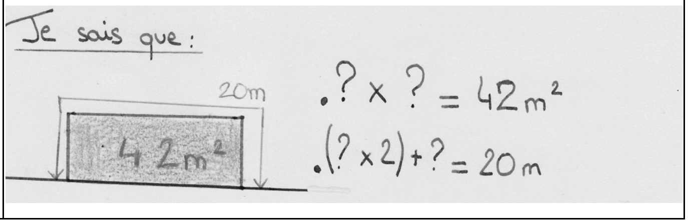


Quelles seront les mesures des côtés de l'enclos **Franç**
Expliquez comment vous avez trouvé votre rép
Cat 7, 8 : Pour ne pas compliquer ses mesures de longueurs, il souhaite les effectuer en nombres entiers de mètres.

De la compréhension du problème aux essais organisés, un prélude à la notion de fonction.
Formulation (I, cat 7, 8) : dans un contexte géométrique, des données numériques permettant une résolution arithmétique.
Interprétation des données par les élèves :

? × ? = 42
? + ? = 20

42 ÷ ? = ? = ? × 2 + ?
42 ÷ 6 = 7 = 7 × 2 + 6

<table>
<tr>
<td>- enclos rectangulaire de côtés L et l ;
- aire de l'enclos : $L \times l = 42$ m^2 ;
- longueur du grillage : $L + 2l = 20$ m.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Recherche de solutions en nombres entiers (niveaux 7 et 8) :

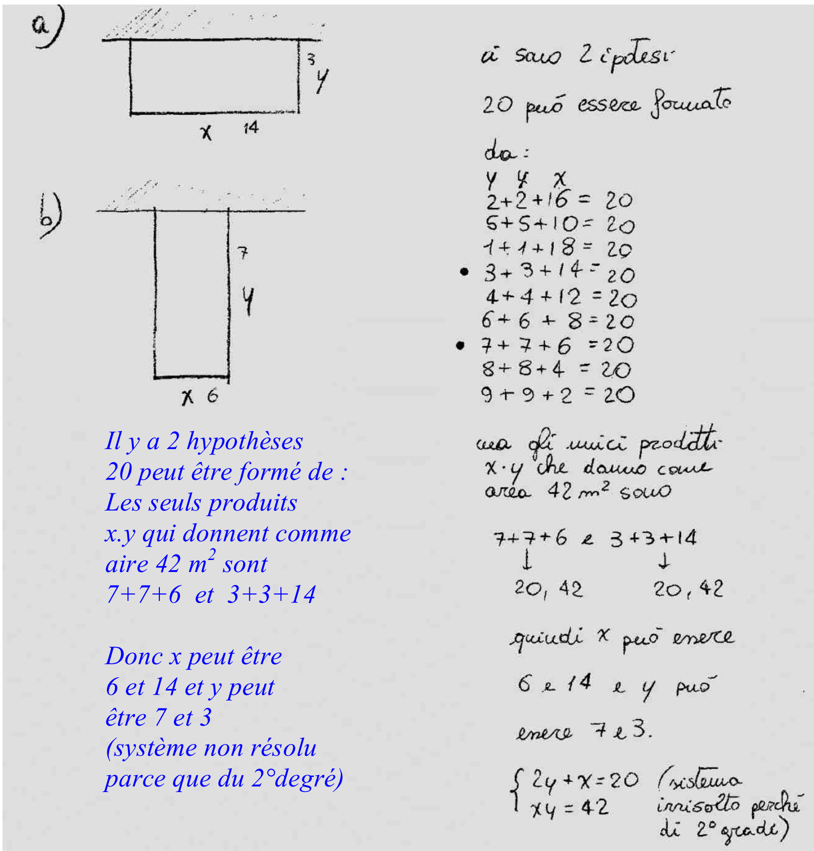
En grande majorité, les élèves ont commencé par chercher les diviseurs de 42 :
couples possibles pour une aire de 42 m^2 et calcul des longueurs de grillages

L	1	2	3	6	7	14	21	42
l	42	21	14	7	6	3	2	1
$L + 2l$	85	44	31	20	19	20	25	44

Deux solutions pour 20 m de grillage : (L = 6, l = 7) ou (L = 14, l = 3).

Essais numériques organisés portant sur la décomposition de la longueur fixée du grillage à 20 m, avec les deux réponses clairement exposées.

Cette copie montre aussi une tentative algébrique infructueuse au niveau 8



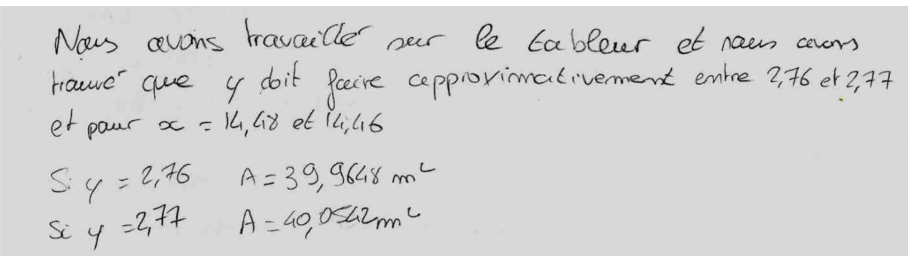
Il y a 2 hypothèses
20 peut être formé de :
Les seuls produits
x.y qui donnent comme aire 42 m^2 sont
7+7+6 et 3+3+14

Donc x peut être
6 et 14 et y peut
être 7 et 3
(système non résolu
parce que du 2°degré)

Formulation (II, cat 9, 10) : dans ce contexte géométrique, les données numériques (aire de l'enclos 40 m^2 au lieu de 42 m^2), ne permettent pas une résolution arithmétique.

Les élèves écrivent le système : $x.y = 40$; $x + 2y = 20$;
ou l'équation du second degré à solutions non entières : $x^2 - 20x + 80 = 0$.

Les procédures les plus utilisées sont la recherche par essais numériques (cat. 9) et la résolution de l'équation du second degré (cat.10) en utilisant la formule donnant les racines d'un trinôme.

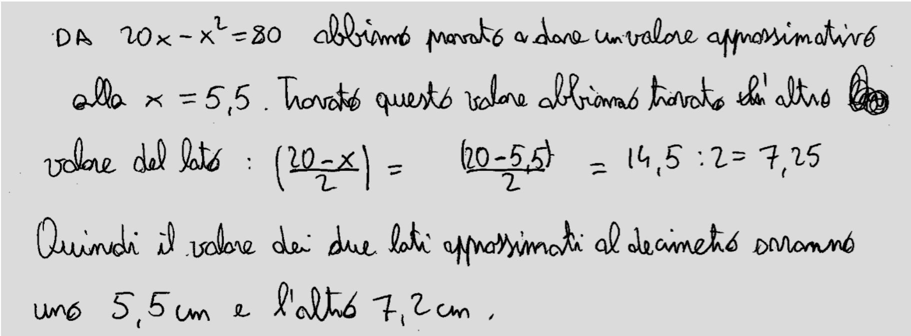


Nous avons travaillé sur le tableur et nous avons trouvé que y doit faire approximativement entre 2,76 et 2,77 et pour x = 14,48 et 14,46

Si y = 2,76 A = 39,9648 m²
Si y = 2,77 A = 40,0542 m²

Utilisation d'un tableur ou d'une calculette :

une seule solution donnée en valeurs approchées

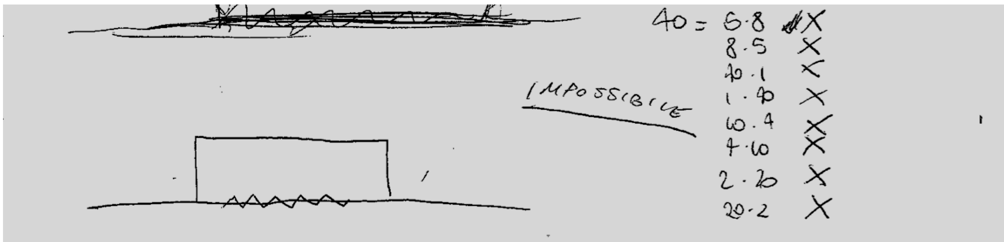

DA $20x - x^2 = 80$ abbiamo provato a dare un valore approssimativo alla $x = 5,5$. Trovato questo valore abbiamo trovato l'altro valore del lato : $\left(\frac{20-x}{2}\right) = \frac{(20-5,5)}{2} = 14,5 : 2 = 7,25$

Quindi il valore dei due lati approssimati al decimetro saranno uno 5,5 cm e l'altro 7,2 cm.

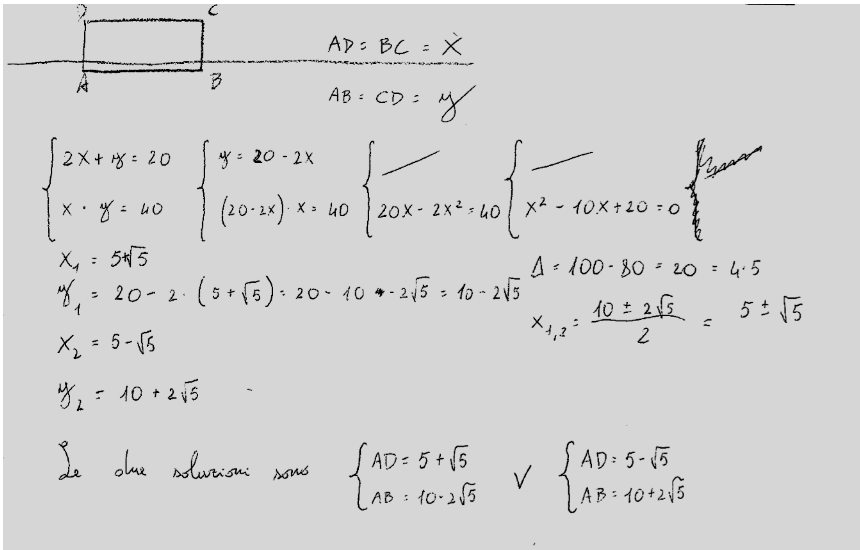
Nous avons essayé et donné une valeur approximative à x = 5,5. Trouvé cette valeur nous avons trouvé l'autre valeur du côté :

$$\left(\frac{20-x}{2}\right) = \frac{(20-5,5)}{2} = 7,25$$

Donc, les valeurs des deux côtés approximées au décimètre sont l'une 5,5 m et l'autre 7,2 m.



Résolution algébrique (niveau 10) :



Cette procédure de résolution algébrique conduit aux deux solutions mais fait perdre le sens de l'approximation

Utilisation de la formule générale donnant les racines d'une équation du second degré, seulement au niveau 10

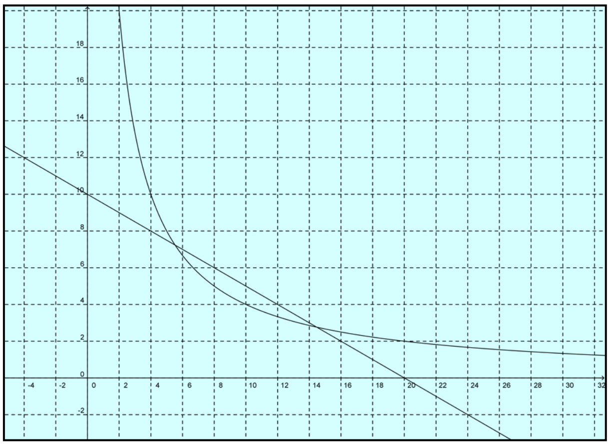
Réinvestissement en classe : une représentation graphique comme outil ?

Ce problème peut être utilisé en classe pour faire naître l'exigence d'une méthode rapide et efficace pour la résolution de telles équations, plutôt qu'une procédure de recherche par essais, longue et pas toujours fiable, notamment pour l'exhaustivité des solutions.

Il peut être aussi utilisé pour une réflexion sur la nature des nombres solutions. Il s'agit en effet de nombres irrationnels, qui peuvent être écrits en utilisant le symbole de la racine carrée, mais dont il est nécessaire de donner une valeur approchée dans une situation concrète.

Ce problème peut être utilisé pour donner des exemples de fonctions nées d'une situation géométrique et pour souligner le rapport de dépendance entre les variables. Dans ce but on pourrait ajouter la demande explicite d'une représentation sous forme de graphique de la fonction. En l'absence de cette demande, on observe, que le recours à l'outil fonction (en particulier dans son registre graphique) n'est pas spontané.

Le graphique de la figure 1 fournit deux valeurs approchées pour les inconnues x et y, alors que celui de la figure 2 fournit seulement les deux valeurs possibles pour x, et y doit être calculé à partir de l'équation.



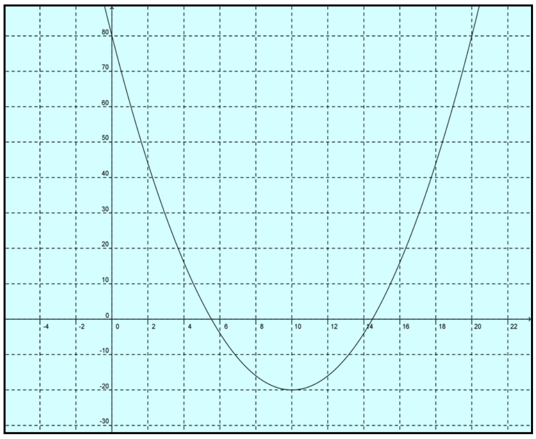


Figure 1: Hyperbole:

$x\,y = 40$ Figure 2 :Parabole: $Y = x^2 - 20x + 80$

Droite: $x + 2y = 20$

Questions didactiques :

- Dans quelles conditions la résolution d'un problème du RMT peut être le prélude à l'acquisition de nouvelles connaissances ?
- La résolution d'un problème peut-elle faire appel à un nouvel outil, implicite ou explicite : organisation de calculs selon une formule, théorème en acte, cadre fonctionnel… ?
- La présence d'une nouvelle connaissance dans un problème conduit-elle à son acquisition ? Économies de temps et d'énergie cognitive, charge conceptuelle, performances, nécessité, généralité, réinvestissements…
- Quels choix de variables didactiques : données numériques, figures géométriques, cadres et registres induits par le contexte, méthode de résolution attendue ou suggérée, dévolution de la tâche,…
- Quelle gestion de la mise en commun par les élèves de propositions de résolution et des débats et controverses induites ?
- Quelle formulation de la tâche ? *Expliquez comment vous avez trouvé*. Réponse fréquente : « *on a cherché* ».

Bibliographie

- Henry, M. & Rizza, A. *Six questions sur la notion de fonction dans les problèmes du RMT*. *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 8, Brigue 2008. Eds. Lucia Grugnetti & François Jaquet, ARMT, 2009, p. 143-166.
- Rizza, A. & Henry, M. *Idea di funzione*. *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 7, Bard (Valle d'Aosta) 2007. Eds. Lucia Grugnetti, François Jaquet, Gianna Bello, Rosanna Fassy, Graziella Telatin, ARMT, 2008, p. 181-198.
- Henry, A., Henry M. & Rizza, *A. Des fonctions pour résoudre des problèmes*. *La Gazette de Transalpie*, n.1, 2011. http://www.armtint.org/fr/le-gazzette-di-transalpino/numero-1/viewcategory/12-gazzetta-n-1-articoli-gazette-n-1-articles
- Krysinska, M. & Schneider, M., *Émergence de modèles fonctionnels*, col. Si les mathématiques m'étaient contées, ed. Université de Liège, 2010.

Sezione Puglia

RMT: Punto di forza, il lavoro di gruppo

Annalisa Alicino, Maria Felicia Andriani, Concetta Caggiano, Gabriella Colaprice,
Luana De Nicolo, Rosanna Di Liddo, Antonella Pierno Apollonia Santoniccolo

Il filo conduttore che ha animato il Poster della Sezione Puglia al convegno di Sedilo è il LAVORO DI GRUPPO.
In tutte le fasi del Rally Matematico Transalpino sia per gli insegnanti, sia per gli allievi la carta vincente è sapere lavorare in gruppo, nella condivisione dei compiti: comitato di gestione della sezione, insegnanti dei vari istituti scolastici che partecipano con le loro classi al Rally, allievi che risolvono i problemi, insegnanti che partecipano ai corsi di formazione.

1. Il Comitato di Gestione

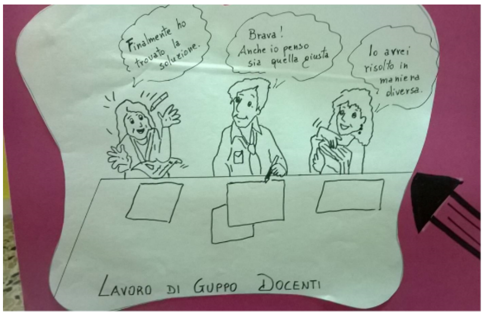
Il comitato di gestione, per quanto riguarda la sezione Puglia, a differenza del comitato internazionale i cui membri sono eletti tra i rappresenti delle diverse sezioni, è costituito da un gruppo ristretto di insegnanti, che credono nella forza del Rally Matematico Transalpino e che si rendono disponibili, per gestire ogni attività della sezione stessa.
Il lavoro è svolto tramite una continua collaborazione tra i membri del comitato stesso e i compiti da assolvere non sono pochi. Essi potrebbero essere divisi in due categorie: *'organizzazione'* e *'didattica'*.
Per categoria *'organizzazione'* si intende tutto ciò che fa riferimento all'organizzazione pratica della gara del RMT:

- raccolta delle iscrizioni delle classi e suddivisione delle stesse in categorie;
- illustrazione del regolamento e dell'organizzazione;
- organizzazione delle diverse fasi della gara con la preparazione, la distribuzione e successiva raccolta dei plichi nei vari istituti anche di città diverse;
- suddivisione degli attestati e dei regalini…
- gestione del fondo dell'Associazione locale.

Alla categoria *'didattica'* appartengono tutte le attività legate alla grande risorsa dell'ARMT: i problemi non standard tipici del RMT.
Si passa dall'invenzione dei problemi alla consultazione delle prove, dalla correzione degli elaborati insieme ai vari insegnanti delle scuole che partecipano alla gara, all'analisi a posteriori per l'attività con i gruppi di lavoro per le riflessioni sui concetti, ostacoli ed errori, dalla consapevolezza di una crescita individuale all'organizzazione di corsi di formazione per altri insegnanti.

Questo è l'esempio di gruppo che fa capo all'organizzazione della sezione e che funziona bene se i diversi componenti lavorano in sinergia mettendo a disposizione, ciascuno, le proprie competenze, i propri saperi, nel rispetto dei contributi di tutti.

2. Lavoro di gruppo: insegnanti



2.1 Ideazione problemi

Con il passare degli anni, siamo giunti alla stesura di una griglia per la costruzione dei problemi del RMT. L'idea di un nuovo problema, che spesso nasce da una sola persona, per giungere alla stesura finale ha bisogno del contributo di altre persone. Chi propone, è in generale convinto che il suo testo sia chiaro e leggibile sia da un collega, sia dagli allievi. Egli scrive, avendo dentro di sé un'idea chiara di ciò che vuole e riguarda e rilegge sempre con la certezza che l'altro non debba trovare alcuna difficoltà ad interpretare il testo offerto. E' solo quando lo stesso testo è sottoposto all'attenzione di altri, che possono essere colte delle incongruenze, dei termini distanti dal vocabolario degli allievi, l'inadeguatezza del compito matematico dell'attribuzione ad una certa categoria.

E ancora… l'analisi a priori, inizialmente, è frutto del pensiero di chi ha ideato il problema che il più delle volte utilizza strategie proprie dell'adulto che ha raggiunto il proprio grado di conoscenze e fa fede alla sua esperienza di insegnante in classe o di ricercatore lontano da ciò che accade nel gruppo classe. In ogni caso, questi è distante dal pensiero dell'allievo che, spesso, segue una strada completamente diversa da quella pensata a priori, che fa i suoi primi passi andando per tentativi, che giustamente non utilizza la strategia prevista dall'adulto. E' indispensabile quindi, uno scambio di opinioni che renda l'analisi non una presentazione delle abilità del singolo ma il calarsi in quella che sarà l'attività degli allievi.

2.2 Correzione collettiva degli elaborati

Ogni prova del RMT è seguita dalla correzione collettiva degli elaborati. Gli attori di questa attività sono: i membri del comitato di gestione della sezione, i referenti e una parte degli insegnanti delle scuole iscritte al RMT.

Ci si divide in piccoli gruppi di due persone, di diverse scuole e possibilmente di ordini diversi. Ogni gruppo, così costituito, ha il compito di valutare, in verticale, gli elaborati di uno stesso problema che è stato pensato per diverse categorie. Lo stesso problema è poi riesaminato da altri due insegnanti al fine di convalidare o no il lavoro prodotto dai primi due.

In questo modo è possibile che si riescano a cogliere nella maniera migliore possibile, le strategie, gli ostacoli e gli errori presenti in ciascun elaborato.

Questa è una delle fasi dove, mentre si corregge e si discute, gli insegnanti colgono l'importanza della condivisione del lavoro di gruppo e dove ciascuno rivede le proprie convinzioni stupendosi spesso della creatività, soprattutto dei bambini.

2.3 Momenti di formazione per insegnanti "esperti del RMT" e no

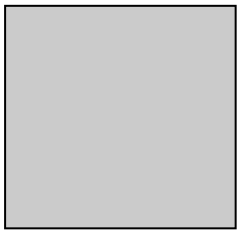
Molti problemi del RMT sono motivo di crescita personale sia per insegnanti sia per allievi.
La referente di una scuola primaria che partecipa da diversi anni al RMT, ha proposto alle colleghe del suo istituto un laboratorio in didattica della matematica tenuto dalla coordinatrice della sezione Puglia, sull'uso dei problemi del RMT in classe.
Il tempo concesso dal Dirigente scolastico è stato complessivamente di sei ore, divise in due pomeriggi.
Cosa fare per rendere l'incontro per insegnanti di scuola primaria interessante ed efficace? Si pensa ai momenti che caratterizzano maggiormente l'attività del Rally Matematico Transalpino: analisi a priori, lavoro in classe, analisi a posteriori e… ritorno

- Prima fase: scegliere un buon problema, ricco di contenuti, che possa far discutere, manipolare e che induca ad approfondimenti, sempre convinti che l'insegnante in genere pensa di non avere incertezze e non incontrare difficoltà quando gli si presenta un problema pensato per i bambini e di non aver nulla da imparare.
- Scelta: "Triangoli volati via" (II prova del 22° RMT cat. 3, 4, 5, 6)[1]. Parole chiave: triangolo, triangolo rettangolo isoscele, equivalenza, scomposizione, similitudine, rapporto. Il problema risulta interessante per diversi aspetti: coinvolge il confronto tra le figure di una pavimentazione di 9 triangoli e di 8 triangoli; obbliga ad orientare i triangoli in posizioni differenti; fa intervenire l'importanza sulla precisione della misura e il confronto tra lunghezze di segmenti; richiama il concetto di similitudine e di rapporto; permette un approfondimento sul concetto di area. In ogni caso sia per piccoli sia per grandi è senz'altro un'occasione di dibattito indispensabile per confermare e rinforzare conoscenze precedenti, nel caso in cui le informazioni ricevute si rivelino conformi a ciò che si sa già, oppure quando risultano insufficienti e creano un disequilibrio che scaturisce da un conflitto cognitivo, è necessario trovare strategie atte a superare tale ostacolo.

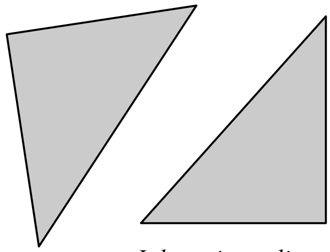
[1] http://www.projet-ermitage.rg/ARMT/navi_fic2.php?code=gp93-it&flag=1&langue=it&w=0

Triangoli volati via (Cat. 3, 4, 5, 6)

Alberto av[2]eva un quadrato di cartone grigio: lo ha tagliato in due triangoli uguali:

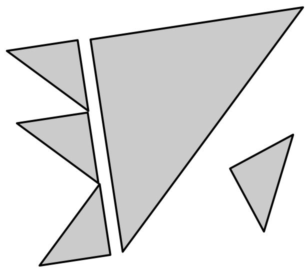


Il quadrato di Alberto



I due triangoli

Poi Alberto ha tagliato uno dei due triangoli in triangoli più piccoli tutti uguali.
Il vento ha fatto volare via qualcuno dei piccoli triangoli e ora ne restano solo quattro:



Nella figura qui sopra, si vede che si possono allineare esattamente tre triangoli piccoli uguali su un lato del triangolo grande.

Disegnate sul quadrato di Alberto il triangolo grande rimasto intero e tutti i triangoli piccoli.

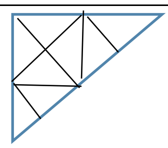
Quanti triangoli piccoli sono volati via?

- Primo pomeriggio:
  Si chiede agli insegnanti di creare piccoli gruppi, al massimo di quattro persone. Impresa più difficile del previsto! Immaginate di osservare i bambini quando devono organizzarsi alle prime esperienze dei lavori di gruppo: tutti vogliono stare con il bravo della classe, i più birbanti si concentrano tra loro per evitare l'attività, una bimba non vuole andare nel gruppo dove c'è qualcuno che non sopporta e… Ebbene gli adulti li superano!
  Si sono costituiti solo quattro gruppi completamente sbilanciati: uno da dieci elementi e altri più "equilibrati". Con pazienza e fermezza dopo un po' di tempo la situazione migliora e l'attività ha inizio.
- Ciascuna insegnante, riceve una copia del testo del problema a cui è stata tolta l'indicazione delle categorie per le quali è stato proposto.
- Senza dare alcuna spiegazione si chiede di:
  1. Risolvere il problema individualmente immaginando di essere dei bambini alle prese con questo testo.
  2. Confrontare il proprio lavoro con gli altri membri del gruppo.
  3. Relazionare facendo ipotesi sui possibili errori ed eventuali strategie utilizzate dai bambini e/o difficoltà legate all'interpretazione del testo e individuare le categorie adatte ad affrontare il problema.
  4. Successivamente, risolvere lo stesso problema con il pensiero di un adulto, confrontare il proprio lavoro con gli altri membri del gruppo e presentare un'unica relazione di gruppo.

[2] http://www.projet-ermitage.org/ARMT/navi_fic2.php?code=gp93-it&flag=1&langue=it&w=0

<u>Messa in comune</u>:

Dopo circa 50 minuti di lavoro, si chiede a ciascun gruppo di esplicitare la propria attività.
E qui nascono le sorprese!
Il capogruppo del gruppo 1 preferisce leggere la relazione. Questa è presentata su due fogli diversi che si riportano di seguito così com'è scritta che, però, per comodità sono messi in una tabella:

RAGIONAMENTO DEGLI INSEGNANTI	**RAGIONAMENTO DEI BAMBINI**
• Abbiamo disegnato il quadrato nelle sue dimensioni reali	• Prima strategia: abbiamo disegnato un triangolo grande come quello della fotocopia, lo abbiamo ritagliato, piegato e poi tagliato a metà
• Abbiamo diviso il quadrato in due triangoli uguali tracciando la diagonale	• Abbiamo successivamente piegato il triangolo a metà, poi ancora a metà fino ad arrivare al triangolo della stessa dimensione del triangolo piccolo della fotocopia
• Abbiamo disegnato in un triangolo un quadrato che abbiamo diviso in quattro triangoli uguali con le diagonali	• Abbiamo riaperto e contato i triangoli ottenuti e sono 8
• Abbiamo diviso in due triangoli ciascuno dei due restanti triangoli nel triangolo grande	• Sottraggo da 8 i 4 triangoli volati via e rimangono 4
• Abbiamo ottenuto otto triangoli di uguali dimensioni	
Concetti che il bambino deve possedere: • Metà • Quadrato= figura con 4 lati uguali • Concetto di equiestensione	

Altri due gruppi presentano la stessa strategia "adulta" affermando che i bambini molto probabilmente si sarebbero comportati allo stesso modo. Inoltre con un N.B. dichiarano: "*questo problema è inerente all'area di figure piane, all'equiestensione, al concetto di triangolo e al concetto di metà, di quadrato, frazione e di divisione. Concetto di misura, di approssimazione*".

E ancora… altra scheda con ancora sorprese!

SOLUZIONE DEGLI ADULTI	**SOLUZIONE DEI BAMBINI**
• Abbiamo considerato che il quadrato rappresenti l'intero, quindi 1	• **<u>Prima soluzione</u>**: abbiamo ritagliato i quattro triangoli piccoli rimasti e li abbiamo disposti sul triangolo
• Il triangolo rimasto intero è ½ del quadrato	• Li abbiamo disegnati e poi li abbiamo spostati disegnandoli fino ad occupare l'intera figura
• I quattro triangoli piccoli rappresentano ¼ della metà del triangolo rimasto intero	• Poi abbiamo contato: sono volati via 4 triangoli
• Pertanto l'altra metà del triangolo è congruente ad altri 4 triangoli piccoli volati	• **<u>Seconda soluzione:</u>** abbiamo ritagliato il triangolo rimasto intero
Nota: ho riportato fedelmente ciò che è scritto sui fogli consegnati	• Lo abbiamo piegato a metà fino ad ottenere un triangolo uguale a quelli piccoli rimasti
	• Poi abbiamo contato i triangoli: sono 8, perciò ne sono volati 4

E la luce fu!

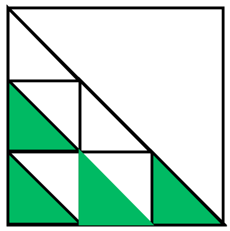
Solo un'insegnante timidamente scarabocchia la risposta corretta e dopo aver ascoltato il lavoro svolto da tutte, comincia a ritrattare anche le sue conclusioni e ad esplicitare i suoi dubbi. Ha inizio una discussione che porta alla consapevolezza di aver letto e osservato superficialmente il testo e il disegno proposto, giungendo quindi ad affermare che: i triangoli volati via sono 5.

Un commento sulla messa in comune

Forse, le difficoltà degli insegnanti potrebbero essere dovute sia al fatto di aver chiesto loro di esprimersi dal punto di vista dei bambini, sia perché hanno troppa fiducia nella manipolazione o ancora perché hanno difficoltà a lavorare in gruppo.

Il passaggio all'attività in classe

Si stabilisce di far proporre il lavoro in classe e dopo una settimana ci si ritrova per l'analisi a posteriori e con stupore da parte degli insegnanti che si erano sbagliati, si constata che molti bambini in quarta e in quinta hanno dato la risposta esatta riuscendo a disegnare la scomposizione del quadrato, non hanno citato l'allineamento dei triangoli dati nel testo, ma lo hanno riproposto nel loro disegno" *Abbiamo disegnato un quadrato e poi disegnato una diagonale. In una metà del quadrato abbiamo disegnato 9 triangoli. In seguito abbiamo colorato 4 triangoli quindi sono volati 5 triangoli"*

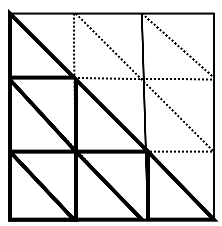


La stessa esperienza è stata proposta in un'altra scuola.[3] Il gruppo costituito in maggioranza da insegnanti della scuola primaria e solo quattro insegnanti della scuola secondaria di primo grado, ha evidenziato inizialmente una certa perplessità a seguire il corso di formazione, in un certo senso imposto dalla Dirigente. Alla presentazione dell'attività, molti, pur mostrando inizialmente poco interesse, hanno poi formato i gruppi e hanno cominciato a lavorare piacevolmente tra loro, sviluppando le relazioni proposte attenendosi a tutte le consegne.

Hanno poi concluso il primo pomeriggio soddisfatte e pronte a lavorare in classe.

Dopo una settimana l'atmosfera dell'inizio corso era totalmente cambiata e le insegnanti si sono messe subito al lavoro. Si sono organizzate in piccoli gruppi e hanno suddiviso gli elaborati delle diverse categorie per passare all'analisi a posteriori.

Nella messa in comune, tutti i gruppi, riferendosi alla strategia adulta, si sono trovati d'accordo sulla risposta corretta dichiarando che: "*poiché su un triangolo grande si possono posizionare tre triangolini, si deduce che il quadrato è formato da 18 triangolini. Il triangolo grande essendo la metà del quadrato ne conterrà 9. Quattro erano i triangoli rimasti perciò sono volati via 5 triangolini"*. Riportano poi il seguente disegno:



Pensando invece ai loro bambini, dicono: "*Secondo noi gli allievi hanno bisogno di visualizzare l'operazione quindi taglieranno i triangoli e li posizioneranno sul triangolo grande, oppure disegneranno le figure date. Dopo vari tentativi arriveranno alla soluzione"*.

E ancora… "*bisogna leggere attentamente il testo perché in esso si trova la soluzione"*… "si possono allineare esattamente tre triangoli piccoli uguali su un lato del triangolo grande".

Si riporta di seguito l'analisi a posteriori per due classi di categoria 3:

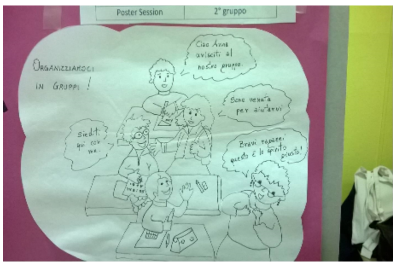
[3] Solo qualcuna delle insegnanti iscritte al corso di formazione partecipa da anni al RMT, le altre sono state invitate dalla Dirigente a prendervi parte.

"Gli alunni non hanno trovato difficoltà nella comprensione del testo del problema e della richiesta. Per la soluzione hanno utilizzato strategie diverse: hanno ritagliato, sovrapposto le figure geometriche, disegnato le stesse e proceduto per tentativi ed errori. A nostro avviso gli alunni hanno intuito la soluzione ma non sempre hanno proceduto nella maniera corretta. Infatti alcuni gruppi sono arrivati al risultato, altri gruppi, pur avendo, all'apparenza, realizzato disegni perfetti non hanno raggiunto il risultato perché hanno diviso il quadrato di partenza con linee perpendicolari e diagonali, contando 8 triangoli e non 9. L'errore è stato quello di non seguire l'esempio di 3 triangoli sul lato-cateto".
Durante la discussione le insegnanti affermano che soprattutto dagli elaborati delle classi terze *"si evince la mancata conoscenza delle caratteristiche geometriche di quadrati, triangoli, triangoli isosceli, triangoli rettangoli, superfici, angoli".*
E ancora… il problema è stato considerato inadatto per la categoria 3 mentre il testo non ha creato difficoltà di comprensione per le categorie 4 e 5, dove talvolta *"non sono stati molto chiari nelle spiegazioni ma hanno riprodotto il disegno correttamente"*, dicono le insegnanti.
Alcune spiegazioni dei gruppi degli allievi delle categorie 4 e 5:

- *"Abbiamo disegnato un quadrato, l'abbiamo diviso in due triangoli. Poi, abbiamo preso la misura di un triangolino e l'abbiamo moltiplicato per se stesso fino a riempire tutto il triangolo grande. Sono volati 5 triangoli"*
- *"Abbiamo risolto il quesito misurando i triangolini e poi abbiamo moltiplicato per tre e ci è uscito quanto misuravano in tutto i tre triangoli in verticale e poi abbiamo messo altri triangoli. Abbiamo visto che nel triangolo andavano 9 triangolini".*
- *"Sono volati via 5 piccoli triangoli. Per trovare la soluzione abbiamo diviso il quadrato in due triangoli e poi uno dei triangoli l'abbiamo diviso in 9 piccoli triangoli uguali indispensabili per riempire l'intero triangolo. 9 piccoli triangoli li abbiamo tagliati e posizionati nel modo giusto per verificare"*
- *"Abbiamo disegnato i piccoli triangoli su un foglio quadrettato e li abbiamo ritagliati. Dopo li abbiamo messi sul triangolo grande, fino a riempirlo. Poi abbiamo contato il numero dei triangoli togliendone 4"*

Al termine della messa in comune sull'analisi a posteriori, è stata accettata di buon grado la proposta di ripercorrere lo stesso tipo di attività a scuola, organizzandosi autonomamente, scegliendo altri problemi del RMT.

2.3 Lavoro di gruppo: gli allievi



Prima della risoluzione dei problemi, ogni classe deve capire come dividersi in gruppi in modo autonomo senza che l'insegnante dia delle disposizioni. Sono gli stessi allievi che, conoscendo le capacità e le preferenze proprie e quelle dei loro compagni di classe, che imparano nel loro cammino nel RMT a creare situazioni-gruppo nelle quali ciascuno possa ricoprire un ruolo e diventare, insieme agli altri, protagonista. Nel gruppo, l'allievo considerato come "bravo", capirà che far tutto da solo a volte non basta, come è capitato per esempio a Michele, allievo di un istituto professionale, quando dopo aver risolto in breve tempo il problema "La lettura di Isidiro" (I prova del 23° RMT cat. 6, 7,8)[4], ha trovato difficoltà a spiegare la strategia risolutiva utilizzata e ha dovuto chiedere a Marco di relazionare al posto suo. Sempre nel gruppo, l'allievo che è convinto di non "essere capace" come Francesco, ad esempio, inizierà ad apprezzare le sue qualità nel disegno, quando darà il suo contributo nella risoluzione di un problema dove è necessario che si rappresenti una figura con precisione. Il lavoro in

[4] In allegato i testi dei problemi citati.

gruppo può stimolare anche allievi che sono spesso disattenti a lezione, come ad esempio Angelo che dal profondo dei suoi "sogni", interviene nella discussione animata sul problema "Sempre più grandi!" (I prova del 23°RMT cat. 8,9,10) esclamando: "*la differenza delle aree interne è sempre zero", dovete guardare solo la cornice esterna!".*
Come già ben evidenziato in F. Jaquet (2003)[5]: *La qualità delle interazioni e dell'organizzazione del lavoro hanno un effetto evidente sulle riuscite: se il ruolo degli allievi riconosciuti come «forti in matematica» è importante per certi problemi, nel caso del rally non è preminente, sono soprattutto le validazioni interne a ciascun gruppo che influenzano la riuscita della prova.*
E ancora…

Un pomeriggio in un incontro con un centinaio di bambini di terza scuola primaria, interrogati sulla loro organizzazione in gruppi hanno dato una bella lezione a molti adulti. Di solito la classe si divide in cinque gruppi, sia in previsione della gara, ma anche per svolgere altre attività. Hanno fatto tutti questa scelta perché nel RMT, la categoria tre deve risolvere cinque problemi nei 50 minuti. In ciascun gruppo," *uno di noi legge agli altri il testo e poi iniziamo a confrontarci e a scambiarci opinioni".* E' stato bello constatare che da soli sono riusciti a dividersi tra: gli scrittori, gli artisti e i matematici che insieme arrivano ad un'unica produzione.
Gli stessi bambini, hanno poi chiesto di riguardare i problemi della II prova del 23° RMT e come sono stati valutati dalla commissione. Si è colta l'occasione per spiegare loro come ci si organizza per la correzione e in che modo si fa la scelta di attribuire un punteggio piuttosto che un altro. I bimbi riguardano, sempre divisi in gruppi, gli elaborati di "I Dadi (I)" (II prova del 23° RMT cat. 3,4) già valutati dagli insegnanti.

. 

Dopo un'attenta lettura, c'è una proposta: "*vogliamo far passare un punteggio dal 4 al 3".* Si rilegge la spiegazione data dai bimbi nel problema e dall'analisi a priori del problema si rilegge quando attribuire il 4. Risposta corretta (52) con spiegazioni chiare che mettono in evidenza come è avvenuto il conteggio.
"meglio un 3 perché il ragionamento non è stato specifico, perché hanno raggiunto il risultato, hanno sommato i numeri giusti ma non hanno spiegato bene come sono arrivati a dire che sono quelli i numeri da prendere",
Gli allievi imparano a riconoscere le difficoltà incontrate e le strategie adottate per superarle. Prendono atto degli errori commessi, si abituano a comprendere le ragioni di un insuccesso e a conoscere i propri punti di forza.

Per concludere

Ci sembra di poter affermare che tramite il lavoro di gruppo, caratteristico del RMT tutti siano stimolati a crescere: gli allievi hanno l'occasione di apprendere le regole elementari del **dibattito scientifico per risolvere i problemi:** imparano a costruire ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri; si abituano a descrivere il procedimento seguito e a riconoscere strategie di soluzione diverse dalla propria; gli insegnanti sono in continua formazione arricchendosi inoltre nello scambio con colleghi di ogni ordine e grado, nella preparazione di nuovi problemi, nelle fasi di correzione in comune e, talvolta, in incontri di formazione.

[5] F. Jaquet: 2003, !L'évolution de l'utilisation en classe des problèmes du Rallye/L'evoluzione dell'utilizzazione in classe dei problemi del Rally', *Atti delle giornate di Studio sul Rally matematico transalpino*, (a cura di L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M. G. Rinaldi, M. Polo) Parma 2001-Torre delle Stelle 2002, 35-52.

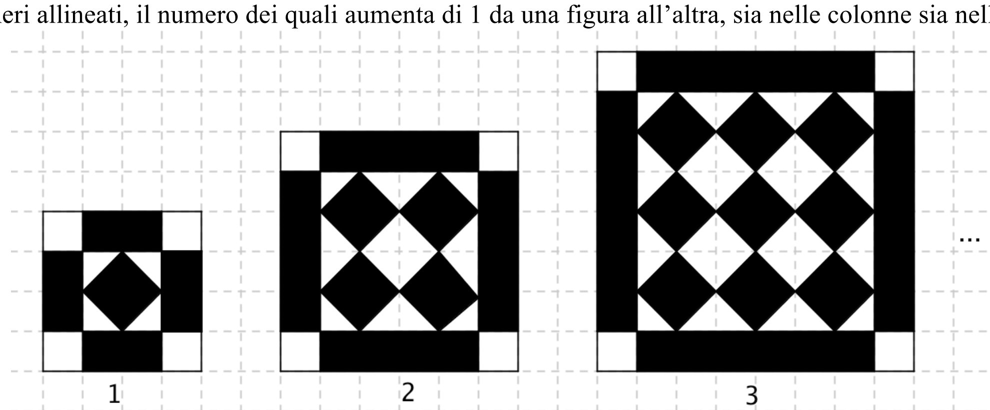
ALLEGATI

LA LETTURA DI ISIDORO (CAT. 6, 7, 8) I prova del 23° RMT ©ARMT 2014

Lunedì Isidoro inizia la lettura di un nuovo libro e legge la metà delle pagine del libro.
Martedì legge la metà delle pagine che non ha letto lunedì.
Mercoledì legge la metà delle pagine che non ha letto lunedì e martedì.
A questo punto ha già letto 84 pagine del libro.
Quante pagine deve leggere ancora Isidoro per finire il suo libro?
Spiegate come avete trovato la risposta.

SEMPRE PIU' GRANDI (Cat. 8, 9, 10) I prova del 23° RMT ©ARMT 2014

Il disegno qui sotto mostra le prime tre figure, con posizioni indicate con 1, 2, e 3, di una successione regolare disegnata su carta quadrettata. la loro "cornice esterna" ha sempre lo stesso spessore, l'interno è formato da quadrati neri allineati, il numero dei quali aumenta di 1 da una figura all'altra, sia nelle colonne sia nelle righe.



Per una delle figure di questa successione regolare, se si calcola la differenza tra l'area delle parti nere e l'area delle parti bianche, si trova 196 (in quadretti della quadrettatura).

Qual è la posizione di questa figura nella successione regolare?

Spiegate il vostro ragionamento.

I DADI (I) (Cat. 3, 4) II prova del 23° RMT ©ARMT 2014

Questa foto mostra quattro dadi.

Sono visibili solo alcuni dei punti neri presenti su di essi.

Nella foto però non si possono vedere tutte le facce dei dadi e quindi alcuni punti rimangono nascosti.

Quanti sono i punti neri che non si vedono nella foto?

Spiegate come avete fatto a trovare questo numero.

Sezione Rozzano

L'INCLUSIONE E L'INTEGRAZIONE A SCUOLA: E' POSSIBILE?

Abate Lidia, Bonetti Ester, D'Agata Rita

Introduzione

Come compiere efficacemente il lavoro d'insegnante in classi sempre più numerose, che comprendono allievi con Bisogni Educativi Specifici?
Come garantire una reale individualizzazione e personalizzazione dell'apprendimento di tutti gli alunni anche di quelli con disturbi dell'apprendimento?
Come integrare proficuamente gli alunni "diversi", perché culturalmente o socialmente svantaggiati e lontani dal modello di "alunno medio" al quale si tende sempre a far riferimento?
Come utilizzare i problemi del Rally in questa realtà multiforme e variegata?
Queste sono delle domande che spesso gli insegnanti di ogni ordine e grado si pongono nel quotidiano far scuola, sulle quali intendiamo riflettere, riportando alcune nostre esperienze relative alla scuola primaria.
L'Incontro Internazionale dell'ARMT a Sedilo (Sardegna), in ottobre 2015 sul tema "Imparare insieme nel risolvere i problemi" ha ulteriormente stimolato le nostre riflessioni e queste righe ci permettono di sviluppare ciò che abbiamo presentato nel nostro poster.

Benessere in classe

Prima di scegliere metodologie o strategie didattiche di intervento educativo, riteniamo sia di fondamentale importanza occuparci della promozione del benessere reciproco in classe.
Il clima di classe è creato dalla rete di relazioni affettive, dalla capacità di collaborare in vista di obiettivi comuni e dall'apprezzamento reciproco.
Una classe è accogliente quando valorizza ciascuno e le sue risorse; ogni suo componente si prende cura della formazione dell'altro ed è in grado di dare e ricevere aiuto.
Il clima di classe va riproposto e rinegoziato ogni giorno esplicitamente o implicitamente; se il gruppo sta bene, apprende bene.
Essere in gruppo non vuol dire essere un gruppo.
La classe diventa un gruppo vero e proprio quando è consapevole che tutti dipendono gli uni dagli altri. Un gruppo di alunni capace di collaborare in un clima sereno non si forma improvvisamente, ma va costruito passo dopo passo, con una serie di attività specifiche, mirate e con tempo, pazienza e convinzione.
La disposizione dei banchi in una classe, l'atteggiamento dell'insegnante, il suo modo di agire, il tono di voce, le parole che usa, il materiale che propone, caratterizzano la modalità di relazione con e fra gli alunni.
L'insegnante rappresenta un modello, un punto di riferimento, dà l'aiuto richiesto, lascia che i membri del gruppo scelgano come procedere, rende noto l'obiettivo da raggiungere, elargisce lodi e critiche al lavoro e non alle persone, valorizza l'errore come tappa indispensabile per un consapevole apprendimento; così diventa membro del gruppo.

Alcune strategie per attivare le risorse della classe

La scelta della metodologia da utilizzare nell'insegnamento dipende da tanti fattori: dalla sensibilità dell'insegnante, dalla sua esperienza, dalla composizione della classe, dall'età degli alunni…
Riportiamo di seguito alcune nostre esperienze di tipo collaborativo condotte nella scuola primaria da alcuni anni.
Per valutare il livello di abilità sociali presenti in tutti i componenti del gruppo e per consentire una presa di coscienza della propria autostima e del clima della classe, abbiamo proposto agli alunni un questionario di benessere
(vedi allegato 1).

Anche per gli insegnanti abbiamo predisposto un questionario che consente di riflettere sulle proprie metodologie e prassi didattiche, senza avere la presunzione di valutare la qualità globale dell'insegnamento (vedi allegato 2).

- Una strategia efficace per imparare ad autogovernarsi come gruppo e ad assumersi le proprie responsabilità consiste nel cercare, contrattare, negoziare, regole di convivenza con l'accordo di tutti. *La classe si suddivide in piccoli gruppi …Ogni gruppo si* concentra *sull'individuazione di 5 regole. Su un foglio diviso a metà si segna la regola e a fianco almeno 5 vantaggi per il singolo e per il gruppo.*

- Si stabiliscono poi, insieme, dei “compiti di riparazione” per i compagni che hanno infranto le regole condivise dal gruppo classe.

- Per avviare una riflessione metacognitiva sul modo di rapportarsi in classe.

- Ogni alunno *su un foglio diviso in due parti, deve elencare «…Cosa faccio per rendere il clima di classe sereno / burrascoso?» Esempio:*

SERENO	BURRASCOSO
sono accogliente e sorridente	mi arrabbio spesso con i compagni
mi metto nei panni degli altri	metto in evidenza gli errori degli altri
aiuto chi ha difficoltà	mi disinteresso di tutto e di tutti
….	….

- Occorre sottolineare spesso l’importanza dell’ascolto reciproco, perché ciascuno ha un valore e ciò che intende comunicare merita di essere accolto. Saper ascoltare è una delle abilità più importanti nella vita, che può davvero influenzare positivamente la nostra esistenza. *Usare un oggetto (pallina, bacchetta magica, chiave…): quando un alunno lo detiene ha il diritto di parlare e di essere ascoltato, quando ha finito lo passa ad un altro, che può così intervenire.*

- Per incrementare l’autostima, ognuno può elencare le proprie qualità e competenze, che diventano risorse per tutti.

- *Dividere la classe in piccoli gruppi, ognuno disegna un grosso fiore composto da un centro circolare piuttosto grande e da quattro petali semicircolari, con un gambo e una fogliolina, su cui scrive il proprio nome. Ognuno scrive sui petali delle qualità che riconosce a se stesso e nel centro delle qualità che vorrebbe avere, ma non ha ancora raggiunto. Successivamente il fiore viene passato ad un compagno, che può aggiungere nei petali altre qualità che gli riconosce. Nessuno può scrivere nel centro del fiore di un altro. I fiori passano di mano in mano all’interno del gruppo, finché ognuno recupera il suo fiore e legge cosa hanno scritto i compagni.*

- Dedicare periodicamente un momento al dono reciproco. *Ogni alunno prepara un dono (una lettera, un disegno, una frase, un manufatto…) per ciascun compagno. Nel giorno stabilito gli alunni si scambiano i doni preparati.* Questa esperienza è estremamente gratificante, perché ognuno offre e riceve. Durante la preparazione del dono ogni alunno sviluppa attenzione e maggiore empatia nei confronti dell’altro, poiché si chiede cosa possa piacere al compagno. Lo scambio dei doni è un’esperienza di forte impatto emotivo.

- Abituare a dire “*Grazie*” ed esprimere gratitudine, approfondisce la sensibilità verso gli altri. Si può anche istituire la “sedia del grazie”. O*gni alunno siede sulla “sedia del grazie” e ringrazia un compagno per il sostegno o per l’aiuto ricevuto in un determinato momento.*

- Per favorire l’apprezzamento reciproco si può analogamente istituire la “sedia dei complimenti”. *Ognuno si accomoda sulla sedia e riceve da ogni compagno un complimento di valorizzazione della sua personalità. Ovviamente, si dovranno evitare apprezzamenti sugli attributi fisici.*

- Comunicare le «aspettative reciproche». *A coppie, ogni componente comunica al compagno cosa si aspetta dall’altro (che non mi offendi - che non imbrogli - che non mi prendi in giro - che non ridi se sbaglio - che mantieni la parola - che ti assumi le tue responsabilità…) e cosa l’altro si può aspettare da lui (lealtà - comprensione - umorismo - compagnia - amicizia - sostegno…).*

Infine, due suggerimenti essenziali, che devono diventare “modus operandi” nella prassi didattica:

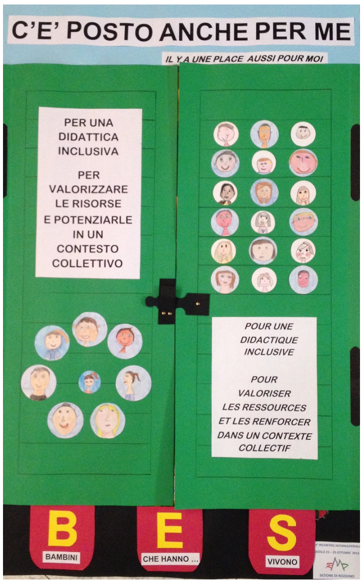
- incrementare e diffondere il buonumore, l’allegria e l’umorismo;
- sottolineare, anche con un applauso, un successo, il raggiungimento di un obiettivo o semplicemente un intervento propositivo da parte di un componente del gruppo.

Che cosa intendiamo per didattica inclusiva?

La «didattica inclusiva» è un processo pedagogico che si sta diffondendo particolarmente in Italia. Essa si fonda su sette principi generali (allegato 3). Il suo obiettivo è consentire a tutti gli alunni il raggiungimento del massimo grado possibile di apprendimento e di partecipazione sociale, valorizzando tutte le risorse e le differenze presenti nel gruppo classe.

La didattica inclusiva può rispondere ad esigenze sociali e pedagogiche sempre più pressanti: oggi le classi sono numerose, con la presenza di alunni diversi per cultura e per stili di pensiero, differenti nelle modalità di relazione, nei vissuti familiari e sociali. Rispondere contemporaneamente a molteplici interessi, ai bisogni di tutti è possibile solo con un'impostazione flessibile dell'insegnamento. L'insegnante deve accogliere le differenze ed individuare sempre nuove strategie per poter seguire tutti i ragazzi, anche coloro che hanno difficoltà di apprendimento, per lavorare insieme e consentire la crescita come singoli e come gruppo. È assodato che ogni apprendimento passa attraverso la "relazione", quindi una "buona" relazione è garanzia di un apprendimento stabile e significativo: si comprende con la ragione e con il "cuore". Con la ragione spieghiamo la realtà, con il cuore la comprendiamo e la inseriamo in una cornice di significato. Se alla dimensione emozionale si riconosce il giusto peso, questa può agire da potente spinta motivazionale, se invece è trascurata, può indurre atteggiamenti di rifiuto. Educare alle emozioni diventa una necessità. Un insegnante che condivide i principi fondamentali del Rally Matematico Transalpino opera in questa prospettiva e la classe attraverso la risoluzione dei problemi in gruppi cooperativi vive esperienze di didattica inclusiva.

Nell'Incontro Internazionale dell'ARMT a Sedilo abbiamo presentato un poster che riassume alcune nostre esperienze di didattica inclusiva.



poster chiuso

poster aperto

Le frasi in neretto sono le parole dei bambini.

"…Con gli altri riesco a capire"

Per facilitare la comprensione di un problema la classe è stata suddivisa in due gruppi: gli attori e gli spettatori. Gli attori hanno concordato come rappresentare la situazione problematica e, attraverso la drammatizzazione, i bambini che non riuscivano in precedenza a capire i passaggi risolutivi, sono stati aiutati.

"…Posso controllarmi ed aiutare"

Dopo un'assenza di una bambina ritenuta "brava" dal gruppo-classe, un bambino certificato ADHD (deficit di attenzione ed iperattività) è stato invitato ad aggiornare la compagna sulle attività svolte. Lo ha fatto con piacere e immensa gratificazione, rinunciando a parte dell'intervallo. Il bambino si è reso conto di essere in grado di prestare attenzione per un tempo prolungato e di essere utile agli altri.

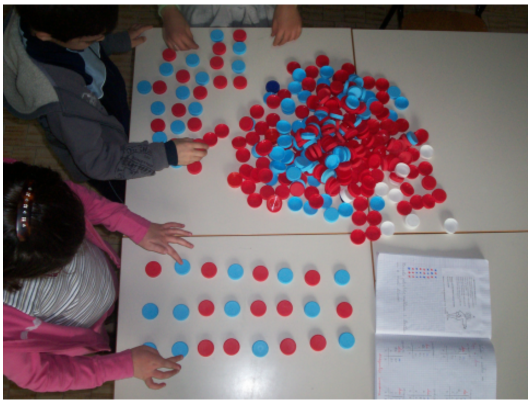
"… Sono orgoglioso"

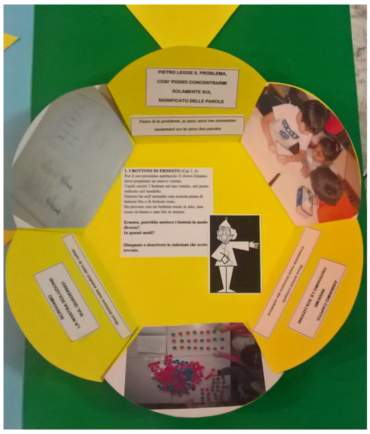
Un bambino certificato ADHD, che assume psicofarmaci e che solitamente mostra grandi difficoltà a partecipare alle attività didattiche, ha avuto l'intuizione di trasformare un problema in un gioco e con l'aiuto degli altri lo ha realizzato dando lui stesso le direttive. Il gruppo classe si è complimentato con lui, valorizzando le sue capacità, delle quali non era consapevole.

Quest'attività è stata da stimolo anche per gli altri compagni che in gruppo hanno seguito l'idea e hanno trasformato anche loro un problema in gioco, per poi condividerlo con tutti gli altri. La classe ha quindi deciso di organizzare una festa per la conclusione dell'anno scolastico, durante la quale i bambini hanno raccontato ai genitori la loro esperienza, e hanno giocato tutti insieme con grande gioia.

"…Tu leggi, io capisco e spiego"

La classe divisa in gruppi è concentrata sulla risoluzione di un problema del Rally Matematico, "I bottoni di Ernesto". Un gruppo formato da quattro bambini, di cui una bambina dislessica appena arrivata dall'Egitto, è riuscito a risolvere il problema, grazie al contributo di tutti: mentre il bambino senza difficoltà leggeva, la bambina certificata come DSA (Disturbo Specifico di Apprendimento) ha avuto l'intuizione di utilizzare dei tappi per visualizzare la situazione, spiegandola ai compagni.





"… È bello lavorare insieme"

Quando una classe è abituata a lavorare a coppie e in piccoli gruppi, richiede costantemente di vivere questa esperienza, perché la ritiene coinvolgente e divertente; l'insegnante può verificare che tale modalità di lavoro è costruttiva e i saperi vengono interiorizzati con maggiore facilità da tutti, permangono e sono riutilizzati in altre circostanze.

Il Rally Matematico Transalpino in una classe collaborativa

È chiaro che in una classe abituata a lavorare bene, insieme, l'attività di risoluzione dei problemi del Rally si inserisce a pieno titolo: vengono superate naturalmente tutte le difficoltà connesse alla strutturazione e definizione dei gruppi, alla necessità di includere e valorizzare le diverse capacità degli alunni in vista del raggiungimento di un fine condiviso.
Se gli alunni sanno lavorare proficuamente insieme, con il Rally possono trarre notevole beneficio a livello di sviluppo delle capacità di problem-solving, di approfondimento delle conoscenze matematiche, di sviluppo delle competenze logiche. Infatti l'energia non viene dispersa per superare eventuali problemi relazionali, ma viene convogliata direttamente all'essenza della situazione problematica.
Il lavoro svolto in più ambiti per incrementare l'inclusività ed il clima di benessere consente il raggiungimento di obiettivi didattici con maggiore facilità e nel minor tempo.

Nelle classi dove non viene proposto un lavoro specifico sulle relazioni come quello precedentemente descritto in questo articolo, la stessa attività di risoluzione dei problemi del Rally può diventare un mezzo per consentire la costruzione di un clima di benessere in classe. La classe, concentrandosi su "fare matematica risolvendo problemi" e "imparare le regole elementari del dibattito scientifico, discutendo e difendendo le diverse soluzioni proposte", viene posta nella condizione di caricarsi "dell'intera responsabilità di ogni prova", incrementando la capacità di lavorare in gruppo e di confrontarsi con spirito critico con tutti gli altri, con modalità accoglienti e non conflittuali.
Per la risoluzione delle situazioni del Rally, il benessere in classe è una condizione necessaria e allo stesso tempo un obiettivo implicito dell'attività, un pre-requisito e una finalità.

In tutti gli ambiti, svolgere attività piacevoli crea sicuramente un clima positivo; le proposte del Rally offrono l'occasione di affrontare temi matematici insoliti, secondo una modalità coinvolgente e divertente: la classe ne trae vantaggio a livello relazionale ed apprende con facilità e in modo duraturo nuove conoscenze matematiche.

Bibliografia

Franta Colasanti "*L'arte dell'incoraggiamento"* La Nuova Italia, 1991
T. Gordon "*Insegnanti efficaci"* Giunti e Lisciani, 1991
C. Cornoldi "*Metacognizione e apprendimento*" Il Mulino , 1995
M. Comoglio-M. Cardoso *"Insegnare e apprendere in gruppo"* Roma, Las, 1998
Mario Polito "*Attivare le risorse del gruppo classe"* Erickson, 2001
D. Novara - E. Passerini *"Con gli altri imparo"* Erickson, 2015
Rivista: "*Difficoltà di apprendimento e didattica inclusiva*", 18/4 aprile 2013 - Erickson
Autori vari - "*Bes a scuola*" Erickson, 2015
I riferimenti teorici alle teorie costruttiviste sociali e alle modalità collaborative all'indirizzo:
http://matematica.unipv.it/attach/431D4A3EF2FB0500/file/Dispense_Didattica_2015.pdf

ALLEGATI

Allegato 1

QUESTIONARIO DI BENESSERE: "*come sto nella mia classe*"

Dai un giudizio alle seguenti affermazioni segnando con una crocetta il grado del tuo benessere.

0 = no o per niente 1 = un po' 2 = abbastanza 3 = molto 4 = moltissimo

	0	1	2	3	4
A. Mi sento apprezzato dai miei compagni					
B. Mi trovo bene con i miei compagni					
C. Il clima della nostra classe è amichevole					
D. Mi interessa quello che dicono i miei compagni					
E. I miei compagni si interessano a quello che dico					
F. Durante la ricreazione mi diverto con i miei compagni					
G. Gli insegnanti mi apprezzano					
H. Nella nostra classe si svolgono delle attività in cui mi sento bravo					
I. Mi piace lavorare in gruppo					
J. Riesco a dare il mio contributo nel lavoro di gruppo					
K. Nella mia classe c'è un clima divertente, allegro e spiritoso					
L. Vengo a scuola volentieri					
M. Ascolto con attenzione gli altri					
N. Gli altri ascoltano con attenzione le mie proposte					
O. Faccio proposte costruttive quando emergono conflitti					
P. Sono capace di rispettare le regole della classe					
Q. In classe sappiamo collaborare in vista di un obiettivo comune					
R. Mi metto nei panni degli altri per capire come si sentono					
S. In classe i miei compagni tengono alla mia amicizia					
T. Sappiamo trovare un accordo dopo un litigio					

Allegato 2

QUESTIONARIO PER IL DOCENTE (Stili comunicativi e profilo inclusivo)
Valuta le seguenti affermazioni in relazione al tuo profilo in classe.
1 = molto raramente 2 = raramente 3 = spesso 4 = molto spesso

QUANDO ENTRO IN CLASSE / DURANTE L'ATTIVITA'	**1**	**2**	**3**	**4**
1. ENTRO IN CLASSE E SALUTO GLI ALUNNI CON UN SORRISO.				
2. PARLO CON UN TONO DI VOCE BASSO.				
3. CHIEDO CHE TUTTI SI SIEDANO E ASPETTINO LE MIE COMUNICAZIONI				
4. DO TEMPO AGLI ALUNNI DI CONCLUDERE LE LORO COMUNICAZIONI INFORMALI.				
5. UTILIZZO UN SEGNALE CONVENUTO PER RICHIAMARE L'ATTENZIONE GENERALE.				
6. VALORIZZO EVENTUALI OGGETTI PORTATI DAGLI ALUNNI, ANCHE SE NON PERTINENTI ALLA LEZIONE PROGRAMMATA.				
7. DEDICO UN MOMENTO INIZIALE ALLA MESSA IN COMUNE DI ESPERIENZE E OSSERVAZIONI DERIVANTI DALL'ESPERIENZA EXTRASCOLASTICA DEGLI ALUNNI.				
8. FORMULO DOMANDE PER INDAGARE LE PRECONOSCENZE.				
9. SPIEGO LE CARATTERISTICHE E GLI OBIETTIVI DELL'ATTIVITA' QUOTIDIANA.				
10. FAVORISCO LA PARTECIPAZIONE DEGLI ALUNNI CON DISABILITA' ALLE LEZIONI IN CLASSE, IN MODO CHE POSSANO CONDIVIDERE IL LORO PERCORSO CON I COMPAGNI.				
11. INTRODUCO UN'ATTIVITA' SOTTO FORMA DI DOMANDE E EVIDENZIO I PROBLEMI CHE EMERGONO SENZA PROPORRE DIRETTAMENTE SOLUZIONI.				
12. UTILIZZO LA COMUNICAZIONE NON VERBALE, IMMAGINI, MAPPE, SCHEMI...				
13. VALORIZZO TUTTI GLI ALUNNI, EVIDENZIANDO I PUNTI DI FORZA DI CIASCUNO.				
14. CHIEDO AGLI ALUNNI DI RACCONTARE IL LAVORO SVOLTO.				
15. RENDO DISPONIBILI MATERIALI DIVERSIFICATI IN MODO CHE GLI ALUNNI POSSANO SCEGLIERE.				
16. IN SITUAZIONI DI STALLO PONGO DOMANDE PER FAVORIRE LA RICERCA DI SOLUZIONI INTERNE AL GRUPPO.				
17. ADATTO LE STRATEGIE E IL MATERIALE NELL'OTTICA DELLA FACILITAZIONE E SEMPLIFICAZIONE PER RISPONDERE AI BISOGNI DEGLI ALUNNI CON BES.				
18. MODIFICO LA DISPOSIZIONE DEI BANCHI IN CLASSE PER FACILITARE L'APPRENDIMENTO COLLABORATIVO E COOPERATIVO.				
19. SE NECESSARIO, RIVEDO LA MIA PROGRAMMAZIONE A BREVE TERMINE E LAVORO PER ADATTARLA ALLA REALTA' QUOTIDIANA.				
20. UTILIZZO IL LAVORO DI COPPIA (E IL TUTORING TRA PARI) PER FACILITARE L'APPRENDIMENTO DI TUTTI GLI ALUNNI.				
21. FACCIO RAGIONARE GLI ALUNNI SULLE STRATEGIE DI LAVORO E SULLE PROCEDURE DI PROBLEM SOLVING NEL CORSO DELLE ATTIVITÀ DIDATTICHE IN CLASSE.				
22. UTILIZZO L'AUTOVALUTAZIONE INDIVIDUALE E DI GRUPPO PER RIFLETTERE SULLE STRATEGIE E LA PIANIFICAZIONE DEL COMPITO E PER VALUTARE GLI ESITI DI APPRENDIMENTO.				

Da: "Esercizi e materiali" L. M. Magni; http://risorseonline.erickson.it/leguide/questionario-bes-a-scuola/# riveduti e adattati.

Allegato 3

I SETTE PRINCIPI GENERALI DELLA DIDATTICA INCLUSIVA

1° I COMPAGNI DI CLASSE COME RISORSA	**apprendimento cooperativo**: metodo di insegnamento / apprendimento basato sul principio per cui ciascun componente del gruppo, con le sue caratteristiche peculiari, può contribuire all'apprendimento di tutti e può diventare risorsa per gli altri. In questo ambiente si potenzia il ruolo attivo dello studente, si facilita l'apprendimento significativo e nella collaborazione si eliminano molte difficoltà specifiche (DSA).
	tutoring: insegnamento reciproco tra alunni funzionale in molte discipline con effetti positivi in termini di apprendimento, di rapporti interpersonali, di motivazione e di autostima.
2° ADATTAMENTO E SEMPLIFICAZIONE DEL TESTO	**l'adattamento come strategia inclusiva:** scelta e preparazione di materiali adeguati alle abilità e alle esigenze di ciascun studente per riuscire ad integrare tutti gli alunni nei percorsi comuni.
3° MAPPE, SCHEMI E AIUTI VISIVI	**l'uso e la produzione di questi strumenti** facilitano l'apprendimento e favoriscono il recupero di informazioni utili per l'organizzazione delle conoscenze.
4° POTENZIAMENTO DEI PROCESSI COGNITIVI	**processi cognitivi**: attenzione, memorizzazione, pianificazione e problem solving consentono lo sviluppo di abilità necessarie all'elaborazione delle informazioni e alla costruzione dell'apprendimento. Valorizzazione delle diverse **forme di intelligenza e degli stili cognitivi** presenti in classe.
5° METACOGNIZIONE E METODO DI STUDIO	**didattica metacognitiva:** sviluppa nell'alunno la consapevolezza di quello che sta facendo, del perché lo fa, di quando è opportuno farlo e in quali condizioni, rendendolo responsabile dei propri processi cognitivi. Rappresenta la base di un corretto metodo di studio.
6° EMOZIONI, AUTOSTIMA E MOTIVAZIONE	**stare bene insieme:** porre particolare attenzione agli aspetti emotivo-relazionali, aiutando tutti gli alunni ad imparare a vivere bene con se stessi e con gli altri, a migliorare la propria autostima, il proprio benessere emotivo e le proprie capacità relazionali.
7° POTENZIAMENTO DEL FEEDBACK SUI RISULTATI	**feedback sui risultati:** riveste un ruolo primario nella didattica curricolare e strategico in quella inclusiva; l'insegnante deve fornire un feedback continuo, formativo e motivante e agire sul rinforzo positivo in itinere. La valutazione deve essere finalizzata al miglioramento dei processi di apprendimento e di insegnamento. È necessario personalizzare le forme di verifica nella formulazione delle richieste e nelle forme di elaborazione da parte dell'alunno.

Sezione Siena

RMT: IMPARARE INSIEME NEL RISOLVERE PROBLEMI[1]

Introduzione

Il poster illustra una raccolta di attività sperimentate nelle scuole afferenti alla Sezione che, utilizzando i materiali e la metodologia del Rally Matematico Transalpino, si inseriscono nelle progettazioni annuali e nei Piani di Offerta Formativa elaborati dalle scuole stesse. La presentazione, sintetizzata e composta all'interno di una forma a spirale, vuole indicare un possibile percorso di lavoro nel quale il RMT non si "aggiunge" alla quotidianità della vita scolastica ma di questa diventa parte integrante, accogliendo le istanze e i progetti che provengono dalle direttive Nazionali, contestualizzati nel Piano della Scuola, con il coinvolgimento non solo dell'insegnante di matematica ma di più insegnanti, di discipline diverse, nell'ottica dell'unitarietà del sapere e nel superamento delle divisioni strutturate per apprenderlo.

La spirale, che contiene le pagine di sintesi di ciascuna attività, è stata scelta per esprimere la continuità che lega le differenti esperienze e perché vi si possa leggere sia il loro approfondirsi che il loro espandersi nel tempo e nello spazio: dall'accoglienza in ingresso, si prosegue con le attività di classe in corso d'anno e con quelle programmate anche in vista della realizzazione di eventi, aperti alle famiglie e al territorio, passando per la continuità tra ordini di scuola consecutivi e giungendo allo scambio linguistico attuato tra allievi di nazionalità diversa.

1. Un "rompighiaccio" strepitoso: il Rally nel progetto di "Accoglienza"

(a cura di Stefania Massai e Rita Spatoloni)

Il passaggio dalla scuola primaria alla secondaria di 1° grado non è un passaggio di poco conto per allievi di 10/11 anni che si misurano con un rito carico di molti significati, non solo didattici. Aspettative, confronti, abbandoni, ritmi nuovi si legano a nuove richieste e a nuovi approcci. Accogliere i bambini in questo ordine scolastico è già prendere in carico la responsabilità di limitare le fratture con il passato e prestarsi ad essere ponti per il futuro. E tanto più si riesce ad adempiere a questa richiesta, tanto più proficui saranno i risultati.

Si è scelto di avviare l'anno scolastico proponendo agli allievi della classe prima (categoria 6) di cimentarsi nella soluzione di problemi del Rally.

L'attività non è solo un modo nuovo e diverso di affrontare la matematica, ma integra motivazioni didattiche specifiche come quella di permettere all'allievo di assumere un ruolo concretamente partecipativo nel momento di acquisizione delle sue esperienze precedenti, da collegare con l'opportunità di introdurre i nuovi contenuti e di strutturare attività di cooperazione per la formazione del gruppo-classe in un ambiente che tiene realmente conto del contesto. Non meno importante è il contributo che ne può trarre il docente di matematica il quale potrà progettare la sua azione coerentemente con gli stili di apprendimento individuati, nell'ottica di un insegnamento che tiene conto dell'epistemologia e dei contenuti disciplinari e si preoccupa anche di coniugarli con i processi cognitivi degli allievi.

- Presentazione dell'attività

La situazione iniziale della classe era composita: alcuni allievi avevano già partecipato ad edizioni RMT nella scuola primaria ma, in generale, non ne avevano conservato un ricordo entusiasmante e stimolante. Dalle descrizioni che questi bambini facevano agli altri compagni non emergevano troppo chiaramente gli obiettivi della "metodologia Rally": la centralità del processo, attraverso la spiegazione della soluzione, o l'organizzazione la più efficiente possibile del gruppo di lavoro, condizione indispensabile per la soluzione di tutti i problemi.

Sono stati proposti tre problemi, sottodimensionati o in linea con la categoria, per suscitare il senso di autoefficacia e la gratificazione della riuscita nel maggior numero di studenti. E, sempre per rafforzare questa immagine "rompighiaccio", si è scelto di ovviare anche al fattore tempo, mettendo a disposizione ben più dei 50 minuti previsti e permettendo di risolvere interamente ogni problema.

[1] Coordinatrici: Carla Crociani, Lucia Doretti, Francesca Ricci, Lucia Salomone,

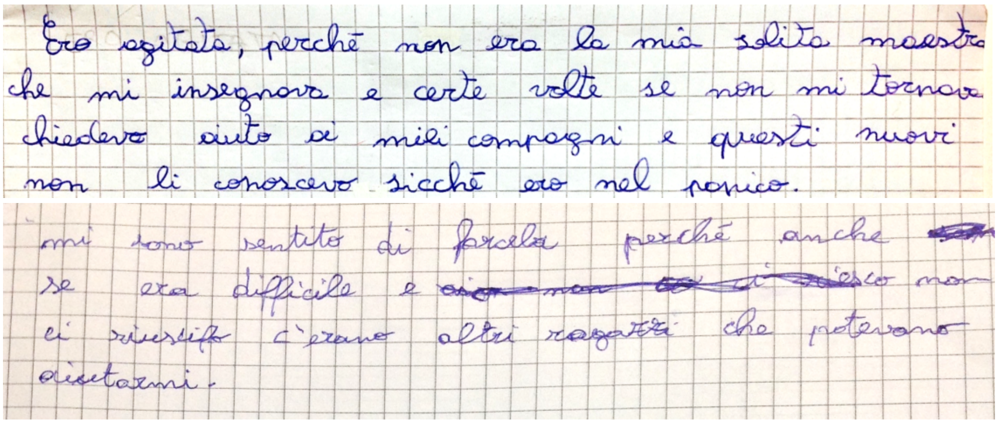
- I problemi individuati

1. ***POLLICINO E I SUOI FRATELLI*** *(Cat. 3) 6°RMT.I.01*
2. ***NUMERI SCONOSCIUTI*** *(Cat. 3,4) 6°RMT.I.03*
3. ***IL NASTRO DI NOE'*** *(Cat. 5,6) 11°RMT.F.08*

- Osservazioni dell'insegnante nel corso dell'esperienza

La proposta ha creato dapprima un senso di disorientamento, forse perché gli allievi non si aspettavano, alla scuola secondaria, un approccio che ai loro occhi appariva ludico. E' seguita però un'ora di attività intensa con una gamma di emozioni diverse che passavano dallo sconcerto, quando non riuscivano a comprendere il testo o ad individuare la strategia trattandosi di problemi diversi dallo standard abituale, per arrivare all'entusiasmo collettivo per la soluzione trovata grazie alla possibilità di lavorare in gruppo.

- Commenti degli allievi ad esperienza conclusa


Ero agitata, perchè non era la mia solita maestra che mi insegnava e certe volte se non mi tornava chiedevo aiuto ai mieii compagni e questi nuovi non li conoscevo sicchè ero nel panico.

mi sono sentito di farcela perché anche se era difficile e ~~...~~ non ci riuscifo c'erano altri ragazzi che potevano aiutarmi.

("Ero agitata, perché non era la mia solita maestra che mi insegnava e certe volte se non mi tornava chiedevo aiuto ai miei compagni e questi nuovi non li conoscevo, sicché ero nel panico."
"mi sono sentito di farcela perché anche se era difficile e non ci riuscivo c'erano altri ragazzi che potevano aiutarmi.")

- Conclusione dei docenti

L'esperienza conferma che proporre un'attività altamente socializzante, come risolvere collettivamente problemi matematici e richiedere di esplicitare per iscritto i procedimenti e le strategie utilizzate, agisce positivamente su diversi aspetti didattici: favorisce la conoscenza tra i soggetti coinvolti, è motivante, sviluppa il senso di responsabilità e facilita così la costituzione e il senso di appartenenza al gruppo-classe.

E' tuttavia necessario fare attenzione a calibrare bene la scelta dei problemi in ordine ad alcuni criteri:

- difficoltà, per non scoraggiare gli allievi;
- possibilità offerte dalla discussione, per conoscere i diversi stili cognitivi;
- contenuti matematici, per acquisire informazioni sulle conoscenze e abilità pregresse.

Questo momento sarà reso ancora più consistente se avrà un seguito nel corso dell'anno scolastico e sarà potenziato dal confronto e dalla condivisione di osservazioni e riflessioni sulle strategie risolutive messe in atto e sulle modalità di superamento delle difficoltà.

2. Se costruisco capisco, se capisco risolvo *(a cura di Angela Mecacci)*

Una frase risuona ripetutamente nelle scuole primarie e secondarie di primo grado: -*I miei ragazzi non sanno risolvere i problemi perché non capiscono il testo, non perché non "sanno matematica*"-. Senza entrare nel merito della questione, il dato di fatto è chiaro: se non si comprende il testo di un problema non si può neppure trovarne la soluzione.

Lavorare sulla comprensione di un testo è uno dei primi obiettivi a cui tutti gli insegnanti, indipendentemente dalla disciplina insegnata, dovrebbero tendere perché essa è base per la consapevolezza, l'analisi e l'interpretazione del mondo in cui gli allievi sono inseriti.

Con queste premesse, l'attività nella scuola primaria che qui si propone, riguarda essenzialmente un lavoro di progettazione, analisi, riscrittura e elaborazione di problemi matematici, valorizzandone sia la componente linguistica che quella matematica, nella prospettiva di migliorare nei nostri allievi la capacità di trovare soluzioni.

Il percorso di elaborazione dei problemi si snoda su quattro fasi operative, sempre con la modalità del lavoro di gruppo, iniziando dal creare un ambiente di apprendimento adatto ad offrire agli allievi una motivazione che possa stimolarli e coinvolgerli attivamente. Nel nostro caso abbiamo proposto ai bambini di inventare problemi "difficili" da inviare alle altre classi quinte (cat. 5) dello stesso plesso scolastico; una sorta di gara della "cattiveria matematica" che costringesse gli amici delle altre classi a misurarsi con problemi complessi. Non so perché, ma quando giochi la carta della competizione, il tipico " voi contro tutti", funziona sempre. L'interesse mio, come insegnante di matematica, era anche quello di scoprire cosa i miei alunni considerassero difficile in un problema matematico. Inoltre, ogni volta che si chiedeva di inventare o modificare un problema, si obbligavano i bambini a risolvere effettivamente i problemi prodotti: alcuni potevano essere risolti insieme alla lavagna, altri potevano essere "scambiati" fra i vari gruppi di lavoro. Solo così sarebbero emerse le imprecisioni, le contraddizioni, le lacune,… . E' importante non aver paura di "perdere tempo": la discussione sul perché il problema proposto da un gruppo sia risolvibile o non lo sia è uno dei più potenti motori di apprendimento per la classe.

- **Fasi dell'attività.**

<u>Fase 1: scelta del contesto e costruzione di storie</u>

Schema – guida:
- Dove avviene la storia?
- Chi o che cosa sono i protagonisti?
- In quale situazione si trovano?
- Quali problemi che derivano dalla situazione devono risolvere?

Sotto la supervisione dell'insegnante, i bambini, sempre organizzati in piccoli gruppi, costruiscono delle storie ricche di particolari stando attenti alla coerenza del testo e alla sintassi. Poi, sempre con l'aiuto dell'insegnante, riassumono i fatti principali e "riducono" le storie facendo attenzione a non togliere le informazioni essenziali.

<u>Fase 2: scelta dei dati matematici e scoperta di relazioni</u>

La parola chiave di questa fase è coerenza. Ecco che sulle mini storie che sono scaturite dal lavoro sul testo vengono inseriti dei dati matematici. I bambini devono scegliere dati che "possano andare d'accordo" con ciò di cui stanno parlando, controllare, via via, quali calcoli o ragionamenti scaturiscono dai dati scelti e tenere sempre presente le possibili domande che si vogliono fare. Si devono mettere bene in relazione i dati utili e stabilire ciò che si può scoprire con quei dati. E' facile perdere la strada!

<u>Fase 3: elaborazione delle domande</u>

In realtà questa fase di lavoro è stata svolta quasi contemporaneamente a quella della scelta dei dati. Per ciascun problema sono state scritte almeno 5 domande possibili e, successivamente, si sono scelte solo quelle che sembravano stimolanti. Durante questa fase l'espressione più frequente all'interno dei gruppi è stata: - E se facessimo…? E se aggiungessimo…? E se cambiassimo…? Un meraviglioso gioco del "e se…".

<u>Fase 4: analisi, controllo e valutazione dei problemi</u>

A conclusione della stesura finale dei problemi è stato chiesto di dare un titolo ad ogni testo, in perfetto stile Rally Matematico, e di leggere ai compagni di classe l'elaborato prodotto. In questa fase l'intera classe, guidata dall'insegnante, ha risolto i problemi e tutti i bambini si sono impegnati nel perfezionare, aggiustare o semplicemente commentare il lavoro degli altri. I testi prodotti sono stati inviati successivamente alle due classi parallele perché li" testassero" e riflettessero sulla loro qualità.

Eccone due esempi.

PROBLEMA 1: ***"IL CODICE SEGRETO DELLA BANCA"***

In una banca c'è una cassaforte lunga 2 metri e alta 1,25 metri che contiene il tesoro di uno sceicco arabo che possiede dei pozzi di petrolio. Il direttore della banca ha messo in cassaforte il tesoro il 2 gennaio del 2008 e ogni tre mesi cambia il codice segreto per evitare che alcuni ladri astuti possano rubarlo.

Quante volte il direttore ha cambiato il codice fino ad oggi?

La Banda Ladruncoli ha saputo da una soffiata che il direttore ha scelto per l'ultimo codice segreto tutte le cifre dispari prese una sola volta, in modo che la prima cifra sia il triplo della quarta e la quarta non sia il triplo della quinta. I ladri esultano di gioia perché hanno buone probabilità di scoprire il vero codice segreto. **Quale potrebbe essere? Elencate tutte le possibilità**.

PROBLEMA 2: "*VACANZE IN ALBANIA*"

Ashli, con *i suoi genitori e le due sorelle, ha deciso di passare le vacanze dai suoi nonni in Albania. Il giorno della partenza c'è tanto traffico e alle 10 circa, arrivati vicino a Trieste, sono costretti a fermarsi in fila sull'autostrada. Decidono così di uscire dall'autostrada e di fermarsi in un albergo sul mare dove mangeranno e trascorreranno tutto il giorno e la notte. L'albergo chiede 85 euro al giorno per una stanza a 5 letti (2 a castello), 20 euro a persona per il pranzo e 25 euro a persona per la cena, oppure offre una tariffa da 70 euro al giorno, a persona, tutto compreso.*

Qual è la formula più conveniente per la famiglia di Ashli? Spiegate il vostro ragionamento.

- Commenti degli allievi

1) "*L'idea della banca è venuta da uno del gruppo, ma è piaciuta anche agli altri. La storia doveva essere tipo "Arsenio Lupin" (i bambini vedono alla TV un cartone animato con il ladro protagonista) ma poi ci è piaciuta di più la banda dei Ladruncoli. Volevamo mettere un dato inutile e lo abbiamo messo subito all'inizio, anche se si capisce che non serve. La seconda parte, invece, è venuta in mente a Eva che si ricordava di un problema del Rally che faceva incastrare le cifre per trovare un codice. Ci sembra faccia "girare un po' la testa" con quel "triplo del… che NON è triplo del...". Poi bisogna sapere bene cosa significa cifre dispari*".

2) Ashli è una bambina albanese del gruppo e da lei nasce l'idea delle vacanze in Albania. Lei conosce bene la strada perché la percorre spesso da quando è venuta piccolissima in Italia. "*Abbiamo riscritto almeno 4 volte il testo perché ogni volta ci veniva in mente qualcosa di nuovo. Prima volevamo chiedere quanto avevano speso in tutto senza mettere l'opzione della pensione completa, ma era troppo facile. Allora abbiamo inserito prima due alberghi tra cui il babbo di Ashli avrebbe dovuto scegliere, poi la stesura finale ha previsto un unico albergo con le due possibilità. Secondo noi è abbastanza complicato, sia per il confronto che c'è da fare, sia perché quella camera da dividersi in 5 persone ci ha fatti sbagliare anche noi all'inizio*".

3. Gli allievi protagonisti: i problemi del Rally in bella mostra

(a cura di Patrizia Sabatini)

Il Rally Matematico Transalpino è molto conosciuto fra i docenti: quasi tutti ne hanno sentito parlare e in molti hanno partecipato almeno una volta con le proprie classi alla gara. Nonostante questa discreta popolarità, però, il Rally rimane per un certo numero di insegnanti solo una competizione di matematica, un'attività interessante, ma episodica e slegata rispetto alle necessità didattiche.

Partecipare al Rally ha per gli alunni ricadute positive che vanno oltre la gara in se stessa: la mobilizzazione di saperi matematici, la sperimentazione di nuove strategie risolutive, il lavoro di gruppo e la necessità di confrontarsi con i compagni, lo sforzo di argomentare la propria risposta,... . Anche il docente attento trae beneficio dall'esperienza: osservando il lavoro svolto dai propri allievi durante le prove di allenamento e gli elaborati, infatti, può ricavare preziose informazioni sulla propria efficacia didattica e identificare ostacoli all'apprendimento che difficilmente sarebbero emersi. Benefici ancora più significativi sono ottenibili se i problemi del Rally sono utilizzati come punto di partenza per un percorso didattico in classe, che permetta agli allievi di partecipare attivamente alla costruzione, o alla progressione, di saperi matematici.

L'esperienza che vorrei condividere tramite questo contributo riguarda l'attività incentrata su tre problemi del Rally in una classe prima di scuola secondaria di 1° grado (cat. 6) e si sofferma sugli obiettivi raggiunti con la loro successiva esposizione alla mostra di matematica di fine anno.

- In classe

L'attenta osservazione della disposizione dei cubetti nel problema "***DOPPIA SCALA***" *(Cat. 4,5,6) 10°RMT.I.07* permette agli alunni di scoprire alcune interessanti regolarità: 1) il numero di cubetti presenti nei vari livelli, a partire dall'alto della scala, segue la successione dei numeri dispari; 2) vi è una simmetria centrale e il conteggio dei cubetti presenti a destra e a sinistra della colonna al centro è uguale alla successione dei numeri naturali; 3) il numero totale di cubetti in una scala con n livelli è uguale a n^2 cubi. Si tratta quindi di un problema particolarmente ricco di spunti didattici da approfondire ulteriormente: gli allievi, ad esempio, scoprono i numeri triangolari e, così come Gauss da bambino, possono essere invitati a trovare come calcolare velocemente la somma dei primi 100 numeri naturali. Il problema è anche adatto per introdurre gli allievi alla conoscenza dei numeri quadrati e per approfondire, anche riprendendo l'argomento negli anni successivi, la differenza fra quadrati successivi: non solo si osserva che si genera la successione di numeri dispari, ma anche che $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$.

"***Quadrato da ricoprire***" *(Cat. 3,4,5) 12°RMT.I.05* è stato usato durante alcune ore di alternativa alla religione cattolica, per lavorare con quattro bambini di origine straniera e con difficoltà medio - gravi in quasi tutte le materie. La scelta è ricaduta su questo problema per vari motivi: la categoria leggermente più bassa rispetto a quella relativa all'età degli alunni coinvolti e la risoluzione anche tramite manipolazione delle 7 figure ritagliate sul quadrato, permettono agli allievi di confrontarsi con un problema non banale, ma che garantisce loro la sperimentazione di un'attività di successo, con incremento della propria autostima e fiducia nei confronti del docente e della materia. Il problema permette di consolidare il concetto di misura dell'area del quadrato, di progredire nella costruzione del concetto di equiestensione e induce gli alunni a provare a traslare, ruotare, ed effettuare simmetrie assiali; in ambito aritmetico, è stimolata la scomposizione additiva del numero 16.

La sperimentazione in classe di "***Tre amici e i loro disegni***" *(Cat. 4,5,6) 20°RMT.II.06* è per i docenti una miniera di riflessioni sugli ostacoli all'apprendimento e sui limiti delle strategie messe in atto dagli allievi imputabili al contratto didattico finora conosciuto. L'identificazione della figura di Anna necessita un confronto tra aree e perimetri delle figure proposte e l'assenza di dati numerici, così come di formule note da applicare per il calcolo delle aree, crea negli allievi smarrimento. Il confronto tra le aree, che può effettuarsi con un semplice conteggio di quadretti e mezzi quadretti, è generalmente affrontato ricorrendo alla misura dell'area come multiplo di un quadretto di area 0,49 cm², determinato a sua volta dall'elevamento alla seconda della misura del lato del quadretto (l = 0,7 cm) ottenuta con il righello. Per il calcolo dell'area dell'ottagono, ritenuto erroneamente regolare, sono frequenti frasi del tipo: "*Ma com'è la formula dell'area dell'ottagono?*". L'aspetto più importante che emerge riguarda, però, la difficoltà di tutti i miei alunni nel riconoscere, nel confronto tra perimetri, che esistono segmenti di due diverse lunghezze: quelli corrispondenti al lato del quadretto della griglia e quelli corrispondenti alla diagonale del quadretto. La rilevazione di questo ostacolo mostra come il concetto di distanza non sia ancora consolidato negli alunni di categoria 6 e permette al docente di intraprendere delle azioni didattiche mirate, come l'uso di modelli dinamici con stanghette articolabili o elastici e il ricorso a problemi del Rally (utilizzando eventualmente anche una griglia ingrandita) che stimolano il confronto tra segmenti come in "*Attraverso la quadrettatura*" e "*Ritaglio di triangoli*"[2].

- Alla mostra

L'esposizione di matematica è l'evento che chiude l'anno scolastico, preziosa occasione per il docente e per gli allievi, che dà nuova forma alle attività didattiche facendo emergere significati che potevano essere sfuggiti nello svolgimento delle lezioni. La mostra richiede la partecipazione non solo degli studenti, ma anche dei visitatori: non è né un mero percorso concepito per visionare il materiale prodotto (come in una tradizionale mostra), né un semplice ascolto delle attività svolte a scuola. L'adulto, infatti, ha un ruolo attivo: viene immerso nella situazione problematica e "obbligato" a calarsi nei panni dell'allievo. Le domande *ad hoc* degli allievi, l'uso dei modelli dinamici, dei cartelloni, del materiale predisposto, stimolano la ricerca delle soluzioni, con un percorso che prevede la scoperta di regolarità, la messa in atto di strategie inattese... e l'imbattersi, talvolta, negli stessi errori dei figli![3] In questo gioco di ruoli, dove l'unico vero spettatore è il docente, le difficoltà vissute dagli adulti fanno sentire importante l'alunno, che diventa consapevole di aver fatto proprie determinate conoscenze e riconosciuto relazioni niente affatto banali. La mostra diventa così un'esperienza coinvolgente che permette anche agli alunni che vivono difficoltà d'apprendimento e situazioni socio-familiari problematiche di accrescere la propria autostima, la capacità di relazionarsi con gli adulti e la fiducia nei confronti della matematica, dell'insegnante e più in generale dell'istituzione scolastica. L'avvicinarsi del giorno dell'esposizione, avvertito dagli studenti come un'incombenza che improvvisamente si materializza, ha inoltre il potere di motivare straordinariamente tutti ad un lavoro serio e preciso: è per questo che anche gli studenti solitamente più approssimativi, che certo non vogliono fare brutte figure, si dedicano negli ultimi giorni con passione e determinazione alla realizzazione dei materiali e alla rielaborazione ed esplicitazione dell'attività svolta in classe.

- Conclusioni

La forte motivazione che si crea negli alunni consente un sensibile miglioramento delle loro capacità espositive e della padronanza dei termini specifici, il cui uso a scuola rischia altrimenti di essere relegato a definizioni da mandare a memoria. E' in questa fase che si avvia un processo metacognitivo dove lo studente si interroga su quanto profonda e chiara sia stata la sua comprensione dell'argomento; capire, per poter reggere il confronto con i visitatori della mostra, diventa allora un'urgenza, un obiettivo da raggiungere presto e bene, ricorrendo all'aiuto del docente e soprattutto dei compagni. Durante i preparativi per la mostra si consolidano i rapporti e si

[2] Cfr.: Crociani C., Doretti L., Grugnetti L., 'Difficoltà nel confronto di lunghezze', *La Gazzetta di Transalpino*, N° 2, 2012, 71-84.

[3] Ad oltre venti adulti sono state consegnate una copia del problema "Tre amici e i loro disegni" ed una penna per disegnare, come richiesto, una figura con la stessa area e lo stesso perimetro di quella di Anna: ci sono riusciti solo in tre.

appianano le divergenze: lavoro di squadra, incoraggiamento e aiuto reciproco sono fondamentali per legare gli argomenti della mostra in un percorso didattico gradevole e significativo.

Tra le tante foto che documentano l'esperienza, questa è la mia preferita non solo perché ritrae efficacemente l'impegno messo dagli studenti: un genitore affronta la stessa difficoltà avuta in classe dagli alunni nel riconoscere le diverse lunghezze dei lati; due studenti lo aiutano, il primo con la riga, il secondo con un modello dinamico in cui la maggiore lunghezza della diagonale del quadrato rispetto al lato è osservabile e può essere persino "sentita" nella maggiore tensione dell'elastico.

4. La Torta *(a cura di Fabio Brunelli e Fabiana Ferri)*

Ci siamo chiesti come poter documentare l'argomento proposto dal Convegno dell'ARMT 2015 a Sedilo: "*Imparare insieme nel risolvere problemi*" all'interno della nostra pratica didattica. Abbiamo lavorato sullo stesso problema in due classi: quarta primaria (cat. 4) e prima secondaria di primo grado (cat. 6). Abbiamo scelto un problema di geometria del RMT 2001, perché ci è parso adatto al livello scolastico e particolarmente ricco di spunti per la discussione. Un altro aspetto interessante del problema è il possibile utilizzo di strumenti diversi, righello, compasso, goniometro, forbici per la ricerca della soluzione.

Nel nostro lavoro abbiamo tenuto presente l'asse concettuale: Problem Solving – Argomentare – Conoscenze Matematiche. Tale asse, a nostro parere, viene ben realizzato nell'attività di risoluzione problemi da soli, in coppia o in piccolo gruppo, in modo particolare a partire dai testi proposti dal Rally Matematico Transalpino.

LA TORTA *(Cat. 4, 5, 6) 9°RMT.I.06*

Classe prima scuola secondaria di primo grado (categoria 6)

Gli alunni presenti in classe il giorno in cui è stata svolta l'attività erano 23. Il problema è stato dato singolarmente allo scopo di avere il maggior numero di protocolli differenti. Qualche accenno di collaborazione tra compagni di banco è stato tollerato per non guastare il buon clima di lavoro e di interesse che si era creato tra gli allievi.

Risposta corretta 10, gli amici invitati da Martina	16 allievi
Risposta errata 11 amici (che potremmo definire il distrattore del problema, essendo 11 le fette totali)	3 allievi
Risposta errata 9 amici	2 allievi
Risposta errata 12 amici	1 allievo
Risposta errata 7 amici	1 allievo
Totale	23

Dal conteggio delle risposte corrette ed errate si potrebbe concludere frettolosamente che 16 allievi hanno lavorato bene e 7 hanno lavorato male. L'esperienza di anni di utilizzo dei problemi del Rally Matematico Transalpino ci ha insegnato a non fermarsi alla valutazione dei risultati, bensì a porre grande attenzione ai procedimenti e alle spiegazioni-giustificazioni apportate dai ragazzi. Abbiamo letto attentamente tutti i protocolli e anche proceduto a una decina di interviste. Alcune risposte esatte sono apparse casuali, perché non accompagnate da corrette argomentazioni matematiche; al contrario alcune risposte errate sono state procedute da un lavoro e un metodo interessanti.

Protocolli errati

Anche gli alunni che hanno sbagliato la procedura meritano qualche citazione, infatti alcuni di essi hanno comunque svolto un "lavoro geometrico" con un certo impegno e precisione, come chi ha diviso il cerchio in otto parti simmetriche, oppure in dodici fette uguali, sfruttando la costruzione dell'esagono inscritto in un cerchio (cosa che non tutti gli allievi sanno fare all'inizio della classe prima). Qualcuno ha costruito ingegnosamente copie della fetta di torta del testo e le ha incollate una accanto all'altra, per ricostruire materialmente la sagoma della torta; a causa di una serie di imprecisioni il numero totale delle fette risulta 10, dal quale peraltro si sottrae correttamente la fetta di torta di Martina.

Protocolli corretti

I procedimenti risolutivi del problema utilizzati dagli allievi sono sostanzialmente quattro, ai quali abbiamo cercato di dare dei nomi:

1. Metodo della *corda riportata* o del *poligono inscritto*

Il metodo usato da Rossella per risolvere questo problema potrebbe essere definito il metodo del "poligono inscritto". Si tratta di un metodo seguito anche da altri, che consiste nel disegnare il cerchio che rappresenta la torta, misurare con il righello la corda individuata dall'angolo che rappresenta la fetta di Martina, infine riportare con il righello lungo la circonferenza tante corde uguali formando un poligono inscritto nel cerchio. Congiungendo i vertici del poligono con il centro della torta nascono le fette richieste dal problema. Alla fine Rossella sbaglia, perché risponde "11 amici" invece che "10". Tuttavia il suo procedimento è tra i più precisi e corretti della classe.

2. Metodo del *modello di fetta riportato*

Leonardo, come altri compagni, ha ritagliato il modello di fetta dal testo del problema e l'ha riportato più volte dentro il cerchio individuato dalla torta.

3. Metodo dell'*angolo riportato* o del *goniometro*

Gli allievi che hanno seguito questo metodo hanno misurato con il goniometro l'angolo individuato dalla fetta campione e poi lo hanno riportato diverse volte intorno allo stesso vertice.

4. Metodo della *divisione di contenenza*

Questo metodo è stato applicato da Lorenzo, alunno di livello alto: misura dell'angolo, 33°; divisione 360°: 33° = 11 fette di torta; sottrazione 11 – 1 = 10 fette, una per ogni amico di Martina. Nel suo protocollo si osserva brevità, sintesi ed eleganza. Alla fine è proprio vero: il buon matematico è pigro nei calcoli e sceglie le strade più semplici, anche se a volte un poco astratte!

Classe Quarta Scuola Primaria (categoria 4)

Il problema è stato risolto lavorando in piccoli gruppi (6 gruppi: 5 formati da 4 alunni e uno da 5 alunni) e quella mattina era presente la classe al completo: 25 alunni. I bambini amano risolvere problemi lavorando in gruppo e questo amore è nato proprio risolvendo i problemi del Rally. All'inizio del lavoro, ogni gruppo si suddivide i compiti e ogni alunno porta il proprio contributo al gruppo a cui appartiene.

Già dalla classe seconda proponevo loro alcuni testi del Rally semplificati. Inizialmente gli allievi non riuscivano a lavorare in gruppo, perché ogni "singolo" voleva imporre la propria idea. Quando hanno imparato a condividere le idee e a collaborare, hanno imparato anche a divertirsi e si sono appassionati a risolvere problemi.

Tre gruppi (12 bambini) hanno dato la risposta corretta (10, numero di amici invitati da Martina): hanno utilizzato la fetta di torta come unità campione e hanno ricostruito l'intera torta, disegnandola fetta per fetta. Due gruppi (8 bambini) hanno dato la risposta sbagliata 11 perché hanno considerato il numero di fette di torta e non hanno risposto alla domanda del problema, ma anche in questo caso, prima ritagliando una fetta e poi disegnando, hanno ricostruito la torta intera e tentato anche di misurare l'ampiezza di una fetta di torta, idea poi abbandonata. Un gruppo (5 bambini) ha risposto 9 amici, perché l'unità campione, la fetta di torta, era stata ritagliata male (più grande).

5. Dal problema RMT... al gioco *(a cura di Antonella Castellini e Alfia Lucia Fazzino)*

L'importanza assunta negli ultimi anni dalla didattica laboratoriale, che richiede un ruolo attivo dello studente nella costruzione della propria conoscenza, ha favorito l'ideazione di situazioni didattiche legate al gioco, ritenuto anche da Piaget un modo in cui il bambino "riesce a stabilire relazioni e a comunicare più facilmente con gli altri". Più precisamente facendo riferimento a E. Claparède: "***Un bambino che non sa giocare è "in fieri" un adulto non solo incapace di pensare e ragionare, ma anche di agire responsabilmente***"[4].
Quindi il gioco, anche nella fase adolescenziale, diventa uno strumento didattico importante che favorisce l'apprendimento perché facilita l'acquisizione di regole e la comprensione di concetti, oltre a migliorare i rapporti con gli altri e al contempo aiutare a evidenziare sia i propri limiti che le proprie capacità.
Però, riconoscere alla matematica, considerata materia difficile, noiosa e rigida, un aspetto ludico non è proprio facile e immediato; riflettendoci invece, si comprende come il gioco richieda di analizzare la situazione ricercando strategie diverse sempre nel rispetto dei vincoli imposti dal gioco stesso... proprio come nel risolvere una situazione problematica.
L'aspetto formativo appare poi ancora più evidente: accresce l'interesse, stimola la partecipazione, favorisce l'argomentare e il congetturare fra compagni.
Per i motivi esposti, da anni ormai, inseriamo delle attività ludiche nel nostro percorso didattico perché possano avere un effetto positivo sull'apprendimento della matematica.
L'entusiasmo sempre crescente dei nostri alunni durante un gioco matematico, la partecipazione attiva anche degli alunni più in difficoltà, ha portato noi insegnanti a cercare, studiare e realizzare giochi vecchi e nuovi, oppure a trasformare in gioco semplici situazioni problematiche anche per introdurre un nuovo argomento.
Quest'anno abbiamo pensato di trasformare un "buon" problema del Rally in un "ottimo" gioco ottenendo così un valido strumento didattico sia per introdurre un nuovo argomento che per recuperare, consolidare o potenziare alcuni concetti.
La costruzione di ogni singolo gioco ha richiesto varie fasi. La prima è stata la ricerca dei problemi che avessero caratteristiche tali da poter essere trasformati in gioco. Essendo ormai legate al Rally Matematico da circa venti anni, ne avevamo già alcuni ben chiari in mente, ma ci siamo ugualmente messe a leggere e rileggere testi per riuscire a intravedere questa nuova potenzialità fra le "righe". Questa fase si è rilevata per noi docenti molto significativa in quanto ci ha permesso di svolgere una diversa analisi a priori e di riflettere sulle potenzialità "nascoste" di un problema, cercando inoltre di lavorare sui vari ambiti delle Indicazioni Nazionali.
La seconda fase è stata la progettazione: insieme agli alunni abbiamo esaminato i testi cercando le modalità per trasformarli in gioco. Questa è stata una parte delicata perché in alcuni casi abbiamo dovuto "rovesciare" il problema e partire dalla soluzione per arrivare alla situazione iniziale. Inoltre abbiamo stabilito quali materiali usare, le dimensioni, i colori ecc. La fase successiva è stata ovviamente quella della realizzazione concreta. Si può pensare questa parte come semplice rispetto alle precedenti, ma non è così. Ha richiesto, da parte degli allievi, un uso consapevole dei vari strumenti, ha messo in luce proprietà di tipo aritmetico e geometrico, ha richiesto pazienza e precisione oltre ad aver sviluppato il senso estetico nella ricerca di colori e nella presentazione stessa del gioco.
L'ultima fase è stata quella non meno importante di come scrivere in modo sintetico le regole e lo scopo del gioco. La realizzazione dei "manifesti" (il nome dato dagli alunni a questi volantini esplicativi) non è stata immediata perché gli stessi alunni si rendevano conto di non essere stati molto chiari nella esplicitazione, ed ha richiesto diversi tentativi.
I giochi sono stati presentati durante l'annuale **Esposizione di Matematica** che la nostra scuola realizza dal lontano anno 2000; in questa occasione gli alunni presentano ai visitatori le loro realizzazioni ricorrendo a spiegazioni attraverso l'uso dei materiali.

[4] Cfr.: Claparède E., *L'Education fonctionnelle*, 1931

16° RMT Prova II – marzo/aprile 2008 ©ARMT 2008 12

11. NUMERI NASCOSTI (Cat. 5, 6, 7)

Alberto lancia una sfida al suo amico Giovanni. "Guarda la tabella: ogni simbolo corrisponde ad un numero intero, formato da una o da due cifre. Uno stesso simbolo corrisponde sempre ad uno stesso numero!

La somma dei numeri di ogni riga è scritta nell'ultima casella a destra, la somma dei numeri di ogni colonna è scritta nell'ultima casella in basso.

Quali sono i numeri rappresentati dai quattro simboli? "

★	△	★	□	29
○	★	○	○	30
△	□	△	△	13
□	□	★	○	20
23	18	34	17	

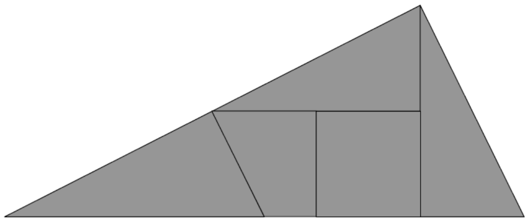
Aiutate Giovanni a trovare questi numeri.

Spiegate il vostro ragionamento.

16° RMT Finale maggio 2008 ©ARMT 2008 4

4. QUADRATO O RETTANGOLO? (Cat. 3, 4, 5)

Ecco un puzzle di cinque pezzi, a forma di triangolo.

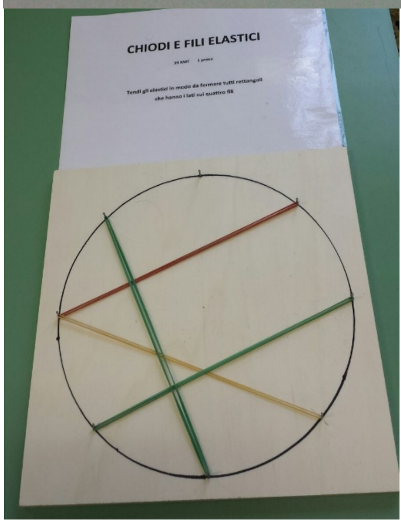


Francesca dice che si può formare un puzzle quadrato con questi cinque pezzi, senza che si sovrappongano e senza lasciare spazi vuoti.

Giulia dice che, con questi cinque pezzi, si può formare anche un rettangolo non quadrato.

Provate a costruire un quadrato con questi cinque pezzi e mostrate come avete fatto.

Poi provate a costruire un rettangolo non quadrato e spiegate come avete fatto.



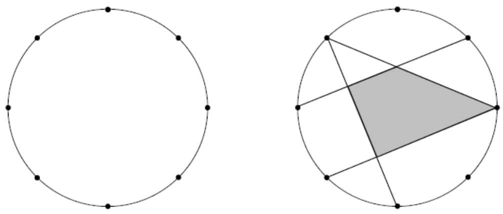


figura 1 figura 2

Sul bordo di un disco sono stati piantati in maniera regolare 8 chiodi. Tra due chiodi consecutivi c'è sempre la stessa distanza. (si veda la figura 1).

Si dispone di quattro fili elastici che è possibile tendere tra due chiodi.

Lo scopo è quello di formare rettangoli (che possono essere anche quadrati) aventi i lati su quattro fili.

Giulio ha teso i quattro fili (si veda figura 2), ma non ha raggiunto lo scopo: ha ottenuto un trapezio!

Trovate tutti i rettangoli (anche quadrati) differenti formati dai quattro fili.

Disegnate tutte le figure che avete trovato. Se avete due figure aventi le stesse dimensioni, disegnatene una sola!

*Giocare bene significa avere gusto per la precisione, amore per la lingua, capacità di esprimersi con linguaggi non verbali; significa acquisire intuizione ,razionalità, abitudine alla lealtà e alla collaborazione***.** (L.Lombardo Radice)[5]

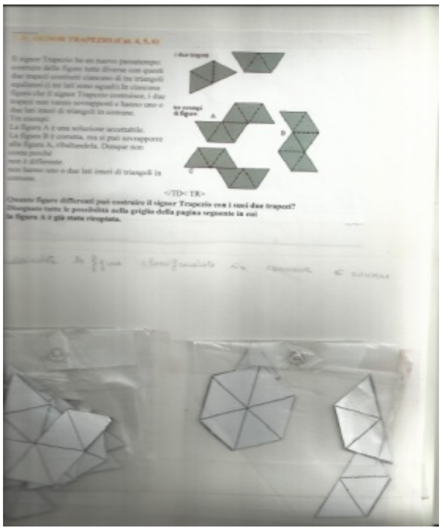
[5] Cfr.: Lombardo Radice L., *Il giocattolo più grande,* Giunti Marzocco, 1979, p. 104.

6. Continuità: i "grandi" della scuola secondaria... somministrano ai "piccoli" della primaria i problemi del Rally" *(a cura di Elisabetta. Gori, Giuseppina Righi, Anna Urbani)*

Gli obiettivi didattici e formativi dell'esperienza oltre a quelli già indicati nel progetto del RMT, sono stati:

- confrontarsi con i compagni della classe o con quelli più grandi;
- saper ascoltare le opinioni altrui per discuterne democraticamente la validità.

Inizialmente sono stati effettuati incontri fra le insegnanti di scuola primaria e secondaria per concordare testi, orari e metodi.



Gli allievi di categoria 8 hanno successivamente affrontato i problemi scelti e ne hanno tradotti alcuni con la costruzione di opportuno materiale che permettesse una buona ed immediata visualizzazione, per potervi lavorare con i più piccoli.

I grandi, seguendo la metodologia della *Peer Education*[6], hanno guidato i più piccoli in ogni fase del lavoro, dalla decodifica del testo, all'organizzazione del materiale e alla ricerca dei percorsi risolutivi per tutte le prove di allenamento.

Inutile dire che i piccoli hanno manifestato interesse, entusiasmo e viva partecipazione.

Riportiamo di seguito il messaggio inviato dalla maestra della classe quinta di scuola primaria (cat. 5), dopo la prima prova del Rally:

"*Stamani i bambini della classe 5^ hanno fatto la prima prova "ufficiale" del RMT con un entusiasmo che non avevo mai visto. Da quando siete venuti nei giorni scorsi nella mia classe, gli alunni non vorrebbero fare altro che questo. Sono rimasti colpiti dai ragazzi di terza e dall'esperienza in generale. In pochi incontri con voi hanno già imparato a collaborare e ad aiutarsi ed è stato quasi commovente vedere come i bambini si siano dati da fare per aiutare chi ne aveva bisogno: non era mai successo!*"

7. RMT: matematica e scambi linguistici *(a cura di Brunella Brogi)*

"*… Imparare non è solo un processo individuale. La **dimensione sociale dell'apprendimento** svolge un ruolo significativo. In tal senso, molte sono le forme di interazione e collaborazione che possono essere introdotte […] sia all'interno della classe, sia attraverso la formazione di gruppi di lavoro con alunni di classi e di età diverse. […] Nell'apprendimento delle lingue la **motivazione** nasce dalla naturale attitudine degli alunni a comunicare, socializzare, interagire e dalla loro naturale propensione a "fare con la lingua". […] Si potranno inoltre creare situazioni in cui la lingua straniera sia utilizzata, in luogo della lingua di scolarizzazione, per promuovere e veicolare apprendimenti collegati ad ambiti disciplinari diversi. […]In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il **laboratorio**, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è **attivo** […] **discute** e **argomenta** le proprie scelte … ".*[7]

Sulla base della personale esperienza di chi scrive e alla luce di questi suggerimenti metodologici, si è organizzata un'attività di apprendimento di lingue comunitarie, utilizzando i problemi del RMT.

La scuola secondaria di I grado "Il Pontormo" di Carmignano (Prato) è gemellata con il collège "Jules Verne" di Déville lès Rouen (Francia). Ad anni alterni, un gruppo di alunni di una delle due scuole accoglie un corrispondente gruppo di alunni dell'altra. Nel marzo 2015, 23 alunni francesi del livello scolare quatrième e troisième[8], sono stati ospitati per alcuni giorni da altrettanti alunni italiani delle classi seconde e terze. In questa occasione, e per la prima volta, con la collega che si occupa dell'organizzazione del gemellaggio, l'insegnante di francese prof.ssa Gloria Sementilli, si è sperimentato un ***laboratorio*** nel quale i 46 alunni sono stati invitati a

---

[6] La *Peer Education* (letteralmente *"Educazione tra Pari")* identifica un strategia educativa volta ad attivare un processo spontaneo di passaggio di conoscenze, di emozioni e di esperienze da parte di alcuni membri di un gruppo ad altri membri di pari *status*. I destinatari vengono considerati in modo completamente nuovo: non più utenti da istruire perché carenti di informazioni, ma bensì soggetti portatori di risorse, conoscenze, capacità, potere (cfr., ad es.: Pellai A., Rinaldin V., Tamborini, B., *Educazione tra pari. Manuale teorico-pratico di empowered peer education*, Erickson, Trento, 2002).

[7] *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Annali della Pubblica Istruzione (2012), pagg. 34, 46, 47, 60.

[8] La classe "quatrième" del collège corrisponde alla classe terza della scuola secondaria di I grado (cat. 8), la "troisième" corrisponde alla classe prima della scuola secondaria di II grado (cat. 9).

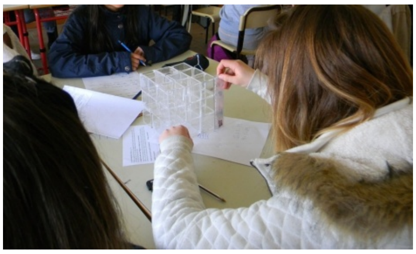
dividersi in due “classi” miste, formate da allievi di diversa nazionalità, diverso livello scolare e a sfidarsi nella soluzione di problemi matematici, secondo le modalità adottate durante una vera gara del RMT.

Due sono stati i compiti assegnati, oggetto della nostra sperimentazione:

- compito linguistico: ogni gruppo di alunni doveva lavorare sull’enunciato del problema scritto in lingua francese, mentre la risposta doveva essere scritta in lingua italiana.
- compito matematico: tra gli alunni italiani, soltanto alcuni appartenevano a quelle classi dell’istituto che abitualmente partecipano al RMT. Tra gli alunni francesi nessuno conosceva questa modalità di lavoro.

Il rischio era di fornire del materiale di studio non accessibile agli alunni, relativamente agli strumenti linguistici e ai saperi matematici posseduti da ciascuno. Al fine di ***motivare*** gli studenti, di evitare atteggiamenti rinunciatari, dietro suggerimento della prof.ssa Lucia Doretti, si è scelto di proporre i problemi della categoria più bassa tra quelle utilizzabili, considerando il loro livello scolare (categorie 7, 8, 9). Tuttavia, oltre alla comprensione del testo, occorreva anche favorire la ***discussione*** e l’***argomentazione*** sui contenuti matematici; quindi si voleva evitare di fornire materiale troppo semplice sul piano cognitivo e pertanto poco stimolante. Sono stati scelti i problemi previsti per la categoria 7 della I prova del 15° RMT.

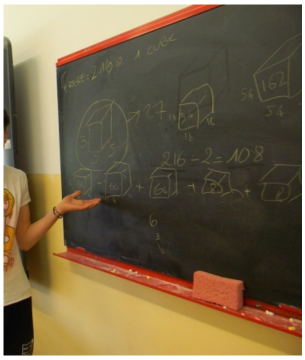
L’esperienza era nuova per tutti, docenti e discenti, ed è risultata decisamente dinamica e coinvolgente.



All’interno dei gruppi di lavoro, gli allievi hanno ***attivato*** varie strategie per eseguire i compiti assegnati, finalizzate alla comprensione dell’enunciato, al confronto sul piano linguistico, sui contenuti disciplinari e alla comunicazione dei processi risolutivi. Dove la conoscenza lessicale non permetteva un’adeguata comunicazione verbale, gli alunni sono ricorsi a rappresentazioni grafiche, al linguaggio del corpo con gesti mimici di supporto ai vocaboli che il compagno sembrava aver difficoltà a comprendere, all’uso di modelli concreti. Alcuni alunni

SI

hanno fatto ricorso all’uso di un vocabolario, altri hanno utilizzato come interprete il compagno con maggiori competenze linguistiche, anche se appartenente a un diverso gruppo di lavoro. Molti ragazzi francesi, pur non avendo la difficoltà degli italiani nel leggere l’enunciato, hanno avuto la necessità di essere rassicurati sulla corretta comprensione del testo evidenziando, tuttavia, di non accedere sempre al compito matematico.

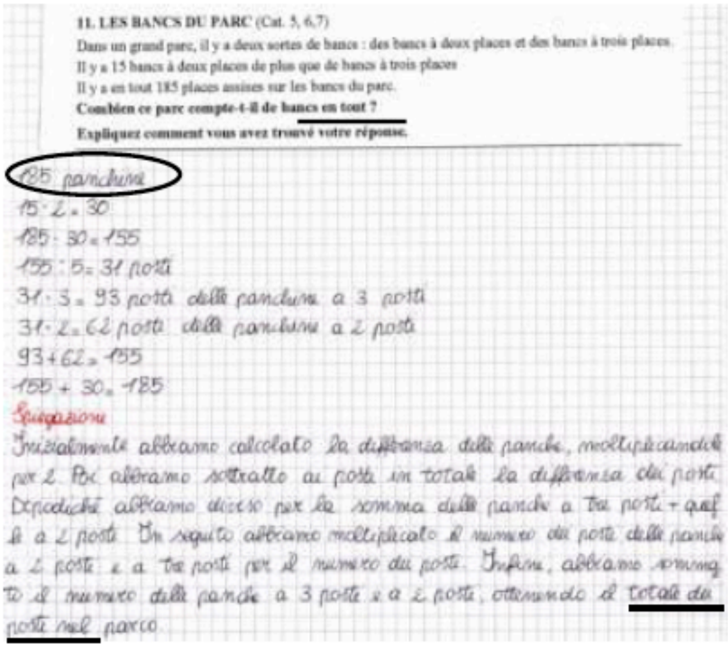


Un gruppo si è pian piano spostato dal banco alla lavagna, come se la superficie dei fogli a disposizione non fosse sufficiente per accogliere la discussione che stava

Alcuni problemi non sono stati risolti, ma sono stati comunque oggetto di viva discussione, come si vede dai fogli di brutta copia diventando sempre più animata.

In taluni casi l’enunciato non è stato compreso o ne è stata fatta una traduzione errata.

Nel problema 11, ***LE PANCHINE DEL PARCO***, ad esempio, confrontando gli elaborati scritti nelle due lingue, sembra che sia stata fatta confusione tra “panchine” *(bancs)* e “posti a sedere” *(places)*, per cui viene fornita come risposta il numero di posti a sedere invece di quello delle panchine, come richiesto.



11. LES BANCS DU PARC (Cat. 5, 6,7)

Dans un grand parc, il y a deux sortes de bancs : des bancs à deux places et des bancs à trois places.

Il y a 15 bancs à deux places de plus que de bancs à trois places

Il y a en tout 185 places assises sur les bancs du parc.

Combien ce parc compte-t-il de bancs en tout ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

185 panchine

15 · 2 = 30

185 : 30 = 155

155 : 5 = 31 posti

31 · 3 = 93 posti delle panchine a 3 posti

31 · 2 = 62 posti delle panchine a 2 posti

93 + 62 = 155

155 + 30 = 185

Spiegazione

Inizialmente abbiamo calcolato la differenza delle panche, moltiplicandole per 2. Poi abbiamo sottratto ai posti in totale la differenza dei posti. Dopodiché abbiamo diviso per la somma delle panche a tre posti + quelle a 2 posti. In seguito abbiamo moltiplicato il numero dei posti delle panche a 2 posti e a tre posti per il numero dei posti. Infine, abbiamo sommato il numero delle panche a 3 posti e a 2 posti, ottenendo il totale dei posti nel parco.

185 places

15 · 2 = 30

185 - 30 = 155

155

155 / 5 = 31

31 · 3 = 93

31 · 2 = 62

93 + 62 = 155

155 + 30 = 185

(Spiegazione. Inizialmente abbiamo calcolato la differenza delle panche, moltiplicandole per 2. Poi abbiamo sottratto ai posti in totale la differenza dei posti. Dopodiché abbiamo diviso per la somma delle panche a tre posti + quelli a 2 posti. In seguito abbiamo moltiplicato il numero dei posti delle panche a 2 posti e a tre posti per il numero dei posti. Infine, abbiamo sommato il numero delle panche a 3 posti e a 2 posti, ottenendo il totale dei posti nel parco)

C'è chi ha avuto bisogno di trascrivere l'enunciato in italiano, come per il problema n. 17 "*La nuit de l'excursion*" e chi ha discusso all'interno del gruppo, ma scrivendo ciascuno nella propria lingua.

I risultati, anche se non molto brillanti (una "classe" ha ottenuto 8 punti, l'altra 13), hanno validato un'esperienza soddisfacente, che ha permesso di sperimentare la ***dimensione sociale dell'apprendimento*** e dell'*imparare insieme nel risolvere problemi*.

Appendice - Testi dei problemi citati

POLLICINO E I SUOI FRATELLI (Cat. 3) 6°RMT.I.01

Pollicino e i suoi quattro fratelli camminano nel bosco, tutti in fila. Pollicino è l'ultimo della fila e lascia cadere le briciole di pane per ritrovare la strada di casa.

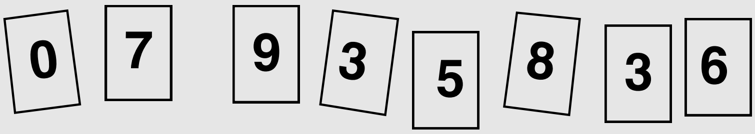
Andrea è davanti a Bernardo.

Giuseppe è davanti a Mario.

Tra Andrea e Mario c'è uno dei fratelli.

In quale ordine possono camminare Pollicino e i suoi fratelli? Spiegate il vostro ragionamento.

NUMERI SCONOSCIUTI (Cat. 3, 4) 6°RMT.I.03



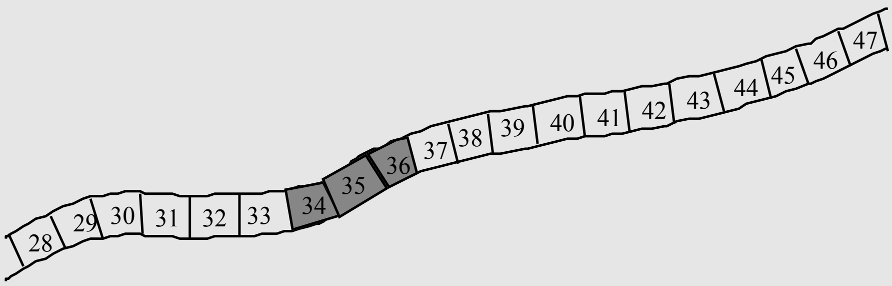
Utilizzando tutte le carte, una sola volta ciascuna, dovete formare dei numeri in modo che:

- siano compresi tra 25 e 62
- due di loro non siano mai consecutivi (cioè la loro differenza sia sempre maggiore di 1).

Quali sono questi numeri? Spiegate come li avete trovati.

IL NASTRO DI NOE' (Cat. 5, 6) 11°RMT.F.08

Noè ha un nastro con i numeri naturali da 1 a 100. Colora la parte con i numeri consecutivi 34, 35 e 36.



Addiziona poi questi tre numeri e trova come somma 105 che è proprio la sua età.

Noè può ottenere ancora 105 addizionando altri numeri consecutivi del nastro?

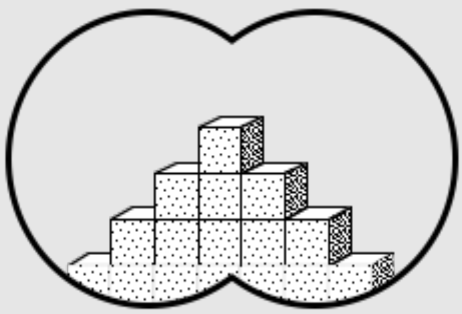
Scrivete tutte le vostre soluzioni e i calcoli che avete fatto.

DOPPIA SCALA (Cat. 4, 5, 6) 10°RMT.I.07

Sofia ha costruito una doppia scala regolare di 1 metro di altezza con cubetti di 5 cm di lato.

Il suo amico Andrea, dalla finestra del palazzo di fronte, osserva la costruzione con il binocolo.

Ecco ciò che vede:

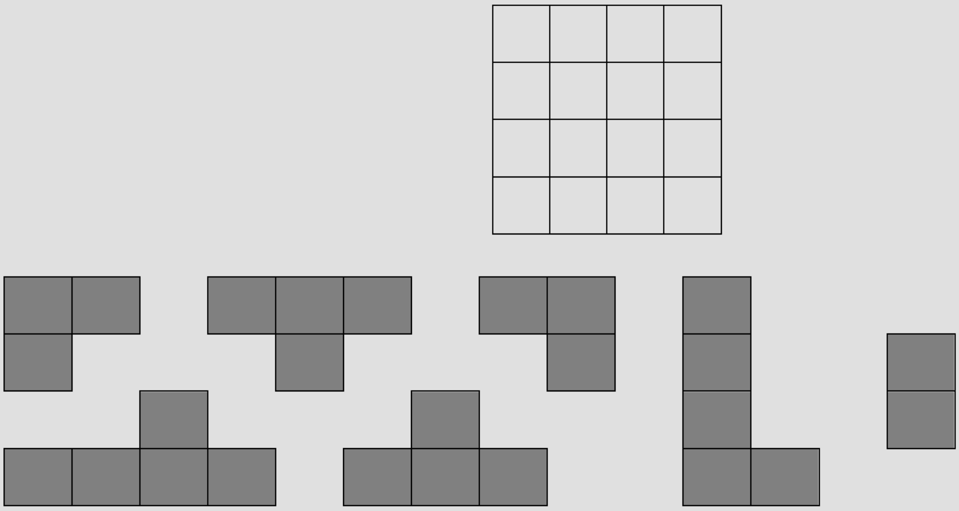


Quanti cubetti ha utilizzato in tutto Sofia per costruire la sua doppia scala?

Spiegate la vostra soluzione.

QUADRATO DA RICOPRIRE (Cat. 3, 4, 5) 12°RMT.I.05

Gianluca vuole ricoprire interamente questo quadrato con dei pezzi scelti fra quelli disegnati sotto:



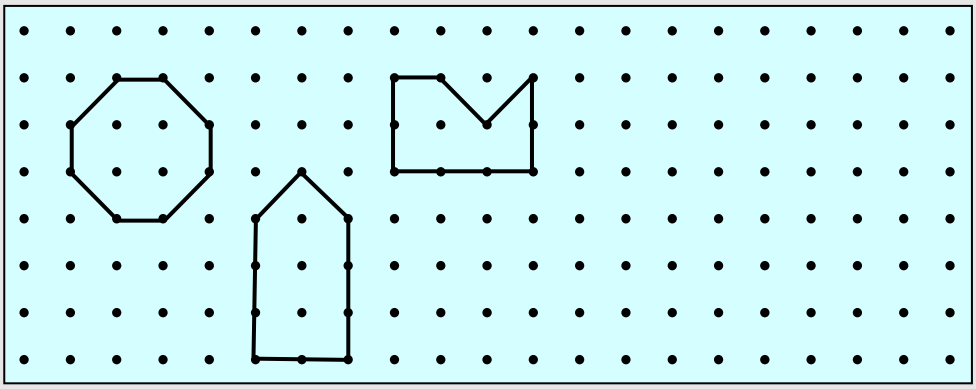
Gianluca vuole utilizzare il minor numero possibile di pezzi.

Con quali pezzi potrà ricoprire il suo quadrato?

Disegnate le vostre soluzioni in modo che si vedano bene i vari pezzi.

TRE AMICI E I LORO DISEGNI (Cat. 4, 5, 6) 20°RMT.II.06

Tre amici, Anna, Bea e Carlo, hanno disegnato queste tre figure su un foglio di “carta punteggiata”.



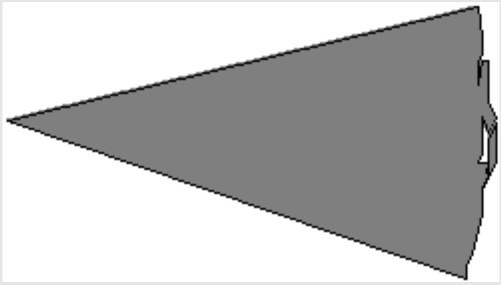
La figura di Anna ha la stessa area di quella di Bea e lo stesso perimetro di quella di Carlo.

Qual è la figura di Anna? Spiegate la vostra risposta.

Ora disegnate, accanto alle figure dei tre amici, un’altra figura che abbia la stessa area e lo stesso perimetro di quella di Anna

LA TORTA (Cat. 4, 5, 6) 9°RMT.I.06

Martina ha preparato una torta rotonda per la merenda. I suoi amici hanno già mangiato ciascuno la propria porzione e quella che resta è la sua.



Quanti amici ha invitato Martina?

(Naturalmente, tutte le porzioni di torta erano di uguale grandezza!)

Come avete fatto per trovare la risposta?

LE PANCHINE DEL PARCO (Cat. 5, 6, 7) 15°RMT.I.11

In un grande parco ci sono due tipi di panchine: panchine a 2 posti e panchine a 3 posti.

Le panchine a 2 posti sono 15 in più rispetto a quelle a 3 posti.

In tutto, sulle panchine, ci sono 185 posti a sedere.

Quante panchine ci sono in tutto nel parco?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Lucia Grugnetti-François Jaquet

1. Quelques indices de coopération / Qualche traccia di cooperazione

Exemples tirés des copies de la section de Suisse romande, du problème 23.II.01
Esempi tratti da elaborati della Svizzera romanda, realativi al problema 23.II.01

LES DÉS (Cat. 3, 4)
Cette photo montre quatre dés.

On voit seulement quelques points noirs de ces dés sur la photo.
Mais on ne peut pas voir toutes les faces, certains points sont donc cachés.

Combien y a-t-il de points noirs qui ne sont pas visibles sur la photo ?

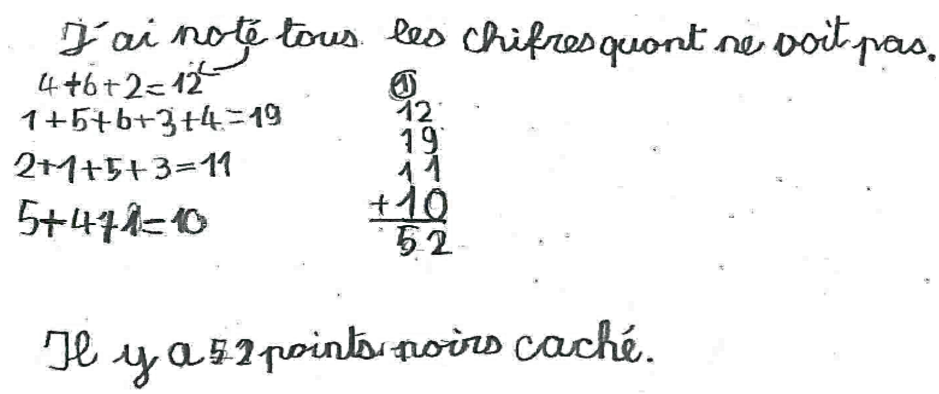
Expliquez comment vous avez fait pour trouver ce nombre.

1. I DADI (Cat. 3, 4)
Questa foto mostra quattro dadi.
Sono visibili solo alcuni dei punti neri presenti su di essi.
Nella foto però non si possono vedere tutte le facce dei dadi e quindi alcuni punti rimangono nascosti.

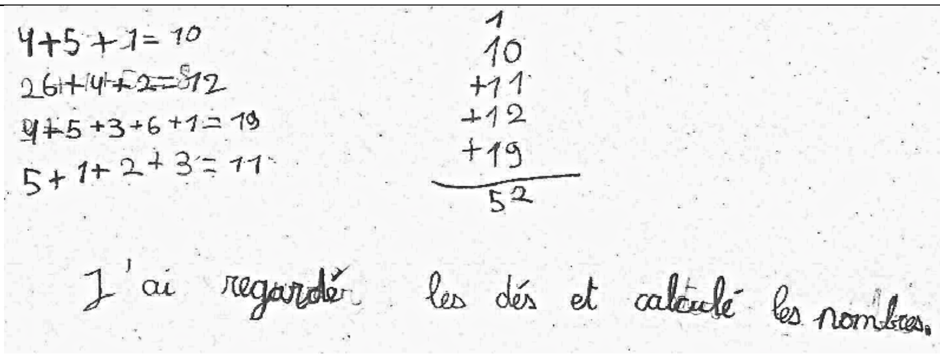
Quanti sono i punti neri che non si vedono nella foto?

Spiegate come avete fatto a trovare questo numero.

1.1. « je » ou « nous / «io» o «noi»

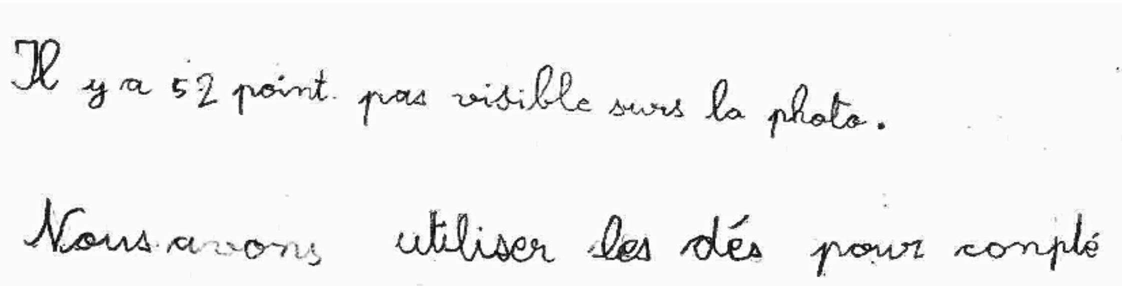


Ho scritto tutte le cifre che non si vedono. Ci sono 52 punti neri nascosti.



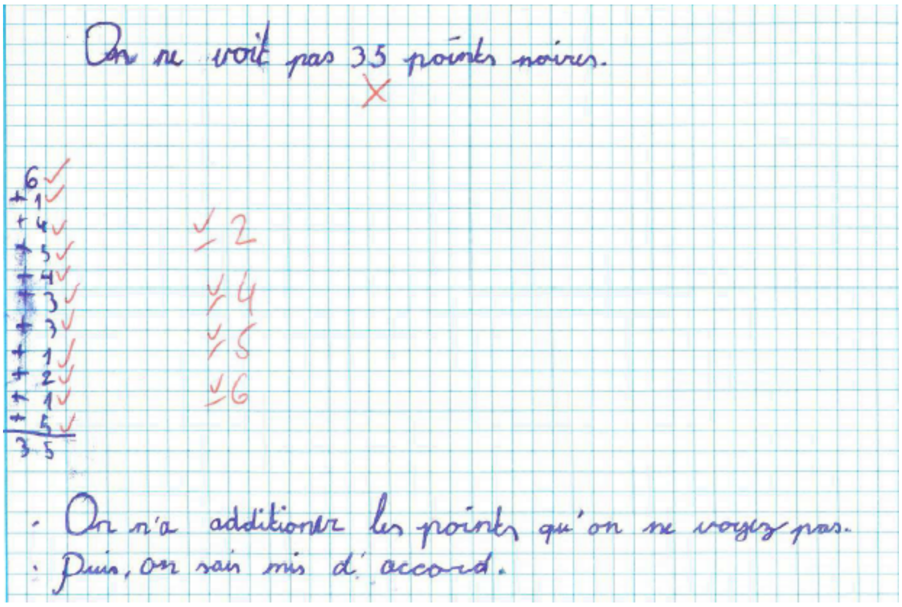
Ho guardato i dadi e calcolato i numeri.

L'usage de la première personne du singulier ne signifie pas forcément que l'élève qui a rédigé le texte a travaillé seul durant la résolution, mais au moment de la rédaction - soit il était seul - soit il était suivi par des camarades qui n'ont pas lu ce qu'il écrivait ou qui n'ont pas réagi à la lecture du « je ».
Dans un cas comme dans l'autre, la coopération n'est pas avérée.
L'uso della prima persona singolare non significa inevitabilmente che l'allievo che ha redatto il testo abbia lavorato da solo durante la risoluzione, ma al momento della redazione - o era solo - oppure era con dei compagni che non hanno letto ciò che scriveva o che non hanno reagito alla lettura di "io".
In un caso come nell'altro, la cooperazione non è avvenuta.



Ci sono 52 punti non visibili sulla foto.
Abbiamo utilizzato i dadi per contare

Dans ces deux exemples l'utilisation du « nous » (ci-dessus) ou du « on » (ci-dessous) attestent d'une coopération sans en savoir beaucoup plus que, dans le second cas, elle n'a pas été efficace ! (Malgré les traces laissées par la personne qui a attribué les points !!)
In questi due esempi l'utilizzo di "abbiamo" (sopra) e (sotto) attestano di una cooperazione senza saperne molto più che, nel secondo caso, non è stata efficace! (Nonostante le tracce lasciate dalla persona che ha attribuito i punteggi!!)



On ne voit pas 35 points noirs.

6
+1
+4
+5
+4
+3
+3
+1
+2
+1
+5
35

2
4
5
6

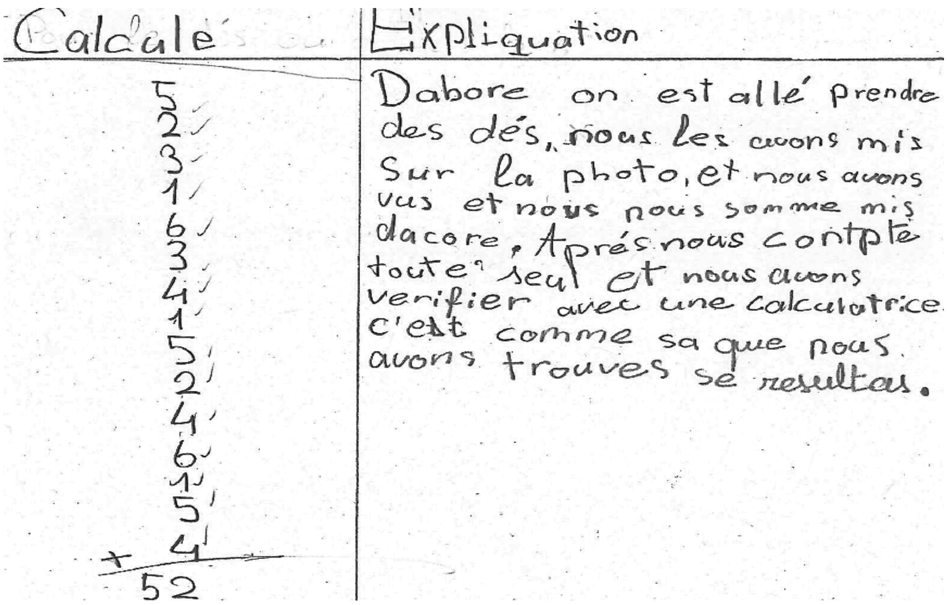
· On n'a additioner les points qu'on ne voyez pas.
· Puis, on sais mis d'accord.

Non vediamo 35 punti neri. Abbiamo addizionato i punti, che non vediamo
poi ci siamo messi d'accordo.

1.2. Objet de la coopération

Les copies permettant de déterminer là où il y a coopération sont rares ; la précédente laisse entendre par le « on s'est mis d'accord » qu'il y a eu un contrôle commun de l'addition ou de la liste ; l'exemple suivant est plus précis : il mentionne la manipulation « on est allé prendre des dés, nous les avons mis sur la photo » puis le comptage, et la vérification à la calculatrice.

Gli elaborati che permettono di determinare se ci sia cooperazione sono rari; il precedente lascia intendere tramite la frase "ci siamo messi d'accordo" che c'è stato un controllo comune dell'addizione o delle lista; l'esempio che segue è più preciso: menziona la manipolazione "siamo andati a prendere dei dadi, li abbiamo messi sulla foto" poi il conteggio e la verifica con la calcolatrice.



Calcule	Explication
5 2 3 1 6 3 4 1 5 2 4 6 1 5 + 4 52	Dabore on est allé prendre des dés, nous les avons mis Sur la photo, et nous avons vus et nous nous somme mis dacore, Après nous contpte toute seul et nous avons verifier avec une calculatrice c'est comme sa que nous avons trouves se resultas.

Spiegazione
Per prima cosa siamo andati a prendere dei dadi, li abbiamo messi sulla foto e abbiamo visto e ci siamo messi d'accordo. Poi abbiamo contato tutti da soli e abbiamo verificato con una calcolatrice. E' così che abbiamo trovato questo risultato.

1.3. La formation de groupes : nécessaire, mais pas suffisante
La formazione dei gruppi: necessaria, ma non sufficiente

« La coopération ne se fait pas toute seule. Elle ne va pas naître spontanément de l'organisation en groupes de travail, qui est vraisemblablement nécessaire, mais pas suffisante. » (In *Description du thème de la rencontre*)
"La cooperazione non "si fa" da sola. Non nasce spontaneamente a partire dall'organizzazione in gruppi di lavoro, cosa certamente necessaria, ma non sufficiente" (*nella descrizione del tema dell'incontro*).

De nombreuses copies décrivent une construction effective de la figure, avec des dés, suivie d'un comptage des points noirs. Comme la question porte sur les points noirs non visibles, le comptage n'est par conséquent pas réalisable par contrôle visuel : il faut déplacer les dés, ou passer derrière eux, ou séparer ceux qui sont contigus.
C'est au groupe d'organiser le contrôle nécessaire au cours du comptage. C'est une tâche complexe et délicate qui, faite à plusieurs, exige une bonne coordination entre élèves. Cette coopération, comme le montrent de nombreuses copies, est inefficace, insuffisante, voire inexistante.
(Voir les exemples suivants)

Numerosi elaborati descrivono una costruzione effettiva della figura con l'uso di dadi, seguita dal conteggio dei punti neri. Poiché la domanda riguarda i punti neri non visibili, di conseguenza il conteggio non è realizzabile con un controllo visivo: bisogna spostare i dadi, oppure passare dietro i dadi stessi, o separare quelli che sono contigui.
Sta al gruppo organizzare il controllo necessario nel corso del conteggio. Si tratta di un compito complesso e delicato che, svolto da più persone, esige tra loro una buona coordinazione. Questa cooperazione, come mostrano numerosi elaborati, è inefficace, insufficiente o inesistente.
(Si vedano gli esempi che seguono)

Quatre exemples de copies élaborées par groupes, avec recours à un matériel, où la coopération paraît inexistante ou insuffisante
Quattro esempi di elaborati presentati da gruppi di allievi, con ricorso al materiale e dove la cooperazione sembra inesistente o insufficiente

réponse: 47 X

on a conter tous les points noir
qu'on ne voie pas pour nous
aider nous avons former la même
tour que l'image avec des dés

risposta : 47
abbiamo contato tutti i punti neri che non si vedono per aiutarci abbiamo formato la stessa torre dell'immagine con i dadi.

Il y a 36 points noirs qui ne sont pas visibles.
On a pris 4 dés et on les a placés et on a compté les points noirs
Ci sono 36 punti neri che non sono visibili.
Abbiamo preso 4 dadi e li abbiamo sistemati e abbiamo contato i punti neri

---

Il y a 32 points. On a mis les dés comme sur la photo et après on a compté ceux qu'on n'a pas vu.
Ci sono 32 punti. Abbiamo messo i dadi come sulla foto e poi abbiamo contato quelli che non abbiamo visto.

---

48 points noirs ne sont pas visibles
On a pris les dés et on les a mis comme il faut et on a compté les points.
48 punti neri non sono visibili.
Abbiamo preso i dadi e li abbiamo messi come si deve e abbiamo contato i punti.

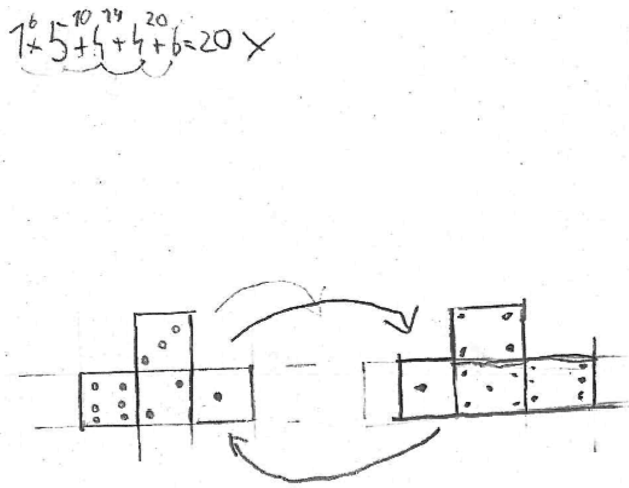
2. Au-delà des groupes : la classe
Al di là dei gruppi: la classe

« Parfois, même souvent, on constate que le groupe ne se sent responsable que du problème qui lui a été attribué et ne s'intéresse pas aux autres. » (In *Description du thème de la rencontre*)
"Talvolta, o addirittura sovente, si constata che il gruppo si sente solamente responsabile del problema che gli è stato attribuito e non si interessa agli altri."
(*nella descrizione del tema dell'incontro*)

Au cours des finales, on observe que dans une majorité de classes, dès qu'un groupe estime avoir terminé son travail, il dépose sa copie sur une table où les autres copies sont regroupées, à la vue de tous, sans que les autres groupes ne s'y intéressent. (Il est vraisemblable qu'on puisse faire la même observation lors des épreuves précédentes.)
Nel corso delle finali è possibile osservare che nella maggior parte delle classi, quando un gruppo pensa di aver finito il proprio lavoro, mette l'elaborato su un tavolo dove sono raggruppati anche altri elaborati, dove tutti possono vederli, ma senza che gli altri gruppi se ne interessino (immaginiamo che si possa fare la medesima constatazione nel caso delle prove precedenti).

Les deux copies qui suivent auraient-elles été acceptées par la classe si un ou plusieurs autres groupes, ayant déjà rendu leur problème après une vingtaine
de minutes, les avaient vérifiées ?
I due elaborati che seguono sarebbero stati accettati dalla classe se uno o diversi altri gruppi che avevano finito il loro compito dopo una ventina di minuti, li avesse verificati?

Deux exemples de copies rendues par un groupe, qui ne l'auraient peut-être pas été si elles avaient été vérifiées par un autre groupe
Due esempi di elaborati consegnati da un gruppo e che forse non sarebbero stati consegnati così se fossero stati verificati da un altro gruppo



Il semble évident ici que si un autre groupe était venu contrôler cette copie, il aurai remarqué qu'il n'y a pas de réponse !
Sembra evidente in questo caso che se un altro gruppo avesse visto questo elaborato avrebbe notato che non c'è la risposta!

On a numeroté les dés. Vu qu'il y a sixe faces dès fois on voixe 2 ou 9 faces donc on à compter les faces.

1 : 2
2 : 3
4 : 1
3 : 3

On voixe donc 9 faces de dés en tout.

Abbiamo numerato i dadi. Visto che ci sono sei facce delle volte si vedono 2 o 9 facce dunque abbiamo contato le facce.

Un autre groupe qui aurait vérifié cette copie aurait probablement vu la confusion entre le nombre de points et le nombre de faces.
Se un altro gruppo avesse verificato questo elaborato forse avrebbe visto la confusione fra il numero di punti e il numero di facce.

Une simple lecture des copies rendues pour un problème nous permettent de constater que
- la coopération ne s'impose pas d'elle même au sein d'un groupe,
- le travail par groupe est peut-être nécessaire mais pas suffisant !
- au niveau de la classe, la collaboration et les confrontations entre groupes ne se créent pas spontanément.

On en arrive alors à se poser quelques questions plus générales qui ont des incidences sur la coopération entre élèves pour la résolution des problèmes du RMT :
- le travail par groupes est-il le seul et unique mode de coopération au sein de la classe ?
- comment se constituent les groupes ? sous la responsabilité du maître ou sous celle des élèves ?
- après l'épreuve, la classe conduit-elle une réflexion commune sur ce qu'elle vient de vivre ? l'organisation, l'efficacité, la qualité de la coopération ?

Il y aurait bien d'autres questions encore, mais la place manque sur ce poster !

Una semplice lettura degli elaborati relativi ad un problema ci permette di constatare che:
- la cooperazione non nasce da sola in seno al gruppo,
- il lavoro di gruppo è forse necessario, ma non sufficiente!
- a livello della classe, la collaborazione e i confronti tra gruppi non si creano spontaneamente.

E' pertanto necessario porsi alcune domande più generali che hanno una certa incidenza sulla cooperazione fra allievi per la risoluzione dei problemi del RMT:
- il lavoro per gruppi è il solo e unico modo di cooperazione in seno alla classe?
- come si costituiscono i gruppi? Sotto la responsabilità dell'insegnante o sotto quella degli allievi?
- dopo la prova, la classe porta avanti una riflessione comune sull'esperienza vissuta? L'organizzazione, l'efficacia, la qualità della cooperazione?

Ci sarebbero ancora altre domande, ma su questo poster non c'è più posto!