La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 4, août/agosto 2015

Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.org

ISSN 2234-9596

TABLE DES MATIÈRES / INDICE

ÉDITORIAL : AU-DELÀ DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

François Jaquet, rédacteur responsable

Dans les *Socles de compétences* de Belgique francophone on peut lire : *C'est par la résolution de problèmes que l'élève développe des aptitudes mathématiques, acquiert des connaissances profondes, se forge une personnalité confiante et active.*
Dans le *Préambule pour le Collège*, des programmes français[1] on accorde *une place centrale pour la résolution de problèmes.* Le plan d'études de Suisse romande[2] propose de *poser et résoudre des problèmes* pour la plupart de ses chapitres.
Dans les programmes italiens pour l'école primaire on lit : *La pensée mathématique est caractérisée par l'activité de résolution de problèmes et par conséquent est en syntonie avec la propension naturelle du jeune enfant à poser des questions et à chercher des réponses.* Enfin, dans les Instructions Nationales pour l'école primaire, de 2012, on lit : La *résolution de problèmes est caractéristique de la pratique mathématique. Ces problèmes doivent être entendus comme questions authentiques et significatives, liées à la vie quotidienne, et non seulement des exercices à caractère répétitif ou des questions auxquelles on répond simplement en se rappelant une définition ou une règle.*

Cette reconnaissance de la priorité accordée à la résolution des problèmes dans les déclarations officielles est une caution pour le RMT qui s'y consacre depuis bientôt vingt-cinq ans. Au-delà des recommandations et intentions, nous mettons la main à la pâte pour définir les problèmes potentiellement intéressants pour les apprentissages, les proposons à des milliers de classes, analysons a posteriori la manière dont les élèves les ont résolu pour percevoir les obstacles rencontrés, les savoirs sous-jacents, leurs potentialités didactiques, leur intérêt pour la formation des maîtres …

Nous avons appris que la phase de résolution d'un problème, individuelle ou par groupes, n'est qu'une amorce d'un processus d'apprentissage, qui ne porte ses fruits que si elle est suivie, au niveau de la classe, de débats, de réflexions, de développements, de phases d'institutionnalisation puis de réinvestissements dans d'autres situations.

Nous avons appris aussi que, en résolution de problème par groupes, les élèves se retrouvent dans des situations toujours nouvelles, qui génèrent des doutes et des échanges parfois contradictoires au cours desquels il faut savoir écouter l'autre et modifier ses vues personnelles, qui nécessitent la prise de responsabilités. On va bien au-delà des simples connaissances, savoirs, objectifs ou compétences mathématiques pour entrer dans le champ des attitudes constructives. Prise de conscience, innovation, changement, révolution, responsabilité, engagement, confiance, autonomie, ce sont des mots-clés de la résolution de problèmes.

2015 a débuté par le choc du terrorisme qui vient frapper à nos portes ; s'y ajoutent le réchauffement et la pollution de la planète, la guerre et leur cortège de réfugiés, l'injustice sociale … Devant l'ampleur de ces préoccupations de citoyens du début de notre XXIe siècle, nombre d'entre nous se demandent, légitimement, comment agir et s'il vaut la peine de poursuivre son engagement dans une entreprise comme le RMT, minuscule par rapport aux enjeux planétaires. Le nombre de messages « je suis Charlie » échangés entre nous en janvier dernier atteste de cette aspiration à « faire quelque chose ».

En relisant les mots-clés ci-dessus qui caractérisent les attitudes qu'on développe en proposant de résoudre des problèmes, ne peut-on pas dire que le RMT s'engage dans les actions nécessaires pour la survie de notre monde ? C'est peu de chose, évidemment, mais combien important, d'œuvrer pour que les recommandations de nos programmes officiels passent dans la pratique. Ce sont en effet les attitudes constructives de nos élèves actuels qui détermineront notre avenir.

---

[1] BO juin 2008
[2] PER, Plan d'études romand 2010

EDITORIALE: AL DI LÀ DELLA RISOLUZIONE DI PROBLEMI

François Jaquet, direttore responsabile

In *Les Socles de compétences* del Belgio francofono si legge: "*E' attraverso la risoluzione di problemi che l'allievo sviluppa attitudini matematiche, acquisisce conoscenze profonde, si forgia una personalità sicura e attiva".*
Nella premessa per il *Collège*, i programmi francesi del 2008[3] accordano *un posto centrale alla risoluzione di problemi.* I programmi della Svizzera romanda[4] propongono di *porre e risolvere problemi* nell'ambito della maggior parte dei capitoli.
Nei programmi italiani per la scuola elementare del 1985 si legge: "*Il pensiero matematico è caratterizzato dall'attività di risoluzione di problemi e ciò è in sintonia con la propensione del fanciullo a porre domande e a cercare risposte".* Infine, nelle Indicazioni Nazionali per la scuola primaria, del 2012, si legge: "*Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola".*

Questo riconoscimento della priorità accordata alla risoluzione di problemi dai programmi ufficiali è una sorta di legittimazione per il RMT che proprio a questo si consacra da quasi venticinque anni. Al di là di raccomandazioni e intenzioni, ci occupiamo di definire quali possano essere i problemi potenzialmente interessanti per l'apprendimento. Li proponiamo a migliaia di classi, analizziamo a posteriori il modo in cui gli allievi li hanno risolti, al fine di percepire gli ostacoli che hanno incontrato, i saperi soggiacenti, le loro potenzialità didattiche, il loro interesse per la formazione degli insegnanti… .

Abbiamo imparato che la fase di risoluzione di un problema, individualmente o in gruppo, è solo la parte iniziale di un processo di apprendimento che porta frutti solamente se è seguita, a livello della classe, da dibattiti, riflessioni, sviluppi, istituzionalizzazioni e poi di reinvestimenti in altre situazioni.

Abbiamo anche imparato che, per quanto riguarda la risoluzione di problemi in gruppo, gli allievi si ritrovano in situazioni sempre nuove che generano dubbi e scambi talvolta contradditori nel corso dei quali bisogna ascoltare l'altro e modificare i propri punti di vista, cosa che necessita un'assunzione di responsabilità. Si va ben al di là di conoscenze, saperi, obiettivi o competenze matematiche per entrare nel campo delle attitudini costruttive. Presa di coscienza, innovazione, cambiamento, rivoluzione, responsabilità, impegno, fiducia, autonomia, sono parole chiave della risoluzione di problemi.

Il 2015 è cominciato con lo shock del terrorismo che viene a bussare alle nostre porte, aggiunto al riscaldamento globale e all'inquinamento del pianeta, le guerre e la loro coorte di rifugiati, l'ingiustizia sociale… Davanti all'ampiezza delle preoccupazioni dei cittadini dell'inizio del XXI secolo molti di noi si chiedono, legittimamente, come agire e se vale la pena proseguire il proprio impegno in un'impresa come il RMT, minuscola in rapporto ai problemi planetari. Il numero di messaggi « je suis Charlie » scambiati fra noi in gennaio attesta l'aspirazione a "fare qualcosa".

Nel rileggere le parole chiave citate in precedenza che caratterizzano le attitudini che sviluppiamo nel proporre di risolvere problemi, possiamo forse dire che il RMT si impegna nelle azioni necessarie alla sopravvivenza del nostro mondo?

E' poca cosa, evidentemente, ma è comunque importante operare perché le raccomandazioni dei programmi ufficiali arrivino nella pratica. In realtà sono proprio le attitudini costruttive dei nostri allievi che determineranno l'avvenire.

---

3 BO juin 2008
4 PER, Plan d'études romand 2010

PRESENTAZIONE DEL NUMERO

Questo numero 4 de *La Gazzetta di Transalpino* contiene sette articoli che vanno dalla conferenza plenaria del convegno di Siena nel 2014 al resoconto di un'attività in classe, passando per articoli strettamente legati al nostro RMT e sviluppati a partire sia da un lavoro di gruppo che da presentazioni alla tavola rotonda del convegno del Lussemburgo nel 2013.

- In ***RMT, punto d'incontro tra insegnanti e risoluzione di problemi***, **Catherine Houdement** presenta, in forma di articolo, la conferenza di apertura del convegno internazionale dell'ARMT del 2014 svoltosi a Siena. L'articolo si sviluppa a partire dalle risorse didattiche offerte dai problemi del RMT alla proposta di un lavoro organizzativo per l'insegnamento dei problemi di aritmetica, ancora con riferimento ai problemi del RMT.

- **Carla Crociani e Rita Spatoloni**, nel loro articolo ***Spunti di riflessione Sulla scrittura posizionale***, propongono riflessioni sulla risoluzione di alcuni problemi del RMT, strutturalmente uguali tra loro, da cui è possibile ricavare attività indirizzate ad allievi compresi tra la quinta classe della scuola Primaria e la seconda classe della scuola Secondaria di 2° grado. Esso nasce dalla convinzione, maturata in anni di lavoro con problemi del RMT e le relative analisi a posteriori, che il concetto di scrittura posizionale non sia in genere ben acquisito da parte degli studenti.

- L'articolo ***I problemi del RMT: ampliamento progressivo delle loro finalità*** a cura di **Lucia Grugnetti e François Jaquet** (presentato nel Libretto per il congressista dell'incontro in Lussemburgo nel 2013) ha come scopo quello di cercare di rispondere alla questione relativa all'utilità dei problemi del RMT, dalla sua origine fino ai tempi attuali.

- In ***Gita al mare***, **François Jaquet** presenta un esempio di problema, al fine di illustrare il compito dell'allievo nella trascrizione di un racconto di viaggio con un enunciato di cinque righe, in forma di dati strutturati sui quali potrà elaborare la risoluzione matematica del problema stesso. Questa trascrizione, o fase di "decontestualizzazione" è un compito spesso molto delicato per i nostri allievi, molto difficile da stimare a priori.

- Nell'articolo ***Analisi a priori, analisi a posteriori, oltre il percorso circolare***, **Lucia Grugnetti**, sviluppa alcuni aspetti dell'omonima relazione presentata al 17° incontro internazionale dell'ARMT svoltosi in Lussemburgo nell'ottobre 2013. La riflessione sull'analisi a priori e a posteriori sui problemi del RMT conduce ad un percorso circolare che talvolta diventa un percorso a spirale che da un problema porta a nuovi problemi omologhi, ma calibrati meglio ai saperi degli allievi delle varie età.

- L'articolo di **Graziella Telatin**, ***Ripartiamo da… 0 punti***, focalizza l'attenzione sulla difficile domanda "Cosa possiamo immaginare che sappiano i bambini che hanno 0 come punteggio? Qual è stato lo scoglio che ha reso così difficile risolvere un dato problema?". Per cercare di trovare una risposta a tale domanda, l'autrice analizza le risposte ottenute da un certo numero di elaborati del problema "Scatoline" 17°RMT 1 prova problema. n. 5, che avevano appunto ottenuto 0 punti.

- Nell'articolo ***Indovina a che cosa penso***, **Fabio Brunelli** descrive l'attività svolta nelle sue tre classi di scuola secondaria di primo grado a partire da un problema del RMT ad impianto di tipo aritmetico-algebrico.

PRÉSENTATION DU NUMERO

Ce numéro 4 de *La Gazette de Transalpie* contient sept articles, qui vont de la conférence plénière de la rencontre de Sienne de 2014 au compte rendu d'une activité en classe, en passant par des articles étroitement liés à notre RMT, sur les travaux d'un de nos groupes et sur les présentations de la table ronde de la rencontre de Luxembourg en 2013.

- Dans ***Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes,*** **Catherine Houdement** présente, sous forme d'article, la conférence d'ouverture de la rencontre internationale de Sienne, en 2014. Elle va des ressources didactiques offertes par les problèmes du RMT aux propositions d'une organisation du travail en classe sur les problèmes d'arithmétique, avec des références avec l'expérience du RMT.

- **Carla Crociani** et **Rita Spatoloni**, dans leur article ***Éléments de réflexion sur l'écriture positionnelle***, proposent des réflexions sur la résolution de quelques problèmes du RMT, de même structure, dont on peut tirer des activités qui s'adressent à des élèves de la cinquième année primaire à la deuxième année de lycée. Ces propositions sont soutenues par la conviction murie au cours des années de travail sur les problèmes du RMT et leur analyse a posteriori, que le concept d'écriture positionnelle est loin d'être bien acquis par les élèves.

- L'article ***Le problèmes du RMT : l'élargissement progressif de leurs finalités*** par **Lucia Grugnetti e François Jaquet** (présenté dans le Livret pour les participants à la rencontre de Luxembourg, 2013) propose une réponse à la question : à quoi pouvaient bien servir nos problèmes, aux différentes époques de notre histoire du RMT : à l'origine, au moment de la fondation officielle de l'ARMT, après une dizaine, puis une quinzaine d'années de fonctionnement, et aujourd'hui après avoir passé le cap des vingt ans.

- Dans ***Excursion à la mer***, **François Jaquet** présente un exemple de problème pour illustrer la tâche de l'élève dans la transcription d'un récit de voyage donné par un énoncé de cinq lignes, à un ensemble de données structurées sur lesquelles pourra s'élaborer la résolution mathématique du problème. Cette transcription, ou phase de « décontextualisation » est une tâche souvent très délicate pour nos élèves, qu'il est très difficile d'estimer a priori.

- Dans l'article ***Analyse a priori, analyse a posteriori, au de là de la démarche circulaire***, **Lucia Grugnetti**, développe certains aspects de sa présentation lors de la 17^{e} rencontre internationale de L'ARMT en octobre 2013 à Luxembourg. Les réflexions a priori et a posteriori sur les problèmes du RMT amènent à une démarche circulaire qui, à partir d'un problème, conduisent à de nouveaux problèmes « homologues », mais mieux adaptés aux savoirs des élèves de différents âges.

- L'article de **Graziella Telatin**, ***Repartons de … 0 points***, se concentre sur des questions délicates. « Si chaque attribution de 1 à 4 points donne une indication sur les connaissances acquises ou la présence d'obstacles rencontrés, que pouvons-nous dire des copies qui ont reçu 0 point ? Est-il possible d'en tirer des renseignements ? » Pour chercher à trouver une réponse à ce type de questions, l'auteure analyse les réponses obtenues d'un certain nombre de copies du problème des « Boîtes » de la première épreuve du 17°RMT (problème no 5), auxquelles ont été attribués 0 point.

- Dans l'article ***Devine ce que je pense***, **Fabio Brunelli** décrit une activité conduite dans ses trois classes du collège (catégories 6, 7, 8) à partir d'un problème du RMT proposé dans l'épreuve finale de 1999.

LE RMT, MÉDIATION ENTRE ENSEIGNANTS ET RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Catherine Houdement[1]

Ce texte est à la fois un travail d'élucidation et un hommage au travail magistral accumulé par les responsables du Rallye Mathématique Transalpin. Dans une partie introductive, je reviens sur les ressources qu'offre le RMT, sa richesse, en distinguant une dimension privée du RMT et une dimension publique. Dans la seconde partie je m'intéresse aux processus en jeu dans la résolution de problèmes, propose une organisation pour l'enseignant des problèmes arithmétiques, utilise cette organisation pour mesurer la contribution du RMT à la résolution de problèmes. Dans la dernière partie, je pointe des outils didactiques qui traversent la construction et l'analyse des problèmes du RMT et je montre leur importance pour la formation des enseignants.

I La richesse du RMT

Le Rallye Mathématique Transalpin, initialement Rallye Mathématique Romand (1993) a débuté en 1993 avec vingt classes[2]. Depuis 2011, au moins 4000 classes sont engagées dans le RMT. Un grand ensemble d'enseignants, d'écoles, de collèges, de lycées, et bien sûr d'élèves sont donc concernés par cette organisation. Je considère que le RMT a deux dimensions que j'appellerai privée et publique. La dimension privée consiste, notamment lors des moments de rallye, à observer des élèves s'organiser, chercher, s'interpeller sur des mathématiques, mais aussi à récupérer la réponse collective de sa classe sur tel ou tel problème. La dimension publique est liée à la multitude de documents disponibles, en général sur le site de l'Association : problèmes et leurs analyses, productions d'élèves, articles.
Dans ce texte je me centrerai sur la dimension publique et les problèmes numériques. Les problèmes liés à la géométrie sont aussi dignes d'étude et un grand nombre de choses dites sur les problèmes numériques peuvent s'étendre aux autres problèmes, mais je préfère traiter un thème qui correspond à mes recherches actuelles.

Quelle est cette richesse publique du RMT ? L'abondance des problèmes proposés, la variété des connaissances auxquelles ils font appel, la permanence des commentaires sur les problèmes. Ainsi chaque texte de *Problème* est accompagné d'une demande d'explication de la réponse, peut donner lieu à des variantes, repérables sous le même titre. Il est ainsi remarquable que chaque problème soit affecté d'un titre, notamment pour la mémoire collective des enseignants. Sont aussi fournies une *Analyse a priori* qui rend compte du *Domaine de connaissances* dans lequel s'inscrit ce problème, d'une *Analyse de la tâche* de l'élève, d'une proposition *d'Attribution de points* aux réponses des élèves, d'une *Analyse a posteriori* fondée sur l'étude de productions d'élèves. Cet ensemble est souvent accompagné d'exemples de productions de classes.
Par exemple, on trouve dans (Grugnetti & Dupuis 2003) cet énoncé amusant (clin d'œil à l'élève) avec des productions d'élèves.

LE NEZ DE PINOCCHIO (Cat 3, 4, 5) ©ARMT

Le nez de Pinocchio a 5 cm de long. Quand Pinocchio dit un mensonge, la Fée aux cheveux bleus l'allonge de 3 cm, mais quand il dit la vérité, la Fée le raccourcit de 2 cm.

A la fin de la journée, Pinocchio a dit 7 mensonges et son nez a 20 cm de long.

Combien de fois Pinocchio a-t-il dit la vérité à la Fée au cours de la journée ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.

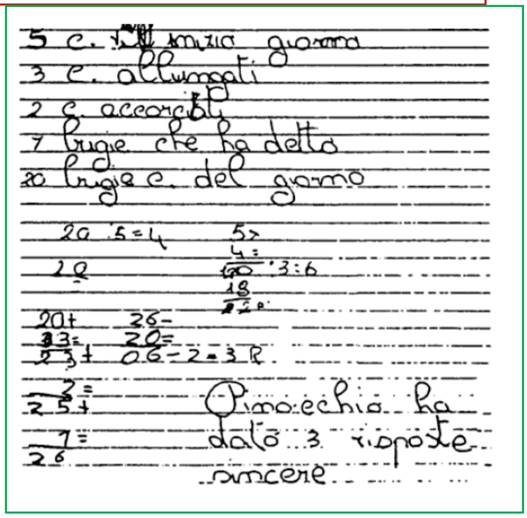
On peut voir que certaines productions montrent des stratégies erronées, mais menant parfois à une réponse exacte, et d'autres des stratégies correctes, mais qui conduisent parfois à une réponse fausse.

[1] LDAR, Universités Paris Diderot et Rouen
[2] http://www.armtint.org/fr/presentation-du-rallye/historique

Des stratégies erronées (et parfois une réponse exacte)

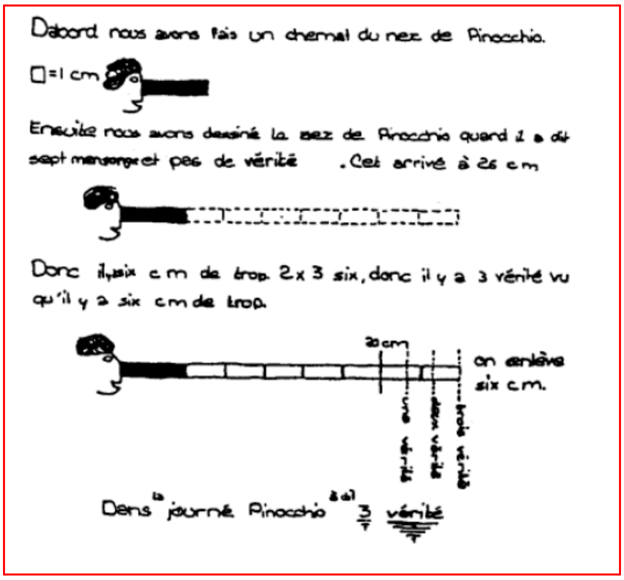
« Pinocchio a dit 10 fois la vérité. La réponse a été trouvée en faisant une ligne de 20 cm, puis elle s'est allongée de 3 x 7 = 21. Après il a fallu retirer 2 cm pour arriver à 20 cm. » (Catégorie 3 – I)

« Pinocchio a dit 7 mensonges et a dit la vérité à la fée aux

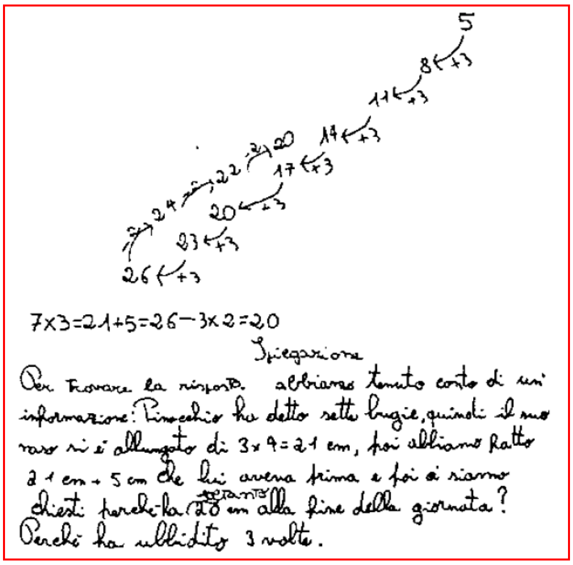


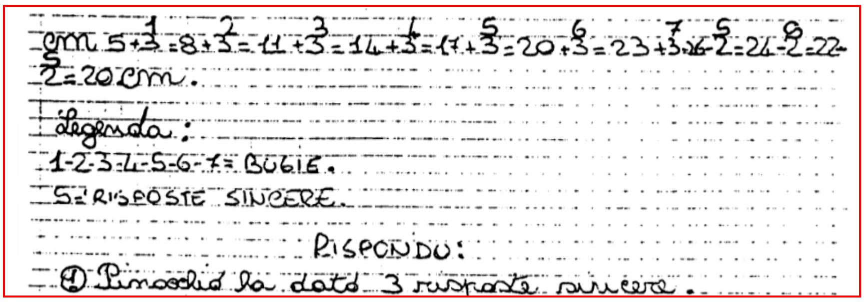
Des stratégies correctes avec une réponse exacte

Cat.3



Cat.4





L'étude de la multitude de productions sur un même problème permet de dégager certaines caractéristiques des stratégies.

Les stratégies erronées (ou difficiles à comprendre) peuvent relever d'une incompréhension du contexte, d'une application d'un contrat implicite de classe (par exemple utiliser la dernière opération étudiée), d'un

« enfermement » dans le numérique, d'une perte de sens du calcul, d'une absence de contrôle par le contexte… Elles peuvent néanmoins amener à une réponse correcte ! D'où l'importance de l'explication pour la pertinence de la réponse !
Les stratégies correctes sont très variées, croisent dessins, schémas, écritures arithmétiques, calculs. Elles montrent l'inventivité des élèves sur les types de représentations (symboliques ou non) pour expliquer la réponse. Dans les deux productions ci-dessus, on voit bien l'essai de coller à la fois au contexte (forme du nez) et au modèle mathématique et ainsi de donner la raison de la réponse.
Ces stratégies évoluent parfois selon les niveaux de classe, ce qui montre le rôle des connaissances des élèves sur le traitement d'un problème.
Ces stratégies varient parfois selon les pays, ce qui met en lumière l'influence des types d'enseignement (notamment des choix des programmes) sur une notion donnée.

La variété des productions des élèves nous donne accès à des modes de raisonnement sur les problèmes choisis. Mais comment définir ces problèmes que propose le RMT ? Quelle place ont-ils dans l'ensemble des problèmes mathématiques que rencontrent ou devraient rencontrer les élèves d'une classe ? Que sait-on du comment on réussit un problème ?
C'est l'objet du paragraphe suivant.

II Les processus de résolution de problèmes (plutôt numériques)

Prenons l'exemple de ces quatre problèmes a, b, c et d. Dans chaque problème, il s'agit de trouver le nombre de tulipes d'un massif.
a) C'est un massif de fleurs composé de 60 tulipes rouges et de 15 tulipes jaunes
b) Voici un massif de 60 rangées, toutes de 15 tulipes,
c) C'est un massif de 60 fleurs, composé de tulipes et de 15 jonquilles,
d) Je compte 60 tulipes disposées en 15 massifs tous identiques.

Aucun doute sur le fait que le lecteur réussisse à répondre presque instantanément. Les énoncés évoquent le même contexte (fleurs et massifs), présentent la même structure syntaxique (similarité de lecture-compréhension), posent la même question (combien de tulipes dans UN massif ?), mettent en jeu les mêmes nombres (15 et 60). Mais les problèmes relèvent d'opérations arithmétiques différentes. La question est la suivante : comment savons-nous, nous experts, associer des opérations différentes à des énoncés si proches ? Sollicitons l'aide d'un psychologue cognitiviste, Jean Julo, qui a travaillé sur la résolution de problèmes mathématiques scolaires.

1. Le point de vue d'un psychologue cognitiviste sur la résolution de problèmes

Julo (1995, 2002) met en avant l'importance de la représentation (mentale) dans le processus de résolution de problèmes. Qu'est ce qu'une représentation ? Selon Julo (1995 p11) « *comprendre quelque chose serait, d'une manière ou d'une autre, construire une représentation de cette chose.* » Une représentation est le fruit d'une profonde activité mentale, qui met en œuvre tout un ensemble de processus chargés de traiter les informations issues de nos organes sensoriels sur notre environnement. Les représentations (d'un problème) dont il est question ici sont des représentations ponctuelles et occasionnelles, Julo parle de *représentations particularisées*. Il existe aussi dans le modèle actuel des psychologues des représentations plus ou moins stables en mémoire à long terme, ce sont les connaissances (et les croyances) qui nous permettent d'appréhender le monde.
La représentation du problème ne se réduit pas à la compréhension de son énoncé. La nature d'un problème engage un autre type de représentation. « *Ce sont les relations complexes entre un but donné et les conditions de réalisation de ce but (les contraintes et les aides qu'introduit l'auteur de l'énoncé) qui caractérisent ce qu'est un problème par rapport à d'autres situations de compréhension de texte.* » (Julo 1995, p.16). L'enjeu de la résolution de problèmes est aussi spécifique : « *C'est bien le fait de découvrir par soi-même une solution que l'on n'entrevoyait pas dans un premier temps qui est l'enjeu de cette activité particulière* » (Julo 1995, p.25)
Nous aurions chacun une **mémoire des problèmes** (Julo 1995) qui nous permettrait de reconnaitre et de traiter des problèmes de façon presque « automatique ». Nous enrichissons cette mémoire grâce à la résolution réussie de problèmes **que nous menons à terme !** Par contre il est très complexe de savoir comment nous stockons en mémoire ces problèmes réussis.

Ainsi il y aurait au moins deux composantes (non successives, mais simultanées, qui interagissent) dans l'activité de résolution de problèmes :

- construire une représentation du problème, qui peut suffire à inférer de sa mémoire une stratégie adaptée pour le problème ;
- déclencher un traitement **:**

- se remémorer une stratégie : ce qui est le cas dans un problème reconnu : *les massifs de fleurs*
- construire une stratégie : pour un problème « dont on n'a aucun souvenir » : par exemple *le nez de Pinocchio.*

La difficulté d'un problème pour un élève tiendrait ainsi, entre autres, à la complexité de la construction d'une représentation adaptée. Notons aussi la confiance en soi nécessaire pour se lancer dans la construction d'une nouvelle stratégie.
Cet apport essentiel pour la compréhension du processus de résolution de problèmes conduit à préciser deux enjeux de l'enseignement :

- enrichir la mémoire des problèmes des élèves, notamment en les faisant s'entraîner sur la résolution de problèmes « **basiques » :** ceux qu'il faudrait « automatiser » pour tel champ de connaissances ;
- leur donner l'occasion d'inventer des stratégies, en mettant en place des dispositifs qui leur donnent envie de chercher des problèmes « **atypiques** ».

Plus l'élève a réussi de problèmes, plus il en réussira d'autres : en effet plus sa mémoire sera riche, plus les chances de « reconnaitre d'une certaine façon » un problème seront grandes.

2. Une typologie des problèmes arithmétiques

Je précise d'abord que cette typologie concerne **a priori** les problèmes de réinvestissement dans un champ de connaissances.
J'ai choisi les expressions « basiques » et « atypiques » pour aider l'enseignant à organiser dans un niveau donné, et par champ de connaissances, les problèmes qu'il choisit ou trouve dans des ressources pédagogiques.

Problèmes « basiques »

Les problèmes basiques sont des problèmes destinés à être « réussis de façon automatique » par les élèves d'un niveau donné ou d'un cycle donné. Ce sont, pour l'école primaire (niveau 1 à 5 ou 6) des problèmes à deux données dont il s'agit de déduire un 3^{ème} nombre (par exemple par le choix d'une opération arithmétique), des problèmes relevant du modèle proportionnel (trois données ou plus, en déduire d'autres nombres). Les énoncés sont sobres, sans surcharge d'informations, sans difficulté syntaxique excessive…
Exemples de problèmes basiques pour les niveaux 4 et 5

1. Avec 2 356 €, combien de billets de 100 € peut on obtenir ? Et avec 12 356 € ?
2. Alice a 26 timbres dans sa collection, c'est deux fois plus que Leïla. Combien de timbres Leïla a-t-elle ?
3. Grégoire a chargé dans sa camionnette vide 75 sacs de 20 kg de pommes. Combien pèse son chargement ?

Vergnaud (1991, 1997) et d'autres chercheurs nous aident à hiérarchiser a priori les complexités de raisonnement en jeu dans, d'un côté les problèmes additifs (addition et soustraction), de l'autre les problèmes multiplicatifs (multiplication, division, proportionnalité).

Problèmes « complexes »

Examinons le problème suivant
Au cinéma Royal Ciné un adulte paye 6 € par séance et un enfant paye 4 € par séance. A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants. A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants. La recette de la journée est de 542 €. Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ? (extrait de ERMEL CM1[3])
Ce problème n'est un problème basique pour personne, il est nécessaire de construire **des sous-problèmes basiques calculables** qui permettent d'avancer vers la réponse. Ici le premier sous-problème est la recherche de la recette du soir, ce problème est calculable grâce à certaines informations fournies dans le texte. Il est nécessaire de **connecter ces informations,** éloignées les unes des autres dans le texte, pour construire ce premier sous-problème basique : *Un adulte paye 6 € par séance et un enfant paye 4 € par séance. A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants.* Il ne faut pas oublier de **qualifier le résultat calculé** (Houdement 2011) : c'est la recette du soir.
Le second sous-problème basique calculable est la recherche de la recette de l'après midi.
Les autres sous-problèmes basiques calculables sont la recherche de la recette de l'après midi venant des adultes, puis celle venant des enfants, et enfin le nombre d'enfants à la séance de l'après-midi.

J'appellerai un tel problème, un **problème complexe**[4]. Un problème complexe nécessite la construction de sous-problèmes basiques calculables (et en particulier la connexion d'informations). L'élève n'a pas à construire une nouvelle stratégie, mais doit articuler des résolutions de problèmes basiques dont la construction est à sa charge.

Or les élèves ne sont pas toujours armés face à ces problèmes

---

[3] ERMEL (1997 ; 2005) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*. Paris :Hatier
[4] Cet adjectif a déjà été utilisé, par exemple dans ERMEL CM1 (1997, p.261) pour décrire des problèmes dont la solution nécessite l'utilisation successive de plusieurs opérations. J'ai essayé d'affiner ce point de vue.

Ils peuvent ne pas repérer les problèmes basiques sous-jacents aux problèmes complexes, parce qu'ils ne savent pas les résoudre « de façon automatique ».
Ils peuvent ne pas connaitre la nécessité de **qualifier** (Houdement 2011) les résultats calculés. Examinons par exemple la réponse de Paul (niveau 3) face au problème ci-dessus. Paul a exécuté la plupart des calculs nécessaires à la réussite, mais il annonce 72 comme réponse au problème ; or 72 est la recette venant des enfants de l'après midi. Lors de l'entretien Paul déclare : « Un adulte c'est 6 € donc j'ai fait 15 fois 6 égale 90. Ensuite il y avait 20 enfants à la séance, comme c'était 4 € j'ai fait 20 fois 4 égale 80 ». Quand on lui demande à quoi correspond 90 ou 80, il ne sait pas répondre : il ne sait pas qualifier la réponse (ni faiblement, 80 €) ni fortement (80 €, recette venant des enfants de la séance du soir). C'est cette absence de qualification, le fait de calculer sans garder la référence au contexte, qui lui fait perdre le fil du problème.

Des exemples pour affiner l'étude

L'âge des frères

Ce problème du RMT est un problème complexe.
Il est nécessaire de connecter les informations pour avancer, notamment les informations sur Antoine relativement à celles sur Christian. Certaines informations sont dans la question.

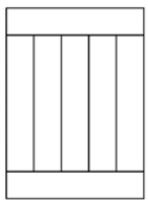
LES AGES DES FRÈRES (Cat. 3, 4, 5). ©ARMT
Dans une famille, il y a 3 garçons : Antoine, Bernard et Christian, et une fille Denise. Denise regarde l'album de photos familial et constate que :
- quand Antoine avait 8 ans Bernard avait 12 ans
- quand Bernard avait 9 ans Christian avait 3 ans

Quel âge avait Christian quand Antoine avait 10 ans ?
Expliquez comment vous avez trouvé.

Antoine a 10 ans et *quand Antoine avait 8 ans, Bernard avait 12 ans* permettent de construire par exemple les sous problèmes « Bernard a tant d'années de plus qu'Antoine » (sous problème basique de comparaison additive) et « âge de Bernard ».
L'information « âge de Bernard » et *quand Bernard avait 9 ans Christian avait 3 ans* (sous problème basique de comparaison additive) permet de déduire l'âge de Christian.

La table de jardin

LA TABLE DE JARDIN (Cat. 6, 7) ©ARMT
Le papa de Luc a construit une table de jardin rectangulaire en utilisant 7 planches de bois identiques, ayant chacune un périmètre de 3 m. Voici le dessin du plateau de la table, comme il se présente à la fin de la construction.



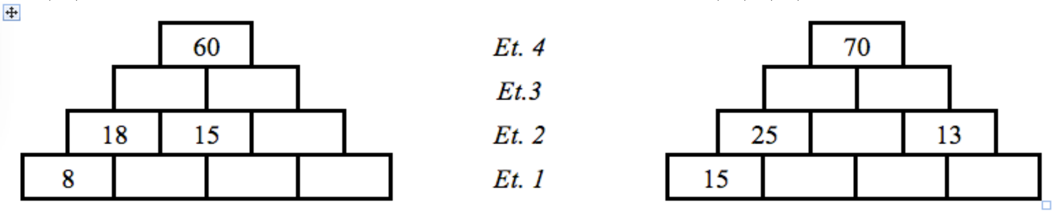
Quelle est la longueur et la largeur de cette table de jardin ?
Donnez votre réponse et expliquez votre raisonnement

C'est une analyse fine du dessin qui permet de connecter les informations : il faut reformuler le périmètre d'une planche en 2 longueurs + 2 largeurs de planche et étudier comme ces longueurs et largeurs interviennent dans les dimensions de la table. Ce problème sera qualifié **d'atypique**.

Les pyramides de briques

PYRAMIDES DE BRIQUES ©ARMT (*on trouve ici seulement une partie des énoncés originaux)*
Pour chaque brique qui repose sur deux autres, le nombre écrit est la somme des nombres des deux briques sur lesquelles elle est posée.
Écrivez les nombres qui manquent pour compléter les pyramides ci-dessous :

Cat 3, 4, 5   Cat 6, 7, 8, 9, 10



La pyramide de gauche

Sur l'étage 1, les réponses 10, puis 5 sont issues de problèmes basiques additifs. Ce sont des successions de problèmes basiques (additions à trou) qui permettent de remplir les cases de l'étage 3, de terminer l'étage 2, puis l'étage 1. Le problème de gauche est un problème « complexe » (assez simple).

La pyramide de droite

Trouver 10 à l'étage 1 résulte d'un problème basique. Mais ensuite que peut-on chercher ? Un nombre de quel étage ? Plusieurs stratégies sont possibles

- faire des essais à l'étage 1 et de les adapter pour trouver 70 au sommet
- trouver un sous problème **calculable** : par exemple à l'étage 4, la somme fait 70 ; on a déjà 38 à l'étage 3 ; le nombre qui manque à l'étage 3 est donc 16 (la moitié de 32) ; les autres sous problèmes sont alors basiques
- tenter d'algébriser le problème : cela peut se révéler complexe, peut on se ramener à une seule inconnue ? Où la placer ?

Ce problème sera qualifié **d'atypique**.

Les problèmes atypiques

Pour ces problèmes, l'élève n'a pas a priori de modèle mathématique disponible, notamment parce qu'il n'en a jamais rencontré de ce type. Il doit alors inventer, construire une nouvelle stratégie. Ce sont ses connaissances dans le champ mathématique dont relève le problème et ses habilités stratégiques (les problèmes qu'il a déjà rencontrés) qui vont l'outiller.
Les stratégies à construire peuvent être du type expérimental (faire une hypothèse, la tester), par approximation (faire une hypothèse, la tester, l'adapter …), déductives (accéder à de nouvelles informations par déduction d'anciennes, analyse de schémas, etc.), mixtes … Elles peuvent être supportées par des dessins , des schémas, des calculs, des textes …
Les problèmes atypiques intéressants pour l'école sont ceux qui réinvestissent des connaissances mathématiques installées (même si elles peuvent en préparer d'autres).
Nous avons rencontré déjà dans ce texte des exemples de problèmes atypiques : *Le nez de Pinocchio*, la table de jardin, certaines *Pyramides de briques*. En voici un autre, *Chameaux et Dromadaires*.

CHAMEAUX ET DROMADAIRES (Cat. 3, 4, 5, 6) ©ARMT
Cléopâtre a dessiné des chameaux et des dromadaires, cela fait 19 bosses et 52 pattes. Elle sait que les chameaux ont deux bosses et les dromadaires n'en ont qu'une. Puis elle a encore dessiné un homme sur le dos de chaque chameau.
Combien d'hommes a-t-elle dessiné en tout ? Expliquez votre réponse.

Ce problème donne lieu pour les niveaux 3 à 6 à des stratégies de type expérimental ou par approximation. Par contre pour les niveaux 8 et 9, ce problème est « juste » complexe pour les élèves qui repèrent l'intérêt, pour trouver la réponse, de (construire et) résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Remarquons qu'il est nécessaire, dans tous les cas, de résoudre d'abord le sous -problème basique : chercher le nombre d'animaux.

Conclusion sur typologie de problèmes arithmétiques

Cette typologie a vocation à décrire tous les problèmes arithmétiques d'entrainement et de réinvestissement juste après que les nouvelles connaissances aient été introduites.
Cette typologie souligne l'importance des problèmes basiques parmi les problèmes d'entrainement et se fonde sur des résolutions individuelles réussies de ces problèmes.
En ce qui concerne la place des problèmes « basiques » dans les problèmes en général, il est tout à fait pertinent de faire un parallèle avec le calcul. Pour le calcul, la mémorisation de faits numériques « basiques » (tables de multiplication, $4 \times 25 = 100$, etc..) et propriétés/relations numériques « basiques » (doubles et moitiés d'entiers, multiplier un nombre par 10, 100, 1000.) concourt à l'aisance calculatoire. En effet la mémorisation libère en mémoire de travail de l'espace pour du raisonnement.

Pour l'enseignant

Un point de vue sur les problèmes arithmétiques organisés en problèmes « basiques », problèmes « complexes », problèmes « atypiques » donne un fil conducteur pour le travail sur les problèmes dans un champ de connaissances.
Le qualificatif « problèmes basiques » désigne les problèmes qui ont vocation à être résolus automatiquement par tous les élèves à un niveau donné. Les problèmes basiques demanderaient être travaillés dans des dispositifs spécifiques qui permettent aux élèves de faire des liens, aidés par l'enseignant, par exemple entre des raisonnements identiques (par exemple Vergnaud 2001, Priolet 2008).

Les problèmes complexes s'appuient sur la connaissance de problèmes basiques sous-jacents au problème complexe. A priori ils ne peuvent être abordés qu'après installation de problèmes basiques dans le champ de connaissances sous jacents au problème complexe.
Les problèmes atypiques peuvent être abordés dès que le minimum de connaissances nécessaires pour les résoudre est installé : par exemple pour Chameaux et Dromadaires, il suffit de connaitre problèmes simples et techniques simples de multiplication et d'addition. Les problèmes atypiques visent à convaincre les élèves de l'intérêt personnel de trouver la réponse, que plusieurs stratégies ont légitimé, le but ultime étant de trouver une stratégie exacte qui réduit le temps de recherche sans perdre la réussite. Un problème basique à un niveau de classe donné a souvent été un problème atypique à des niveaux inférieurs.

Pour l'élève

Cette typologie n'est pas pour l'élève : pour l'élève il n'existe que deux sortes de problèmes, tous imposés : ceux qu'il reconnait et sait traiter rapidement et les autres, ceux qui le bloquent, qui l'amènent à prendre des initiatives et … des risques (Houdement 2003) : mais pour cela il doit avoir confiance en lui.

3. Conclusion de résolution de problèmes

La **mémoire des problèmes** s'enrichit par construction personnelle de ressemblances entre problèmes. Ces ressemblances sont construites par le sujet, il se peut que certains dispositifs aident à construire ces ressemblances. La mémoire des problèmes agit sur les aptitudes à résoudre des problèmes « ressemblants » du point de vue de l'élève.
L'élève doit « automatiser » des **problèmes basiques** dans un champ de connaissances. L'élève doit avoir l'occasion ensuite d'aborder des problèmes **complexes (**composés de ces problèmes basiques). L'élève doit se sentir prêt et confiant pour construire et essayer des stratégies non apprises à l'occasion **des problèmes atypiques.**
On peut ainsi mesurer **la contribution du RMT à la résolution de problèmes**. Le RMT propose des problèmes a priori complexes ou atypiques. Il permet de déceler des déficits en problèmes basiques. L'enseignant peut ainsi retravailler les problèmes basiques qui ne sont pas installés. Le dispositif collectif RMT participe à la construction d'une attitude positive des élèves face aux problèmes. Le RMT permet donc de confronter les élèves à deux dimensions de la résolution de problème : construction /utilisation de connaissances ET inventivité stratégique.
Bien sûr les bienfaits du rallye seront décuplés si l'enseignant s'engage dans sa pratique ordinaire à faire fréquenter les problèmes à ses élèves avec le souci de les faire réussir par eux-mêmes.

III Des outils d'aide à la progressivité de l'enseignement

Le RMT permet d'illustrer l'utilisation d'outils didactiques, de donner du sens à ces outils et de montrer leur pertinence pour les apprentissages.

1. Les deux analyses, a priori et a posteriori

Les problèmes du RMT sont accompagnés de deux rapports d'analyses : une analyse a priori et une analyse a posteriori.
Pour un problème nouveau, l'analyse préalable (sans qu'on ait étudié des productions d'élèves ou de classe) vise à repérer les connaissances minimales nécessaires pour réussir le problème (notamment les problèmes basiques à construire), à anticiper certaines stratégies et certaines erreurs des élèves, à envisager des variantes si l'énoncé se révèle a priori trop facile ou trop difficile.
L'analyse a posteriori consiste en l'analyse des productions d'élèves, le classement des stratégies, des erreurs, des déficits de connaissances des élèves. Elle donne des indications pour la reprise en classe du problème ou le travail sur des problèmes complémentaires.
L'analyse a posteriori permet d'enrichir l'analyse préalable par toutes les informations qu'elle nous donne sur les élèves à travers les productions de classe.
Le fait que les deux analyses soient fournies dans les fiches problèmes RMT permet aux enseignants RMT de ne pas avancer à l'aveuglette quand ils proposent un problème.

En formation des enseignants, grâce à la disponibilité des travaux RMT, il est possible d'initier les enseignants à l'analyse préalable en leur faisant résoudre un problème (ce qui leur donne l'occasion de voir déjà la variété des stratégies d'adultes sur des problèmes complexes), puis anticiper des réponses d'élèves ou de classe (qui sont sans doute des réponses plus élaborées que des individuelles), et enfin comparer avec ce que proposent tels élèves ou tels élèves.

L'analyse a posteriori nous fait entrer sur le terrain de l'élève, comme le déclare Jaquet (2013).

Elle permet de prendre des informations sur des façons de raisonner d'élèves, leur inventivité collective (schémas, calculs, textes pour expliquer), leur propension à choisir une stratégie cognitivement peu coûteuse (par exemple une stratégie arithmétique pour un problème algébrique), leur attachement au contexte réel des problèmes (par exemple les dessins du *Nez de Pinocchio*).
Elle montre la nécessité pour enseigner de « décompresser » (Ball & Bass, 2002) les mathématiques : par exemple la proportionnalité ne se réduit pas à la règle de trois, ni au produit en croix, il existe d'autres raisonnements aussi valides et efficaces. Cette analyse fine des savoirs et des raisonnements (ce que Ball & Bass appellent le savoir mathématique spécifique pour enseigner) est nécessaire pour évaluer la pertinence d'une stratégie, son degré de validité (local ou plus général) ; pour aider (ni trop ni trop peu) ; pour enseigner les différentes facettes d'un savoir.
Elle permet de prendre des informations sur les connaissances des concepts qu'ont les élèves, ce qui peut permettre aux enseignants d'ajuster leur enseignement sur le concept.
Par exemple

- Repérer ce qu'on pourrait considérer comme obstacles : proportionnalité et fonction résistent à une entrée unique par les problèmes atypiques, ils nécessitent une structuration complémentaire (Henry 2005) ; le modèle proportionnel, une fois connu des élèves, est utilisé par eux comme modèle passe-partout d'une relation entre deux grandeurs ; la pensée arithmétique fait obstacle à la pensée algébrique.
- Pointer des courts circuits dans la pensée des élèves : la propriété des écarts comme caractéristique de la proportionnalité ; la prégnance donnée au calcul aux dépens de l'étude des collections et des grandeurs.

L'analyse a posteriori nous fait « voir » le décalage entre l'enseigné et l'appris : ce que l'élève retient d'une notion est une recomposition personnelle de ce qui a été rencontré, c'est rarement ce que l'enseignant a enseigné (ou voulu enseigner). Les productions de classes issues du RMT rendent compte d'un « maximum » de cette appropriation (car il s'agit d'une production collective). Le RMT fait ainsi entrer dans la complexité du temps d'apprentissage, en décalage avec le temps d'enseignement.

2. Le concept de variable didactique

Un problème n'engage pas toujours les mêmes connaissances quand on joue sur une variable, c'est-à-dire quand on change d'une certaine façon la valeur de cette variable. Le concept de variable est un outil didactique pour pousser l'élève à construire des connaissances plus puissantes, à « mettre à jour » (au sens informatique) ses connaissances anciennes.
Dans le RMT on trouve des problèmes qui diffèrent selon la valeur d'une variable. Par exemple *Les Marguerites*

LES MARGUERITES (Cat. 3, 4) ©ARMT

En effeuillant une marguerite, Martine récite la comptine suivante :

« ***Problème, beau problème***	(et arrache le premier pétale)
je te résoudrai	(et arrache le deuxième pétale)
si je participe	(et arrache le troisième pétale)
au rallye transalpin »	(et arrache le quatrième pétale)

Puis elle recommence la comptine :

« ***Problème, beau problème***	(et arrache le cinquième pétale)
...	

Pour une marguerite de 10 pétales, la comptine s'arrête à « ***je te résoudrai*** ».

Avec une marguerite de 47 pétales, sur quelle partie de la comptine Martine s'arrêtera-t-elle ?

Et pour un bouquet de marguerites avec 152 pétales en tout, où Martine s'arrêtera-t-elle ?

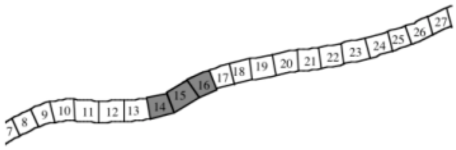
Expliquez comment vous avez trouvé.

La réponse pour 47 pétales peut se trouver en récitant la comptine, en dénombrant les vers et en s'arrêtant sur le vers en position 47. Ce faisant, les élèves s'aperçoivent parfois des positions successives du vers n°4. La réponse pour 152 peut déclencher une utilisation des multiples de 4 : *combien de fois 4 dans 152 ?* Et un regard sur le reste dans la division par 4.
Un retour en classe sur ce problème permettrait de poursuivre avec les nombres 158, 301, 310 etc. qui pourraient encore renforcer cette incitation à la division, en particulier aux niveaux 4, 5, 6, 7. Ce pourrait peut être l'occasion pour l'enseignant de pointer une autre facette de la division euclidienne, le reste. C'est un problème qui mérite d'être posé à plusieurs niveaux en jouant sur la variable nombre de pétales.
Mais aussi *Les Rubans*

LE RUBAN DE MARIE (Cat 3, 4) ©ARMT

Marie a un ruban avec les nombres naturels **de 1 à 40.**

Elle colorie la partie du ruban avec les trois nombres **14, 15 et 16** qui se suivent. Elle additionne ces trois nombres et trouve la somme de **45** qui est justement **l'âge de sa mère** !



Pourrait elle aussi obtenir 45 en additionnant d'autres nombres qui se suivent sur une partie du ruban ?

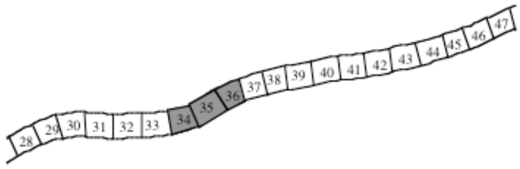
Écrivez toutes vos solutions et les calculs que vous avez faits.

LE RUBAN DE NOÉ (Cat 5, 6) ©ARMT

Noé a un ruban avec les nombres naturels **de 1 à 100**.

Il colorie la partie du ruban avec les trois nombres **34, 35, 36** qui se suivent.

Il additionne ces trois nombres et trouve la somme de **105** qui est justement **son âge** !



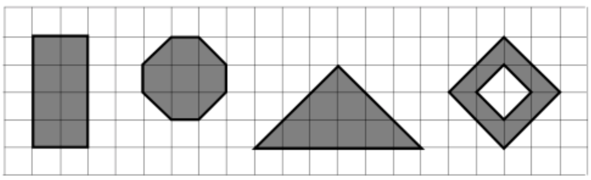
Pourrait-il aussi obtenir 105 en additionnant d'autres nombres consécutifs du ruban ?

Écrivez toutes vos solutions et les calculs que vous avez faits.

Pour le ruban de Marie, des essais successifs de sommes de nombres consécutifs sont possibles avec des ajustements pour atteindre 45, ils permettent d'aboutir.
Pour le ruban de Noé, si on a déjà cherché le ruban de Marie, l'hypothèse d'un plus grand nombre de solutions a priori peut faire évoluer la stratégie vers la recherche d'un nombre « central » dans la somme de nombres successifs. Par exemple dans 34+35+36, 35 est central et est la moyenne des deux nombres qui l'encadrent.
Il serait très intéressant de donner simultanément les deux problèmes qui jouent sur la variable (taille du ruban, nombre somme).
Mais aussi le concept de variable est aussi en jeu dans les problèmes *Décorations* très étudiés (par exemple Jaquet 2007, 2009).

DÉCORATION I Cat. (5, 6, 7) ©ARMT

Un peintre a peint quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur. Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur



18 pots de rouge pour une des figures - 21 pots de bleu pour une autre figure

27 pots de jaune pour autre figure - des pots de noir pour la figure qui reste

À la fin de son travail, tous les pots étaient vides.

Indiquez la couleur de chaque figure. Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

Dans cette première version, les nombres de pots sont respectivement (18 ; 21 ; 27).
Dans une variante, les nombres de pots sont respectivement (72 ; 84 ; 96). Cette version génère plus de réponses fausses (qui ne sont pas dues à la taille des nombres).
Pourtant les deux problèmes relèvent du même contexte et modèle proportionnel (proportionnalité entre nombre de pots et aire des figures). Mais la version I, « petits nombres » permet de trouver une réponse correcte en court-circuitant le modèle proportionnel (en appliquant « juste » la propriété des écarts). Ce qui montre que la version « grands nombres » est plus adaptée pour la classe puisqu'elle bloque une réponse exacte trouvée par un raisonnement incomplet.
Le problème suivant, donné à la suite de la variante 1 ou de la variante 2 du précédent, prolonge cette variante. Mais c'est encore le même problème.

DÉCORATION II

Le peintre remarque qu'il reste encore de la place sur le mur, à droite. Il décide de peindre encore un grand rectangle, de 4 carreaux de large et de 6 carreaux de long, avec de la peinture verte.

Combien de pots de peinture verte le peintre va-t-il utiliser pour le grand rectangle ? Expliquez comment vous avez trouvé.

Par contre le problème suivant, donné à la suite de la variante 1 ou de la variante 2 du précédent, est un problème différent : il s'agit du problème **retourné** (Bloch 2009).

DÉCORATION III
Un nombre de pots de peinture orange est donné : dessinez une figure qui utiliserait exactement toute cette peinture orange.

Ce problème retourné a plusieurs figures solutions qui sont toutes de même aire.

1. Problème et problème retourné

Le couple (problème, problème retourné) permet souvent d'affiner le savoir en jeu (Bloch 2009).
Revenons sur l'exemple du *Nez de Pinocchio*. Le problème direct serait de trouver la longueur du nez de Pinocchio quand il dit par exemple 6 mensonges et 4 vérités. Ce problème, basique, n'est pas posé dans le RMT. Seul le problème retourné est proposé : c'est un problème atypique.

Le lecteur se souvient du problème des *Marguerites*, relevant du reste dans la division par 4
Regardons ce nouveau problème, en partie retourné**,** qui explore une autre facette de la division : le quotient

Les marguerites II
Pour une fleur à 20 pétales, combien de fois Martine récite-elle « je te résoudrai » ?
Pour une fleur à 30 pétales, combien de fois Martine récite-elle « je te résoudrai » ?
Pour une fleur à 45 pétales, combien de fois Martine récite-elle « je te résoudrai » ?

2. Problèmes « proches »

Il est intéressant de faire résoudre par les élèves des problèmes « proches » par un jeu sur une variable (comme Décoration I et II, Ruban I et II, Marguerite I et II) ou parce qu'il s'agit de problème et problème retourné (Nez de Pinocchio, Décoration II et III) ou parce qu'il s'agit de problème relevant de même raisonnement[5]. .
En effet l'analyse des ressemblances entre problèmes (une fois résolus) contribue à montrer aux enseignants la sensibilité des élèves aux variations (quand ils sont par exemple donnés dans le cadre de RMT), elle peut aider les élèves à enrichir leur mémoire des problèmes si ces ressemblances sont discutées et les stratégies comparées dans le cadre de la pratique de classe.

Plus généralement et au-delà du RMT, je pense que les recherches sur les problèmes « basiques », notamment la création et/ou l'adaptation de dispositifs efficaces pour que les élèves les mémorisent (donc repèrent des ressemblances et différences structurantes entre problèmes « ressemblants ») ne sont pas suffisamment avancées.

3. Conclusion sur outils didactiques

La dimension publique du RMT fournit un matériel utilisable pour former les enseignants, expérimentés ou novices, à des outils didactiques puissants.
Les deux formes d'analyse, en particulier l'analyse préalable, permettent souvent de faire le tri entre les tâches adaptées aux élèves (quelles connaissances minimales sont nécessaires pour réussir la tâche, les élèves ont ils ces connaissances minimales ?) et celles qui ne le sont pas, de retenir les tâches qui visent les connaissances souhaitées. Mais on apprend vite que cette analyse préalable devient beaucoup plus riche après qu'on ait étudié les productions d'élèves…
Jouer sur les valeurs d'une variable didactique permet de simplifier ou complexifier la tâche, donc soit de différencier, tout en gardant le même contexte ; soit de permettre l'émergence de connaissances plus sophistiquées ; soit de tester la résistance d'un raisonnement. Des problèmes obtenus par un jeu de variables sont des exemples de problèmes « proches ».
Travailler avec des problèmes « proches » et sur la proximité de problèmes avec les élèves (les critères de proximité sont à préciser) a sans doute un avenir.

---

[5] Là je fais référence à une utilisation de la typologie de Vergnaud sur les problèmes additifs d'une part, et les problèmes multiplicatifs de l'autre pour aider les élèves à structurer les problèmes résolus.

Conclusion

Le but de ce texte était de revenir sur la richesse réelle et potentielle que représente la masse accumulée depuis plus de vingt ans de problèmes construits, analysés et bientôt indexés. L'étude s'est centrée plutôt sur les problèmes numériques, pour mesurer la contribution du RMT à ce vaste champ des problèmes numériques de réinvestissement des connaissances déjà travaillées. Ainsi le RMT permet d'observer, chez les élèves, des raisonnements en construction pour des notions non encore apprises et des raisonnements défaillants sur des notions connues. L'étude a aussi pointé l'utilisation d'outils didactiques puissants pour la conception des problèmes et essayé de montrer leur potentialité pour le travail en classe, sur les problèmes, mais aussi sur la conception des séances de mathématiques grâce aux problèmes.

Références

Ball, D. L. and Bass, H. (2002). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis and E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB:CMESG/GDEDM

Bloch, I. (2009). L'enseignement des mathématiques à des élèves 'en difficulté' : situations, signes mathématiques, phénomènes de contrat. *Actes du colloque 2008 sur la formation des enseignants : Enseigner les mathématiques : où est le problème ?* (pp.63-79). Bordeaux : IREM de Bordeaux

Charnay, R. (2006). Rallyes mathématiques : quel intérêt ? *Grand N, 78*, 53-63

Grugnetti, L. & Dupuis, C. (2003). Le nez de Pinocchio, un problème de mathématique "inverse**"**. *Grand N, 72*, 33-40

Grugnetti, L. & Jaquet, F.(1998). La résolution de problèmes par classes. *Grand N, 61*, 61-69

Grugnetti L., Jaquet F., Medici, D., & Rinaldi M.-G. (2012). Vers la construction de concepts au travers de l'analyse des procédures des élèves et des obstacles qu'ils rencontrent lors de la résolution de problèmes. In *J.-L. Dorier et S. Coutat (eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le XXIe siècle* – (GT9, pp. 1192–1203). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Henry, M. (2005). Le concept de fonction dans les problèmes du RMT. Actes *des journées RMT* Bourg-en-Bresse 2004. Arco Di Trento 2005.

Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en questions. *Grand N, 71,* 7-24.

Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 14*, 31-60

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 67-96.

Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué: entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques.* Note HDR. Université Paris-Diderot

Jaquet, F. et all. (2007). 'Quelques aspects de la proportionnalité dans les problèmes du RMT', Groupe de travail n° 2, in L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M.G. Rinaldi (Eds.) *Les problèmes au service de l'apprentissage : le rôle du RMT: I problemi come supporto per l'apprendimento : il ruolo del RMT. Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*. Vol 6. Parma 2006, Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Sezione di Parma dell'ARMT, ARMT, 101-116.

Jaquet, F. (2009). La proportionnalité, des écarts aux rapports. Groupe de travail n° 2. In Grugnetti L. & Jaquet F. (Eds.) *Actes des journées RMT Vol 8* (pp. 73-86).

Jaquet, F. (2013), Editoriale *Gazette de Transalpin*, n. 3.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N, 69*, 31-52.

Priolet, M. (2008). *Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française. Approches didactique et ergonomique.* Thèse Université de Lyon 2.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10.2/3*, 133-169.

Vergnaud, G. (1997 ; 2001). *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes*. Paris : Nathan

RMT, PUNTO D'INCONTRO TRA INSEGNANTI E RISOLUZIONE DI PROBLEMI

Catherine Houdement[1]

Questo presentazione[2] è lavoro di delucidazione[3] e nello stesso tempo un omaggio al lavoro magistrale svolto nel tempo dai responsabili del Rally Matematico Transalpino. Nella parte introduttiva mi soffermo sulle risorse che offre il RMT, sulla sua ricchezza, distinguendo una dimensione privata del RMT e una dimensione pubblica. Nella seconda parte mi interesso ai processi in gioco nella risoluzione di problemi, propongo un lavoro organizzativo per l'insegnamento dei problemi di aritmetica, utilizzo questa organizzazione per misurare il contributo del RMT alla risoluzione di problemi. Nell'ultima parte propongo strumenti didattici che riguardano sia la costruzione e sia l'analisi dei problemi del RMT e mostro la loro importanza per la formazione degli insegnanti.

I La ricchezza del RMT

Il Rally Matematico Transalpino, inizialmente Rally Matematico Romando, ha cominciato nel 1993 con 20 classi[4]. Si è negli anni sviluppato e ampliato e dal 2011, almeno 4000 classi vi partecipano. Un gran numero di insegnanti, scuole di vario ordine e grado e ovviamente di allievi, sono coinvolti in questa "impresa". Penso che il RMT abbia due dimensioni che chiamerei l'una privata e l'altra pubblica. La dimensione privata consiste, in particolare nei momenti della gara, nell'osservare come gli allievi si organizzano, ricercano, si muovono con la matematica, ma anche come gestiscono la risposta collettiva della propria classe su un dato problema. La dimensione pubblica è legata alla moltitudine dei documenti disponibili, in particolare sul sito dell'associazione: le loro analisi, le produzioni degli allievi, gli articoli.
In questo testo mi concentrerò sulla dimensione pubblica e sui problemi numerici. I problemi legati alla geometria sono anch'essi degni di attenzione e un gran numero di cose dette sui problemi numerici possono estendersi agli altri problemi, ma preferisco trattare un tema che corrisponde alle mie ricerche attuali.

Qual è la ricchezza pubblica del RMT? L'abbondanza dei problemi proposti, la varietà delle conoscenze alle quali fanno appello, la presenza costante di commenti sui problemi. Ogni enunciato di un *Problema* è accompagnato da una richiesta di spiegazione della risposta, può inoltre dare luogo a varianti, reperibili dall'avere il medesimo titolo. E' anche notevole il fatto che ogni problema abbia un titolo, in particolare per la memoria collettiva degli insegnanti. E' anche predisposta, per ciascun problema una *Analisi a priori* che tiene conto dell'*ambito concettuale* nel quale si inscrive il problema, di una *Analisi del compito* dell'allievo, di una proposta di *Attribuzione dei punteggi* alle risposte degli allievi, di una *Analisi a posteriori* fondata sullo studio degli elaborati degli allievi. Tutto ciò è spesso accompagnato da esempi di elaborati.
Par esempio, in (Grugnetti & Dupuis 2003) si trova il simpatico enunciato che segue (un occhiolino all'allievo) con elaborati degli allievi.

Il naso di Pinocchio
Il naso di Pinocchio è lungo 5 centimetri. Quando Pinocchio dice una bugia la Fata dai capelli turchini glielo fa allungare di 3 centimetri, ma quando Pinocchio dà una risposta sincera la Fata glielo fa accorciare di 2 centimetri. Alla fine della giornata Pinocchio ha il naso lungo 20 centimetri e ha detto 7 bugie.

Quante risposte sincere ha dato Pinocchio alla Fata nel corso della giornata.

Spiegate come avete fatto a trovare la risposta.

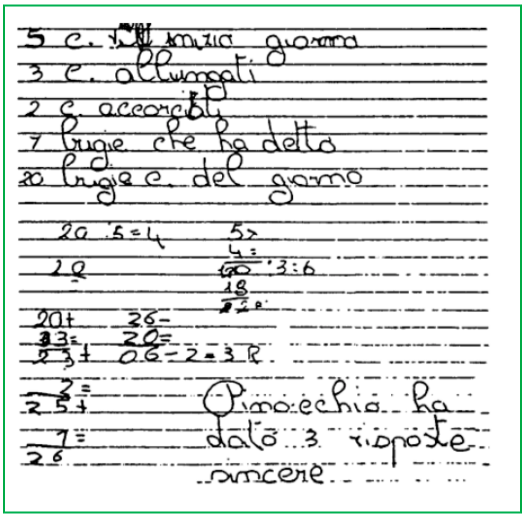
Alcuni elaborati evidenziano delle strategie errate che talvolta portano comunque alla risposta giusta, e altri delle strategie corrette, ma che conducono talvolta ad una risposta errata.

[1] LDAR, Universités Paris Diderot et Rouen
[2] Un grande grazie a Lucia Grugnetti per la qualità della sua traduzione in italiano che avevo già apprezzato nella presentazione della conferenza in Power Point al convegno internazionale dell'ARMT svoltosi a Siena nell'ottobre 2014.
[3] In particolare per individuare gli invarianti dei problemi del rally e analizzare il loro contributo alla risoluzione di problemi e alla formazione degli insegnanti.
[4] http://www.armtint.org/fr/presentation-du-rallye/historique

Strategie errate (e talvolta una risposta corretta)

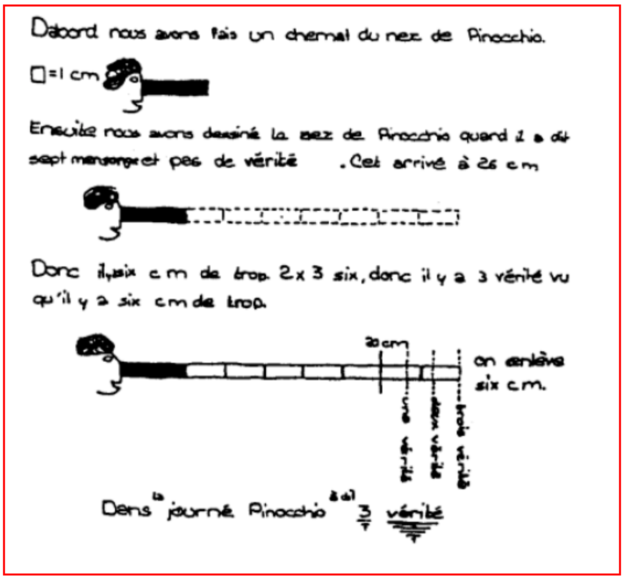
“Pinocchio ha detto 10 volte la verità. La risposta è stata trovata facendo una riga di 20 cm, poi si è allungata di 3x7 = 21. Dopo è stato necessario togliere 2 cm per arrivare a 20 cm.” (Categoria 3-I)

“*Pinocchio ha detto 7 bugie e ha detto la verità alla fata dai capelli turchini ma visto che ha detto 7 bugie avrà detto 7 volte la verità”*(Categoria 3-CH)

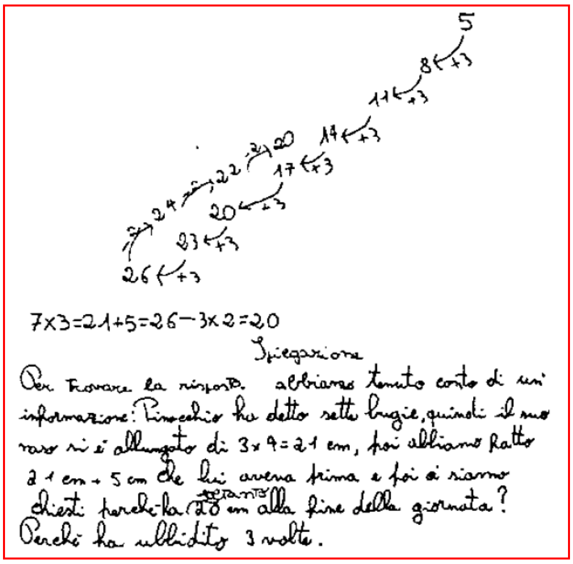

5 c. all'inizio giornata
3 c. allungati
2 c. accorciati
7 bugie che ha detto
20 bugie c. del giorno
Pinocchio ha dato 3 risposte sincere

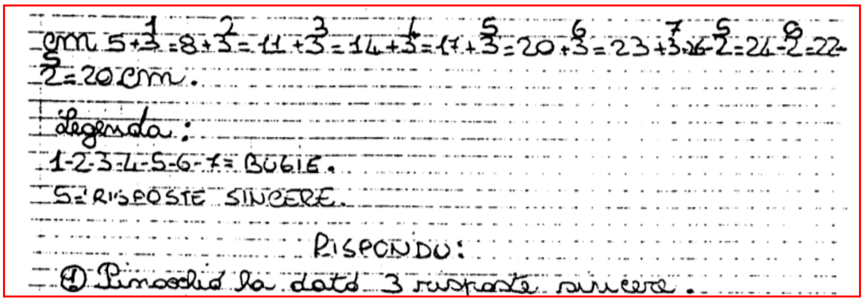
Strategie corrette con una risposta giusta

Cat.3


Dabord nous avons fais un chemal du nez de Pinocchio.
□=1 cm
Ensuite nous avons dessiné la nez de Pinocchio quand il a dit sept mensonge et pas de vérité. Cet arrivé à 26 cm
Donc il y a six cm de trop. 2 x 3 six, donc il y a 3 vérité vu qu'il y a six cm de trop.
20 cm
on enlève six cm.
Dans la journé Pinocchio à dit 3 vérité

Cat.4


7x3=21+5=26−3x2=20
Spiegazione
Per trovare la risposta abbiamo tenuto conto di una informazione: Pinocchio ha detto sette bugie, quindi il suo naso si è allungato di 3x7=21 cm, poi abbiamo fatto 21 cm + 5 cm che lui aveva prima e poi ci siamo chiesti perchè ha soltanto 20 cm alla fine della giornata? Perchè ha ubbidito 3 volte.


cm 5+3=8+3=11+3=14+3=17+3=20+3=23+3=26−2=24−2=22−2=20 cm.
legenda:
1-2-3-4-5-6-7= BUGIE.
S= RISPOSTE SINCERE.
RISPONDO:
① Pinocchio ha dato 3 risposte sincere.

Lo studio della gran quantità di elaborati relativi ad un problema permette di far emergere certe caratteristiche delle strategie.
Le strategie errate (o difficili da capire) possono dipendere da una incomprensione del contesto, da una applicazione di un contratto implicito della classe (per esempio utilizzare l'ultima operazione studiata), da un "confinamento" nel numerico, da una perdita del senso del calcolo, da un'assenza di controllo del contesto… Possono comunque portare ad una risposta corretta! Da qui l'importanza della spiegazione per la pertinenza della risposta!
Le strategie corrette sono molto varie con disegni, schemi, scritture aritmetiche, calcoli. Mostrano l'inventiva degli allievi circa i tipi di rappresentazione (simbolica o no) per spiegare la risposta. In due degli elaborati precedenti si vede bene il tentativo di tener conto del contesto (forma del naso) e del modello matematico e illustrare così la ragione della risposta.
Queste strategie evolvono talvolta secondo il livello della classe, cosa che mostra il ruolo che giocano le conoscenze degli allievi nella risoluzione di un problema.
Le strategie variano talvolta secondo i paesi, cosa che mette in luce l'influenza dei tipi di insegnamento (in particolare le scelte dei programmi) su una nozione data.

La varietà delle produzioni degli allievi ci permette di accedere a modalità di ragionamento sui problemi scelti. Ma come definire i problemi del RMT? Che posto hanno nell'insieme dei problemi di matematica che incontrano o dovrebbero incontrare gli allievi di una classe? Che cosa sappiamo su come si riesce a risolve correttamente un problema?
Tutto ciò è l'oggetto del paragrafo che segue.

II Il processo di risoluzione di problemi (in particolare numerici)

Prendiamo l'esempio di questi quattro problemi a, b, c e d. In ciascuno di essi si tratta di trovare il numero di tulipani di un'aiuola.
a) E' un'aiuola di fiori formata da 60 tulipani rossi e da 15 tulipani gialli.
b) Ecco un'aiuola di 60 file di 15 tulipani.
c) E' un'aiuola di 60 fiori, formata da tulipani e da 15 giunchiglie.
d) Conto 60 tulipani disposti in 15 aiuole tutte uguali.

E' indubbio che il lettore riesca a rispondere quasi immediatamente. Gli enunciati evocano lo stesso contesto (fiori e aiuola), presentano la stessa struttura sintattica (similarità di lettura-comprensione), pongono la stessa domanda (quanti tulipani in UNA aiuola?), mettono in gioco gli stessi numeri (15 e 60). Ma i problemi richiedono operazioni differenti. La questione è la seguente: come siamo capaci, noi, gli esperti, di associare operazioni differenti ad enunciati così simili? Chiediamo l'aiuto di uno psicologo cognitivista, Jean Julo, che ha lavorato sulla risoluzione di problemi matematici scolastici

1. Il punto di vista di uno psicologo cognitivista sulla risoluzione di problemi

Julo (1995, 2002) mette alla base del processo di risoluzione di problemi l'importanza della rappresentazione (mentale). Che cos'è una rappresentazione? Secondo Julo (1995 p.11) "*comprendere qualcosa sarebbe, in un modo o in un altro, costruire una rappresentazione di tale cosa.*" Una rappresentazione è il frutto di una profonda attività mentale, che mette in opera tutto un insieme di processi atti a trattare le informazioni sul nostro ambiente che provengono dai nostri organi sensoriali. Le rappresentazioni (di un problema) che considero qui sono rappresentazioni puntuali e occasionali, Julo parla di *rappresentazioni particolarizzate*. Esistono inoltre, nel modello attuale degli psicologi, delle rappresentazioni più o meno stabili nella memoria a lungo termine; sono le conoscenze (e le convinzioni) che ci permettono di "comprendere" il mondo.
La rappresentazione del problema non si riduce alla comprensione del suo enunciato. La natura di un problema richiede un altro tipo di rappresentazione. "*Sono le relazioni complesse tra l'obiettivo dato e le condizioni per arrivare a questo obiettivo (i vincoli e gli aiuti che introduce l'autore dell'enunciato) che caratterizzano ciò che è un problema in rapporto ad altre situazioni di comprensione del testo.*" (Julo 1995, p.16). Anche ciò che è in gioco nella risoluzione di problemi è specifico: "*E' proprio il fatto di scoprire da soli una soluzione che non si intravedeva all'inizio che è la posta in gioco di questa attività particolare.*" (Julo 1995, p.25)
Sembra che ciascuno di noi abbia una **memoria di problemi** (Julo 1995) che ci permette di riconoscere e di trattare dei problemi in modo quasi "automatico". Arricchiamo tale memoria grazie alla risoluzione corretta di problemi che **portiamo a termine!** Per contro, è molto difficile sapere come immagazziniamo nella nostra memoria questi problemi risolti con successo.

In tal modo ci sarebbero almeno due componenti (non in successione, ma simultanee, che interagiscono) nell'attività di risoluzione di problemi:

- costruire una rappresentazione del problema, che può bastare per desumere dalla propria memoria una strategia adatta al problema;
- attivare un trattamento**:**
  - ricordarsi di una strategia: nel caso di un problema riconosciuto: *le aiuole di fiori*
  - costruire una strategia: per un problema "del quale non si ha alcun ricordo": per esempio *Il naso di Pinocchio*

La difficoltà di un problema per un allievo dipenderebbe, tra le altre cose, dalla complessità della costruzione di una rappresentazione adatta. Sottolineiamo anche la fiducia in se stessi necessaria a lanciarsi nella costruzione di una nuova strategia.
Questo apporto essenziale alla comprensione del processo di risoluzione di problemi porta a precisare due questioni dell'insegnamento:

- arricchire la memoria dei problemi degli allievi, in particolare facendoli allenare sulla risoluzione di problemi "**di base**": quelli che bisognerebbe "automatizzare" per un dato campo di conoscenze
- dare loro l'occasione di inventare strategie, introducendo "dispositivi" che diano loro la voglia di cercare problemi "**atipici**"

Più l'allievo è riuscito a risolvere dei problemi, più riuscirà a risolverne altri: in effetti, più sarà ricca la sua memoria, maggiori saranno le possibilità di "riconoscere" in un certo senso, un problema.

2. Una tipologia di problemi aritmetici

Chiarisco dapprima che questa tipologia riguarda **a priori** i problemi di reinvestimento in un ambito di conoscenze.
Ho scelto le espressioni "di base" e "atipici" per aiutare l'insegnante a organizzare, in un livello dato e per ambito di conoscenze, i problemi che egli sceglie o trova in diversi testi.

Problemi "di base"

I problemi di base sono problemi destinati ad essere "risolti correttamente in maniera automatica" da allievi di un dato livello o di un determinato ciclo. Sono, per quanto riguarda la scuola primaria (livello da 1 a 5 o 6) problemi con due dati di cui bisogna dedurre un terzo numero (per esempio tramite la scelta di un'operazione aritmetica), problemi basati su un modello proporzionale (da tre dati o più, dedurre altri numeri). Gli enunciati sono semplici, senza sovraccarico di informazioni, senza difficoltà sintattiche eccessive…
Esempi di problemi di base per i livelli 4 e 5

1. Con 2 356 € , quanti biglietti da 100 € possiamo ottenere? E con 12 356 €?
2. Alice ha 26 francobolli nella sua collezione, che sono due volte di più di quelli di Leila. Quanti francobolli ha Leila?
3. Gregorio ha sistemato nel suo camioncino vuoto 75 sacchi di 20 kg di mele. Quanto pesa il suo carico?

Vergnaud (1991, 1997) e altri ricercatori ci aiutano a gerarchizzare a priori le complessità di ragionamento in gioco con, da un lato, i problemi additivi (addizione e sottrazione) e dall'altro i problemi moltiplicativi (moltiplicazione, divisione, proporzionalità).

Problemi "complessi"

Analizziamo il problema seguente
Al cinema Royal Ciné un adulto paga 6 € per proiezione e un bambino paga 4 € per proiezione. Alla proiezione del pomeriggio, c'erano 50 adulti e dei bambini. Alla proiezione della sera, c'erano 15 adulti e 20 bambini, l'incasso della giornata è di 542 €. Quanti bambini c'erano alla proiezione del pomeriggio?
(da ERMEL CM1[5])
Questo problema non è di base per nessuno, è necessario costruire dei **sotto-problemi di base "calcolabili"** che permettano di procedere verso la risposta. Qui il primo sotto-problema è la ricerca dell'incasso della sera, questo problema è calcolabile grazie a certe informazioni date nel testo. E' necessario **collegare queste informazioni** che nel testo sono lontane fra loro, per costruire questo primo sotto-problema di base: *Un adulto paga 6 € a proiezione e un bambino paga 4 € per proiezione. Alla proiezione della sera c'erano 15 adulti e 20 bambini.*
Non bisogna dimenticare di **qualificare il risultato calcolato** (Houdement 2011): è l'incasso della sera.
Il secondo problema di base calcolabile è la ricerca dell'incasso del pomeriggio.
Gli altri sotto-problemi di base calcolabili sono la ricerca dell'incasso del pomeriggio per quanto riguarda gli adulti, poi quello relativo ai bambini, e infine il numero di bambini alla proiezione del pomeriggio.

[5] ERMEL (1997 ; 2005) *Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1*. Paris :Hatier

Direi che questo è un **problema complesso**[6]. Un problema complesso necessita della costruzione di sotto-problemi di base calcolabili (e in particolare il collegamento fra le informazioni). L'allievo non deve costruire una nuova strategia, ma deve articolare svariate risoluzioni di problemi di base la cui costruzione è a suo carico.
Gli allievi, però, non sono sempre "equipaggiati" di fronte a questi problemi.
Può capitare che non siano in grado di reperire i problemi di base soggiacenti ai problemi complessi in quanto non sanno risolverli in "maniera automatica".
O anche non riconoscono la necessità di **qualificare** (Houdement 2011) i risultati calcolati.
Analizziamo per esempio la risposta di Paul (livello 3) di fronte al problema precedente. Paul ha svolto correttamente la maggior parte dei calcoli necessari a trovare la soluzione, ma dà 72 come risposta al problema; 72 però è l'incasso del pomeriggio relativo ai bambini. Durante l'intervista Paul dichiara: "Un adulto è 6 € dunque ho fatto 15 volte 6 uguale 90. Poi c'erano 20 bambini alla proiezione, poiché era 4 € ho fatto 20 volte 4 uguale 80". Quando gli si chiede a che cosa corrisponda 90 oppure 80, non sa rispondere. Non è capace di qualificare la risposta (neanche dire almeno 80 €) né in maniera più marcata (80 €, incasso proveniente dai bambini alla proiezione della sera). E' quest'assenza di qualificazione, cioè il fatto di calcolare senza mantenere il riferimento al contesto, che gli fa perdere il filo del problema.

Alcuni esempi per approfondire lo studio

L'età dei fratelli

Questo problema del RMT è un problema complesso.
E' necessario connettere le informazioni per poter procedere, in particolare le informazioni su Antonio in rapporto a quelle su Cristiano. Alcune informazioni si trovano nella domanda.

L'ETA' DEI FRATELLI (Cat. 3, 4, 5). ©ARMT
In una famiglia ci sono tre ragazzi, Antonio, Bernardo, Cristiano e una ragazza Denise. Denise sfoglia l'album delle foto di famiglia e osserva che:
quando Antonio aveva 8 anni, Bernardo aveva 12 anni
quando Bernardo aveva 9 anni, Cristiano aveva 3 anni.

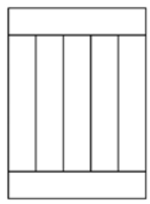
Quale era l'età di Cristiano quando Antonio aveva 10 anni?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Le informazioni: *Antonio ha 10 anni* e *quando aveva 8 anni, Bernardo aveva 12 anni*, permettono di costruire per esempio i seguenti sotto-problemi: "Bernardo ha tot anni in più di Antonio" (sotto-problema basico di confronto additivo) e "età di Bernardo".
L'informazione "età di Bernardo" e *quando Bernardo aveva 9 anni Cristiano aveva 3 anni* (sotto-problema di base di confronto additivo) permette di dedurre l'età di Cristiano.

La tavola da giardino

LA TAVOLA DA GIARDINO (Cat. 6, 7) ©ARMT
Il papà di Luca ha costruito un tavolo rettangolare da giardino utilizzando 7 assi di legno uguali, ciascuna di perimetro 3 metri.
Ecco il disegno del piano del tavolo così come appare al termine del lavoro.
Quali sono la lunghezza e la larghezza di questo tavolo da giardino?
Date la vostra risposta e spiegate il ragionamento che avete fatto.



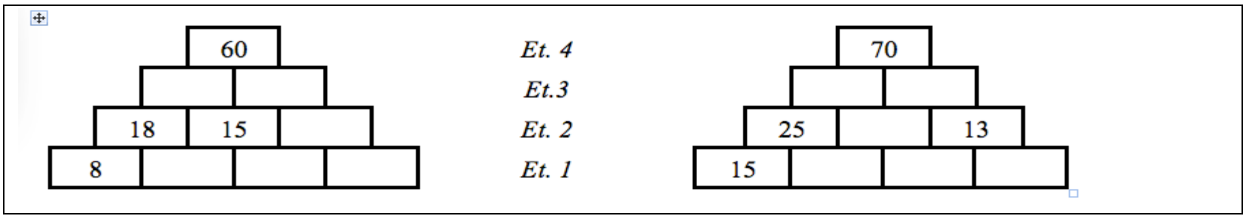
Ciò che permette di connettere le informazioni è un'analisi attenta del disegno: bisogna esprimere il perimetro di un asse in "2 lunghezze + 2 larghezze di asse" e studiare come tali lunghezze e larghezze intervengono nelle dimensioni del tavolo. Questo problema verrà considerato come **atipico**.

Piramidi di mattoni

PIRAMIDI DI MATTONI ©ARMT (*si riporta qui solo un estratto del testo originale*)
Per ogni mattone che si appoggia su altri due, il numero scritto è la somma dei numeri dei due mattoni sui quali esso è posato.
Scrivete i numeri mancanti per completare la piramide disegnata qui sotto, seguendo la stessa regola.

Cat 3, 4, 5 Cat 6, 7, 8, 9, 10

[6] Questo aggettivo è già stato utilizzato, per esempio in ERMEL CM1 (1997, p.261) per descrivere problemi la cui risoluzione necessita l'utilizzazione successiva di diverse operazioni. Ho cercato di affinare questo punto di vista.



La piramide di sinistra
Sul piano 1, le risposte 10, poi 5 provengono da problemi di base additivi. Sono delle successioni di problemi di base (addizione incompleta) che permettono di riempire le caselle del piano 3, di finire il piano 2, poi il piano 1. Il problema di sinistra è un problema "complesso" (… piuttosto semplice).

La piramide di destra
Trovare 10 nel piano 1 avviene con un problema di base. Poi però che cosa si può cercare? Un numero di quale piano? Sono possibili diverse strategie:
- fare dei tentativi nel piano 1 e adattare per arrivare a 70 al vertice
- trovare un sotto-problema calcolabile: per esempio nel piano 4, la somma fa 70; si ha già 38 al piano 3; il numero che manca al piano 3 è dunque 16 (la metà di 32); gli altri sotto-problemi sono allora di base
- tentare di algebrizzare il problema: questo può rivelarsi complesso, è possibile arrivare ad una sola incognita? Come sceglierla?

Questo problema sarà considerato come **atipico**.

I problemi atipici

Per questi problemi l'allievo non ha a priori dei modelli matematici disponibili, in particolare perché non ha mai incontrato problemi di questo tipo. Deve allora inventare, costruire una nuova strategia. Sono le sue conoscenze nell'ambito matematico del problema e le sue abilità strategiche (i problemi che ha già incontrato) che gli apporteranno gli strumenti di cui necessita.
Le strategie da costruire possono essere di tipo sperimentale (fare un'ipotesi, testarla), per approssimazione (fare un'ipotesi, testarla, adattarla…), deduttive (accedere a nuove informazioni per deduzione da altre più anziane, analisi di schemi, etc.), miste … . Le strategie possono essere supportate da disegni, schemi, calcoli, testi…
I problemi atipici interessanti per la scuola sono quelli che reinvestono conoscenze matematiche già "installate" (anche se possono prepararne altre).
In questo testo abbiamo già incontrato problemi atipici: il naso di Pinocchio, la tavola da giardino, alcune piramidi di mattoni. Eccone un altro, Cammelli e Dromedari.

CAMMELLI E DROMEDARI (Cat. 3, 4, 5, 6) ©ARMT
Cleopatra ha disegnato dei cammelli e dei dromedari e ciò fa 19 gobbe e 52 zampe. Lei sa che i cammelli hanno due gobbe e i dromedari una. Cleopatra ha anche disegnato un uomo su ciascun cammello. Poi ha anche disegnato un uomo sul dorso di ogni cammello.
Quanti uomini ha disegnato Cleopatra in tutto?
Spiegate la vostra risposta.

Questo problema dà luogo ai livelli da 3 a 6, a strategie di tipo sperimentale o per approssimazione. Invece, per il livelli 8 e 9, questo problema può essere interessante, laddove, per trovare la risposta, gli allievi costruiscono e risolvono un sistema di due equazioni in due incognite. Va comunque osservato che, in ogni modo, è necessario risolvere dapprima il sotto-problema di base: cercare il numero di animali.

Conclusione su tipologie di problemi aritmetici

Questa tipologia intende descrive tutti i problemi aritmetici di allenamento e reinvestimento subito dopo l'introduzione di nuove conoscenze.
Questa tipologia sottolinea l'importanza dei problemi di base tra i problemi di allenamento e si fonda su delle risoluzioni individuali riuscite di questi problemi.
Per ciò che riguarda il posto dei problemi "di base" nei problemi in generale, è certamente pertinente fare un parallelo con il calcolo. Per il calcolo, la memorizzazione di fatti numerici "di base" (tabelline, 4x25=100, etc.) e proprietà/relazioni numeriche "di base" (doppi e metà di interi, moltiplicare un numero per 10, 100,1000….) concorre all'agilità di calcolo. In effetti la memorizzazione libera nella memoria di lavoro dello spazio per il ragionamento.

Per l'insegnante

Un punto di vista sui problemi aritmetici organizzati in problemi "di base", problemi "complessi", problemi "atipici" offre un filo conduttore per il lavoro sui problemi in un ambito di conoscenze.
La qualificazione "problemi di base" designa i problemi che hanno vocazione ad essere risolti automaticamente da tutti gli allievi ad un livello dato. I problemi di base richiederebbero di essere "lavorati" in dispositivi specifici che permettano agli allievi di fare dei legami, con l'aiuto dell'insegnante, per esempio tra ragionamenti identici (per esempio Vergnaud 2001, Priolet 2008).
I problemi complessi si appoggiano sulla conoscenza di problemi di base soggiacenti al problema complesso. A priori possono essere affrontati solo dopo l'introduzione di problemi di base nel campo di conoscenze soggiacenti al problema complesso.
I problemi atipici possono essere affrontati appena viene "insediato" il minimo di conoscenze necessarie a risolverli: per esempio, per Cammelli e Dromedari, è sufficiente conoscere problemi semplici e semplici tecniche di moltiplicazione e addizione. I problemi atipici mirano a convincere gli allievi dell'interesse personale a trovare la risposta che diverse strategie hanno legittimato, essendo l'obiettivo finale quello di trovare una strategia corretta che riduca i tempi di ricerca, senza perdere la riuscita. Un problema di base per un certo livello di una classe è sovente stato un problema atipico a livelli inferiori.

Per l'allievo

Questa tipologia non è per l'allievo: per l'allievo esistono solo due tipi di problemi, tutti imposti: quelli che riconosce ed è capace di risolvere rapidamente e gli altri, quelli che lo bloccano, che lo portano a prendere delle iniziative e… dei rischi (Houdement 2003): ma per questo aspetto l'allievo deve avere fiducia in se stesso.

3. Conclusione sulla risoluzione di problemi

La **memoria dei problemi** si arricchisce per il tramite della costruzione personale di somiglianze tra problemi. Queste somiglianze sono costruite dal soggetto, può essere che certi dispositivi aiutino a costruire tali somiglianze. La memoria dei problemi agisce sulle attitudini a risolvere problemi "somiglianti" dal punto di vista dell'allievo.
L'allievo deve "automatizzare" dei problemi **di base** in un ambito di conoscenze. L'allievo deve avere l'occasione poi di affrontare problemi **complessi (**composti da questi problemi di base). L'allievo deve sentirsi pronto e fiducioso a costruire e provare strategie non apprese in occasione di **problemi atipici.**
Possiamo quindi misurare **il contributo del RMT alla risoluzione di problemi**.
Il RMT propone problemi complessi o atipici a priori. Esso permette di individuare delle insufficienze in problemi di base. L'insegnante può così lavorare nuovamente con problemi di base che non sono acquisiti. Il dispositivo collettivo RMT partecipa alla costruzione di un atteggiamento positivo degli allievi di fronte ai problemi. Il RMT permette dunque di mettere gli allievi di fronte a due dimensioni della risoluzione di problemi: costruzione/utilizzazione di conoscenze E inventività strategiche.
Sicuramente i benefici del rally saranno decuplicati se l'insegnante si impegna nella sua pratica ordinaria a far vivere quei problemi ai suoi allievi con la preoccupazione di farli "riuscire" da soli.

III Strumenti in aiuto alla progressività dell'insegnamento

Il RMT permette di illustrare l'uso di strumenti didattici, di annettere senso a questi strumenti e di mostrare la loro pertinenza per gli apprendimenti.

1. Le due analisi, a priori e a posteriori

I problemi del RMT sono accompagnati da due rapporti di analisi: un'analisi a priori e un'analisi a posteriori.
Per un problema nuovo, l'analisi preliminare (senza aver studiato le produzioni degli allievi o delle classi) mira ad individuare le conoscenze minimali necessarie alla riuscita del problema (in particolare i problemi di base da costruire), ad anticipare determinate strategie e determinati errori degli allievi, a pensare a delle varianti laddove l'enunciato si riveli a priori troppo facile o troppo difficile.
L'analisi a posteriori consiste nell'analisi di produzioni degli allievi, nella classificazione di strategie, di errori, di insufficienze nella conoscenze degli allievi. Essa dà indicazioni per la ripresa in classe del problema o per il lavoro su problemi complementari.
L'analisi a posteriori permette di arricchire l'analisi preliminare tramite tutte le informazioni che apporta sugli allievi attraverso le produzioni delle classi.
Il fatto che le due analisi siano fornite nelle schede sui problemi del RMT permette, agli insegnanti RMT, di non procedere troppo alla cieca quando propongono dei problemi.

Nella formazione degli insegnanti, grazie alla disponibilità dei lavori RMT, è possibile avvicinare gli insegnanti all'analisi preliminare facendo risolvere loro un problema (cosa che dà loro l'occasione di vedere in prima battuta la varietà delle strategie degli adulti su problemi complessi), poi anticipare le risposte degli allievi o della classe (che sono senza dubbio risposte più elaborate di quelle individuali) e infine, confrontarle con quelle proposte da vari allievi.

L'analisi a posteriori ci fa entrare sul terreno dell'allievo, come lo dichiara Jaquet (2013).
Essa permette di acquisire informazioni sul modo di ragionare degli allievi, sulla loro inventività collettiva (schemi, calcoli, testi per spiegare), la loro propensione a scegliere una strategia cognitivamente poco dispendiosa (per esempio una strategia aritmetica per un problema algebrico, il loro "attaccamento" al contesto reale dei problemi (per esempio i disegni del Naso di Pinocchio).
L'analisi a posteriori mostra anche la necessità di insegnare a "decomprimere" (Ball & Bass, 2002) la matematica: per esempio, la proporzionalità non si riduce alla regola del tre, né al prodotto in croce, esistono altri ragionamenti ugualmente validi ed efficaci. Quest'analisi fine dei saperi e dei ragionamenti (cosa che Ball & Bass chiamano i saperi matematici specifici per insegnare) è necessaria per valutare la pertinenza di una strategia, il suo grado di validità (locale o più generale); per aiutare (né troppo, né troppo poco); per insegnare le differenti sfaccettature del sapere.
Essa permette di acquisire informazioni sulle conoscenze dei concetti che hanno gli allievi, cosa che può permettere agli insegnanti di fare aggiustamenti sul loro insegnamento di un dato concetto.
Per esempio

- Reperire quello che potrebbe essere considerato come un ostacolo: proporzionalità e funzione resistono ad una "entrata" unica tramite i problemi atipici, necessitano di una strutturazione complementare (Henry 2005); il modello proporzionale, una volta noto agli allievi, è da essi utilizzato come modello passe-partout di una relazione tra due grandezze; il pensiero aritmetico costituisce un ostacolo al pensiero algebrico;
- Creare dei corto-circuiti nel pensiero degli allievi: la proprietà degli scarti come caratteristica della proporzionalità; la precedenza data al calcolo a discapito dello studio di collezioni e di grandezze.

L'analisi a posteriori ci fa "vedere" il divario tra ciò che è insegnato e ciò che è appreso: ciò che l'allievo ritiene di una nozione è una ricomposizione personale di ciò che ha incontrato, è raramente ciò che l'insegnante ha insegnato (o voluto insegnare). Le produzioni delle classi che partecipano al RMT illustrano un "massimo" di questa appropriazione (poiché si tratta di una produzione collettiva). Il RMT fa quindi entrare nella complessità del tempo di apprendimento, sfasato rispetto al tempo d'insegnamento.

2. Il concetto di variabile didattica

Un problema non implica sempre le medesime conoscenze quando si gioca su una variabile, cioè quando si cambia in una certa maniera il valore di tale variabile. Il concetto di variabile è uno strumento didattico per spingere l'allievo a costruire conoscenze più potenti, ad "aggiornare" (in senso informatico) le sue conoscenze pregresse.
Nel RMT si trovano problemi che differiscono secondo il valore di una variabile. Per esempio, *Le Margherite*.

LE MARGHERITE (Cat. 3, 4) ©ARMT

Sfogliando una margherita Martina recita questa filastrocca:

"***Problema, problema***,	(e stacca il primo petalo)
ti risolverò	(e stacca il secondo petalo)
se al rally transalpino	(e stacca il terzo petalo)
parteciperò	(e stacca il quarto petalo)

Poi Martina ricomincia la filastrocca:

"***Problema, problema***,	(e stacca il quinto petalo)
…	

Per una margherita a 10 petali, la recita della filastrocca si concluderà con il verso ***ti risolverò***.

Con una margherita a 47 petali quale sarà la conclusione?

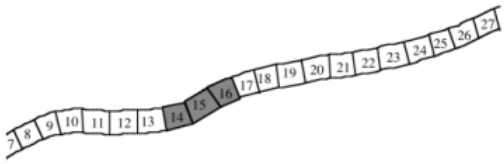
E se ci fosse un mazzo di margherite con 152 petali in tutto, con quale verso si concluderebbe la filastrocca?

Spiegate il vostro ragionamento.

La risposta per 47 petali si trova con la recita della filastrocca, contando i versi e fermandosi sul verso in posizione 47. Nel fare questo gli allievi intravedono talvolta le posizioni successive del verso n°4. La risposta per 152 può far venire in mente un ricorso a multipli di 4: *quante volte sta 4 in 152?* E uno sguardo sul resto nella divisione per 4.
La ripresa in classe di questo problema permetterebbe di proseguire con i numeri 158, 301, 310 ecc. che potrebbero ancora rafforzare questa incitazione alla divisione, in particolare ai livelli 4, 5, 6, 7. Potrebbe essere

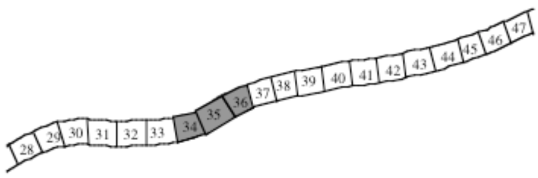
l'occasione per l'insegnante di fare il punto su un altro aspetto della divisione euclidea, il resto. E' un problema che merita di essere proposto a diversi livelli giocando sulla variabile numero di petali.
Ma anche i *Nastri*

IL NASTRO DI MARIA (Cat 3, 4) ©ARMT
Maria ha un nastro con i numeri naturali **da 1 a 40**.
Colora la parte con i numeri **14, 15 e 16** che si trovano proprio uno dopo l'altro sul nastro.
Addiziona poi questi tre numeri e trova come somma **45** che è proprio **l'età di sua mamma**!



Maria può ottenere ancora 45 addizionando altri numeri che si trovano proprio uno dopo l'altro su questo nastro?
Scrivete tutte le vostre soluzioni e i calcoli che avete fatto.

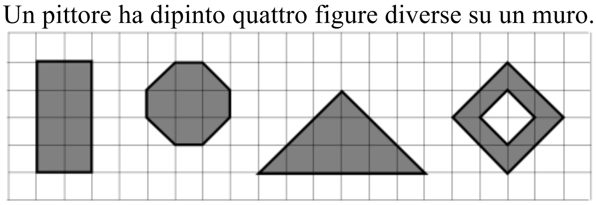
IL NASTRO DI NOÈ (Cat 5, 6) ©ARMT
Noè ha un nastro con i numeri naturali **da 1 a 100**.
Colora la parte con i numeri consecutivi **34, 35 e 36**.
Addiziona poi questi tre numeri e trova come somma **105** che è proprio **la sua età**!



Noè può ottenere ancora 105 addizionando altri numeri consecutivi del nastro?
Scrivete tutte le vostre soluzioni e i calcoli che avete fatto.

Nel caso del nastro di Maria è possibile ricorrere a tentativi successivi, con aggiustamenti, di somme di numeri consecutivi per arrivare a 45.
Nel caso del nastro di Noé, se si è già risolto il problema precedente, l'ipotesi di un gran numero di soluzioni a priori può fare evolvere la strategia verso la ricerca di un numero "centrale" nella somma di numeri successivi. Per esempio, in 34+35+36, 35 è centrale ed è la media dei due numeri che lo "inquadrano".
Sarebbe molto interessante proporre simultaneamente i due problemi che giocano sulla variabile: taglia del nastro, somma.
Il concetto di variabile si ritrova anche nei problemi **Decorazioni** ampiamente studiati (per esempio Jaquet 2007, 2009)

DECORAZIONI I (Cat. 5, 6, 7) ©ARMT
Un pittore ha dipinto quattro figure diverse su un muro.



Ha utilizzato dei barattoli di colore della stessa grandezza: 18 barattoli di rosso per una figura, 21 barattoli di blu per un'altra figura, 27 barattoli di giallo per un'altra figura ancora e alcuni barattoli di nero per la figura che resta.
Alla fine del suo lavoro, tutti i barattoli erano vuoti.
Indicate il colore di ogni figura. Quanti barattoli di colore nero ha utilizzato?
Spiegate come avete trovato la risposta.

In questa prima versione, i numeri di barattoli sono rispettivamente (18; 21; 27).
In una variante, i numero dei barattoli sono rispettivamente (72; 84; 96). Questa versione genera un numero maggiore di risposte errate (che non sono dovute alla grandezza dei numeri).
I due problemi, peraltro, hanno lo stesso contesto e lo stesso modello proporzionale (proporzionalità tra il numero di barattoli e l'area delle figure). La versione I, "numeri piccoli", permette però di trovare una risposta corretta evitando il modello proporzionale (applicando "correttamente" la proprietà degli scarti). E ciò mostra che la versione "numeri grandi" si adatta meglio al lavoro in classe in quanto blocca la risposta esatta trovata con un ragionamento incompleto.

Il problema seguente, dato dopo la versione I o la variante con i numeri "grandi", gioca ancora su questa variante. E' comunque ancora lo stesso problema.

DECORAZIONE II
Il pittore osserva che gli rimane ancora del posto sul muro, a destra. Decide allora di dipingere ancora un grande rettangolo, di 4 quadretti sulla larghezza e di 6 quadretti sulla lunghezza, con della pittura verde.

Quanti barattoli di pittura verde utilizza il pittore per dipingere il rettangolo grande?

Spiegate come avete trovato la risposta.

Il problema che segue, invece, dato dopo la versione I o la sua variante, è un problema diverso: si tratta di un problema **inverso** (Bloch 2009)

DECORAZIONE III
Un numéro di barattoli è dato: disegnare una figura che utilizzi esattamente tutta la pittura arancione.

Questo problema inverso ha molteplici soluzioni che sono figure aventi tutte la medesima area.

3. Problema e problema inverso

La coppia (problema, problema inverso) permette sovente di affinare il sapere in gioco (Bloch 2009).
Torniamo all'esempio del naso di Pinocchio. Il problema diretto consiste nel trovare la lunghezza del naso di Pinocchio quando dice per esempio 6 bugie e 4 verità. Questo problema di base non è posto nel RMT. E' proposto solo il problema inverso: è un problema atipico.

Il lettore si ricorda del problema delle Margherite, che dipende dal resto nella divisione per 4.
Vediamo ora il problema seguente, che è un problema in parte inverso, che esplora un altro aspetto della divisione: il quoziente:

Les marguerites II
Per una margherita a 20 petali, quante volte reciterà Martina "ti risolverò"?
Per una margherita a 30 petali, quante volte reciterà Martina "ti risolverò"?
Per una margherita a 45 petali, quante volte reciterà Martina "ti risolverò"?

4. Problemi "vicini"

E' interessante far risolvere dagli allievi problemi "vicini" con un gioco sulle variabili (come Decorazione I e II, Nastro I e II, Margherita I e II) o con un problema e il suo inverso (Naso di Pinocchio, Decorazione I e II) o con problemi risolvibili con un medesimo ragionamento[7].
In effetti l'analisi delle somiglianze fra problemi (una volta risolti) contribuisce a mostrare agli insegnanti la sensibilità degli allievi alle variazioni (quando sono dati per esempio nell'ambito del RMT), può aiutare gli allievi ad arricchire la propria memoria dei problemi se tali somiglianze sono discusse e le strategie confrontate nella pratica della classe.
Più in generale e al di là del RMT, penso che le ricerche sui problemi "di base", in particolare la creazione e/o l'adeguamento di dispositivi efficaci perché gli allievi li memorizzino (cioè individuino somiglianze e differenze di struttura tra problemi "somiglianti"), non sono sufficientemente sviluppati.

5. Conclusione sugli strumenti didattici

La dimensione pubblica del RMT fornisce un materiale utilizzabile per formare gli insegnanti, in servizio o principianti, all'uso di strumenti didattici potenti.
Tra le due forme di analisi, l'analisi preliminare, in particolare, permette sovente di fare la cernita tra i compiti adatti agli allievi (quali conoscenze minime sono necessarie per riuscire a svolgere il compito, gli allievi hanno queste conoscenze minime?) e quelli che non lo sono, di conservare i compiti che implicano le conoscenze sperate. Si capisce molto presto, però, che questa analisi preliminare diventa molto più ricca dopo che si sono studiate le produzioni degli allievi…
Giocare sui valori di una variabile didattica permette di semplificare o rendere più complesso il compito, cioè di differenziare i compiti, pur mantenendo lo stesso contesto; permette anche di consentire l'emergere di conoscenze più sofisticate e anche di testare la "resistenza" di un ragionamento. Problemi ottenuti con un gioco di variabili, sono esempi di problemi "vicini".

[7] Qui faccio riferimento ad una utilizzazione della tipologia di Vergnaud, da una parte sui problemi additivi e dall'altra sui problemi moltiplicativi, per aiutare gli alunni a strutturare i problemi risolti.

Lavorare con problemi "vicini" e sulla prossimità di problemi con gli allievi (i criteri di prossimità vanno precisati) ha certamente un futuro.

Conclusione

Lo scopo di questo testo era quello di tornare sulla ricchezza reale e potenziale che rappresenta la massa accumulata da più di vent'anni, di problemi costruiti, analizzati e presto indicizzati. Lo studio qui presentato è centrato in particolare su problemi numerici, per misurare il contributo del RMT al vasto campo d i problemi numerici di reinvestimento delle conoscenze sulle quali si è già lavorato. In tal modo il RMT permette di osservare ragionamenti in costruzione, relativamente a nozioni non ancora apprese, e ragionamenti "difettosi" su nozioni note. Lo studio ha anche fatto il punto sull'uso di strumenti didattici potenti relativamente alla concezione dei problemi e cercato di mostrare la loro potenzialità per il lavoro in classe, sui problemi, ma anche sulla concezione delle lezioni di matematica grazie ai problemi.

Bibliografia

Ball, D. L. and Bass, H. (2002). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis and E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 annual meeti ng of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB:CMESG/GDEDM

Bloch, I. (2009). L'enseignement des mathématiques à des élèves 'en difficulté' : situations, signes mathématiques, phénomènes de contrat. *Actes du colloque 2008 sur la formation des enseignants : Enseigner les mathématiques : où est le problème ?* (pp.63-79). Bordeaux : IREM de Bordeaux

Charnay, R. (2006). Rallyes mathématiques : quel intérêt ? *Grand N, 78*, 53-63

Grugnetti, L. & Dupuis, C. (2003). Le nez de Pinocchio, un problème de mathématique "inverse" **.** *Grand N, 72*, 33-40

Grugnetti, L. & Jaquet, F.(1998). La résolution de problèmes par classes. *Grand N, 61*, 61-69

Grugnetti L., Jaquet F., Medici, D., & Rinaldi M.-G. (2012). Vers la construction de concepts au travers de l'analyse des procédures des élèves et des obstacles qu'ils rencontrent lors de la résolution de problèmes. In *J.-L. Dorier et S. Coutat (eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le XXIe siècle* – (GT9, pp. 1192–1203). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Henry, M. (2005). Le concept de fonction dans les problèmes du RMT. Actes *des journées RMT* Bourg-en-Bresse 2004. Arco Di Trento 2005.

Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en questions. *Grand N, 71,* 7-24.

Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 14*, 31-60

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 67-96.

Houdement, C. (2013). *Au milieu du gué: entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques.* Note HDR. Université Paris-Diderot

Jaquet, F. et all.(2007). 'Quelques aspects de la proportionnalité dans les problèmes du RMT', Groupe de travail n° 2, in L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M.G. Rinaldi (Eds.) *Les problèmes au service de l'apprentissage : le rôle du RMT: I problemi come supporto per l'apprendimento : il ruolo del RMT. Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*. Vol 6. Parma 2006, Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Sezione di Parma dell'ARMT, ARMT, 101-116.

Jaquet, F. (2009). La proportionnalité, des écarts aux rapports. Groupe de travail n° 2. In Grugnetti L. & Jaquet F. (Eds.) *Actes des journées RMT Vol 8* (pp. 73-86).

Jaquet, F. (2013), Editoriale *Gazette de Transalpin*, n. 3.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N, 69*, 31-52.

Priolet, M. (2008). *Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française. Approches didactique et ergonomique.* Thèse Université de Lyon 2.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10.2/3*, 133-169.

Vergnaud, G. (1997 ; 2001). *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes*. Paris : Nathan

SPUNTI DI RIFLESSIONE SULLA SCRITTURA POSIZIONALE DEI NUMERI CON I PROBLEMI DEL RMT

Carla Crociani, Rita Spatoloni[1]

1. Introduzione

Questo articolo propone riflessioni sulla risoluzione di alcuni problemi del RMT, strutturalmente uguali tra loro, da cui è possibile ricavare attività indirizzate ad allievi compresi tra la quinta classe della scuola Primaria e la seconda classe della scuola Secondaria di 2° grado. Esso nasce dalla convinzione, maturata in anni di lavoro con problemi del RMT e le relative analisi a posteriori, che il concetto di scrittura posizionale non sia in genere ben acquisito da parte degli studenti. Si è infatti constatato che

- il passaggio da una "quantità numerica" alla sua scrittura,
- gli algoritmi delle operazioni di somma, differenza, prodotto e divisione che si basano sulla gestione dei "riporti", dei "prestiti" e dei "raggruppamenti",

sono spesso condotti in modo automatico e acritico. Abbiamo al riguardo più volte osservato come, nel caso in cui le richieste si presentino in forma atipica, gli allievi si trovino particolarmente disorientati.

Riteniamo che dall'analisi e dalle riflessioni proposte nei seguenti paragrafi possano scaturire considerazioni didattiche e attività graduabili in senso verticale, utili per la ripresa e l'approfondimento del concetto di posizionalità. Esse potranno essere modulate in base alle necessità delle classi.
Una prima importante decisione da prendere riguarda il momento in cui affrontare il concetto di posizionalità e il tempo che ad esso deve esser dedicato. Spesso tutto si esaurisce nella scuola Primaria, quando l'età degli allievi non consente loro di affrontarlo con adeguata capacità di analisi. Il lungo lavoro di analisi di elaborati relativi alla risoluzione di problemi del RMT e le sperimentazioni effettuate con gli allievi ci inducono a ritenere che opportune attività, svolte a più riprese nel corso degli anni, possano favorire il superamento degli ostacoli evidenziati nella risoluzione di problemi legati a questo concetto. Altrettanto importante è l'attenzione che deve essere rivolta alla struttura degli algoritmi operativi, in particolare a quelli della moltiplicazione e divisione; bisogna infatti indurre[2] gli allievi a riflettere sul senso matematico dei diversi passaggi. Nel caso della divisione, ad esempio, è opportuno che fin dall'approccio iniziale si conducano gli allievi ad effettuare i raggruppamenti sia con materiale concreto che attraverso disegni, per aiutarli a comprendere a che cosa corrispondono il quoziente ed il resto. Forse, così facendo, potrebbero essere evitati errori come quello di ricercare i decimali in qualunque divisione, senza tenere in considerazione a quali oggetti/eventi essa è legata. In questo caso l'uso della calcolatrice, se lo strumento non è utilizzato con cognizione, diventa fortemente fuorviante. Inoltre, attività di analisi sull'algoritmo della divisione, riprese alla scuola Secondaria di 2° grado, risultano senz'altro propedeutiche anche per l'introduzione delle numerazioni con basi diverse da quella decimale.

Il lavoro, descritto qui di seguito, fornisce strumenti per indagare l'effettiva consapevolezza della scrittura posizionale e, nello stesso tempo, ne favorisce l'apprendimento, proponendo un percorso verticale incentrato sulla risoluzione dei quattro problemi seguenti:

- Vecchio contachilometri I-II.11.I.2-9 Cat. 3, 4 - 5, 6
- Le matite del 15° RMT 15.II.8 Cat.5, 6
- Pennarelli nuovi 21.II.12 Cat. 6, 7, 8
- Quante uova! 19.I.8 Cat.5, 6, 7

Il punto fondamentale, nell'ottica di un apprendimento che si costruisce in progressione, consiste nel far "scoprire" gradualmente agli allievi l'analogia strutturale nascosta dalla diversità degli enunciati e che invece emerge dal fatto che le strategie risolutive sono trasferibili da un problema all'altro applicando delle semplici "traduzioni". Gli ultimi due problemi conducono in modo naturale verso numerazioni in base diversa da 10. Ciò comporta un diverso grado di difficoltà in quanto, per dirla alla maniera di Orwell,[3] *tutte le basi sono uguali, ma la base 10 è più uguale delle altre*.
Al riguardo, riteniamo che ogni proposta di esercizi coinvolgenti basi diverse da 10 debba essere accompagnata dalla consapevolezza che, pur essendo vero che i numeri sono rappresentabili in qualunque base mediante gli stessi algoritmi, è altrettanto vero che i nomi con cui essi vengono denotati sono attribuiti conformemente alla base 10 (il nome "duemila cinquecento novanta due", così come "two thousand five hundred ninety two", indica

---

[1] Sezione di Siena

[2] Il vocabolo "indurre" per chiarire che non si tratta di trasmettere una conoscenza procedurale, ma di permetterne la conquista attraverso una progressiva consapevolezza. Da ciò deriva la necessità di un percorso a tappe graduali che, costruite una dopo l'altra, consentano agli allievi di appropriarsi dei concetti in questione.

[3] "*Tutti gli animali sono uguali ma alcuni sono più uguali degli altri*". George Orwell (1903-1950), *La fattoria degli animali*.

un numero preciso, si riferisce alla base 10 e non ha alternative). Ciò conferisce a tale base una oggettiva supremazia sulle altre.
Proponiamo nel seguito un'attività da svolgere in classe che consideriamo come fase di istituzionalizzazione dopo la necessaria fase di risoluzione di alcuni problemi ("simili" come struttura) da parte degli allievi. Ricordiamo che i problemi in gioco sono stati ampiamente analizzati, a partire dagli elaborati degli allievi, nell'ambito del gruppo di lavoro dell'ARMT sulla numerazione[4].

2. Problema *Il vecchio contachilometri*

Il primo dei problemi proposti, ed anche il capostipite,[5] è *Il vecchio contachilometri*, presentato in due versioni, la prima delle quali chiameremo *diretta*, la seconda *inversa*.
Versione *diretta*:

Il vecchio contachilometri I
Alfonso ha sulla sua automobile un vecchio contachilometri che fa degli strani rumori a ogni chilometro, ogni volta che compare una nuova cifra. Il contachilometri
- fa "*cric*" ogni volta che cambia la cifra di destra,
- fa "*crac*" ogni volta che cambia la cifra di mezzo,
- fa "*rrmt*" ogni volta che cambia la cifra di sinistra.

Oggi Alfonso va a fare una gita in automobile.
Egli mette a zero il suo contachilometri:
Ecco il contachilometri dopo 13 chilometri.
Ha già fatto 14 rumori: 13 "*cric*" e 1 "*crac*":
Al suo ritorno, il contachilometri segna 127 chilometri.

0	0	0
0	1	3
1	2	7

Quanti rumori ha sentito in tutto Alfonso durante la sua gita in automobile?
Spiegate come li avete trovati e dite quanti "cric" quanti "crac"e quanti "rrmt" ha sentito Alfonso.

La soluzione della versione diretta si ottiene dalla somma 127 + 12 + 1 = 140.

Agli allievi, delle classi 3a e 4a primaria, ai quali è stato proposto il problema, tale soluzione ha richiesto il superamento delle insidie contenute nell'espressione canonica "127 è formato da 1 centinaio, 2 decine e 7 unità". Tale espressione, molto usata, può correttamente servire per indicare il "ruolo" delle varie cifre (1 è la cifra delle centinaia, 2 quella delle decine, 7 quella delle unità) oppure il fatto che il 127 corrisponde a 1 centinaio **più** 2 decine **più** 7 unità. Vi è però il rischio che essa metta in ombra il fatto che le unità, in 127 non sono 7 ma 127, e le decine non sono 2 ma 12.[6]

Versione *inversa*. In questa versione (che ha lasciato invariati i valori numerici), anziché render noto il numero dei chilometri e chiedere il numero dei rumori, si rende noto il numero dei rumori e si chiede il numero dei chilometri In questo caso, se nel passaggio dalla versione diretta a quella inversa avessimo voluto cambiare il numero di rumori, cioè variare il dato 140, avremmo dovuto fare attenzione al fatto che non tutti i numeri sono idonei a questo scopo [7].

Ad esempio non si avranno mai 187 rumori: se i chilometri sono 169 i rumori sono 169 + 16 + 1 = 186; se i chilometri sono 170 i rumori sono 170 + 17 + 1 = 188. Da questo fatto, dopo la risoluzione del problema da parte degli allievi, possono scaturire elementi per la discussione in classe, importanti sia a livello matematico che didattico trasversale.

[4] Il Il Gruppo, da noi coordinato, era composto, nel 2013, da: L.Abate (Rozzano), A. Andreini (SI), M. Bartolomei (SI), S. Carrusci (CA), M. Lucherini (SI), M. Mandelli (RV), E. Marangoni (PR), C. Mazzoni (PR), M. G. Miraglia (PR), I. Parisi (Riva), B. Perna (SI).

[5] Cfr. Atti di Bourg-en-Bresse 2004 e Arco di Trento 2005.

[6] Cfr. Scheda nella Banca Problemi.

[7] Nell'ambito dell'incontro di Brigue 2008 viene riferita un'attività sul cambiamento di variabili didattiche, condotta in una classe di cat. 5 a partire proprio dal problema *Il vecchio contachilometri I*. Gli allievi hanno giocato ad inventare un problema nuovo, *Le gommine di Luisa,* che impiega la forma inversa del problema originale e ne varia sia il contesto che i valori numerici. Nell'inventare il nuovo testo, gli alunni hanno anche scoperto che non tutti i numeri "vanno bene" per i rumori.

Il vecchio contachilometri II

Alfonso ha sulla sua automobile un vecchio contachilometri che fa degli strani rumori a ogni chilometro, ogni volta che compare una nuova cifra. Il contachilometri

- fa "*cric*" ogni volta che cambia la cifra di destra,
- fa "*crac*" ogni volta che cambia la cifra di mezzo,
- fa "*rrmt*" ogni volta che cambia la cifra di sinistra.

Oggi Alfonso va a fare una gita in automobile.
Egli mette a zero il suo contachilometri:
Ecco il contachilometri dopo 13 chilometri.
Ha già fatto 14 rumori: 13 "*cric*" e 1 "*crac*":
Alla fine della gita, Alfonso ha sentito in tutto 140 rumori.

0	0	0
0	1	3

Quanti chilometri ha percorso Alfonso? Spiegate come li avete trovati.

Di questa versione inversa, meno semplice della diretta, proponiamo diverse strategie risolutive: una di tipo aritmetico, una seconda di tipo algebrico, ed una terza di tipo "misto". Dato che queste stesse strategie verranno riprese anche nei successivi problemi, ci è utile dare ad esse un nome in modo da facilitare la lettura. Ci riferiremo dunque ad esse chiamandole rispettivamente *Metodo per divisioni euclidee*, *Metodo per scrittura polinomiale dei numeri e Metodo per sottrazione*.

Metodo per divisioni euclidee.

Tale metodo, che ci sembra il più diretto, si basa sul fatto che

- per ogni chilometro si ha un rumore (cric)
- ogni 10 chilometri si hanno 11 rumori (10 cric + 1 crac)
- ogni 100 (10^2) chilometri si hanno 111 rumori (10^2 cric + 10 crac + 1 rrmt).

Poiché ogni centinaio di km comporta 111 rumori ed ogni decina di km ne comporta 11, si eseguono le seguenti divisioni ogni volta indicando quoziente e resto e specificando cosa rappresentano (indichiamo con il simbolo / la divisione euclidea):

140/111 quoziente **1** (il numero di chilometri percorsi è maggiore o uguale a 100 e minore di 200), resto 29 (rumori oltre il 100° km);

29/11 quoziente **2** (il numero dei chilometri percorsi oltre i 100 è maggiore o uguale a 20 e minore di 30), resto 7 (rumori oltre il 120° km);

7/1 quoziente **7**, resto 0 (l'ultima divisione per 1 può essere omessa, dal momento che il resto è sempre 0 e il quoziente è uguale al resto della divisione precedente).

Si deduce così che il numero dei chilometri percorsi è 127.

Importante per il seguito: si sollecitino gli allievi ad osservare i quozienti delle divisioni (scritti in neretto) e a comprendere che proprio questi costituiscano le cifre del numero cercato.

Metodo per scrittura polinomiale dei numeri.

Tale metodo (proponibile solo ad allievi di categorie superiori alla cat. 7 cioè dai 14/15 anni) impiega la scrittura dei numeri in forma polinomiale. Indichiamo con *abc* il numero incognito dei chilometri. (*Attenzione*: *a, b, c* sono semplicemente le cifre con cui è scritto il numero; *abc* non deve quindi essere inteso come $a \cdot b \cdot c$). Grazie a questa rappresentazione, esprimiamo il numero delle unità (*abc*), il numero delle decine (*ab*) e il numero delle centinaia (*a*). Dunque, il numero dei rumori è *abc* (i cric) + *ab* (i crac) + *a* (gli rrmt)[8] per cui scriviamo:
$abc + ab + a = 140$.

Poiché $abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$ e $ab = a \cdot 10 + b$, abbiamo la seguente serie di uguaglianze:
$140 = abc + ab + a =$
$= a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c + a \cdot 10 + b + a =$
$= a \cdot (10^2 + 10 + 1) + b \cdot (10 + 1) + c =$
$= 111a + 11b + c.$

Dobbiamo quindi risolvere l'equazione
$111a + 11b + c = 140$

[8] Oltre all'uso della scrittura simbolica, l'impiego di questa strategia richiede una chiara comprensione del fatto che il numero totale dei rumori (cric+crac+rrmt) è dato dalla somma delle unità, delle decine e delle centinaia che ci sono nel numero 127. Questo fatto, già evidenziato nell'analisi della forma diretta del problema, non è così scontato per gli allievi!, come mostrato in nostri studi precedenti (Cfr. Bourg-en-Bresse 2004 - Arco di Trento 2005, Brigue 2008).

tenendo presente che *a, b, c* devono essere numeri (naturali) di una cifra. Abbiamo necessariamente $a = 1$ (non potendo *b, c* essere negativi ed essendo la somma 140). Quindi $11b + c = 140 - 111 = 29$. Per lo stesso motivo, abbiamo necessariamente $b = 2$, da cui si ricava $22 + c = 29$. Finalmente, $c = 7$. Il numero cercato è dunque 127.
Le due strategie precedenti sono estendibili a qualunque numero e sono, per così dire, autodimostrantesi. Può essere a questo punto interessante proporre una soluzione molto più rapida e meccanica ma "più misteriosa", e spingere gli allievi a dimostrarla o comunque a desiderarne la dimostrazione.

Metodo per sottrazione.

Sia $c_1c_2c_3...c_{n-1}c_n$ il numero (noto) dei rumori. Si ha che il numero dei km è compreso tra $c_1c_2c_3...c_{n-1}c_n - c_1c_2c_3...c_{n-1}$ e $(c_1c_2c_3...c_{n-1}c_n - c_1c_2c_3...c_{n-1}) + (n - 1)$. Tra questi n numeri, quello giusto si trova con il metodo impiegato per il problema in forma diretta.

Ad esempio, nel nostro caso $c_1c_2c_3 = 140$, $c_1c_2 = 14$ e $n = 3$, avendo 140 tre cifre. Pertanto i candidati sono 126, 127 e 128. Si procede ora in modo diretto facendo la verifica: 126 + 12 + 1 = 139 (non essendo 140, risulta che 126 non è il numero giusto). 127 + 12 + 1 = 140. Il numero cercato è dunque 127.

Il vantaggio di questo metodo si manifesta nella sua rapidità, soprattutto quando è applicato a numeri grandi. Ad esempio: supponiamo che i rumori siano 83427. Il numero cercato è compreso tra 83427 – 8342, cioè 75085, e (75085 + 4). Poiché 75085 + 7508 + 750 + 75 + 7 = 83425, cioè è "sotto di 2", abbiamo che il numero cercato è 75087. Infatti 75087 + 7508 + 750 + 75 + 7 = 83427.

Dimostrazione del metodo per sottrazione.

La dimostrazione della correttezza di questo metodo si basa sulla seguente proprietà:

PR. Il riporto della somma di n numeri di una cifra non può essere superiore a $n - 1$.

La dimostrazione corretta di PR è per induzione, ma la proprietà può essere compresa intuitivamente da allievi a partire dalla cat. 7, considerando che, essendo 9 il massimo numero di una cifra, la somma di due numeri di una cifra non può superare 18, e quindi il riporto non può superare 1; la somma di tre numeri di una cifra non può superare 27, e quindi il riporto non può superare 2, e così via.

A questo punto dimostriamo il metodo riferendoci per comodità al caso dei 140 rumori (un secondo esempio sarà riferito a *Le matite del 15° RMT*). La generalizzazione, immediata per un matematico, potrà costituire l'inizio di un interessante percorso per allievi di categorie 9-10. Rappresentiamo l'equazione $abc + ab + a = 140$, incontrata nel metodo precedente, come somma in colonna; r rappresenta il riporto della somma della colonna delle unità.

$$\begin{array}{cccc} & (r) & & \\ a & b & c & + \\ & a & b & + \\ & & a & = \\ \hline 1 & 4 & 0 & \end{array}$$

Da $abc + ab + a = 140$ segue che $abc = 140 - (ab + a)$. Come mostra la figura, $ab + a$ è uguale a 14 (cioè al numero dei rumori privato della cifra delle unità) meno l'eventuale riporto r. Per la proprietà PR, r è 0 o 1 o 2. Pertanto $abc = 140 - 14$ se $r = 0$; $abc = 140 - (14 - 1)$ se $r = 1$; $abc = 140 - (14 - 2)$ se $r = 2$. I candidati sono dunque 126, 127 e 128. Si procede ora in modo diretto facendo la verifica, come visto in precedenza: 126 + 12 + 1 = 139 (NO); 127 + 12 + 1 = 140 (SI).

3. Problema *Le matite del 15° RMT*

Come abbiamo detto, il problema del vecchio contachilometri è stato, sia nella forma diretta che nella forma inversa, l'archetipo di una serie di problemi che mantenevano la stessa struttura pur se in contesti diversi.

La prima di tali varianti è stata *Le matite del 15° RMT*.

Le matite del 15° RMT
Gli organizzatori hanno deciso di offrire una matita a tutti i partecipanti al 15° RMT. Alla fabbrica delle matite, un operaio ha il compito di mettere un'etichetta con scritto «15° RMT, 2007» su ogni matita.
Con 10 matite riempie poi delle scatole sulle quali mette la stessa etichetta.
Quando ha riempito dieci scatole, ne fa un pacchetto, sul quale mette ancora l'etichetta «15° RMT, 2007».
Infine, con 10 pacchetti, egli riempie uno scatolone sul quale mette ancora l'etichetta «15° RMT, 2007». Oggi, l'operaio ha preparato le matite richieste dalla sezione di Transalpino ed ha constatato che per questa sezione ha dovuto contare 2007 etichette «15° RMT, 2007».
Quante matite ha ordinato la sezione di Transalpino? Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

La corrispondenza tra i due problemi è chiara:

etichette per matite ↔ cric
etichette per scatole ↔ crac
etichette per pacchetti ↔ rrmt

Vi è uno stadio in più, costituito dagli scatoloni, che corrisponderebbero alle migliaia sul contachilometri. I metodi di soluzione sono identici e la loro conversione può costituire un esercizio per gli alunni. Per mostrarne la completa analogia, proponiamo le soluzioni mediante un semplice copia-incolla, naturalmente dopo aver effettuato le dovute sostituzioni.

Metodo per divisioni euclidee.

- Per ogni matita si ha un'etichetta (1)
- per ogni 10 matite si hanno 11 etichette (10 + 1) (su ogni matita un'etichetta + un'etichetta sulla scatola raccoglie le 10 matite)
- per ogni 100 (10^2) matite si hanno 111 etichette ($10^2 + 10 + 1$) (su ogni matita un'etichetta + un'etichetta su ogni scatola che raccoglie le 10 matite + un'etichetta sul pacchetto che raccoglie 10 scatole)
- per ogni 1000 (10^3) matite si hanno 1111 etichette ($10^3 + 10^2 + 10 + 1$)

Dal momento che per ogni migliaio di matite si utilizzano 1111 etichette, per ogni centinaio 111 etichette e per ogni decina 11 etichette, si eseguono le seguenti divisioni:

2007/1111 quoziente **1** (il numero delle matite è maggiore o uguale a 1000 e minore di 2000), resto 896 (etichette oltre le 1000 matite)

896/111 quoziente **8** (il numero delle matite oltre le 1000 è maggiore o uguale a 800 e minore di 900), resto 8 (etichette oltre le 1800 matite)

8/11 quoziente **0** (il numero delle matite oltre le 1800 è maggiore o uguale a 0 e minore di 10), resto 8 (etichette oltre le 1800 matite)

8/1 quoziente **8**, resto 0 (il numero delle matite oltre le 1800 è 8. Fine del procedimento).

Il numero delle matite è **1808**: 1000 in uno scatolone, 800 in 8 pacchetti, 0 scatole da 10 matite, 8 matite sfuse. (Si osservi come anche questa volta i quozienti della divisione, scritti in neretto, siano le cifre del numero cercato)

Metodo per scrittura polinomiale dei numeri.

Se *abcd* è il numero di matite allora il numero delle etichette è $abcd + abc + ab + a$. Dunque $abcd + abc + ab + a = 2007$. Poiché $abcd = a{\cdot}10^3 + b{\cdot}10^2 + c{\cdot}10 + d$, $abc = a{\cdot}10^2 + b{\cdot}10 + c$, e $ab = a{\cdot}10 + b$, abbiamo:

$2007 = abcd + abc + ab + a =$
$= (a{\cdot}10^3 + b{\cdot}10^2 + c{\cdot}10 + d) + (a{\cdot}10^2 + b{\cdot}10 + c) + (a{\cdot}10 + b) + a =$
$= a\,(10^3 + 10^2 + 10 + 1) + a\,(10^2 + 10 + 1) + c{\cdot}(10 + 1) + d =$
$= 1111a + 111b + 11c + d.$

Poiché *a, b, c, d* sono numeri di una cifra, abbiamo necessariamente $a = 1$ (non potendo *b, c* essere negativi ed essendo la somma 2007). Quindi $111b + 11c + d = 2007 - 1111 = 896$. Per lo stesso motivo, abbiamo necessariamente $b = 8$, da cui si ricava $11c + d = 896 - 888 = 8$. Questa nuova equazione ha soluzione solo per $c = 0$ e $d = 8$. Il numero cercato è dunque 1808.

Metodo per sottrazione.

2007– 200 = 1807. Poiché 2007 ha quattro cifre, i candidati sono 1807, 1808, 1809, 1810. Si procede ora in modo diretto facendo la verifica: 1807 + 180 + 18 + 1 = 2006 (non essendo 2007, risulta che 1807 non è il numero giusto). 1808 + 180 + 18 + 1 = 2007. Il numero cercato è dunque 1808.

4. Variante al problema *Le matite del 15° RMT*

Il problema delle matite presenta, rispetto a quello del contachilometri, alcuni vantaggi. Il primo deriva da una più facile comprensione del contesto: nell'epoca digitale in cui viviamo, pochi alunni hanno familiarità con i contachilometri a rotelle. Il secondo vantaggio è legato al fatto che questo problema si presta facilmente a diventare un esercizio relativo a numerazioni in basi diverse da 10. Mentre non è naturale pensare ad un contachilometri che numera in base diversa da 10 (di fatto un tale oggetto non esiste), è naturalissimo fare pacchetti e scatole contenenti un numero di oggetti diverso da 10. Si può dunque proporre lo stesso testo usando però scatole di 8 matite, pacchetti di 8 scatole e scatoloni di 8 pacchetti. La nuova versione assume dunque questa forma:

Variante al problema *Le matite del 15° RMT*

Gli organizzatori hanno deciso di offrire una matita a tutti i partecipanti al 15° RMT. Alla fabbrica delle matite, un operaio ha il compito di mettere un'etichetta con scritto «15^o RMT, 2007» su ogni matita.

Con 8 matite riempie poi delle scatole sulle quali mette la stessa etichetta.

Quando ha riempito 8 scatole, ne fa un pacchetto, sul quale mette ancora l'etichetta «15^o RMT, 2007».

Infine, con 8 pacchetti, egli riempie uno scatolone sul quale mette ancora l'etichetta «15^o RMT, 2007». Oggi, l'operaio ha preparato le matite richieste dalla sezione di Transalpino ed ha constatato che per questa sezione ha dovuto contare 2007 etichette «15^o RMT, 2007».

Quante matite ha ordinato la sezione di Transalpino? Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

I tre metodi risolutivi trattati in precedenza si adattano perfettamente a questo cambio di base, ma con gradi differenti di difficoltà. Vediamoli separatamente.

Metodo per divisioni euclidee.

Questo metodo può essere impiegato nel nuovo contesto *senza* fare riferimento a basi diverse da 10. Quanto segue è stato infatti ottenuto tramite un copia-incolla: nulla è variato, tranne la sostituzione delle potenze di 10 con le analoghe potenze di 8.

- per ogni matita si ha un'etichetta (1)
- per ogni 8 matite si hanno 9 etichette (8 + 1) (su ogni matita un'etichetta + un'etichetta sulla scatola che raccoglie le 8 matite)
- per ogni 64 (8^2) matite si hanno 73 etichette ($8^2 + 8 + 1$) (su ogni matita un'etichetta + un'etichetta su ogni scatola che raccoglie le 8 matite + un'etichetta sul pacchetto che raccoglie 8 scatole)
- per ogni 512 (8^3) matite si hanno 585 etichette ($8^3 + 8^2 + 8 + 1$).

Dal momento che per ogni 512 matite si utilizzano 585 etichette, per ogni 64 matite 73 etichette e per ogni 8 matite 9 etichette, si eseguono le seguenti divisioni:

2007/585 quoziente **3** (il numero delle matite è maggiore o uguale a $3 \cdot 8^3$ (= 1536) e minore di $4 \cdot 8^3$), resto 252 (etichette oltre le 1536 matite) [9]

252/73 quoziente **3** (il numero delle matite oltre le 1536 è maggiore o uguale a $3 \cdot 8^2$ (= 192) e minore di $4 \cdot 8^2$), resto 33 (etichette oltre le 1536 + 192 = 1728 matite)

33/9 quoziente **3** (il numero delle matite oltre le 1728 è maggiore o uguale a $3 \cdot 8$ (= 24) e minore di $4 \cdot 8$), resto 6 (etichette oltre le 1728 + 24 = 1752 matite)

6/1 quoziente **6**, resto 0 (il numero delle matite oltre le 1752 è 6. Fine del procedimento).

Il numero delle matite è **1758**: 1536 in 3 scatoloni, 192 in 3 pacchetti, 24 in 3 scatole, 6 matite sfuse. (Naturalmente, essendo rimasto invariato il numero delle etichette ed essendo diminuita la capacità dei contenitori, il numero delle matite è diminuito, passando da 1808 a 1758).

Questa soluzione, anche se non ha richiesto alcun esplicito riferimento alla base 8, offre comunque dei suggerimenti in tale direzione, che gli insegnanti possono raccogliere in base all'età scolare dei propri allievi. Bisogna tuttavia non sottovalutare le difficoltà del cambio di base. Come abbiamo già detto, qualunque sia la base con cui rappresentiamo i numeri, i loro nomi (nella lingua con la quale li indichiamo) sono comunque legati alla base 10. Ciò costituisce una possibile fonte di errore: ci si trova infatti a lavorare simultaneamente con due basi, una per i nomi dei numeri, un'altra per la loro scrittura. Nel seguito, per indicare una scrittura in base diversa da 10 metteremo le cifre tra parentesi e indicheremo la base a pedice: ad esempio, $(926)_{12}$. E' importante tuttavia notare che tale base è comunque scritta in base 10 (ecco un altro privilegio di tale base!). Una convenzione di questo tipo è necessaria: se volessimo evitarla ed indicare anche la base in cui scriviamo la base, andremmo avanti all'infinito.

Ciò premesso, si può porre agli allievi la seguente:

Domanda. Nella soluzione del problema originale (in cui le scatole contenevano 10 matite, etc.) i quozienti della divisione, cioè 1, 8, 0 e 8, rappresentano le cifre del numero cercato. Ora non più. Il numero cercato è 1758 mentre i quozienti sono 3 3 3 6. Che cosa rappresentano questa volta tali cifre?

Risposta attesa: 3, 3, 3, 6 rappresentano le cifre del numero 1758 scritto in base 8. A questo punto pensiamo che emerga in modo chiaro il significato del concetto di base: così come la sequenza 1 8 0 8 del problema originale indica che le matite sono 1 decina di decine di decine + 8 decine di decine + 0 decine + 8, cioè 1808 (scrittura in

[9] Scopriamo così che la scrittura "tra 1000 e 2000" significava "tra $1 \cdot 10^3$ e $2 \cdot 10^3$".

base 10), ora la sequenza 3 3 3 6 indica che le matite sono 3 ottine di ottine di ottine + 3 ottine di ottine + 3 ottine + 6, cioè $(3336)_8$.

Un'altra domanda, non certo semplice e che mette in luce le difficoltà di cui parlavamo, è la seguente.
Domanda. Nel caso della base 10, le cifre 1 8 0 8 indicavano che le matite erano maggiori o uguali a 1 decina di decina di decine, a 18 decine di decine e a 180 decine. Ora, le cifre 3 3 3 6 ci dicono che le matite sono maggiori o uguali a 3 ottine di ottine di ottine, a 33 ottine di ottine e a 333 ottine?
Risposta attesa: se con 33 e 333 intendiamo i numeri trentatre e trecentotrentatre, la risposta è NO. Se invece leggiamo le scritture 33 e 333 in base otto allora la risposta diventa SI. Infatti le ottine di ottine, cioè le sessantaquattrine, contenute nel numero $(3336)_8$, cioè in 1758, sono 27 (e $27 = 3\cdot 8 + 3 = (33)_8$), mentre le ottine contenute in 1758 sono 219 (e $219 = 3\cdot 64 + 3\cdot 8 + 3 = (333)_8$).

Metodo per scrittura polinomiale dei numeri.

La precedente soluzione per divisioni euclidee non ha richiesto un esplicito riferimento alla base numerica con cui si scrivono i numeri (anche se abbiamo usato tale soluzione come punto di partenza per sconfinamenti fuori della base 10). La soluzione mediante scrittura polinomiale richiede invece necessariamente un esplicito riferimento alla base numerica impiegata, oltre all'esecuzione di operazioni di somma e sottrazione in tale base. Tutti i numeri scritti tra la seguente parte compresa tra due asterischi, così come le operazioni tra loro, sono in base otto. Anche in vista di successive osservazioni, e per mostrare la perfetta corrispondenza di certe situazioni, *abbiamo omesso di indicare la base*: ad esempio, la scrittura 10 sta per $(10)_8$.[10] La parte compresa tra gli asterischi è ottenuta da un copia-incolla dell'analoga parte dell'esercizio precedente. Si osservi che il numero delle etichette, cioè duemilasette, in base otto si scrive 3727 (per fortuna, anche in base otto il numero duemilasette ha quattro cifre, il che ha permesso l'uso integrale del sopraddetto copia-incolla)

(* Se *abcd* è il numero di matite allora il numero delle etichette è $abcd + abc + ab + a$. Dunque $abcd + abc + ab + a = 3727$.
Poiché $\boldsymbol{abcd} = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$, e $\boldsymbol{abc} = a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c$, e $\boldsymbol{ab} = a\cdot 10 + b$, abbiamo:
$3727 = abcd + abc + ab + a =$
$= (a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d) + (a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c) + (a\cdot 10 + b) + a =$
$= a\,(10^3 + 10^2 + 10 + 1) + a\,(10^2 + 10 + 1) + c\cdot(10 + 1) + d =$
$= 1111a + 111b + 11c + d.$

Poiché *a, b, c, d* sono numeri di una cifra, abbiamo necessariamente $a = 3$ (non potendo *b, c* essere negativi ed essendo la somma 3727). Quindi $111b + 11c + d = 3727 - 3333 = 374$. Per lo stesso motivo, abbiamo necessariamente $b = 3$, da cui si ricava $11c + d = 374 - 333 = 41$. Questa nuova equazione ha soluzione solo per $c = 3$ e $d = 6$. Il numero cercato è dunque 3336. *)

Trovandoci in base otto, il numero delle matite è dunque $(3336)_8$, cioè 1758.

Sempre riferendosi al metodo per scrittura polinomiale, possiamo proporre agli allievi più grandi il seguente esercizio.

Esercizio. Supponiamo di avere di fronte a noi solo la parte compresa tra i due asterischi, in cui non si fa cenno alla base in cui ci si trova. Come facciamo a sapere quante sono *davvero* le matite? Per saperlo dobbiamo conoscere la base in cui i numeri sono scritti, informazione che abbiamo volutamente omesso di dare esplicitamente. Possiamo ricavare questa informazione?

Soluzione. Il fatto che le cifre arrivino fino al 7 denota che la base deve essere maggiore o uguale ad otto. Per il resto, non è detto che sia sempre possibile dedurre la base quando questa non è indicata. Ad esempio, se ci si trova di fronte ad operazioni in cui non ci sono riporti o prestiti, ciò non è possibile (le scritture $5 + 2 = 7$ e $7 - 2 = 5$, così come $12 + 15 = 27$ e $27 - 15 = 12$, sono corrette in qualunque base maggiore o uguale ad otto). Tuttavia, nel nostro caso, la sottrazione $3727 - 3333 = 374$ ci viene in aiuto. Eseguendo l'operazione in colonna, nella seconda colonna da destra abbiamo $2 - 3 = 7$; ciò significa che $7 + 3 = 2$ con il riporto di 1. Poiché $7 + 3$ è dieci, la base è quella in cui dieci è scritto 12. Tale base è otto: infatti $1\cdot 8 + 2 = 10$.

Metodo per sottrazione.

Come nel caso precedente, anche la traduzione in base otto sia della soluzione per sottrazione sia della relativa dimostrazione non richiede alcun intervento sul testo originale (in base 10): la prova di ciò sta nel fatto che la parte seguente compresa tra gli asterischi è ottenuta per copia-incolla. Ciò, tra l'altro, serve a dimostrare come gli algoritmi per la scrittura e per le operazioni siano gli stessi in qualunque base si operi Anche la proprietà **PR**, cioè che il riporto di n addendi di una cifra non supera mai $n - 1$, vale indipendentemente dalla base. Tuttavia

[10] In qualunque base la scrittura $(10)_n$ esprime n nella base stessa (Es. $10_8 = \mathbf{1}\times 8^1 + \mathbf{0}\times 8^0$).

riteniamo che tale perfetta traducibilità possa esser proficuamente proposta solo ad alunni di scuola secondaria di secondo grado.
(*Attenzione*: anche questa volta, per evidenziare l'analogia, nel tratto tra asterischi *non* abbiamo indicato la base). (*

$$\begin{array}{ccccc} & & r & & \\ a & b & c & d & + \\ & a & b & c & + \\ & & a & b & + \\ & & & a & = \\ \hline 3 & 7 & 2 & 7 & \end{array}$$

Poiché $abcd + abc + ab + a = 3727$, abbiamo $abcd = 3727 - (abc + ab + a)$.
Come mostra la figura precedente, $abc + ab + a$ è uguale a 372 meno l'eventuale riporto r proveniente dalla colonna delle unità, in cui si sommano a, b, c, d. Il riporto tra la somma di n numeri di una cifra non può essere superiore a $n - 1$, quindi r è 0 o 1 o 2 o 3. Pertanto $abcd = 3727 - 372$ se $r = 0$; $abcd = 3727 - (372 - 1)$ se $r = 1$; $abcd = 3727\ \ (372 - 2)$ se $r = 2$; $abcd = 3727 - (372 - 3)$ se $r = 3$.
I candidati sono dunque 3335, 3336, 3337, 3340 [si ricordi che si sta operando in base otto]. Si procede ora in modo diretto facendo la verifica: 3335 + 333+ 33+ 3= 3726: NO. 3336 + 333+ 33+ 3= 3727: SI. Il numero cercato è 3336. *)
Il numero delle matite è dunque $3 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 6 = 1758$.

5. Altri problemi dati al RMT riconducibili allo schema contachilometri - matite.

Gli ultimi due problemi del percorso proposto, più recenti in ordine di tempo, hanno ripreso lo schema della coppia *vecchio contachilometri - le matite del 15° RMT*. Ci limitiamo ad evidenziarne le differenze dallo schema base.

Pennarelli nuovi
Il dirigente scolastico di una scuola dell'infanzia ha ordinato dei nuovi pennarelli per l'anno scolastico 2012-2013. La ditta che li fabbrica li confeziona in piccole scatole contenenti ciascuna 8 pennarelli. Per inviare il materiale alla scuola, l'addetto alla spedizione utilizza:
- scatole medie, che possono contenere esattamente 8 scatole piccole;
- scatole grandi, che possono contenere esattamente 8 scatole medie;

e procede così: quando ha riempito 8 scatole piccole, le mette in una scatola media; quando ha riempito 8 scatole medie le mette in una scatola grande, poi ricomincia con i pennarelli che rimangono. Alla fine, l'addetto alla spedizione osserva che per preparare l'ordine della scuola sono state utilizzate in tutto, tra piccole, medie e grandi, 85 scatole e che esse sono tutte completamente piene.
Quanti sono i pennarelli che ha ordinato il dirigente scolastico? Precisate il numero di scatole di ciascun tipo (piccole, medie e grandi) che sono state utilizzate.
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Questo problema è analogo alla variante in base otto de *Le matite del 15° RMT*. Bisogna tuttavia osservare che il corrispondente della "matita" o del "km" dei problemi precedenti è la scatola piccola e non il singolo pennarello. Ogni strategia deve quindi essere indirizzata al conto delle scatole piccole, il cui numero moltiplicato per otto darà il numero dei pennarelli.

Ad esempio, utilizzando il metodo per sottrazione dobbiamo osservare che 85 (il numero delle scatole), in base otto, si scrive 125. Quindi dalla sottrazione $(125)_8 - (12)_8 = (113)_8$ si ottiene che i numeri di scatole piccole possibili sono $(113)_8$ o $(114)_8$ o $(115)_8$. Procedendo alla verifica si ottiene $(113)_8 + (11)_8 + 1 = (125)_8$ e quindi il numero di scatole piccole è $(113)_8$ da cui il numero di pennarelli è $(113)_8 \times (10)_8 = (1130)_8$. A questo punto si esprime in base dieci tale numero ottenendo 600.[11]

Quante uova!

Mario prepara le confezioni per sistemare le sue uova nel modo seguente.
- Dapprima inizia a riempire dei contenitori da 6 uova;
- ogni volta che ha riempito 6 contenitori, li sistema in una scatola, che chiude,
- quando ha preparato 6 scatole, le mette in una cassa che chiude.

Oggi, le galline hanno deposto un mucchio di uova. Mario ne ha raccolte 1000.

[11] Si osservi che moltiplicare un numero per la base (cioè per il numero scritto 10 in tale base), vuol dire procedere allo spostamento delle cifre di una posizione a sinistra e mettendo 0 nel posto delle unità.

Mario ha appena finito di sistemarle tutte.
Quante casse piene, quante scatole piene, quanti contenitori pieni e quante uova non confezionate vede Mario davanti a sé?
Spiegate come avete trovato la risposta

Questo problema ha quella che abbiamo chiamato la *forma diretta*: "dato il numero degli oggetti trovare il numero dei raggruppamenti". L'unica differenza rispetto al problema del contachilometri è che non viene richiesto il numero complessivo dei raggruppamenti, ma solo i numeri per ciascuna tipologia di raggruppamento. La soluzione del problema diretto del contachilometri era piuttosto semplice: dati i 127 km avevamo 127 cric, 12 crac, 1 rrmt. Ciò suggerisce la seguente

Domanda. Perché il problema delle uova, pur se semplice, non è altrettanto immediato?

Risposta attesa: perché non è in base 10. Se i contenitori contenessero 10 e non 6 oggetti ciascuno, la risposta, essendo 1000 le uova, sarebbe: 1 cassa, 0 scatole, 0 contenitori, 0 uova sfuse.

La soluzione proposta nell'analisi a priori del problema *Quante uova!* è stata quella per divisioni euclidee, la quale, come già osservato, non richiede alcun riferimento alla base con cui si numera. Tuttavia, la risposta precedente suggerisce una diversa strategia: scrivere il numero 1000 in base sei. Essendo tale scrittura 4344, abbiamo la soluzione analoga a quella del contachilometri: 4 scatoloni, 3 scatole, 4 contenitori, 4 uova sfuse.

E' possibile proporre agli allievi di categoria superiore alla 7 anche il seguente

Esercizio. Rovesciare il problema delle uova, facendogli assumere la *forma inversa*, in cui il dato da trovare è il numero degli oggetti a partire dal numero dei raggruppamenti.
Soluzione. L'inversione che sembra più naturale è la seguente:

Mario prepara [...] Oggi, le galline hanno deposto un mucchio di uova. Mario ha appena finito di sistemarle tutte. Ha riempito completamente 4 casse, 3 scatole, 4 contenitori e gli sono avanzate 4 uova con le quali non può riempire un contenitore.
Quante uova hanno deposto le galline oggi?

Tuttavia, in questa forma, il problema non è analogo ai precedenti, in quanto non viene dato il numero complessivo dei contenitori, ma solo di quelli "che si vedono", i quali sono: le casse, le scatole rimaste fuori dalle casse, i contenitori rimasti fuori dalle scatole e le uova rimaste fuori dai contenitori. Risalire al numero delle uova in questo caso è banale: $4\times6^3 + 3\times6^2 + 4\times6 + 4 = 1000$. Semmai, si può ancora una volta far notare che 4344 è la scrittura in base sei del numero delle uova e, ancora una volta, che l'ultima cifra della scrittura posizionale non indica le unità, ma le unità rimaste fuori dalle sestine (o dalle decine se siamo in base 10), e così via.
Volendo rendere questa forma inversa analoga nella struttura ai problemi precedenti occorre prima di tutto sommare il numero dei vari recipienti: tale numero è 197, ottenuto come $4(1\times6^2 +1\times6 + 1) + 3(1\times6 + 1) + 4$. A questo punto il problema diventa:

Mario prepara [...] Oggi, le galline hanno deposto un mucchio di uova. Mario ha appena finito di sistemarle tutte: ha riempito completamente 197 fra contenitori, scatole e casse e gli sono avanzate 4 uova.
Quante uova hanno deposto le galline di Mario oggi?

E le strategie risolutive sono del tutto analoghe alle precedenti, passando dalla base otto alla base sei.

Conclusione

Tutte le strategie presentate nel corso dell'articolo, pur diverse per grado di difficoltà, sono incentrate sul concetto di scrittura posizionale e finalizzate ad acquisire "competenza" su di esso. La proposta di lavoro, che come detto in precedenza, deve seguire la fase di risoluzione autonoma dei problemi da parte degli allievi, coniuga, al suo interno, alcuni spunti didattici che riteniamo utili. Ne elenchiamo i principali:

- indurre gli alunni a confrontare e discutere strategie diverse per la soluzione di uno stesso problema, al fine di potenziarne l'argomentazione e svilupparne la capacità critica;
- far "scoprire" che la modifica del testo di un problema richiede un attento controllo delle variabili coinvolte, conducendo gradualmente gli allievi a rendersi conto dell'importanza dei processi di verifica dei risultati trovati;
- ricercare varianze/invarianze nel confronto tra due o più problemi, per favorire l'appropriazione dei concetti coinvolti e favorire i processi di generalizzazione;

- integrare lo studio dell'aritmetica con quello dell'algebra, così come previsto anche dagli "Obiettivi Specifici di Apprendimento del Primo Biennio della scuola Secondaria di 2° grado" italiani.

La modularità del percorso ne consente l'articolazione e la proposta, in base alle necessità ed agli obiettivi, a classi di categorie diverse da quelle a cui i problemi sono stati assegnati durante la gara. In particolare, si può lavorare alla risoluzione dei quattro problemi, nell'ordine in cui li abbiamo proposti, anche con classi di categorie 5, 6 e 7; è possibile infatti condurre gli allievi di tali categorie ad individuare analogie e differenze strutturali tra i vari problemi, scoprendo inoltre, con semplici attività di tipo laboratoriale, piccole regolarità nella scrittura posizionale dei numeri. Più volte abbiamo riscontrato quanto la scoperta di regolarità o di eccezioni a presunte regole entusiasmi gli allievi.

A tale proposito è interessante l'esperienza riferita da un'insegnante a seguito di un'attività laboratoriale svolta in una classe quinta di scuola Primaria durante la quale è stato utilizzato il problema *Il vecchio contachilometri II* al fine di rafforzare il concetto di posizionalità. Dopo aver proposto la risoluzione del problema ed aver guidato la classe a superare le difficoltà incontrate, l'insegnante ha invitato gli allievi a trovare altri numeri corrispondenti ai rumori, per poi individuare il numero dei chilometri. I bambini si sono divertiti nella ricerca, gareggiando a chi ne trovava di più. La maggior parte di loro, dopo un po', trovava rapidamente la giusta corrispondenza fra chilometri e rumori. L'insegnante ha allora lanciato una nuova sfida: trovare un numero di rumori impossibile! Le risposte ottenute presentavano tipologie diverse (es. 209, 309, …; 220, 221, ...; 176, 276, …; 664, 775, …) ed è stata per tutti una grande soddisfazione. Questo semplice gioco li ha senz'altro fortificati nella comprensione del concetto di "posizionalità".

Se con le categorie più basse ci si deve limitare a scoprire regolarità o anomalie, con le categorie più alte ci si può spingere oltre, tentando di dimostrarle. Anche l'introduzione di esperienze talvolta complesse, che ad una prima analisi possono essere valutate inadeguate rispetto all'età o agli strumenti conoscitivi, potrà assumere una valenza fondamentale per avviare il percorso di riflessione che trasforma le conoscenze in concetti. Nella fattispecie, il problema *Pennarelli nuovi* può essere proposto anche in una classe 5^ della scuola Primaria; in tal modo è possibile condurre gli allievi ad esplorare in maniera nuova il concetto di scrittura posizionale, avvalendosi di materiali concreti e di rappresentazioni iconiche o grafiche. Potrà accadere, allora, di sentire gli alunni che discutono su come raggruppare per otto non sia "*poi tanto diverso da raggruppare per dieci*".

Con le classi di categoria più bassa l'insegnante può puntare l'attenzione su quello che abbiamo chiamato *Metodo per divisioni*, mettendo così in risalto i concetti di raggruppamento e divisione con resto, fondamentali per dare significato alla scrittura posizionale. Per contro, l'utilizzo della strategia che abbiamo chiamato *Metodo per scrittura polinomiale dei numeri* potrà essere proposto solo ad allievi appartenenti a categorie maggiori della 6. Impiegando tale metodo si persegue il duplice obiettivo di consolidare la scrittura posizionale (vedendola al lavoro in contesti non standard) e di fornire un esempio di applicazione dello strumento algebrico vincolato alla situazione che si sta affrontando: non tutte le soluzioni delle equazioni impostate possono infatti essere accettate, ma solo quelle intere, positive ed appartenenti all'insieme di variabilità delle cifre (insieme che a sua volta dipende dalla base impiegata per la scrittura dei numeri stessi).

Con gli allievi di categorie più alte, che hanno già dimestichezza con il linguaggio simbolico, si può iniziare il percorso proponendo la risoluzione dei primi due problemi e, in un secondo tempo, indirizzandoli verso l'utilizzo di tutte le strategie descritte. In un secondo momento, quando i primi due problemi sono stati riconosciuti come "lo stesso problema" (nel senso che con semplici traduzioni si può passare dall'uno all'altro), è possibile proporre gli altri due problemi, lasciando agli studenti la libertà di scegliere la strategia risolutiva ritenuta più opportuna. A conclusione di ciò potrà essere organizzata un'attività di discussione e confronto delle novità emerse. Ricordiamo infatti quanto la "scoperta" risulti importante nel processo di apprendimento e quanto essa sia efficace per accrescere l'affettività verso la matematica e per potenziare la crescita cognitiva del soggetto. Organizzare, fin dalle classi di scuola Primaria, attività che forniscano occasioni di scoperta è pertanto un passaggio significativo ed indispensabile nella didattica, ed il lavoro con problemi non standard come quelli proposti dal RMT è particolarmente adatto allo scopo. Ciò consente inoltre di integrare in maniera appropriata i contenuti matematici con la costruzione del pensiero, di "leggere" la matematica nella realtà quotidiana e di risolvere problemi "intesi come questioni autentiche e significative".

Bibliografia

Crociani C., Spatoloni R. 2013, *Il numero si incontra molto presto …. ma è una conquista difficile,* La Gazzetta di Transalpino/La Gazette de Transalpie n.3, pp. 49-81 in www.armtint.org

Crociani C., Spatoloni R. (a nome del gruppo numerazione dell'ARMT) 2008, *Cifra-numero...tanti problemi: resoconto di tre anni del gruppo di lavoro*, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino, Vol.8, Brigue 2008, ARMT, Académie Suisse des Sciences Naturelles (SCNAT), Quartu S. Elena, Italy 2009, pp. 99-120.

Crociani C., Spatoloni R. (a nome del gruppo numerazione dell'ARMT) 2007, *Sui concetti di cifra, numero, valore posizionale: resoconto di alcune esperienze,* in *RMT fra pratica e ricerca in didattica della matematica*, Atti delle giornate di studio sul rally matematico transalpino, Vol.7, Bard 2007, ARMT, Centro Risorse per la didattica della Matematica, Sezione della Valle d'Aosta dell'ARMT, pp. 143-162.

Crociani C., Spatoloni R. (a nome del gruppo numerazione dell'ARMT) 2005, *I problemi del rally come supporto didattico per l'avvio alla costruzione e al successivo consolidamento del concetto di cifra, numero e notazione posizionale*, in *RMT: dai problemi alla didattica quotidiana*, Atti delle giornate di studio sul rally matematico transalpino, Bourg-en-Bresse 2004- Arco di Trento 2005, ARMT, IPRASE Trentino, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en-Bresse, pp.224-234.

Ministero per l'Istruzione, Università e Ricerca: "Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'Infanzia e del primo ciclo di istruzione" 2012.

Ministero per l'Istruzione, Università e Ricerca: "Indicazioni Nazionali per i Licei" 2010.

ÉLÉMENTS DE RÉFLEXION SUR L'ÉCRITURE POSITIONNELLE DES NOMBRES À PARTIR DE PROBLÈMES DU RMT

Carla Crociani, Rita Spatoloni[1]

1. Introduction

Cet article propose une réflexion sur la résolution de quelques problèmes du RMT, ayant en commun la même structure, et dont il est possible de tirer des activités adressées à des élèves d'un degré compris entre la cinquième année de l'école élémentaire et la cinquième année de l'enseignement secondaire, donc de 10 à 15 ans. Il est né de la conviction, mûrie au cours des années de travail avec des problèmes du RMT, que le concept d'écriture positionnelle n'est en général pas bien acquis par certains élèves.
On a constaté en effet que

- le passage d'une « quantité numérique » à son écriture,
- les algorithmes des quatre opérations qui se basent sur la gestion des « retenues », des « prêts » et des « regroupements »,

sont souvent conduits de manière automatique et sans réflexion critique. A ce propos, surtout dans les cas où les questions sont formulées sous une forme non standard, nous avons observé nombre de fois que les élèves se trouvent particulièrement désorientés.
Nous pensons que les analyses et réflexions proposées dans les paragraphes suivants, peuvent conduire à des considérations didactiques et à des activités progressives favorables à la reprise et à l'approfondissement du concept de numération de position. Elles pourront être modulées selon les besoins des classes.

Une première décision importante à prendre concerne le moment d'affronter le concept de numération de position et le temps qu'il faut lui dédier. Souvent tout se déroule à l'école primaire, lorsque l'âge des élèves ne leur permet pas de l'envisager avec les capacités d'analyse adéquates. Le long travail d'analyse des copies relatives à la résolution des problèmes du RMT, ainsi que les expérimentations effectuées avec les élèves nous incitent à penser que des activités pertinentes, reprises plusieurs fois et au cours des années suivantes, peuvent favoriser le dépassement des obstacles que les élèves rencontrent dans la résolution des problèmes où ce concept est mobilisé. Il est aussi important de décider de l'attention dévolue à la structure des algorithmes d'opérations, en particulier ceux de la multiplication et de la division ; il faut en effet induire[2] la réflexion des élèves sur le sens mathématique de leurs différentes étapes. Pour la division il est nécessaire, dès la première approche, de proposer aux élèves d'effectuer des regroupements, soit avec un matériel concret soit par des dessins, pour les aider à se représenter le reste et le quotient. En procédant ainsi, on pourrait peut-être éviter des erreurs : par exemple, comme celle qui consiste à rechercher les décimales dans une division quelconque sans prendre en considération les objets/événements auxquels elle se rapporte. Dans ce cas l'usage de la calculatrice, si cet instrument n'est pas utilisé de manière réfléchie, devient une raison de se fourvoyer. En outre, des activités d'analyse sur l'algorithme de la division, reprises à l'école secondaire supérieure, peuvent être d'un intérêt préparatoire à d'autres notions, dont l'introduction des numérations avec des bases différentes de dix.

Le travail décrit ci-après, veut fournir des repères permettant d'évaluer le degré de perception des propriétés de l'écriture positionnelle, et simultanément, d'en favoriser l'apprentissage, en proposant un parcours balisé par la résolution des quatre problèmes suivants :

- Le vieux compteur I-II.11.I.2-9 Cat. 3, 4 - 5, 6
- Les crayons du 15^{e} RMT 15.II.8 Cat.5, 6
- Nouveaux feutres 21.II.12 Cat. 6, 7, 8
- Que d'œufs ! 19.I.8 Cat.5, 6, 7

L'essentiel, dans l'optique d'un apprentissage qui se construit progressivement, consiste à faire « découvrir » graduellement aux élèves l'analogie structurelle camouflée sous la diversité d'énoncés et l'émergence du fait que les stratégies résolutives sont transférables d'un problème à l'autre par de simples « traductions ». Les deux derniers problèmes conduisent naturellement à des numérations de bases différentes de dix. Cela comporte un degré de difficulté différent puisque, pour le dire à la manière d'Orwell, [3] *toutes les bases sont égales, mais la base dix est plus égale que les autres.*
À ce sujet, nous retenons que chaque proposition d'exercice impliquant des bases différentes de dix doit être faite avec la conscience que, s'il est vrai que les nombres sont représentables dans une base quelconque au moyen des

---

1 Section de Siena

2 Nous employons ce terme "induire » pour souligner qu'il ne s'agit pas de transmettre une connaissance procédurale, mais d'en permettre la conquête par une prise de conscience progressive. D'où la nécessité d'un parcours à étapes graduelles, construites l'une après l'autre, pour permettre aux élèves de s'approprier les concepts qui sont en jeu.

3 « *Tous les animaux sont égaux mais certains le sont plus que d'autres*. » George Orwell (1903-1950), *La ferme des animaux*.

mêmes algorithmes, il est vrai aussi que leurs noms sont ceux qui correspondent à la base dix (le nom « deux mille cinq cents quatre-vingt-douze », comme le nom « two thousand five hundred ninety two », indique un nombre précis, se réfère à la base dix sans autre alternative). Cela confère à cette base une suprématie objective sur les autres.

Nous proposons ensuite une activité à conduire en classe, que nous considérons comme phase d'institutionnalisation après la nécessaire phase de résolution par les élèves de quelques problèmes (de structure « semblable »). Rappelons que les problèmes en question ont déjà été largement analysés, dans le cadre du groupe de travail de l'ARMT sur la numération[4].

2. Problème *Le vieux compteur*

Le premier des problèmes proposés, et aussi la tête de série,[5] est *Le vieux compteur*, il est présenté sous deux versions, la première que nous désignerons par *directe*, la seconde par *inverse*.

Version *directe*:

Le vieux compteur I

La voiture d'Alphonse a un vieux compteur qui fait des bruits à chaque kilomètre, chaque fois qu'un chiffre nouveau apparaît.

- Il fait « cric » à chaque changement du premier chiffre, de droite.
- Il fait « crac » à chaque changement du chiffre du milieu.
- Il fait « rrmt » à chaque changement du chiffre de gauche.

Aujourd'hui Alphonse va faire une promenade
en voiture. Il met son compteur à 0 :
Voici le compteur après 13 km :
Il a déjà fait 14 bruits : 13 « cric » et 1 « crac ».
A son retour, le compteur marque 127 km.

0	1	3
1	2	7

Combien Alphonse a-t-il entendu de bruits en tout au cours de sa promenade ?

Expliquez comment vous avez trouvé et dites combien de « cric », combien de « crac » et combien de « rrmt » il a entendu.

La solution de la version directe s'obtient par la somme127 + 12 + 1 = 140.

Pour les élèves (de niveaux 3 et 4 d'école élémentaire) auxquels le problème a été proposé, cette solution a impliqué de dépasser les embûches contenues dans l'expression [scolaire] académique « 127 est formé de 1 centaine, 2 dizaines et 7 unités ». Une telle expression, largement utilisée, peut à juste titre servir à indiquer le « rôle » des différents chiffres (1 est le chiffre des centaines, 2 est le chiffre des dizaines, et 7 celui des unités), ou à indiquer le fait que 127 corresponde à 1 centaine **plus** 2 dizaines **plus** 7unités. Il y a cependant le risque que cela occulte le fait que les unités dans le nombre 127, ne sont pas 7 mais 127, et que les dizaines ne sont pas 2 mais 12.[6]

Version *inverse*.

Dans cette version (où les valeurs numériques restent inchangées) au lieu de donner le nombre de kilomètres et demander le nombre de bruits, on donne le nombre de bruits, et on demande le nombre de kilomètres. Dans ce cas, si nous avions voulu changer le nombre de bruits (c'est-à-dire changer la donnée 140) nous aurions dû faire attention au fait que tous les nombres ne sont pas adaptés à cet objectif. [7]

Par exemple, on n'aura jamais 187 bruits : si les kilomètres sont au nombre de 169, les bruits seront au nombre de : 169 + 16 + 1 = 186; si les kilomètres sont au nombre de 170, on comptera 188 bruits (170 + 17 + 1 = 188). Ce constat peut faire apparaitre des éléments de discussion en classe, aussi importants au plan mathématique qu'à un niveau didactique transversal.

[4] Ce groupe, que nous coordonnons, était composé, en 2013, de L.Abate (Rozzano), A. Andreini (SI), M. Bartolomei (SI), S. Carrusci (CA), M. Lucherini (SI), M. Mandelli (RV), E. Marangoni (PR), C. Mazzoni (PR), M. G. Miraglia (PR), I. Parisi (Riva), B. Perna (SI).

[5] Cf. Atti di Bourg-en-Bresse 2004 e Arco di Trento 2005.

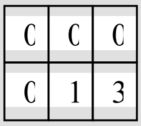
[6] Cf. Fiche utilisée dans la Banque de Problèmes

[7] A la rencontre de Brigue 2008, fut présentée une activité sur le changement des variables didactiques, conduite en classe de niveau 5, à partir précisément du problème *Le vieux compteur I*. Les élèves ont joué à inventer un nouveau problème, *Les petites gommes de Louise*, qui emploie la forme inverse du problème d'origine, en changeant aussi bien le contexte que les valeurs numériques. En inventant ce nouveau texte les élèves ont aussi découvert que tous les nombres « ne vont pas bien » pour les bruits.

Le vieux compteur II

La voiture d’Alphonse a un vieux compteur qui fait des bruits à chaque kilomètre, chaque fois qu’un chiffre nouveau apparaît.
- Il fait *« cric »* à chaque changement du premier chiffre, de droite.
- Il fait *« crac »* à chaque changement du chiffre du milieu.
- Il fait *« rrmt »* à chaque changement du chiffre de gauche.

Aujourd’hui Alphonse va faire une promenade en voiture. Il met son compteur à 0 :



Voici le compteur après 13 km.
Il a déjà fait 14 bruits : 13 *« cric »* et 1 *« crac »*.

A la fin de sa promenade, il a entendu 140 bruits.
Combien de kilomètres a parcouru Alphonse au cours de sa promenade ?
Expliquez comment vous avez trouvé.

Pour cette version inverse, moins simple que la version directe, nous proposons diverses stratégies de résolution : une de type arithmétique, une seconde de type algébrique, et une troisième de type « mixte ». Etant donné que ces mêmes stratégies seront reprises également dans les problèmes suivants, il nous semble utile de leur donner un nom pour faciliter la lecture. Nous nous référerons à celles-ci en les nommant respectivement : méthode par divisions euclidiennes, méthode par écriture polynomiale des nombres et méthode par soustraction.

Méthode par divisions euclidiennes.

Une telle méthode qui semble plus directe, se base sur le fait que :
- Pour chaque kilomètre on a un bruit (cric)
- Tous les 10 kilomètres on a 11 bruits (10 cric + 1 crac)
- Tous les 100 (10^2) kilomètres on a 111 bruits (10^2 cric + 10 crac + 1 rrmt)

Puisque chaque centaine de km entraine 111 bruits et chaque dizaine de km en entraine 11, on procède aux divisions suivantes en indiquant chaque fois le quotient et le reste, en précisant ce qu’ils représentent (nous utilisons le symbole « / » pour indiquer la division euclidienne) :

140/111 quotient **1** (le nombre de km est supérieur ou égal à 100 et inférieur à 200) reste 29 (les bruits après le centième km) ;

29/11 quotient **2** (le nombre de km parcouru au-delà des 100 km est supérieur ou égal à 20 et inférieur à 30) reste 7 (les bruits après le 120$^{\text{ème}}$ km) ;

7/1 quotient **7**, reste 0 (la dernière division par 1 peut être omise, puisque le reste est toujours 0, le quotient étant égal au reste de la division précédente).

On déduit ainsi que le nombre de kilomètres parcourus est 127.

Important pour la suite : on invite les élèves à observer que les quotients des divisions (écrits en gras) sont les chiffres du nombre recherché.

Méthode par écriture polynomiale des nombres.

Une telle méthode (à envisager seulement avec des élèves au-delà de la catégorie 7) utilise l’écriture des nombres sous forme polynomiale. Nous désignons par *abc* le nombre inconnu de kilomètres. (*Attention : a, b, c* sont simplement les chiffres servant à écrire le nombre; *abc* ne doit donc pas être compris comme $a \times b \times c$). Grâce à cette représentation, nous écrivons le nombre des unités (*abc*), le nombre des dizaines (*ab*), et les nombre des centaines (*a*). Donc le nombre de bruits est *abc* (les “cric”) + *ab* (les “crac”) + *a* (les « rrmt »)[8] que nous écrivons ainsi:
abc + *ab* + *a* = 140.

[8] En plus de la maîtrise de l’écriture symbolique, l’emploi de cette stratégie requiert une claire compréhension du fait que le nombre total de bruits (cric + crac + rrmt) est obtenu par la somme des unités, des dizaines et des centaines, présents dans le nombre 127. Cette difficulté, déjà mise en lumière dans l’analyse de la forme directe du problème, n’est pas si évidente pour les élèves - !-, ainsi que nous l’avons montré dans une de nos études précédentes (Cf. Bourg en Bresse 2004, Arco di Trento 2005, Brigue 2008).

Puisque $abc = a{\cdot}10^2 + b{\cdot}10 + c$ e $ab = a{\cdot}10 + b$, nous avons la série suivante d'égalités:
$140 = abc + ab + a =$
$= a{\cdot}10^2 + b{\cdot}10 + c + a{\cdot}10 + b + a =$
$= a{\cdot}(10^2 + 10 + 1) + b{\cdot}(10 + 1) + c =$
$= 111a + 11b + c.$

Nous devons donc résoudre l'équation suivante:
$111a + 11b + c = 140$
Sachant que *a, b, c* doivent être des nombres (naturels) à un chiffre. Nous avons nécessairement $a = 1$ (*b, c* ne pouvant pas être négatifs et étant donnée la somme 140). Donc $11b + c = 140 - 111 = 29$. Pour la même raison, nous avons nécessairement $b = 2$, dont on obtient 22 + c = 29. Enfin, $c = 7$. Le nombre cherché est donc 127.
Les deux stratégies précédentes sont clairement transférables à un quelconque autre nombre, et pour ainsi dire, se démontrent par elles-mêmes. A ce point, il peut être intéressant de proposer une solution beaucoup plus rapide et mécanique, mais « plus mystérieuse », en incitant les élèves à la démontrer ou au moins à vouloir en obtenir la démonstration..

Méthode par soustraction

Soit $c_1c_2c_3...c_{n-1}c_n$ le nombre (connu) de bruits. On sait que le nombre de km est compris entre $c_1c_2c_3...c_{n-1}c_n - c_1c_2c_3...c_{n-1}$ e $(c_1c_2c_3...c_{n-1}c_n - c_1c_2c_3...c_{n-1}) + (n - 1)$. Parmi ces n nombres, on trouve le nombre juste avec la méthode employée pour le problème en forme directe.

Par exemple, dans notre cas où $c_1c_2c_3 = 140$, $c_1c_2 = 14$ et $n = 3$, étant donné que 140 a 3 chiffres. Donc les nombres possibles sont 126, 127 e 128. On procède alors en mode direct à la vérification: 126 + 12 + 1 = 139 (on n'obtient pas 140, le nombre 126 n'est donc pas le bon. 127 + 12 + 1 = 140. Le nombre cherché est donc 127.

L'avantage de cette méthode réside dans sa rapidité, surtout quand elle est appliquée à de grands nombres. Par exemple, supposons que les bruits soient au nombre de 83427. Le nombre cherché est compris entre 83427 – 8342, c'est-à-dire 75085, et (75085 + 4). Puisque 75085 + 7508 + 750 + 75 + 7 = 83425, on voit qu'on est « à 2 en dessous » de la cible, nous trouvons donc que le nombre cherché est 75087.

De fait, 75087 + 7508 + 750 + 75 + 7 = 83427.

Démonstration de la méthode par soustraction.

La démonstration que cette méthode est juste s'appuie sur la propriété suivante :

PR La retenue de la somme de n nombres à un chiffre ne peut pas être supérieur à n-1.

La démonstration correcte de PR procède par induction, mais la propriété peut être aisément comprise, en considérant que 9 étant le nombre à un chiffre le plus grand, la somme de deux nombres à un chiffres ne peut dépasser 18, et donc la retenue ne peut dépasser 1; la somme de trois nombres à un chiffre ne peut dépasser 27, et donc la retenue ne peut dépasser 2, et ainsi de suite.

Pour plus de facilité, nous démontrons ici la méthode en nous appuyant sur le cas des 140 bruits, (un autre exemple sera donné par le problème « *Les crayons du 15° RMT* ») La généralisation, immédiate pour un mathématicien, pourra constituer le début d'un parcours intéressant pour des élèves de catégories 9 et 10. Nous représentons l'équation $abc + ab + a = 140$, rencontrée lors de la précédente méthode, comme une somme en colonnes; r représente la retenue de la somme de la colonne des unités.

$$\begin{array}{cccc} & (r) & & \\ a & b & c & + \\ & a & b & + \\ & & a & = \\ \hline 1 & 4 & 0 & \end{array}$$

De $abc + ab + a = 140$ il s'ensuit que $abc = 140 - (ab + a)$. Comme le montre la figure, $ab + a$ est égal à 14 (c'est-à-dire au nombre de bruits sans le chiffre des unités) moins l'éventuelle retenue r. Selon la propriété PR, r est 0 ou 1 ou 2. Donc $abc = 140 - 14$ si $r = 0$; $abc = 140 - (14 - 1)$ si $r = 1$; $abc = 140 - (14 - 2)$ si $r = 2$. Les nombres possibles sont donc 126, 127 e 128. On fait alors la vérification en mode direct, comme vu précédemment : 126 + 12 + 1 = 139 (non); 127 + 12 + 1 = 140 (oui).

3. Problème Les crayons du 15e RMT

Comme nous l'avons dit, le problème du vieux compteur kilométrique a été aussi bien dans sa forme directe qu'inverse, l'archétype d'une série de problèmes de même structure bien que présentés en divers contextes. La première de ces variantes en a été *Les crayons du 15° RMT* .

Le crayons du 15e RMT

Les organisateurs ont décidé d'offrir un crayon à tous les participants du 15e RMT.

À la fabrique de crayons, un employé est chargé de mettre le logo « 15e RMT, 2007 » sur chaque crayon.

Avec 10 crayons, il remplit des boîtes sur lesquelles il met aussi le logo « 15e RMT, 2007 ».

Lorsqu'il a rempli dix boîtes, il en fait un paquet, sur lequel il marque de nouveau le logo « 15e RMT, 2007 ».

Finalement, avec 10 paquets, il remplit un carton sur lequel il marque encore le logo « 15e RMT, 2007 ».

Aujourd'hui, l'employé a préparé les crayons commandés par la section de Transalpie. Il a compté que, pour cette section, il a dû mettre 2007 logos « 15e RMT, 2007 ».

Combien de crayons la section de Transalpie a-t-elle commandés ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

La correspondance entre les deux problèmes est claire:

étiquettes pour les crayons	↔	cric
étiquettes pour les boîtes	↔	crac
étiquettes pour les paquets	↔	rrmt

Il comporte un stade supplémentaire, représenté par les cartons, qui correspondraient aux milliers sur le compteur kilométrique. Les méthodes de résolution sont identiques et le passage de l'un à l'autre peut représenter un exercice pour les élèves. Pour en montrer la complète analogie, nous proposons les solutions grâce à un simple copier-coller, après avoir naturellement procédé aux substitutions requises.

Méthode par divisions euclidiennes.

- Pour chaque crayon on a une étiquette (1)
- Pour chaque dizaine de crayons on a 11 étiquettes (10 + 1) (sur chaque crayon une étiquette + une étiquette sur la boite regroupant les 10 crayons)
- Pour chaque centaine de crayons (10^2) on a 111 étiquettes ($10^2 + 10 + 1$) (sur chaque crayon une étiquette + une étiquette sur chaque boite regroupant les 10 crayons + une étiquette sur le paquet regroupant les 10 boites)
- Pour chaque millier de crayons (10^3) on a 1111 étiquettes ($10^3 + 10^2 + 10 + 1$)

Puisque pour chaque millier de crayons on utilise 1111 étiquettes, pour chaque centaine 111 étiquettes et pour chaque dizaine 11 étiquettes, on procède aux divisions suivantes:

2007/1111	quotient **1** (le nombre de crayons est supérieur ou égal à 1000 et inférieur à 2000), reste 896 (étiquettes au-delà de 1000 crayons)
896/111	quotient **8** (le nombre de crayons au-delà de 1000 est supérieur ou égal à 800 et inférieur à 900), reste 8 (étiquettes au-delà de 1800 crayons)
8/11	quotient **0** (le nombre de crayons au-delà de 1800 est supérieur ou égal à 0 0 et inférieur à 10), reste 8 (étiquettes au-delà de 1800 crayons)
8/1	quotient **8**, reste 0 (le nombre de crayons au-delà de 1800 est 8. Fin de la procédure.)

Le nombre des crayons est **1808 :** 1000 dans un carton, 800 dans huit paquets, 0 boîtes de 10 crayons, 8 crayons isolés. (Cette fois encore, on observe comment les quotients de la division, écrits en gras, sont les chiffres du nombre cherché).

Méthode par écriture polynomiale des nombres.

Si $abcd$ est le nombre de crayons, alors le nombre d'étiquettes est $abcd + abc + ab + a$. Donc $abcd + abc + ab + a = 2007$. Puisque $abcd = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$, $abc = a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c$, et $ab = a\cdot 10 + b$, nous avons:

$2007 = abcd + abc + ab + a =$
$= (a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d) + (a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c) + (a\cdot 10 + b) + a =$
$= a\,(10^3 + 10^2 + 10 + 1) + a\,(10^2 + 10 + 1) + c\cdot(10 + 1) + d =$
$= 1111a + 111b + 11c + d.$

Puisque a, b, c, d sont des nombres à un chiffre, nous avons nécessairement $a = 1$ (b, c ne pouvant pas être négatifs et la somme étant 2007).
Donc $111b + 11c + d = 2007 – 1111 = 896$.
Pour la même raison, nous avons nécessairement $b = 8$, d'où on trouve $11c + d = 896 – 888 = 8$. Cette nouvelle équation a une solution seulement pour $c = 0$ et $d = 8$. Le nombre cherché est donc 1808.

Méthode par soustraction.

2007– 200 = 1807. Comme 2007 a quatre chiffres, les nombres possibles sont 1807, 1808, 1809, 1810. On procède alors en mode direct à la vérification suivante : 1807 + 180 + 18 + 1 = 2006 (on n'arrive pas à 2007, 1807 n'est donc pas le nombre juste). 1808 + 180 + 18 + 1 = 2007. Le nombre cherché est donc 1808.

4. Variante au problème *Les crayons du 15° RMT*

Le problème des crayons, par rapport à celui du compteur kilométrique présente quelques avantages. Le premier consiste dans la compréhension plus facile du contexte : à notre époque digitale, peu d'élèves sont familiarisés avec les vieux compteurs à engrenages. Le second avantage est lié au fait que ce problème se prête facilement à devenir un exercice concernant les numérations en bases autres que 10. Alors qu'il n'est pas naturel d'imaginer un compteur kilométrique comptant dans une base autre que 10 (de fait ça n'existe pas!), il est tout à fait vraisemblable de faire des paquets et des boîtes contenant un nombre d'objets différents de 10. On peut donc proposer le même texte en utilisant cependant des boites de 8 crayons, des paquets de 8 boîtes et des cartons de 8 paquets. La nouvelle version se présente donc ainsi :

Variante au problème *Les crayons du 15° RMT*

Les organisateurs ont décidé d'offrir un crayon à tous les participants au 15° RMT. A la fabrique de crayons, un ouvrier est chargé de coller portant l'inscription «15^o RMT, 2007» sur chaque crayon.

Avec 8 crayons il remplit ensuite des boites sur lesquelles il colle la même étiquette.

Quand il a rempli 8 boîtes, il en fait un paquet, sur lequel il colle encore l'étiquette«15^o RMT, 2007».

Enfin, avec 8 paquets, il remplit un cartons sur lequel il colle encore la même étiquette. Aujourd'hui, l'ouvrier a préparé les crayons commandés par la section de Transalpie, et il a constaté qu'il a utilisé 2007 étiquettes «15^o RMT, 2007».

Combien de crayons a commandé la section de Transalpie?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Les trois méthodes de résolution traitées précédemment s'adaptent parfaitement à ce changement de base, mais avec des niveaux différents de difficulté. Examinons-les séparément.

Méthode par divisions euclidiennes.

Cette méthode peut être employée dans le nouveau contexte sans faire référence à des bases autres que la base 10. Ce qui suit a été obtenu en fait par un copier-coller: rien de changé, sauf la substitution des puissances de 10 par celles de 8.

- Pour chaque crayon on a une étiquette (1)
- Pour 8 crayons, on a 9 étiquettes (8 + 1) (sur chaque crayon une étiquette + une étiquette sur la boite regroupant les 8 crayons)
- Pour 64 crayons (8^2) on a 73 étiquettes ($8^2 + 8 + 1$) (sur chaque crayon une étiquette + une étiquette sur la boite regroupant les 8 crayons + une étiquette sur le paquet regroupant les 8 boites)
- Pour 512 crayons (8^3) on a 585 étiquettes ($8^3 + 8^2 + 8 + 1$)

Comme pour chaque quantité de 512 crayons on utilise 585 étiquettes ; pour chaque quantité de 64 crayons il faut 73 étiquettes ; et pour chaque quantité de 8 crayons, il faut 9 étiquettes, on procède aux divisions suivantes :

2007/585 quotient **3** (le nombre de crayons est supérieur ou égal à $3 \cdot 8^3$ (= 1536) et inférieur à $4 \cdot 8^3$), reste 252 (étiquettes au-delà de 1536 crayons)[9]

252/73 quotient **3** (le nombre de crayons au-delà de 1536 crayons est supérieur ou égal à $3 \cdot 8^2$ (= 192) et inférieure à $4 \cdot 8^2$), reste 33 (étiquettes au-delà de 1536 + 192 = 1728 crayons)

33/9 quotient **3** (le nombre de crayons au-delà de 1728 crayons est supérieur ou égal à $3 \cdot 8$ (= 24) et inférieur à $4 \cdot 8$), reste 6 (étiquettes au-delà de 1728 + 24 = 1752 crayons)

6/1 quotient **6**, reste 0 (le nombre de crayons au-delà de 1752 est 6. Fin de la procédure).

Le nombre de crayons est **1758** : 1536 dans 3 cartons, 192 dans 3 paquets, 24 dans 3 boîtes, 6 crayons isolés. (Naturellement, le nombre d'étiquettes n'ayant pas changé, et la capacité des contenants ayant diminué, le nombre de crayons a diminué, passant de 1808 à 1758.)

Cette solution, bien que n'ayant demandé aucune référence explicite à la base 8, offre cependant des pistes dans cette direction, que les enseignants pourront explorer en fonction du niveau scolaire de leurs propres élèves. La difficulté du changement de base ne doit cependant pas être sous-estimée. Quelle que soit la base utilisée pour

[9] Ainsi nous découvrons que l'écriture "entre 1000 et 2000" signifiait "entre $1 \cdot 10^3$ et $2 \cdot 10^3$".

représenter les nombres, leurs noms (dans la langue utilisée pour les exprimer) sont de toute façon liés à la base 10. Cela constitue une possible source d'erreurs : on se trouve de fait à devoir travailler simultanément avec deux bases, une pour les noms des nombres, l'autre pour leur écriture. Par la suite, pour indiquer une écriture en base autre que 10, nous lettrons es chiffres entre parenthèses et nous indiquerons la base en indice : par exemple $(926)_{12}$. Il est important toutefois de remarquer que la notation de cette base est elle-même écrite en base 10 (encore un autre privilège de cette base!) Une convention de ce type est nécessaire : si nous voulions l'éviter et indiquer dans quelle base nous écrivons ladite base, on ne s'arrêterait jamais.

Cela dit, on peut proposer aux élèves la question suivante :

Question. Dans la solution du problème original (où les boîtes contenaient 10 crayons, etc.) les quotients des divisions (1, 8, 0 et 8) représentent les chiffres du nombre recherché. Dans cette nouvelle version, ce n'est plus le cas. Le nombre recherché est 1758 alors que les quotients sont 3, 3, 3 et 6. Que représentent cette fois ces chiffres?
Réponse attendue. 3, 3, 3, 6 représentent les chiffres du nombre 1758 écrit en base 8.

Ainsi émerge clairement la signification du concept de « base » : comme la suite 1 8 0 8 du problème original indique que les crayons sont une dizaine de dizaines de dizaines + 8 dizaines de dizaines + 0 dizaine + 8, c'est-à-dire 1808 (écriture en base 10), de la même façon maintenant la séquence 3 3 3 6 indique que les crayons sont au nombre de 3 huitaines de huitaines de huitaines + 3 huitaines de huitaines + 3 huitaines + 6, c'est-à-dire $(3336)_8$.

Une autre question, certes pas facile et qui met en lumière la difficulté dont nous parlions, peut être la suivante :
Question. Dans le cas de la base 10, les chiffres 1 8 0 8 indiquaient que le nombre de crayons était supérieur ou égal à 1 dizaine de dizaines de dizaines, à 18 dizaines de dizaines et à 180 dizaines.
Maintenant, les chiffres 3 3 3 6 disent-ils que le nombre de crayons est supérieur ou égal à 3 huitaines de huitaines de huitaines, à 33 huitaines de huitaines, et à 333 huitaines ?
Réponse attendue. Si par 33 et 333 nous désignons les nombres trente-trois et trois-cents-trente-trois, alors la réponse est NON.
En revanche, si nous lisons les écritures 33 et 333 en base 8, alors la réponse est OUI. En fait, les huitaines de huitaines, c'est-à-dire les « soixante-quatraines » contenues dans le nombre $(3336)_8$, c'est-à-dire 1758, sont 27 (et $27 = 3\cdot 8 + 3 = (33)_8$), alors que les huitaines contenues dans 1758 sont 219 (et $219 = 3\cdot 64 + 3\cdot 8 + 3 = (333)_8$).

Méthode par écriture polynomiale des nombres.

La solution précédente par divisions euclidiennes n'a pas mobilisé une référence explicite à la base numérique dans laquelle s'écrivent les nombres (même si nous avons pris cette solution comme point de départ pour des incursions hors de la base 10) La solution mobilisant l'écriture polynomiale des nombres requiert par contre un renvoi explicite à la base numérique employée, en plus de la mise en œuvre d'opérations de somme et de soustraction dans cette base. Dans la partie suivante, tous les nombres écrits entre deux astérisques, de même que les opérations entre eux, sont en base 8. En vue d'observations ultérieures, et pour montrer la parfaite correspondance de certaines situations, *nous avons omis d'indiquer la base* : par exemple, l'écriture 10 est utilisée pour $(10)_8$.[10] La partie comprise entre les astérisques résulte d'un copier-coller de la même partie dans la situation précédente. On observe que le nombre d'étiquettes, à savoir deux-mille-sept, s'écrit 3727 en base huit (par chance, même en base 8, le nombre n'a que quatre chiffres, ce qui a permis d'utiliser entièrement ce copier-coller)

(* Si *abcd* est le nombre de crayons, alors le nombre d'étiquettes est *abcd* + *abc* + *ab* + *a*. Donc *abcd* + *abc* + *ab* + *a* = 3727.

Puisque ***abcd*** $= a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d$, ***abc*** $= a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c$, et ***ab***$= a\cdot 10 + b$, nous avons:

$3727 = abcd + abc + ab + a =$
$= (a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10 + d) + (a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c) + (a\cdot 10 + b) + a =$
$= a\,(10^3 + 10^2 + 10 + 1) + a\,(10^2 + 10 + 1) + c\cdot(10 + 1) + d =$
$= 1111a + 111b + 11c + d.$

Puisque *a, b, c, d* sont des nombres à un chiffre, nous avons nécessairement $a = 1$ (*b, c* ne pouvant pas être négatifs et la somme étant 3727).
Donc $111b + 11c + d = 3727 - 3333 = 374$. Pour la même raison, nous avons nécessairement $b = 3$, d'où on trouve $11c + d = 374 - 333 = 41$. Cette nouvelle équation a une solution seulement pour $c = 3$ et $d = 6$. Le nombre cherché est donc 3336. *)
Etant en base huit, le nombre de crayons est donc $(3336)_8$, c'est-à-dire 1758.

[10] Quelle que soit la base numérique, l'écriture $(10)_n$ exprime *n* dans la même base (Ex. $10_8 = \mathbf{1}\times 8^1 + \mathbf{0}\times 8^0$).

En s'appuyant toujours sur la méthode par écriture polynomiale, nous pouvons proposer aux élèves plus grands l'activité suivante :

Exercice. Supposons d'avoir devant les yeux seulement la partie écrite entre les deux astérisques, dans laquelle il n'est pas fait mention de la base dans laquelle on se trouve. Comment ferons-nous pour savoir combien il y a vraiment de crayons? Pour le savoir, il nous faut connaître la base dans laquelle les nombres sont écrits, information que nous avons volontairement omis de donner explicitement. Peut-on deviner cette information?

Solution. Le fait que les chiffres utilisés arrivent jusqu'à 7 montre que la base doit être supérieure ou égale à huit. Pour le reste, il n'est pas dit qu'il soit toujours possible de déduire la base quand elle n'est pas indiquée. Par exemple, si on se trouve en présence d'opérations sans retenues, alors il est impossible de le déduire. (Les écritures 5 + 2 = 7 et 7 – 2 = 5, de même que 12 + 15 = 27 et 27 – 15 = 12, sont justes dans n'importe quelle base supérieure ou égale à huit.).

Cependant, dans le cas présent, la soustraction 3727 – 3333 = 374 nous aide. En posant l'opération en colonnes, dans la deuxième colonne à droite nous avons 2 – 3 = 7; ce qui veut dire que 7 + 3 = 2 avec la retenue 1. Puisque 7 + 3 font dix, la base est celle dans laquelle dix est écrit 12. Il s'agit de la base huit: de fait, 1·8 + 2 = 10.

Méthode par soustraction.

Comme précédemment, la traduction en base huit de la solution par soustraction aussi bien que la démonstration afférente ne demande aucun changement du texte orignal (en base 10) : la preuve en est que la partie qui suit comprise entre les astérisques a été obtenue par copier-coller. Ceci sert entre autres à montrer comment les algorithmes d'écriture et des opérations sont les mêmes quelle que soit la base dans laquelle on opère. Ainsi la propriété **PR**, qui dit que la retenue de n éléments d'une somme à un chiffre ne dépasse jamais n – 1, est valable indépendamment de la base. Remarquons cependant qu'une telle parfaite traduction ne peut être proposée pertinemment seulement à des élèves du secondaire en deuxième cycle (Lycée).
(*Attention*: cette fois également, pour mettre en évidence l'analogie, nous n'avons pas indiqué la base dans la portion entre les astérisques).
(*

$$\begin{array}{cccc|c}
 & & r & & \\
a & b & c & d & + \\
 & a & b & c & + \\
 & & a & b & + \\
 & & & a & = \\
\hline
3 & 7 & 2 & 7 &
\end{array}$$

Comme $abcd + abc + ab + a = 3727$, nous avons $abcd = 3727 – (abc + ab + a)$.
Comme le montre la figure précédente, $abc + ab + a$ est égal à 372 moins l'éventuelle retenue r provenant de la colonne des unités, où l'on additionne a, b, c, d. La retenue pour une somme de n nombres à un chiffre ne peut être supérieure à n –1, donc r est égal à 0 ou 1 ou 2 ou 3. Donc $abcd$ = 3727 – 372 si r = 0; $abcd$ = 3727 – (372 – 1) si r = 1; $abcd$ = 3727 (372 – 2) si r = 2; $abcd$ = 3727 – (372 – 3) si r = 3.
Les nombres possibles sont donc 3335, 3336, 3337, 3340 [rappelons-nous que nous sommes en base huit]. On procède alors en mode direct à la vérification suivante: 3335 + 333+ 33+ 3= 3726 : NON.
3336 + 333+ 33+ 3= 3727 : OUI. Le nombre cherché est 3336. *)
Le nombre de crayons est donc $3·8^3 + 3·8^2 + 3·8 + 6 = 1758$.

5. Autres problèmes du RMT comparables au schéma « compteur kilométrique- crayons ».

Les deux derniers problèmes du parcours proposé, plus récents, ont repris le schéma du couple *« Vieux compteur – Crayons »* du 15° RMT. Nous nous limitons à signaler les différences avec le schéma initial.

Nouveaux feutres
La directrice d'une école maternelle a commandé des stylos feutres pour l'année scolaire 2012 - 2013. La société qui les fabrique les emballe dans des petites boîtes qui contiennent chacune huit feutres.
Pour expédier le matériel à l'école, l'employé qui prépare les commandes utilise :
- des boîtes de taille moyenne, qui peuvent contenir exactement 8 petites boîtes,
- des grandes boîtes, qui peuvent contenir exactement 8 boîtes moyennes ;

puis il procède de la façon suivante : quand il a rempli 8 petites boîtes, il les place dans une boîte moyenne, et quand il a rempli 8 boîtes moyennes, il les met dans une grande boîte, puis il recommence avec les feutres qui restent.

L'employé constate qu'entre tous les modèles de boîtes, petites, moyennes et grandes, il a utilisé en tout 85 boîtes pour préparer la commande pour l'école et que toutes les boîtes sont complètement remplies.

Combien de stylos la directrice de l'école a-t-elle commandés ?

Précisez le nombre de boîtes de chaque taille (petites, moyennes et grandes), qui ont été utilisées.

Ce problème est analogue à la variante en base huit des *Crayons du 15° RMT*. Il faut cependant remarquer que ce qui correspond aux « crayons » ou aux « kilomètres » dans les problèmes précédents est ici la petite boîte, et non le feutre seul. Toute stratégie doit ainsi viser à compter les petites boites, dont le nombre multiplié par huit donnera le nombre de feutres.

Par exemple, en utilisant la méthode par soustraction, nous devons observer que 85 (le nombre de boites), en base huit, s'écrit 125. Donc par la soustraction $(125)_8$ - $(12)_8 = (113)_8$ on trouve que les nombres éligibles de petites boites sont $(113)_8$ ou $(114)_8$ ou $(115)_8$. En procédant à la vérification, on trouve $(113)_8 + (11)_8 + 1 = (125)_8$ et donc le nombre de petites boites est $(113)_8$, d'où on calcule que le nombre de feutres est $(113)_8 \times (10)_8 = (1130)_8$. A ce point, on exprime le nombre en base 10 et on obtient 600.[11]

Que d'œufs ! que d'œufs !

Mathurin emballe ses œufs de la façon suivante.
- Il les met d'abord dans des boîtes de 6 œufs ;
- chaque fois qu'il a 6 boîtes, il les met dans un carton, qu'il ferme ;
- dès qu'il a 6 cartons, il les met dans une caisse, qu'il ferme.

Aujourd'hui, les poules ont bien pondu… Mathurin a ramassé 1 000 œufs.
Mathurin vient de terminer les emballages.

Combien voit-il de caisses pleines, de cartons pleins, de boîtes pleines et d'œufs non emballés ? Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Ce problème revêt la forme que nous avons appelée « directe »: « étant donné le nombre d'objets, trouver le nombre des regroupements ». L'unique différence avec le problème du vieux compteur réside dans le fait qu'il n'est pas demandé de trouver le nombre total de regroupements mais seulement les nombres pour chaque type de regroupement. La solution du problème direct du compteur est plutôt simple : étant donnés 127 km, nous avions 127 cric, 12 crac, 1 rrmt. Cela amène la question suivante :

Question. Pourquoi le problème des œufs, pourtant simple, n'est-il pas d'une résolution aussi immédiate ?

Réponse attendue. Parce qu'il n'est pas en base 10. Si les boîtes contenaient 10 et non 6 objets chacune, la réponse serait – comme nous avons 1000 œufs : 1 caisse, 0 cartons, 0 0 boîte, 0 œuf seul.
La solution proposée dans l'analyse a priori du problème *Que d'œufs, que d'œufs!* Était celle par divisions euclidiennes, ce qui ne demandait comme nous l'avons dit aucune référence à la base dans laquelle on compte. Cependant, la réponse précédente suggère une autre stratégie : écrire le nombre 1000 en base six. Son écriture en étant 4344, nous avons la solution analogue celle du vieux compteur : 4 caisses, 3 cartons, 4 boîtes, 4 œufs seuls.
Il est possible de proposer aux élèves au-delà de la catégorie 7 l'activité suivante:

Exercice. Reformuler le problème des œufs, lui faisant prendre la forme inverse, dans laquelle la donnée à trouver est le nombre d'objets à partir du nombre des regroupements.
Solution. L'inversion qui semble la plus naturelle est la suivante:

Mathurin prépare [...] Aujourd'hui, les poules ont bien pondu. Mathurin vient de finir de ranger tous les œufs. Il a rempli complètement 4 caisses, 3 cartons, 4 boîtes et il lui reste 4 œufs avec lesquels il ne pourra remplir une boite.

Combien d'œufs les poules ont-elles pondu aujourd'hui?

Toutefois sous cette forme, le problème n'est pas analogue aux précédents, dans la mesure où n'est pas donné le nombre total des récipients mais seulement de ceux qui « se voient », c'est-à-dire les caisses, les cartons restés hors des caisses, les boîtes restées hors des cartons, et les œufs restés hors des boîtes. Remonter au nombre d'œufs dans ce cas est banal: $4 \times 6^3 + 3 \times 6^2 + 4 \times 6 + 4 = 1000$. On peut encore une fois cependant faire remarquer que 4344 est l'écriture en base six du nombre d'œufs, et encore une fois que le dernier chiffre de l'écriture positionnelle n'indique pas les unités, mais les unités restées hors des sixaines (ou des dizaines, si on est en base 10) et ainsi de suite.

[11] Il convient de noter que multiplier un nombre par la base (c'est-à-dire par le nombre écrit 10 dans cette base) revient à déplacer les chiffres d'une position vers la gauche en mettant 0 à la place des unités.

Si on veut rendre cette forme inverse analogue à la structure des problèmes précédents, il faut d'abord totaliser le nombre des divers contenants : ce nombre est 197, qu'on trouve avec $4(1 \times 6^2 + 1 \times 6 + 1) + 3(1 \times 6 + 1) + 4$. Alors le problème devient :

Mathurin prépare [...] Aujourd'hui, les poules ont bien pondu. Mathurin vient de finir de ranger tous les œufs. Il a rempli complètement 197 contenants (entre les caisses, les cartons, les boites) et il lui reste 4 œufs avec lesquels il ne pourra remplir une boite.

Combien d'œufs les poules ont-elles pondu aujourd'hui?

A ce point, toutes les stratégies de résolution sont complètement analogues aux précédentes, passant de la base huit à la base six.

Conclusion

Toutes les stratégies présentées au long de cet article, bien que différentes quant au degré de difficulté, sont centrées sur le concept d'écriture positionnelle et destinées à faire acquérir des compétences à ce sujet. La proposition de travail conjugue intrinsèquement quelques choix didactiques que nous considérons utiles. Nous en énumérerons les principaux :

- inciter les élèves à confronter et discuter diverses stratégies pour un même problème, afin de développer leur capacité à argumenter et développer leur sens critique,
- faire découvrir que la modification du texte d'un problème requiert un contrôle vigilant des variables utilisées, amenant progressivement les élèves à prendre conscience de l'importance des procédures de vérification des résultats trouvés,
- rechercher les éléments variants et invariants par la comparaison de deux ou plusieurs problèmes, pour favoriser l'appropriation des concepts mobilisés, et favoriser les processus de généralisation,
- intégrer l'étude de l'arithmétique à celle de l'algèbre, comme cela est prévu par les *Objectifs spécifiques d'apprentissage des deux premières années de l'école secondaire de 2° grade* (Italie).

La modularité du parcours en rend possible l'adaptation et la préconisation, selon les besoins et les objectifs, auprès de classes d'un niveau différent de celui auquel les problèmes ont été assignés pendant les épreuves.

En particulier, on peut travailler à la résolution des quatre problèmes, dans l'ordre que nous avons proposé, y compris avec des classes de catégories 5, 6 et 7 ; il est en effet possible d'amener les élèves de ces catégories à identifier les analogies et différences structurelles entre les différents problèmes. En découvrant en outre, par de simples activités de type « ateliers », de petites régularités dans l'écriture positionnelle des nombres (à de nombreuses occasions on a pu constater combien la découverte des régularités et des exceptions à des règles présumées, déclenche l'enthousiasme des élèves).

A ce propos, on peut mentionner une intéressante expérience rapportée par un enseignant, à la suite d'un travail en ateliers, expérience menée avec une classe de niveau en école primaire, où fut utilisé le problème du *Vieux compteur II*, dans le but de consolider le concept d'écriture positionnelle. Après avoir proposé la résolution du problème, et aidé les élèves à surmonter les difficultés rencontrées, l'enseignant les a invités à trouver d'autres nombres correspondant aux bruits, afin de pouvoir trouver le nombre de kilomètres. Les enfants se sont passionnés pour la recherche, faisant le concours à celui qui en trouverait le plus. La majorité d'entre eux, au bout d'un moment, trouvait rapidement la juste correspondance entre kilomètres et bruits. L'enseignant a alors lancé un nouveau défi : trouver un nombre de bruits impossibles !... les réponses obtenues présentaient diverses typologies (ex. 209, 309, … ; 220, 221,… ; 176, 276,… ; 664, 775, …) et cela a été pour tous une grande satisfaction. Ce simple jeu les a sans aucun doute consolidés dans la compréhension du concept d'écriture positionnelles.

Si avec les catégories inférieures on doit se limiter à découvrir les régularités et les anomalies, avec les catégories supérieures, on peut pousser plus loin, en essayant de les démontrer. Même l'introduction d'expériences parfois complexes, qui en première analyse peuvent être jugées inadéquates en regard de l'âge ou du bagage cognitif, pourra constituer un point d'appui fondamental pour mettre en mouvement le parcours de réflexion qui transforme les connaissances en concepts. En l'espèce, le problème des *Nouveaux feutres* peut être proposé à une classe de niveau 5 d'école primaire ; il est ainsi possible de conduire les élèves à explorer d'une manière nouvelle le concept d'écriture positionnelle, en profitant de matériaux concrets et de représentations graphiques. Il pourra arriver alors qu'on entende des élèves discuter sur le fait que regrouper par huit « *ne soit pas si différent que regrouper par dix* ».

Avec des classes de niveau inférieur, l'enseignant peut diriger l'attention sur ce que nous avons appelé *Méthode par divisions euclidiennes,* mettant ainsi en relief les concepts de regroupements et de divisions avec reste, fondamentaux pour donner sens à l'écriture positionnelle. Par contre, la mise en œuvre de la stratégie que nous avons appelée *Méthode par écriture polynomiale des nombres*, pourra être proposée seulement aux élèves des catégories supérieures à la 6. En employant de telles méthodes on poursuit le double objectif de consolider l'écriture positionnelle (en la voyant à l'œuvre dans des contextes non-standards) et de fournir un exemple d'application de l'instrument algébrique en lien avec la situation affrontée : toutes les solutions des équations ne peuvent en fait être acceptées, mais seulement celles entières, positives et appartenant à l'ensemble de variabilité des chiffres (étant donné qu'à son tour elle dépend de la base employée pour l'écriture des nombres eux-mêmes) .

Avec les élèves des catégories supérieures, qui ont déjà accès au langage symbolique, on peut commencer le parcours en proposant la résolution des deux premiers problèmes et les dirigeant vers l'utilisation de toutes les stratégies décrites.

Dans un deuxième temps, quand les deux premiers problèmes ont été reconnus comme « le même problème » (dans le sens où l'on peut passer de l'un à l'autre par de simples traductions), il est possible de proposer les deux autres problèmes, laissant aux étudiants la liberté de choisir la stratégie de résolution jugée la plus adaptée.

Après cela pourra être organisée une activité de discussion et confrontation à propos des nouveautés apparues. Rappelons en fait l'importance de la « découverte » dans le processus d'apprentissage et combien elle est efficace pour développer l'attrait pour la mathématique et pour renforcer le développement cognitif du sujet. C'est pourquoi organiser dès les classes de primaire des activités qui fournissent des occasions de découverte est un passage porteur de sens et indispensable en didactique, et le travail avec des problèmes non-standard comme ceux proposés par le RMT est particulièrement adapté à ce but. Cela permet de plus d'intégrer de façon appropriée les contenus mathématiques à la construction de la pensée, de « lire » la mathématique dans la réalité quotidienne et de résoudre des problèmes « compris comme des questions authentiques et porteuses de sens ».

Bibliografia

Crociani C., Spatoloni R 2013, *Il numero si incontra molto presto …. ma è una conquista difficile/ Le nombre se rencontre très tôt... mais c'est une conquête difficile!,* La Gazzetta di Transalpino/La Gazette de Transalpie n.3, pp. 49-81 in www.armtinnt.org

Crociani C., Spatoloni R. (au nom du groupe Numération de l'ARMT)) 2008, *Cifra-numero...tanti problemi: resoconto di tre anni del gruppo di lavoro*, / *Chiffre-nombre... tant de problèmes: compte-rendu de troois ans du groupe de travail,* Actes des journées d'études sur le Rallye Mathématique Transalpin, Vol.8, Brigue 2008, ARMT, Académie Suisse des Sciences Naturelles (SCNAT), Quartu S. Elena, Italy 2009, pp. 99-120.

Crociani C., Spatoloni R. (au nom du groupe Numération de l'ARMT) 2007, *Sui concetti di cifra, numero, valore posizionale: resoconto di alcune esperienze, / Sur les concepts de chiffre, nombre, valeur positionnelle: compte-rendu de quelques expériences,* in *RMT fra pratica e ricerca in didattica della matematica*, Actes des journées d'études sur le Rallye Mathématique Transalpin, Vol.7, Bard 2007, ARMT, Centro Risorse per la didattica della Matematica, Sezione della Valle d'Aosta dell'ARMT, pp. 143-162.

Crociani C., Spatoloni R. (au nom du groupe Numération de l'ARMT) 2005, *I problemi del rally come supporto didattico per l'avvio alla costruzione e al successivo consolidamento del concetto di cifra, numero e notazione posizionale*, / *Les problèmes du RMT comme support didactique pour démarrer la construction, puis la consolidation du concept de chiffre, nombre et écriture positionnelle*, in *RMT: dai problemi alla didattica quotidiana*, Actes des journées d'études sur le Rallye Mathématique Transalpin, Bourg-en-Bresse 2004- Arco di Trento 2005, ARMT, IPRASE Trentino, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en-Bresse, pp.224-234.

Ministère de l'Instruction, l'Université et la Recherche: "Programmes nationaux pour la scolarité à, l'école de l'Enfance et du premier cycle d'instruction" 2012.

Ministère de l'Instruction, l'Université et la Recherche: "Programmes nationaux pour les Lycées" 2010.

I PROBLEMI DEL RMT: AMPLIAMENTO PROGRESSIVO DELLE LORO FINALITÀ[1]

Lucia Grugnetti, François Jaquet

Per le prove del RMT sono già stati messi a punto più di un migliaio di problemi con finalità che si sono arricchite nel corso dei primi 20 anni della nostra gara. Ci sembra utile chiederci quale sia stata l'utilità dei nostri problemi, nelle diverse "epoche" della storia del RMT: alla sua origine, al momento della costituzione ufficiale dell'ARMT, dopo una decina e poi una quindicina di anni di funzionamento, ed infine oggi dopo aver superato i vent'anni, al momento di affrontare il tema dell'incontro del Lussemburgo sul percorso circolare della analisi a priori e a posteriori.

I problemi per… il piacere di risolverli, e qualcosa di più!

In origine, i problemi del RMT erano pensati come quelli degli altri "concorsi" di matematica: per permettere agli allievi di confrontarsi e per dare loro il gusto della risoluzione con, in più, l'obbligo di gestire il lavoro nell'ambito dell'intera classe e con la richiesta di spiegazione del ragionamento (peraltro queste caratteristiche e condizioni sono tuttora perseguite).
L'ultima condizione non era evidentemente fortuita. Al contrario, apriva la porta alle analisi delle spiegazioni degli allievi e indicava chiaramente l'intenzione di andare al di là delle risposte, per gli insegnanti e i ricercatori in didattica.
Era peraltro conforme alla prima finalità dello statuto della nostra associazione:
L'ARMT è un'associazione culturale il cui obiettivo è promuovere la risoluzione di problemi per migliorare l'apprendimento e l'insegnamento della matematica tramite un confronto fra classi.
Questa dichiarazione generale d'intenti è stata rapidamente confermata dalla ricchezza delle osservazioni degli elaborati raccolti già all'atto delle prime edizioni del RMT. Era evidente che si dovesse andare oltre la creazione dei problemi per le prove e analizzare in comune il modo nel quale erano stati risolti, secondo le testimonianze dei gruppi di allievi.

Problemi per… capire meglio come gli allievi li risolvono

Questa necessità ha condotto all'organizzazione dei nostri incontri internazionali a partire dal quinto anno del RMT. La finalità iniziale dei nostri problemi: *migliorare l'apprendimento e l'insegnamento…* è andata precisandosi progressivamente. Il tema dei due primi incontri, *Il Rally matematico transalpino. Quali apporti per la didattica?* ci sembra oggi un'evidenza; ma all'epoca era sorprendente. I problemi potevano rivestire un ruolo ad li là di una classifica all'interno della gara?
La risposta non si è fatta attendere: le riflessioni comuni hanno permesso di identificare procedure, errori o difficoltà caratteristici e hanno dato luogo ad una grande fioritura di articoli relativi all'analisi di problemi, negli atti dei nostri incontri o in riviste di didattica. I temi degli incontri successivi si situano sempre nell'ottica del riconoscimento dell'interesse dei nostri problemi dal punto di vista didattico, ma da un punto di vista piuttosto descrittivo: *Evoluzione delle conoscenze e rappresentazioni secondo l'età degli allievi e in funzione dei sistemi scolastici*, poi *I saperi matematici e la loro evoluzione.*
E' a partire dal quinto, poi sesto e settimo incontro, che appaiono esplicitamente, nei temi dei nostri incontri, le finalità di riflessione sui nostri problemi al di là delle loro analisi didattiche: *L'uso dei problemi del RMT in classe, Il RMT e la formazione degli insegnanti e RMT e valutazione.*

Problemi per… il RMT e le pratiche di classe

Il RMT ha a quel punto 10 anni e una solida esperienza. L'elaborazione e la presentazione di ciascun problema si stabilizzano: procedure di partecipazione e di consultazione nella scelta dei problemi, analisi a priori del compito dell'allievo, criteri di attribuzione dei punteggi, prime sintesi statistiche dei risultati… .
Da un punto di vista numerico il RMT si è sviluppato: più di un migliaio di classi, le categorie si ampliano regolarmente[2], una quindicina di sezioni, archivi di circa 400 problemi e diverse pubblicazioni. Questa grande impresa esige un lavoro importante, sia dal punto di vista dell'organizzazione pratica, sia nel rigore della sua evoluzione.
Sono tre le innovazioni di quest'epoca che ci sembra importante segnalare in quanto ciascuna di esse influenza l'evoluzione delle finalità dei nostri problemi.

---

[1] Riportiamo qui un breve articolo facente parte del libretto per i partecipanti all'incontro del Lussemburgo nel 2013.

[2] Da 3 a 5 all'inizio e, poi 6, poi 7 e 8 a partire dal 6° RMT, fino a 9 e 10 dal 13° RMT.

- I criteri di attribuzione dei punteggi che erano già stati messi alla prova a livello di ciascuna sezione nel corso delle correzioni, lo sono nuovamente stati a livello internazionale a partire dal 10° RMT nel corso di alcuni dei nostri incontri, per il tramite di una finale "virtuale" che ha preso il nome di ***finale delle finali***. Si trattava di attribuire una seconda volta i punteggi agli elaborati dei vincitori delle finali di ciascuna sezione, ma da parte di una medesima commissione composta da partecipanti all'incontro provenienti da sezioni diverse. Questo confronto ha permesso di mostrare l'interesse di un'osservazione sistematica degli elaborati degli allievi e ha dato luogo a riflessioni comuni approfondite sui criteri di attribuzione dei punteggi, ma anche sulle analisi del compito alle quali sono strettamente connesse.
- I **gruppi di lavoro** del RMT si sono costituiti nello stesso periodo. Rispondevano alla necessità di raggruppare i problemi che erano stati fin lì trattati singolarmente, per ambiti matematici o campi concettuali. Questa organizzazione del lavoro ha permesso un ampliamento e un approfondimento sensibile delle nostre analisi.
- Le due innovazioni precedenti coinvolgono "analisi a posteriori" e "riflessioni comuni"; sono inoltre rappresentative dell'evoluzione dei lavori effettuati a quel punto nell'ambito del RMT e hanno un'influenza diretta sulle finalità attribuite ai nostri problemi. Il tema dell'ottavo incontro: ***Che cos'è un buon problema per il RMT?*** ne è una prima testimonianza. Questa domanda, che è sempre attuale, richiede delle spiegazioni e nuove domande su ciò che potranno diventare i problemi del RMT dopo le prove.

I temi degli incontri successivi mostrano chiaramente la presa in carico di questa finalità complementare relativa all'uso ulteriore dei nostri problemi: *Dai problemi alla didattica quotidiana* (9° incontro), *I problemi al servizio dell'apprendimento* (10°), *RMT, tra pratica e ricerca in didattica della matematica* (11°).

Problemi per… individuare le procedure e gli ostacoli

Il RMT ha circa 15 anni quando approda sul suo sito Internet sul quale ogni sezione inserisce i propri risultati. Le statistiche che ne conseguono danno oramai, per ogni problema, degli indici di riuscita: la media dei punteggi attribuiti, categoria per categoria, e le frequenze dei punteggi da 0 a 4. Questi indici, con le necessarie riserve sulla coerenza dell'attribuzione dei punteggi dalle diverse commissioni locali e sul rispetto delle condizioni di svolgimento delle prove, sono abbastanza stabili da una sezione all'altra perché si possano quindi considerare significativi.
Tali indici non hanno una grande diffusione, restano infatti a disposizione dei gruppi di lavoro o sono presi in considerazione all'atto dell'elaborazione di "varianti" di vecchi problemi. Sono in particolare presi in considerazione per cercare di elaborare "buoni problemi per il RMT", soprattutto nella scelta delle categorie .
Da parte loro i gruppi di lavoro hanno approfondito le osservazioni, le ricerche e le sperimentazioni a proposito dei concetti presi in considerazione. Cercano di interpretare le procedure e le difficoltà rilevate negli elaborati degli allievi in termini di ostacoli e del loro superamento. Il tredicesimo e il quattordicesimo incontro sono consacrati a tali aspetti, sul tema: *RMT, uno sguardo costruttivo sugli errori* in una visione costruttivista, con la precisazione che *L'intenzione è quella di trarne profitto per la classe e la formazione degli insegnanti e la questione che si pone è quella di sapere come trasmettere i dati ai destinatari, che sono gli insegnanti e i loro formatori.*[3]

Problemi per… saperne di più sulla costruzione dei saperi

Dopo vent'anni di riflessioni comuni sui problemi del RMT, le loro finalità sono diventate sempre più chiare, si sono diversificate e ampliate. I nostri primi problemi elaborati per la gara e per il loro apporto alla didattica da un punto di vista generale, ci hanno fatto intravedere le loro potenzialità nei riguardi della formazione degli insegnanti, della valutazione, delle pratiche di classe. I nostri gruppi di lavoro si sono interessati alle procedure degli allievi e agli ostacoli e difficoltà incontrate. Oggi, l'accumulazione dei dati raccolti e l'approfondimento delle nostre riflessioni ci permettono di aprire una nuova fase, come suggerito dai temi del quindicesimo e sedicesimo incontro (rispettivamente dopo il 19° e 20° RMT): *RMT: una miniera di idee per la costruzione di saperi. Quali problemi per quali saperi?* E poi *RMT: 20 anni di esperienza e di ricerca (da un problema ai saperi mobilizzati – dai saperi identificati alla loro costruzione da parte dell'allievo* – come è detto nella descrizione del tema).
Questi temi sono certamente ambiziosi, ma ci pongono delle domande in quanto sono centrali nel processo di apprendimento-insegnamento della matematica e in quanto i nostri problemi ci sembra che vi apportino chiarimenti pertinenti.

La Banca di problemi del RMT

Il progetto, che da diversi anni stava maturando, si sta concretizzando.

---

[3] Dal programma degli incontri di Nivelles e Besançon.

Come tutti i sistemi strutturati di dati, la nostra banca di problemi è innanzitutto un archivio nel quale si possono trovare facilmente problemi, secondo gli enunciati, le prove, le date, le categorie, i titoli…; la banca propone anche una classificazione per parole chiave, per ambiti matematici, per famiglie di compiti.

Fornisce anche informazioni ottenute a posteriori:

- i risultati statistici ottenuti per ciascun problema nelle condizioni molto particolari di svolgimento delle prove del RMT;
- proposte o suggerimenti circa le modalità con le quali i problemi, che sono stati analizzati a posteriori a partire dagli elaborati degli allievi, possono essere utilizzati per la costruzione di saperi.

Quest'ultima parte si basa sulle riflessioni dei nostri gruppi di lavoro con, come trama di fondo, la trasmissione di informazioni agli insegnanti sulle loro potenzialità didattiche. Si possono per esempio trovare, secondo i problemi:

- un inventario delle procedure di risoluzione osservate più frequenti, riprendendo talvolta alcune parti dell'analisi del compito;
- spiegazioni caratteristiche rilevate negli elaborati esaminati;
- una descrizione di difficoltà, ostacoli o errori più caratteristici che le analisi a posteriori o altri studi dei gruppi di lavoro del RMT hanno potuto mettere in evidenza;
- qualche commento in vista di un uso dei problemi in classe;
- riferimenti bibliografici.

Problemi per… un'utilizzazione didattica

Nella banca di problemi si troveranno indicazioni sulle potenzialità di certi problemi per l'apprendimento, in quanto gli elaborati degli allievi ci avranno permesso di capire a che punto si trovano nella costruzione delle loro conoscenze. A partire da quello che possiamo chiamare "problema del RMT" e dalle sue analisi bisogna ancora passare ad un "problema della classe " per fini di apprendimento.

Per effettuare il passaggio essenziale, ma delicato, è necessario conoscere la classe, gli allievi, i loro percorsi didattici e lo stato della loro progressione nella costruzione di ogni concetto o sapere. E' l'insegnante che dispone di tali conoscenze ed è dunque lei o lui solo che deve scegliere le modalità di utilizzazione didattica degli elementi di informazione offerte dalla banca di problemi. I dati e i risultati scaturiti dalle analisi a posteriori di un problema del RMT possono almeno suggerire un modo di inserirlo in un percorso di apprendimento. L'insegnante potrà giudicare opportuni o no questi suggerimenti per i propri allievi o trovare un'altra maniera di utilizzare il problema.

Tali modalità sono numerose e diverse.

Si può infatti utilizzare il problema per:

- introdurre un nuovo concetto o come "punto di partenza" (laddove le analisi del problema abbiano fatto apparire chiaramente questo concetto e l'interesse della situazione per un suo approccio);
- confrontare diversi livelli di costruzione di un concetto per i propri allievi (per esempio, per provocare il conflitto area/perimetro o per verificare la distinzione rettangolo/parallelogramma come le analisi dei problemi della banca hanno verificato);
- sviluppare le capacità dei propri allievi nelle procedure di ricerca (per esempio, per un problema dove l'organizzazione rigorosa di un lungo inventario si è rivelata necessaria);
- per rinforzare un sapere per la classe intera o per alcuni allievi (laddove tale sapere sia stato ben identificato);
- …

L'insegnante può ancora pensare di riprendere un problema del RMT come attività più tradizionale di revisione o di messa in opera di determinati saperi, quando i risultati dello svolgimento nelle condizioni del RMT abbiano mostrato che gli allievi si sono appropriati della situazione.

I problemi della banca possono anche essere adattati sulla base dei suggerimenti proposti, tramite la modifica della variabili o come spiegazioni complementari.

E' ancora possibile per un problema che sia stato giudicato "difficile", partire dall'enunciato proposto, lasciare che gli allievi lavorino da soli per un periodo determinato per poi organizzare messe in comune intermedie (che non erano possibili nelle condizioni di svolgimento del RMT).

In conclusione, le analisi a posteriori dei problemi del RMT forniscono numerosi e preziosi chiarimenti su procedure e ostacoli nella risoluzione e nella costruzione di saperi ad essi connessi.

La banca di problemi è uno strumento di comunicazione e di informazione nonché un supporto per la riflessione.

L'essenziale del lavoro di utilizzazione dei problemi nel percorso di apprendimento è a carico dell'insegnante che è l'unico che possa farne uso con i suoi allievi secondo il loro livello di sviluppo delle conoscenze.

La banca potrebbe, da parte sua, beneficiare delle osservazioni pratiche e delle riflessioni dei suoi "utilizzatori" laddove questi ultimi le comunichino (il sistema "wiki" lo permette). Ritroveremmo allora un percorso circolare come quello che è stato l'oggetto dell'incontro del Lussemburgo!

LES PROBLÈMES DU RMT : L'ÉLARGISSEMENT PROGRESSIF DE LEURS FINALITÉS[1]

Lucia Grugnetti, François Jaquet

Plus d'un millier de problèmes ont déjà été élaborés pour les épreuves du RMT, avec des finalités qui se sont enrichies au cours des vingt premières années de notre confrontation. Il nous paraît utile de se demander à quoi pouvaient bien servir nos problèmes, à différentes époques de notre histoire du RMT : à l'origine, au moment de la fondation officielle de l'ARMT, après une dizaine, puis une quinzaine d'années de fonctionnement, et aujourd'hui après le cap des vingt ans, au moment d'aborder le thème ne notre rencontre du Luxembourg sur la démarche circulaire des analyses a priori et a posteriori.

Des problèmes pour … le plaisir de les résoudre, et un peu plus !

A l'origine, les problèmes du RMT étaient conçus comme ceux des autres « concours » de mathématiques : pour permettre aux élèves de se confronter et pour leur donner le goût de la résolution avec, en plus, l'obligation de gérer le travail à l'échelle de la classe entière et la demande d'expliquer leur démarche (ce qui reste toujours le cas).
La dernière condition n'était évidemment pas fortuite. Elle ouvrait la porte aux analyses des explications des élèves et affichait clairement l'intention d'aller au-delà des réponses, pour les maîtres et la recherche en didactique.
Elle était conforme à la finalité première des statuts de notre association :
L'ARMT est une association culturelle dont le but est de promouvoir la résolution de problèmes pour améliorer l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques par une confrontation entre classes.
Cette déclaration d'intention générale a été rapidement confirmée par la richesse des observations des copies recueillies lors des premières éditions du RMT. Il était évident qu'il fallait aller au-delà de la création des problèmes pour les épreuves et analyser en commun la manière dont ils avaient été résolus, selon les témoignages des groupes d'élèves.

Des problèmes pour … mieux comprendre comment les élèves les résolvent

Cette nécessité a conduit à l'organisation de nos rencontres internationales, dès la cinquième année du RMT. La finalité d'origine de nos problèmes : *améliorer l'apprentissage et l'enseignement ...* va progressivement se préciser. Le thème des deux premières rencontres, *Le rallye mathématique transalpin quels profits pour la didactique ?* nous semble aujourd'hui une évidence ; mais il intriguait à cette époque. Les problèmes pouvaient-ils avoir une vie au-delà du palmarès du concours ?
La réponse ne s'est pas fait attendre. Les réflexions communes ont permis d'identifier des procédures, des erreurs ou difficultés caractéristiques et ont abouti à une floraison d'articles, dans les actes de nos journées d'études ou dans des revues, traitant chacun de l'analyse d'un problème particulier. Les thèmes des rencontres suivantes se situent toujours dans cette reconnaissance de l'intérêt de nos problèmes du point de vue didactique, mais d'un point de vue plutôt descriptif : *Évolution des connaissances et représentations selon l'âge des élèves et en fonction des systèmes scolaires*, puis *Les savoirs mathématiques et leur évaluation.*
C'est à partir des cinquième, sixième et septième rencontres qu'apparaissent explicitement, dans les thèmes de nos journées d'études, les finalités des réflexions sur nos problèmes au-delà de leurs analyses didactiques : *L'exploitation des problèmes du RMT en classe, Le RMT et la formation des maîtres* et *RMT et évaluation*

Des problèmes pour … le RMT et les pratiques de classe

Le RMT a alors 10 ans et une solide expérience. L'élaboration et la présentation de chaque problème sont stabilisées : procédures de participation et de consultations dans le choix des problèmes, analyses a priori de la tâche de l'élève, critères d'attribution des points, premières synthèses statistiques des résultats …
Numériquement, le RMT s'est développé : plus d'un millier de classes, des catégories de classes s'étendant régulièrement[2], une quinzaine de sections, des archives constituées d'environ 400 problèmes, une collection importante d'actes de nos rencontres et d'autres publications. La conduite de cette grande entreprise exige un travail important, tant du point de vue de l'organisation pratique que de la rigueur de son évolution.
Trois innovations de cette époque du RMT nous paraissent importantes à signaler car elles vont chacune influencer l'évolution des finalités de nos problèmes.

---

[1] Nous reprenons ici un article de la brochure pour les participants à la rencontre de Luxembourg de 2013.

[2] De 3 à 5 à l'origine, puis 6, puis 7 et 8 dès le 6e RMT vers 9 et 10 dès le 13e RMT

- Les critères d'attribution des points qui avaient déjà été mis à l'épreuve régionalement l'ont été au niveau de toutes les sections dès le 10^{e} RMT durant six rencontres internationales, au travers d'une confrontation virtuelle qu'on a appelé la ***Finale des finales***. Il s'agissait d'attribuer une seconde fois les points aux copies des vainqueurs des finales de chaque section, mais par un même jury composé de participants de plusieurs sections. Cette confrontation a montré l'intérêt d'une observation systématique de copies d'élèves et a suscité des réflexions communes approfondies sur les critères d'attribution, comme sur les analyses de la tâche auxquels ils sont étroitement liés.
- Les **groupes de travail** du RMT se sont constitués à la même époque. Ils répondaient à la nécessité de regrouper les problèmes, qui avaient été traités un à un jusque là, par domaines mathématiques ou champs conceptuels. Cette organisation du travail a permis un élargissement et un approfondissement sensibles de nos analyses.
- Les deux innovations précédentes combinent « analyse a posteriori » et « réflexions communes » ; elles sont représentatives de l'évolution des travaux effectués désormais dans le cadre du RMT et ont une influence directe sur les finalités attribuées à nos problèmes. Le thème de la huitième rencontre : ***Qu'est-ce qu'un bon problème pour le RMT ?*** en est une première illustration. Cette question, qui est toujours actuelle, va exiger des justifications et de nouvelles questions sur ce que pourront devenir les problèmes du RMT, après la passation.

Les thèmes des rencontres suivantes montrent clairement la prise en compte de cette finalité complémentaire de l'exploitation ultérieure de nos problèmes : *Des problèmes, à la pratique de la classe* (9^{e} rencontre), *Les problèmes au service de l'apprentissage* (10^{e}), *RMT, entre pratique et recherche en didactique des mathématiques* (11^{e}).

Des problèmes pour … repérer les procédures et les obstacles

Le RMT a 15 ans environ lorsqu'il développe un site Internet sur lequel chaque section inscrit ses résultats. Les statistiques qui en découlent donnent désormais, pour chaque problème, des indices de réussite : la moyenne des points attribués, catégorie par catégorie, et les fréquences de chacune des occurrences de 0 point à 4 points. Ces indices, avec les réserves sur la fidélité de l'attribution par différents jurys locaux et sur le respect des conditions de passation des épreuves, sont assez stables d'une section à l'autre pour qu'on puisse les considérer comme significatifs.
Ces indices ne sont pas diffusés largement, ils restent à la disposition des groupes de travail ou sont pris en considération lors de l'élaboration de « variantes » d'anciens problèmes. Ils sont pris en compte, en référence aux intentions d'élaborer de « bons problèmes pour le RMT », lors du choix des catégories en particulier.
De leur côté, les groupes de travail ont approfondi leurs observations, recherches et expérimentations à propos des concepts qu'ils abordent. Ils cherchent à mieux interpréter les procédures et difficultés relevées dans les copies d'élèves en termes d'obstacles et de leur franchissement. Les treizième et quatorzième rencontres seront consacrées à ce questionnement , sur le thème : *RMT, un regard constructif sur les erreurs* dans une vision constructiviste en précisant très explicitement que *L'intention est d'en tirer profit pour la classe et la formation des maîtres et la question qui se pose est de savoir comment transmettre les données à leurs destinataires qui sont les maîtres et leurs formateurs.*[3]

Des problèmes pour … en savoir plus sur la construction de savoirs

Après vingt ans de réflexions communes sur les problèmes du RMT, leurs finalités nous sont apparues de plus en plus clairement, se sont diversifiées et élargies. Nos premiers problèmes élaborés pour le concours et pour leur apport pour la didactique d'un point de vue général, nous ont fait entrevoir leurs potentialités en vue de la formation des maîtres, de l'évaluation, des pratiques de classe. Nos groupes de travail, se sont intéressés aux procédures des élèves et aux obstacles et difficultés rencontrés. Aujourd'hui, l'accumulation des données recueillies et l'approfondissement de nos réflexions nous permettent d'entamer une nouvelle étape, comme le suggèrent les thèmes des quinzième et seizième rencontres (après les 19^{e} et 20^{e} éditions de notre confrontation) : *RMT : une mine d'idées pour la construction de savoirs. Quels problèmes pour quels savoirs?* suivi de *RMT : Vingt ans de pratiques et de recherche (D'un problème aux savoirs mobilisés - Des savoirs identifiés à leur construction par l'élève* - comme c'est écrit dans la description du thème).
Ces thèmes sont bien ambitieux, certes. Ils nous interpellent cependant car ils sont au cœur du processus apprentissage-enseignement des mathématiques et nos problèmes nous semblent y apporter des éclairages pertinents.

La Banque de problèmes du RMT

Le projet, qui mûrissait depuis plusieurs années, est en train de se concrétiser.

---

[3] Tiré du programme des rencontres de Nivelles et Besançon

Comme tout système organisé de données, notre banque fait tout d'abord office d'inventaire ou d'archives, de manière à pouvoir retrouver les problèmes facilement, par: énoncés, épreuves, dates, catégories d'élèves, titres … ; puis elle propose une classification par mots-clés, thèmes mathématiques, familles de tâches.
Elle donne ensuite des informations obtenues a posteriori :

- les résultats statistiques obtenus pour chacun des problèmes dans les conditions très particulières de passation des épreuves du RMT ;
- des propositions ou des suggestions de modalités d'exploitations pour la construction de savoirs, des problèmes qui ont fait l'objet d'analyses plus approfondies des copies.

Cette dernière partie se fonde sur les réflexions de nos groupes de travail avec, en trame de fond, la transmission d'informations aux maîtres sur leurs potentialités didactiques. On peut y trouver par exemple, selon les problèmes :

- un inventaire des procédures de résolution observées les plus fréquentes, reprenant parfois certaines parties de l'analyse a priori de la tâche de l'élève,
- des explications caractéristiques relevées dans les copies examinées,
- une description des difficultés, obstacles ou erreurs les plus caractéristiques, que les analyses a posteriori ou d'autres études des groupe de travail du RMT ont pu mettre en évidence ;
- quelques commentaires en vue d'une exploitation en classe du problème,
- des références bibliographiques.

Des problèmes pour … une exploitation didactique

Dans la banque de problème, on trouvera des indications sur les potentialités de certains problèmes pour l'apprentissage, parce que les copies d'élèves nous auront permis de mieux comprendre où ils en sont dans la construction de leurs connaissances.
A partir de ce que nous pouvons appeler un « problème du RMT » et de ses analyses, il faut encore passer à un « problème pour la classe » à des fins d'apprentissage.
Pour ce passage essentiel, mais délicat, il faut connaître la classe, ses élèves, leurs parcours et l'état de leur progression dans la construction de chaque concept ou savoir. C'est l'enseignant qui dispose de ces connaissances et c'est donc à lui, seul, de choisir les modalités d'exploitation didactique des éléments d'information offertes par la banque de problèmes.
Les données et résultats tirés des analyses a posteriori d'un problème du RMT peuvent, au mieux, suggérer une façon de le concevoir dans un parcours d'apprentissage. Le maître pourra juger opportun ou non cette suggestion pour ses élèves ou trouver une autre manière d'utiliser le problème.
Et ces modalités sont nombreuses et diverses :
Utiliser ou exploiter le problème pour …

- introduire un nouveau concept ou comme « point de départ » (lorsque les analyses du problème ont clairement fait apparaître ce concept et l'intérêt de la situation pour son approche),
- confronter différents niveaux de construction d'un concept chez ces élèves (par exemple, pour provoquer le conflit aire/périmètre ou pour vérifier la distinction rectangle/parallélogramme comme les analyses de problèmes de la banque l'ont vérifié),
- développer les capacités de ses élèves dans les démarches de recherche (par exemple pour un problème où l'organisation rigoureuse d'un long inventaire s'est avérée nécessaire),
- pour renforcer un savoir, pour la classe entière ou pour certains élèves (lorsque ce savoir a été bien identifié),
- …

Le maître peut encore envisager de reprendre un problème du RMT comme activité plus traditionnelle de révision ou de mise en œuvre de certains savoirs, lorsque les résultats de la passation dans les conditions du RMT ont montré que les élèves ont pu s'approprier la situation.
Les problèmes de la banque peuvent aussi être adaptés sur la base des suggestions proposées, par modification des variables, par des explications complémentaires.
Il est encore possible, pour un problème qui a été jugé « difficile », de partir de l'énoncé proposé, de laisser travailler les élèves seuls durant une période déterminée puis d'organiser des mises en commun intermédiaires (qui n'étaient pas possible dans les conditions de passation du RMT).

En conclusion, les analyses a posteriori des problèmes du RMT fournissent de nombreux et précieux éclairages sur les procédures et obstacles de résolution comme sur la construction des savoirs qui s'y rattachent.
La banque de problèmes est un instrument de communication, d'information et un support de réflexion.
L'essentiel du travail d'exploitation de ses problèmes dans des parcours d'apprentissage est entièrement à la charge du maître qui, seul, sait ce qu'il peut en faire en fonction de ses élèves et de leur niveau de développement.

La banque pourrait, en retour, bénéficier des observations pratiques et réflexions de ses « utilisateurs » au cas où ceux-ci les communiqueraient (le système « wiki » le permet). On retrouverait alors un processus circulaire comme celui qui a fait l'objet de la rencontre de Luxembourg !

UNE EXCURSION À LA MER[1]

François Jaquet

Résumé

Un exemple de problème *Une excursion à la mer* est présenté ici pour illustrer la tâche de l'élève dans la transcription d'un récit de voyage, donné par un énoncé de cinq lignes, à un ensemble de données structurées sur lesquelles pourra s'élaborer la résolution mathématique du problème. Cette transcription, ou phase de « décontextualisation » est une tâche souvent très délicate pour nos élèves, qu'il est très difficile d'estimer a priori.
L'analyse statistique des résultats a fait apparaître un indice très élevé de difficulté du problème, mais c'est seulement au moment de l'examen des copies qu'on a pu vraiment évaluer l'ampleur de la tâche d'appropriation puis à en déterminer certaines causes dans l'énoncé. On se situe alors à la fin d'un premier cycle de la vie du problème, pour entrer éventuellement dans l'une de ses vies ultérieures : une variante tenant compte des données recueillies après les premières analyses a posteriori.

L'énoncé

Une excursion à la mer

André décide de faire une excursion à la mer, sur une plage qui est à 120 km de son domicile. En route, il prend ses amis, Bruno et Charles qui l'accompagneront dans le voyage ; en premier il s'arrête pour prendre Bruno, puis parcourt encore 10 km pour s'arrêter chez Charles.
Dès cet endroit, le chemin qui reste à faire jusqu'à la mer dépasse de 2 km le triple de la distance déjà parcourue.

Quelle est la distance séparant le domicile de Bruno du bord de mer?

Expliquez votre réponse.

Points obtenus

sur 2229 classes de 22 sections

Points	0	1	2	3	4	**m**
Cat. 5	75%	17%	2%	2%	5%	**0.5**
Cat. 6	80%	13%	2%	2%	3%	**0.3**
Cat. 7	66%	14%	4%	5%	11%	**0.8**
total	74%	14%	3%	3%	6%	**0.5**

Selon les critères d'attribution des points suivants :
4, 3, 2. Solution correcte (100,5 km), de explications claires et précises à absentes
1 Début de recherche cohérente
0 Incompréhension du problème

Premiers commentaires

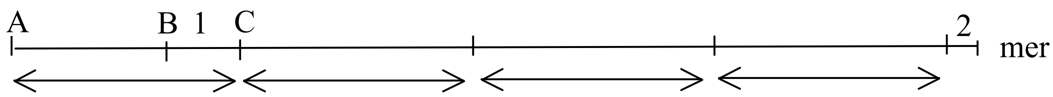
Personne n'imaginait que ce problème ne pouvait pas être résolu dans les conditions de passation du RMT (sans aide extérieure ou sans mise en commun intermédiaire organisée par le maître).
Effectivement la phrase de l'énoncé : *le chemin qui reste à faire jusqu'à la mer dépasse de 2 km le triple de la distance déjà parcouru* n'est pas facile à comprendre. C'est même un bel exemple de répulsion que peuvent provoquer ce genre de formulation. Mais de là à atteindre 75% d'incompréhension du problème, il y a de quoi se poser beaucoup de question !

---

[1] Ce texte reprend l'introduction à la présentation du thème de la 17e rencontre de l'ARMT : « Analyse a priori, analyse a posteriori, une démarche circulaire » (Luxembourg, 25 octobre 2013). Deux autres interventions de cette présentation du thème, de Lucia Grugnetti et de Graziella Telatin figurent dans ce numéro en pages 75-94 et 95-114.

C'est l'analyse des copies d'élèves qui a montré que les difficultés de ce problème sont liées premièrement aux contexte : disposition des domiciles, distance à vol d'oiseau et distance en suivant la route, … Lorsque la « décontextualisation » est faite correctement, un autre obstacle se situe au niveau des données numériques :
a) exprimer le chemin qui reste à faire à partir de « dépasse de 2 km » : 118 km, ou 120 – 2 ;
b) le « reste » étant « le triple de ce qui a déjà été fait », le tout est « quatre fois » la distance entre la maison d'André et celle de Charles ;
ce qui permet l'opération 118 : 4 = 29,5 (en km).

L'analyse a priori de la tâche se limitait au schéma suivant :
- *Comprendre, éventuellement en s'aidant d'une représentation graphique, que la distance entre le départ (maison d'André) et la mer (120 km) est la distance du départ à la maison de Charles, à laquelle il faut ajouter 3 fois cette distance et encore 2 km.*



suivi de la manière de calculer la longueur des doubles flèches :
- *Se rendre compte alors que 118 (= 120 – 2) (en km) est quatre fois la distance entre la maison d'André et celle de Charles et que celle-ci est donc de 118: 4 = 29,5 (en km).*

et de la suite des opérations.

Analyse des copies
Après avoir examiné environ 150 copies d'élèves, nous avons pu constater que l'obstacle principal se situe en amont de la phase de mise en relation des données, lors de la décontextualisation (ou transcription du récit de l'énoncé en une représentation de la position des domiciles sur le trajet).

Nous présentons ci-dessous 7 copies représentatives de l'ensemble. (et reprenons le schéma de l'analyse a priori)
Pour chacune d'elle à gauche, nous mentionnons les éléments retenus de l'énoncé que les élèves ont relevé explicitement dans leur schémas ou explications :
Les données du contexte

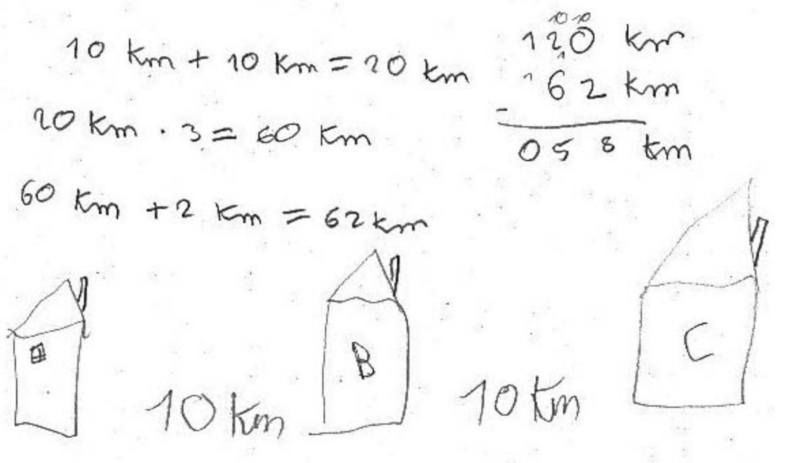
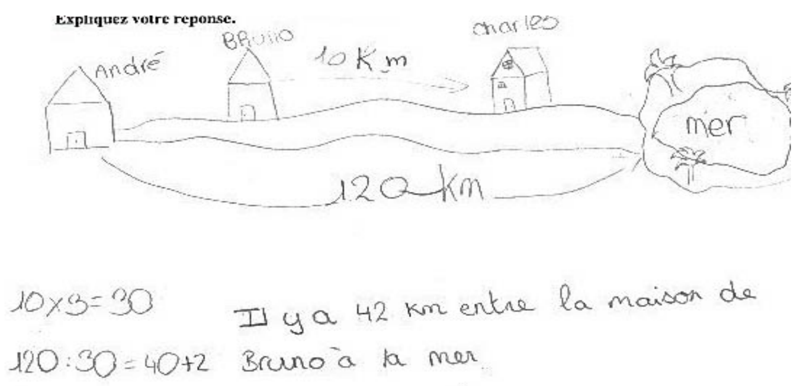
a) Maisons : dans la très grande majorité des cas, les maisons sont dessinées bien que l'énoncé ne les mentionne pas.
b) A, B, C : les prénoms des trois personnages, André, Bruno et Charles, sont notés sur les maisons, quelques fois seulement par leur lettre initiale.
c) La mer : Elle est signalée sur tous les schémas, et souvent dessinée avec des vagues ou des poissons.
d) La plage : Elle est aussi dessinés sur de nombreuses copies, reconnaissable aux parasols ou autres accessoires qu'on y trouve habituellement, non mentionnés dans l'énoncé.
e) La route : deux mots de l'énoncé l'évoquent explicitement : « en route » et « le chemin qui reste ». Elle est toujours dessinée, représentée par des traits de différente nature ; elle est rarement rectiligne, et n'a pas encore le statut de l'objet géométrique « segment » ou « segments juxtaposés ».
   Il faut relever à ce propos la confusion chez les élèves entre deux acceptions de « distance » : à vol d'oiseau ou parcours effectif. Du point de vue du professeur de mathématiques, il est évident que c'est la deuxième qui doit être envisagée, sinon la solution du problème serait indéterminée. De nombreuses copies montrent que les élèves ont un autre point de vue !
   Une autre remarque à relever est que l'énoncé ne dit pas que Bruno et Charles ont leur domicile sur le parcours de 120 km d'André à la mer, ni dans l'ordre A, B, C, mer. Cet ordre était évident pour les adultes qui ont analysé le problème a priori, ce ne l'est plus à l'examen des copies !
f) La voiture : elle apparaît sur environ 20 % des copies, surtout sur celles des plus jeunes élèves (catégorie 5). Evidemment, la bicyclette, la moto, le train et l'avion sont exclus par le récit.

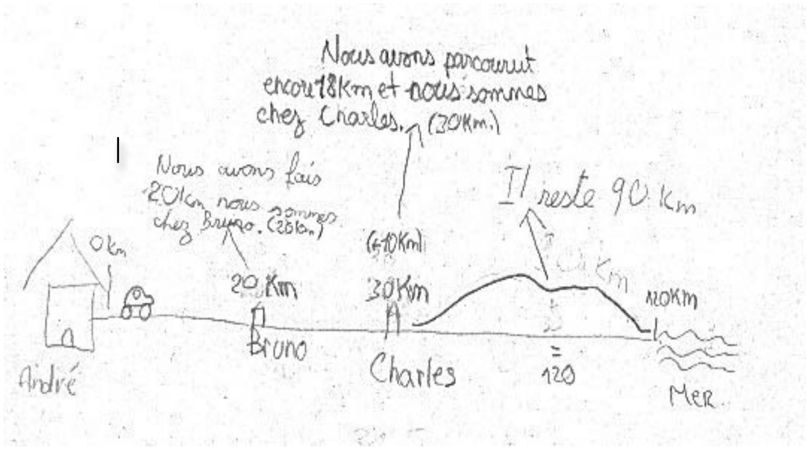
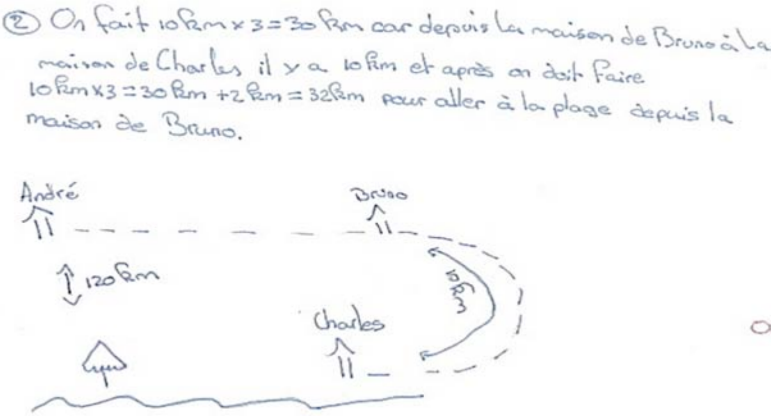
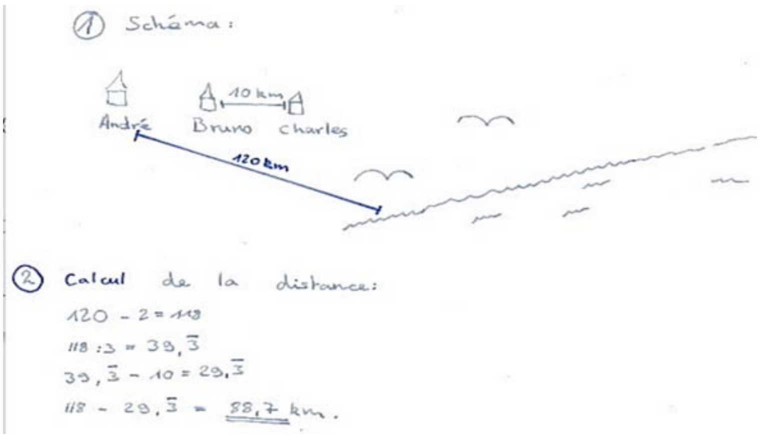
Les données numériques

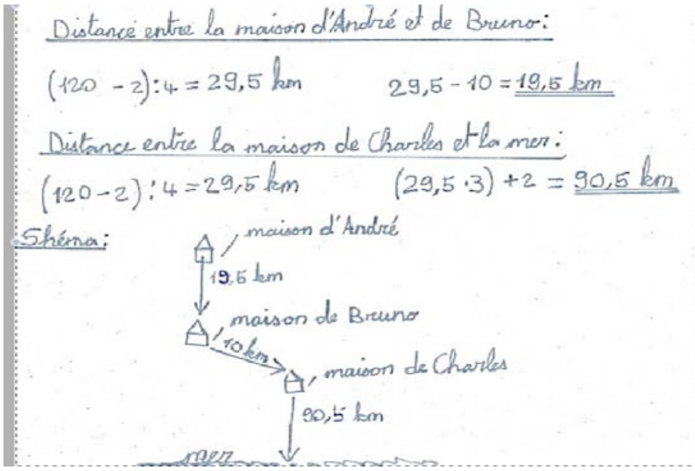
g) Les 120 km : ils apparaissent sur la plupart des schémas ou dans le calculs esquissés, mais de façon souvent confuse, sans qu'on puisse clairement en reconnaître les extrémités. Dans certains cas, il s'agit clairement de la distance à vol d'oiseau.
h) Les 10 km : c'est la distance entre les arrêts chez Bruno et Charles, désignée correctement dans une moitié des copies.

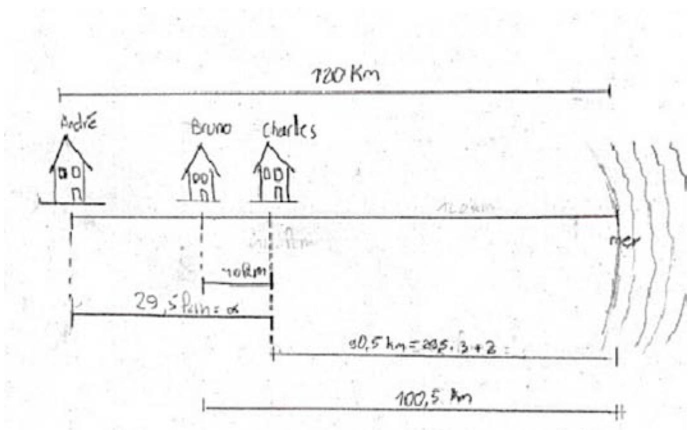
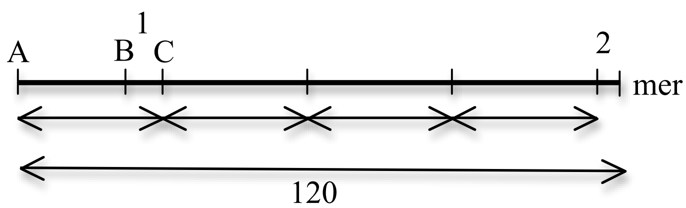
i) Les 2 km : ils n'apparaissent que dans les opérations et très rarement sur les schémas par « + 2 » ou encore « – 2 » pour traduire le « dépasse de 2 km ».
j) Le triple : seuls quelques schémas et celui de l'analyse a priori le mentionnent par des segments égaux répétés ou « × 3 » dans les opérations.
k) Le quart : n'apparaît que rarement par la division « : 4 » ou la répétition de quatre segments égaux. Dans ce cas, la division par 4 signifie que toutes les relations ont été trouvées et que le problème est quasiment résolu. (Ce qui peut faire douter de l'efficacité du conseil : *pour vous faciliter la tâche, faites un dessin,* donné à ceux qui ne n'ont pas encore résolu le problème !)

Dans cet article, nous ne traiterons pas des procédures de résolution adoptées après la phase de décontextualisation de la situation. Les exemples qui suivent montrent clairement qu'une transcription correcte et complète des données est nécessaire et suffisante pour le traitement numérique conduisant à la solution. Il n'y a en fait que deux opérations à effectuer pour trouver la distance de A à C, soustraire 2 et diviser par 4 ($4x + 2 = 180$), puis deux nouvelle pour le calcul de la distance demandée, de B à la mer : une multiplication par 3 et une addition de 10 ($3x + 10$).

<table>
<tr>
<td>1. A; B; C;
maisons ;
120
+ 2 ;
10 km ;
× 3</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>2. A; B ; C;
maisons ;
route ;
mer ;
plage ;
+2 ou – 2 (pour 18)
+ 10 km ;
120 km ;
× 3</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>3. A; B; C;
maisons ;
route ;
mer ;
voiture ;
+10 ; 1
20 ;
× 3
20 ??
+2 ou – 2 (pour 18)
× 3 (pour 90 km)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.
A; B ; C;
route ;
mer ;
plage ;
maisons ;
120 km <–>;
10 ;
× 3 ;
+ 2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5.
A; B ; C;
mer ;
maisons ;
120 km <–> ;
10 ;
: 3 ;
-2</td><td>
</td></tr>
</table>

6. A ; B ; C ; mer; maisons; route; 120 km ; - 2 ; - 10 ; : 4 × 3	

7. A; B; C; maisons; mer; 120 km (segment) ; 10 ; : 4 (pour 29,5) -2 (en calculs annexes); × 3 ; +2	
8. (analyse a priori, adulte) A; B ; C ; sans maisons ; 120 ; 10 ; × 3 (doubles flèches) 2 ; : 4 (doubles flèches)	

Conclusion

Le problème *Excursion à la mer* illustre bien la démarche circulaire adoptée pour nos problèmes du RMT :

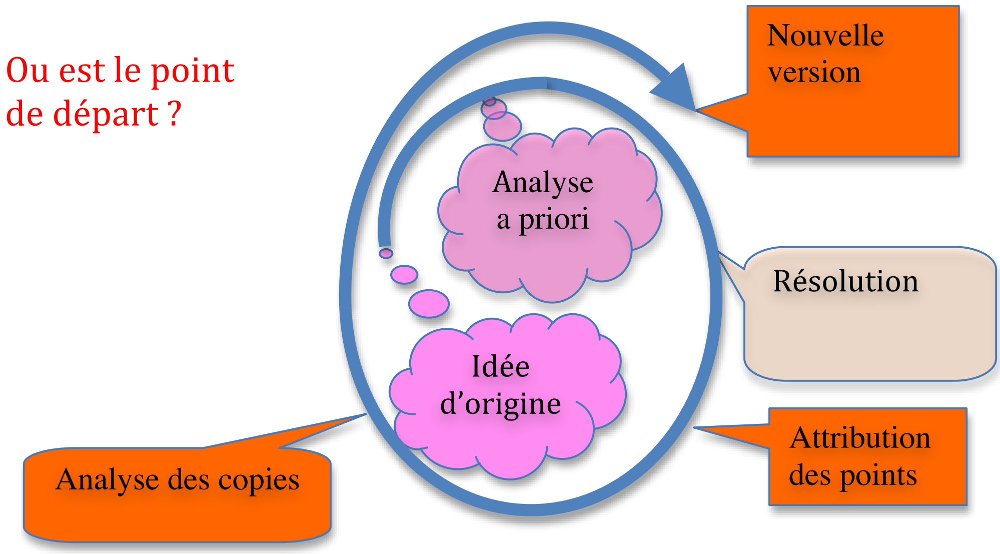
De l'idée d'origine, on passe à l'analyse a priori qui comprend l'élaboration de l'énoncé, l'analyse de la tâche et la détermination des critères d'attribution des points.

On arrive alors sur le terrain de l'élève avec la résolution du problème et la rédaction les explications de leur démarche.

L'analyse a posteriori comprend l'attribution des points, les relevés statistiques et l'examen des copies des élèves. Même si elle se déroule entre adultes, elle s'appuie sur les traces bien réelles du travail de résolution des élèves : les obstacles qu'ils ont rencontré, la manière dont ils ont tenté de les surmonter, leurs niveaux de représentation, leurs capacités à mobiliser certaines connaissances ...

Tout est en place pour tirer profit de cette complémentarité des analyses afin d'élaborer une variante du problème, dégagée des éventuelles ambiguïtés de l'énoncé, mieux adapté aux possibilités des élèves et permettant de nous apporter de nouvelles informations lors d'expérimentations futures, suivies à leur tour de nouvelles analyses.

La question fondamentale de la présentation du thème de la rencontre « ou est le point de départ ? » trouve ainsi une réponse paradoxale : on peut le situer au moment de l'idée d'origine, de l'analyse a priori, lorsque les élèves interviennent, lors des analyses a posteriori. La question plus importante est celle du point d'arrivée. Comme dans toute démarche scientifique en didactique des mathématiques : on progresse, même lentement, vers des connaissances toujours mieux structurées et enregistrées, en sachant que ce point d'arrivée s'éloigne toujours plus, au fur et à mesure de la profondeur de nos investigations.



GITA AL MARE[1]

François Jaquet

Sunto

Viene presentato in questo articolo un esempio di problema, *Gita al mare*, al fine di illustrare il compito dell'allievo nella trascrizione di un racconto di viaggio con un enunciato di cinque righe, in forma di dati strutturati sui quali potrà elaborare la risoluzione matematica del problema stesso. Questa trascrizione, o fase di "decontestualizzazione" è un compito spesso molto delicato per i nostri allievi, molto difficile da stimare a priori.
L'analisi statistica dei risultati ha evidenziato un indice molto alto di difficoltà del problema, ma solo all'atto dell'esame degli elaborati è stato possibile valutare veramente l'ampiezza del compito di appropriazione e, poi, determinare alcune cause legate all'enunciato. Ci si trova in tal modo alla fine di un primo ciclo della vita di un problema per entrare eventualmente in una delle sue vite ulteriori: una variante che tenga conto dei dati raccolti dopo le prime analisi a posteriori.

L'enunciato

Una gita al mare

Andrea decide di fare una gita al mare, su una spiaggia che dista 120 km da casa sua.
Lungo il percorso si ferma a prendere i suoi amici Bruno e Carlo che l'accompagneranno nel viaggio: dapprima si ferma a prendere Bruno, poi percorre ancora 10 km e si ferma da Carlo.
A questo punto il percorso che deve ancora fare per arrivare al mare supera di 2 km il triplo della distanza già percorsa.

Qual è la distanza che separa la casa di Bruno dal bordo del mare?

Spiegate la vostra risposta.

Punteggi attribuiti

Su 2229 classi di 22 sezioni

Punteggi	0	1	2	3	4	**m**
Cat. 5	75%	17%	2%	2%	5%	**0.5**
Cat. 6	80%	13%	2%	2%	3%	**0.3**
Cat. 7	66%	14%	4%	5%	11%	**0.8**
tot	74%	14%	3%	3%	6%	**0.5**

Secondo i criteri seguenti di attribuzione dei punteggi:
4, 3, 2. Soluzione corretta (100,5 Km) a seconda che si abbia una spiegazione completa, incompleta o assente
1 Inizio di ricerca coerente
0 Incomprensione del problema

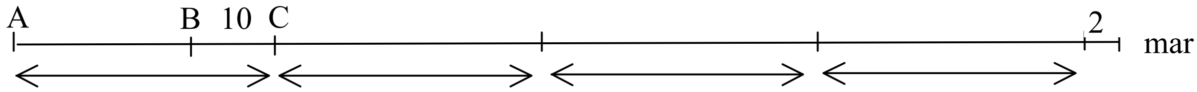
Primi commenti

Nessuno immaginava che questo problema non potesse essere risolto nelle condizioni specifiche del RMT (senza aiuto esterno o senza messa in comune intermedia organizzata dall'insegnante).
Effettivamente la frase dell'enunciato: *il percorso che deve ancora fare per arrivare al mare supera di 2 km il triplo della distanza già percorsa* non è facile da capire. Anzi, è un bell'esempio di repulsione che questo genere di formulazione possa provocare. Ma da qui ad arrivare al 75% d'incomprensione del problema… ce n'è abbastanza perché ci si pongano molte domande!
L'analisi degli elaborati degli allievi ha mostrato che le difficoltà di questo problema sono legate prioritariamente al contesto: disposizione delle abitazioni, distanza a volo d'uccello e distanza nel percorrere la

[1] Questo testo riprende l'introduzione alla presentazione del tema del 17° incontro dell'ARMT: "Analisi a priori, analisi a posteriori, un percorso circolare" (Luxembourg, 25 ottobre 2013). Altri due interventi di questa presentazione del tema, di Lucia Grugnetti e di Graziella Telatin figurano in questo numero alle pagine 75-94 e 95-114.

strada, … .Laddove la "decontestualizzazione" sia fatta correttamente, si incontra un altro ostacolo che si situa a livello dei dati numerici:
a) esprimere il precorso che resta da fare a partire da "supera di 2 km": 118 km o 120 – 2;
b) essendo il "resto" "il triplo di quello già fatto", il tutto è "quattro volte" la distanza tra la casa di Andrea e quella di Carlo;
cosa che consente l'operazione 118 : 4 = 29,5 (in km).

L'analisi a priori del compito si limitava allo schema seguente:
- *Comprendere, eventualmente aiutandosi con una rappresentazione grafica, che la distanza della casa di Andrea dal mare (120 km) equivale alla distanza tra casa di Andrea e casa di Carlo più il triplo di tale distanza e ancora 2 km.*



- *Rendersi conto che (in km) 118 (120 – 2) è quattro volte la distanza tra la casa di Andrea e la casa di Carlo e che questa è dunque di 118 : 4 = 29,5 (in km).*

Con la successione delle operazioni.

Analisi degli elaborati

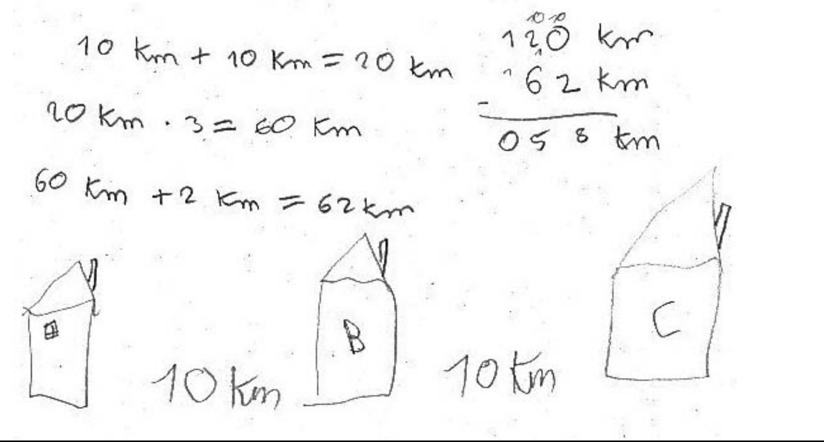
Dopo aver esaminato circa 150 elaborati, abbiamo constatato che l'ostacolo principale si situa a monte della fase dei calcoli, e cioè all'atto della decontestualizzazione (o trascrizione del racconto di viaggio dell'enunciato in una rappresentazione della posizione delle abitazioni sul percorso).

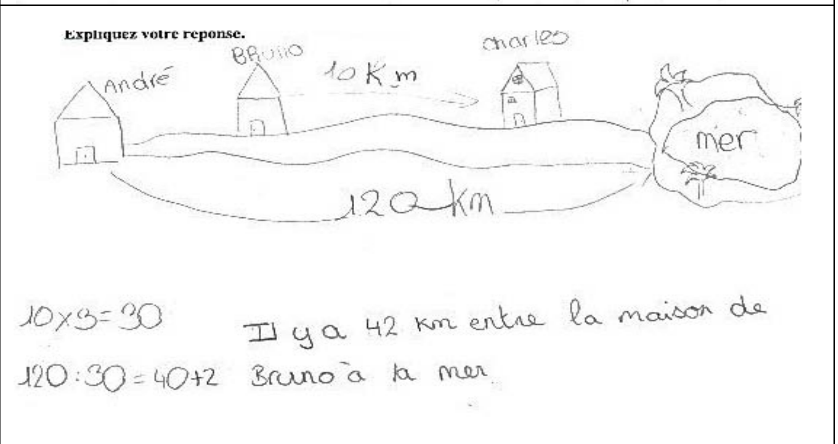
Presentiamo più avanti 7 elaborati rappresentativi dell'insieme (e riprendiamo lo schema dell'analisi a priori).
Per ognuno di essi, a sinistra, indichiamo gli elementi dell'enunciato che gli allievi hanno evidenziato esplicitamente nel loro schema o nella loro spiegazione:
I dati del contesto
a) Abitazioni: nella maggior parte dei casi si trovano i disegni delle abitazioni, benché non siano menzionate nell'enunciato.
b) A, B, C: i nomi dei tre personaggi, Andrea, Bruno e Carlo, sono indicati sulle case, qualche volta solo con l'iniziale.
c) Il mare: è indicato su tutti gli schemi, e sovente disegnato con onde e pesciolini.
d) La spiaggia: anch'essa è disegnata su numerosi elaborati, riconoscibile tramite ombrelloni o altri accessori che vi si trovano abitualmente, non menzionati nell'enunciato.
e) Il percorso: due parole dell'enunciato lo evocano esplicitamente "lungo il percorso", e "il percorso che deve ancora fare" ed è sempre disegnato, rappresentato con trattini di diversa natura; è raramente rettilineo e non ha ancora lo statuto dell'oggetto geometrico "segmento" o "segmenti successivi".
   A tal proposito, va sottolineata la confusione degli allievi tra due accezioni di "distanza": a volo d'uccello o percorso effettivo. Dal punto di vista dell'insegnante di matematica è evidente che sia la seconda accezione quella da prendere in considerazione, altrimenti la soluzione del problema sarebbe indeterminata. Numerosi elaborati mostrano che gli allievi hanno un punto di vista diverso!
   Un'altra osservazione da fare è che l'enunciato non dice che le abitazioni di Bruno e Carlo sono sul percorso dei 120 km di Andrea dal mare, né nell'ordine A, B, C, mare. Tale ordine era evidente per gli adulti che avevano analizzato il problema a priori, non lo è più dopo l'analisi degli elaborati!
f) L'auto: appare su circa il 20 % degli elaborati, soprattutto in quelli degli allievi più giovani (categoria 5). Evidentemente la bicicletta, la moto, il treno e l'aereo sono esclusi dal racconto.

I dati numerici
g) I 120 km: appaiono sulla gran parte degli schemi o nei calcoli abbozzati, ma in maniera spesso confusa senza che sugli schemi si possano riconoscere chiaramente gli estremi. In certi casi si tratta chiaramente della distanza a volo d'uccello.
h) I 10 km: è la distanza fra le fermate da Bruno e Carlo, disegnata correttamente nella metà degli elaborati.
i) I 2 km: fanno la loro apparizione solo nelle operazioni e molto di rado sugli schemi con "+ 2" o "- 2" per tradurre "supera di 2 km".
j) Il triplo: solo qualche schema e quello dell'analisi a priori ne fanno menzione con segmenti uguali ripetuti o con "× 3" nelle operazioni.

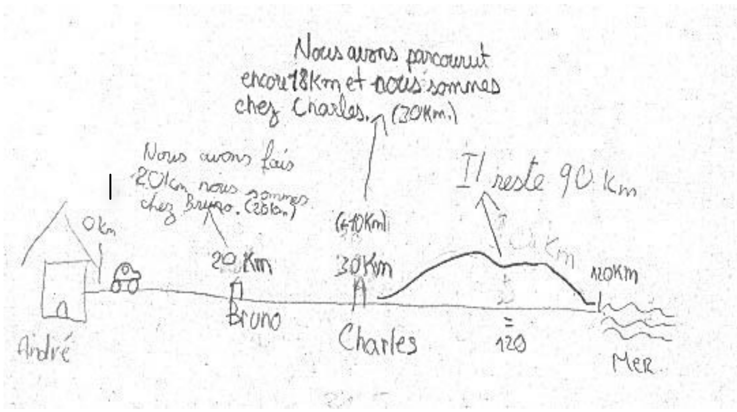
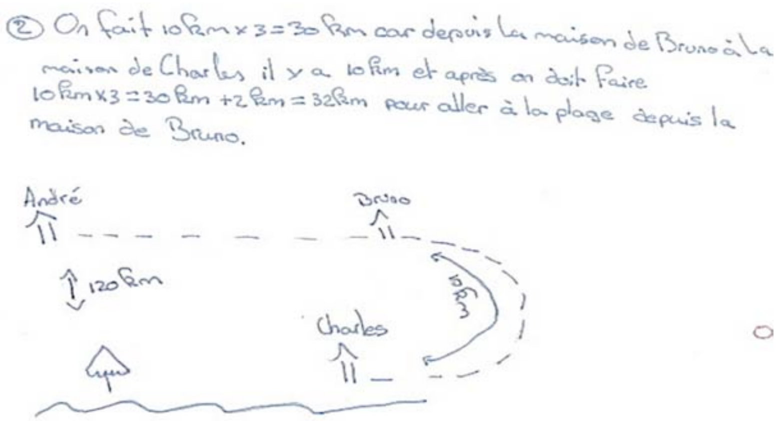
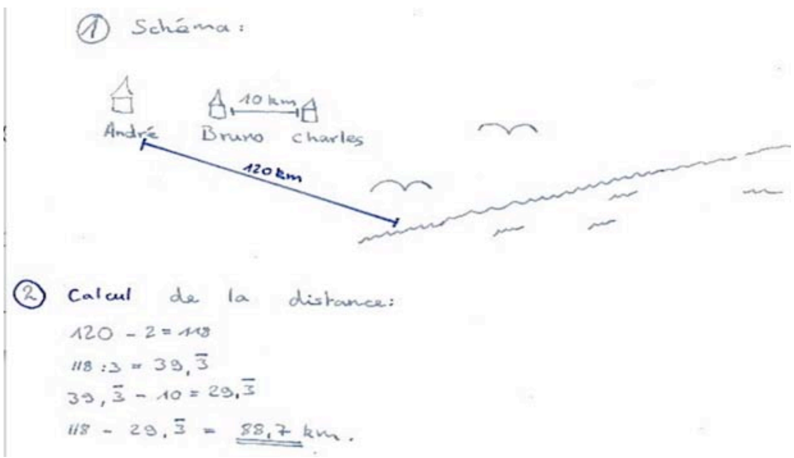
k) Il quarto: appare solo raramente tramite la divisione “: 4” o la ripetizione di quattro segmenti uguali. In questo caso la divisione per 4 significa che tutte le relazioni sono state trovate e che il problema è quasi risolto (cosa che può mettere in dubbio l’efficacia del suggerimento: *per facilitarvi il compito, fate un disegno,* dato a coloro che non hanno ancora risolto il problema!).

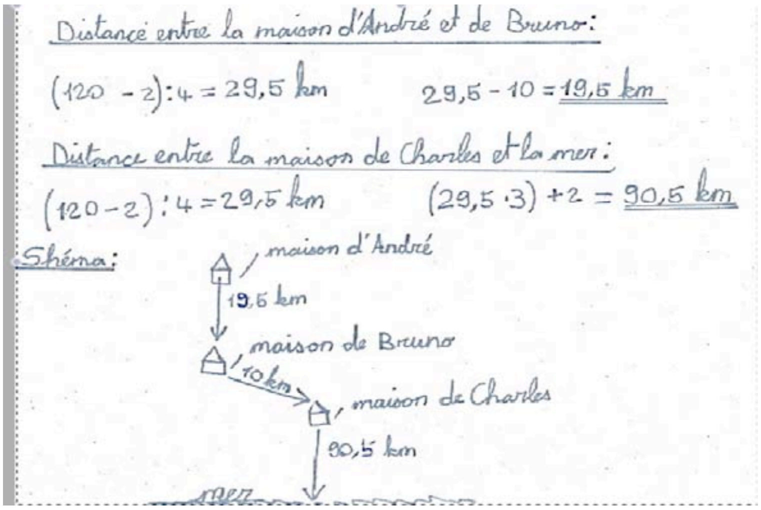
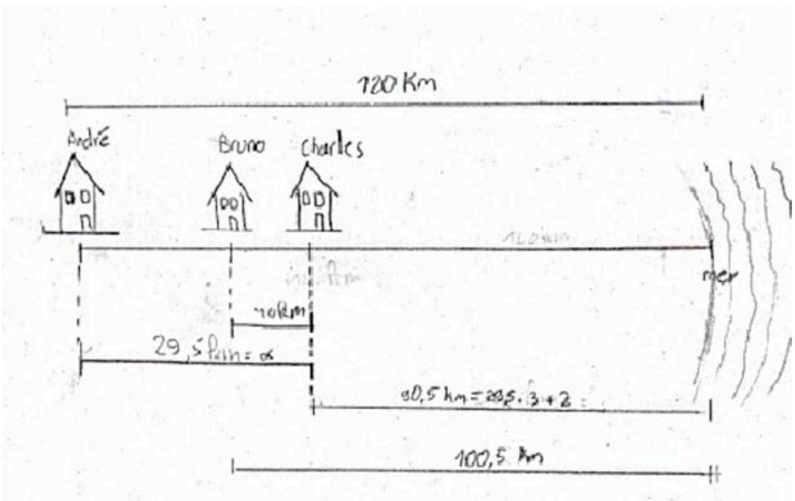
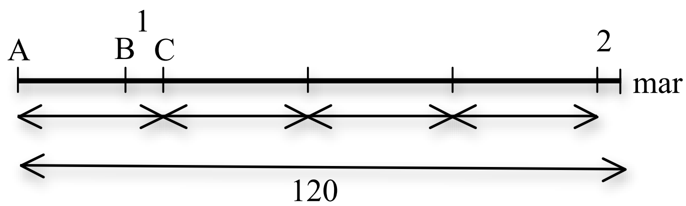
In questo articolo non descriveremo le procedure di risoluzione adottate dopo la fase di decontestualizzazione della situazione. Gli esempi che seguono mostrano chiaramente che una trascrizione corretta e completa dei dati è necessaria e sufficiente per una procedura numerica che conduca alla soluzione. In effetti ci sono solo due operazioni da effettuare per trovare la distanza da A a C, sottrarre 2 e dividere per 4 ($4x + 2 = 180$), poi altre due per il calcolo della distanza richiesta, da B al mare: una moltiplicazione per 3 e un’addizione di 10 ($3x + 10$).

<table>
<tr>
<td>1.
A; B; C;
abitazioni;
120
+ 2;
10 km;
× 3</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>2.
A; B; C;
abitazioni;
percorso;
mare;
spiaggia;
+ 2 oppure – 2 (per 18)
+ 10 km;
120 km;
× 3</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td>3.
A; B; C;
abitazioni;
percorso;
mare;
auto;
+ 10; 1
20;
× 3
20 ??
+ 2 oppure – 2 (per 18)
× 3 (per 90 km)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4.
A; B; C;
percorso;
mare;
spiaggia;
abitazioni;
120 km <–>;
10;
× 3;
+ 2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5.
A; B; C;
mare;
abitazioni;
120 km <–> ;
10;
: 3;
– 2</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>6.
A; B; C;
mare;
abitazioni;
percorso;
120 km;
- 2;
- 10;
: 4
× 3</td><td>
</td></tr>
<tr><td>7.
A; B; C;
abitazioni;
mare;
120 km (segmento);
10;
: 4 (per 29,5)
– 2 (in calcoli annessi);
× 3;
+ 2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>8. (analisi a priori, adulto)
A; B; C;
senza abitazioni;
120;
10;
× 3 (doppia freccia)
2;
: 4 (doppia freccia)</td><td>
</td></tr>
</table>

Conclusione

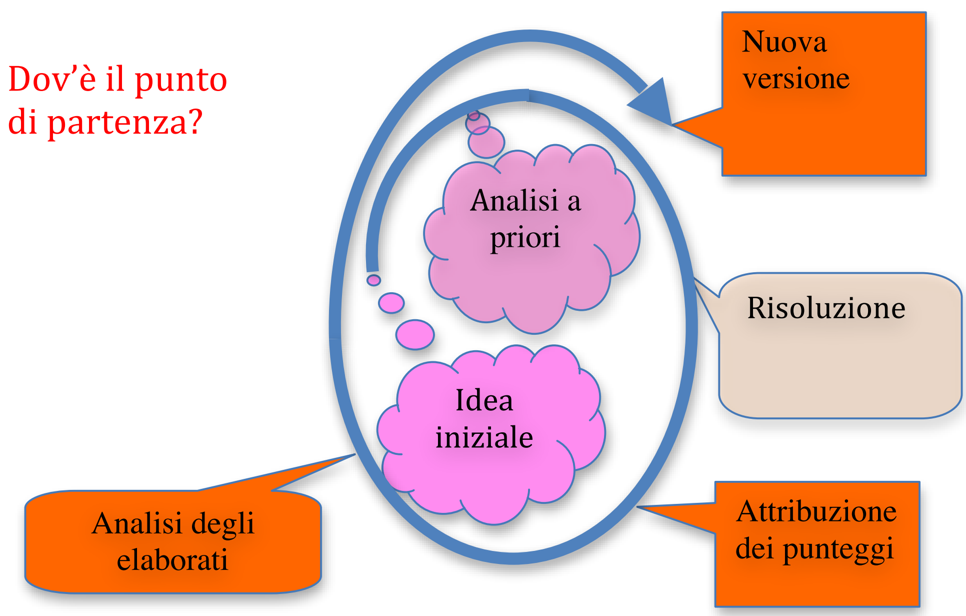
Il problema *Gita al mare* illustra bene il percorso circolare adottato per i nostri problemi del RMT: dall'idea iniziale si passa all'analisi a priori che comprende l'elaborazione dell'enunciato, l'analisi del compito e la determinazione dei criteri per l'attribuzione dei punteggi.

Si arriva poi sul terreno dell'allievo con la risoluzione del problema e la redazione delle spiegazioni richieste.

L'analisi a posteriori comprende l'attribuzione dei punteggi, le statistiche ad essi relative e l'analisi degli elaborati degli allievi. Anche se è svolta da adulti, tale analisi si poggia su tracce ben reali del lavoro di

risoluzione degli allievi: gli ostacoli che hanno incontrato, il modo in cui hanno provato a superarli, il loro livello di rappresentazione, le loro capacità di mobilizzare determinate conoscenze… .
C'è tutto ciò che è utile per trarre profitto di questa complementarità delle analisi al fine di elaborare una variante del problema, libera da eventuali ambiguità dell'enunciato, meglio adattata alle possibilità degli allievi e che permetta di apportare nuove informazioni per sperimentazioni future, seguite, a loro volta, da nuove analisi.

La domanda fondamentale della presentazione del tema dell'incontro "dov'è il punto di partenza?" trova una risposta paradossale: possiamo situarlo al momento dell'idea iniziale, in quello dell'analisi a priori, quando intervengono gli allievi o ancora al momento dell'analisi a posteriori. La questione più importante è quella del punto di arrivo. Come in tutte le procedure scientifiche in didattica della matematica: si progredisce, anche lentamente, verso conoscenze sempre meglio strutturate e registrate, sapendo che questo punto di arrivo si allontana sempre più, via via che le nostre ricerche diventano più approfondite.



ANALISI A PRIORI, ANALISI A POSTERIORI, OLTRE IL PERCORSO CIRCOLARE

Lucia Grugnetti[1]

Sunto

Questo articolo sviluppa alcuni aspetti dell'omonima relazione presentata al 17° incontro internazionale dell'ARMT svoltosi in Lussemburgo nell'ottobre 2013, nell'ambito della tavola rotonda sulla tematica "Analisi a priori, analisi a posteriori, un percorso circolare".
La prima parte è dedicata ad alcune riflessioni scaturite dal confronto fra l'analisi a priori e l'analisi a posteriori del problema *RMT 2005*, sulla nozione di unità d'area. Riflessioni che hanno portato il *Gruppo di geometria* piana dell'ARMT alla messa a punto di una serie di nuovi enunciati che hanno permesso di confermare le prime osservazioni a posteriori e di calibrare meglio le nuove analisi a priori.
Nella seconda parte viene sviluppata una riflessione sulla differenza tra "spiegazione" e "giustificazione" quando viene richiesto "Spiegate la vostra risposta" o "Giustificate la vostra risposta", come appare nella maggior parte dei nostri enunciati.

1. Introduzione

Come detto nel documento di discussione del tema del convegno del Lussemburgo, *un problema del RMT è il frutto di una lunga elaborazione, in diverse fasi, accompagnata da riflessioni, scambi e analisi "preliminari" prima della sua presentazione agli allievi nel corso della preparazione di una prova. L'idea iniziale del problema è analizzata dal punto di vista del suo interesse matematico, della sua adeguatezza e della sua accessibilità agli allievi, delle sue potenzialità didattiche. Tutte le scelte da determinare devono tener conto delle condizioni fissate nell'ambito del RMT.* Si tratta qui della preparazione, per ogni problema, di una sua "analisi a priori".
Dopo lo svolgimento di ogni prova, si passa all'attribuzione dei punteggi, che costituisce in qualche modo un anello di congiunzione tra analisi a priori e analisi a posteriori che si svilupperà, quest'ultima, a partire *dalla rilettura degli elaborati, senza le preoccupazioni dell'attribuzione dei punteggi, per identificare procedure, ostacoli e altre "tracce" della risoluzione del problema da parte degli allievi. È a questo punto che si passa dalle ipotesi alla loro verifica, dallo spazio virtuale immaginato dall'adulto al terreno che l'allievo gli rimanda* (documento di discussione del tema dell'incontro del Lussemburgo).
La circolarità del percorso si realizza nei seguenti stadi: si parte dal testo di un problema su cui si costruisce, mediante un'analisi a priori, una possibile attribuzione dei punteggi; una volta somministrato il problema con l'analisi a posteriori dei risultati la si confronta con la precedente analisi a priori per poi migliorare l'analisi a priori in una riedizione del problema dal quale si era partiti. Ma si può andare oltre, verso la preparazione di nuovi problemi atti a verificare, ad esempio, la permanenza di determinati ostacoli ed errori, ed anche il loro superamento a seconda dell'età degli allievi ai quali verranno proposti. E di qui il percorso… riparte per ulteriori miglioramenti e sperimentazioni.

Come è ben noto, i problemi del RMT richiedono agli allievi la spiegazione e talvolta la giustificazione delle procedure messe in atto per arrivare alla risposta. Nella preparazione dell'analisi a priori non va sottovalutata l'attenzione che va posta alla differenza fra "spiegazione" e "giustificazione", differenza che sarà oggetto di qualche riflessione nella seconda parte dell'articolo.

2. "RMT 2005" e i suoi "fratellini"

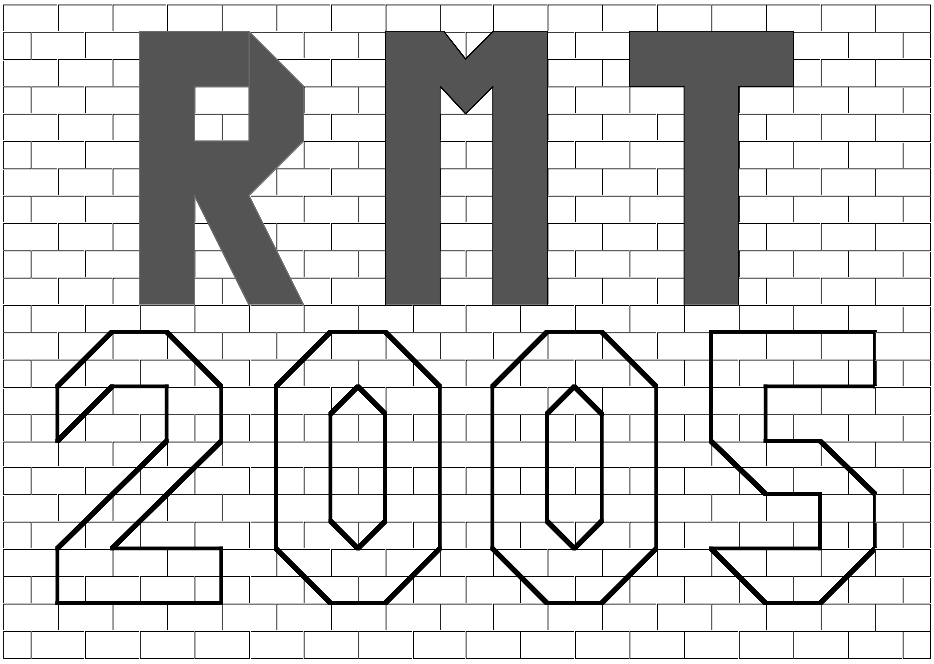
C'era una volta un problema dal titolo "RMT 2005" che, come si può ben immaginare, è nato dieci anni fa. Intrigante e ricco al contempo. La sua forte personalità ha attirato diversi "ricercatori" del paese di Transalpino.

2. 1. Il problema

RMT 2005 *(Cat. 3, 4)*

Sul muro della scuola è stata pitturata la parte interna delle lettere R, M e T, preparate per la prossima finale del Rally Matematico Transalpino. Rimane da dipingere la parte interna delle quattro cifre del 2005.
Sofia dipinge il «2» e il primo «0». Mauro dipingerà l'altro «0» e il «5».

[1] lucia.grugnetti@gmal.com



Chi userà più pittura?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

2.2. La sua analisi a priori

Ambito concettuale

- Geometria: approccio alla nozione di area: determinazione dell'area delle figure per ricoprimenti e conteggio di unità

Analisi del compito

- Rendersi conto che la quantità di pittura dipende dalla grandezza delle superfici da ricoprire e che si deve trovare una (o più) unità d'area per poter fare il confronto
- Scegliere, tra le unità, la più evidente: il "mattone" (rettangolo), il "mezzo mattone" (quadrato), il triangolo (o metà quadrato) che permette di avere un numero intero di unità
- Scelta l'unità (o le unità), organizzare il conteggio dopo avere eventualmente disegnato l'intera pavimentazione (per esempio con triangoli oppure con triangoli e quadrati)
- Rendersi conto che è inutile calcolare l'area delle cifre «0» e che è sufficiente confrontare quelle del «2» e del «5»
- Trovare le aree per conteggio e concludere che è Mauro quello che userà più pittura dando per esempio, il numero di quadratini (se l'unità è il quadratino): area del «2» = 34 e area del «5» = 36

Attribuzione dei punteggi

4 La risposta giusta (Mauro) con l'area delle lettere «2» e «5» e la spiegazione della maniera di ottenerle (se sono indicate anche le aree delle cifre «0»: 42 quadretti, la risposta viene considerata buona)

3 La risposta giusta, con le aree ma senza indicazioni sulla maniera in cui sono state ottenute
oppure la risposta giusta e spiegata, con un errore nel calcolo dell'area della cifra «0»

2 Un solo errore nel conteggio delle unità d'area (del 2 o del 5), con spiegazioni e risposta coerente

1 La risposta (Mauro), senza spiegazioni sulla determinazione dell'area ("abbiamo visto che...")

0 Incomprensione del problema o lavoro sui perimetri, stima visiva

L'analisi a priori del problema mostra, in particolare laddove si dice "Scelta l'unità (o le unità), organizzare il conteggio", come esso sia stato concepito con l'intenzione evidente di fare emergere la misura ad un livello scolare in cui le nozioni ad esse connesse sono in fase di approccio, senza alcun formalismo né regola istituzionalizzati.

Gli allievi devono rendersi conto che la quantità di pittura dipende dalla grandezza delle superfici da ricoprire, una prima intuizione del concetto di funzione, e che è necessario trovare un modo per confrontarle: per ricoprimento e ritaglio, con pavimentazioni con una o svariate forme, in caso di ricorso ad una mattonella unità, per conteggio.

In effetti, si dà per scontato, in questa analisi a priori, che "la scelta di una misura comune" sia evidente per gli allievi. Che il conteggio sia un buon aiuto aritmetico è ovvio. Ma sarebbe in teoria possibile lavorare geometricamente per scomposizione e rendersi conto che una superficie non è equivalente all'altra.
Va poi sottolineato che il confronto è 'qualitativo' e la domanda del problema è 'qualitativa'. Pertanto anche le risposte tramite ritaglio e sovrapposizione senza conteggio devono essere considerate positivamente.

2.3. Qualche aspetto dell'analisi a posteriori

L'analisi a posteriori degli innumerevoli elaborati delle classi partecipanti, ha fatto emergere, in maniera piuttosto evidente, la difficoltà dei gruppi di allievi, di entrambe le categorie (con maggior frequenza nella categoria 3, salvo debite eccezioni), **a rendersi conto della opportunità di cercare un'unità di misura adeguata (al problema)**, che non fosse un 'pezzo' qualunque delle suddivisioni delle cifre rappresentate sul muro. Infatti, su un totale di 176 elaborati di categoria 3, il 52%, cioè 92 gruppi, ha risolto contando i pezzi (le mattonelle) senza far caso alla loro diversità di forma. Nella categoria 4 ha risolto in tal modo il 39% dei gruppi, cioè 85 gruppi su 218.
Le risposte corrette (o supposte corrette, laddove la spiegazione non è chiara) sono il 36% per la categoria 3 e il 40% per la categoria 4. Le strategie sono quelle previste nell'analisi a priori.
Le riflessioni che scaturiscono da tali risultati evidenziano come talvolta, per non dire spesso, le analisi a priori relative ai nostri problemi, forse inevitabilmente, siano 'guidate' da una visione del problema che è quella dell'adulto! E per di più di un adulto il quale ritiene che gli unici strumenti che un allievo abbia siano quelli previsti dai programmi scolastici!!
Le analisi a posteriori sono essenziali in quanto spostano la visione del problema dal terreno dell'adulto a quello dell'allievo.
Tuttavia anche l'adulto può riconsiderare il problema per utili cambiamenti. Ed è successo proprio questo. Infatti, abbiamo osservato che nell'analisi a priori e nella conseguente attribuzione dei punteggi si era posta molta attenzione più all'argomento di insegnamento (calcolo dell'area) che alla potenzialità del problema. Esso poteva essere utile anche per mettere in luce una intuizione dell'allievo relativa all'aspetto della valutazione qualitativa delle aree, che può avere connotati elementari (Marchini, 1999) oppure teorici generando la relazione di 'equiscomponibilità', uno dei cardini dell'approccio di Hilbert. Avrebbe dovuto essere indicato anche questo per tenerne conto nell'attribuzione dei punteggi.
Nel problema, infatti, si 'scontrano' due aspetti che da sempre intervengono in argomenti di geometria: qualità e quantità. Il confronto è 'qualitativo'; la domanda del problema è 'qualitativa'! per cui chi ritaglia e sovrappone senza conteggio dovrebbe avere il massimo. Basta osservare la moneta da 2 euro: la parte gialla è più piccola dell'intera moneta o altre figure in cui non è necessario procedere per scomposizione o misura per dare un giudizio di suvvalenza. La sagace scelta delle figure non rende ovvio questo aspetto, ma non si può escludere il ritaglio. Nell'analisi a priori che ha accompagnato il testo si punta direttamente sul 'quantitativo' suggerendo l'introduzione di una unità di misura e di un conteggio. Ma risalendo indietro nel tempo, si constata che l'opera di Euclide è sicuramente 'impregnata' di considerazioni qualitative, mentre quella di Archimede, forse per la sua formazione da 'ingegnere' mostra molti esempi di aspetti quantitativi.

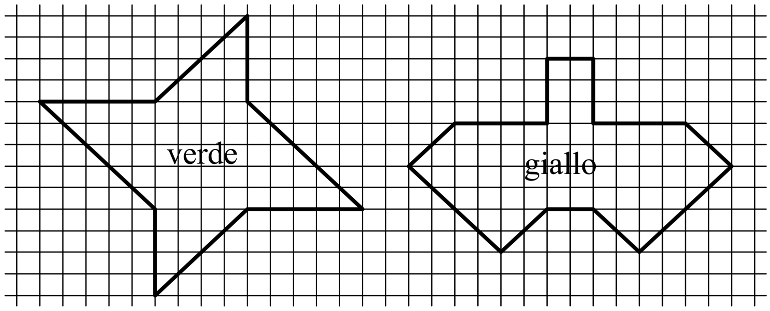
Oltre all'analisi a posteriori degli elaborati, sono state condotte anche sperimentazioni in classe (Bisso *et al*, 2006) dai membri del gruppo geometria dell'ARMT e tale gruppo ha proposto il problema "Cadono le foglie", che è stato inserito fra quelli della prima prova del 18° RMT.
Accanto a questo tipo di analisi quantitativa si può talvolta svolgere riflessioni a posteriori su altri aspetti dei testi, ad esempio sulla qualità del disegno, sulla chiarezza del testo ed anche su altri aspetti. Il problema **RMT 2005** ci offre lo spunto per questo tipo di analisi.

3. Un “nuovo” problema e le sue analisi a priori e a posteriori

3.1. Il problema

CADONO LE FOGLIE (Cat. 3, 4, 5) **I prova 18° RMT**

Per la festa dell’autunno si è deciso di decorare la palestra della scuola con delle foglie di cartoncino verde e delle foglie di cartoncino giallo.
Ecco il modello delle foglie.



Lisa ha ritagliato una foglia verde e Tom ha ritagliato una foglia gialla.
Ci vorrà più cartoncino per la foglia verde o più cartoncino per la foglia gialla?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

3.2. La sua analisi a priori

Ambito concettuale

- Aritmetica: conteggio organizzato
- Geometria: quadrato, triangolo come metà di un quadrato
- Grandezze e misura: “misura” dell’area con unità di misura opportuna (aspetto quantitativo) oppure confronto per sovrapposizione (aspetto qualitativo)

Analisi del compito

- Comprendere che è necessario confrontare le aree delle due figure
- Contare i quadretti e i semi-quadretti di ciascuna figura uno a uno (metodo soggetto ad errori di conteggio), poi effettuare gli scambi necessari per poterli contare secondo un’unità di misura comune: in quadretti (o semi-quadretti), 61 (122) per la figura verde e 62 (124) per la gialla. (Nel caso in cui si contassero i “pezzetti”, senza tener conto delle loro aree rispettive, si otterrebbero 70 pezzi per la figura verde e 70 per quella gialla).
- Oppure: con una scomposizione opportuna delle figure in rettangoli, quadrati e triangoli, rendersi conto che i triangoli sono metà di quadrati.
- Ricostruire quindi i quadrati “interi” per contarne i quadratini. Per esempio, osservare che la figura verde è composta da due triangoli che costituiscono un quadrato di 4 x 4, da due triangoli che costituiscono un quadrato di 5 x 5 e da un rettangolo di 5 x 4, per un’area di 16 + 25 + 20 = 61 (in quadretti). Nello stesso modo, si possono raggruppare le parti della figura gialla in quattro quadrati di 2 x 2 e due rettangoli di 4 x 10 e 2 x 3 per ottenere un’area di 40 + 6 + 4 x 4 = 62 (in quadretti).
- Oppure: procedere ritagliando una delle due foglie per ricoprire l’altra e constatare che manca (o avanza) un pezzo e concludere che la foglia gialla ha un’area maggiore.

Attribuzione dei punteggi

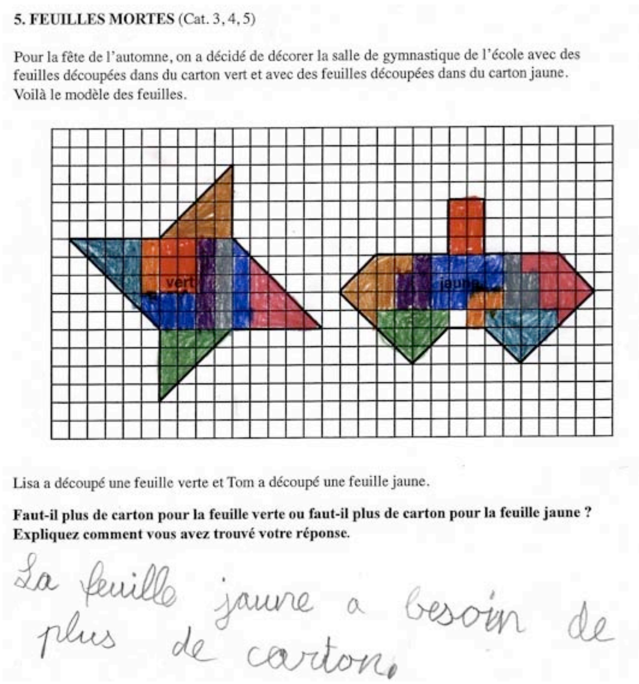
4 Risposta corretta (ci vuole più cartoncino giallo o la figura gialla è quella più grande) con il dettaglio delle strategie utilizzate (calcoli, ritaglio, parti equivalenti messe in evidenza ...)
3 Risposta corretta con spiegazioni incomplete ma dalle quali si evince la procedura corretta
2 Risposta con errori nel conteggio ma che mostri che la procedura è corretta (per esempio con delle difficoltà nella trasformazione dei mezzi quadretti in quadretti)
1 Inizio corretto di ragionamento, ma senza il “calcolo” delle aree
o risposta corretta gialla senza nessuna spiegazione o dettaglio di calcoli
0 Incomprensione del problema o ricorso al perimetro per confrontare le figure o conteggio dei pezzi senza tener conto della loro area

Forti delle riflessioni scaturite dall'esperienza precedente, questa volta, nell'analisi a priori si è fatto tesoro dell'aspetto qualitativo legato al confronto diretto o per scomposizione ed si è anche cercato di tener meglio conto del terreno dell'allievo che necessita di arrivare a piccoli passi alla necessità di una misura comune. Con tale procedura si richiede quindi un'attività di scomposizione e di ricomposizione, come ben evidenziato nell'elaborato riportato più avanti. Non si tratta di mera abilità grafica ma sottintende, come detto prima, aspetti teorici usati da Hilbert per il suo sistema ipotetico-deduttivo della geometria.
Nell'analisi a priori è detto: "Contare i quadretti e i semi-quadretti di ciascuna figura uno a uno (metodo soggetto ad errori di conteggio), poi effettuare gli scambi necessari per poterli contare secondo un'unità di misura comune".
Per quanto riguarda il punteggio "0", viene evocato, fra l'altro, "il conteggio dei pezzi senza tener conto della loro area", oltre al ricorso al perimetro per confrontare le figure.
Il fatto di aver posto maggiore attenzione a tali difficoltà nell'analisi a priori (analisi del compito e attribuzione dei punteggi) non implica ovviamente una diminuzione delle difficoltà stesse, ma contribuisce a segnalarne l'esistenza a insegnanti e ricercatori che si occupano dell'analisi a posteriori, che comincia con la correzione degli elaborati.

3.3. Qualche aspetto dell'analisi a posteriori

Come si è visto nella rubrica "attribuzione dei punteggi", il punteggio **0** contempla il "ricorso al perimetro per confrontare le figure o conteggio dei pezzi senza tener conto della loro area".
L'analisi svolta dai membri del gruppo geometria, nelle loro sezioni di appartenenza e ampiamente riportata in Anselmo *et al*. (2011), mostra che in effetti, il punteggio **0** è sempre stato attribuito a causa dei due tipi di difficoltà ricordati e non per incomprensione del problema.
E rispetto a tale punteggio, le percentuali vanno decrescendo nel passare dalla categoria 3 (49%, su 290 elaborati) alla 4 (30%, su 489 elaborati) fino alla 5 (22% su 545 elaborati).
Relativamente agli errori sull'assenza di consapevolezza della necessità un'unità comune alcuni elaborati, soprattutto di categoria 3, presentano il conteggio dei **70 pezzi** (quadretti e mezzi quadretti) che porta ad una "uguaglianza di aree".
Questi risultati indicano comunque che ancora in categoria 5 gli allievi incontrano gli ostacoli e le difficoltà più sopra citate, anche se in misura minore. Sarà importante proporre altri problemi similari al fine di verificare ancora l'esistenza delle difficoltà in oggetto, ma anche per cercare di capire a quale età vengano superate.
Il percorso che porta dall'analisi a priori all'analisi posteriori, per tornare a quella a priori, da circolare diventa in qualche modo a spirale, una spirale di percorsi circolari successivi.

In questa sede l'attenzione è posta sulle difficoltà e gli ostacoli, ma è importante ricordare che le analisi a posteriori dei problemi del RMT prendono in considerazione tutta la gamma delle risposte e delle spiegazioni e spesso succede che ci si renda conto di quanti tipi di soluzioni gli allievi prospettino che non erano state "pensate" dagli adulti nella preparazione dell'analisi del compito.
Un bell'esempio è il seguente:



5. FEUILLES MORTES (Cat. 3, 4, 5)

Pour la fête de l'automne, on a décidé de décorer la salle de gymnastique de l'école avec des feuilles découpées dans du carton vert et avec des feuilles découpées dans du carton jaune.
Voilà le modèle des feuilles.

Lisa a découpé une feuille verte et Tom a découpé une feuille jaune.

Faut-il plus de carton pour la feuille verte ou faut-il plus de carton pour la feuille jaune ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

La feuille jaune a besoin de plus de carton.

Potremmo ben dire "viva gli allievi"!

4. Il dilemma "spiegazione" – "giustificazione"

4.1. Un esempio famoso

Per introdurre la problematica, riporto qui un esempio famoso suggeritomi da Carlo Marchini:
all'ultima imperatrice della Cina, Tzu-Hsi, un ingegnere inglese portò il progetto di una ferrovia che avrebbe unito Canton con Pechino, corredando il progetto con l'analisi costi-benefici, del tempo risparmiato e quindi anche del valore delle derrate che non sarebbero marcite nel lungo viaggio, ecc. L'imperatrice ascoltò e poi disse che la ferrovia non si doveva fare. L'ingegnere, coi dovuti modi, chiese se i dati che aveva esposto non fossero chiari o se l'imperatrice avesse da obiettare sui calcoli da lui mostrati o se avesse dimenticato qualche particolare, o se voleva un percorso diverso.... L'imperatrice spiegò che il suo rifiuto era dovuto al fatto che Pechino è la città del Lupo e Canton è quella della Capra, e costruire un collegamento diretto tra le due città voleva dire mettere il lupo in condizione di mangiare facilmente la capra.
L'imperatrice spiegò in modo ineccepibile il suo ragionamento, certamente non lo giustificò matematicamente, come sperava l'ingegnere per poterlo 'smontare'.

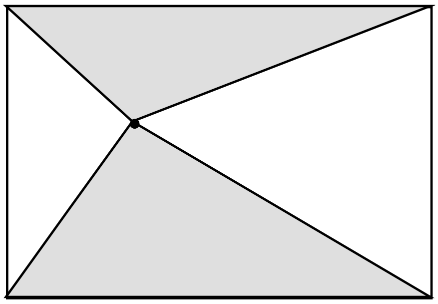
La giustificazione attiene ai concetti 'oggettivi' o 'interpersonali' e può essere eventualmente confutata, mentre nella spiegazione del proprio ragionamento, di tipo argomentativo, il ruolo principale lo giocano le proprie concezioni e, in tal senso, è talvolta più difficile interpretare una spiegazione piuttosto che una giustificazione.
la richiesta di giustificazione del ragionamento apre la strada ad un procedimento di tipo dimostrativo e, come dice Duval (1993) *Tout le monde est d'accord pour reconnaître qu'une argumentation n'est pas une démonstration. Ce qui les sépare tient à leurs contraintes respectives d'organisation. Pour qu'un raisonnement puisse être une démonstration, il est nécessaire qu'il soit un raisonnement valide. L'argumentation, au contraire, est un raisonnement qui n'obéit « pas à des contraintes de validité mais de pertinence»*.
In effetti, Il concatenamento degli argomenti di un'argomentazione fa riferimento ad una logica naturale mentre quello di una dimostrazione fa riferimento alla logica formale.

Diventa quindi importante tener conto di questa sostanziale differenza laddove si scelga di chiedere agli allievi di "giustificare il proprio ragionamento", cosa che non ha senso chiedere ad allievi molto giovani, che non abbiano ancora almeno 13/14 anni.

4.2 Il problema "L'eredità"

Analizziamo un interessante problema del RMT di parecchi anni fa (8° RMT, prima prova) per le categorie 7 e 8, nel quale la richiesta di giustificare la risposta è sensata e va nella direzione di primi passi di una dimostrazione.

Due fratelli ereditano un terreno di forma rettangolare. Per dividerlo in due parti della medesima estensione, un conoscente suggerisce loro di piantare un palo in un punto qualsiasi del terreno e congiungerlo ai quattro paletti infissi nei quattro vertici del terreno rettangolare.

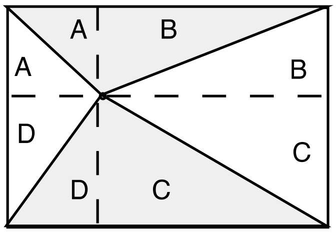


Uno dei fratelli prenderà la parte colorata in grigio nel disegno, l'altro la rimanente.
Le due parti sono davvero uguali?
Giustificate il vostro ragionamento.

4.2.1. La sua analisi a priori

Ambito concettuale
- Geometria piana: triangoli e loro misura

Analisi del compito
- Capire che comunque si scelga il punto dove mettere il palo sul terreno rettangolare, se si conducono le parallele ai lati
  la parte grigia e quella bianca sono entrambe composte dagli stessi quattro triangoli A, B, C, D. (aspetto connesso alla equiscomponibilità che prescinde dalla misura)
- Oppure capire che comunque si scelga il punto dove mettere il palo sul terreno rettangolare, si individuano quattro triangoli aventi a due a due come base una delle due dimensioni del rettangolo e come somma delle altezze, l'altra dimensione (aspetto quantitativo), per cui anche se il punto dove si mette il palo cambia, la somma delle aree (di due triangoli aventi basi uguali) non cambia.



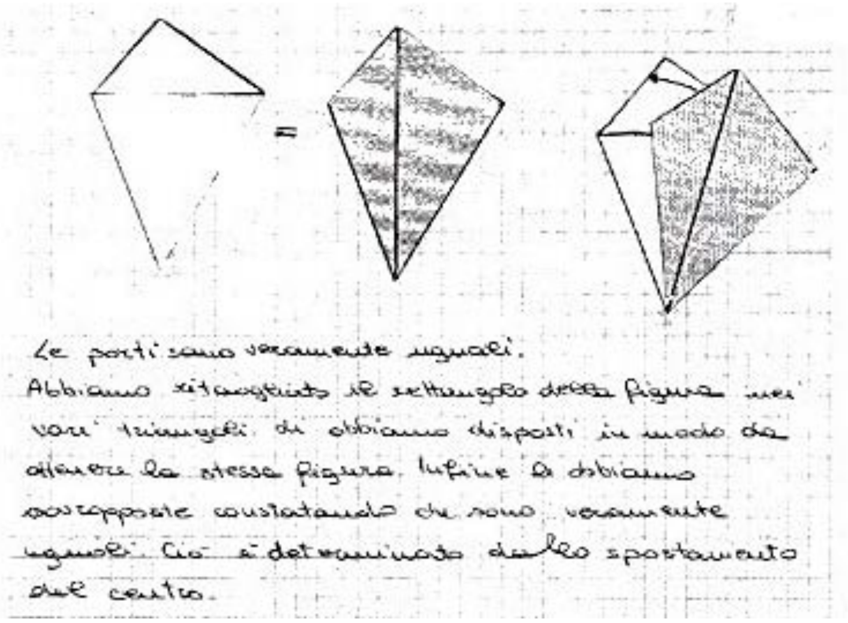
Valutazione[2]

4 Risposta corretta con procedimento dimostrativo (del tipo indicato nell'analisi del compito)
3 Risposta corretta e con spiegazione insufficiente (nessuna indicazione sulle rette che dividono il rettangolo, benché presenti nel disegno della risposta; nessuna indicazione sulla scomposizione delle parti bianche e grigie A, B, C, e D; nessuna giustificazione sull'uguaglianza dei triangolini, ...)
2 Risposta corretta con ricorso a più di un esempio (il palo al centro o altro) con giustificazione sperimentale (misure e calcoli coerenti) oppure scomposizione (con ad esempio ritaglio) e ricomposizione delle parti bianche e grigie per formare due quadrilateri, senza giustificare la loro equivalenza ("si vede che ...")
1 Risposta coerente (corretta o meno se le misure non sono molto precise) con ricorso alla misura oppure risposta corretta alla domanda senza spiegazione coerente
0 Spiegazione completamente errata o incomprensione del problema

4.2.2. Alcuni aspetti dell'analisi a posteriori in merito alla problematica della giustificazione

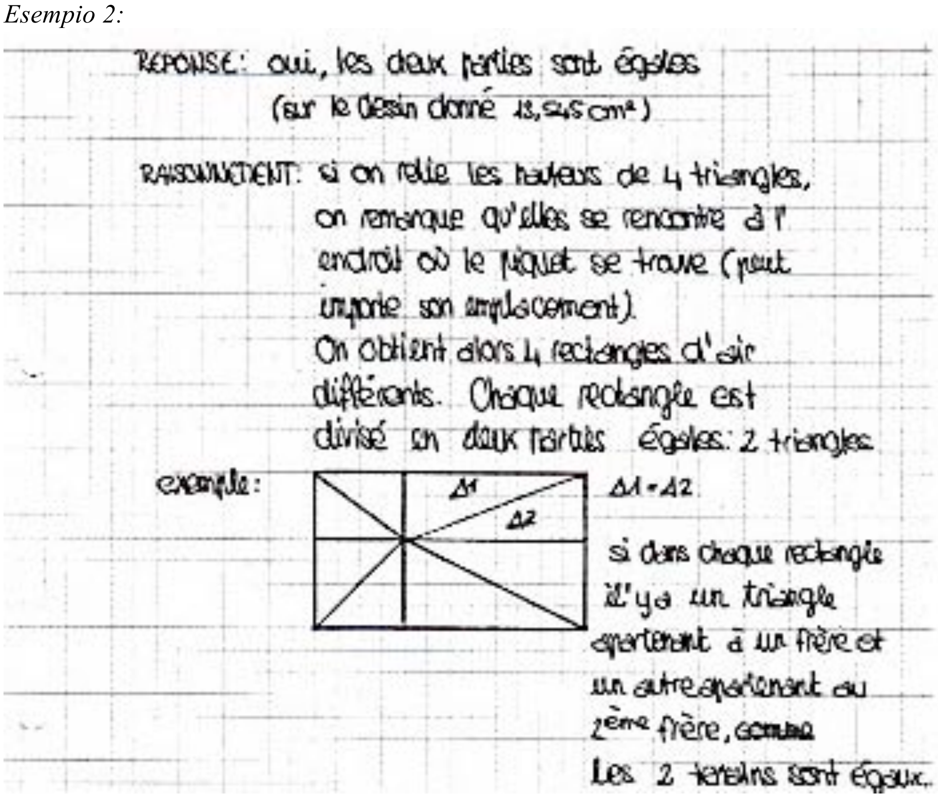
Come hanno risposto gli allievi alla richiesta di giustificazione, nel caso del problema "L'eredità"?
Esempio 1:

[2] All'epoca era utilizzata la dizione "valutazione". A partire dall'edizione successiva si è optato per "attribuzione dei punteggi", espressione più consona alle esigenze del RMT.



(*Le parti sono veramente uguali. Abbiamo ritagliato il rettangolo della figura in vari triangoli che abbiamo disposti in modo da ottenere la stessa figura. Infine le abbiamo sovrapposte constatando che sono veramente uguali. Ciò è determinato dallo spostamento del centro.)*

Esempio 2:



La giustificazione è, in questo caso, del tipo di quella riportata nell'analisi del compito.

Se confrontiamo i due esempi, benché le due risposte siano entrambe corrette, il livello dei due ragionamenti è concettualmente diverso.

Nel primo caso, come si vede, gli allievi hanno ritagliato il rettangolo in quattro parti, due bianche e due grigie, e ricomposto le parti dello stesso colore per ottenere due quadrilateri da confrontare. Non hanno però giustificato

"formalmente" l'equivalenza delle due figure. Si sono "accontentati" di una sovrapposizione, per forza di cose approssimativa. Si tratta, in effetti di una argomentazione esplicativa di tipo locale, nel senso che "funziona" in questo caso, ma non si estende alla considerazione del fatto che comunque si scelga il punto dove mettere il palo sul terreno, l'equivalenza fra le due parti non cambia.
Diversa situazione è quella che vediamo nel secondo esempio, dove gli allievi giustificano in maniera formale l'equivalenza. In una seconda parte dell'elaborato, però, gli allievi, passano alle misure e calcolano le aree delle due parti… per sentirsi più sicuri.
In effetti, gli allievi di 13/14 anni si trovano spesso in una fase di passaggio dall'evidenza di una prova empirica ottenuta con un calcolo su un esempio ad una giustificazione formale (Grugnetti, 2001), (Garuti et al., 1996) .

4.3 I quattro picchetti

Per quanto riguarda le attribuzioni dei punteggi, è necessario che i criteri siano chiaramente definiti. In quelli relativi al problema "L'eredità", ad esempio, il criterio per i "3" punti appare di difficile interpretazione, soprattutto laddove lo si confronti con quello del punteggio 2:

3 Risposta corretta e con spiegazione insufficiente (nessuna indicazione sulle rette che dividono il rettangolo, benché presenti nel disegno della risposta; nessuna indicazione sulla scomposizione delle parti bianche e grigie A, B, C, e D; nessuna giustificazione sull'uguaglianza dei triangolini, ...)
2 Risposta corretta con ricorso a più di un esempio (il palo al centro o altro) con giustificazione sperimentale (misure e calcoli coerenti) oppure scomposizione (con ad esempio ritaglio) e ricomposizione delle parti bianche e grigie per formare due quadrilateri, senza giustificare la loro equivalenza ("si vede che ...")

Nel corso degli anni, anche le attribuzioni dei punteggi per i problemi del RMT hanno in genere subìto un'evoluzione, benché sia sempre difficile e forse impossibile, essere esaustivi a priori.
Il ruolo delle analisi a posteriori diventa utile anche in questo caso.

Un esempio è il problema del 21° RMT, "I quattro picchetti":

In un prato, quattro amici piantano ciascuno un picchetto.
Antonio pianta il suo per primo.
Poi Bernardo pianta il suo a 41 m da quello di Antonio.
Clara pianta subito dopo il suo a 41 m da ciascuno dei due precedenti.
Infine, Daniela pianta il suo a 41 m da quello di Clara, ma a 71 m da quello di Bernardo.
A questo punto Daniela dice: *"Quando mi posiziono proprio davanti al mio picchetto e guardo quello di Clara, osservo che quest'ultimo nasconde quello di Antonio"*.
I suoi amici vanno a verificare e discutono:
Antonio: *"Non sono sicuro!"*.
Bernardo: *"Penso che con 41 m e 71 m non sia possibile"*.
Clara: *"Forse è perché il mio picchetto non è veramente dritto"*.

Potete dire se i tre picchetti di Daniela, Clara e Antonio sono veramente allineati?

Giustificate la vostra risposta.

I criteri di attribuzione dei punteggi sono, in questo caso, chiari e ben dettagliati:

4 Risposta corretta (no, non sono allineati) con una giustificazione "teorica" geometricamente corretta (non si penalizzano gli errori di scrittura, di unità, ...)
3 Risposta corretta con giustificazione poco rigorosa o con un anello mancante (per esempio nel primo caso non si dimostra che il triangolo ABD considerato è rettangolo, ma solamente che non verifica il teorema di Pitagora)
2 Risposta corretta con spiegazione a partire da proprietà della figura, ma inadeguata o insufficiente (per esempio solo il riconoscimento del triangolo equilatero e del triangolo isoscele)
o risposta basata su una costruzione molto precisa con gli strumenti del disegno geometrico e coerente (si accettano "sì" o "no" purché il disegno sia preciso e la scala sia indicata) (con le misure dell'enunciato, il disegno, pur preciso, non consente di essere certi della risposta)
1 Risposta (corretta o no) basata solo su una costruzione geometrica approssimativa
0 Risposta (corretta o no) senza spiegazione

o incomprensione del problema

In effetti, nel caso di questo problema, si attribuisce il punteggio "2" laddove gli allievi diano una spiegazione comunque coerente, ma che non è una giustificazione.

Le riflessioni precedenti portano alla necessità di distinguere la richieste di spiegare la propria risposta da quella di giustificare la propria risposta, richieste che non sono "intercambiabili".

È necessario, nel fare l'una o l'altra richiesta, essere ben consci del diverso livello sul quale si situano. La giustificazione, intesa come "dimostrazione", è corretta o non è corretta. La spiegazione argomentata, spesso ben più difficile da interpretare, può essere corretta, ma si situa ad un livello locale e non è generalizzabile.

7. Bibliografia

Anselmo B., Bisso C., Grugnetti L. (a nome del gruppo geometria dell'ARMT): 2011, 'Il rettangolo…non così evidente', *La Gazzetta di Transalpino*, n. 1.

Bisso, C., Grugnetti, L. (a cura di): 2006, 'Approccio al concetto di area con problemi del RMT', Gruppo di lavoro n° 8, "ellealquadrato", in R. Battisti, R. Charnay, L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds.), *RMT : des problèmes à la pratique de la classe/RMT: dai problemi alla didattica quotidiana, Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, Bourg-en-Bresse 2004, Arco di Trento 2005, ARMT, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en-Bresse, IPRASE Trentino, 268-276.

Duval R.: 1993, 'Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive ?', *petit x*, n. 31, 37-61.

Garuti R., Boero P., Lemut E., Mariotti M.A.: 1996. Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unit of theorems. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 113 – 120 Valencia, Spain: PME

Grugnetti L.: 2001, 'Dimostrazione» e prove empiriche in problemi di geometria del RMT' in Grugnetti, Jaquet, Crociani, Doretti, Salomone (Eds.) *RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici*, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino, Siena 1999 - Neuchâtel 2000, Università di Siena, IRDP di Neuchâtel, 25-34.

Marchini C.: 1999, 'Il problema dell'area', *L'educazione Matematica* vol. 1, n.1, pp.27 - 48

ANALYSE A PRIORI, ANALYSE A POSTERIORI, AU DELÀ DE LA DÉMARCHE CIRCULAIRE

Lucia Grugnetti

Résumé

Cet article développe quelques aspects de la relation présentée au 17° rencontre international de ARMT qui a eu lieu à Luxembourg ville en octobre 2013, dans le domaine de la table ronde sur la thématique « Analyse à priori, analyse à posteriori, une parcours circulaire ».
La première partie est dédiée à quelques réflexions jaillies de la comparaison entre l'analyse à priori et l'analyse posteriori du problème *RMT 2005*, sur la notion d'unité d'aire. Réflexions qui ont porté le groupe Géométrie plane de ARMT à la mise à point d'une série de nouvelles énoncées qui ont permis de confirmer les premières observations à posteriori et de mieux calibrer les nouvelles analyses à priori.
Dans la seconde partie elle est développée une réflexion sur la différence entre « explication » et « justification » lorsque il est demandé « Expliquées votre réponse » ou « Justifiées votre réponse », comme apparaît dans la plupart de les nôtre énoncés.

1. Introduction

Comme il est dit dans le document de discussion du thème de la rencontre du Luxembourg, *un problème du RMT est le fruit d'une longue élaboration, en plusieurs phases, accompagnées de réflexions, d'échanges et d'analyses « préalables » avant sa présentation aux élèves au cours d'une épreuve.*
L'idée d'origine du problème est analysée du point de vue de son intérêt mathématique, de son adaptation et de son accessibilité pour les élèves, de ses potentialités didactiques. Tous les choix à déterminer doivent tenir compte des conditions fixées par le cadre du RMT. Il s'agit ici pour chaque problème, de l'élaboration de son « analyse a priori ».
Après le découlement de chaque épreuve, on passe à l'attribution des points qui constitue l'anneau qui lie l'analyse a priori et l'analyse a posteriori qui suit. Cette dernière s'effectue au travers de la *relecture des copies, dégagée du souci d'attribution des points, pour identifier les démarches, obstacles et autres traces de la résolution du problème par les élèves. C'est à ce moment qu'on passe des hypothèses à leur vérification, de l'espace virtuel imaginé par l'adulte au terrain que l'élève lui restitue.*
(document de discussion du thème de la rencontre de Luxembourg).
L'aspect circulaire est illustré par le passage d'un stade à l'autre : on part de l'énoncé du problème sur lequel on construit, au travers d'une analyse a priori, une proposition d'attribution des points; une fois que le problème a été proposé aux élèves, on compare l'analyse a posteriori des copies avec l'analyse a priori précédente afin de l'améliorer en vue d'une réédition du problème duquel on était parti. Mais on peut aller au-delà, vers la préparation de nouveaux problèmes destinés à vérifier, par exemple, la permanence de certains obstacles et erreurs déterminés et aussi la manière de les surmonter selon l'âge des élèves à qui ils seront proposés. Et d'ici, le parcours se poursuit … pour des améliorations ultérieures de des expérimentations nouvelles.
Comme on le sait bien, les problèmes du RMT exigent des élèves une explication et parfois une justification des procédures qu'ils ont adoptées pour arriver à leurs réponses. Dans la préparation des analyses a priori, une attention particulière est portés à la différence entre « explication » et « justification », distinction qui sera l'objet de quelques réflexions dans la seconde partie de l'article.

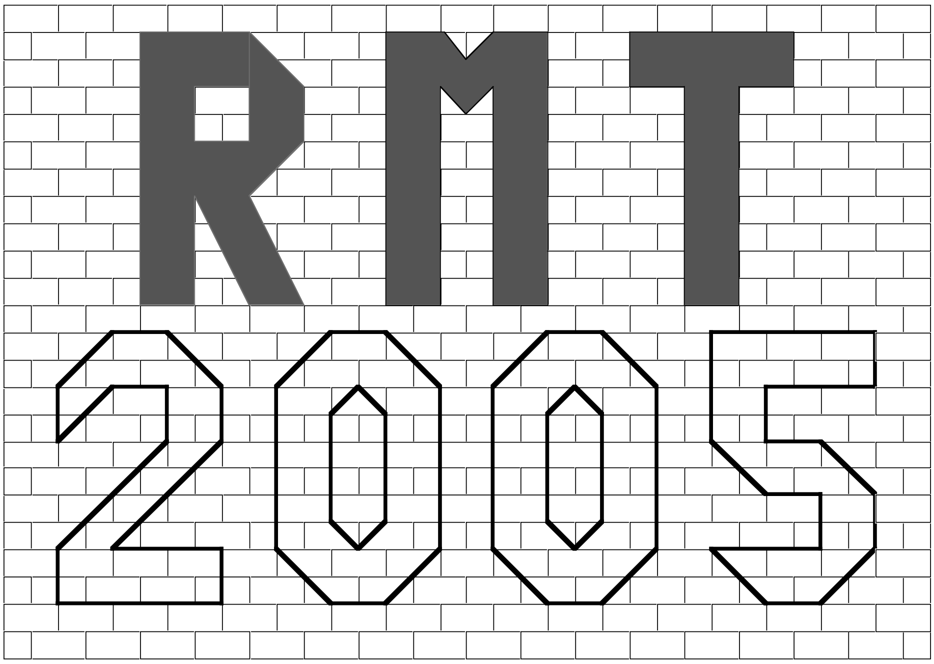
2. « RMT 2005 » et ses « petits frères »

Il était une fois un problème ayant comme titre "RMT 2005" qui, comme on peut bien l'imaginer, est né il y a 10 ans. Intrigant et riche au même temps. Sa forte personnalité a attiré plusieurs « chercheurs » du pays de Transalpie.
.

2. 1. Le Problème

RMT 2005 *(Cat. 3, 4)*

Sur le mur de l'école, on a peint l'intérieur des lettres R, M et T pour la prochaine finale du Rallye Mathématique Transalpin. Il reste encore à peindre l'intérieur des quatre chiffres de 2005.
Sophie va peindre, le « 2 » et le premier « 0 ». Marc peindra l'autre « 0 » et le « 5 ».



Qui utilisera le plus de peinture ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

2.2. Son analyse a priori

Domaine de connaissances

- Géométrie : approche de la notion d'aire, détermination de l'aire de figures par recouvrement et comptage d'unités

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que la quantité de peinture dépend de la grandeur des surfaces à recouvrir et qu'il faut trouver une (ou plusieurs) unités d'aire pour les comparer.
- Choisir, parmi les unités les plus évidentes : la « brique » (rectangle), la « demi-brique » (carré), le triangle ou demi-carré (qui permet d'avoir des nombres entiers d'unités).
- L'unité (ou les unités) choisie(s), organiser les comptages après avoir éventuellement dessiné le pavage complet en triangles ou en triangles et carrés.
- Se rendre compte qu'il est inutile de calculer l'aire des « 0 » et qu'il suffit de comparer celles du « 2 » et du « 5 ».
- Trouver les aires par comptage et conclure que c'est Marc qui utilisera le plus de peinture, en donnant par exemple, avec le carré comme unité : aire du « 2 » = 34 et aire du « 5 » = 36

Attribution des points

4 La réponse juste (Marc) avec l'aire des lettres « 2 » et « 5 » et les explications sur la manière de les obtenir (si les aires des « 0 » sont aussi indiquées, 42 carrés, sans erreur, on les accepte)

3 La réponse juste, avec les aires, mais sans indication sur la manière dont elles ont été obtenues
ou la réponse juste et expliquée, avec une erreur dans le calcul de l'aire de « 0 »

2 Une seule erreur dans le comptage des unités d'aire du « 2 » ou du « 5 », avec explications et réponse cohérente

1 La réponse juste (Marc), sans explications sur la détermination de l'aire (« on a vu que … »)

0 Incompréhension du problème ou prise en compte des périmètres, estimations visuelles

L'analyse a priori du problème montre en particulier, la où l'on parle de « choix de l'unité » (ou des unités) et de « organiser le comptage » qu'il a été conçu avec l'intention évidente de faire émerger la mesure à un niveau scolaire où les notions qui lui sont reliées sont en phase d'approche, sans aucun formalisme ni règles institutionnalisées.

Les élèves doivent se rendre compte que la quantité de peinture dépend de la grandeur de la surface à recouvrir, avec une première intuition du concept de fonction, et qu'il est nécessaire de trouver une manière de les

confronter : par recouvrement et découpage, par pavage au moyen d'une ou de plusieurs figures, et en cas de recours à une brique unité, par comptage.
En effet, on estime dans cette analyse a priori que le « choix d'une unité de mesure commune » est naturel pour les élèves. C'est évident que le comptage est une bonne aide arithmétique. Mais, en théorie, il serait possible de travailler géométriquement per décomposition et se rendre compte qu'une des surfaces n'est pas équivalente à l'autre.
Il faut encore souligner que la comparaison, comme la question du problème sont les deux de nature « qualitative ». Les réponses par découpages et superpositions doivent par conséquent être considérées positivement.

2.3. Quelques aspects de l'analyse a posteriori

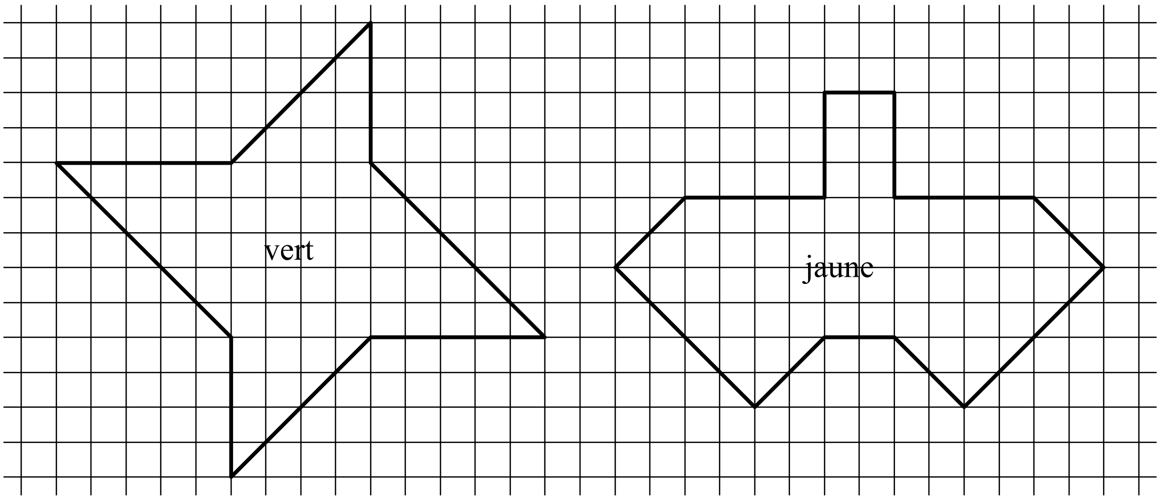
L'analyse a posteriori des très nombreuses copies des classes participantes, a fait émerger, de manière tout à fait évidente la difficulté des groupes d'élèves des différentes catégories (avec une fréquence plus élevée en catégorie 3 à quelques exceptions près), **à se rendre compte de la nécessité de chercher une unité de mesure opportune**, qui ne soit pas n'importe quelle partie de la représentation des chiffres sur le mur. En effet, sur un total de 176 copies de catégorie 3, le 52%, c'est-à-dire 92 groupes, ont résolu le problème en comptant les parties (les briques) sans se préoccuper de la différence de leur forme et de leur grandeur. En catégorie 4 ce sont le 39% des groupes, c'est-à-dire 85 groupes sur 218, qui ont procédé de la même manière.
Les réponses correctes (ou supposées correctes, lorsque l'explication n'est pas claire) représentent le 36% en catégorie 3 et le 40% en catégorie 4. Les stratégies sont celles prévues par l'analyse a priori.
Le réflexions qui ressortent de tels résultats montrent quelquefois clairement, pour ne pas dire souvent, que les analyses a priori de nos problèmes sont, peut-être inévitablement, influencées par une vision du problème qui est celle de l'adulte ! Et, en outre, d'un adulte qui pense que les seuls instruments que l'élève puisse mobiliser sont ceux prévus par les programmes scolaires !!
Les analyses a posteriori sont essentielles dans la mesure où elles déplacent la vision du problème du terrain de l'adulte à celui de l'élève.
Toutefois même l'adulte peut reconsidérer le problème pour une évolution utile de points de vue. Ceci est arrivé. Nous avons en effet observé que dans les analyse à priori et dans les attributions des points qui en découlent on accorde beaucoup plus d'attention aux matières de l'enseignement (calcul de l'aire) qu'aux potentialités du problème. Ceci peut être utile pour mettre en lumière une intuition de l'élève relative à l'évaluation qualitative des aires, qui peut avoir des connotations élémentaires (Marchini, 1999) ou théoriques en générant la relation « d'équidécomposabilité », un des pivots de l'approche de Hilbert. On aurait pu l'indiquer dans cette analyse a priori et en tenir compte pour les critères d'l'attribution des points.
En effet, dans le problème se « heurtent » deux aspects qui interviennent toujours en géométrie : le qualitatif et le quantitatif. La comparaison est « qualitative » ; la question du problème est « qualitative » ! pour qui découpe et superpose sans faire appel au comptage et cette méthode devrait avoir le maximum de points. Il suffit d'observer la monnaie de 2 euro : la partie jaune est plus petite que la monnaie entière ou autres figures dans lesquelles il n'est pas nécessaire de procéder par décomposition ou mesure pour donner un jugement de « survaleur ». Le choix judicieux des figures ne rend pas cet aspect évident, mais on ne peut exclure le découpage. Dans l'analyse à priori du problème on insiste sur le « quantitatif » en suggérant l'introduction d'une unité de mesure et d'un comptage. Mais en remontant dans le temps, on constate que l'œuvre d'Euclide « est manifestement imprégnée » de considérations qualitatives, alors que celle d'Archimede, peut-être du fait de sa formation d'« ingénieur » montre beaucoup d'exemples d'aspects quantitatifs.
En plus des analyses à posteriori des copies, des expérimentations sont conduites en classe (Bisso et al, 2006) par des membres du groupe géométrie de ARMT, groupe qui a proposé le problème « Feuilles mortes », inséré parmi ceux de la première épreuve du 18° RMT.

3. Un « nouveau » problème et ses analyses a priori e a posteriori

3.1. Le problème

FEUILLES MORTES (Cat. 3, 4, 5) 1e épreuve du18e RMT

Pour la fête de l'automne, on a décidé de décorer la salle de gymnastique de l'école avec des feuilles découpées dans du carton vert et avec des feuilles découpées dans du carton jaune.
Voilà le modèle des feuilles.



Lisa a découpé une feuille verte et Tom a découpé une feuille jaune.

Faut-il plus de carton pour la feuille verte ou faut-il plus de carton pour la feuille jaune ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

3.2. Son analyse a priori

Domaine de connaissances

- Arithmétique : comptage organisé
- Géométrie : carré, triangle demi-carré
- Grandeurs et mesures : aire, unités de mesure ou comparaison par superposition

Analyse de la tâche

Comprendre qu'il faut comparer les aires des deux figures.

- Dénombrer les carreaux et demi-carreaux un à un de chaque figure, (méthode sujette à des erreurs de comptage) puis effectuer les échanges nécessaires pour les compter selon une unité de mesure commune : en carreaux (ou demi-carreaux), 61 (122) pour la figure verte et 62 (124) pour la jaune. (Au cas où ce sont les « morceaux » qui sont comptés, sans tenir compte de leurs aires respectives, on obtiendrait 70 pièces pour la figure verte et 70 pour la jaune.)

Ou : décomposer les figures en rectangles, carrés et triangles et se rendre compte que les triangles observés sont des moitiés de carrés.

Reconstruire alors les carrés « entiers » pour en compter plus facilement les carreaux, par regroupement. Par exemple, observer que la figure verte est composée de deux triangles qui constituent un carré de 4 x 4, de deux triangles qui constituent un carré de 5 x 5 et d'un rectangle de 4 x 5, ce qui donne une aire de 16 + 25 + 20 = 61 (en carreaux). De même on peut regrouper les parties de la figure jaune en deux rectangles de 4 x 10 et 2 x 3 et quatre carrés de 2 x 2, ce qui donne une aire de 40 + 6 + 4 x 4 = 62 (en carreaux)

Ou : procéder par découpage d'une des deux feuilles pour paver l'autre et constater qu'il manque (ou qu'il reste) un morceau et en conclure que la feuille jaune a une aire plus grande.

Ce problème peut provoquer un conflit aire - périmètre et certains groupes peuvent comparer les figures en mesurant les longueurs de leurs côtés, ce qui conduirait à dire que la figure verte est plus grande. De même une confusion entre aire et « encombrement » (plus grande longueur intérieure, par exemple entre deux sommets de la figure) conduirait au même résultat.

Attribution des points

4 Réponse correcte (il faut plus de carton pour la figure jaune que pour la figure verte) avec le détail de la démarche utilisée (calculs, découpages, parties équivalentes mises en évidence ...)
3 Réponse correcte avec des explications incomplètes mais qui témoignent d'une procédure correcte
2 Réponse fausse mais témoignant d'une procédure correcte (par exemple avec erreurs de comptage dues à des difficultés dans les transformations des demi-carreaux en carreaux)
1 Début de raisonnement correct mais n'aboutissant pas aux déterminations des aires
ou réponse correcte (jaune) sans aucune justification ni détail de calcul
0 Incompréhension du problème ou comparaison des figures par détermination de leur périmètre ou comptage des pièces sans tenir compte de leur aire

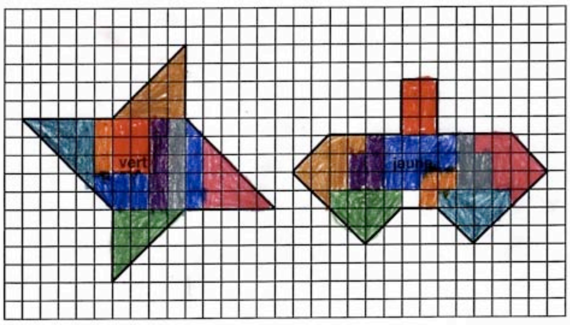
Forts des réflexions issues de l'expérience précédente, cette fois l'analyse a priori a tiré profit des aspects qualitatifs liés à la comparaison directe ou par décomposition et on a aussi mieux cherché à tenir compte du terrain de l'élève qui arrive à petits pas à la nécessité d'une mesure commune. Avec cette procédure on prévoir donc une activité de décomposition et de recomposition, comme la copie signalée plus loin le met en évidence. Il ne s'agit pas de pure habilité graphique mais on sous-entend, comme évoqué précédemment, d'aspects théoriques employés de Hilbert pour son système hypothético-déductif de la géométrie.
Dans l'analyse à priori on mentionne : « Dénombrer les carreaux et demi-carreaux un à un de chaque figure, (méthode sujette à des erreurs de comptage) puis effectuer les échanges nécessaires pour les compter selon une unité de mesure commune : en carreaux (ou demi-carreaux) »
En ce qui concerne le « 0 point», est évoqué, parmi d'autres, «comptage des pièces sans tenir compte de leur aire », outre le recours au périmètre pour confronter les figures.
Le fait d'accorder une attention majeure à de telles difficultés dans l'analyse à priori (analyse de la tâche et de l'attribution des points) n'implique pas évidemment une diminution des difficultés elles mêmes, mais on contribue ainsi à en signaler l'existence aux enseignants et chercheurs qui s'occuperont de l'analyse à posteriori, commencée avec l'attribution des points aux copies.

3.3. Quelques aspects de l'analyse a posteriori

Comme on le voit dans la rubrique attribution des points, le « 0 point » envisage le recours au périmètre pour comparer les figure ou au comptage des pièces sans tenir compte de leur aire.
L'analyse effectuée par les membres du groupe géométrie, au sein de leurs sections d'appartenance, et largement décrite dans Anselmo et al. (2011), montre que, en effet, le « 0 point » est toujours attribué pour l'une des deux difficultés signalées et non par « incompréhension du problème ».
Et, pour cette attribution, les pourcentages décroissent en passant de la catégorie 3, (49%, sur 290 copies) à la 4 (30%, sur 489 copies) et enfin à la 5 (22% sur 545 copies).
En ce qui concerne les erreurs sur la prise de conscience de la nécessité d'une unité commune, certaines copies, surtout de catégorie 3, aboutissent à un comptage des **70 pièces** (carrés et demi-carrés) qui conduit à une « égalité » des aires.
Ces résultats indiquent de toute manière que, en catégorie 5, les élèves rencontrent les difficulté et obstacles cités précédemment, même si sont moins fréquents. Il sera important de proposer d'autres problèmes similaires afin de vérifier encore l'existence de ces difficultés mais aussi pour chercher à comprendre à quel âge elles sont surmontées.
Le parcours qui va de l'analyse a priori à l'analyse posteriori, pour retourner à l'analyse a priori, de circulaire à l'origine prend en quelque sorte une forme en spirale : une spirale de parcours circulaires successifs.
Dans ce cadre, l'attention est centrée sur les difficultés et les obstacles, mais il est important de se rappeler que les analyses a posteriori des problèmes du RMT prennent en considération toute la gamme des réponses et des explications ; il arrive souvent qu'on se rende compte du nombre important de types de solutions prospectées par les élèves et auxquelles les adultes n'avaient pas pensé lors de la préparation de l'analyse de la tâche.
En voici un bel exemple :

5. FEUILLES MORTES (Cat. 3, 4, 5)

Pour la fête de l'automne, on a décidé de décorer la salle de gymnastique de l'école avec des feuilles découpées dans du carton vert et avec des feuilles découpées dans du carton jaune. Voilà le modèle des feuilles.



Lisa a découpé une feuille verte et Tom a découpé une feuille jaune.

Faut-il plus de carton pour la feuille verte ou faut-il plus de carton pour la feuille jaune ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

La feuille jaune a besoin de plus de carton.

On pourrait dire « Vivent les élèves »

4. Le dilemme « explication » - « justification »

4.1. Un exemple fameux

Pour introduire la problématique, je reprend ici un exemple fameux suggéré par **Carlo Marchini** : un *ingénieur anglais présente à la dernière impératrice de Chine, Tzu-Hsi, le projet d'une ligne de chemin de fer reliant Pékin et Canton, avec tous les détails de la construction et des coûts. L'impératrice l'écouta et lui dit que cette ligne ne pouvait pas être réalisée. L'ingénieur lui demanda si les données qu'il avait exposées n'étaient pas claires ou si l'impératrice avait des objections à formuler sur ses calculs ou s'il avait oublié quelque chose, où si elle désirait un autre parcours ...*
L'impératrice lui expliqua que son refus était dû au fait que Pékin est la Cité du Loup et Canton la Cité de la Chèvre et que construire une liaison directe entre ces deux cités signifierait qu'on allait offrir au loup des conditions favorables pour manger la chèvre.
L'impératrice a expliqué son raisonnement de manière incontestable, mais elle ne l'a certainement pas justifié mathématiquement, comme l'espérait l'ingénieur pour pouvoir le "démonter".

Et à Carlo de conclure:

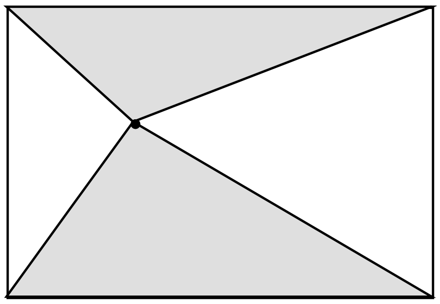
Je dirais qu'expliquer le raisonnement pourrait être une externalisation de ses propres conceptions.

La justification se rapporte aux concepts « objectifs » ou « interpersonnels » et peut éventuellement être réfutée, alors que dans l'explication de son propre raisonnement de type argumentatif le rôle principal est tenu par ses propres conceptions et, en ce sens, il est parfois plus difficile d'interpréter une explication qu'une justification.
La demande de justification d'un raisonnement ouvre la voie à une procédure de type démonstratif et, comme le dit Duval (1993) *Tout le monde est d'accord pour reconnaître qu'une argumentation n'est pas une démonstration. Ce qui les sépare tient à leurs contraintes respectives d'organisation. Pour qu'un raisonnement puisse être une démonstration, il est nécessaire qu'il soit un raisonnement valide. L'argumentation, au contraire, est un raisonnement qui n'obéit « pas à des contraintes de validité mais de pertinence».*
En effet, l'enchaînement des affirmations d'une argumentation se réfère à la logique naturelle alors que celle d'une démonstration se réfère à la logique formelle.
Il paraît donc important de ternir compte de cette différence substantielle lorsqu'on choisit de demander aux élèves de « justifier leur raisonnement », demande qui n'a pas de sens pour des élèves très jeunes qui n'ont pas encore au moins 13 à 14 ans.

Analysons un problème intéressant du RMT d'il y a plusieurs années (8e RMT, épreuve I) pour les catégories 7 et 8, dans lequel la demande de justifier la réponse est sensée et va dans la direction des premiers pas d'une démonstration.

4.2 Le problème "L'héritage"

Deux frères héritent d'un terrain de forme rectangulaire. Pour le diviser en deux parties de même aire, un voisin leur suggère de planter un piquet en un point quelconque du terrain et de le relier avec des piquets plantés aux quatre sommets du terrain.



Les deux parties seront-elles vraiment égales?

Justifiez votre raisonnement.

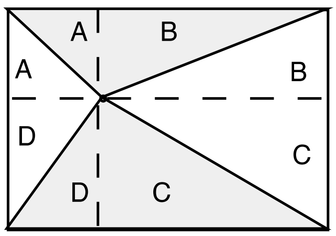
4.2.1. Son analyse a priori

Domaine de connaissances

- Géométrie plane: triangles et leurs mesure

Analyse de la tâche

- Comprendre que, si on trace les parallèles aux côtés par le point où est planté le piquet, indépendamment de son emplacement, la partie grise et la blanche sont toutes deux composées des quatre mêmes triangles A, B, C, D.
- Ou comprendre que pour tout point du rectangle, quatre triangles sont déterminés, ayant deux a deux comme base une des deux dimensions du rectangle et comme somme des hauteurs, l'autre dimension, et que la somme des aires (de deux triangles qui ont bases et hauteurs égales) ne change pas.



Evaluation [1]

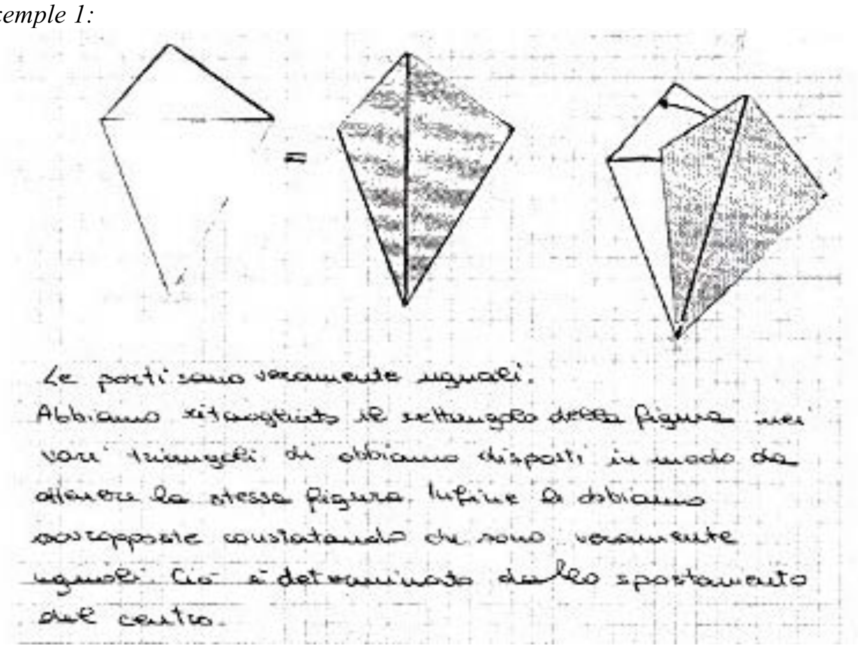
4 Réponse correcte avec procédé démonstratif (du type indiqué dans l'analyse de la tâche)
3 Réponse correcte à la question avec une erreur logique dans les explications
2 Réponse correcte avec recours à des exemples (le piquet au centre ou dans d'autres positions)
1 Réponse correcte avec recours à la mesure ou réponse correcte à la question sans aucune explication
0 Explications complètement erronée ou incompréhension du problème

4.2.2. Quelques aspects de l'analyse a posteriori en lien avec la problématique de la justification

Comment les élèves ont répondu à la demande « Jistifier votre raisonnemnet » dans le cas du problème « L'héritage » ?

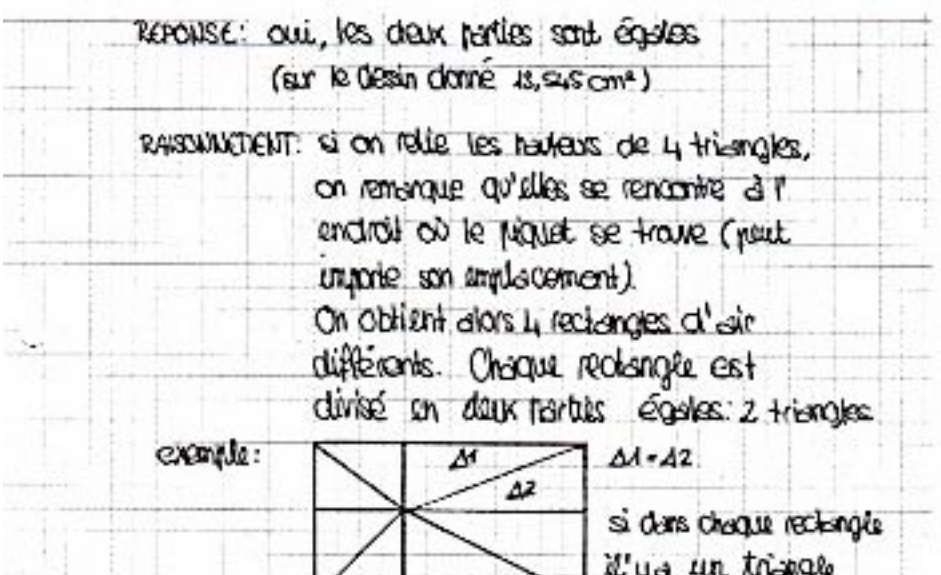
[1] À cette époque on parlait « d'évaluation », C'est à partir de l'édition susccessive qu'on a choisit les termes « d'attributionds points », expression plus compatible avec les exigences du RMT.

Exemple 1:



(*Le parties sont vraiment égales. Nous avons découpé le rectangle de la figure en différents triangles que nous avons disposés de manière à obtenir la même figure. À la fin, nous les avons superposés en constatant qu'ils sont vraiment égaux. Ceci est déterminé par le déplacement du centre.)*

Exemple 2:



Dans ce cas la justification est du type mentionné dans l'analyse de la tâche a priori.

Si l'on compare les deux exemples, bien quel les réponses sont toutes les deux correctes, le niveau des deux raisonnements est différent du point de vue conceptuel.

Dans le premier cas, comme on le voit, les élèves ont découpé le rectangle en quatre parties, deux blanches et deux grises et recomposé les parties de la même couleur pour obtenir deux quadrilatères à comparer. Ils n'ont cependant pas justifié formellement l'équivalence des deux figures. Ils se sont contentés d'une superposition, approximative par la force des choses. Il s'agit en effet d'une argumentation explicative de type local en ce sens qu'elle « fonctionne » pour ce cas mais ne s'étend pas aux considérations sur le choix du point où l'on plante le piquet qui peut être quelconque et conserve l'équivalence des parties.
La situation est différente dans le second exemple, où les élèves justifient de manière formelle l'équivalence. Dans une seconde partie de la copie, ils passent cependant aux mesures et calculent les aires des deux parties … pour se sentir plus sûrs.
En effet, les élèves de 13 à 14 ans se trouvent souvent dans une phase de passage de l'évidence d'un essai empirique obtenu pas un calcul sur un exemple à une justification formelle (Grugnetti, 2001).

4.3. Les quatre piquets

Pour ce qui concerne l'attribution des points, il faut que les critères soient clairement définis. Dans le problème « *L'héritage* », par exemple, le critère pour les « 3 points » est difficile à interpréter, en particulier lorsqu'il est confronté à celui des « 2 points » :
« 3 Réponse correcte à la question avec une erreur logique dans les explications
2 Réponse correcte avec recours à des exemples (le piquet au centre ou dans d'autres positions) »

Au cours des années, les attributions des points pour les problèmes du RMT ont aussi évolué, bien qu'il soit toujours difficile, voire impossible d'être exhaustif a priori.
Le rôle des analyses a posteriori est très utile et même indispensable de ce point de vue.

Le problème *Les quatre piquets* du 21^{e} RMT en est un bon exemple.

Les quatre piquets (Cat. 9, 10)

Dans une prairie, quatre amis plantent chacun un piquet.
Antoine plante le sien en premier.
Puis Bernard plante le sien, à 41 m de celui d'Antoine.
Clara plante alors le sien à 41 m de chacun des deux précédents.
Finalement, Danielle plante le sien, à 41 m de celui de Clara, mais à 71 m de celui de Bernard.
Elle dit alors : « *Quand je me place juste devant mon piquet et que je regarde celui de Clara, je remarque qu'il cache celui d'Antoine* ».
Ses camarades viennent vérifier et discutent :
Antoine : « *Je ne suis pas sûr* » !
Bernard : « *Je pense qu'avec 41 m et 71 m ce n'est pas possible* ».
Clara : « *C'est peut-être parce que mon piquet n'est pas vraiment planté droit* ».

Pouvez-vous dire si les trois piquets de Danielle, Clara et Antoine sont vraiment alignés ?
Justifiez votre réponse.

Les critères d'attribution des points sont, dans ce cas, clairs et bien détaillés :

Attribution des points

4 Réponse correcte (non, ils ne sont pas alignés) avec une justification « théorique » géométriquement correcte (on ne pénalise pas les fautes d'écriture, d'unités, …)
3 Réponse correcte avec justification peu rigoureuse ou avec un chaînon manquant (par exemple dans le premier cas, on ne démontre pas que le triangle ABD considéré est rectangle, mais seulement qu'il ne vérifie pas Pythagore)
2 Réponse correcte avec explications à partir de propriétés de la figure, mais inadéquates ou insuffisantes (par exemple seulement la reconnaissance du triangle équilatéral et du triangle isocèle)
ou réponse fondée sur une construction très précise avec les instruments de dessin géométrique, et cohérente (on accepte « oui » ou « non » pour autant que le dessin soit précis, que l'échelle soit indiquée) (avec les mesures de l'énoncé, un dessin ne permet pas d'être sûr de la réponse)
1 Réponse (correcte ou non) fondée seulement sur une construction géométrique approximative

0 Réponse (correcte ou non) sans explications
ou incompréhension du problème

En effet, dans le cas de ce problème, on attribue « 2 points » lorsque les élèves donnent une explication qui, bien que cohérente n'est pas une justification.

Les réflexions précédentes conduisent à la nécessité de distinguer la demande d'expliquer sa réponse de celle de justifier sa réponse ; demandes qui ne sont pas interchangeables.

Il est nécessaire de formuler l'une ou l'autre des demandes, en étant cependant bien conscient des différents niveaux où elles se situent. La justification envisagée comme « démonstration » peut-être correcte ou incorrecte. L'explication argumentée, souvent bien plus difficile à interpréter, peut être correcte mais elle se situe à un niveau « local » et non généralisable.

5. Bibliographie

Anselmo B., Bisso C., Grugnetti L. (a nome del gruppo geometria dell'ARMT): 2011, 'Il rettangolo…non così evidente', *La Gazzetta di Transalpino*, n. 1.

Bisso, C., Grugnetti, L. (a cura di): 2006, 'Approccio al concetto di area con problèmes del RMT', Gruppo di lavoro n° 8, "ellealquadrato", in R. Battisti, R. Charnay, L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds.), *RMT : des problèmes à la pratique de la classe/RMT: dai problèmes alla didattica quotidiana, Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, Bourg-en-Bresse 2004, Arco di Trento 2005, ARMT, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en-Bresse, IPRASE Trentino, 268-276.

Duval R.: 1993, 'Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive ?', *petit x*, n. 31, 37-61.

Grugnetti L.: 2001, '«Dimostrazione» e prove empiriche in problèmes di geometria del RMT' in Grugnetti, Jaquet, Crociani, Doretti, Salomone (Eds.) *RMT: evoluzione delle connaissances e valutazione dei saperi matematici*, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino, Siena 1999 - Neuchâtel 2000, Università di Siena, IRDP di Neuchâtel, 25-34.

Marchini C.: 1999, 'Il problème dell'area', *L'educazione Matematica* vol. 1, n.1, pp.27 - 48

RIPARTIAMO DA… 0 PUNTI[1]

Graziella TELATIN[2]

Introduzione

Ogni problema del RMT è studiato a lungo prima di vedere la luce. Se ne studia l'enunciato perché il contesto sia appropriato, comprensibile, universale, espresso in un linguaggio chiaro; perché le illustrazioni e i disegni presentati siano corretti e significativi, perché gli eventuali esempi siano adeguati e necessari; perché la domanda scaturisca dalla situazione presentata e non sia un'ingiunzione esterna. Questa è solo una parte del lavoro che ogni problema comporta, perché ognuno di essi è corredato da una ricca analisi a priori. In questa seconda parte sono comprese diverse voci: il compito matematico, dove si mette a fuoco, decontestualizzandolo, il contenuto matematico presente nel problema; l'analisi del compito, cioè come ci si immagina che i bambini delle categorie per le quali quel problema è stato studiato siano in grado di risolverlo, e l'attribuzione del punteggio.
In questo articolo ci occuperemo in modo particolare di quest'ultima rubrica.

Che scopo ha un'attribuzione del punteggio

Il RMT nasce come gara per le classi ed essendo una gara non può essere senza una "valutazione" che conduca ad una graduatoria. Ci sono due principi che hanno sempre ispirato l'attribuzione dei punteggi:

1. assegnare una scala di valori al modo in cui gli allievi ragionano, in relazione alla conquista dei saperi matematici, che si possa tradurre in un punteggio;
2. mettere in evidenza il valore di quello che gli allievi fanno, al di là della conquista della risposta giusta.

Quest'ultima rubrica si è, nel corso degli anni, rivelata sempre più importante. Per avere una valutazione dei problemi in quanto concorso è necessario porsi in un'ottica diversa da quella della didattica di classe che, nel valutare un compito, tiene conto del programma svolto, di quello che i ragazzi sanno e delle difficoltà che hanno. Gli insegnanti correttori che, al momento di attribuire il punteggio per poter stabilire chi sono i vincitori di quello che è comunque un concorso, si interrogano su quali sono state le strategie di risoluzione e si soffermano per capire il ragionamento degli alunni, chiedono delle indicazioni non equivocabili, di modo che i punteggi attribuiti siano simili per tutte le sezioni.
Se l'analisi del compito a volte non viene neanche letta, non si può fare a meno di interrogarsi su come gli alunni abbiano ragionato e confrontarsi su quali siano stati gli ostacoli che hanno impedito la risoluzione del compito.
Questa rubrica è stata perciò sempre più curata e si è cercato di essere sempre più chiari e precisi. L'indicazione che viene data a tutti gli insegnanti correttori deve essere univoca, facilmente comprensibile e il più possibile esente da interpretazioni personali. Si è capito che non bastavano indicazioni generiche, ma che fosse meglio dare, quando era possibile, per ogni punteggio attribuito, degli esempi che possano illuminare su quale sapere matematico si cela dietro a determinate risposte. Il punteggio non è certamente un voto, ha una finalità funzionale alla tipologia di prova che si deve superare (concorso), ma ha il valore aggiunto di farci porre delle domande sulla didattica di classe e di farci scoprire carenze o difficoltà della classe nella quale si opera.
Questo sforzo è stato premiato dal fatto che i punteggi si dimostrano sempre più affidabili e, soprattutto tra le sezioni più grandi, gli scarti di valutazione sono abbastanza contenuti. È comunque impossibile eliminare i piccoli scarti, dovuti al fatto che ogni gruppo di correttori interpreta, comunque, le indicazioni date secondo la propria sensibilità e le proprie conoscenze e convinzioni, per quanto le correzioni siano fatte con il massimo scrupolo.

Come si procede nell'attribuzione dei punteggi

Il punteggio previsto per la valutazione dei risultati dei nostri problemi va dai 4 punti, punteggio massimo, a 0 punti, punteggio minimo.

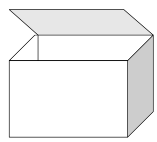
---

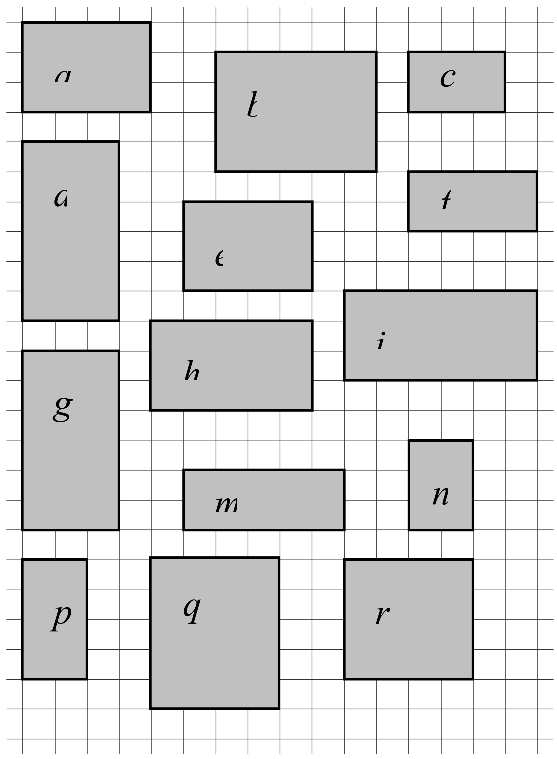
[1] Questo testo riprende una comunicazione relativa alla presentazione del tema del 17° incontro dell'ARMT : "Analisi a priori, analisi a posteriori, un percorso circolare " (Lussemburgo, 25 ottobre 2013).
[2] Sezione di Aosta

- Si attribuiscono 4 punti e 3 punti ai problemi dove, con diverse strategie, si è riusciti a trovare la giusta soluzione. La differenza tra le due valutazioni è determinata dalla capacità di spiegare come si è proceduto con delle giustificazioni di tipo matematico, distinguendo, a seconda dei livelli, tra capacità di giustificare, spiegare e verificare.
- Si attribuiscono 2 punti quando il ragionamento per risolvere il problema è corretto, ma vi sono degli errori di calcolo o di incapacità di tenere conto di tutti i vincoli del problema, o non si è completato il ragionamento.
- Si attribuisce 1 punto quando c'è un inizio di ragionamento corretto, ma ci si è fermati assai presto nel procedimento di soluzione.
- E 0 punti? 0 punti è incomprensione del problema oppure un numero talmente basso di soluzioni trovate da non essere significativo.

Se ogni punteggio è indicativo di conoscenze acquisite o di ostacoli incontrati cosa possiamo dire dei problemi che hanno una valutazione di 0 punti? È possibile trarre delle indicazioni da essi? Per cercare di trovare una risposta a queste domande ho analizzato le risposte ottenute da un certo numero di compiti del problema "Scatoline" 17°RMT 1 prova prob. n. 5, che avevano appunto ottenuto 0 punti.

SCATOLINE (Cat. 3, 4, 5)
Franco ha dei cartoncini che unisce con dello scotch per ottenere delle scatoline tipo questa:
Ogni cartoncino è una faccia della scatolina. Franco li utilizza così come sono, senza tagliarne via dei pezzi e senza piegarli. Ha già costruito parecchie scatoline, ma gli restano ancora i cartoncini che vedete in basso:





Quante scatoline può ancora fare con i cartoncini che gli restano?
Dite quali sono i cartoncini che gli serviranno e come avete fatto a trovarli.

Questo problema ha ottenuto dei risultati veramente molto bassi, soprattutto per quello che riguarda la cat. 3.
Nelle sezioni dove l'insieme delle tre categorie conta più di 50 classi, la media è di 1.2 (0.6; 0.7; 0.8; 1.0 in due sezioni; 1.2; 1.4 in due sezioni) e la percentuale delle categorie è così stabilita

	Cat. 3	Cat . 4	Cat . 5
0 punti	58%	46%	37%

Di fronte a risultati così deludenti rispetto alle nostre aspettative, sempre un po' troppo idealiste nel momento dell'analisi a priori, c'è da chiedersi:
"Cosa possiamo immaginare che sappiano i bambini che hanno 0 come punteggio? Qual è stato lo scoglio che ha reso così difficile risolvere questo problema? "
Per cercare di capire meglio come hanno ragionato gli alunni, mi sono concentrata sugli elaborati con valutazione 0 punti della cat. 3 delle classi di Rozzano (33), Riva del Garda (33), Parma (59), Suisse Romande (20), per un totale di 145 elaborati.
È stato inevitabile osservare che le diverse sezioni hanno interpretato in maniera un po' diversa le indicazioni di correzione che erano state fornite, ma come detto in precedenza, questo è inevitabile.
Non si vuole assolutamente quindi, in questa presentazione, criticare i criteri di attribuzione dei punti di queste sezioni.

Conoscenze necessarie

Per risolvere questo problema, bisogna avere un gran numero di conoscenze:
1. Bisogna sapere quante sono le facce di un parallelepipedo.
2. Bisogna sapere che le facce opposte sono congruenti.
3. Bisogna essere capaci di estrarre la lunghezza dei lati di ogni dimensione delle facce dalla rappresentazione bidimensionale (dal bidimensionale all'unidimensionale).
4. E soprattutto si deve essere capaci di immaginare come le facce si incernierano le une con le altre in un passaggio dal bidimensionale al tridimensionale (oppure si devono avere buone capacità manipolative di ricostruzione).

La familiarità dei bambini con scatole di vario tipo non assicura che tutte queste conoscenze siano state acquisite.
L'analisi degli elaborati ha permesso di classificarli in varie categorie.

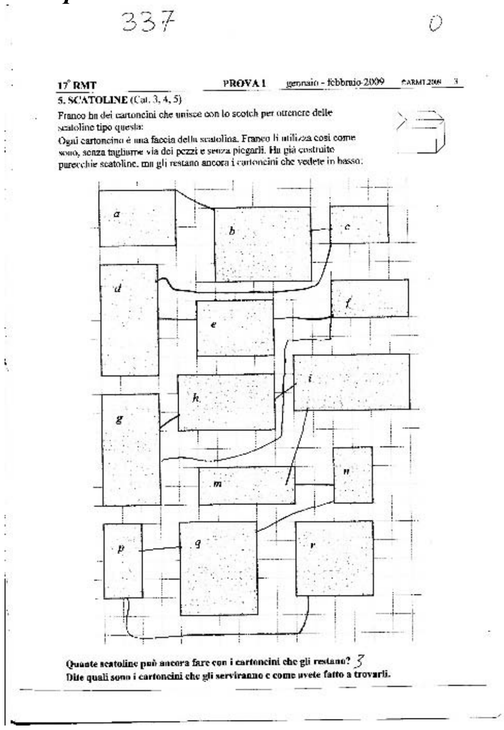
Fogli bianchi

È un numero limitato di gruppi (17 su 145 pari al 12% circa) che consegna il foglio completamente in bianco.
Non possiamo ricavare ovviamente nulla da questi elaborati, né dire se il problema è stato sì o no preso in considerazione, se la mancanza di soluzione è stata dovuta alla mancanza di tempo o all'incomprensione o all'incapacità.

Incomprensione del problema

È difficile stabilire quando si può parlare veramente di incomprensione del problema.
Penso che si possano definire così quelle soluzioni che non hanno nessun aggancio matematico con la problematica presentata.
L'esempio che segue mi sembra emblematico: questo gruppo ha unito le facce, mettendole in sequenza secondo l'ordine alfabetico delle lettere che le contraddistinguono.

Esempio 1


337 0

17° RMT PROVA 1 gennaio - febbraio 2009 ©ARMT 2008 3

5. SCATOLINE (Cat. 3, 4, 5)

Franco ha dei cartoncini che unisce con lo scotch per ottenere delle scatoline tipo questa:
Ogni cartoncino è una faccia della scatolina. Franco li utilizza così come sono, senza tagliarne via dei pezzi e senza piegarli. Ha già costruite parecchie scatoline, ma gli restano ancora i cartoncini che vedete in basso:

Quante scatoline può ancora fare con i cartoncini che gli restano? 3
Dite quali sono i cartoncini che gli serviranno e come avete fatto a trovarli.

"Abbiamo cercato ma non abbiamo trovato"

Anche per questa categoria di elaborati non possiamo dire quasi nulla, ma la dichiarazione esplicita che c'è stato un lavoro di ricerca ci rivela che il problema è stato preso in considerazione e che si sono fatti dei tentativi per risolverlo. A volte, vengono scritte delle parole chiave che ci fanno intuire verso dove si sono indirizzate le ricerche, come in questo esempio:
Abbiamo misurato…

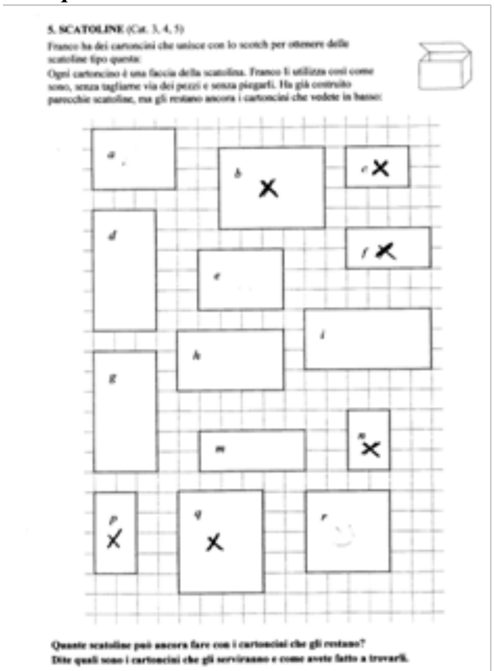
Un approccio aritmetico

Noi abbiamo capito che può fare altre 2 scatole. Perché la scatola è formata da 6 cartoncini e le rimangono 14 cartoncini e quindi 14 : 6 = 2 e allora sono 2.
I gruppi che hanno lavorato in questo modo non hanno preso in considerazione l'aspetto geometrico del problema. Hanno però evidenziato una conoscenza importante: è per loro **chiaro** che il numero delle facce di un parallelepipedo è 6. Questa conoscenza non è da sottovalutare perché, e lo dimostra l'analisi degli elaborati, il numero delle facce di un parallelepipedo è una conquista da parte degli alunni.

Cinque o sei facce indifferentemente

L'esempio che segue *(Esempio 2)* dimostra come la conoscenza che il numero delle facce di una scatola è 6 non sia sempre acquisito e, per un certo periodo, sia una conoscenza ancora non consolidata.
In questo esempio, il gruppo aggiunge a una scatola a sei facce un'altra a cinque facce, indifferente al fatto di presentare due scatole diverse una dall'altra (una non è un parallelepipedo).

Esempio 2



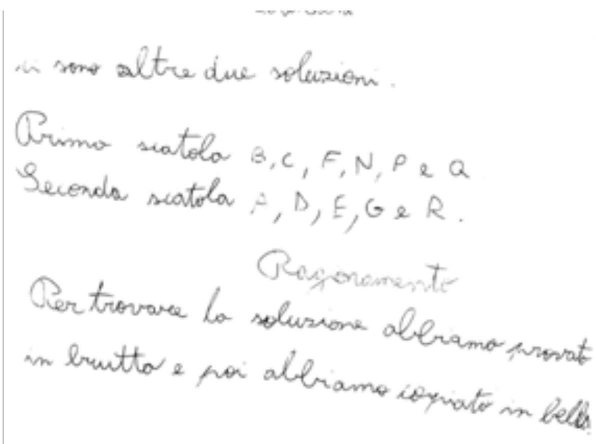
5. SCATOLINE (Cat. 3, 4, 5)

Franco ha dei cartoncini che unisce con lo scotch per ottenere delle scatoline tipo questa:

Ogni cartoncino è una faccia della scatolina. Franco li utilizza così come sono, senza tagliarne via dei pezzi e senza piegarli. Ha già costruito parecchie scatoline, ma gli restano ancora i cartoncini che vedete in basso:

Quante scatoline può ancora fare con i cartoncini che gli restano?

Dite quali sono i cartoncini che gli serviranno e come avete fatto a trovarli.



ci sono altre due soluzioni.

Primo scatola B, C, F, N, P e Q

Seconda scatola A, D, E, G e R.

Ragionamento

Per trovare la soluzione abbiamo provat in brutto e poi abbiamo copiato in bella

Se si analizzano meglio le due scatole si nota che, per la prima scatola, le facce *d* e *g* sono congruenti, come le facce *f* e *p* e poi *b* e *q*. Per questa prima scatola quindi si sono cercate tre coppie di facce che fossero congruenti; non si va oltre e non si controlla che sia possibile agganciarle le une alle altre.
Per la seconda scatola si scelgono *d* e *g* congruenti tra loro, *a* e *e* congruenti e si sceglie poi *r* come quinta faccia, forse perché un lato delle facce *a* e *e* misura come un lato di *r*.
Coesistono quindi nella risposta due tipi di scatole diverse.

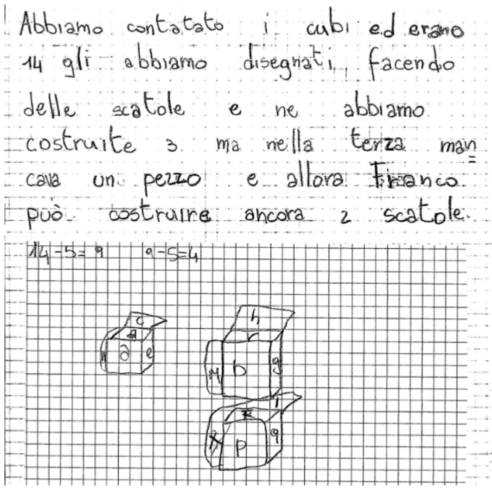
Cinque facce

Di fronte agli elaborati che presentano scatole con 5 facce possiamo porci alcune domande:

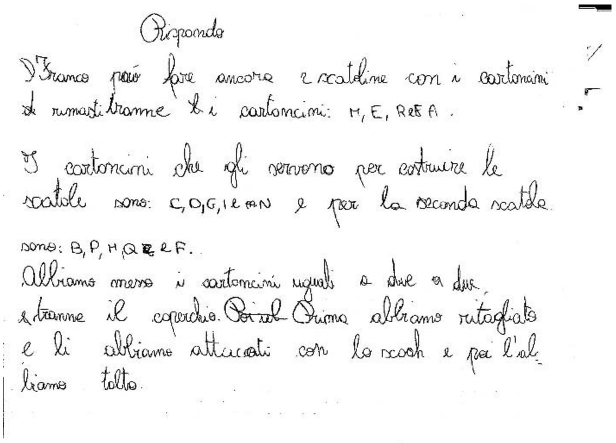
1. Non si è pensato al coperchio visto che una scatola, anche senza coperchio, adempie alla sua funzione di contenitore?
2. Oppure non si è pensato alla base in quanto si ha difficoltà a "vedere" la scatola nella sua interezza nello spazio?

Dobbiamo rimarcare il fatto, estremamente importante, che noi in questo problema abbiamo come immagine mentale il parallelepipedo, i bambini hanno la scatola! In una scatola non necessariamente c'è un coperchio e può avere tante forme diverse.
È vero che nel problema si proponeva un esempio, ma era in secondo piano e non veniva dato come modello sicuro da copiare; aveva comunque il coperchio e le quattro facce verticali visibili.
Inoltre, l'espressione utilizzata "Tipo questa" non ha lo stesso significato di "come questa".
I due diversi modi di concepire la scatola a 5 facce sono comunque indice di una conoscenza diversa e di una capacità diversa di vedere gli oggetti tridimensionali nello spazio.

Esempio 3


Abbiamo contatato i cubi ed erano 14 gli abbiamo disegnati, facendo delle scatole e ne abbiamo costruite 3 ma nella terza mancava un pezzo e allora Franco può costruire ancora 2 scatole.
14-5=9 9-5=4

Esempio 4


Risposta
Franco può fare ancora 2 scatoline con i cartoncini rimasti tranne i cartoncini: M, E, R e A.
I cartoncini che gli servono per costruire le scatole sono: C, D, G, I e N e per la seconda scatola sono: B, P, H, Q e F.
Abbiamo messo i cartoncini uguali a due a due, tranne il coperchio. Prima abbiamo ritagliato e li abbiamo attaccati con lo scoch e poi l'abbiamo tolto.

Il disegno mostra 3 scatole di 5 facce. Interessante il calcolo a sostegno di quanto si afferma: vi è la convinzione che le scatole siano di 5 facce e si incomincia subito a verificare che non vi saranno abbastanza cartoncini per costruirne tre. La rappresentazione delle scatole (cubi) è caratteristica di quella di alunni di questa età, che non padroneggiano ancora la prospettiva e sollevano la faccia che sta dietro e allargano quella di sinistra in modo da farle apparire sul disegno.

Esempio 4

Risposta
I cartoncini che gli servono per costruire le scatole sono: C, D, G, I e N per la seconda scatola sono: B, P, H, Q e F.
Abbiamo messo i cartoncini uguali a due a due, tranne il coperchio. Prima abbiamo ritagliato e li abbiamo attaccati con lo scoch e poi l'abbiamo tolto.

In questo caso c'è stata manipolazione: si è ritagliato, verificato che ci fosse congruenza tra almeno due facce e incollato con il nastro adesivo. L'indicazione "tranne il coperchio" può voler dire che il coperchio non è stato messo o che non è stata messa la base corrispondente al coperchio. In un caso come nell'altro, la scatola è immaginata solamente con cinque facce.
Per la prima scatola, le due coppie di facce (*d; g*) e (*c*; *n*) sono congruenti, c'è un errore su *i* che non corrisponde al coperchio.
Per la seconda scatola, le due coppie di facce (*b*; *q*) e (*p*; *f*) sono congruenti, c'è un errore su *h* che non corrisponde al coperchio.

Sei facce

I bambini per i quali era evidente che ci volevano 6 facce per ricostruire una scatola, hanno lavorato in diversi modi:

1. Alcuni hanno cercato tre coppie di facce uguali, ma non hanno poi saputo alternarle in modo corretto.
2. Altri si sono costruiti le facce congruenti di cui avevano bisogno, secondo il disegno che avevano in testa, utilizzando più cartoncini, che sono stati uniti insieme per fare una faccia sola.
3. Oppure, altri ancora, hanno tagliato i cartoncini presenti per ottenerne altri che fossero congruenti a quelli dati dal problema.

Esempio 5

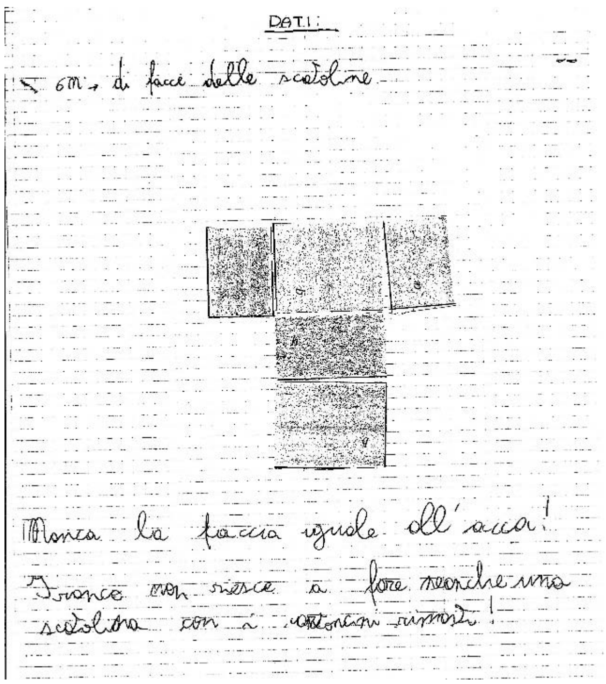
Risposta
Franco può fare due scatole.
Dati
Prima scatola = A, B, Q, E, P, F
Seconda scatola = E, B, A, R, P, F
Ragionamento
Noi siamo riusciti a risolvere il problema unendo i pezzi delle scatole. Noi non abbiamo messo i pezzi che avanzavano perché non erano di lunghezza uguale.

Questo gruppo ha cercato, per la prima scatola, tre coppie di facce congruenti (*b*; *q*), (*a*; *e*), (*p*; *f*), senza verificare se le dimensioni permettevano poi di costruire la scatola. Per la seconda scatola, hanno ripreso dei pezzi che avevano già utilizzato per la prima (*a, b, e, f, p*). Questo errore ci fa riflettere su un aspetto dei problemi del RMT. Quando, come in questo caso, c'è la possibilità che nel gruppo più bambini ritaglino i cartoncini e che si ritrovino quindi con una gran quantità di pezzi ritagliati, la consegna implicita del problema, che non si dovevano utilizzare le stesse facce per fare due scatole diverse, viene disattesa.

Questo gruppo ha poi cercato di formare delle coppie diverse di facce congruenti, ed ha sostituito un rettangolo *(q)* con un quadrato *(r)*, sbagliando evidentemente a contare i quadretti lungo il bordo.

Esempio 6

L'esempio che segue rientra nella categoria delle scatole con sei facce:



Manca la faccia uguale all'acca! Franco non riesce a fare neanche una scatolina con i cartoncini rimasti.

Questa ricostruzione è quasi perfetta.. L'impossibilità deriva dalla scelta iniziale di *b* e *q* (di dimensioni 4 × 5 che non permetterà la costruzione della scatola perché c'è solo un altro cartoncino di lunghezza 5, il cartoncino *h* precisamente, come l'hanno ben evidenziato gli alunni.

Nella nostra ricerca per capire cosa ci rivelano gli elaborati sulle conoscenze dei bambini, dobbiamo prendere atto che in questo gruppo c'è la consapevolezza del numero delle facce, della congruenza delle facce opposte e dell'incernierarsi delle facce nella costruzione tridimensionale.

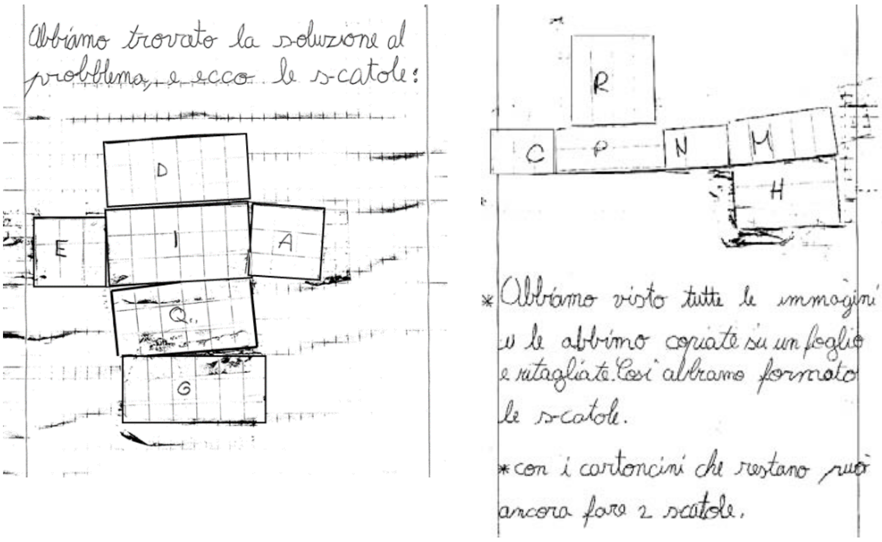
Esempio 7

Si costruiscono delle scatole a sei facce, manomettendo queste ultime.
Con i cartoncini che gli restano può fare una scatola composta da d e g ai due lati, poi b e q a destra e a sinistra, r + p sopra h + n sotto.

Unendo i pezzi con intelligenza siamo riusciti a fare 1 scatola.

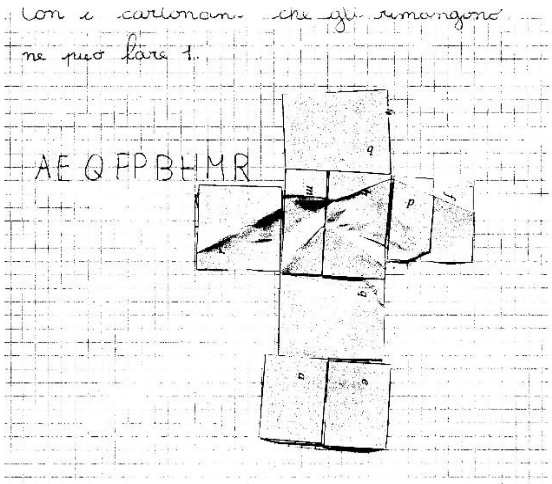
Si vuole fare una scatola a sei facce. Non si tiene conte della consegna e si ignora anche che le facce, per quanto ottenute con dei rattoppi, devono essere congruenti. $r + p$ dà un rettangolo di 6 × 4, mentre $h + m$ ne dà uno di 5 × 5. C'è molta approssimazione nella costruzione delle facce opposte.

Esempio 8



Anche questi esempi, presentati dallo stesso gruppo, ci mostrano la manomissione dei cartoncini per ottenere facce congruenti. Si sono ridotte le dimensioni delle facce *e, a* (da rettangoli 4 x 3 diventano quadrati 3 x 3) e si trasforma la faccia *q*, (da rettangolo 4 x 5 diventa un rettangolo 3 x 6). Nel fare la seconda scatola, non si è altrettanto scrupolosi e non tutte le facce opposte, anche se manipolate, risultano congruenti. I bambini dichiarano esplicitamente di avere guardato, rifatto e ritagliato. È evidente che nel rifare i vari rettangoli, l'idea che avevano in testa è prevalsa sulla realtà, non adattabile a quello che pensavano.

Esempio 9



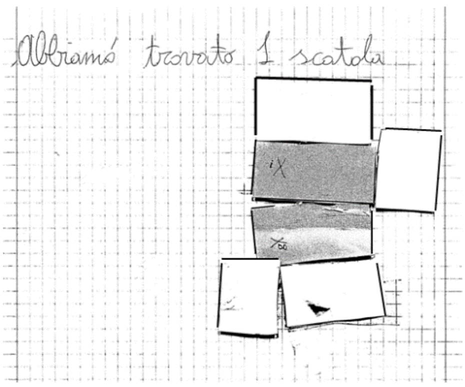
Questa scatola era chiusa con il nastro adesivo e l'ho riaperta per farla vedere nei dettagli.
Anche per questa scatola si è usata la tecnica del collage, facendo un particolare sforzo per ottenere facce congruenti: b e q sono congruenti; $p + f$ formano davvero una faccia congruente ad r, ma $m + h$ (5 × 5) è diverso da $a + e$ (6 × 4).
Non è evidente ai bambini (o non gliene importa niente) che i lati non combacino.

Non si è tenuto conto delle condizioni imposte dal problema, ma le scatole ottenute ci mostrano chiaramente che si è capito cosa si deve costruire, anche se non vengono rispettate le caratteristiche del parallelepipedo.

Concreto e astratto

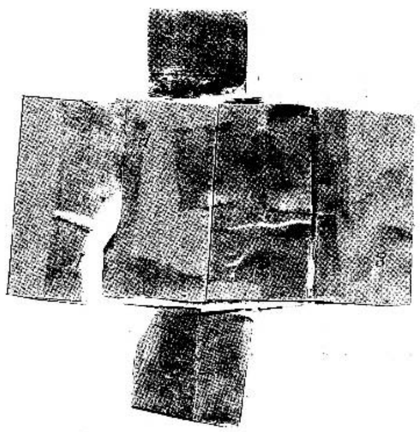
Questo problema, nell'intenzione degli autori, si prestava ad essere auto validante. Vi sono i cartoncini da ritagliare; è sufficiente ritagliarli, metterli vicini e si "vede" se possono stare insieme oppure se non si adattano gli uni agli altri.
In effetti le cose non sono andate così (per gli elaborati con 0 punti). Nei due esempi che seguono risulta evidente che il fatto che i lati dei cartoncini che sono accostati debbano avere la stessa lunghezza non disturba, né condiziona i bambini.

Esempio 10



I lati comuni dei cartoncini *i, g, d*, sono della stessa lunghezza, ma quelli di *h* hanno delle lunghezze diverse. I lati dei cartoncini *a* e *e* sono isometrici, ma non corrispondono a quelli ai quali sono accostati. Ciò nonostante, anche questa scatola era chiusa (è stata aperta per vederla nel dettaglio), per cui, per i bambini era evidentemente una scatola fattibile.

Esempio 11



In quest'ultimo esempio, si vede bene che le due basi vengono messe in modo tale da rendere impossibile la chiusura della scatola. Sembra quasi che, nel passaggio dal tridimensionale al bidimensionale, si perdano, visto che non sono più necessarie, le relazioni di vicinanza delle varie facce.

Cosa fare

Molti tra gli elaborati analizzati mostrano che i bambini sanno già delle cose che riguardano le caratteristiche di una scatola/parallelepipedo. È però una conoscenza che non ha ancora riflettuto su quali

sono le relazioni spaziali delle quali bisogna tenere conto, una conoscenza piuttosto grossolana, che riposa ancora sulla fantasia dei bambini che di uno scatolone fanno una macchina e di cinque cartoncini fanno una scatola. Per far sì che questa conoscenza, da un'idea ancora nebulosa di come è fatta una scatola, passi alla consapevolezza di com'è fatto un parallelepipedo da un punto di vista matematico, c'è un lungo lavoro da fare in classe. Bisogna assolutamente partire dalla raccolta di materiale concreto (scatole), da delle classificazioni, dalla manipolazione (scomposizione e ricostruzione di scatole), dalle impronte delle facce, dal ricoprire una scatola o ripassare gli spigoli con del nastro adesivo colorato, ecc… .Tutto quel lungo lavoro che ogni insegnante ha nel proprio bagaglio didattico. Bisogna inoltre soffermarcisi a lungo, senza fretta, ma è altrettanto necessario far confrontare e discutere in un continuo lavoro di riflessione su quello che si sta facendo per portare alla scoperta delle conoscenze matematiche che sono sottointese a questa attività. Alla fine è assolutamente necessario verbalizzare e istituzionalizzare le conoscenze acquisite.
Se tutto questo lavoro non è stato fatto in precedenza, questo problema può essere uno stimolo per svilupparlo; può essere quindi, come capita a tanti problemi del RMT, una scintilla che permette di accendere la curiosità per sviluppare un percorso di acquisizione di alcune delle caratteristiche del parallelepipedo.

Conclusioni

Come si è visto, l'analisi a posteriori dei problemi rivela spesso degli aspetti relativi alle conoscenze degli alunni che non si erano presi in considerazione in partenza. È questo esame degli elaborati che ci permetterà di elaborare delle varianti o delle sperimentazioni complementari dove le consegne non saranno così cariche di dati impliciti, dove i compiti saranno adattati meglio agli alunni delle categorie coinvolte.
Al di là dello "svolgimento circolare" del tema dell'incontro, in questo problema, in particolare, l'analisi degli elaborati con punteggio 0 punti ha messo in luce non solo gli aspetti negativi dell'incomprensione del problema, ma anche gli ostacoli, le difficoltà e le conoscenze che i bambini già hanno sulla costruzione di una scatola/parallelepipedo. Non sempre e non tutti i problemi sono così rivelatori, ma vale la pena, lì dove ci si sarebbero aspettati risultati migliori, andare a vedere quali sono stati gli ostacoli che hanno impedito la risoluzione del problema. È assolutamente necessario cercare di capire quali sono le operazioni mentali fatte effettivamente dagli alunni perché, se si vuole costruire qualcosa, bisogna comunque partire da quello che gli alunni già sanno.

Indicazioni bibliografiche

Per chi volesse approfondire il discorso della valutazione dei problemi del Rally, segnalo gli Atti dei Convegni di Siena 1999 e Neuchâtel 2000 dedicati a questo aspetto.
A cura di L. Grugnetti, F. Jaquet, C. Crociani, L.Doretti, L. Salomone *Atti Siena 1999, Neuchâtel 2000, RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici* Università di Siena Dipartimento di Matematica "Roberto Magari", IRDP Neuchâtel, Tipografia "Tecnoprint" Cagliari.

REPARTONS DU « 0 POINT »[1]

Graziella Telatin[2]

Introduction

Chaque problème du RMT est soumis à un long processus d'élaboration avant de voir le jour. On étudie attentivement son énoncé pour que le contexte soit approprié, compréhensible, universel, exprimé dans un langage claire; pour que les illustrations et les dessins présentés soient corrects et significatifs, pour que les exemples éventuels soient adéquats et nécessaires, pour que la demande découle de la situation et ne soit pas une injonction externe. Tout ceci n'est encore qu'une partie du travail exigé par chaque problème ; chacun d'entre eux est soumis à une analyse a priori approfondie. Cette seconde étape comprend différentes rubriques : l'aspect mathématique où l'on met en évidence, en le décontextualisant, le contenu mathématique du problème, l'analyse de la tâche, c'est-à-dire la manière dont on imagine que les enfants des catégories pour lesquelles le problème a été choisi puissent le résoudre et finalement les critères d'attribution des points.
Dans cet article, nous nous occuperons en particulier de cette dernière rubrique.

Quel est le but d'une attribution des points

Le RMT est né comme confrontation entre classes et, en tant que concours, ne peut éviter une « évaluation » qui conduit à un classement. Deux principes ont toujours inspiré l'attribution des points :

- définir une échelle de valeurs de la manière dont les élèves raisonnent, liée à la conquête des savoirs mathématiques, qui peut se traduire par des points ;
- attribuer une valeur à ce que font les enfants, au-delà de l'accession à la bonne réponse.

Cette dernière rubrique s'est révélée, au cours des années, de plus en plus importante. Pour évaluer des problèmes dans le cadre d'un concours, il est nécessaire de se placer dans une optique différente de celle de la didactique de classe qui dans son évaluation, tient compte du programme suivi, de ce que les élèves savent et des difficultés qu'ils rencontrent. Au moment de l'attribution des points afin de pouvoir déterminer qui sont les vainqueurs, les enseignants qui jugent les copies s'interrogent sur les stratégies de résolution et prennent du temps pour comprendre le raisonnement des élèves, ont besoin d'indications non équivoques afin que les points attribués soient les mêmes pour toutes les sections.
Si parfois l'analyse de la tâche n'est même pas lue, on ne peut faire à moins de se demander comment les enfants ont raisonné et de se demander quels sont les obstacles qui ont empêché la résolution.
On a accordé ainsi toujours plus de soin à la rédaction de cette rubrique et on a cherché à être de plus en plus clair et précis. La rédaction des critères donnée à tous les enseignants correcteurs doit être univoque, facilement compréhensible et exempte d'interprétations personnelles.
On a compris que des indications génériques ne suffisent pas toujours et que, lorsque c'est possible il vaut mieux les donner sous forme d'exemples qui illustrent les savoirs mathématiques correspondant aux réponses déterminées. Les points ne sont pas des notes, ils ont une fonction spécifique au concours mais ils ont une valeur supplémentaire du fait qu'ils posent des questions sur la didactique de classe et font découvrir des carences ou des difficultés de la classe dans laquelle on opère.
Cet effort a été récompensé du fait que l'attribution des points est de plus en plus fiables, ce qui se remarque par les écarts réduits entre les scores des sections avec des grands effectifs. Il est de toute façon impossible d'éliminer les petits écarts, dus au fait que chaque groupe de correcteurs interprète, de toute façon, les critères selon sa sensibilité et ses connaissances et convictions, bien que les corrections soient faites avec le plus grand soin.

[1] Ce texte est tiré d'un exposé pour la présentation du thème de la 17e rencontre de l'ARMT : « Analyse a priori, analyse a posteriori, une démarche circulaire » (Luxembourg, 25 octobre 2013.
[2] Section Aosta

Comment se fait l'attribution des points

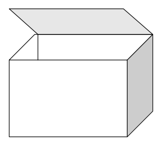
Les points prévus dans nos attributions vont d'un maximum de 4 à un minimum de 0.

- On attribue 4 points ou 3 points aux copies avec la réponse correcte. La différence entre les deux attributions est déterminée par la qualité des récits des élèves qui, selon leurs niveaux ont expliqué, vérifié ou justifié leurs dont les élèves ont expliqué leurs réponses.
- On attribue 2 points lorsque le raisonnement est correct mais qu'il y a une faute de calcul ou une contrainte non prise en compte ou lorsqu'il n'y a pas d'explication.
- On attribue 1 point pour un début de raisonnement correct, mais avec une procédure de résolution qui n'est pas conduite jusqu'à la solution.
- Et 0 point ? 0 point correspond à l'incompréhension du problème à quelques éléments de réponse ne pouvant pas être considérés comme significatifs.

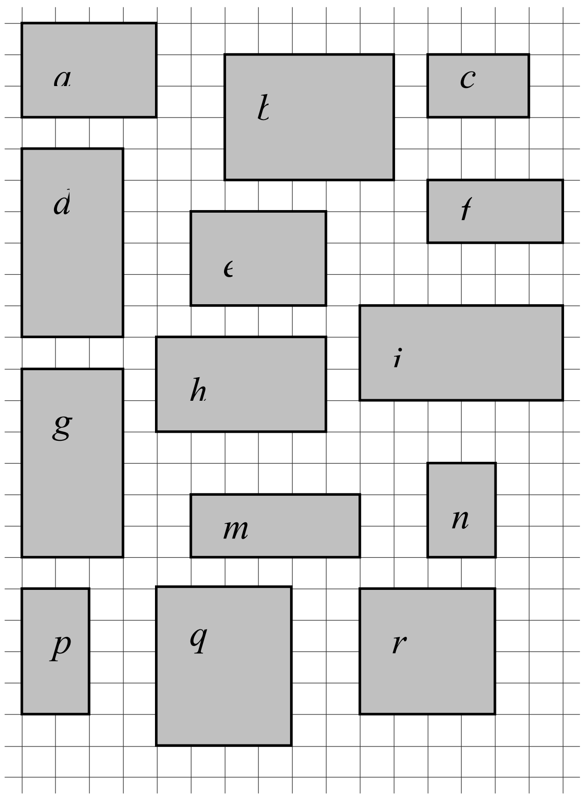
Si chaque attribution de 1 à 4 points donne une indication sur les connaissances acquises ou la présence d'obstacles rencontrés, que pouvons-nous dire des copies qui ont reçu 0 point ? Est-il possible d'en tirer des renseignements ? Pour chercher à répondre à cette question j'ai analysé les réponses obtenues sur un certain nombre de copies du problème des « Boîtes » du 17^e RMT I. 5, qui avaient précisément obtenu 0 point.

BOÎTES (Cat. 3, 4, 5)

Franco assemble des cartes avec du papier collant pour obtenir des boîtes de ce genre :



Chaque carte est une face de la boîte. Franco les utilise comme elles sont, sans les découper et sans les plier. Il a déjà construit plusieurs boîtes, mais il lui reste encore les cartes que vous voyez ci-dessous :



Combien de boîtes pourra-t-il encore construire avec les cartes qui restent ?
Dites quelles sont les cartes qui lui serviront.

Ce problème a obtenu des résultats vraiment très bas, en particulier en catégorie 3.
Pour les sections dont l'effectif des participants des trois catégories est supérieur à 50 classes, la moyenne des points obtenus est de 1,2 (0,6 ; 0,7 ; 0,8 ; 1,0 deux sections ; 1,2 ; 1,4 deux sections), dont les pourcentages s'établissent ainis :

	Cat. 3	Cat . 4	Cat . 5
0 points	58%	46%	37%

Devant des résultats aussi décevants par rapport à nos attentes, toujours un peu trop idéalistes au moment de l'analyse a priori, on peut se demander :
« Que pouvons-nous imaginer que sachent les enfants qui dont les copies ont reçu 0 point ? Quel a-t-il été l'obstacle qui leur a rendu aussi difficile la résolution de ce problème ? »
Pour chercher à mieux comprendre comment les élèves ont raisonné, je me suis concentrée sur les 145 copies ayant reçu 0 point de la catégorie 3 des classes de Rozzano (33), de Riva del Garda (33), de Parme (59), de Suisse Romande (20).
Des différences d'interprétation des critères de correction ont été évidemment observées d'une section à l'autre mais, comme je l'ai mentionné auparavant, ces petites divergences sont inévitables et mon propos n'est pas, au cours de cette présentation, de critiquer les critères d'attribution des points de ces sections.

Les connaissances nécessaires

Pour résoudre ce problème, il faut faire appel à un grand nombre de connaissances :
1. Il faut savoir combien de faces a un parallélépipède.
2. Il faut savoir que les faces opposées sont isométriques.
3. Il faut être capable d'extraire les longueurs des côtés de chacune des faces de leurs représentations en deux dimensions (passage du bidimensionnel à l'unidimensionnel).
4. Et surtout il faut être capable d'imaginer comment les faces se juxtaposeront les unes avec les autres dans le passage du bidimensionnel au tridimensionnel (ou d'avoir de bonnes capacités de manipulation et de reconstruction).

La familiarité des enfants avec les boîtes de différentes formes n'assure pas que toutes ces connaissances soient acquises.
L'analyse des copies a permis de les classer selon les différentes catégories qui suivent.

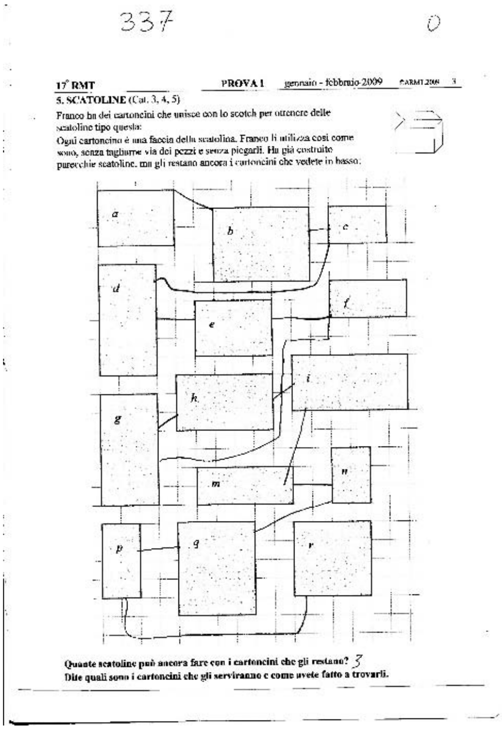
Feuille blanche

On ne peut rien en tirer, mais seulement un petit nombre de groupes (17 sur 145 c'est à dire à peu près le12%) rend la feuille sans rien écrire.
Nous ne pouvons évidemment rien en tirer, ni dire si le problème a été pris en considération ou non, ni si l'absence de solution a été dû au manque de temps ou à l'incompréhension ou à l'incapacité.

Incompréhension du problème

Il est difficile d'établir quand on peut vraiment utiliser les termes d'incompréhension du problème. Je pense qu'on peut définir ainsi les solutions qui n'ont aucune connexion mathématique avec la problématique présentée. L'exemple du groupe qui a réuni les faces, en les disposant dans l'ordre alphabétique des lettres qui les désignent me paraît emblématique de cette incompréhension. (Voir page suivante, *Exemple 1*)

Exemple 1



337 0

17° RMT PROVA I gennaio - febbraio 2009 ©ARMT 2008 3

5. SCATOLINE (Cat. 3, 4, 5)

Franco ha dei cartoncini che unisce con lo scotch per ottenere delle scatoline tipo questa:

Ogni cartoncino è una faccia della scatolina. Franco li utilizza così come sono, senza tagliarne via dei pezzi e senza piegarli. Ha già costruite parecchie scatoline, ma gli restano ancora i cartoncini che vedete in basso.

Quante scatoline può ancora fare con i cartoncini che gli restano? 3

Dite quali sono i cartoncini che gli serviranno e come avete fatto a trovarli.

« On a cherché, mais on n'a pas trouvé »

Pour cette catégorie de copies, nous ne pouvons rien dire mais l'affirmation explicite qu'il y a eu un travail de recherche continue nous fait comprendre que le problème a été pris en considération et qu'il y a eu des tentatives de recherche.
Parfois, des mots-clés nous font entrevoir où se sont orientées les recherches comme dans cet exemple : *Nous avons mesuré …*

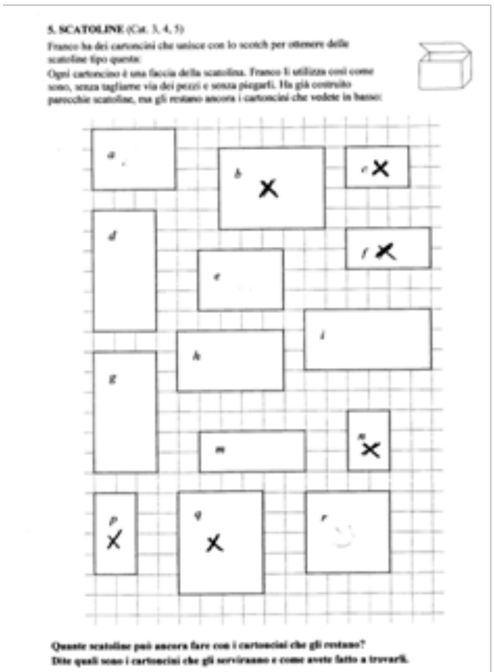
Une approche arithmétique

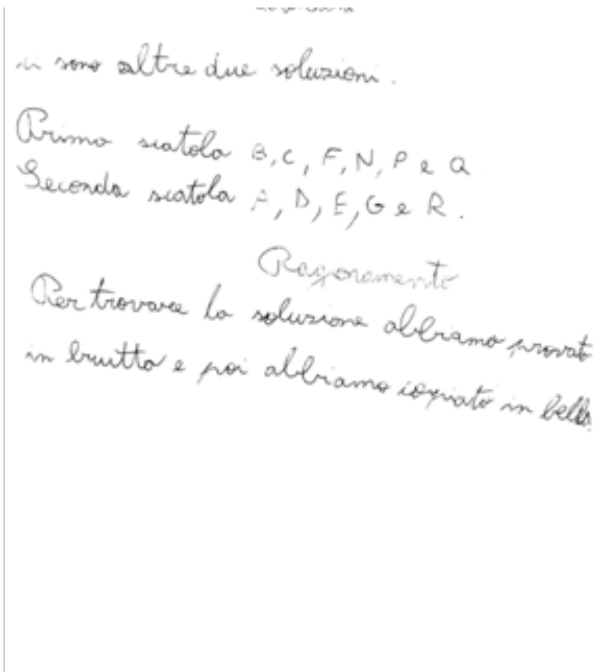
Nous avons compris qu'on peut faire deux autres boîtes car la boîte est formée de 6 faces et comme il reste 14 cartes donc 14 : 6 = 2 et alors il y en a 2.
Les groupes qui ont travaillé ainsi n'ont pas pris en considération l'aspect géométrique du problème. Ils ont cependant clairement affirmé que le nombre des faces d'un parallélépipède est 6. Cette connaissance n'est pas à sous-estimer comme le montre l'analyse des copies : le nombre des faces d'un parallélépipède est une conquête pour les élèves.

Cinq ou six faces, indifféremment

L'exemple qui suit (*Exemple 2*) montre que la connaissance du nombre des faces d'une boîte, 6, n'est pas toujours acquise de manière permanente et que, pour une certaine période, elle devra être encore consolidée.
Dans cet exemple, le groupe ajoute à une boîte à six faces une autre à cinq faces, sans se rendre compte que les deux sont différentes (l'une n'étant pas un parallélépipède).

Exemple 2





(Trad : *Il y a deux autres solutions. Première boîte B, C, F, N, P et Q. Seconde boîte A, D, E, G et R. Raisonnement. Pour trouver la solution nous avons essayé en brouillon et puis nous avons écrit sur la bonne feuille.)*

Si on analyse attentivement les deux boîtes on remarque que, pour la première boîte, les faces *d* et *g* sont isométriques, comme les faces *f* et *p* et ensuite *b* et *q*. Pour cette première boîte on a donc cherché trois couples de faces qui étaient isométriques ; on ne va pas au-delà et on ne contrôle pas s'il est possible de les accrocher les unes aux autres.
Pour la seconde boîte on choisit *d* et *g* isométriques, *a* et *e* isométriques et on choisit ensuite *r* comme cinquième face, peut-être parce qu'un côté des faces *a* et *e* a le même mesure qu'un côté de *r*.
Coexistent donc dans la réponse deux types de boîtes différentes.

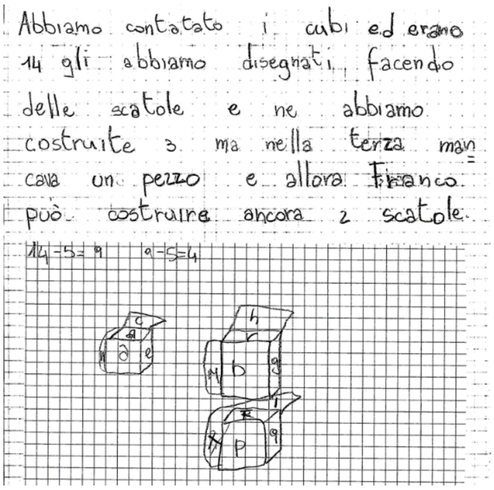
Cinq faces

Pour les copies qui ne présentent que des boîtes à cinq faces, on peut se poser deux questions à propos du couvercle et de la base :

- Ne pense-ton pas au couvercle parce qu'une boîte, même si elle n'a pas de couvercle, remplit sa fonction de récipient ?
- Ou ne pense-t-on pas à la base parce qu'il est difficile de « voir » entièrement la boîte dans l'espace ?

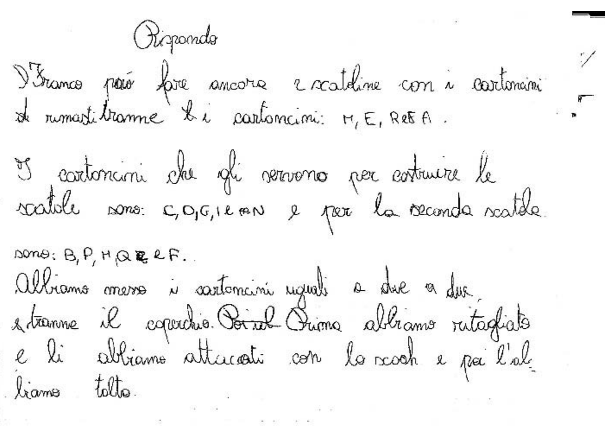
Il faut relever ici le fait extrêmement important que notre image mentale d'adulte est le parallélépipède et que celle des enfants est la boîte, qui n'a pas nécessairement un couvercle et peut avoir des formes très diverses. Il y avait bien un exemple dans l'énoncé, mais au second plan, qui n'était pas donné comme modèle à suivre avec, cependant, le couvercle et les quatre faces verticales visibles.
On peut ajouter encore que l'expression utilisée, « de ce genre », n'a pas le même sens que « comme celle-ci ».
Les deux différentes manières de concevoir une boite à cinq faces donnent cependant un indice de diversité de connaissances et de diversité des capacités à voir un objet de l'espace tridimentionnel.

Exemple 3


Abbiamo contatato i cubi ed erano 14 gli abbiamo disegnati, facendo delle scatole e ne abbiamo costruite 3 ma nella terza man cava un pezzo e allora Franco può costruire ancora 2 scatole.

14-5=9 9-5=4

Exemple 4


Risposta

Franco può fare ancora 2 scatoline con i cartoncini rimasti tranne i cartoncini: M, E, R e A.

I cartoncini che gli servono per costruire le scatole sono: C, D, G, I e N e per la seconda scatola sono: B, P, H, Q e F.

Abbiamo messo i cartoncini uguali a due a due tranne il coperchio. ~~Poi~~ Prima abbiamo ritagliato e li abbiamo attaccati con lo scoch e poi l'abbiamo tolto.

Traduction de *l'exemple 3* : *Nous avons compté les cubes* (confusion à relever entre cube et rectangle), *il y en a 14. On les a dessinées en faisant des boîtes et nous en avons construit 3 boîtes, mais dans a troisième il manque une pièce et alors Franco peut construire encore deux boîtes. 14 – 5 = 9, 9 – 5 = 4*

Le dessin montre trois boîtes de cinq faces. Il est intéressant de voir que le calcul soutient la conviction que chaque boîte a cinq faces et que la vérification qui suit montre qu'il n'y aura pas assez de cartes pour en construire trois. La représentation des boîtes (cubes) est caractéristique de celle d'élèves de cet âge qui ne maîtrisent pas encore la perspective en relevant la face arrière et dépliant celle de gauche afin de les faire apparaître sur le dessin.

Traduction de *l'exemple 4* **:**.

Réponse

Les cartes qui lui servent pour construire la boîte sont : C, D, G, I et N et pour la seconde boîte ce sont: B, P, H, Q e F.

Nous avons pris les cartons égaux deux à deux, sauf pour le couvercle. On a commencé par les découper puis on les a collés avec du scotch et puis on l'a retiré.

Dans ce cas, il y a eu manipulation : on a découpé, vérifié les isométries d'au moins deux faces et collé avec du papier collant.

L'indication « sauf pour le couvercle» peut vouloir dire que le couvercle n'a pas été mis ou que la base correspondante au couvercle n'a pas été mise. Dans un cas comme dans l'autre, la boîte est imaginée avec seulement cinq faces.

Pour la première boîte, les deux couples de faces (*d ; g*) et (*c* ; *n*) sont isométriques, il y a une erreur sur *i* qui ne correspond pas au couvercle.

Pour la deuxième boîte, les deux couples de faces (*b* ; *q*) et (*p* ; *f*) sont isométriques, il y a une erreur sur *h* qui ne correspond pas au couvercle.

Six faces

Les enfants pour lesquels il était évident que 6 faces sont nécessaires pour construire une boîte ont travaillé de manières différentes :

1. Certains ont cherché trois couples de faces isométriques mais ne sont pas arrivés à les alterner correctement.

2. D'autres se sont construits les faces isométriques dont ils avaient besoin, selon le schéma qu'ls avaient en tête, en utilisant plusieurs cartes qu'ils ont unies pour faire une seule face.

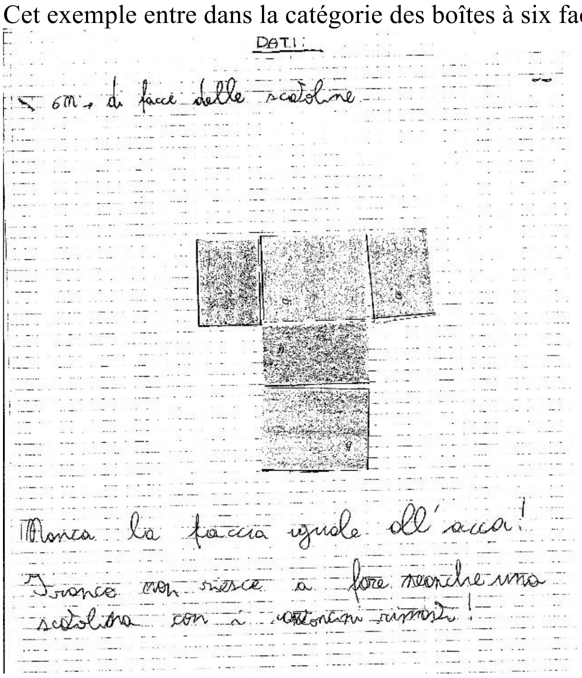
3. D'autres encore ont découpé les cartes à disposition pour en obtenir d'autres qui soient isométriques à celles de la donnée du problème.

Exemple 5

Réponse
Franco peut faire deux boîtes.
Données.
La première boîte = A, B, Q, E, P, F
La seconde boîte = E, B, A, R, P, F
Raisonnement
Nous avons réussi à résoudre le problème en réunissant les pièces de la boîte. Nous n'avons pas pris les pièces qui restaient parce qu'elles n'étaient pas de même longueur.
Ce groupe a cherché, pour la première boîte, trois couples de faces (*b* ; *q*), (*a* ; *e*), (*p* ; *f*), isométriques sans vérifier si les dimensions permettaient de la construire. Pour la seconde boîte, il ont repris des pièces utilisées pour la première (*a, b, e, f, p)*. Cette erreur nous fait réfléchir sur un aspect des problèmes du RMT. Lorsque, comme dans ce cas, la possibilité que plusieurs enfants au sein du groupe découpent les cartes et se retrouvent ainsi avec une grande quantité de pièces découpées, la consigne qu'on ne doit pas utiliser les mêmes faces pour deux boîtes différentes, non explicite, n'est pas respectée.
Dans sa recherche de couples de faces isométriques, ce groupe a encore substitué un carré (*r*) à un rectangle (*q*) évidemment par une erreur dans le comptage des carrés sur le bord.

Exemple 6

Cet exemple entre dans la catégorie des boîtes à six faces



Il manque la face égale à h ! Franco ne réussira pas à faire une seule boîte avec les cartes qui restent.
Cette reconstruction est presque parfaite. L'impossibilité vient du choix initial de *b* et *q* (de dimensions 4 × 5 qui ne permettra pas la construction de la boîte car il n'y a qu'une seule autre carte de longueur 5, la carte *h* précisément, comme l'ont bien constaté les élèves).

Dans notre recherche, pour comprendre ce que nous révèlent les copies sur les connaissances des élèves, nous devons reconnaître que ce groupe est conscient du nombre de faces, de l'isométrie des faces opposées et des contraintes de la juxtaposition pour une construction tridimensionnelle.

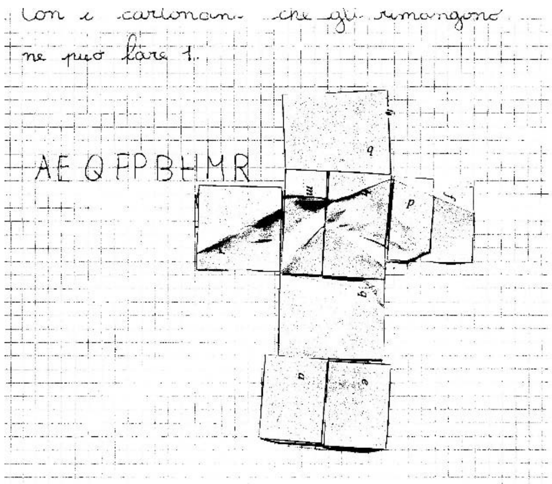
Exemple 7

Construction d'une boîte à six faces, en modifiant les cartes.
Avec les cartes qui restent, il peut faire une boîte composée de d et g sur les deux côtés, puis b et q à droite et à gauche, , r + p dessus h + n dessous.
En réunissant les pièce intelligemment nous avons réussi à faire une boîte.
On veut faire une boîte à six faces, mais on ne tient pas compte de la consigne et on ignore que les faces opposées, même obtenues par rapiéçage, doivent être isométriques. $r + p$ donne un rectangle de 6 × 4, alors que $h + m$ en donne un de 5 × 5. Il y a beaucoup d'approximation dans la construction des faces opposées.

Exemples 8

Traduction de l'*exemple 8*
A gauche : *Nous avons trouvé la solution du problème, voici les boîtes.*
A droite : *Avec les cartes qui restent on peut faire encore deux boîtes. Nous avons vu toutes les images et les avons copiées sur une feuille et découpées. Comme cela on a fait les boîtes.*
Ces deux exemples, présentés par le même groupe montrent aussi la transformation des cartes pour obtenir des faces isométriques. Les dimensions des faces *e* et *a* sont réduites (de rectangles de 3 × 4, elles deviennent des carrés de 3 × 3) et la face *q* (d'un rectangle de 4 × 5, devient un rectangle de 3 × 6). n'est pas beaucoup plus scrupuleux pour faire la seconde boîte dont toutes les faces opposées ne sont pas isométriques, même si elles sont transformées.
Les enfants déclarent explicitement d'avoir regardé, refait et découpé. Il est évident que dans la reconstruction des différents rectangles, l'idée qu'ils avaient en tête a prévalu sur la réalité, non conforme à ce qu'ils pensaient.

Exemple 9



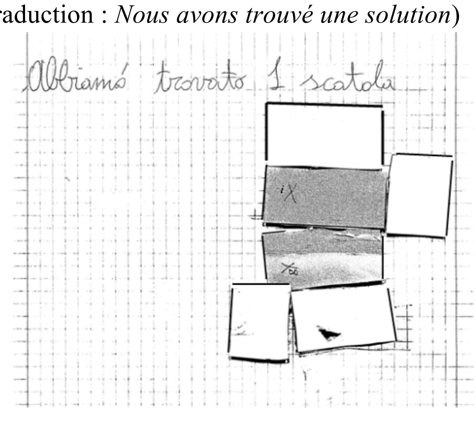
Cette boîte était fermée avec du ruban adhésif, je l'ai rouverte pour la faire voir dans les détails.
La technique du collage a aussi été utilisés pour cette boîte, avec un effort particulier pour obtenir des faces « isométriques ». *b* et *q* le sont, $p + f$ forment effectivement une face isométrique à *r*, mais $m + h$ (4×5) est différente de $a + e$ (6×4).
Il n'est pas évident que les côtés doivent se correspondre exactement pour les enfants (ou ils ne s'en souvient pas).
On n'a pas tenu compte de toutes les conditions imposées mais les boîtes obtenues nous montrent clairement qu'on a compris ce qu'il fallait construire, même si toutes les caractéristiques du parallélépipède ne sont pas présentes.

Concret et abstrait

Dans l'intention des auteurs, le problème se prêtait à une auto-validation. Il y a des cartes qu'il suffit de découper et de juxtaposer pour « voir » si elles sont bien adaptés l'une à l'autre.
En réalité, les choses ne se sont pas passées ainsi (pour les copies de « 0 point »). Dans les deux exemples qui suivent il est évident que les élèves ne sont pas dérangés par le fait que les côtés juxtaposés de deux cartes ne soient pas de la même longueur.

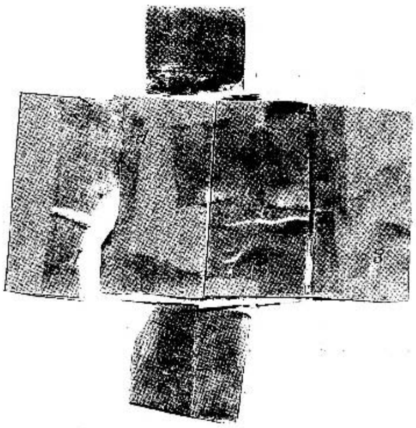
Exemple 10

(traduction : *Nous avons trouvé une solution*)



Les côtés communs des cartons *i, g, d*, sont de la même longueur, mais ceux de *h* ont des longueurs différentes. Les côtés communs des cartons *a* et *e* sont isométriques mais ne correspondent pas à ceux à qui ils sont juxtaposés. Cette boîte aussi était fermée (elle a été ouverte pour en voir les détails) ; et, pour les enfants, c'était une boîte réalisable.

Exemple 11



Dans ce dernier exemple, on voit bien que les deux bases ne permettent pas la fermeture de la boîte. Il semble que, dans le passage du tridimensionnel au bidimensionnel, vu qu'elles ne sont plus nécessaires, les relations de correspondance des différentes faces contiguës se perdent.

Que faire

Beaucoup des copies analysées montrent que les enfants savent déjà des choses sur les caractéristiques d'une boîte/parallélépipède. Ce sont cependant des connaissances indépendantes d'une réflexion sur les relations spatiales dont il faut tenir compte, des connaissances empiriques qui reposent encore sur la fantaisie des enfants qui d'un d'une boîte font une voiture ou de cinq cartes font une boîte. Pour faire en sorte que cette connaissance, d'une idée encore nébuleuse du comment est faite une boîte, passe au niveau conscient du comment est fait un parallélépipède d'un point de vue mathématique il y a un long travail à faire en classe. Il faut absolument partir de la récolte de matériel concret (boîtes), des classifications qu'on peut imaginer à leur propos, des manipulations (décomposition et reconstruction de boîtes), des empreintes des faces, de propositions de recouvrir la boîte ou de marquer ses arêtes avec une bande adhésive colorée, etc. Il s'agit d'un long travail pour lequel chaque enseignant fait appel à son bagage didactique. Il faut en outre consacrer beaucoup de temps aux confrontations et réflexions continues sur les activités effectuées pour les lier aux découvertes des connaissances mathématiques sous jacentes. Finalement il est absolument nécessaire de verbaliser et institutionnaliser les connaissances construites.
Si ce travail n'a pas été fait précédemment, ce problème peut stimuler l'envie ou la curiosité de l'initier ou de le développer, comme c'est le cas pour de nombreux autres problèmes du RMT, comme une nouvelle étape dans l'acquisition de certaines caractéristiques du parallélépipède.

Conclusions

Comme on l'a vu, l'analyse a posteriori des problèmes révèle souvent des aspects des connaissances des élèves qui n'étaient pris en considération a priori. C'est cet examen des copies qui nous permettra d'élaborer des variantes ou des expérimentations complémentaires où les consignes comprendront moins de données implicites, où les tâches seront mieux adaptées aux élèves des catégories concernées.
Mais au-delà de la « démarche circulaire » du thème de la rencontre, l'analyse de copies de ce problème ayant reçu 0 point a mis en lumière non seulement les aspects négatifs liés à l'incompréhension du problème, mais aussi les obstacles, les difficultés et les connaissances que les enfants ont déjà sur la construction d'une boîte/parallélépipède.
Tous les problèmes ne sont pas toujours aussi révélateurs, mais il vaut la peine, là où on aurait attendu de meilleurs résultats, d'aller voir quels ont été les obstacles qui ont empêché la résolution du problème. Il est absolument nécessaire de chercher à comprendre quelles sont les opérations mentales effectives que les élèves ont mises en œuvre parce que, si l'on souhaite leur faire construire quelque chose, il faut partir de ce qu'ils savent déjà.

INDOVINA A CHE COSA PENSO
RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA IN AMBIENTE NUMERICO

Fabio Brunelli[1]

Premessa

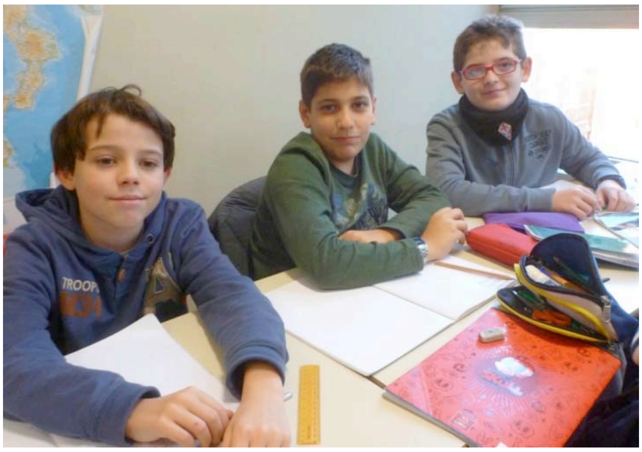
Gli insegnanti di matematica in Italia tradizionalmente dedicano molta attenzione al calcolo numerico e letterale (operazioni, espressioni, ecc.), senza peraltro proporre, se non raramente, occasioni di ragionamento per il tramite di problemi da risolvere in ambiente numerico. Troppo spesso la risoluzione di problemi è legata solo all'ambito geometrico. Questa breve relazione vuole essere un esempio proprio in questo senso. L'attività prende spunto da un problema del Rally Matematico Transalpino proposto nella gara finale del 1999 alle categorie 6, 7, 8 (i tre anni di scuola secondaria di primo grado).

Il problema

"Penso ad un numero. Se lo sottraggo da 4 o se lo moltiplico per 4, trovo lo stesso risultato. Potete trovare il numero al quale ho pensato? Giustificate la vostra soluzione."

Ho assegnato questo problema nella mia prima, nella mia seconda e nella mia classe terza. In due classi l'ho assegnato a coppie casuali (il compagno di banco), assegnando una mezz'ora circa di tempo a disposizione. In prima invece è stato assegnato ai sette gruppi da loro formati in vista della gara. I risultati sono stati interessanti in tutte le classi.



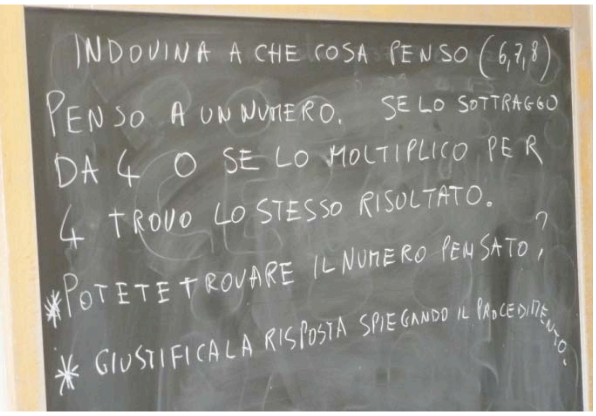



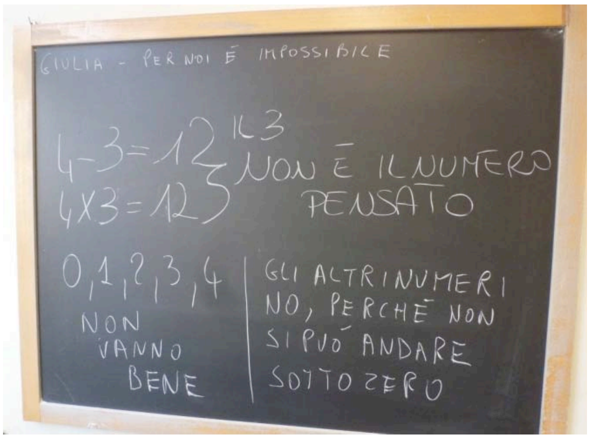
Le espressioni che si vedono sui volti di questi ragazzi mi pare siano eloquenti. Questo tipo di "lezione di matematica", che appare come alternativa rispetto a quella tradizionale costituita dall'alternarsi di "interrogazione-spiegazione", è generalmente molto gradita agli allievi. A loro sembra quasi di "fare un gioco" invece di "fare scuola". Ricordo una

---
[1] Sezione di Siena

richiesta di un alunno di qualche anno fa: “Professore invece di fare matematica oggi possiamo fare un allenamento per il Rally come la scorsa volta?”

I risultati più modesti, come prevedibile, sono stati raggiunti in prima (un solo gruppo su sette ha risolto il problema). Tuttavia il lavoro è stato proficuo per tutti.
Un errore tipico è stato quello di limitare la ricerca all’insieme dei numeri naturali, senza prendere in considerazione i numeri decimali. Constatato che i numeri da zero a quattro non erano soluzioni si sono fermati.
Una ragazza è arrivata a formulare una sorta di “teorema”: “Poiché la sottrazione fa diminuire i numeri e la moltiplicazione li fa crescere, allora questo problema è impossibile!”





Altri errori sono stati quelli di sottrarre il numero quattro dal numero sconosciuto (scambiano quindi soggetto con complemento oggetto). Altri ancora di utilizzare due numeri diversi, uno per la moltiplicazione e uno per la sottrazione.
La maggior parte degli allievi ha proceduto per tentativi, in modo particolare nelle classi prima e seconda. A volte si è trattato di tentativi maldestri come quello di provare con numeri naturali di due cifre: la sottrazione fornisce un numero negativo che non potrà mai essere uguale al valore del prodotto che è positivo.
Qualcuno in seconda ha provato anche con numeri negativi, non conoscendo ancora peraltro la regola del prodotto tra numeri positivi e negativi.

Particolare il procedimento di un alunno di seconda che, dopo avere fallito con le soluzioni intere, non volendo affrontare le soluzioni decimali, ha “moltiplicato per dieci il problema” e ha lavorato con il numero 40 invece che con il 4. Alla fine ha diviso per dieci la soluzione. Si tratterebbe in questo caso di una nuova sindrome: “Orror decimalis”.

Bravi solutori in prima

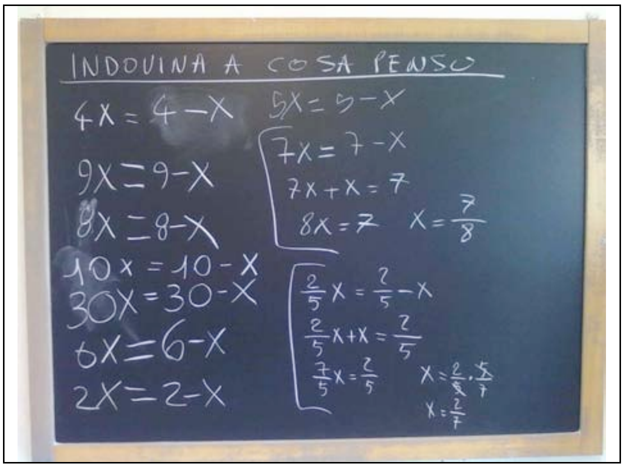
Bravi solutori in seconda

Nella classe terza il problema è stato risolto sia per tentativi che con le equazioni:

$$4 - x = 4x$$
$$4x = 4 - x$$

Queste due equazioni ci hanno dato modo di discutere su cosa significa che due equazioni sono "uguali" (equivalenti).

Ho assegnato poi per casa la richiesta di modificare il problema sostituendo il 4 con un altro numero a piacere.
La lezione dopo abbiamo scritto alla lavagna tutte le equazioni con i vari numeri al posto del 4.

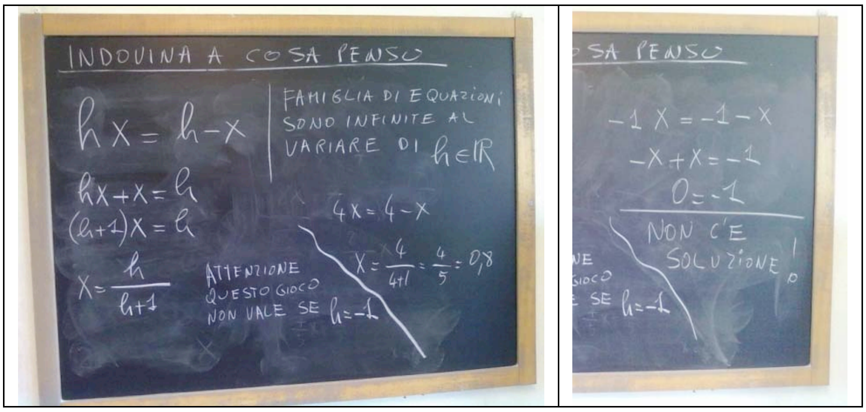


$$9x = 9 - x$$
$$8x = 8 - x$$
$$10x = 10 - x$$
$$30x = 30 - x$$
$$2x = 6 – 2$$
$$5x = 5 - x$$
$$7x = 7 - x$$
$$8x = 8 - x$$

Non sono mancate le proposte di equazioni di altro tipo da parte di qualche alunno che non aveva compreso la consegna.
Ho chiesto se si poteva indicare con una lettera questi vari valori che il numero della equazione poteva assumere, creando in questo modo una "famiglia di equazioni". E' stata proposta da un allievo la lettera h. Così abbiamo scritto alla lavagna:

$hx = h – x$

E siamo così arrivati ad una prima idea di equazione parametrica.
A questo punto è venuta la tentazione di esprimere la formula della soluzione generale del nostro problema per mostrare agli allievi che era possibile lavorare su una "famiglia di equazioni" contemporaneamente:



Osservando la formula risolutiva generale ho chiesto: "Questa scrittura va bene sempre?"
Alcuni hanno chiesto (erroneamente) di escludere i valori negativi. Ho cercato di convincerli con esempi che i numeri relativi creavano solo un poco di impiccio a noi nei calcoli, ma concettualmente non erano una difficoltà. Finché un alunno (particolarmente bravo) ha detto: "h non può essere -1, altrimenti si divide per zero!". Siamo andati allora a controllare cosa accade per h = -1 e abbiamo constatato che la equazione risolutiva del problema è impossibile (vedi foto).
Abbiamo concluso che il problema posto ammette soluzione con tutti i numeri reali escluso -1.

Conclusioni

Le conclusioni sono ancora una volta di non avere mai fretta di passare al problema successivo, da un argomento all'altro. Di dare tempo a tutti i ragazzi di esprimersi, facendosi inspirare nell'azione didattica dalle loro difficoltà e dai loro errori. Ancora una volta i problemi proposti dal Rally si rivelano utile materiale didattico, perché stimolante per allievi e docenti. Particolarmente fruttuosa è la modalità "stesso problema a tutta la classe divisa a coppie". I ragazzi si sentono a loro agio per il fatto di non essere soli e c'è maggiore probabilità di ottenere procedimenti diversi da discutere e confrontare in un secondo tempo.

Bibliografia

L. Doretti – L. Salomone: 2015, Avvio al concetto di equazione con i problemi del RMT, *Actes/Atti Bourg-en-Bresse 2004 - Arco di Trento*., 235-244

DEVINE CE QUE JE PENSE
RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DANS UN ENVIRONNEMENT NUMÉRIQUE

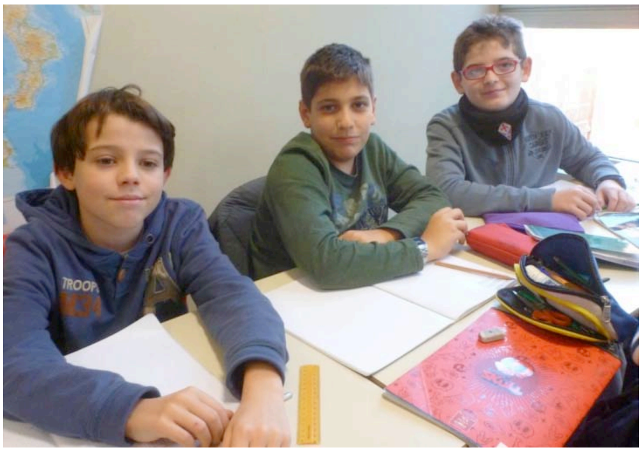
Fabio Brunelli[1]

Prémisses

Les enseignants de mathématiques en Italie portent traditionnellement beaucoup d'attention au calcul numérique et littéral (opérations, expressions, etc.) toutefois sans proposer –si ce n'est rarement– des occasions de raisonner au moyen de problèmes à résoudre dans un environnement numérique. Trop souvent la résolution de problèmes est liée seulement au domaine géométrique.
Ce bref témoignage voudrait vraiment être un exemple dans ce sens. L'activité relatée est inspirée d'un problème du Rallye Mathématique Transalpin, proposé dans l'épreuve finale de 1999 aux catégories 6, 7 et 8 (les trois premières années d'enseignement secondaire).

Le problème

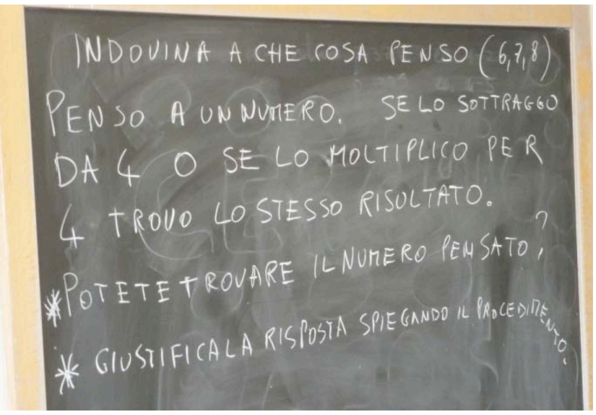
« Je pense à un nombre. Si je le soustrais de 4 ou si je le multiplie par 4, je trouve le même résultat. Pouvez-vous trouver le nombre auquel j'ai pensé ? Justifiez votre solution »
J'ai donné ce problème à trois de mes classes, en niveau 6, 7 et 8. Pour deux d'entre elles, je l'ai donné à résoudre à des binômes constitués au hasard (les voisins de table) en laissant environ une demi-heure à leur disposition. Pour le niveau 6 en revanche, il a été donné à sept groupes constitués par les élèves en vue de l'épreuve. Les résultats ont été intéressants dans toutes les classes.

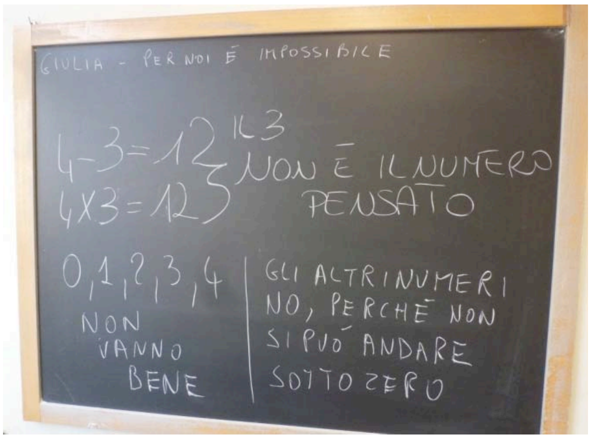


Les expressions qui se lisent sur les visages de ces élèves me paraissent éloquents. Ce type de « leçon de mathématiques », qui apparait comme une alternative à la traditionnelle constituée par une alternance « interrogations-explications », est généralement très appréciée des élèves. Ils ont l'impression de "faire un jeu" plutôt que "faire classe". Je me rappelle la question d'un élève il y a quelques années: "Monsieur le professeur, au lieu de faire des maths aujourd'hui, on pourrait faire un entrainement pour le Rallye comme la dernière fois?"

---
[1] Section de Siena

Les résultats les plus modestes, comme on pouvait s'y attendre, ont été obtenus au niveau 6 (un seul des groupes sur les sept a résolu le problème) Cependant le travail a été bénéfique pour tous.
Une erreur typique a été de limiter la recherche à l'ensemble des nombres naturels sans prendre en considération les décimaux. Ayant constaté que les nombres de zéro à quatre n'étaient pas la solution, ils se sont arrêtés.
Une élève est parvenue à formuler une sorte de « théorème » : « - Puisque la soustraction fait diminuer les nombres et la multiplication les fait augmenter, alors ce problème est impossible ! »





D'autres erreurs ont consisté à soustraire le nombre quatre du nombre inconnu (on change alors le sujet pour un complément d'objet)
D'autres encore ont consisté à utiliser deux nombres différents, un pour la soustraction, un autre pour la multiplication.
La majorité des élèves a procédé par essais-erreurs, en particulier les classes de niveau 6 et 5. On a assisté parfois à des tentatives maladroites comme celle de prouver ave des nombres naturels à deux chiffres : la soustraction fournit un nombre négatif qui ne pourra jamais être égal à la valeur du produit qui est positif.
Quelques-uns en niveau 5 ont essayé également avec des nombres négatifs, ne connaissant pas encore par ailleurs la règle du produit entre nombres positifs et négatifs.
Une procédure particulière employée par élève de niveau 5: celui-ci, après avoir échoué avec les solutions sur les entiers, ne voulant pas affronter les solutions décimales, a "multiplié le problème par 10" et a travaillé avec le nombre 40 au lieu du nombre 4. A la fin, il a divisé par dix la solution. Il s'agirait dans ce cas d'un nouveau syndrome: "orror decimalis".

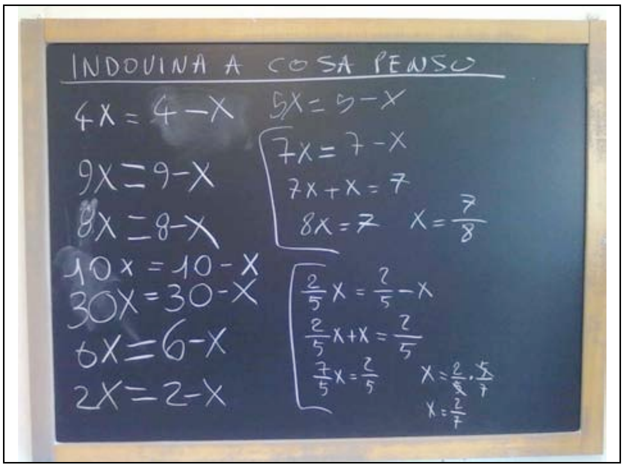
Une équipe qui a résolu en classe de cat. 6

Une autre équipe arrivée au but en classe de cat. 7

Dans la classe de niveau 7, le problème a été résolu soit par essais, soit par les équations :

$$4 - x = 4x$$
$$4x = 4 - x$$

Ces deux équations ont fourni l'occasion de discuter sur ce que signifie “deux équations qui sont “égales” (équivalentes).
J'ai ensuite donné en travail personnel la tâche de modifier le problème en changeant le nombre 4 pour un nombre de leur choix. Au cours suivant nous avons écrit au tableau toutes les équations avec différents nombres à la place de 4.

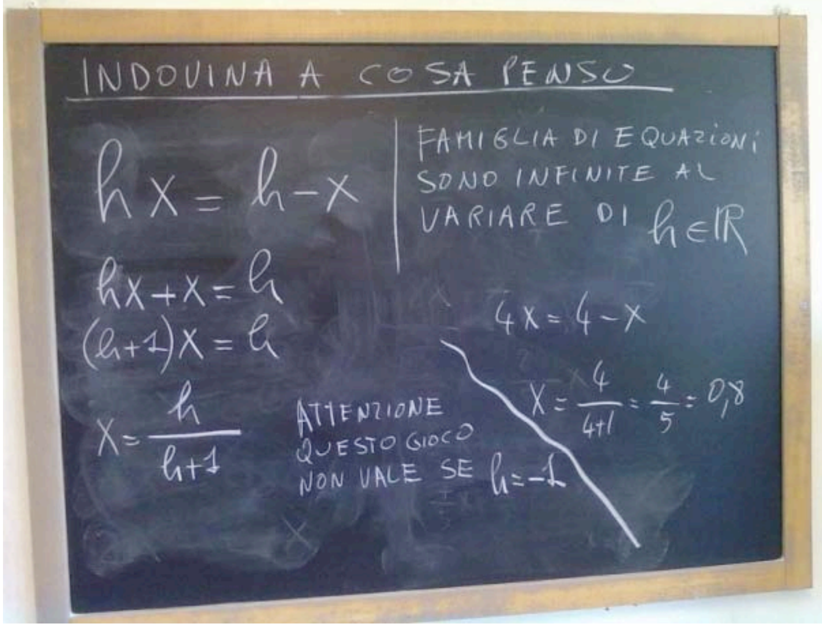


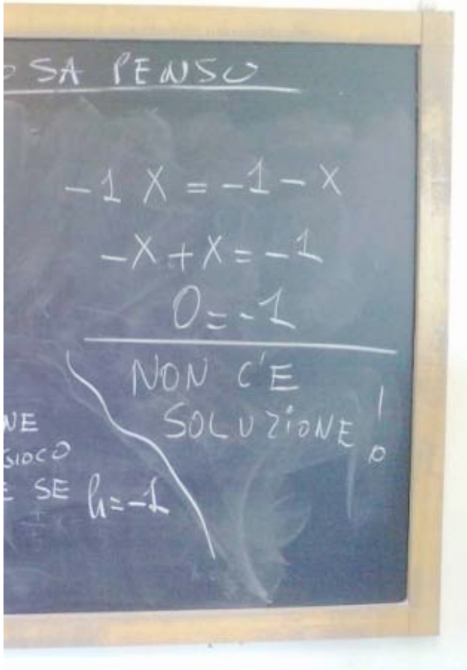
$$9x = 9 - x$$
$$8x = 8 - x$$
$$10x = 10 - x$$
$$30x = 30 - x$$
$$2x = 6 – 2$$
$$5x = 5 - x$$
$$7x = 7 - x$$
$$8x = 8 - x$$

Des propositions d'équations d'un autre type n'ont pas manqué de la part de quelques élèves qui n'avaient pas compris la consigne.

J'ai demandé si on puvait désigner par une lettre les différentes valeurs que pouvait prendre le nombre de l'équation, en créant ainsi une “famille d'équations”. Un élève a proposé la lettre h, nous avons ainsi écrit au tableau :

$hx = h – x$
Et nous sommes ainsi arrivés à une première idée d'équation paramétrique.
A ce moment nous avons été tentés d'exprimer la formule de la solution générale de notre problème pour montrer aux élèves qu'il était possible de travailler en même temps sur une « famille d'équations ».





Observant la formule résolutive générale, j'ai demandé "cette écriture convient pour tous les cas?" Certains élèves ont demandé (de façon erronée) à exclure les valeurs négatives. J'ai essayé de les convaincre avec des exemples que les nombres négatifs nous causent seulement un peu de souci pour les calculs, mais qu'ils ne constituent pas une difficulté au plan conceptuel. Finalement un élève (particulièrement brillant) a dit :
"h ne peut pas être -1, sinon on divise par zéro!". Nous sommes allés contrôler ce qui arrive pour h= -1 et nous avons constaté que l'équation résolvant le problème est impossible (voir les photos).
Nous avons conclu que le problème posé admet des solutions avec tous les nombres réels sauf -1.

Conclusions

Les conclusions sont encore une fois de ne jamais être pressés de passer au problème suivant, d'un argument à l'autre. De donner du temps à tous les élèves pour s'exprimer, en inspirant nos choix didactiques de leurs difficultés et de leurs erreurs. Encore une fois les problèmes proposés par le Rallye se révèlent comme un matériau didactique utile, car stimulant pour les élèves comme pour les professeurs.
La modalité "un même problème pour toute la classe organisée en binômes" a été particulièrement fructueuse. Les élèves se sentent à l'aise par le sentiment de ne pas être seuls et la probabilité est plus grande d'obtenir des procédures diverses à discuter et confronter dans un deuxième temps.

Bibliographie

L. Doretti – L. Salomone: 2015, Avvio al concetto di equazione con i problemi del RMT, *Actes/Atti Bourg-en-Bresse 2004 - Arco di Trento*, 235-244.