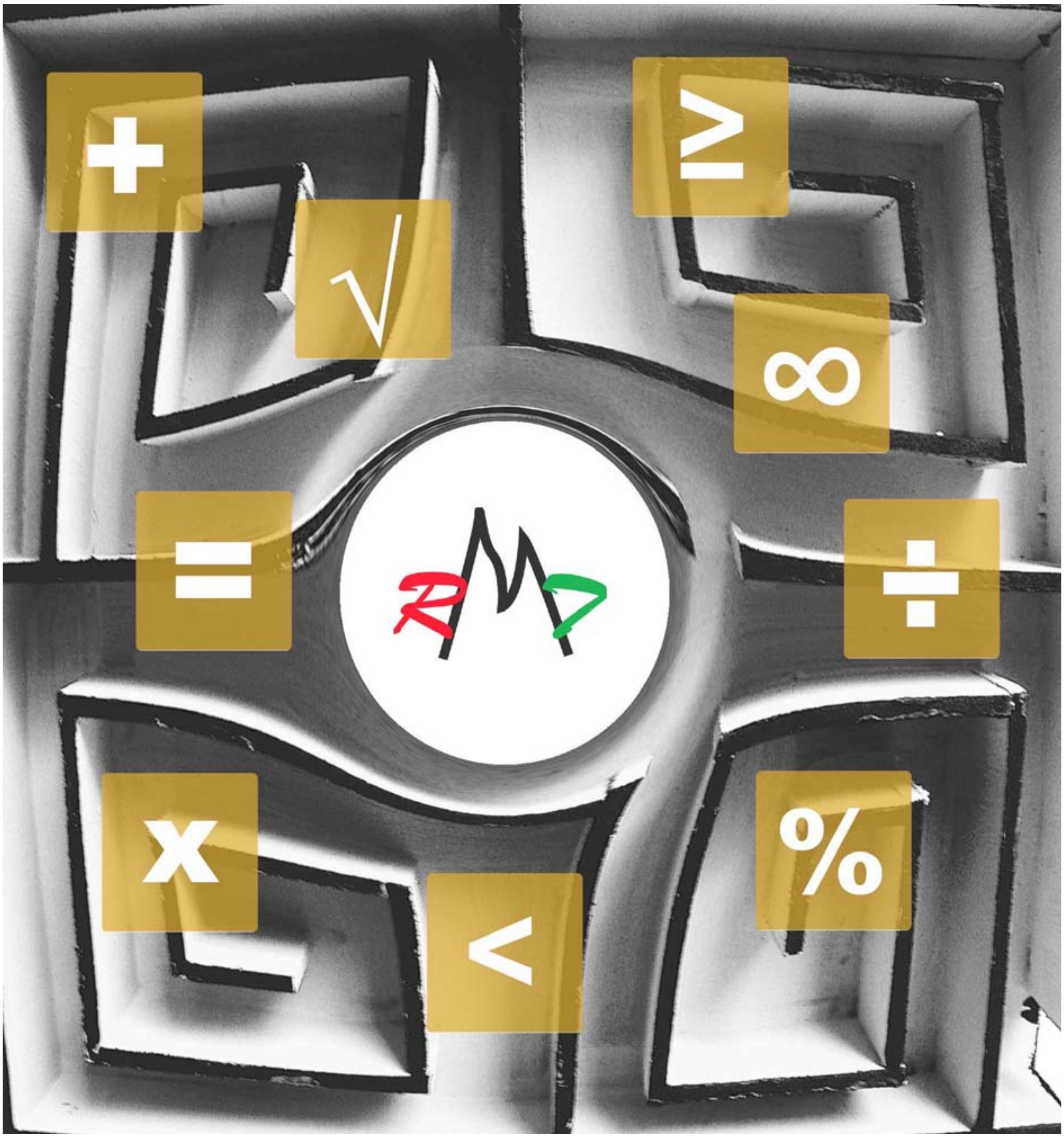
La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 3, octobre / ottobre 2013



Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.org

ISSN 2234-9596

TABLE DES MATIERES / INDICE

Numéro 3, octobre 2013/ Numero 3, ottobre 2013

F. Jaquet

Éditorial 3

Editoriale 4

Presentazione del numero 5

Présentation du numéro 6

L. Grugnetti, A. Maffini, C. Marchini

Epistemologia/Epistemologie in classe 7

R. Battisti

La visualizzazione spaziale...dimenticata 29

La visualisation spatiale...oubliée 39

C. Crociani, R. Spatoloni

Il numero si incontra molto presto...ma è una conquista difficile 49

La rencontre avec le nombre intervient vite...mais sa conquête est difficile 65

M. F. Andriani, L. Doretti, D. Medici, M. G. Rinaldi, L. Salomone

Equazione come strumento e come oggetto: analisi di difficoltà ed errori 83

L'équation en tant qu'outil et objet : analyse des difficultés et des erreurs 103

G. Telatin

Uso dei problemi del RMT in classe 123

Utilisation en classe des problèmes du RMT 131

R. Guastalla

C'è punto e punto 139

E. Pianigiani

Il Rally matematico Transalpino: un trionfo per la II D 147

A. Castellini, L. Fazzino

Il Rally matematico per i genitori 149

EDITORIAL

François Jaquet, rédacteur responsable

Il faut partir du terrain de l'élève mais ne pas y camper.
Nicolas Rouche

Cette citation éveille un questionnement qui va bien au-delà de la simplicité des termes choisis par Nicolas Rouche pour son affirmation.

Pour tous ceux qui militent au sein du Rallye Mathématique Transalpin, il n'est peut-être pas inutile de se demander où se situe le « terrain de l'élève », si c'est de là que nous « partons », et quels sont les risques d'y « camper ».

Lorsque nous élaborons un problème, nous tentons d'imaginer, « a priori » le terrain de l'élève mais nous n'y sommes pas encore. Nous sommes sur notre terrain d'adulte ou d'enseignant, bien défriché, aux allées bien dessinées, où il n'y a plus aucune mauvaise herbe. Nous savons bien que les élèves n'ont pas encore construit tous les savoirs nécessaires et nous faisons de notre mieux pour leur proposer des situations et contextes qui leur soient accessibles, exprimés dans leur langue quotidienne, avec des résolutions qui les obligent à organiser leur pensée. Mais nous sommes souvent encore loin du compte, come nous avons pu le constater plus de mille fois par nos plus de mille problèmes !

Pendant l'épreuve, le panneau « terrain privé » est bien en évidence. Au mieux, nous pouvons jeter un coup d'œil indiscret entre ses fentes, mais sans rien percevoir d'autre qu'une agitation et les bruits d'une ruche au travail. Le maître pourrait éventuellement chercher à y revenir en interrogeant quelques d'élèves qui viennent de quitter le terrain de résolution du problème. Mais il n'aura le récit que d'un groupe ou deux. S'il veut une reconstitution plus fidèle, il doit organiser une nouvelle passation avec toute la classe, suivie d'une mise en commun et sa présence modifie sensiblement les caractéristiques du terrain d'origine.

Ce n'est qu'au moment de l'attribution des points ou des analyses a posteriori que peut commencer l'observation du terrain des élèves, au travers des copies accumulées. Les hypothèses ou les « a priori » vont céder le pas à la lecture de ce que les élèves nous racontent, de leur point de vue, dans leur langage, en l'état de construction de leurs savoirs, encore souvent loin des concepts élaborés par le mathématicien. Paradoxalement, c'est donc a posteriori que nous « partons du terrain de l'élève » auquel on n'a pas pu accéder mais qu'on peut approcher en examinant les traces qu'il y a laissées.

On y observera ce que nous considérons comme, vues de notre terrain d'adulte, des incompréhensions, des tergiversations, des répétitions, des erreurs, des impropriétés, des maladresses, des ambiguïtés… Au fil des copies, on retrouvera des phénomènes qui apparaissent plus fréquemment que d'autres, qui nous semblent significatifs, qui nous permettent parfois de reconnaître une procédure caractéristique. C'est ainsi que, progressivement, on s'approchera de terrain de l'élève et que l'on comprendra qu'il est vaste, complexe et qu'il nous révélera toujours des surprises.

A propos du risque « d'y camper », une précision paraît nécessaire. La métaphore du « terrain » entraîne celle de « planter sa tente » qui est une des deux acceptions du terme « camper » dans les dictionnaires français. Il est évident qu'on ne va pas faire du camping sur ce terrain. On doit s'orienter vers la deuxième acception : « il ne faut pas y camper » de la citation doit être interprétée dans le sens de « il ne faut pas s'y accrocher ou y rester définitivement», ce qui serait inadéquat.

On y restera le temps qu'il faut pour observer et comprendre ce que fait l'élève sur son terrain et, lorsqu'il aura acquis la maturité nécessaire, on le dirigera vers celui des mathématiques.

Une autre citation de Nicolas Rouche nous paraît conclure cette réflexion :
"*L'enseignement doit aller de l'élève vers les mathématiques (et non l'inverse), c'est-à-dire du particulier au général, du concret vers l'abstrait.* "[1]

[1] Tiré de l'article de : *De l'élève aux mathématiques, le chemin s'allonge* [*L'apprentissage des sciences en question, La pensée et les hommes*, éd. Espaces de liberté, 2005, pp.29-49]

EDITORIALE

François Jaquet, direttore responsabile

Il faut partir du terrain de l'élève mais ne pas y camper.[2]
Nicolas Rouche

Questa citazione pone degli interrogativi che vanno ben al di là della semplicità dei termini scelti da Nicolas Rouche nella sua affermazione.
Per tutti coloro che operano nel seno del Rally Matematico Transalpino, non è forse inutile chiedersi dove si situi il "terreno dell'allievo", se è da lì che "partiamo" e quali siano i rischi di "campeggiare lì".
Quando elaboriamo un problema, tentiamo di immaginare "a priori" il terreno dell'allievo, ma non ci siamo ancora. Siamo sul nostro terreno, quello dell'adulto o dell'insegnante, ben trattato, dove non ci sono più erbacce. Sappiamo bene che gli allievi non hanno ancora costruito tutti i saperi necessari e noi facciamo del nostro meglio per proporre situazioni e contesti che siano loro accessibili, espressi nel linguaggio quotidiano, con risoluzioni che li obbligano ad organizzare il loro pensiero. Siamo però ancora lontani dal traguardo, come siamo stati in grado mille volte di constatare tramite i nostri più di mille problemi!
Durante una prova, il pannello "terreno privato" è ben evidente. Al massimo possiamo gettare uno sguardo indiscreto tra le fessure, ma potendo solo percepire una certa agitazione e i rumore di api al lavoro. L'insegnante potrebbe eventualmente cercare di ritornarvi interpellando qualche allievo quando ha lasciato il terreno della risoluzione del problema. Ma ci sarà il racconto solo di uno o due gruppi. Se desidera una ricostruzione più fedele, deve riproporre il problema a tutta la classe con una messa in comune, ma la sua presenza modificherà sensibilmente le caratteristiche del terreno d'origine.
E' solo al momento dell'attribuzione dei punteggi e a seguito dell'analisi a posteriori che può aver inizio l'osservazione del terreno degli allievi tramite gli elaborati accumulati nella pila che ci attende. Le ipotesi o gli "a priori" cederanno il passo alla lettura di ciò che gli allievi raccontano, del loro punto di vista, nel loro linguaggio, allo stato della costruzione dei loro saperi, spesso ancora lontani dai concetti elaborati dal matematico. Paradossalmente, è a posteriori che "partiamo dal terreno dell'allievo" al quale non è stato possibile accedere ma che è possibile abbordare nell'esaminare le tracce che hanno lasciato.
Vi osserveremo quelle che noi consideriamo, dal nostro terreno d'adulto, come incomprensioni, tentennamenti, ripetizioni, errori, imprecisioni, difficoltà di espressione, ambiguità... Nel defilare degli elaborati ritroveremo fenomeni che appariranno più frequentemente di altri, che ci sembrano significativi, che ci permettono talvolta di riconoscere una procedura caratteristica. E' così che progressivamente ci si avvicinerà al terreno dell'allievo e si capirà che è molto vasto, complesso e sempre pieno di sorprese.
A proposito del rischio di "campeggiare sul terreno dell'allievo", sembra necessaria una precisazione. La metafora del "terreno" induce quella del "piantare la tenda" che è una delle due accezioni del termine "camper" nei dizionari francesi. E' evidente che non si parla di fare *camping* su tale terreno. Dobbiamo orientarci verso la seconda accezione: il "ne faut pas y camper" della citazione deve essere interpretato nel senso di "non bisogna restarvi definitivamente", cosa che non sarebbe adeguata.
Vi si resterà il tempo che è necessario per osservare e capire ciò che fa l'allievo sul suo terreno e, quando avrà raggiunto la maturità necessaria, lo si dirigerà verso il terreno della matematica.

Un'altra citazione di de Nicolas Rouche ci sembra adatta a concludere questa riflessione:
"*L'insegnamento deve andare dall'allievo verso la matematica (e non il contrario), cioè dal particolare al generale, dal concreto all'astratto.*"[3]

[2] Si è scelto di lasciare la citazione nella lingua originale, viste le diverse accezioni del verbo "camper" che verranno ricordate più avanti .
[3] Dall'articolo: *De l'élève aux mathématiques, le chemin s'allonge* [*L'apprentissage des sciences en question, La pensée et les hommes*, éd. Espaces de liberté, 2005, pp.29-49]

PRESENTAZIONE DEL NUMERO

Questo numero 3 de *La Gazzetta di Transalpino* contiene sei articoli di cui uno a carattere epistemologico, quattro relativi a gruppi di lavoro dell'ARMT sull'analisi a posteriori di nostri problemi, un altro relativo ad un'attività che fa parte di un progetto interdisciplinare a livello di scuola primaria, nonché due simpatiche note, una a cura di un'allieva di scuola secondaria di primo grado (categoria 7 per il RMT) e un'altra relativa ad un'esperienza di rally per i genitori.

- ***Epistemologia/Epistemologie in classe*** è il titolo di un articolo nel quale **Lucia Grugnetti, Achille Maffini e Carlo Marchini** presentano e discutono alcuni esempi relativi alla constatazione di come sia forte e importante la componente epistemologica implicita nel bagaglio di conoscenze, molte delle quali non scolastiche, degli allievi, anche i più piccoli. La discussione vuole essere un suggerimento agli insegnanti affinché analizzino la propria epistemologia *implicita.*

- L'articolo dal titolo ***La visualizzazione spaziale dimenticata***, di **Roberto Battisti**, a nome del gruppo Geometria della spazio, presenta un'analisi approfondita di elaborati degli allievi relativi ad un nutrito gruppo di problemi incentrati sulla geometria 3D, al fine di formulare alcune ipotesi sugli ostacoli e le difficoltà più significativi.

- Nell'articolo ***Il numero si incontra molto presto... ma è una conquista difficile***, **Carla Crociani e Rita Spatoloni**, a nome del Gruppo numerazione, presentano l'attività di ricerca e sperimentazione, tramite problemi del RMT, su problematiche legate alle difficoltà che gli allievi incontrano nell'ampio ambito della numerazione.

- L'articolo ***Equazioni come strumento e come oggetto: analisi di difficoltà ed errori***, di **Maria Felicia Andriani, Lucia Doretti, Daniela Medici, M. Gabriella Rinaldi e Lucia Salomone**, a nome del gruppo Equazioni, affronta alcuni aspetti della difficile problematica dell'insegnamento-apprendimento dell'algebra. In particolare, la ricerca condotta dal gruppo evidenzia come sia difficile per gli allievi ricorrere alla messa in equazione anche laddove tale via sia la più "economica" per la risoluzione di un problema.

- ***Uso dei problemi del RMT in classe*** di **Graziella Telatin** è il resoconto del gruppo di lavoro "Uso dei problemi del Rally in classe" che ha lavorato durante il 15° convegno dell'ARMT a Barletta nell'ottobre del 2011 e che ha analizzato criticamente alcuni problemi del Rally, dapprima risolvendoli, poi discutendo sul possibile uso didattico che se ne può fare in classe. I problemi hanno offerto inoltre lo spunto, agli insegnanti partecipanti, per confrontarsi su argomenti coinvolgenti la vita di classe, che vengono comunque sollecitati dall'uso dei problemi del Rally: per esempio la formazione e il funzionamento dei gruppi di lavoro in classe, l'importanza di rafforzare l'autostima nei ragazzi e le modalità per riuscirci, la necessità di confrontarsi con i colleghi della propria o di altre discipline.

- ***C'è punto e punto*** di **Rossella Guastalla** è la presentazione di un'attività che fa parte di un progetto interdisciplinare svoltosi all'inizio dell'anno scolastico 2011-2012 in due classi di quarta primaria, con organizzazione modulare di Viadana (Mantova). L'attività si è svolta il primo giorno di scuola e fin dal primo momento i bambini sono stati coinvolti in esperienze accattivanti e ludiche per stimolare la loro curiosità e il loro interesse, senza tralasciare momenti di riflessione collettiva per favorire la loro partecipazione attiva.

- ***Il Rally matematico Transalpino: un trionfo per la II D*** a cura di **Elena Pianigiani,** alunna**,** per l'appunto, della II D citata nel titolo è uno spaccato dell'atmosfera che gli allievi vivono all'atto di una finale.

- La nota ***Il Rally matematico per i genitori,*** di **Antonella Castellini e Lucia Fazzino**, come è già chiarito nel titolo riporta gli aspetti salienti di un'esperienza vissuta con alcuni genitori di classi partecipanti al RMT facenti capo alla sezione di Siena.

PRESENTATION DU NUMERO

Ce numéro 3 de *La Gazette de Transalpie* est composé de six articles, dont un de caractère épistémologique, quatre relevant de nos groupes de travail de l'ARMT sur les analyses a posteriori de nos problèmes, un autre à propos d'une activité d'un projet interdisciplinaire au niveau de l'école primaire, ainsi que de deux conte-rendus sympathique, l'un d'une élève d'école secondaire de degré I (catégorie 7 pour le RMT) et l'autre sur une expérience du rallye pour les parents.

- ***Épistémologie/Épistemologies en classe*** est le titre d'un article par lequel **Lucia Grugnetti, Achille Maffini et Carlo Marchini** présentent et discutent quelques exemples sur la constatation de la forte importance de la composante épistémologique dans le bagage culturel de nos élèves, jusqu'aux plus jeunes et souvent acquis hors de la scolarité. Il y a là une suggestion pour les enseignants à analyser leur propre épistémologie implicite.

- L'article ***La visualisation spatiale oubliée***, de **Roberto Battisti**, au nom du Groupe Géométrie dans l'espace, présente une analyse approfondie de copies d'élèves sur une dizaine de problèmes du thème de la géométrie à trois dimensions, dans le but de formuler quelques hypothèses sur les obstacles et les difficultés les plus significatives qu'y rencontrent les élèves.

- Dans l'article ***La rencontre avec le nombre intervient vite … mais sa conquête est difficile***, **Carla Crociani et Rita Spatoloni**, au nom du groupe Numération, présentent leurs activités de recherche et d'expérimentation, au travers des problèmes du RMT, sur la problématique des difficultés rencontrées par les élèves dans le vaste domaine de la numération.

- L'article ***L'équation en tant qu'outil et objet: analyse des difficultés et des erreurs***, de **Maria Felicia Andriani, Lucia Doretti, Daniela Medici, M. Gabriella Rinaldi e Lucia Salomone**, au nom du Groupe Equation, traite certains aspects de la délicate problématique de l'enseignement-apprentissage de l'algèbre. En particulier, les recherches conduites par le groupe montrent clairement combien il est difficile pour les élèves de recourir à la mise en équation, même dans les cas où elle serait plus « économique » pour la résolution du problème.

- ***Utilisation en classe des problèmes du RMT*** de **Graziella Telatin** est le compte rendu du groupe de travail homonyme qui s'est réuni lors de la 15e rencontre de l'ARMT à Barletta en octobre 2011 et qui a analysé de manière critique certains problèmes du Rallye, en les résolvant dans un premier temps, puis en discutant ensuite de l'usage possible qu'on peut en faire en classe. Ces problèmes ont aussi suscité des échanges entre les enseignants participants à propos des conséquences qu'ils entraînent sur la vie de la classe ; par exemple sur la formation et le fonctionnement des groupes de travail en classe, l'importance de renforcer l'estime de soi chez les élèves et les modalités pour y réussir, la nécessité de se confronter entre collègues de sa propre discipline et des autres.

- ***C'è punto e punto*** *(Il y a point et point)* di **Rossella Guastalla** est la présentation d'une activité d'un projet interdisciplinaire du début de l'année scolaire 2011-2012 dans deux classes de quatrième année primaire, dans le cadre de l'organisation modulaire de Viadana (Mantova). L'activité s'est déroulée le premier jour d'école et, dès ce moment, les élèves ont été engagés dans des expériences captivantes et ludiques pour stimuler leur curiosité et leur intérêt, tout en réservant des moments de réflexion collective pour favoriser leur participation active.

- ***Il Rally matematico Transalpino: un trionfo per la II D*** *(Le Rallye mathématique Transalpin : une victoire pour la II.D)* de **Elena Pianigiani,** élève de la classe II D citée dans le titre, nous donne une idée de l'atmosphère dans laquelle sont plongés les élèves lors d'une finale.

- Le reportage ***Il Rally matematico per i genitori,*** (*Le rallye mathématique pour les parents*) d'**Antonella Castellini et Lucia Fazzino**, comme l'indique son titre, rend compte des aspects les plus remarquables d'une expérience vécue avec des parents d'élèves, de classes de la section de Siena participant au RMT .

EPISTEMOLOGIA/EPISTEMOLOGIE IN CLASSE[*]

Lucia Grugnetti, Achille Maffini, Carlo Marchini [**]

A Francesco Speranza – Re-inventore dell'Epistemologia
della Matematica in Italia

*Résumé : Au travers de quelques exemples par lesquels les élèves montrent leurs conceptions épistémologiques dans une activité inspirée du Menon de Platon, nous discutons des exemples d'épistémologies implicites dans les programmes et dans les pratiques des enseignants ; puis nous présentons une nouvelle manière d'envisager le concept d'*épistémologie, *qui peut être considéré comme intégrant les épistémologies* implicites – explicites. *L'article propose quelques analyses de solutions d'exercices typiques qui montrent les exigences épistémologiques implicites pour leurs traitements, exigences qui peuvent évoluer selon les tâches.*

Summary: *We present examples in which young students show their epistemic beliefs in a school activity inspired to Plato's* Menon. *We discuss examples of implicit epistemology in curricula and in teacher's practice, presenting a new form of epistemology, the* concept epistemology *which can be considered an integration of the dichotomy* explicit – implicit *epistemologies*. *The paper presents some analyses of typical exercises solutions, showing the hidden epistemological requirements of these treatments, requirements that may change according to the tasks.*

1. Premessa: La globalizzazione epistemologica

In Italia (e forse anche nel mondo) gli argomenti che traggono origine dal problema dei fondamenti e dall'epistemologia della matematica, indipendentemente dalla storia, hanno un modesto impatto sul quadro generale della ricerca didattica (Cannizzaro *et al*., 2004). Si possono trovare solo alcuni spunti, ma di poco conto. Con questo scritto vorremmo evidenziare che l'epistemologia può offrire un punto di vista utile per analizzare alcuni problemi d'apprendimento-insegnamento.

È possibile che l'odierno mancato rilievo delle ricerche sui problemi dei fondamenti della matematica, e sui loro aspetti epistemologici, tragga origine da presentazioni prevalentemente di tipo storicistico della crisi dei fondamenti (tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX). I libri dedicati a questo tema tracciano le origini della teoria degli insiemi, delle strutture algebriche, e le ricerche sul rigore dalla fine del XIX secolo, in linea con molte ricerche sulla storia della matematica. Numerosi contributi didattici attribuiscono all'ambito storico grande importanza nella didattica (Fauvel & van Maanen, 2000) e così può accadere che gli argomenti storici e le fonti originali, anche relativi alla crisi dei fondamenti siano impiegati dagli insegnanti con lo scopo di fare apprezzare agli studenti lo sviluppo di teorie e concetti matematici, partendo dall' 'infanzia' antica per giungere alla 'maturità' odierna, identificando quest'ultima con il più compiuto tentativo di dare risposte ai paradossi ed anche con le nozioni matematiche classiche. Si rischia così di perdere di vista la problematicità scatenata dalla crisi dei fondamenti e i risultati che scaturiscono dalle basi epistemologiche delle varie proposte di soluzione della crisi stessa, come affermano Creath & Maienschein (2000)

> "When there are competing epistemological frameworks, whether because of different styles of work or because of divergent ideologies, how do those differences play out in the science done as a result?"

A nostro parere le odierne ricerche in didattica della matematica assumono una sorta di postulato implicito: si deve insegnare solo la matematica cosiddetta classica; argomenti e situazioni oggetto di studio sono spesso relativi all'insegnamento-apprendimento di contenuti matematici trattati in modo classico. Ciò può trovare ragione nelle proposte ufficiali di curricula per la scuola in cui le analisi approfondite, se lo trovano, hanno poco spazio sia sui programmi, ma ancora di meno nella pratica didattica. Le geometrie non-euclidee sono un'eccezione all'affermazione precedente, ma esse sono quasi esclusivamente presentate con l'ausilio di modelli costruiti all'interno di un ambito euclideo. In questo modo alla geometria euclidea è assegnato un ruolo epistemologicamente preminente, rafforzando oltre tutto l'idea, presente in molti insegnanti che le geometrie non-euclidee siano un fatto accidentale e marginale a fronte della 'vera' geometria. Il fatto stesso di usare una negazione per nominarle assume già di per sé la connotazione di scelta epistemologica.

---

[*] Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dell'Unità locale di ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Parma. Il testo è stato presentato per una conferenza tenuta in occasione del convegno *Una giornata in ricordo di Francesco Speranza. 21 novembre 2008, Parma* e riprodotto, in forma leggermente diversa, sul CD che raccoglieva i contributi all'incontro.

[**] Unità Locale di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Parma.

Da notare che la scelta della matematica classica nei curricola nazionali è diffusa in tutto il mondo, anche in nazioni con una tradizione culturale assai diversa da quella occidentale; c'è pertanto una sorta di *globalizzazione epistemologica ufficiale* che ha aspetti comuni a quella che viene identificata col *Platonismo insiemistico* di cui parlano Borga & Palladino (1997).

Per altro, nella didattica della matematica c'è la ricerca di 'nuclei fondanti', cioè di quei temi disciplinari che siano significativi, *in se*, e che permettano, *per se*(1), una riorganizzazione delle conoscenze. In base a questo approccio, agli studenti viene affidato il ruolo di attori principali nella ricostruzione di importanti argomenti, anche se non hanno la possibilità di portarla a termine in modo completo ed esaustivo, vista la complessità intrinseca dei soggetti trattati.

Tutto ciò quando la ricerca sui fondamenti della matematica specifica esplicitamente questi 'nuclei fondanti', anche se non c'è accordo tra i vari pensatori su quali essi siano. Dall'inizio del XX secolo, scuole di pensiero differenti hanno proposto risposte diverse a problemi fondamentali quali: cosa sono i numeri, gli enti geometrici, le basi per fondare la matematica, riservando un ruolo cruciale agli aspetti logici, oppure insiemistici, a quelli relativi alla teoria delle categorie, agli algoritmi, all'intuizione, ecc. Il panorama è vario: un'istantanea storica di questi problemi può aiutare l'insegnante a comprendere i diversi approcci ed anche le difficoltà degli studenti nell'apprendimento.

Però, solo una conoscenza approfondita dei problemi posti dalla ricerca sui fondamenti può portare un insegnante consapevole ad appropriarsi dei vari concetti, solitamente oggetto di presentazione in classe, aiutandolo nella decisione di tacere oppure affrontare (in modo consapevole) i molti problemi connessi a tali concetti. Ogni argomento matematico, infatti, anche se viene trattato col massimo rigore, nasconde questioni che richiedono una profonda riflessione perché esso si basa su problemi senza un'unica risposta, ma con risposte diverse in relazione alle diverse scelte filosofiche di fondo; e si badi non è una questione di rigore: l'affrontare un argomento col dovuto rigore (relativo ovviamente all'età scolare a cui è indirizzato l'argomento) è una condizione che diamo per scontata, ma questa è già un problema successivo alla scelta di impostazione che si è fatta. Capire e far capire tale aspetto ai propri studenti riteniamo faccia parte dei doveri professionali di ciascun insegnante. Così quando ci si pone il problema (didatticamente rilevante) se uno studente abbia fatto suo un determinato concetto, non si sottolinea a sufficienza che ciò di cui si parla non è qualcosa di assoluto, quanto piuttosto relativo al concetto mediato dall'insegnante, frutto a sua volta dell'epistemologia implicita di quest'ultimo(2).

Purtroppo sembra che, anche nella ricerca didattica, sovente questi problemi non abbiano rilevanza, perché implicitamente si accetta l'idea che esista **la** matematica, quella che viene insegnata nelle scuole(3); approcci differenti hanno solamente un gusto 'esotico' che non trova spazio, in genere, nella disciplina e quindi non permea le ricerche didattiche.

Non di meno, gli studi sui fondamenti della matematica danno luogo ad approcci differenti e ad un atteggiamento critico nei riguardi della conoscenza della matematica (classica), mostrandone limiti e incrinature, proponendo, di fatto, epistemologie della matematica diverse da quella 'imperante'.

2. Epistemologie *esplicita* ed *implicita* ed altro ancora

Prendendo spunto da Speranza (1997) si possono identificare l'epistemologia *esplicita* e quella *implicita*. L'epistemologia *esplicita* cerca di fornire gli strumenti e gli esempi per l'analisi dei contenuti e dei metodi della conoscenza 'certa'.

---

(1) Il lettore può stupirsi della mancanza di accento su '*se*', ma abbiamo utilizzato una dicitura latina tradizionale nel linguaggio filosofico. In termini più attuali e forse più noti avremmo potuto riferirci alla cosiddetta *dialettica strumento – oggetto*, il cui valore didattico è stato bene messo in luce da R. Douady (1986).

(2) In (Iori,2007a), (Iori, 2007b), (Iori, 2007c) e (Iori, 2008) si propone una ricerca e un'analisi sull'epistemologia dell'insegnante sulla sua conoscenza professionale. In particolare, in (Iori, 2007a) si sottolinea come il concetto di "epistemologia" che si evince dalle diverse "definizioni" presenti sui vari testi, quella dell'insegnante (contrapposta a quella della disciplina) si ricollega all'epistemologia vista come disciplina filosofica che si occupa della natura, delle fonti e dei limiti della conoscenza umana ("gnoseologia" o "teoria della conoscenza"). Il lavoro di Iori si pone nel nuovo filone di ricerca in didattica della matematica, denominata didattica C, in cui si pone primo piano proprio l'epistemologia dell'insegnante, la sua formazione, le sue convinzioni e il suo ruolo (si veda (D'Amore, 2006)). Tra le domande proposte nel questionario somministrato a 48 insegnanti di diversi ordini scolastici (compresi specializzati SSIS), quelle che più direttamente interessano il nostro discorso riguardano la richiesta di competenze che deve possedere un insegnante di matematica (Domanda 2) e l'individuazione di criteri per capire se un allievo ha "capito per davvero" un concetto matematico (Domanda 5). Come sottolineato dalla ricercatrice, nelle risposte alla Domanda 2 l'epistemologia della matematica è citata raramente (solo 6 insegnanti).

(3) Diversi insegnanti, ad esempio, vedono nell'uso di modelli geometrici per giustificare questioni algebriche come alcuni prodotti notevoli (soprattutto quadrato del binomio e differenza di quadrati) la conferma di questo articolo determinativo '**la**'. In questo atteggiamento implicitamente si assume che esista **la** geometria e **la** algebra e che coincidano. L'ipotesi di una scelta implicita nella trattazione proposta non è evidentemente contemplata.

Molto importante è la presenza della epistemologia *implicita* dei curricola, dell'insegnante e dell'allievo, perché può essere motivo dell'insorgere di ostacoli. È una constatazione ovvia che anche senza un insegnamento esplicito del tema, al termine di un percorso di formazione della durata minima di 19 anni di studi, dalla scuola primaria alla SSIS (ormai defunta), nell'insegnante si sviluppano quadri di riferimento e scale di valori che possono essere indicati col termine, forse ambiguo, ma suggestivo, di epistemologia *implicita*[(4)].

Meno ovvio può apparire che anche i bambini più piccoli già dai primi anni di scuola non si presentano con la *tabula rasa*, relativamente a processi e conoscenze che si possono ritrovare nella storia della speculazione filosofica. Di tale epistemologia *implicita* degli allievi, l'insegnante deve tenere conto, perché

> "…le forme del sapere di chi insegna, di chi orienta l'apprendimento, non coincidono necessariamente con le forme di chi tesse una rete di significati per la propria comprensione." (Armella, 1999).

Una naturale difficoltà consiste nel far diventare l'epistemologia oggetto di conoscenza esplicita per l'insegnante e chiarirne il ruolo nell'insegnamento, sulla base anche di un pregiudizio secondo cui sia difficile, se non impossibile, introdurre aspetti epistemologici senza una salda base di conoscenze storiche.

D'altra parte la scuola contribuisce allo sviluppo della conoscenza negli allievi, tramite l'insegnamento/apprendimento, per questo l'insegnante deve interrogarsi sulla conoscenza in sé, tenendo conto che sovente le presentazioni delle più comuni tesi o proposte epistemologiche fanno riferimento (implicito) ad un individuo adulto ed istruito, non ad un allievo in formazione.

Strettamente connesso al problema del connubio tra didattica ed epistemologia, si inserisce quello tra didattica e filosofia. Lo snodo cruciale risiede anche e soprattutto nel significato che si assegna a questi termini ed agli obiettivi connessi. Si tratta, in buona sostanza, di fare 'filosofia matematica' o analizzare il rapporto tra la filosofia e la matematica[(5)]? La risposta che a noi sembra più scontata è la prima, ma cosa significa fare della 'filosofia matematica'? E come legare questo aspetto, di indubbio valore culturale, con una esigenza di contenuti con cui la scuola fa necessariamente e continuamente i conti?

Per quanto proponiamo in questo nostro contributo si potrebbe coniare il neologismo *filomatica*, oppure sarebbe più opportuno parlare di matematica filosofica e quindi coniare *matesofia*?

L'ostacolo a fornire la risposta alle precedenti domande è anche da ricercare nella difficoltà, per certi aspetti, di distinguere la matematica dalla filosofia, se per filosofia si pensa ad una approccio razionale alla ricerca della verità.

Il presente lavoro propone alcune chiavi per rispondere a tali questioni, sulla base di progetti o di attività svolte in classe. Alla fine cercheremo di vedere quale risulterà più significativo, secondo noi, tra i neologismi proposti. Si parte da un presupposto che costituirà l'assunto di base del nostro discorso: la 'filosofia matematica' si pone prioritariamente come approccio ai contenuti (o meglio, ai concetti) e come tale non può prescindere dal linguaggio, essenziale per la loro gestione sul piano semiotico.

Tradurre sul piano operativo l'assunto non è semplice, poiché richiede un metodo diverso da quello che normalmente viene proposto: non quindi dalla filosofia ai contenuti specificamente matematici, quanto dai contenuti all'individuazione del pensiero su cui si reggono.

In questo approccio si intravede già una nostra posizione che può essere usata per distinguere il tipo di analisi che proponiamo dei sistemi filosofici o epistemologici: questi spesso procedono al contrario, collocando i vari soggetti di speculazione in un quadro teorico che vorrebbe essere tanto comprensivo, quanto esplicativo.

L'irruzione dell'incompletezza nella discussione metamatematica ci consiglia di andare cauti e quindi di fare proposte che traggano spunto dalla prassi usata nella presentazione dei contenuti, per riconoscere nel consueto modo di insegnare inaspettate coincidenze con sistemi o approcci filosofici noti nella letteratura. Marchini ha presentato, in alcune conferenze, esempi di come sia possibile una sorta di epistemologia *locale*, come occasione di riflessione sulla conoscenza matematica spesso inglobata in momenti e scritture consuete dell'attività

[(4)] Durante un laboratorio di didattica della matematica tenuto da Achille Maffini pressa la SSIS di Parma, è stato chiesto agli specializzandi di indicare, come commento ad una serie di frasi riferentesi a varie concezioni della matematica (si veda nell'allegato 1 la scheda consegnata agli specializzandi), la loro concezione della matematica. I risultati, che tendenzialmente variano da anno in anno (senza differenze significative tra le risposte dei laureati in matematica e i laureati in fisica), evidenziano in generale una prevalenza della concezione formalista, seguita, con frequenze molto vicine, dalle concezioni platonista e costruttivista. Chiaramente lo strumento proposto non aveva un obiettivo diagnostico, quanto piuttosto quello di porre i futuri insegnanti nelle condizioni di riflettere criticamente sulla loro epistemologia implicita della matematica.

[(5)] O anche una storia del rapporto tra filosofia e matematica? Oggi nelle aule scolastiche ed anche in quelle universitarie, i rapporti tra matematica e filosofia sono spesso ignorati. Si perde così l'occasione per presentare la matematica come una 'scienza umana' o, addirittura, come una chiave di lettura ed interpretazione delle cosiddette 'scienze umane'.

didattica. Ma l’aggettivo *locale* connesso ad epistemologia può provocare perplessità, anche per la presenza nella letteratura di questa locuzione. Chiariremo meglio la nostra posizione in un successivo paragrafo.

Si badi bene che, seppure l’argomento sia indirizzato soprattutto verso l’insegnamento della matematica, nulla vieta di fare il percorso inverso, cioè utilizzare, in ambito filosofico, contenuti matematici come pretesto per una riflessione sulle modalità di approcci di carattere epistemologico alle due discipline. È quanto è stato proposto, ad esempio, nei laboratori tenuti da Achille Maffini dell’indirizzo Scienze Umane della SSIS Emilia Romagna della sezione di Parma e di cui si fornisce una parziale documentazione in (Maffini, 2002). In quel contesto, ciò che importava, preminentemente, era fornire le basi per un possibile percorso di confronto interdisciplinare. Il risultato più significativo è stato il vedere, attraverso le unità didattiche prodotte dagli specializzandi per l’esame, come lo stesso argomento di carattere matematico potesse essere poi ‘piegato’ per rispondere ad esigenze di conoscenza di tipo filosofico(6).

3. Epistemologia *implicita* degli allievi

Ci sono in letteratura contributi sull’epistemologia dell’insegnante, come ad esempio il già citato lavoro di Iori e la relativa bibliografia. Vogliamo offrire qui alcuni esempi di come sia forte e importante la componente epistemologica implicita nel bagaglio di conoscenze, molte delle quali non scolastiche, degli allievi, anche i più piccoli, come un implicito suggerimento agli insegnanti di analizzare la propria epistemologia *implicita*.

I primi esempi che seguono sono tratti da esperienze nella scolarità precedente la Scuola Secondaria di Secondo grado e mettono in luce come gli aspetti investigati siano assai raramente oggetto di insegnamento esplicito nell’intero curricolo degli studi. Quindi c’è il reale rischio che su temi matematici importanti e filosoficamente rilevanti (spazio, uguaglianza, infinito, approssimazione, problemi connessi alla natura dei numeri reali, ecc.) anche negli anni di scuola superiore, gli studenti possano avere come unica base della comprensione solo le loro pre-concezioni, maturate al di fuori della scuola e nei primi anni di scolarità obbligatoria o anche precedentemente ad essa.
Affinché queste pre-concezioni siano oggetto di studio e riflessione, bisogna fare in modo da porle in luce e solo così l’insegnante ne può tenere conto, per

- impostare la sua azione didattica, in modo rispettoso delle idee dei giovani,
- poter farle evolvere

e, una volta giunte ad una consapevolezza matura,

- farle accettare in modo critico.

Un campo di ricerca didattica, ed anche di filosofia(7), è l’identificazione della presenza di importanti quadri teorici abbozzati in modo inconsapevole, ad iniziare dalla scuola dell’infanzia. Per gli alunni più piccoli ci si deve confrontare con la difficoltà di comunicazione. Infatti, non è possibile una ‘intervista’ diretta sul tema da indagare e si devono quindi trovare strumenti che rendano possibile la ricerca con le finalità fissate. Ogni indagine in questo campo richiede uno studio preliminare sugli strumenti da impiegare e sulla loro rispondenza allo scopo.

In (Marchini, 2008) si mostra come bambini di ultimo anno di scuola dell'infanzia e dei primi due anni di scuola primaria, rispetto all'intuizione dello spazio, possano ripartirsi in due gruppi: quelli che rivelano un’interpretazione vicina a quella platonica dello spazio indipendente e quelli più vicini all’interpretazione aristotelica dello spazio non indipendente (Speranza, 1977). Ciò è rivelato mediante il disegno di ‘cornicette’. Anche la bibliografia riportata da Marchini (2008) può fornire utili suggerimenti per indagini di questo tipo. Sorprendentemente si hanno sopravvivenze di questi approcci personali anche in studenti di scuola secondaria, come mostrano alcuni protocolli raccolti.

Nello stesso filone di ricerca si può collocare quanto esposto da Pezzi (2002), in cui il mezzo espressivo del bambino è principalmente la manipolazione.

Nel presente testo si mostrano due episodi di una ricerca iniziata con altre finalità, e che qui vengono analizzati dal punto di vista della rivelazione di epistemologie implicite.

---

(6) I temi tratti nei laboratori SSIS sono stati due: l’*infinito* e le *geometrie non-euclidee*. In particolare con questo secondo argomento si è visto come un tema matematico abbia svolto il ruolo di mediatore di conoscenza filosofica, declinato secondo diverse direttrici.

(7) L’individuazione di aspetti filosofici deducibili dalle pre-concezioni dei bambini pongono l’interrogativo se queste presenze sono dovute all’acquisizione della motricità, del linguaggio, ecc., oppure se i filosofi del passato (e non solo) hanno dato voce a una sorta di filosofia connaturata con l’essere umano. Una situazione analoga sussiste per quanto riguarda la matematica. Interessante la posizione antropologica di (Dehaene, 2000):

> “L’universo è davvero scritto in linguaggio matematico, come affermava Galileo? Sono piuttosto incline a pensare che questo sia l’unico linguaggio che noi sappiamo leggere.”.

Per meglio intendere la nostra interpretazione delle risposte degli allievi, si utilizzeranno nel seguito caratteri diversi, secondo la seguente codificazione: abbiamo evidenziato le diverse presenze di concetti quali l'approssimazione e l'infinito, distinguendo quest'ultimo in potenziale e attuale. Per questo scopo abbiamo utilizzato il colore come elemento distintivo. A partire da tre colori (blu, rosso, verde) come indicatori di specifici aspetti, sono state proposte per ciascun colore due intensità per individuare categorie specifiche. Ne è risultato un codice dei colori è:

Blu: per indicare l'infinito. Col blu segnaliamo presenze di infinito attuale, con l'azzurro, presenze di infinito potenziale.
Rosso: approssimazione. Rosso scuro, approssimazione matematica, rosso, approssimazione fisica.
Verde: compresenza di infinito e approssimazione. Verde, maggiore presenza dell'infinito, verde limone, dell'approssimazione.

Per rendere meglio visibile il colore abbiamo anche utilizzato un font diverso, Arial Black. Tale scelta può, forse, rendere faticosa la lettura, ma pone bene in evidenza le scritte colorate.

3.1. Il progetto Menone nella Scuola Primaria (Classi IV e V)

Il problema prende spunto dal famoso passo dell'omonimo dialogo platonico in cui Socrate pone ad un servo di Menone il quesito di costruire un quadrato di area doppia rispetto a quella di un quadrato assegnato(8).

L'attività è stata proposta a 10 classi, assegnando un quadrato bianco e 4 coppie di quadrati colorati. I quadrati sono tutti uguali tra loro. La consegna prevedeva di costruire un quadrato con area doppia di quello bianco, utilizzando tutto il cartoncino di una delle coppie di quadrati colorati, da ritagliare ed incollare opportunamente sui fogli bianchi. Unici strumenti consentiti: forbici, righello non graduato, colla.

La scelta di far operare mediante artefatti (i quadrati di cartoncino) è dettata dal curriculum della Scuola Primaria che prevede, appunto, la trattazione di vari argomenti a livello visuale e operativo, mediante manipolazione.

Una volta trovata la soluzione geometrica (il quadrato di area doppia), nella fase successiva si è richiesta la determinazione del rapporto tra la diagonale ed il lato del quadrato.

L'attività è stata svolta in lassi di tempo variabili dalle 2 alle 3 ore. La differenza è prevalentemente dovuta ai diversi tempi impiegati dagli alunni per le costruzioni dei quadrati, tempi dipendenti in larga parte dai loro prerequisiti. Va infatti segnalato che le classi coinvolte si riferivano a contesti molto diversi e distanti, non solo chilometricamente, ma anche dal punto di vista della formazione specifica.

I risultati raggiunti con l'attività si possono sintetizzare nei seguenti punti:

1) L'importanza dei prerequisiti: nelle classi in cui è stato fatto un lavoro specifico sui ricoprimenti e sulla scomposizione di poligoni, la soluzione è stata trovata in poco tempo (circa 10-15 minuti).

2) Come tentativi iniziali, tutti gli alunni ritagliano i quadrati in rettangoli (o quadrati). Una prima motivazione di questo atteggiamento va ricercata nella 'analogia' con la figura di partenza delle figure utilizzate (si parte da un quadrato e si pensa che la decomposizione debba essere in quadrati o rettangoli). Un bambino (di una classe V) ha però evidenziato come il riferirsi alla figura quadrata si configuri come un tentativo di trovare l'unità di misura adeguata allo scopo: nella sua convinzione, sarebbe, infatti, bastato ritagliare quadretti "sufficientemente piccoli".

Alla domanda dell'insegnante "ma come fai a sapere qual è il quadrato di area doppia se non conosci il lato?" ha risposto "ma come faccio a conoscere il lato se non ho il quadrato e non ho la misura?".

Nella risposta è interessante evidenziare l'atteggiamento filosofico del bambino: quale priorità hanno, nella conoscenza, i problemi dell'esistenza di figure? Le figure esistono perché si possono costruire (secondo una concezione euclidea) o esse esistono di per sé e da esse se ne deducono gli elementi specifici?

Tali domande rimandano esplicitamente alle posizioni ontologiche e di teorie filosofiche (formalismo, platonismo, neo empirismo, ecc.) sulla natura degli oggetti matematici. Riteniamo che si possa interpretare la risposta del bambino come una sua implicita adesione alla concezione platonista.

3) È stato indotto un paradigma estetico riferito all'individuazione della soluzione 'più bella'. Tra le varie soluzioni proposte dagli alunni (riconducibili a quanto riportato in figura 1, è stato chiesto quale fosse la 'più bella'. Il tratto rilevante è stato il passaggio da un'idea soggettiva su base estetica ad una condizione oggettiva legata al numero dei tagli necessari e quindi alla maggiore o minore introduzione di errori (la soluzione migliore,

(8) Ci riferiamo alla versione del *Menone* come appare in (Platone, 1991).

da questo punto di vista, è stata considerata la prima della figura 1 e tale soluzione si è guadagnata l'appellativo di 'più bella'). Detto passaggio, riconducibile ad un'idea di 'giudizio consapevole', è stato compiuto in tutte le classi in cui è stata proposta l'attività.

Ci si consenta una parentesi esplicativa sul ruolo del 'giudizio consapevole'. Spesso si parla di approccio critico alla matematica e ai risultati ottenuti in specifiche situazioni problematiche. Ciò che per noi è invece prioritario nell'idea di 'giudizio consapevole' è che lo studente di qualunque età colga in un ambito anche esterno alla matematica in senso stretto, ad esempio in ambito estetico (e quindi legato ad un giudizio di 'bellezza'), una consapevolezza che riporti la valutazione sul piano del 'vantaggio' razionale. La valutazione sulla costruzione del quadrato è apparentemente semplice, ma se sviluppata come paradigma di approccio, può aprire interessanti prospettive future. Ad esempio, prima di proporre un teorema può essere opportuno valutarne 'esteticamente' l'importanza (si pensi ad esempio al teorema delle matrici orlate di Kronecker per la determinazione del rango di una matrice) oppure per giustificare alcuni approcci tipici della geometria analitica. A tale proposito, si allega una scheda di lavoro (Allegato 2) proposta in una classe terza Liceo Scientifico in cui, utilizzando il software Cabri si induce lo studente a ricercare il sistema di riferimento migliore per lo studio di coniche facendo leva su una valutazione estetica della relativa equazione. Lo sviluppo di modalità che portino a 'giudizi consapevoli' non sono per noi secondari rispetto ad altre finalità: nella nostra idea la filosofia matematica, dovrebbe sostanziarsi anche nella possibilità di sviluppare scelte, scelte che muovano dal riconoscimento di ottimizzazioni razionali. Non si tratta di individuare strumenti che meglio rispondano a determinati problemi (come normalmente è inteso il senso critico nei confronti degli oggetti matematici), quanto piuttosto riconoscere nelle situazioni strutture e condizioni che portino a scelte razionali soggettivamente consapevoli.

Passare dal piano soggettivo per riconoscere ottimizzazioni nei concetti comporta una presa di coscienza del soggetto di una razionalità comune e questo si inserisce in un filone filosoficamente significativo (dal punto di vista matematico) che prende avvio soprattutto nell'Ottocento (ma riscontrabile anche negli *Analitici Secondi* di Aristotele) e che trova nella famosa frase di Cantor (1932): "Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit", la migliore connotazione. Nel caso specifico, lo studente è libero di scegliere modi di procedere e tagli da effettuare (e questo non influisce sulla sua capacità di 'vedere' nel risultato un quadrato), ma diventa consapevole della opportunità, in quel contesto, di una specifica soluzione.

Su questo aspetto torneremo anche in seguito a proposito della Scuola Secondaria di primo grado.

Torniamo alla descrizione della sperimentazione effettuata. È importante sottolineare come spesso gli alunni 'riconoscessero' nella figura ottenuta un quadrato anche in presenza di evidenti errori di costruzione. In questo atteggiamento è possibile riscontrate una tendenza all'astrazione vista non come difficoltà, ma al contrario come esigenza: all'approccio empirico è connaturato un 'errore' che solo l'approccio razionale (riscontrabile in questo caso nel riconoscimento delle proprietà delle figure) permette di superare.

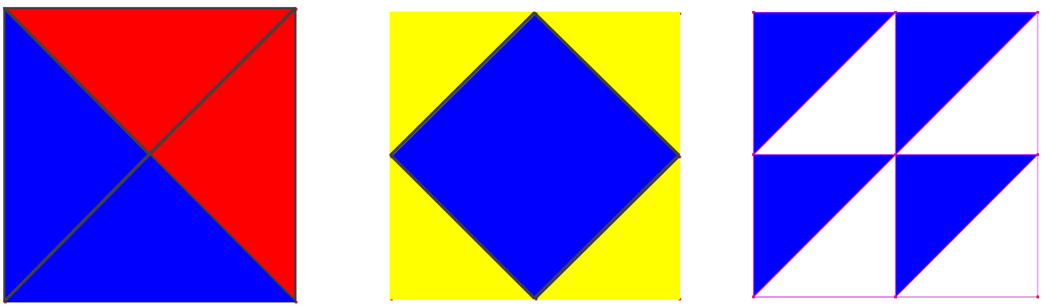


Figura 1

4) L'uso diffuso, malgrado le consegne iniziali lo proibissero, del righello graduato evidenzia una tendenza ad identificare il segmento (lato del quadrato) con la sua misura (vedi anche punto 2 precedente), segnalando così, conformemente ad un atteggiamento pitagorico, una maggiore dimestichezza con gli enti aritmetici e il conseguente tentativo di riportare ad essi gli enti geometrici[9].

5) Emergono nelle attività ipotesi di accettabilità dei risultati. Tali ipotesi sono viste in termini semantici come condizioni di approssimazione legate a problemi specifici (questo è avvenuto quando si è passati dall'attività alle applicazioni di quanto appreso).

(9) Su questo aspetto torneremo in seguito a proposito della Scuola Secondaria di primo grado.

"Nei quadrati più piccoli non si potrebbe neppure vedere la differenza."[10] (V Primaria)

"Rapporto uguale circa a 1,41. Si può accettare perché se ci metto dei pezzettini più piccoli non si vede neanche." (V Primaria)

"Quante cifre decimali devo considerare?" (relazione tra il numero delle cifre decimali e l'utilizzo in contesti pratici del rapporto numerico trovato) (V Primaria)

6) La percezione che il rapporto (visto come operazione matematica legata alla misura) evidenzia la differenza concettuale tra misura fisica (condizione di determinazione) e misura matematica (condizione di esistenza).

"Andare molto avanti nella divisione, cioè trovare molti decimali" (V Primaria)

3.2. Il Progetto Menone nella Scuola Secondaria di primo grado (Classe II)

L'attività consiste nel ripercorrere con la classe il problema di Socrate utilizzando il dialogo come canovaccio noto solo all'insegnante e non agli alunni. In sostanza l'insegnante recita la parte di Socrate, gli alunni quella del servo, ma senza conoscere il copione. Con ciò si voleva appurare se gli alunni ricalcano lo stesso percorso (o un percorso analogo) a quello del servo di Menone.

I risultati ottenuti con l'attività si possono riassumere nei seguenti punti:

A) L'esistenza della misura del segmento è vista in relazione all'esistenza della lunghezza; in sostanza l'esistenza della grandezza geometrica era per gli alunni una condizione 'fiduciale' sull'esistenza di un opportuno insieme numerico in cui 'trovare' la misura del segmento. È riscontrabile quindi una sorta di 'bisogno' (traducibile formalmente col fatto che la relazione che associa ad un segmento un opportuno numero, che ne individui una misura, sia una funzione), lo stesso che didatticamente si riscontra nelle condizioni di ampliamento degli insiemi numerici (e anche in questo caso il bisogno è riconducibile all'esigenza di far diventare ovunque definite relazioni che sono solo funzionali). Un ragazzo, ad esempio, di fronte alla domanda "*Perché vorreste che ci fosse un numero associato al segmento*" ha risposto

"Perché altrimenti ci sarebbe un buco nella retta dei numeri".

Abbiamo riportato in blu la frase precedente perché la risposta richiama un'idea di completezza dell'insieme dei numeri reali ed una prima intuizione del pensiero strutturale.

Un'altra risposta per noi significativa è la seguente:

"Quindi si riesce a costruire il quadrato, ma non si riesce trovare la misura del lato perché il numero è un decimale illimitato."

B) Il dialogo platonico, utilizzato come canovaccio non noto agli studenti, ha prodotto lo stesso percorso e grosso modo le stesse risposte date dal servo di Menone (e questo in tutte le classi in cui è stato presentato). Ciò permette di vedere nel dialogo quello che era stato uno dei meta-obiettivi di Platone: il suo ruolo didattico. Di fatto Platone propone 'un esempio' di come la conoscenza possa essere acquisita e, come sottolineato da diversi commentatori (Toth, 1998), (Stellica, 1994), (Serres, 1994), non è un caso che utilizzi un problema matematico per sostenere il suo assunto.

C) Il dialogo *Menone* ha al suo interno due punti critici che lo hanno reso oggetto di studio: la rottura del contratto di Socrate col servo[11] e, conseguentemente, 'la comparsa dell'*irrazionale* nell'universo del *logos*' (Toth, 1998). Il brusco e significativo passaggio dalla richiesta numerica (la misura) a quella geometrica (esistenza del segmento) non poteva non creare problemi ad allievi di 11-12 anni e così in effetti è stato. Il cambio di richiesta (che può configurarsi come la rottura significativa del contratto didattico iniziale), è stata vissuta dagli studenti in modo destabilizzante e con difficoltà. Tracce significative di ciò sono rintracciabili anche nelle relazioni degli alunni:

"Così il Prof. ci ha posto un'altra domanda: è sicuro che il numero che corrisponde alla misura del lato esista?[12] A questo punto ha cambiato consegna: dovevamo trovare, al posto della misura del lato, il lato stesso del quadrato con area doppia rispetto al quadrato di partenza."

---

(10) La considerazione si riferisce al trovare molti decimali procedendo nella divisione.

(11) "Il filo della discussione passa bruscamente dall'aritmetica alla geometria: *se preferisci non fare calcoli allora mostra*. […] Socrate bara: egli sa che non troverà la lunghezza esatta" (Serres, 1994).

(12) Molte relazioni riportano questa come domanda, mentre nella registrazione dell'attività emerge come la domanda fatta dall'insegnante, a questo punto, fosse relativa all'esistenza del lato del quadrato (la richiesta sull'esistenza della misura è successiva). In questo atteggiamento si possono evidenziare diversi aspetti, sia di carattere epistemologico che didattico. Dopo il fallimento dei pitagorici (dove per fallimento non si intende la scoperta delle grandezze incommensurabili, quanto la percezione della presenza dell'infinito attuale nel problema della misura), la geometria ha scelto la strada delle grandezze, strada di cui gli *Elementi* di Euclide costituiscono una significativa testimonianza. La misura

"Allora il prof ha voluto lasciare in sospeso la questione [dell'esistenza della misura] e siamo passati a geometria."

"L'ho trovato difficile, non riuscivo a capire cosa volesse."(13)

"Lasciati da parte i numeri, siamo andati alla parte pratica [intendendo in questo modo la geometria]"

"Abbiamo tralasciato la ricerca del lato e abbiamo provato a costruirlo."(14)

"In questa lezione ho capito che possiamo rappresentare il quadrato di area doppia ma non possiamo trovare il numero. Dovremmo andare avanti ma non potremo mai arrivare al numero preciso."

"Siamo riusciti a disegnare il lato, ma il numero esatto non l'abbiamo trovato e quindi la figura geometrica è stata approssimata".

D) L'uso della calcolatrice porta problemi. Si è assistito ad un passaggio dalla fiducia nello strumento nell'individuazione della soluzione (espressa da $\sqrt{8}$)(15) alla sua messa in discussione. Ciò ha permesso di riconoscere l'inadeguatezza dello strumento, non solo dal punto di vista pratico (e quindi obbligare a guardare in modo critico i risultati conseguiti), ma anche dal punto di vista concettuale. Il problema dell'esistenza dell'irrazionale diventa prima di tutto un problema di non esistenza di un razionale; la non esistenza presuppone sui numeri razionali una quantificazione universale (percepita anche durante la costruzione col metodo di bisezione di una successione di numeri razionali approssimanti $\sqrt{8}$) con un conseguente e naturale disorientamento degli alunni (Marchini, 2012). La dimostrazione della non razionalità è quindi partecipata come una condizione di economicità (che ricorda le posizioni dell'empiriocriticismo di Avenarius), oltre che un modo per ottenere (al finito) certezze.

"Nonostante il risultato si avvicinasse molto a 8, la misura del lato non era precisa"(16)

"Però con gli strumenti che avevamo non riuscivamo a calcolare il lato e continuando a fare molti tentativi ci chiedevamo se il numero esistesse davvero"

"Il professore ci ha dimostrato che il numero non è razionale".

"Secondo me la radice non esiste perché si possono trovare infinite cifre, mi avvicino, ma non lo trovo".

"Andando avanti così(17) trovo dei valori sempre più vicini a 8 per difetto o per eccesso."

"… non si arriva mai alla fine allora ci siamo chiesti: ma questo numero esiste davvero?"

E) Si è riconosciuta la necessità di un ampliamento dell'insieme dei numeri razionali e l'individuazione della tipologia di numeri richiesti (numeri decimali illimitati non periodici) come unica tipologia 'non nota'. In questa idea di completamento risiede la probabile necessità di fornire un senso ad ogni forma numerica (decimale). La difficoltà, anche per gli alunni, è nella capacità formale di costruirli e pure in questo aspetto è riscontrabile un atteggiamento filosofico riconducibile al problema dell'esistenza di un ente matematico.

"Da questa lezione abbiamo concluso che questo numero non fa parte dell'insieme, che già conosciamo, dei numeri razionali, ma ad un altro insieme numerico."(18)

---

compare molto più tardi e trova la sua collocazione definitiva nell'Ottocento. Ciò che invece rimane, in termini epistemologici, è la *speranza*, che aveva sorretto il lavoro dei pitagorici, di esprimere le grandezze mediante numeri. La didattica della scuola Primaria in Italia ha fatto propria questa speranza, facendola diventare *necessità*. Le grandezze sono così sparite dai curricula, lasciando il posto alle misure (figlie a loro volta di mediatori didattici quali i numeri-colore o semplicemente il dominio del foglio a quadretti (Vighi, 2006)). Risulta quindi naturale che per gli alunni un segmento sia identificato con una misura, non percependo la distinzione tra i due enti.

(13) La difficoltà evidenziata dall'alunno è originata dal cambio di richiesta e dal non capire concretamente quale fosse la consegna.

(14) L'affermazione si ricollega a quanto detto nella nota 7: la ricerca del lato è identificata con la ricerca della misura. Interessante comunque la percezione di 'costruibilità', dove questo concetto, in termini euclidei, richiede la conoscenza di quali strumenti si hanno a disposizione per farlo. In questa affermazione dell'alunno si può anche vedere la 'disponibilità' ad una diversa idea di matematica rispetto a quella precedentemente vista e riconducibile al platonismo: gli oggetti matematici potrebbero non esistere se non si è in grado di costruirli. Da osservare che in questo caso non si afferma che l'alunno pensa ciò, quanto piuttosto che non lo esclude. La matematica quindi può essere anche una costruzione dell'uomo (in analogia al costruttivismo di Kronecker) e questa idea può essere presente anche in giovani alunni.

(15) Attualizzando il dialogo platonico in cui si parte da un quadrato di lato 2 piedi.

(16) L'alunna si riferisce al tentativo fatto con la calcolatrice e il successivo elevamento a quadrato del valore trovato.

(17) Cioè sempre dimezzando l'intervallo individuato dai valori che forniscono approssimazioni per difetto e per eccesso.

(18) È interessante notare come ci sia da parte dell'alunno la certezza che questo numero esista, rafforzando così la convinzione della presenza di idee fiduciali di esistenza. Queste che sembrano essere pre-concezioni degli alunni, si radicano, a nostro avviso, sulle basi stesse della filosofia occidentale che, non dimentichiamolo, è soprattutto una filosofia dell'Essere. Sarebbe però puramente accademico pensare che l'importanza di questa osservazione sia solo di tipo filosofico. Noi riteniamo, al contrario, che questo sia uno dei casi significativi in cui il paradigma filosofico induce una lettura in chiave epistemologica della conoscenza dello studente con chiare ricadute sul piano didattico: l'insegnante che sa o prende coscienza di questo 'atteggiamento' da parte dell'alunno sa anche che può contare su un terreno fertile per l'introduzione di specifici argomenti. L'azione didattica quindi non dovrebbe essere vissuta come estranea proprio perché fa leva 'su un

"Dopo questa lezione però io non ero convinta e ci ho provato da sola ad andare avanti con i numeri ma ho visto che dovevo aggiungere i decimali. Questo mi ha fatto capire che i decimali sono infiniti."

"I decimali continuano ad aumentare e non finiscono."

"Avrà sempre cifre diverse, però non riusciamo ad immaginarlo tutto."

"Ma allora i numeri irrazionali sono tanti perché di tanti numeri non ho la radice esatta. Mi sembra che l'infinito in matematica sia dappertutto."

F) La costruzione delle successioni approssimanti (qualcuno le ha classificate come un "*particolare metodo*"), è vista sia come modalità di lavoro che come strumento di approssimazione. Inoltre le successioni approssimanti sono a loro volta adottate come strumento (matematico), che evidenzia l'inadeguatezza del righello come strumento (fisico), nella determinazione della misura della diagonale. In quest'ottica la costruzione delle successioni si configura come un primo passo del passaggio dal processo all'oggetto per quanto riguarda il concetto di limite.

"È la misura della diagonale… Non riesco a misurare perché devo andare sotto i millimetri."

A: "È una lunghezza, quindi esiste. Possiamo misuralo col righello."

P:" Il righello non è uno strumento molto preciso."[(19)]

Insegnante:

"Ma allora il problema è: questo numero esiste e quindi vale la pena andare avanti col nostro metodo oppure con questo metodo non riusciamo a trovarlo? Questo che cosa significherebbe?"

Alunno 1: "che il metodo non funziona"[(20)]. Alunno 2: "oppure che non c'è"[(21)].

"Ci si avvicina sempre di più al valore ma non si raggiunge mai perché si trova sempre un punto medio."[(22)]

G) Come detto, l'attività sul *Menone* si inserisce in un percorso più generale finalizzato alla costruzione del concetto di limite. Nei riscontri degli studenti si evidenziano, in effetti, i primi accenni a condizioni di completezza per un insieme numerico e al concetto di limite. Quest'ultimo, in particolare, non è solo visto e vissuto dal punto di vista tecnico, ma deve essere 'pensato', anche in ottica didattica come un concetto che affonda le sue radici sui capisaldi culturali occidentali con la conseguente necessità di operare delle 'scelte' (filosofiche) sul piano della sua rappresentazione. I risultati ottenuti ci sembra rafforzino la nostra idea della presenza precoce nei primi anni di scolarità dei presupposti filosofici alla base di concetti matematici anche complessi. C'è da dire che non si tratta di una presenza generalizzata tra gli alunni di una stessa classe, ma egualmente bastano uno o due alunni per innescare in classe un processo di avvicinamento al limite, e soprattutto è indispensabile che l'insegnante non lasci cadere nel nulla queste pre-concezioni così rilevanti per gli sviluppi matematici successivi. Il favorire lo sviluppo di tali presupposti risulta quindi un modo per costruire negli alunni gli strumenti necessari per affrontare e superare le difficoltà che tali concetti comporteranno.

"I valori della tabella si avvicinano sempre di più, per cui ci sarà il numero a cui arrivano"

Insegnante: "Secondo voi i valori continueranno a saltellare così? "

Alunno: "Tendono…. a fare così. Tendono ad avvicinarsi a quella che dovrebbe essere la misura."

Le ultime considerazioni offrono un quadro abbastanza ampio e complesso di cui l'insegnante deve tenere conto.

---

pensiero' di cui l'alunno è partecipe. Nelle unità di apprendimento, costituenti i mattoni del percorso didattico nella scuola dell'obbligo, viene data molta enfasi ai 'bisogni' dell'alunno e al loro essere alla base della costruzione dei percorsi didattici. A volte tali bisogni possono essere di difficile individuazione, o meglio, può essere difficile tradurli in contesti didattici. Il nostro invito, anche in base delle precedenti osservazioni, è di andare oltre e pensare al bisogno in termini soprattutto culturali e non solo contingenti.

[(19)] Con A e P indichiamo due studenti, di cui si riporta il dialogo.

[(20)] Dunque per l'Alunno 1 il numero esiste e il metodo è inadeguato per trovarlo, ma l'esistenza prevale e si può riferire la risposta ad un contesto platonista.

[(21)] L'affermazione 'drastica' dell'Alunno 2 potrebbe indicare una posizione che accetta gli enti matematici solo sulla base di una loro costruzione possibile, dando così fiducia nel processo in qualità di costitutore e garante dell'oggetto. In entrambi i casi (Alunno 1 e Alunno 2) ciò che emerge come peculiare è la fiducia in "qualche cosa".

[(22)] Il riferimento è alla successione e al fatto che i termini della successione sono tutti numeri razionali, quindi una sorta di anticipazione del procedimento di bisezione usato per la determinazione di soluzioni approssimate e nel teorema degli zeri di Bolzano. C'è anche un altro aspetto, relativo alla regolarità delle cifre presenti nella rappresentazione decimale dei numeri, emerso anche in un'altra attività ispirata ai paradossi di Zenone. Per tale risultato si veda (Grugnetti *et al*, 2006).

4. Epistemologia *del concetto*

Come si è detto prima, si potrebbe chiamare *locale* un'epistemologia che invece di rifarsi a un unico quadro teorico di riferimento si avvale, volta a volta, di scelte suggerite dalla necessità di presentare, al meglio, un argomento in classe, allo scopo di facilitarne l'apprendimento. Però l'aggettivo *locale* connesso all'epistemologia è già presente nella letteratura. Ad esempio Kusch (2002) parla di norme epistemiche locali intendendo le norme adottate e condivise da una certa comunità storica. Longino (1997, 2000) ribadisce l'idea che locale si riferisca a correnti di pensiero che interagiscono allo scopo di costruire l'obiettività della conoscenza scientifica e fornisce l'esempio di studi biologici sullo stesso argomento che hanno spiegazioni teoriche diverse ed incompatibili. In questi casi fornisce un esempio di giustificazione scientifica basata sulla molteplicità di pareri della comunità scientifica, come una forma di epistemologia (*globale*) ottenuta da epistemologie *locali*.

Per evitare ambiguità, visto che pensiamo al docente che in classe presenta un argomento di matematica, adattando o modificando il suo punto di vista all'esigenza dell'insegnamento, parleremo di epistemologia *dipendente dal concetto*, o più brevemente, di epistemologia *del concetto*. Di fatto si tratta di un esempio di epistemologia *implicita* dell'insegnante, perché, in genere, vissuta in modo non consapevole da parte del docente.

La nostra proposta di lettura epistemologica della attività didattica è sicuramente modesta e limitata, ma potrebbe risultare strumento utile per un'analisi a priori delle difficoltà di insegnamento-apprendimento. Il termine che abbiamo coniato è quello di epistemologia *del concetto*, in contrapposizione ai sistemi epistemologici *globali* che si offrono come ipotesi di ricostruzione della conoscenza matematica nel suo complesso. A sostegno di quanto proponiamo, nelle sezioni seguenti mostriamo esempi tratti da argomenti indicati per il segmento terminale della Scuola Secondaria di secondo grado.

4.1. Professioni di fede

La storia dei fondamenti della matematica mostra suddivisioni tra scuole di pensiero in specie di sètte: i pensatori di una corrente (talvolta suddivisi ulteriormente in sotto-correnti) contro tutti gli altri. Tali separazioni nette tra i matematici, di fatto, hanno impedito di adottare un atteggiamento di *cosmopolitismo* (Stoico), in base al quale trarre il buono laddove esso potesse essere trovato. Così colui che avesse scelto un'epistemologia *globale* legata ad un sistema fondazionale, avrebbe fatto una sorta di atto di fede religioso; ed ogni suo cambiamento di opinione avrebbe avuto il connotato di un'apostasia.

Siffatta rigidità è tuttora presente (ad esempio nell'ambito delle ricerche sui fondamenti della probabilità). La maggioranza dei matematici di oggi (matematici platonisti secondo (Bishop, 1967)), non accetta punti di vista diversi, riuscendo, quasi completamente, a confinare approcci alternativi alla matematica in sorte di 'riserve indiane'[(23)].

E pensare che un esempio luminoso di flessibilità ci giunge da Euclide, il quale adegua la sua visione degli oggetti matematici sulla base di un platonismo ingenuo, seguendo poi con scrupolo le linee guida tracciate da Aristotele per descrivere una scienza deduttiva.

Le ricerche in didattica della matematica spesso adottano tale scelta esterna al campo didattico, ma il punto di vista classico potrebbe essere uno dei motivi per cui la matematica è ritenuta rigida e noiosa.

Gli insegnanti cha abbiano ben presente gli aspetti epistemologici, possono presentare, anche senza bisogno di tracciarne l'origine storica, simultaneamente, i differenti approcci allo stesso tema e in base a ciò iniziare a seminare il dubbio (e il pensiero critico) sulla 'certezza' della conoscenza matematica. Diffondere un simile atteggiamento sarebbe salutare per la nostra disciplina (ed importante per la formazione): spesso gli studenti hanno l'impressione che la matematica sia calata dall'alto, da una qualche divinità non sempre benevola, e del tutto indifferente a quelli che credono essere i loro bisogni.

Gli insegnanti in servizio ed in formazione posti di fronte a questa problematica del dubbio, si dichiarano d'accordo sul valore educativo (che trascende il solo contesto matematico), ma esternano una reazione negativa, giustificandola con l'asserto che gli studenti richiedono certezze[(24)]. Senza voler interferire con questi aspetti psicologici, osserviamo unicamente due aspetti del problema:

[(23)] Famoso il caso di Hilbert che fece di tutto per cacciare Brouwer dal comitato scientifico di una rivista sostenendo che il suo esempio (come matematico) poteva essere dannoso per i giovani.

[(24)] Sarebbe interessante capire se sotto questo atteggiamento degli studenti non ci sia anche quello dei loro insegnanti. Sarebbe inoltre importante approfondire il rapporto tra la 'certezza' richiesta e il concetto matematico di *decidibilità*; purtroppo anche in casi concreti, come si mostra in seguito, tale requisito manca.

(i) i programmi italiani per la Scuola Secondaria di secondo grado prevedono per gli ultimi anni, riflessioni sulla matematica con aspetti tipicamente epistemologici;

(ii) una conoscenza più approfondita della storia e dell'epistemologia della nostra disciplina potrebbe dare un 'volto umano' alla matematica ed inoltre questa approfondita consapevolezza potrebbe chiarire le ragioni di alcune difficoltà di apprendimento.

Molti concetti matematici, infatti, hanno complessità intrinseche che a loro volta generano difficoltà ed ostacoli alla comprensione; la presenza di proposte epistemologiche simultanee, in competizione tra loro circa gli stessi argomenti, potrebbe essere usata come un criterio di evidenza dell'esistenza di tali difficoltà e forse la possibilità di percorrere vie diverse per le loro soluzioni, realizzando in parte il concetto di epistemologia di Longino (2000).

4.2. Cosa possa intendersi per epistemologia del concetto

I paragrafi precedenti giustificano l'analisi della pratica didattica per metterne in luce gli aspetti più problematici, partendo dai quali è possibile produrre riflessioni coinvolgenti gli aspetti sia educativi sia epistemologici, senza però la presunzione di dare un quadro teorico completo, un'epistemologia *globale*, in grado di spiegare il maggior numero possibile di concetti.

L'approccio che esponiamo è prossimo alla maieutica socratica: partendo da concetti e costruzioni standard, accettate nei curricola scolastici, suggeriamo di dare uno sguardo ai concetti stessi come occasione per presentare quesiti da utilizzare quali punti di partenza per ricerche più approfondite, anche se non sempre rilevanti dal punto di vista della loro 'spendibilità' scolastica immediata. La nostra proposta porta contributi alla decisione tra *filomatica* e *matesofia* ed è coerente con l'idea che la filosofia (e la filosofia della scienza) sia l'arte di porre domande, non quella di fornire risposte.

In tale linea può essere interpretata l'opera di Lakatos, (Lakatos, 1976), specialmente per gli aspetti della teoria della dimostrazione. Il nostro scopo, qui, è di permettere di apprezzare questi aspetti, spesso ignorati.

Un quadro teorico è offerto dal triangolo introdotto da (Shulman, 1986), e ri-presentato in (Tsamir, 2000), i cui vertici sono denotati con SMCK , PCK e CCK:

SMCK, vale a dire la *conoscenza dei contenuti specificati*, nella citazione di Tsamir (2000), è

> "l'accumulo e l'organizzazione della conoscenza nella mente dell'insegnante … L'insegnante non deve soltanto capire che qualcosa è così; deve inoltre comprendere perché è così, su quali basi si fonda tale affermazione, in quali circostanze l'affermazione può essere messa in dubbio o addirittura rifiutata."

Pertanto SMCK

> "richiede un approfondimento della conoscenza dei fatti e dei concetti propri di un certo campo. Richiede la comprensione delle strutture dell'argomento ... l'insieme dei modi in cui la verità o la falsità, la validità o l'invalidità vengono stabilite".

Il secondo vertice, PCK, vale a dire la *conoscenza del contenuto pedagogico*, è correlata con le credenze degli studenti e con gli approcci di insegnamento:

> "la conoscenza del contenuto pedagogico include inoltre una comprensione di ciò che rende l'apprendimento di un determinato argomento semplice o difficoltoso, le concezioni e le pre-concezioni di studenti di diverse età ed il background che esse costituiscono per l'apprendimento."

Una tale ricerca di conoscenza e il relativo contenuto pedagogico, gli ostacoli e le pre-concezioni degli studenti devono essere confrontati con il terzo vertice, CCK, cioè la *conoscenza del contenuto del curricolo*, che si riferisce alle competenze nel collegare un argomento con gli altri:

> "la conoscenza curricolare sottintende la capacità degli insegnanti di collegare il contenuto di un dato corso o di una data lezione a questioni ed argomenti simultaneamente trattati in altre discipline...la familiarità con gli argomenti che sono stati trattati e che saranno trattati nella stessa area nei passati e nei seguenti anni scolastici..."

Sono quindi i vertici SMCK e PCK quelli su cui più si sofferma la nostra attenzione in questo scritto.

Un'altra ragione del rifiuto degli insegnanti potrebbe essere la pratica consolidata di insegnare risultati già dimostrati da altri usando un approccio ipotetico-deduttivo. Cambiare questa pratica per i docenti ha sicuramente costi (personali) elevati.

4.3. Esempi di applicazione dell'epistemologia del concetto

Diverse occasioni per approfondimenti epistemologici di aspetti relativi al concetto di limite e problemi connessi, sono presenti in (Andriani *et. al.*, 2006); per quanto riguarda il concetto di funzione si possono consultare (Grugnetti *et al.*, 2001), (Maffini, 2000), (Maffini, 2003), (Marchini, 2004): si possono leggere le attenzioni epistemologiche colà riportate come esempi di un'epistemologica *del concetto*, per altro non individuata con tale dizione. Mostriamo qui alcune esplicite applicazioni di questo tipo di epistemologia per mettere meglio in luce i problemi sottili connessi con i fondamenti della matematica e l'ambito epistemologico.

4.3.1. La lista dei sogni

L'esempio è tratto, quasi testualmente, da (Andriani *et al.* 2006) in quanto ci sembra un'adeguata esemplificazione dell'epistemologia *del concetto*. Il problema sottostante è spinoso, anche se trova posto nel curriculum scolastico: l'introduzione dei numeri reali. La storia ci insegna che vari studiosi (Weierstrass, Soschino, Cantor, Dedekind, Peano, Russell, Meray, Grandi e Arzelà, ecc.) hanno mostrato i loro modelli del sistema dei numeri reali a partire da modelli dei sistemi numerici 'precedenti'.

Di fatto le varie proposte si possono ritenere diverse analisi (semantiche) del concetto di numero reale. Un'alternativa ad esse è offerta dalla presentazione assiomatica del sistema dei numeri reali ed anche questa può essere fatta ponendo l'accento alle varie proprietà algebriche, dell'ordine, di completezza, con un'implicita richiesta dell'esistenza di un *modello inteso*, usando un termine della Logica matematica.

Anche qui non mancano le 'sorprese' vista la contemporanea e concorrenziale presenza di varie alternative; la più nota è quella dell'analisi non-standard, ma sono possibili altre presentazioni (quella che richiede un predicato specifico per i numeri naturali, quella nel contesto della matematica alternativa, quella che espunge le definizioni non predicative, ecc.). In generale però, chi o cosa garantisce che tutte queste ed altre possibili introduzioni semantiche siano tutte adeguate ad individuare lo stesso concetto? E quale scegliere tra le presentazioni sintattiche, come la più idonea a fare la Matematica che si desidera?

C'è, sicuramente quella che compare con più frequenza sui libri di testo (universitari), ma altrettanto frequentemente detti testi spendono poche o punte parole per metterne in luce gli aspetti discutibili, quali, ad esempio, l'uso implicito e non segnalato dell'assioma di scelta (che compare a volte sì e a volte no, anche sullo stesso testo). Ma tutti questi problemi (quasi) scompaiono se si adotta in modo sovente non esplicitato che

1. gli enti matematici pre-esistono alla nostra considerazione degli stessi;
2. tali enti sono organizzati nel modo più *semplice* possibile per rendere applicabili alla 'realtà' i procedimenti standard, grazie ad una sorta di benignità della natura che si conforma a siffatte costruzioni della Matematica;
3. tali enti sono causalmente attivi, nel senso che sono loro che si fanno conoscere (probabilmente per farsi apprezzare da noi, nel ruolo di spettatori);
4. se incontriamo delle difficoltà nell'individuazione delle relazioni che intercorrono tra essi, è colpa nostra, colpa delle nostre limitazioni, dato che gli enti sono perfetti ed immutabili, guardano con benevolenza i nostri vagiti infantili per descriverli: gli assiomi, i teoremi e le definizioni (anche se impredicative).

Il lettore può giustamente dissentire da queste assunzioni, anche se sono basate sulle affermazioni di autori noti ed apprezzati. Altre scelte, se seguite coerentemente, mettono in crisi, se non addirittura escludono, molti risultati di Analisi matematica ai quali è difficile rinunciare senza doversi chiedere che cosa mai sia stato fatto finora.

Tuttavia nel curriculum scolastico (e spesso anche nei corsi universitari) sembra che il concetto di numero reale imponga, per motivi di semplicità, di opportunità, di applicabilità, ed altre categorie metafisiche del genere, la precedente lista dei sogni come l'epistemologia cui attenersi.

4.3.2. Un esercizio sul c'è, ma non c'è

Nella scuola italiana è assai ben istituzionalizzato un approccio algoritmico e formale; questo approccio nasconde molti problemi che possono essere poi d'ostacolo alla comprensione dello studente. L'abitudine algoritmica può abbreviare la via per la scoperta di risultati utili nelle applicazioni, ma in questo modo si possono anche creare zone 'grigie' che, a lungo andare, rischiano di allontanare gli studenti dalla matematica.

Il testo seguente può essere trovato sui manuali:

(1) *Calcolare il seguente integrale (generalizzato)*

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$$

Una prima osservazione: lo studente inizia con la presunzione (o meglio il bisogno) che l'integrale sia calcolabile (in modo effettivo), cioè che ci sia un risultato (ottenibile in tempi finiti); questa presunzione è garantita dal fatto che è stato l'insegnante ad assegnare l'esercizio. Raramente gli studenti mettono in dubbio che l'esercizio, dato come compito, non possa essere svolto in modo effettivo e, tutto sommato, semplice. Una formulazione diversa della consegna potrebbe aiutare gli studenti ad eseguire una verifica preventiva: *determinare se l'integrale esiste e, nel caso, calcolarlo*. Ma, anche se la questione viene formulata in questa seconda maniera, potrebbe non essere possibile risolvere il quesito. È da notare che in alcuni casi è proprio l'esistenza del risultato a dare significato ai termini del problema (in un modo ovunque definito e funzionale).

Data una funzione descritta mediante un'espressione analitica che sia 'costruita' con funzioni polinomiali, esponenziali e trigonometriche e le loro funzioni inverse, anche se l'espressione è complicata, nel caso in cui la funzione sia derivabile, la funzione derivata può essere determinata con un procedimento effettivo (in un numero finito di passi, talvolta con una ampia dose di buona volontà). Sfortunatamente nel calcolo integrale ci sono esempi di funzioni con espressione analitica semplice, ma le cui funzioni primitive (di cui si conosce l'esistenza per altri fatti generali) non hanno un'espressione analitica (esprimibile in termini finiti). Tutto ciò è ben noto e può giustificare alcune difficoltà che gli studenti incontrano nel calcolo integrale, ed anche la necessità di metodi per calcolare gli integrali mediante le serie di potenze, viste quest'ultime come strumento per risolvere un problema non risolubile direttamente.

Nel caso del calcolo integrale ci sono alcuni risultati teorici che stabiliscono l'integrabilità di vari tipi di funzioni con opportune proprietà, ma talora il risultato può non essere determinato in modo effettivo (in termini finiti). Non è questo il caso dell'esercizio (1)!

Il calcolo integrale è più difficile di quello delle derivate. Ma esiste una 'misura' di questa difficoltà? La difficoltà è un'opinione personale del risolutore o è una caratteristica intrinseca del concetto di integrale? Questo problema è attribuito a J. Liouville (1809 - 1882). Formulato più chiaramente si tratta della domanda se esistono condizioni necessarie e sufficienti o se è possibile che esistano metodi effettivi per stabilire se una funzione 'elementare' abbia una funzione primitiva 'elementare'.

Per lo più, lo studente cerca un'espressione esplicita di una funzione primitiva e, possibilmente, con un algoritmo esplicito che specifichi una funzione primitiva a partire dalla data funzione integranda.

Tale problema è stato risolto definitivamente da Richardson, (1968) e Risch, (1969 e 1970) (Lolli, 1978): se E è una classe numerabile di funzioni reali, tali che $y = x$, $y = e^x$, $y = \text{sen } x$, $y = |x|$, $y = \log 2$, $y = \pi$ e $y = a$, con $a \in \mathbb{Q}$, appartengono ad E e le funzioni ottenute applicando addizione, sottrazione, moltiplicazione e composizione di elementi di E sono ancora elementi di E, inoltre esiste $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $h \in$E e non esiste una funzione $f \in$E ed un intervallo reale I tale che $f' = h$ su I, allora il problema dell'integrazione non è decidibile per la classe E, in termini finiti.

La funzione $y = e^{-x^2}$, è composizione delle funzioni con espressione analitica $y = e^x$ e $y = -x^2$, è un elemento di E e può essere scelta come la funzione h di cui sopra; ciò permette di concludere che il problema dell'integrazione non è risolubile in termini finiti.

I risultati di Richardson e Risch si ottengono come un corollario del risultato di (Matijasevič, 1970), relativo al decimo problema di Hilbert sulle relazioni diofantee, vale a dire, in termini grossolani, che non esiste un metodo generale per risolvere in $\mathbb{Z}$ equazioni e sistemi algebrici a coefficienti in $\mathbb{Z}$.

Le affermazioni: *una funzione è integrabile* e *si può calcolare l'integrale della funzione* hanno due contenuti concettuali e cognitivi diversi. La prima affermazione sembra più vicina ad un'impostazione platonica della matematica, la seconda affermazione ha un contenuto più pragmatico, secondo il quale l'esistenza è possibile solo se è effettiva (vale a dire ottenibile in termini finiti o mediante un processo decidibile). Siffatto aspetto chiama in gioco altre filosofie, quelle che asseriscono che la decidibilità è sufficiente, contrapposte a quelle che ritengono esistente solo ciò che lo è con un numero finito di passi.

4.3.3. Altri esempi di c'è, ma non c'è

Pertanto tra *esiste* e *si può trovare* c'è grande differenza. La matematica ha sempre gestito questi problemi fin dall'antichità:

Nella geometria precedente ad Euclide si incontrano i cosiddetti problemi classici, non risolubili mediante riga e compasso (e di cui non si trova menzione negli *Elementi*, per una sorta di censura ideologica). In generale le affermazioni esistenziali di Euclide sono provate con procedimenti costruttivi espliciti. Una (clamorosa) eccezione a questa scelta è il Postulato 5 delle parallele, nella versione originale euclidea[(25)]. E la non accettazione di questa esistenza 'ideale' è stata, nei secoli, il motore che ha spinto vari matematici a trovare formulazioni più intuitive, a provare che il quinto postulato era conseguenza degli altri, ed infine a dimostrare l'indipendenza del Postulato 5 dagli altri.

Anche in Algebra si incontra una simile situazione: il cosiddetto *Teorema fondamentale dell'Algebra*, la cui prima formulazione esplicita si attribuisce a Girard (1595 – 1632), fu provato da Gauss (1777 - 1855) nel 1799. Il Teorema fondamentale afferma che ogni equazione algebrica (a coefficienti complessi) ha almeno una soluzione nel campo complesso. Nello stesso anno 1799 Ruffini (1765 - 1822), provava (anche se in modo non completamente soddisfacente) che per un'equazione algebrica generale di quinto grado, non c'è una soluzione per radicali (ottenuti con espressioni razionali dei coefficienti dell'equazione). Solo mediante l'introduzione delle funzioni ellittiche ed iperellittiche, legate all'impossibilità di determinare le primitive di certe funzioni in termini finiti, si potranno fornire soluzioni in termini finiti delle equazioni algebriche di grado 5 e superiore in termini finiti, scaricando quindi il problema algebrico sul caso dell'integrazione.

4.3.4. Soluzione dell'esercizio

L'esercizio (1) non è problematico, ma ci è servito solo come spunto di riflessione. Di solito, gli insegnanti diligenti propongono esercizi che possono essere risolti in termini finiti (e semplici). Ma nel testo ci può essere un errore casuale, o un refuso e ciò può causare problemi agli studenti.

Si fornisce una soluzione seguendo lo 'stile' dello studente: (1) è un integrale definito (in realtà generalizzato, a parte 'dettagli' che di solito, a questo punto del procedimento solutivo, si trascurano). Lo standard (studentesco) consiste nel calcolo dell'integrale indefinito e da questo a quello definito.

L'integrale indefinito è

$$\int xe^{-x}dx$$

per il quale, con la cosiddetta *regola* o *metodo* dell'integrazione per parti, si ottiene:

(2) $$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \left(-\int e^{-x}dx)\right) = -xe^{-x} - e^{-x} + c\,.$$

Crediamo che molti studenti si riconoscano in questo svolgimento. Lo strumento principale usato, la cosiddetta *regola* o *metodo*, di fatto è un *teorema* che viene dimostrato sotto opportune ipotesi. Nello svolgimento mostrato non c'è traccia dell'analisi delle condizioni date dalle ipotesi del teorema. Si dovrebbe appurare se la funzione integranda di (1) possa essere scritta come il prodotto di due funzioni, e una di queste dovrebbe essere integrabile e l'altra derivabile. Ma lo studente questo lo dà per scontato, fidando nella buona fede dell'insegnante. Un discorso a parte merita l'improvvisa 'apparizione' di c nell'ultimo membro della catena di uguaglianze.

Esercizi analoghi a (1) sono assegnati solo quando le ipotesi dette sopra sono soddisfatte, ma una funzione potrebbe essere integrabile e ottenuta come prodotto di due funzioni, senza che siano soddisfatte le ipotesi dell'integrazione per parti.

Inoltre la regola è un enunciato i cui 'soggetti' sono funzioni introdotte con quantificazione universale: per ogni funzione f e per ogni funzione g, ecc.

Per quanto riguarda la presenza della lettera c, si rimanda al prossimo paragrafo.

4.4. I teoremi sul calcolo degli integrali

4.4.1. L'esercizio (1)

L'esercizio (1) non è ancora risolto completamente, l'interruzione nel flusso della soluzione, vale a dire il passaggio dall'integrale definito a quello indefinito, è anch'esso da analizzare in quanto viene applicato senza alcuna precauzione dagli studenti, e senza tenere conto che ci sono funzioni integrabili mediante integrazione definita, ma non mediante integrazione indefinita. Questa però sarebbe una vera e propria 'cattiveria' da parte dell'insegnante, ed in base al rapporto fiduciale instaurato in classe, lo studente non ci pensa minimamente.

---

(25) Questi altri esempi richiederebbero una migliore specificazione. Di fatto, rispetto al problema posto relativamente all'integrazione, i contenuti epistemologici coinvolti sono differenti.

Alcuni manuali scolastici nascondono completamente il problema introducendo prima l'integrale indefinito e poi chiedendo di svolgere esercizi di integrazione definita, sfruttando il teorema in base al quale un integrale definito si ottiene mediante il calcolo di una qualunque funzione primitiva della funzione integranda sugli estremi di integrazione. Un simile approccio rafforza l'idea che tutte le funzioni (che servono per superare i compiti in classe e gli esami) sono continue e che è sufficiente leggere bene la tabella delle derivate al contrario, per sapere svolgere gli esercizi sul calcolo integrale. Si assiste quindi ad una sorta di epistemologia *della semplicità* che ha (solo) connotati scolastici.

L'onnipresenza della continuità porta a risolvere l'esercizio (1) scrivendo

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^{\infty} = \left(-\infty \cdot e^{-\infty} - e^{-\infty}\right) - \left(-0 \cdot e^{-0} - e^{-0}\right) = 0 - (-1) = 1$$

In questa scrittura

- è scomparso *c*, presente in (2);
- +∞ viene visto come un numero reale, con qualche 'strana' proprietà, per esempio, l'opposto di +∞ è -∞, altro 'numero' reale;
- si sfrutta tranquillamente la continuità anche sul 'numero' +∞.

Lo studente potrebbe avere dubbi su come trasformare la scrittura $-\infty \cdot e^{-\infty}$, ma qualche suggerimento potrebbe giungergli dalle proprietà degli infinitesimi o dai teoremi sui limiti.

4.4.2. Altri teoremi sul calcolo degli integrali

Un ulteriore esempio ricco di aspetti da approfondire, è quello di integrale indefinito, individuato da un simbolo che richiama da vicino quello di integrale definito. Cioè se *f* è una funzione reale di variabile reale definita nell'intervallo [*a*,*b*] ed ivi integrabile, l'integrale (definito) si denota con $\int_a^b f(x)dx$, ed il risultato, un numero reale, dipende da *f*, da *a* e da *b*; mentre l'integrale indefinito si denota col simbolo $\int f(x)dx$, ammesso che esista, cioè che siano soddisfatte le ipotesi di continuità della funzione integranda nell'intervallo di definizione [*a*,*b*]. Sembra che nell'integrale indefinito siano 'spariti' gli estremi dell'intervallo di integrazione, che invece sono presenti nel dominio di definizione della funzione *f*. L'analisi morfologica di questa scrittura suggerisce che il risultato dipenda solo da *f*. Sarebbe indispensabile una nuova e più esplicita scrittura, ad esempio $\left(i\int_a^b\right) f(x)dx$, per denotare esplicitamente che si tratta di un integrale indefinito, ma in cui compare esplicitamente anche il dominio della funzione.

Per chiarire meglio: spesso negli esercizi non si richiede di calcolare l'integrale definito di una funzione (vista come legge o come espressione analitica) su tutto il suo dominio di definizione, ma solo su intervalli (o unioni finite di intervalli) contenuti nel dominio della funzione. Così c'è ancora un punto non chiarito per cosa debba intendersi per l'integrale indefinito $\int xe^{-x}dx$, che viene utilizzato per calcolare $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

Quanto detto prima, che nell'integrale indefinito la funzione porta con sé il proprio dominio[(26)], non è sostenibile in questo caso. Infatti, il dominio di $f(x) = xe^{-x}$ è $\mathbb{R}$, mentre nell'integrale definito compare solo 'metà' di tale dominio. Allora la funzione integranda dell'integrale definito non è quella espressa dalla espressione analitica $f(x) = xe^{-x}$, ma la sua restrizione[(27)] a [0,+∞[e, ad essere precisi, per risolvere il problema mediante l'integrale definito ci sarebbe da scrivere $\left(i\int_0^{+\infty}\right) xe^{-x}dx$ oppure, in modo forse più semplice e corretto, $\int \left(xe^{-x}\right)_{|[0,+\infty[}dx$,

(26) Se parliamo di funzione, come relazione ovunque definita e funzionale ovviamente il dominio è 'dato' con la legge che individua la funzione. In questo caso con dominio indichiamo, com'è d'uso in analisi, il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in cui è definita la relazione da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ individuata dalla legge assegnata, cioè quello che normalmente (e pericolosamente) viene indicato come 'insieme naturale di definizione' di una funzione individuata mediante una espressione analitica.

(27) Tutto questo con i conseguenti problemi sulla definizione di integrale definito, visto che l'intervallo non è chiuso; tale chiusura avviene per mezzo del passaggio al limite, il quale a sua volta induce il salto significativo da intervalli chiusi ad un intervallo aperto nel secondo estremo.

denotando esplicitamente con $\left(xe^{-x}\right)_{|[0,+\infty[}$ la restrizione della funzione $f(x) = xe^{-x}$ a [0,+∞[. Per questi ed altri aspetti critici dell'uso delle restrizioni si veda (Marchini, 2004).

Viene voglia di dire che l'espressione analitica di una funzione, che dovrebbe essere una sorta di accessorio utile solo per esplicitare l'aspetto algoritmico della determinazione delle immagini nella procedura di calcolo della funzione *per se*, viene assunta ad essenza stessa della funzione *in se*, slegata dalla limitazione del dominio(28). Ed ancora una volta questa, come altre accentuazioni sull'aspetto algoritmico, rischia di fare credere agli studenti che esistano solo funzioni esprimibili analiticamente e che il calcolo delle funzioni si svolga esclusivamente a livello sintattico; questo a prescindere completamente dagli aspetti semantici connessi alla scelta del dominio di variazione delle indeterminate che compaiono nell'espressione analitica.

Ciò contrasta anche con il faticoso instaurarsi del pensiero strutturale, di cui si sono viste alcune intuizioni in 4.2., pensiero spesso 'schiacciato' dalla predominanza tacita dell'insieme dei numeri reali, come unica 'realtà' con cui confrontarsi.

In generale, la sparizione di parametri (nel caso in esame gli estremi di integrazione), in varie occasioni 'matematiche' sta a segnalare che si compie una generalizzazione sui parametri, cioè si considera una proprietà o una quantità indipendente dai parametri stessi in quanto 'valida' per ogni valore dei parametri. Nel caso dell'integrale indefinito, però non è così: l'intervallo [*a*,*b*] è fissato perché è fissata la funzione *f*. Se si cambiano parametri si ha piuttosto a che fare con un integrale generalizzato, non con un integrale indefinito. L'integrale indefinito è in realtà un insieme, l'insieme delle *funzioni primitive* della funzione *f*, cioè l'insieme di tutte e sole le funzioni definite in [*a*,*b*], derivabile in]*a*,*b*[e la cui funzione derivata nell'intervallo]*a*,*b*[(29) coincide con la data funzione *f*. In simboli $\int f(x)dx = \left\{g:[a,b]\to \boldsymbol{R} \,\middle|\, Dg_{|]a,b[} = f_{|]a,b[}\right\}$. Si tratta quindi di un insieme infinito, e con una cardinalità 'grande', tanto da non poter essere pensato come un insieme descrivibile mediante un'infinità potenziale. Un altro modo, spesso usato, di indicare l'integrale indefinito è dato da $\int f(x)dx + c$, oppure come $\int f(x)dx = g(x) + c$, scrittura 'abominevole' che oscura il fatto che si ha a che fare con un insieme, nel primo caso sommato con un numero, nel secondo identificato con un'unica funzione. Questi tipi di scritture possono essere giustificate solo osservando che per ogni coppia di funzioni reali di variabile reale definite in [*a*,*b*], ponendo «due funzioni sono *equivalenti* se hanno la stessa derivata in ogni punto di]*a*,*b*[», si ottiene una relazione di equivalenza, che molto raramente viene individuata come tale a scuola. L'integrale indefinito è pertanto una particolare classe di equivalenza, rispetto alla relazione detta sopra, e quindi lo si può pensare come il risultato di un'astrazione (almeno per quanto riguarda l'uso dell'astrazione in matematica).

Il fatto che il calcolo degli integrali preceda di molto tempo lo studio delle relazioni di equivalenza e l'accettazione del loro ruolo nella matematica, ha fatto sì che anche nell'insegnamento si continuassero ad usare notazioni vecchie che oscurano, con la forza della tradizione, la natura dei concetti coinvolti. E il fatto di suggerire l'identificazione di una classe di equivalenza con un suo elemento è frutto di quella generale tensione attiva in molta filosofia, a partire dai presocratici, di ricondurre la molteplicità all'unità. Certamente un'unica funzione spaventa assai di meno di un insieme infinito in atto, con cardinalità 'grande', anche se poi la scelta comporta incomprensioni e difficoltà. In queste scelte è attiva una sorta di *horror infiniti*, che ha lunga tradizione filosofica.

Così, anche se oggi gli studenti studiano ed utilizzano consapevolmente in altri contesti le relazioni di equivalenza, si continua a scrivere $\int f(x)dx + c$, simbologia che appare più vicina alle funzioni, che alle classi di equivalenza. Si confonde in tal modo la classe con un rappresentante, suggerendo implicitamente che *c* sia una *costante… variabile*. Ma anche la scelta di un rappresentante 'privilegiato' è ben noto che ha a che fare con (anzi può essere assunto come formulazione equivalente del)l'assioma di scelta, e così viene implicitamente suggerito di avvalersi di questo principio discutibile e discusso, senza alcuna attenzione critica.

In tale atteggiamento anti-didattico ricadono poi alcune affermazioni che hanno il ruolo di teoremi sul calcolo degli integrali, spesso presentati solo come formule:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx;\ \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Tali formule vanno analizzate assai accuratamente:

(28) Come esempio di difficoltà indotte da queste convinzioni, si possono citare quelle degli allievi quando si propongono i restringimenti dei domini delle funzioni goniometriche per ottenere funzioni biiettive e quindi invertibili.

(29) Talvolta si considera la coincidenza in [*a*,*b*], della derivata della primitiva con *f* intendendo però di considerare la derivata destra della primitiva in *a* e quella sinistra in *b*.

- in esse mancano completamente le indicazioni delle quantificazioni universali, che sono di due sorte diverse, una sulle funzioni ed una sui numeri reali;
- esse sembrano utilizzare la somma di due insiemi o il prodotto di un numero reale per un insieme, operazioni almeno ‘strane’ se non definite in modo corretto.

Questi teoremi provano, come in tante altri occasioni sparse in vari campi della matematica, che il risultato delle operazioni non dipende dal rappresentante scelto per individuare la classe. Ad esempio l’uguaglianza $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$ intanto andrebbe scritta meglio indicando al primo membro $\int (\lambda f)(x)dx$; inoltre va letta come la richiesta di dimostrazione del fatto che se g è una funzione, arbitrario elemento della classe di equivalenza $\int f(x)dx$, per cui se $g \in \int f(x)dx$, allora $(\lambda g) \in \int (\lambda f)(x)dx$. Si sorvola sul fatto che se $[a,b]$ è il dominio di f, allora lo è anche di (λf), il che è ovvio. Meno ovvio è il rapporto tra i domini di f e g e di $(f+g)$. Tali considerazioni sono sicuramente semplici, ma devono essere messe in luce per favorire la comprensione dello studente, invece di gabellarglieli come il risultato di una strana aritmetica priva di fondamento.

Quindi, le osservazioni precedenti acquistano un senso solo se inserite nel quadro più generale delle relazioni di equivalenza e chiedendosi poi quali, tra esse, abbiano la natura dell’uguaglianza.

Spesso gli studenti, giustamente, non comprendono perché

$$\int (f(x) + g(x))dx + c = \left(\int f(x)dx + c\right) + \left(\int g(x)dx + c\right),$$

introducendo in tal modo una nuova ‘aritmetica’ di c, stavolta un numero reale, seppure arbitrario, con regole strane, analoga a quella, ‘pericolosa’, per cui $\infty + \infty = \infty$.

In tutto questo sembra attiva una epistemologia della semplicità (didattica) pronta a sacrificare la chiarezza e la correttezza, trascurando anche gli strumenti che gli allievi hanno già disponibili.
Ci sembra anche di poter dire che, malgrado l’integrale indefinito sia presentato prima del definito, la nemesi storica di quest’ultimo si faccia sentire proprio nelle modalità con cui sono presentate le proprietà dell’integrale indefinito. L’evidente incongruenza tra la definizione di integrale indefinito e le scritture utilizzate per indicarne le proprietà dovrebbero suggerire agli insegnanti (ma anche agli autori dei libri di testo: pochi, in effetti, sottolineano questo aspetto) una maggiore cura nella formulazione. Sembra invece che la preoccupazione sia piuttosto rivolta alle analogie con le corrispondenti proprietà dell’integrale definito, il quale non solo ha imposto la rappresentazione semiotica dell’integrale indefinito, ma sembra averne forzato la struttura delle proprietà. La didattica sembra quindi essere succube di una forma di ‘condizionamento’ del segno.

4.4.3. Ritorno alla (2)

È ora di riprendere la (2)

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \left(-\int e^{-x}dx\right) = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

I segni di uguaglianza che in essa compaiono sono tutti discutibili, per non dire errati. Il primo membro è un insieme, il secondo un ibrido tra una funzione ed un insieme su cui si opera aritmeticamente, senza alcun pudore, il terzo membro è una funzione. La scrittura corretta sarebbe

$$\left(-xe^{-x} - e^{-x} + c\right) \in \int xe^{-x}dx .$$

5. Conclusione

Gli esempi, che costituiscono i lunghi paragrafi 4.4 e 4.5, mostrano come nella prassi didattica siano attivi contemporaneamente diversi approcci epistemologici, molti dei quali da addebitare alla tradizione scolastica ed ai curricoli che pare abbiano una velocità di trasformazione inferiore a quella dei mutamenti del pensiero scientifico. Sarebbe bello se almeno, presentando i concetti sorti in tempi passati, si riuscisse a ricreare l’atmosfera del pensiero in cui si sono mossi gli studiosi che ci hanno proposto risultati che noi oggi ripresentiamo! Ma questo è volere troppo. Questi esempi hanno lo scopo di suscitare l’attenzione dell’insegnante che

> “…non deve soltanto capire che qualcosa è così; deve inoltre comprendere perché è così, su quali basi si fonda tale affermazione, in quali circostanze l'affermazione può essere messa in dubbio o addirittura rifiutata.” (Shulman, 1986),

con la speranza che ciò possa contribuire al miglioramento dell’insegnamento/apprendimento.

Abbiamo dato, inoltre, dimostrazione della presenza in atto di concezioni diverse negli allievi della stessa età, concezioni forti che andrebbero sviluppate e legittimate, perché ricche di aspetti concretamente utili nella quotidiana prassi scolastica.

Resta da concludere se il nostro contributo è di *filomatica* o di *matesofia*. Crediamo che la decisione ultima spetti al lettore, perché può essere una questione di punti di vista personali, su quale delle due discipline porre di più l'accento. Ma ci sembra di avere provato, indubitabilmente, che le due discipline, da sole, sono entrambe cieche.

La matematica senza la filosofia rischia di produrre conoscenza senza vedere bene cosa stia facendo, rischiando così di far perdere il senso complessivo delle cose soprattutto per chi le deve imparare[(30)]; la filosofia ha avuto numerosi agganci **con** ed ispirazioni **da** la matematica, soprattutto nell'ottica di pensare alla matematica come all'esternazione delle nostre strutture mentali con le quali guardiamo e organizziamo il mondo: Aristotele dimostra che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali, mostra come esempio di universale il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due angoli retti, Spinoza scrive *more geometrico*, Cartesio sente l'obbligo di aggiungere al *Discours sur la méthode* un'appendice di Geometria a spiegazione delle sue idee ed infine, ma gli esempi sarebbero tanti, Husserl scrive le sue *Ricerche logiche* sulla base della critica fattagli da Frege al suo testo sui fondamenti dell'Aritmetica.

Un approccio esterno alla matematica da parte della filosofia, rischia di restare in superficie e di comprendere poco le esigenze dei concetti e di chi li deve insegnare o apprendere; e del resto una matematica senza un consapevole "atteggiamento filosofico" rischia di diventare un "gioco" non sempre divertente…

Abbiamo condotto un'analisi di attività scolastiche consuete proprio con l'intento di mostrare che in esse la lente di ingrandimento di carattere filosofico – epistemologico, scopre crepe in cui si nascondono importanti temi culturali. Chiaramente per vedere il mondo microscopico ci vogliono gli occhiali opportuni, così come ci vogliono anche per vedere i massimi sistemi; è necessario quindi che il tema epistemologico venga trattato in modo adeguato anche nelle aule dei dipartimenti di matematica dove ci si occupa della formazione degli insegnanti (Maffini *et al*., 2003). E se in quelle sedi non si potrà fare tutto, almeno si dovrebbe cercare di istillare la curiosità per tali argomenti; riteniamo infatti che un futuro insegnante sia, innanzi tutto, spinto a prendere consapevolezza della propria epistemologia e da quella partire non solo con l'obiettivo di approfondirla, ma anche di poter fondare su di essa la conoscenza delle altre, diverse, epistemologie che determinano, insieme, la conoscenza mate-filosofica.

[(30)] Si badi bene che questo è altra cosa rispetto alla domanda spesso posta dagli alunni relativa al "cosa serve". La manifestazione macroscopica di questa affermazione risiede soprattutto nella constatazione di molti errori degli studenti imputabili soprattutto al loro muoversi su un piano strettamente sintattico.

Allegato 1

A. Le concezioni della matematica, nella cultura e nell'insegnamento: varie "posizioni"

A.1. Commenta brevemente i seguenti aforismi:
"La matematica è un gioco giocato secondo certe regole semplici con dei segni senza significato sul foglio." (David Hilbert)
"La matematica può essere definita come la materia in cui non sappiamo mai di che cosa parliamo, né se ciò che stiamo dicendo è vero." (Bertrand Russell)

A.2. Leggi le seguenti affermazioni sulla natura della matematica e indica quale condividi maggiormente, motivando brevemente la scelta.
Se nessuna si adatta a ciò che pensi della matematica, forniscine una tua:

1) Platonismo: *Gli oggetti matematici – e dunque tutta la matematica – esistono sempre, al di là di ogni contesto temporale e indipendentemente dall'essere umano. Il compito dei matematici è decifrarli e investigare queste verità. Il matematico è uno scopritore più che un inventore* (Zeilter, 1990).
2) Formalismo: *La matematica è una collezione di sistemi formali i cui elementi sono manipolati e combinati secondo specifiche regole del gioco. Queste regole del gioco, le definizioni e le dimostrazioni dei teoremi, sono il solo interesse del matematico. Il formalista è un inventore e non uno scopritore. Per lui la questione dell'esistenza degli oggetti matematici non si presenta. Per lui basta provare che le sue regole del gioco non portano a contraddizioni.* (idem)
3) Costruttivismo (intuizionismo): *La matematica è ammessa nella misura in cui i suoi oggetti sono costruiti a partire da certi oggetti di base primitivi in un numero finito di passi. La questione della costruttibilità è l'interesse predominante e permanente di chi aderisce a questa posizione*. (idem)
4) Fallibilismo: *La conoscenza matematica non è assoluta, ma fallibile e correggibile e la formalizzazione non assolve il suo ruolo di garanzia, ma piuttosto intralcia lo sviluppo della conoscenza. Inoltre lo sviluppo della matematica è parallelo a quello delle scienze naturali; in matematica come nelle scienze naturali l'accento non è nella trasmissione della verità da premesse vere a conclusioni, ma nella retrotrasmissione di falsità da conclusioni falsificate (i falsificatori) a premesse ipotetiche. A parte contraddizioni formali come* $p\wedge\neg p$*, i potenziali falsificatori di una teoria sono i teoremi informali della preesistente (assunta) teoria informale. Nella visione fallibilista la matematica informale è di importanza cruciale, perché come prodotto è la sorgente di tutta la matematica formale*. (Ferrari, 1995)
5) Umanistica: "*Quello che cerco di dimostrare è che, da un punto di vista filosofico, la matematica deve essere considerata come un'attività umana, un fenomeno sociale che fa parte della cultura umana. E, in quanto tale, evoluta storicamente e intelligibile solo in un contesto sociale. Questa concezione è quella che chiamo la concezione umanistica*" (R. Hersh, Cos'è davvero la Matematica)

B. Rispondi, in base alla tua esperienza e alla tua concezione della matematica, alle seguenti domande:
- Perché insegnare matematica?
- Cos'è la matematica e cosa studia?
- Quale differenza tra matematica e fisica?

Allegato 2 L'ellisse e la sua equazione

Come sai, fissati due punti F_1 e F_2 distinti (detti fuochi) ed un numero reale positivo *a*, l'ellisse è definita come il luogo dei punti P del piano tali che $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.

Ovviamente affinché l'ellisse esista 2*a* deve essere maggiore della distanza tra i fuochi (detta *distanza focale*) e che indicheremo con 2*c*.

Come costruire l'ellisse con Cabri?

Dobbiamo fissare una costante *a* (la somma delle distanze di un punto dell'ellisse dai due fuochi) e i due fuochi.

Fissiamo innanzi tutto un segmento i cui estremi saranno i due fuochi. Consideriamo poi una circonferenza di centro uno dei due fuochi il cui raggio abbia misura 2*a* (con *a* maggiore della semidistanza focale); sia inoltre K un punto della circonferenza (Fig. 1). Il punto P che individuerà il luogo potremmo prenderlo appartenente al segmento $[F_1K]$; ma come? Tracciando l'asse del segmento $[F_2K]$ e intersecandolo con $[F_1K]$ otteniamo un punto P tale che $[PF_2] \cong [PK]$ e quindi la somma delle sue distanze da F_1 e F_2 è uguale alla misura del raggio della circonferenza (Fig. 2). Al variare di K sulla circonferenza, P descriverà l'ellisse. Per visualizzare la curva ottenuta possiamo utilizzare il comando Luogo del menu COSTRUISCI la cui sintassi richiede di indicare il punto che descrive il luogo (P) e successivamente il punto che varia (K) (Fig. 3).

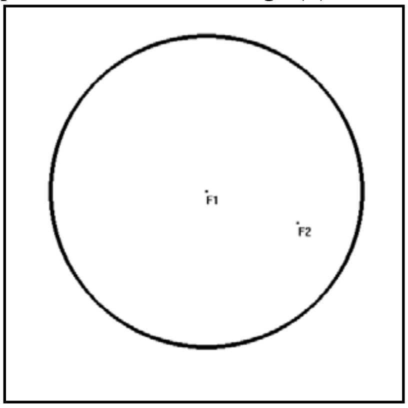


Fig. 1

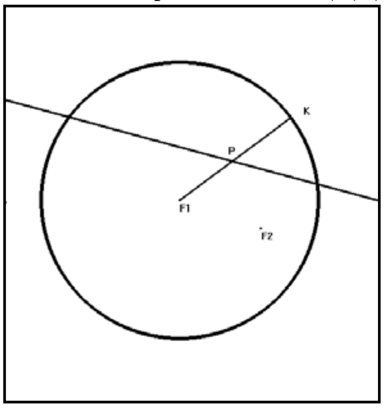


Fig. 2

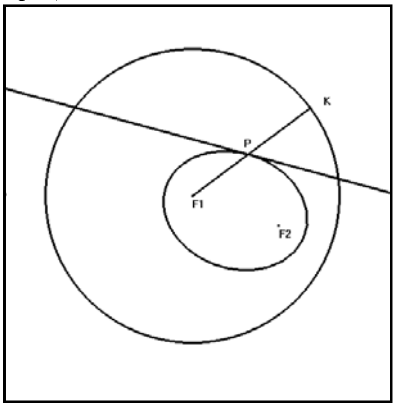


Fig. 3

A questo punto il nostro scopo è stabilire le caratteristiche dell'equazione dell'ellisse rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (monometrico). Prima di procedere, nascondiamo col comando NASCONDI (menu DISEGNA) gli enti che sono serviti per la costruzione (circonferenza, raggio, asse) (Fig. 4). Per trovare l'equazione dell'ellisse dobbiamo prima di tutto fissare un sistema di riferimento cartesiano rispetto al quale trovarla. Prima di fare ciò, troviamo col comando Punto Medio (menu COSTRUISCI) il punto medio M del segmento $[F_1F_2]$ (potrà essere utile…). Col comando Mostra gli assi (menu DISEGNA) evidenziamo il sistema di riferimento e con il comando Coordinate ed equazioni (menu MISURA) troviamo l'equazione dell'ellisse e le coordinate dei punti F_1 , F_2 e di M (Fig. 5). Per una maggiore chiarezza, ti conviene spostare col puntatore l'equazione e le coordinate dei punti dalla figura in un'altra zona del piano in modo che non disturbino.

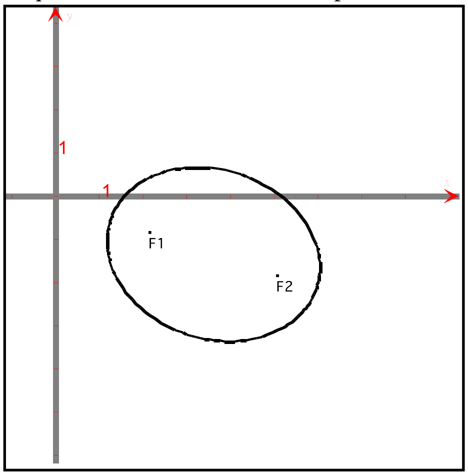


Fig. 4

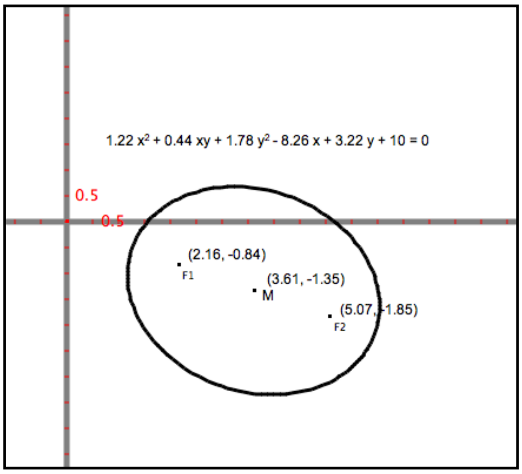


Fig. 5

Come sai dalle altre coniche studiate, il sistema di riferimento determina l'equazione della curva. Per comodità, anziché spostare il sistema di riferimento, sposta il segmento $[F_1F_2]$ (e quindi dal punto di vista metrico è rimasto

tutto invariato: distanza focale e costante 2*a*). Dal punto di vista dell'ellisse, è come se avessi variato la posizione del sistema di riferimento: l'equazione e le coordinate dei punti, naturalmente, cambiano.
Consegna: spostando nel piano il segmento [F_1F_2]cerca di trovare la posizione per l'ellisse (rispetto al sistema di riferimento) affinché l'equazione corrispondente sia "la più bella".
Che cosa intendi per "più bella"? A quali conclusioni sei giunto?

Bibliografia

Andriani M.F., Dallanoce S., Falcade R., Foglia S., Gregori S., Grugnetti L., Maffini A., Marchini C., Rizza A. & Vannucci V. (2006). *Oltre ogni limite – Percorsi didattici per insegnanti spericolati*. Bologna: Pitagora Editrice.

Armella L.M. (1999). Epistemologia ed educazione matematica. *La matematica e la sua didattica*, 3, 271 – 290.

Bishop, E. (1967). *Foundations of constructive Analysis*, New York: Mac Graw-Hill.

Borga, M. & Palladino, D. (1997). *Oltre il mito della crisi. Fondamenti e filosofia della matematica nel XX secolo*. Brescia: Editrice La Scuola.

Cannizzaro L., Pesci A. & Robutti O. (Eds.). (2004). *Research and Teacher Training in Mathematics Education in Italy: 2000 – 2003*. Milano: Ghisetti & Corvi Editori.

Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen : mathematischen und philosophischen Inhalts mit erlauternden Anmerkungen sowie mit Erganzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind / herausgegeben von Ernst Zermelo ; nebst einem Lebenslauf Cantors von Adolf Fraenkel*. Berlin: Springer

Creath, R. & Maienschein, J. (2000). *Biology and Epistemology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Dahaene S., 2000, *Il pallino della Matematica*, Milano: Mondadori.

Douady R., (1986) Jeu de Cadres et Dialectique Outil-objet, *Recherche en didactique des matématiques,* Vol. 7/2, 5 – 31.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Ferrari P. L., 1995: Constructivism, education and philosophy of mathematics. *History and epistemology in mathematics education. First European summer university proceedings* – Montpellier, IREM de Montpellier 1993.

Grugnetti L., Maffini A. & Marchini C. (2001). Le concept de fonction dans l'école italienne; usage de l'épistemologie et de l'histoire des mathématiques pour en clarifier le sens. In Radelet de-la-Grave, P. (Ed.) *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathèmatique. Proc. Third european summer university* (Louvain la Neuve & Leuven - Belgium), 1999, Vol. II, 421 -443.

Grugnetti L, Maffini A., Marchini C. & Groupe Zeroallazero. (2006). Activités didactiques à caractère vertical pour la construction du concept de limite. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. vol. 11, pp. 229-250.

Hersh, R. (2000). *Cos'è davvero la Matematica*, Milano: Baldini & Castoldi.

Kusch, M. (2002). *Knowledge by Agreement: the Programme of Communitarian Epistemology***.** Oxford: Oxford University Press.

Iori M. (2007a). Epistemologia dell'insegnante di matematica sulla sua conoscenza professionale (Parte I: Quadro teorico e rassegna di alcuni risultati di ricerca). *La matematica e la sua didattica*, n. 2, 197-220.

Iori M. (2007b). Epistemologia dell'insegnante di matematica sulla sua conoscenza professionale (Parte II: Analisi risultati di ricerca. Domande di ricerca e ipotesi di risposta). *La matematica e la sua didattica*, n. 3, 303-326.

Iori M. (2007c). Epistemologia dell'insegnante di matematica sulla sua conoscenza professionale (Parte III: Metodologia e risposte alle domande di ricerca D1-D4). *La matematica e la sua didattica*, n. 4, 501-523.

Iori M. (2008). Epistemologia dell'insegnante di matematica sulla sua conoscenza professionale (Parte IV: risposte alle domande di ricerca D5-D9 e conclusioni). *La matematica e la sua didattica*, n. 1, 73-121.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations. The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press.

Lolli G. (1978). *Lezioni di logica matematica*, Torino: Boringhieri Editore.

Longino, H.E. (1997). Feminist Epistemology as a Local Epistemology. *Proceedings of the Aristotelian Society Supplement*, Vol. 71, Issue 1, 19 – 36.

Longino. H.E. (2000). Towards an Epistemology for Biological Pluralism. In Creath & Maienschein (2000), 261 – 286.

Maffini A. (2000). 'Un'indagine sul concetto di funzione nella scuola secondaria. *Riv. Mat. Univ. Parma* (6) 3*, 91 – 122.

Maffini A. (2002). Un laboratorio didattico sul tema "Infinito". *Prospettiva EP* – Anno XXV n. 4, Ottobre-Dicembre 2002 , pag. 9-22.

Maffini A. (2003). Continuità e discontinuità: un'attività con insegnanti in formazione. *L'educazione Matematica*, Serie VII, Vol. I, n. 1, 29 – 46.

Maffini A., Marchini C., Rizza A., Vighi P. (2003). La Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario. Il punto di vista dei matematici di Parma. *La Matematica e la sua Didattica*, n. 4, 511 – 540.
Marchini, C. (2004). Alcune riflessioni didattiche sul concetto di funzione. *Sfida* Vol. V, XVIII, 27 – 39.
Marchini C. (2008). Le diverse culture degli alunni di 5 - 7 anni sullo spazio (e sull'infinito). *Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*. vol. 31A n.2, pp. 159-176.
Marchini C. (2012). Un'esperienza di insegnamento nella SSIS - Il caso della Logica matematica, *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, 131 – 148, http://annali.unife.it/ssis/article/view/568/502
Matijasevič, Yu. (1970). Solution of the tenth problem of Hilbert. *Mat. Lapok*, 21, 83-87.
Pezzi, F. (2002). Cornicette, bottoni e "infinito", *L'educazione Matematica*, serie VI, 4, 61 - 64.
Platone (1991) *Tutti gli scritti*, Reale G. (a cura di) Milano: Rusconi.
Richardson, D. (1968). Some Undecidable Problems Involving Elementary Functions of a Real Variable, *The Journal of Symbolic Logic*, **33**, 514 – 520**.**
Risch, R.H. (1969). The problem of Integration in Finite terms. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139**, 167 – 189.
Risch, R.H. (1970). The Solution of the Problem of Integration in Finite Terms. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76**, 605 – 608.
Serres M. (1994). *Le origini della geometria*. Milano: Feltrinelli.
Shulman, L.S. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, February, 4 – 14.
Speranza F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora Editrice.
Stellica, A. (1994). La matematica nel Menone di Platone. In Sidoni G. (Ed.) *Filosofia e Matematica*, Milano: Edizioni dell'Arco.
Toth I. (1998). *Lo schiavo di Menone*. Milano: Vita e Pensiero.
Tsamir, P. (2000). La costruzione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica*, n. 2, 167 - 207.
Vighi P. (2006). "Measurement" in a squared paper. In M. Bosch (Ed.) *Proceedings CERME4*, 777 – 785.
Zeilter H. (1990). Axiomatics of geometry in school and in science. *For the learning of mathematics*, v.10, n.2, 17 – 24.

LA VISUALIZZAZIONE SPAZIALE ... DIMENTICATA[1]

Roberto Battisti,

sezione di Riva del Garda, in nome del Gruppo geometria solida[2]

Motivazione della ricerca

Per visualizzazione spaziale si intende fare riferimento, d'accordo con la definizione che ne dà Vinicio Villani, a quell'abilità mentale di immaginare spazialmente una figura in configurazioni non statiche. I dati di questa ricerca provengono dalla scuola primaria e secondaria di primo grado italiana, per cui anche i risultati ipotizzati si riferiscono alla stessa.

In un articolo del 1987, Villani, ipotizzava che questo processo di costruzione del concetto di "visualizzazione spaziale" potesse avvenire in maniera non corretta se c'è "conflittualità tra immagini mentali e concetti geometrici" e sottolineava come questo possa accadere quando "la visione mentale" si fonda su un numero limitato di esperienze proposte secondo modelli statici e ripetitivi, producendo così una visione distorta della realtà, che conduce facilmente a stereotipi, che poi risulta difficile rimuovere. Per cercare di risolvere o quanto meno di minimizzare questa situazione invitava gli insegnanti a rovesciare l'approccio tradizionale alla geometria dello spazio (breve tempo dedicato all'osservazione degli oggetti in 3D per poi passare velocemente agli elementi fondamentali: punto, retta, piano, angolo; questo percorso risulta una forzatura per la capacità di astrazione richiesta ad allievi di 11 anni, immersi in un mondo a tre dimensioni) e a lavorare fin dai primi anni su esperienze spaziali (es. costruire un plastico della scuola, del quartiere ...[3]) che permettano il continuo passaggio dal tridimensionale al bidimensionale e viceversa in modo da costruire "le immagini mentali legate ai concetti geometrici". In questo modo risulta più semplice passare dagli oggetti reali alle forme, che possono raggruppare diversi oggetti e vivere nella mente come astrazione degli oggetti.

C'è inoltre da sottolineare come quest'argomento sia poco presente nei curricoli della scuola italiana.

- Scuola primaria (**Fioroni 2007**) Cl. II e III: principali figure del piano e dello spazio (OSA obiettivi specifici di apprendimento: costruire disegnare e descrivere modelli materiali di alcune figure geometriche del piano e dello spazio)

- PSP 2009, Piani di studio provinciali trentini: alla fine della scuola, esplorare, descrivere e rappresentare lo spazio;

- Scuola secondaria (**Fioroni**) Cl III: calcolo volumi, aree (OSA visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e viceversa);

- PSP: usare la visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica per risolvere problemi, anche in ambienti concreti.

A distanza di parecchi anni dalla pubblicazione dell'articolo citato si è voluto analizzare se la situazione descritta è cambiata o meno; questo ha rappresentato per il gruppo il punto di partenza e la motivazione della ricerca, quindi ci siamo posti queste domande:

- com'è trattata oggi nella scuola di base italiana la visualizzazione spaziale?
- esistono differenze significative fra i due ordini di scuola?
- man mano che i ragazzi crescono, aumentano le loro prestazioni riguardo a quest'abilità, per cui si può dire che c'è in atto la costruzione di questo concetto?

Il gruppo è partito dalla premessa che analizzando accuratamente i protocolli dei ragazzi, mettendo in evidenza sia gli errori più frequenti e significativi sia le tecniche e gli strumenti usati sia possibile rispondere ai quesiti posti sopra e formulare alcune ipotesi sugli ostacoli e difficoltà incontrate dagli allievi.

---

[1] Testo della presentazione del Gruppo Géometria solida all'incontro di Besançon, 29-31 ottobre 2010.

[2] Roberto Battisti, Michela Mattei, Giuseppe Raffaelli, Ester Bonetti, Rita Orsola D'Agata, Irene Serpieri, Mari Cutrera, Carlo Marchini, Daniela Blanchet, Lucia Fazzino, Rosa Santori, Thierry Dias, Sebastien Dessertine.

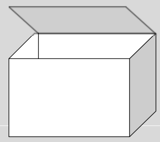
[3] così la geometria entra subito come facce piane, come sviluppi; i problemi di scala sono risolti in modo impreciso, ma la disposizione e la forma vengono rispettate; si acquisiscono esperienze visive passando da 3D a 2D e viceversa, gli allievi devono parlare di ciò che fanno, confrontano le forme che ottengono, le disegnano, descrivono le proprietà e così facendo si costruiscono "le immagini mentali.

Scelta dei problemi

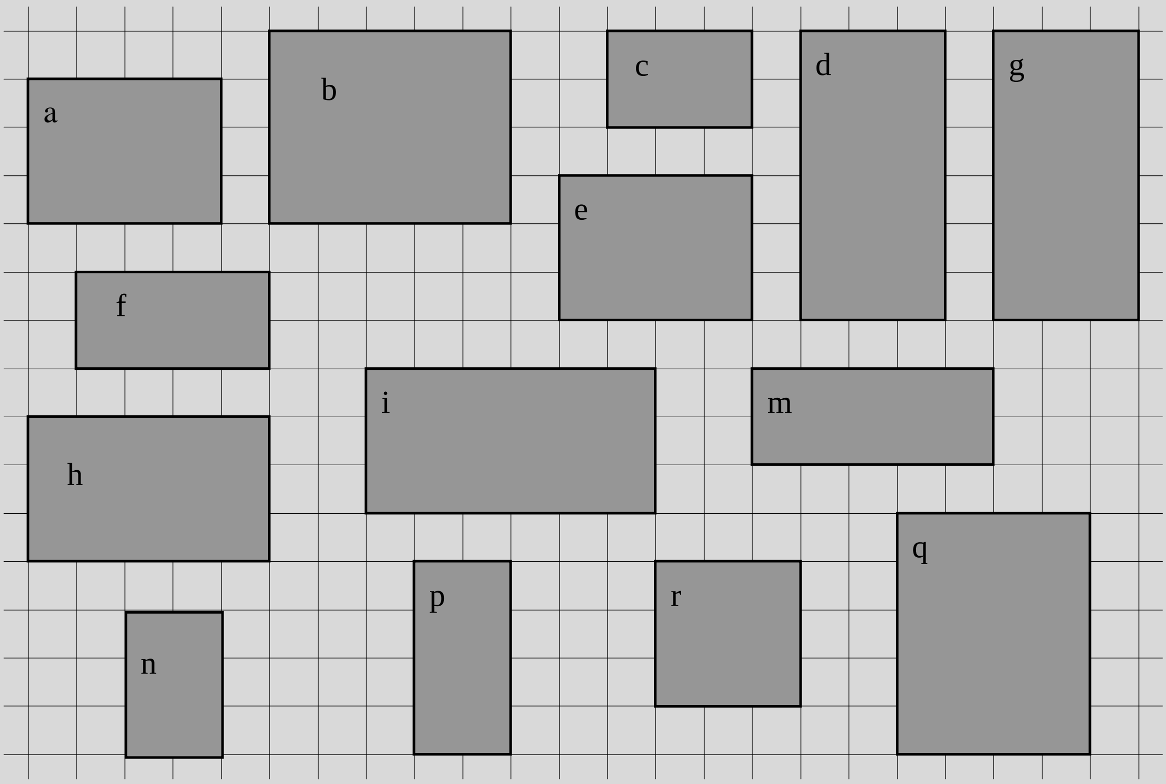
Inizialmente abbiamo scelto due problemi per le categorie della scuola primaria e due per quelle della scuola secondaria di primo grado, che trattassero lo stesso ambito concettuale, ovvero il passaggio dalle 2 alle 3 dimensioni e viceversa:
A. Scatoline Cat. 3,4,5. I° prova 17 RMT
B. Torri bicolori Cat. 3,4,5 I° prova 16 RMT
C. Sviluppi di una piramide Cat. 6,7,8 I° prova 17 RMT
D. La scatola di cubi Cat. 6,7 II° prova 16 RMT
Poi nel corso della ricerca per avere altre indicazioni utili abbiamo analizzato altri 3 problemi:
E. Scatola da ricoprire Cat. 3,4,5 I° prova 18 RMT
F. Sviluppi di un prisma Cat. 8,9,10 I° prova 18 RMT
G. Il cubo Cat. 7,8,9,10 II° prova 18 RMT

Analisi problema A

Scatoline (Cat. 3, 4, 5)
Franco ha dei cartoncini che unisce con dello scotch per ottenere delle scatoline tipo questa:



Ogni cartoncino è una faccia della scatolina. Franco li utilizza così come sono, senza tagliarne via dei pezzi e senza piegarli. Ha già costruito parecchie scatoline, ma gli restano ancora i cartoncini che vedete in basso:



Quante scatoline può ancora fare con i cartoncini che gli restano?
Dite quali sono i cartoncini che gli serviranno e come avete fatto a trovarli.

I criteri dell'attribuzione dei punteggi, elaborati all'atto dell'analisi a priori erano i seguenti:

4 *La scatolina correttamente ricostruita o individuata (a, c, e, f, n, p), con l'affermazione che con gli altri rettangoli non è possibile formare un'altra scatola e una spiegazione completa in cui si faccia riferimento alla lunghezza dei lati ed all'uguaglianza dei rettangoli*

3 *La scatolina correttamente ricostruita o individuata e l'affermazione dell'unicità con spiegazione incompleta o poco chiara*
oppure la scatolina correttamente ricostruita o individuata con spiegazione, ma senza accenno all'unicità

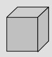
2 *La scatolina ricostruita o individuata correttamente, senza alcuna spiegazione*

1 Un inizio di ragionamento in cui si abbinano i rettangoli uguali, ma non li si sa poi alternare correttamente.
0 Incomprensione del problema
Il campione analizzato è composto da 600 protocolli, all'incirca 200 per ogni categoria provenienti dalle sezioni di Aosta, Milano, Parma, Siena, Rozzano e Riva del Garda;
Valore medio, parte da 0,79 (Cat. 3) a 1,02 (Cat. 4) a 1,47 (Cat. 5)
Successi (punteggio 4 e 3): la media delle 3 categorie è del 30%
Errori più comuni:
- scambiano il parallelepipedo per il rettangolo
- non conoscono quante facce ha il parallelepipedo (7,8,9)
- parlano di una scatola senza coperchio o senza fondo, quindi con 5 facce
- nel costruire la scatola non tengono conto che i cartoncini devono essere uguali 2 a 2 e che le loro lunghezze devono combaciare;
- 15% non risponde

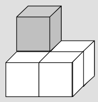
Strumenti e tecniche usate
- il 30% rappresenta la scatola con uno sviluppo in piano (80% in modo corretto)
- il 15% presenta la scatola con un disegno in 3 dimensioni
- il 40% si basa sull'immaginazione per rispondere
- le 3 categorie usano gli stessi strumenti anche con la stessa frequenza

Analisi problema B

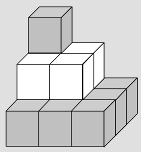
Torri bicolori (Cat. 3, 4, 5)
Robin possiede una scatola che contiene dei cubi grigi e dei cubi bianchi.
Costruisce parecchie torri rispettando il seguente modello:
Prima torre: 1 cubo grigio



Seconda torre:
5 cubi: 1 grigio e 4 bianchi



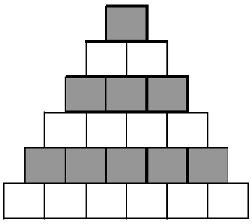
Terza torre:
14 cubi: 10 grigi e 4 bianchi



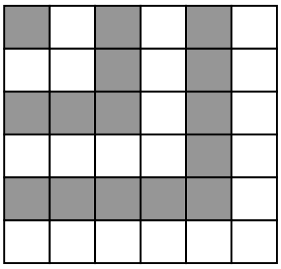
Robin continua a costruire delle torri cambiando colore ad ogni piano.
Quanti cubi di ogni colore utilizzerà Robin per costruire, secondo questo modello, la sesta torre?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

I criteri dell'attribuzione dei punteggi, elaborati all'atto dell'analisi a priori erano i seguenti:
4 Risposta corretta (35 grigi e 56 bianchi) con spiegazione
3 Risposta corretta (35 grigi e 56 bianchi) senza spiegazione o con spiegazione insufficiente
2 Procedimento corretto, ma con risposta errata dovuta a un solo errore nel conteggio o nel calcolo
o procedimento corretto, ma, come risposta, il numero totale dei cubi (91) senza distinzione dei colori
1 Soltanto il conteggio dei cubi visibili (15 grigi e 21 bianchi)
0 Incomprensione del problema

Campione: 500 protocolli circa distribuiti quasi equamente fra le 3 categorie;
Valore medio: 0,51 (Cat. 3); 1,06 (Cat. 4); 1,91 (Cat. 5)
Successi (punteggio 4 e 3) 30% come media delle 3 categorie
Errori più comuni:
- calcolano 20 cubi (12g+8b) sommando solo quelli delle prime tre torri dell'enunciato
- disegnano le torri come quadrati e trovano 21 in totale (9g+12b)



- calcolano 36 cubetti (15g+21b) che corrispondono al numero di cubi della sesta torre vista in piano oppure disegnano la torre in 3 dimensioni ma contano solo i cubi che vedono



- il 3% non risponde

Strumenti e tecniche usate

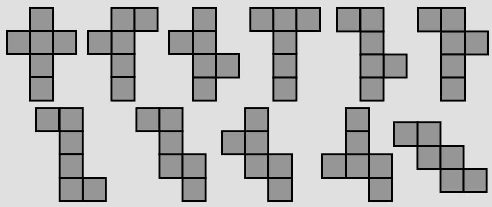
- il 20% utilizza lo sviluppo in piano (solo il 40% corretto)
- il 14% utilizza il disegno in 3 dimensioni, corretto
- il 18% soluzioni aritmetiche
- il 45% non evidenzia la strategia usata, ma fornisce solo la risposta

Analisi problema C

Sviluppo di una piramide (Cat. 6, 7, 8)

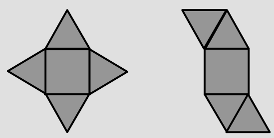
La settimana scorsa, gli allievi della classe di Antonio hanno cercato tutti gli sviluppi di un cubo. Ne hanno trovati 11, tutti diversi (non è possibile sovrapporli esattamente spostandoli o ribaltandoli) e hanno verificato che non ce ne sono altri (come nelle figure qui a fianco).

Gli 11 sviluppi del cubo:



Oggi, Antonio e i suoi compagni devono trovare tutti gli sviluppi di una piramide regolare a base quadrata le cui quattro facce laterali sono triangoli equilateri i cui lati misurano 2 cm.
Ne hanno già trovati due, ma pensano che ce ne siano altri.

I due sviluppi della piramide già trovati:



Quanti sviluppi diversi, in tutto, esistono per questa piramide?
Disegnateli tutti, con i lati di 2 cm.

I criteri dell'attribuzione dei punteggi, elaborati all'atto dell'analisi a priori erano i seguenti:

4 *Risposta corretta: 8 sviluppi differenti, con gli 8 disegni (non si esige una grande precisione, ma la distinzione chiara del quadrato, dei quattro triangoli equilateri e delle loro posizioni rispettive)*

3 *Risposta corretta: 8 sviluppi differenti, con disegni di sei sviluppi non presenti negli esempi (senza ripetizioni)*
oppure risposta «7 o 9 sviluppi differenti» (dovuti a una dimenticanza o ad una ripetizione) con i disegni corrispondenti (con o senza gli esempi) chiari

2 *Risposta «5 o 6 o 10 o 11 sviluppi differenti (dovuti a due dimenticanze o a due ripetizioni) con i disegni corrispondenti chiari*
oppure «8 sviluppi differenti» ma con disegni molto imprecisi o facce non contigue

1 *Da uno a quattro sviluppi, differenti dagli esempi*

0 *Incomprensione del problema*

Campione: circa 650 protocolli distribuiti abbastanza equamente fra le 3 categorie;

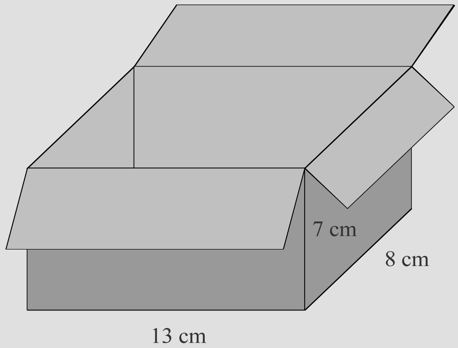
Valore medio: 0,77 (Cat. 6); 0,83 (Cat. 7); 0,97 (Cat. 8)
Successi (punteggio 4 e 3) media delle 3 categorie 13%
Errori più comuni:
- uniscono facce non contigue, ma che combaciano per un punto
- utilizzano facce che si sovrappongono per rotazione o traslazione
- usano triangoli isosceli o rettangoli invece che equilateri
- il 10% non risponde (dato comune alle 3 categorie)

Strumenti e tecniche usate
- il 75% usa subito e solo il disegno
- il 15% ritaglia i pezzi, li accosta e se formano la piramide, la disegna.

Analisi problema D

La scatola di cubi (Cat. 6, 7)

Francesco ha una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo di dimensioni interne 13 cm, 8 cm e 7 cm.
Egli dispone di molti cubi di legno, alcuni con lo spigolo di 2 cm, altri di 1 cm.
Francesco vuole riempire completamente la scatola con il minimo numero possibile di cubi.
Quanti cubi di ciascun tipo deve utilizzare?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.



I criteri dell'attribuzione dei punteggi, elaborati all'atto dell'analisi a priori erano i seguenti:

4 *Risposta corretta (72 cubi di lato 2 cm; 152 cubi di lato 1 cm) con spiegazione chiara*
3 *Risposta corretta con spiegazione poco chiara;*
oppure, procedimento corretto con spiegazione chiara, ma con errori di calcolo (la risposta 160 per il numero dei cubetti piccoli è da considerare come errore di ragionamento e non come errore di calcolo)
2 *Risposta corretta per il numero di un solo tipo di cubetti con spiegazione chiara e risposta errata per l'altro*
1 *Trovato correttamente uno solo dei due numeri senza spiegazione*
0 *Incomprensione del problema o risposta « 91+0 »*

Campione: 250 protocolli provenienti da Parma e Riva del Garda
Valore medio: 0,5 (Cat. 6); 0,8 (Cat. 7)
Successi (punteggio 4 e 3) 11% media delle 2 categorie
Errori più comuni
- calcolano 128 cubi di lato 1 cm (104 ultimo piano + 24 dei 3 piani sottostanti invece che 16x3 = 48, confusione tra area e volume)
- soluzioni aritmetiche, trovano 91 da 728:8=91, dividendo il volume totale della scatola per il volume di un cubo di lato 2 cm, senza rendersi conto che 2 misure della scatola sono rappresentate da un numero dispari
- scambiano i cubi per quadrati, l'area con il volume
- ritengono che il volume di 728 cubi di lato 1 cm sia equivalente a quello di 364 cubi di lato 2 cm
- ritengono che il volume di un cubo di lato 1 sia ¼ del volume di un cubo di lato 2, confronto fatto in piano fra 2 quadrati, scambio fra 2 e 3 dimensioni
- 10% non risponde

Strumenti e tecniche usate
- il 32% usa il disegno in piano visto dall'alto
- il 3% usa il disegno in 3 dimensioni, disegnando i cubi interni piano per piano
- il 45% fornisce soluzioni aritmetiche senza disegni

Questo problema è stato ritenuto dal gruppo particolarmente interessante, visti i risultati ottenuti, per cui si è pensato di utilizzarlo anche in altri contesti; infatti l'abbiamo assegnato a livello individuale e anche alla categoria 8, cambiando quindi i parametri didattici; ecco i risultati:
Campione: 258 protocolli, assegnati a categoria 6, 7 e anche 8 in misura quasi uguale alle altre 2 categorie,
Valore medio: 0,5 (Cat. 6); 0,8 (Cat. 7); 0,8 (Cat. 8)

Successi (punteggio 4 e 3) 10% in media fra le 3 categorie
Errori più comuni
- il 55% scambio fra le 2 e le 3 dimensioni, area e volume
- il 10% calcola di un solo tipo di cubo
- il 15% errori di calcolo
- il 24% non risponde

Strumenti e tecniche usate
- il 50% soluzioni aritmetiche senza disegni
- il 45% soluzione aritmetica con un disegno in piano
- solo il 5% usa un disegno in 3 dimensioni

Confrontando i risultati ottenuti dai 2 gruppi si vede che sono molto simili se non addirittura uguali anche quelli nuovi della categoria 8, sia per la tipologia degli errori emersi sia per gli strumenti e le tecniche usati; solo un dato è molto diverso, ed è quello che si riferisce al maggior abbandono del problema da parte dei ragazzi a livello individuale, infatti mentre il dato del rally è il 10% non risponde (fisiologico), qua diventa il 24%, quindi raddoppia.

Indicazioni emerse: i risultati

Titolo	N° elaborati	Cat. 3	Cat. 4	Cat. 5	Media
Scatoline	568	0,79	1,02	1,47	1,09
Torri bicolori	495	0,51	1,06	1,95	1,16
		Cat. 6	Cat. 7	Cat. 8	Media
Piramide	648	0,77	0,83	0,97	0,86
Scatola cubi	250 +258	0,5	0,79		0,64

Osservando i punteggi ottenuti nei 4 problemi come si vede dalla tabella, possiamo dire che nella scuola primaria c'è un incremento notevole passando dalla categoria 3 alla 4 e poi alla 5, il valore raddoppia e a volte triplica; questo fatto potrebbe far pensare che aumentando il numero di esperienze fatte si migliorino anche le abilità richieste. La stessa situazione non si ripete nella scuola secondaria, qui non è presente nessun incremento passando dalla categoria 6 alla 8; inoltre i valori medi dei punteggi totalizzati dalla scuola secondaria sono sempre inferiori e anche di molto, 30%-40%, rispetto a quelli ottenuti dalla scuola primaria.
Ecco una prima risposta all'ipotesi iniziale sul percorso scolastico, sulla costruzione di questo concetto e sulle differenze fra i due ordini di scuola.

Indicazioni emerse: gli errori

Dall'analisi degli errori più comuni emerge che esiste un significativo conflitto fra immagini mentali e concetti geometrici, là dove si richiede di cambiare registro per passare dal piano allo spazio (scambio fra le 2 e le 3 dimensioni) e questo si nota soprattutto nel linguaggio utilizzato sia nella scuola primaria sia nella scuola secondaria:
- Scatoline, scambio dei termini rettangolo e parallelepipedo
- Torri bicolori, scambio dei termini quadrati e cubi, area e volume
- Scatola di cubi, scambio dei termini quadrati e cubi, area e volume

Spesso manca proprio del tutto l'abilità di vedere spazialmente, di visualizzare figure tridimensionali:
- Scatoline, non conoscono le caratteristiche del parallelepipedo (indicano 7, 8, 9 facce),
- Torri bicolori, non vedono i cubi nascosti,
- Sviluppo piramide, non riconoscono le simmetrie, parlano di 30-40 sviluppi, non vedono le facce che si sovrappongono per rotazione o per traslazione.

Ecco un'altra risposta all'ipotesi iniziale, se esiste una costruzione di quest'abilità all'interno del percorso scolastico (sembra proprio di no!!!!).

Indicazioni emerse: gli strumenti

Dall'analisi degli strumenti padroneggiati ed usati per mettere in atto le strategie di soluzione si nota che:
- nella scuola primaria il 30% usa la rappresentazione grafica sul piano e solo il 15% usa il disegno a 3 dimensioni e si privilegia sempre la manualità.
- nella scuola secondaria si preferisce usare il disegno al posto della costruzione e della manipolazione degli oggetti geometrici (Piramide, 75% solo disegno, 15% ritaglio); disegno sul piano per il 15% contro il 3% che usa il disegno in 3D e inoltre si tende a privilegiare le soluzioni di tipo aritmetico, se possibile (come se ci si fidasse soprattutto di "quella matematica").

Alla luce di questi dati, risultati, errori, strumenti, ci siamo chiesti se potesse esistere una relazione tra i risultati ottenuti e gli strumenti e tecniche utilizzati.

Infatti abbiamo notato che i risultati migliori vengono ottenuti dalla scuola primaria dove si privilegia la manipolazione rispetto all'immaginazione, si usa la rappresentazione grafica per il 30% in 2 D e per il 15 % in

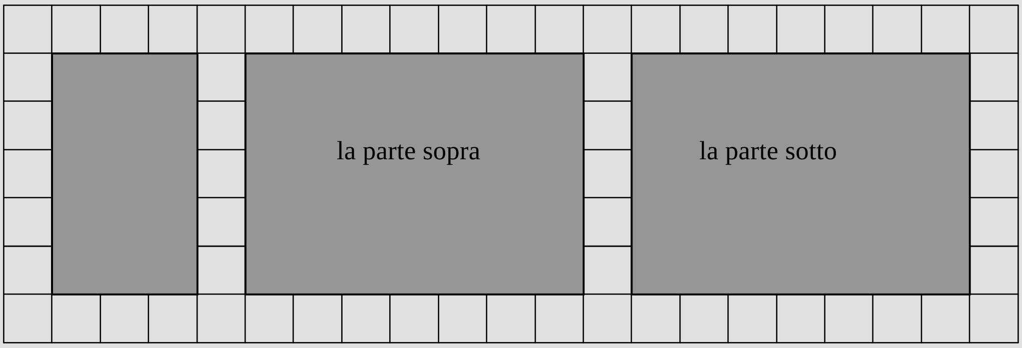
3D rispetto alle scuola secondaria di primo grado, dove non si ricorre più alla manipolazione e dove l'uso in 3D è limitassimo, il 3% (la geometria solida si fa solo in terza media!!!!).

Verifica: ipotesi risultati- strumenti utilizzati

Per controllare se quest'ipotesi che collega i risultati ottenuti agli strumenti utilizzati poteva avere qualche fondamento abbiamo deciso di analizzare altri 3 problemi:
E. Scatola da ricoprire Cat. 3, 4, 5 I° prova 18 RMT
F. Sviluppi di un prisma Cat. 8, 9, 10 I° prova 18 RMT
G. Il cubo Cat. 7, 8, 9 ,10 II° prova 18 RMT

Analisi problema E

La scatola da ricoprire (Cat. 3, 4, 5)
Graziella vuole ricoprire interamente una scatola con dei rettangoli di carta.
Ha già disegnato questi tre rettangoli per coprire esattamente la parte sopra della scatola, la parte sotto della scatola e una delle altre facce della scatola.



Disegnate sulla quadrettatura in basso i tre rettangoli che mancano per ricoprire esattamente le altre facce della scatola.

I criteri dell'attribuzione dei punteggi, elaborati all'atto dell'analisi a priori erano i seguenti:
4 *Disegno corretto e preciso delle tre facce che mancano (una faccia 3 × 5, due facce 7× 3)*
3 *Disegno corretto delle tre facce che mancano, ma con delle linee imprecise (a mano libera, linee che non corrispondono esattamente a quelle della quadrettatura, …)*
2 *Disegno corretto della quarta faccia (3 × 5) ed un errore nella 5ª e/o 6ª faccia (lati non corrispondenti ai dati)*
1 *Disegno corretto di una delle due facce o tre facce disegnate, ma con degli errori (che fanno però capire che gli alunni si sono resi conto che ci volevano sei facce in tutto)*
0 *Incomprensione del problema*.

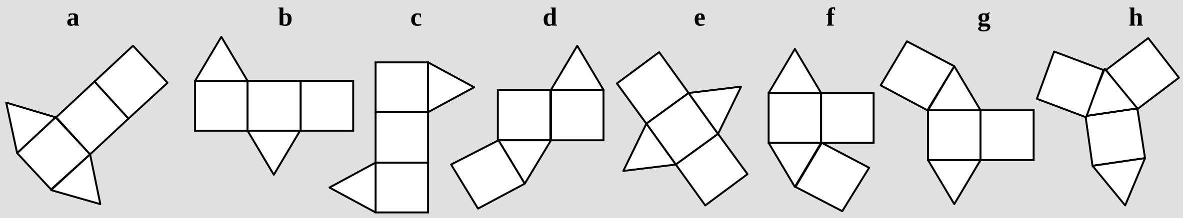
Campione 554 protocolli
Valore medio: (Cat. 3) 2,3 →2,8 →3 (Cat. 5)
Successi: la media delle 3 categorie è del 60% rispetto al 30% del problema omologo "Scatoline"
Errori più comuni:
- disegnano un numero sbagliato di rettangoli o con le misure che non combaciano
- disegnano 3 facce uguali a quelle del testo

Strumenti e tecniche utilizzate:
- 90% solo disegno delle 3 facce
- 10% ritaglio e costruzione scatola

I successi ottenuti in questo problema sono raddoppiati rispetto a quelli ottenuti in "Scatoline" passando dal 30% al 60% nella media delle 3 categorie, ma gli errori più comuni segnalati qua sono diversi (qua non c'è lo scambio fra rettangolo e parallelepipedo) e anche gli strumenti usati sono completamente diversi (non si usa la manipolazione se non nel 10% dei casi in controtendenza con quello che di solito avviene nella scuola primaria); quindi analizzando bene queste situazioni pensiamo che i 2 problemi in oggetto siano proprio diversi; infatti in questo secondo problema per arrivare alla soluzione non occorre disegnare o costruire la scatola, ma basta disegnare le 3 facce mancanti, abbinandole a quelle che già avevamo, per cui la visualizzazione spaziale viene coinvolta solo in maniera marginale.

Analisi problema F

Sviluppi di un prisma Cat. (8, 9, 10)
Per il 17° RMT, gli allievi della classe di Antonio avevano dovuto cercare i diversi sviluppi di una piramide a base quadrata, ma non li avevano trovati tutti!
Oggi essi devono trovare tutti gli sviluppi di un prisma in cui le due basi sono triangoli equilateri e le altre tre facce sono quadrati.
Antonio ha trovato questi otto sviluppi:



I suoi compagni scoprono che ce ne sono solo sette corretti, perché c'è una figura sbagliata, e che ne mancano altri.
Qual è la figura sbagliata? Perché?
Disegnate almeno uno sviluppo che Antonio non ha trovato.

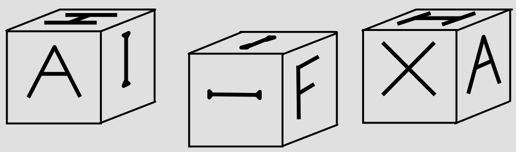
Campione: 274 protocolli di categoria 8
Valore medio: 2,77 rispetto a 0,97 dell'omologo "sviluppi di una piramide"
Successi: 60% contro il 21% dell'altro
Errori più comuni:
- unire facce non contigue per un punto
- non accorgersi delle figure simmetriche

Strumenti e tecniche usate:
- ritaglio, piegatura e costruzione in 3 D per il 45% contro il 15% dell'omologo
- uso della rappresentazione mentale 25% contro il 75%

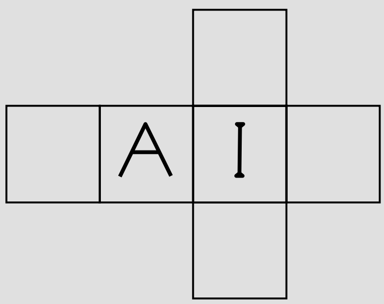
I successi per questo problema sono triplicati rispetto a quelli ottenuti per "Sviluppi di una piramide", gli errori più comuni rimangono gli stessi mentre invece cambiano molto gli strumenti usati; infatti gli allievi qui usano in misura senz'altro maggiore attività manipolatorie come ritaglio, piegature e costruzione di solidi in 3 dimensioni (il 45% contro il 15% del problema omologo) e di conseguenza fanno meno ricorso alla rappresentazione mentale (25% contro il 75% del problema omologo).
Analoga situazione la riscontriamo nel problema proposto proprio dal nostro gruppo nella seconda prova del 18° RMT, "**Il cubo**" (Cat. 7, 8, 9, 10).

Analisi problema G

Il cubo (Cat. 7, 8, 9, 10)
Roberto ha costruito un cubo.
Ha scritto una lettera su ogni faccia.
Poi ha fotografato il suo cubo in diverse posizioni.
Ecco tre di queste fotografie:



Carlo ha trovato molto interessante il cubo del suo amico Roberto e ha deciso di costruirne uno esattamente uguale per sé.
Egli ha preparato un modello del suo cubo con le sei facce, che piegherà e incollerà con nastro adesivo trasparente.
Ha già disegnato le lettere A e I su due delle facce.



Disegnate le lettere delle altre quattro facce del cubo di Carlo, in modo che siano esattamente nelle stesse posizioni che sul cubo di Roberto.
Esistono più possibilità di porre le lettere su queste quattro facce?
Se sì, fate un disegno per ogni possibilità.

Campione: 266 classi di categoria 7 e 8 provenienti da Rozzano, Riva e Franche Comtè;
Valore medio: la media per le due categorie è del 2,3
Successi: uguali per le due categorie, il 50%
Errori più comuni:
- riguardano le simmetrie, ed in particolare l'orientamento delle lettere F ed I

Strumenti e tecniche usate:
- chi ha totalizzato punteggi alti (p. 4 o 3) ha usato ritaglio, sviluppo in cartoncino e costruzione in 3 D, per il 40% e la rappresentazione grafica in 2D per il 60%;
- mentre chi ha totalizzato punteggi bassi ha usato solo il disegno in 2D per il 90% e la manipolazione per il 10%.

Quindi come considerazione finale ci sembra di poter dire che esiste veramente una stretta relazione fra strumenti usati e risultati ottenuti; infatti i risultati migliori si possano ottenere quando si padroneggiano le rappresentazioni in 3 D e si usano attività manipolatorie costruendo solidi in concreto

Conclusioni

Alla luce di questi dati quali riflessioni si possono fare ?
Cosa fare per cercare di migliorare le situazioni descritte ?
Sicuramente è giunto il momento di ripensare a un diverso approccio e a un diverso percorso per poter costruire quest'abilità mentale nella scuola di base. In accordo con Vinicio Villani, là dove ancora parecchi anni fa invitava gli insegnanti a costruire i concetti geometrici attraverso esperienze spaziali da introdurre fin dai primi anni di scolarità per non trovarsi poi degli studenti con una scorretta visualizzazione spaziale, difficile da correggere, bisogna privilegiare un percorso, che sorretto da una metodologia appropriata ((ad es. in CREM, 1995, 1999): osservazione→ manipolazione→ costruzione→ rappresentazione grafica→ comunicazione) incominci fin dai primi anni della scuola primaria per poi continuare nella scuola secondaria di primo grado a sperimentare situazioni didattiche coinvolgenti e concrete, che investano i passaggi dalle 2 alle 3 D.
Quest'idea va proprio contro la tendenza dello studio tradizionale della geometria, che parte dalla definizione degli enti geometrici fondamentali e dalle classificazioni degli oggetti matematici ancora oggi proposta nei curricoli di matematica (vedi Fioroni 2007 piani di studio provinciali trentini 2009). Quindi gli ostacoli da rimuovere sono soprattutto quelli derivati dalla scelta del percorso di studio della geometria secondo un modello tradizionale. Questo percorso ha estremamente bisogno di una certa continuità di sperimentazioni di situazioni didattiche tra scuola primaria e secondaria, ciò che adesso non avviene e come obiettivo generale le attività di classificazione di oggetti matematici dovrebbero rappresentare un punto di arrivo e non come adesso un punto di partenza perché solo così i ragazzi scopriranno le proprietà caratteristiche degli oggetti e potranno costruirsi le immagini mentali prima e i concetti poi.

Bibliografia

CREM: 1995, *Les Mathématiques de la maternelle jusu'à 18 ans*, (*La matematica dalla scuola materna alla maturità*, edizione italiana a cura di Lucia Grugnetti e Vinicio Villani, 1999, Ed. Pitagora, Bologna, 6.1.1, La geometria a livello di base, pag. 136).
Fioroni: 2007, Indicazioni nazionali per il curricolo del primo ciclo d'istruzione, area matematico- scientifico-tecnologico, pag. 91-99.
M.Pellerey: 2009, Piani di studio provinciali primo ciclo di istruzione, linee guida per l'elaborazione dei piani di studio di Istituto, provincia autonoma di Trento, pag. 89-90.
Villani V.: 1987, 'Geometria dello spazio', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.10, n°5, pag. 405-440.

LA VISUALISATION SPATIALE ... OUBLIEE[1]

Roberto Battisti

section de Riva del Garda, pour le Groupe géométrie dans l'espace[2]:

But de la recherche

Par visualisation spatiale, nous faisons référence à la définition donnée par Vinicio Villani, *capacité mentale d'imaginer dans l'espace une figure sous une forme non statique*. Les données de cette recherche proviennent de l'école primaire et secondaire de premier degré italienne, auxquels se réfèrent aussi les résultats envisagés.
Dans un article du début des années 1990, Villani, faisait l'hypothèse que le processus de construction de la « visualisation spatiale » peut se développer de manière incorrecte s'il y a « conflit entre images mentales et concepts géométriques » et il soulignait comment ceci peut arriver quand la « vision mentale » se base sur un nombre limité d'expériences répétitives, proposées en référence à des modèles statiques, produisant une vision déformée de la réalité, qui conduit fréquemment à des stéréotypes qu'il sera difficile d'abandonner. Pour chercher à résoudre ou au moins à minimiser cette situation, il invitait les enseignants à renverser l'approche traditionnelle de la géométrie de l'espace (brèves séquences dédiées à l'observation d'objets de l'espace à trois dimensions et passage rapide aux éléments fondamentaux : points, droite, plan, angle; parcours qui outrepasse la capacité d'abstraction d'élèves de 11 ans immergés dans un monde à trois dimensions) et à travailler dès les premières années sur des expériences (par exemple, construire un maquette de l'école, du quartier[3]) qui favoriseront les passages réguliers entre le tridimensionnel et le bidimensionnel de manière à construire les « images mentales liées aux concepts géométriques ». De cette manière, il est plus simple de passer des solides ou volumes concrets aux figures géométriques, qui peuvent représenter plusieurs objets et s'ancrer mentalement comme abstractions de ces objets.
Il faut encore souligner la discrétion du thème de la géométrie dans l'espace dans nos curriculums :
- Ecole primaire (*Fioroni 2007*) Cl. II e III: principales figures du plan et de l'espace (OSA objectifs spécifiques de l'apprentissage : construire, dessiner et décrire des modèles matériels de quelques figures géométriques du plan et de l'espace)
- *PSP 2009, Plan d'études provincial du Trentin* **:** à la fin de l'école, explorer, décrire et représenter l'espace
- Ecole secondaire (*Fioroni*) Cl III: calcul de volumes, aires (OSA visualiser des objets tridimensionnels à partir d'une représentation bidimensionnelle et réciproquement ;
- *PSP:* faire appel à la visualisation, au raisonnement spatial et à la modélisation géométrique pour résoudre des problèmes, aussi dans des contextes concrets.
À une bonne vingtaine d'années de la publication de l'article cité, nous avons souhaité savoir si la situation décrite a évolué ou non. C'est ce qui a représenté pour notre groupe le point de départ et la motivation de nos recherches et nous nous sommes posé les questions suivantes :
- comment est traité actuellement la visualisation spatiale dans l'école obligatoire de l'école italienne?
- existe-t-il des différences significatives entre les deux ordres d'ordres d'enseignement (primaire et secondaire inférieur)?
- avec la croissance de l'âge des élèves, les compétences s'améliorent dans ce domaine de connaissances ; peut-on dire alors qu'ils sont en phase de construction de ce concept ?

Le groupe est parti de l'idée qu'en analysant avec soin les copies d'élèves, en mettant en évidence d'une part les erreurs les plus fréquentes et significatives, d'autre part les techniques et les instruments mobilisés, il est possible de répondre aux questions posées précédemment et de formuler quelques hypothèses sur les obstacles et les difficultés rencontrées par les élèves à propos de la visualisation spatiale.

---

1 Texte tiré de la présentation du Groupe *Géometrie dans l'espace* lors de la rencontre de Besançon, 29-31 octobre 2010

2 Roberto Battisti, Michela Mattei, Giuseppe Raffaelli, Ester Bonetti, Rita Orsola D'Agata, Irene Serpieri, Mari Cutrera, Carlo Marchini, Daniela Blanchet, Lucia Fazzino, Rosa Santori, Thierry Dias, Sebastien Dessertine

3 On entre ainsi immédiatement en géométrie au travers des faces planes et des développements; les problèmes d'échelle sont résolus approximativement mais les dispositions et les formes sont respectées; les expériences visuelles sont acquises aux passages réciproques de l'espace au plane ; les élèves doivent parler de ce qu'ils font, confronter les formes qu'ils obtiennent, les dessiner, en décrire les propriétés, et c'st ainsi qu'ils construisent leurs « images mentales ».

Choix des problèmes

Nous avons choisi, au départ, deux problèmes pour les catégories de l'école primaire et deux pour celles de l'école secondaire du premier degré, dans le même champ conceptuel : le passage de la deuxième à la troisième dimension, et réciproquement.

A. **Boîtes** Cat. 3, 4, 5, 17 RMT I
B. Tours bicolores Cat. 3, 4, 5, 16 RMT I
C. Développements d'une pyramide Cat. 6, 7, 8, 17 RMT I
D. La boîte de cubes Cat. 6, 7, 16 RMT II

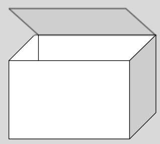
Puis, au cours des travaux, nous avons encore choisi trois autres problèmes pour élargir le champ des données utiles à notre recherche

E. Boîtes à recouvrir Cat. 3, 4, 5, 18 RMT I
F. Développement d'un prisme Cat. 8, 9, 10, 18 RMT I
G. Le cube Cat. 7, 8, 9, 10. 18 RMT II

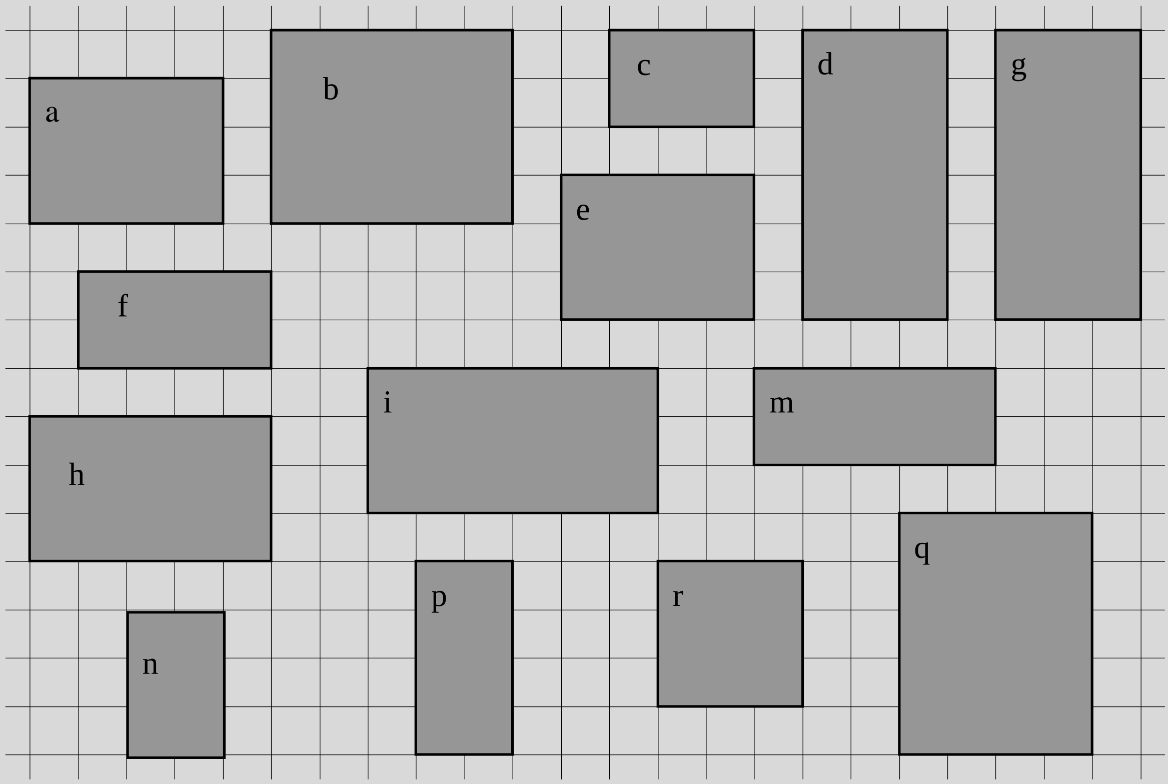
Analyse du problème A

Boîtes (Cat. 3, 4, 5)

Franco assemble des cartes avec du papier collant pour obtenir des boîtes de ce genre :



Chaque carte est une face de la boîte. Franco les utilise comme elles sont, sans les découper et sans les plier. Il a déjà construit plusieurs boîtes, mais il lui reste encore les cartes que vous voyez ci-dessous :



Combien de boîtes pourra-t-il encore construire avec les cartes qui restent ?
Dites quelles sont les cartes qui lui serviront.

Les critères d'attribution des points, élaborés lors de l'analyse a priori du problème, étaient les suivants :

4 *La boîte correctement reconstruite ou désignée (a, c, e, f, n, p), avec l'affirmation qu'il n'est pas possible de former une autre boîte et une explication complète qui se réfère aux longueurs des s et à l'égalité des rectangles*

3 La boîte correctement reconstruite ou désignée et l'affirmation de l'unicité, avec explication incomplète ou peu claire
ou la boîte correctement reconstruite ou désignée avec explications mais sans allusion à l'unicité
2 La boîte correctement reconstruite ou désignée, sans aucune explication
1 Début de raisonnement dans lequel les rectangles égaux sont regroupés par deux, mais ne peuvent pas s'alterner correctement
0 Incompréhension du problème

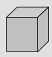
L'échantillon comprend 600 copies, environ 200 pour chaque catégorie, provenant des sections de Aosta, Milano, Parma, Siena, Rozzano et Riva del Garda;
La moyenne (sur 4 points) va de 0,79 (Cat.3) à 1,02 (Cat.4) puis à 1,47 (Cat.5)
Réponse justes: (4 et 3 points) la moyenne des 3 catégories est del 30%
Erreurs les plus fréquentes:
- les élèves confondent parallélogramme et rectangle
- ils ne connaissent pas le nombre de faces du parallélépipède rectangle (7, 8, 9)
- la boîte est sans couvercle ou sans fond et n'a donc que 5 faces
- dans la construction, non prise en compte du fait que les cartes doivent être égales deux par deux et que leurs s doivent coïncider
- non réponse: 15%

Instruments et techniques utilisés :
- 30 % des groupes représentent la boîte par un développement plan (correct dans 80% des cas),
- 15% présentent la boîte par un dessin en trois dimensions,
- 40% répondent sur la base d'une représentation mentale seulement
- les trois catégories utilisent les mêmes instruments, avec la même fréquence.

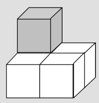
Analyse du problème B

Tours bicolores (Cat. 3, 4, 5)
Robin possède une boîte qui contient des cubes gris et des cubes blancs.
Il construit plusieurs tours en respectant le modèle suivant :

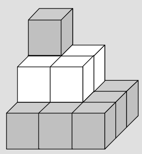
Première tour : 1 cube gris



Deuxième tour :
5 cubes : 1 gris et 4 blancs



Troisième tour :
14 cubes : 10 gris et 4 blancs

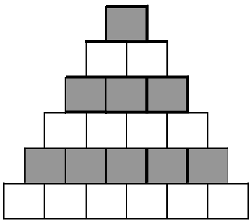


Robin continue à construire des tours en changeant de couleur pour chaque étage.
En continuant de la même manière, combien de cubes de chaque couleur Robin utilisera-t-il pour construire la sixième tour ?
Expliquez votre réponse.

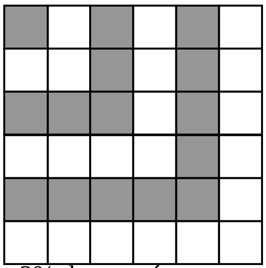
Les critères d'attribution des points, élaborés lors de l'analyse a priori du problème, étaient les suivants :
4 Solution correcte (35 gris et 56 blancs) avec explications
3 Solution correcte (35 gris et 56 blancs) sans explications ou avec explications insuffisantes
2 Démarche correcte mais avec réponse fausse due à une seule erreur dans le dénombrement ou le calcul ou démarche correcte avec, comme réponse, le nombre total de cubes (91) sans distinguer les couleurs
1 Comptage de cubes visibles uniquement (15 gris et 21 blancs)
0 Incompréhension du problème

Échantillon: 500 copies environ réparties quasi également fra le 3 catégorie;
Moyenne des points : 0,51 (Cat.3) 1,06 (Cat.4) 1,91 (Cat.5)
Réponses correctes : (points 4 e 3) 30% comme moyenne des 3 catégories
Erreurs les plus fréquentes :
- calculent 20 cubes (12g + 8b) additionnant seulement ceux des trois premières tours de l'énoncé

- dessinent les tours comme un empilement de carrés dans un plan vertical et trouvent 21 au total (9g + 12b)



- calculent 36 cubes (15g +21b) qui correspondent au nombre de cubes de la même tour vue en plan ou dessinent la tour en 3 dimensions mais comptent seulement les cubes qu'ils voient



- 3% de non réponse

Instruments et techniques utilisés

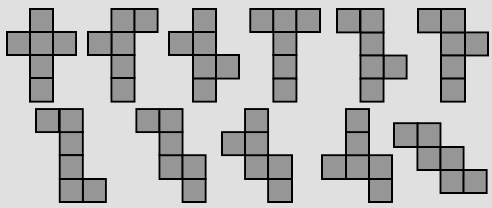
- 20% utilisent le développement sur un plan (dont seulement le 40% est correct)
- 14% utilisent un dessin en 3 dimensions, correct
- 18% solutions arithmétiques
- 45% ne décrivent pas la stratégie utilisée et ne donnent que la réponse

Analyse du problème C

Développements de pyramides (Cat. 6, 7, 8)

Le mois passé, les élèves de la classe d'Antoine ont cherché tous les développements du cube. Ils en ont trouvé 11, tous différents (qu'on ne peut pas superposer exactement en les déplaçant ou les retournant) et ont vérifié qu'il n'y en a pas d'autres. (voir figure ci-contre)

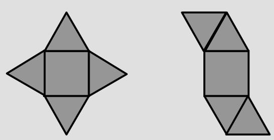
Les 11 développements du cube:



Aujourd'hui, Antoine et ses camarades doivent trouver tous les développements d'une pyramide régulière de base carrée dont les quatre faces latérales sont des triangles équilatéraux et dont toutes les arêtes mesurent 2 cm.

Ils en ont déjà trouvé deux, mais ils pensent qu'il y en a encore d'autres :

Les 2 développements de la pyramide déjà trouvés:



Combien existe-t-il, en tout, de développements différents de cette pyramide ?
Dessinez-les tous, avec tous les s de 2 cm.

Les critères d'attribution des points, élaborés lors de l'analyse a priori du problème, étaient les suivants :

4 *Réponse correcte (8 développements différents avec les 8 dessins), on n'exige pas une grande précision, mais la distinction claire du carré, des quatre triangles équilatéraux et de leurs positions respectives*

3 *Réponse correcte (8 développements différents) avec dessin des six développements qui ne sont pas donnés dans les exemples (sans doublures)*
ou réponse avec 7 ou 9 développements différents (due à un oubli ou une « doublure ») avec les dessins correspondants clairs (avec ou sans les exemples)

2 *Réponse avec 5 ou 6 ou 10 ou 11 développements différents avec les dessins correspondants clairs, due à deux oublis ou deux « doublures »*
ou 8 développements différents mais avec dessins très imprécis ou faces non-contiguës

1 De un à quatre développements trouvés, différents des exemples
0 Incompréhension du problème

Échantillon: environ 650 copies réparties également entre les 3 catégories;

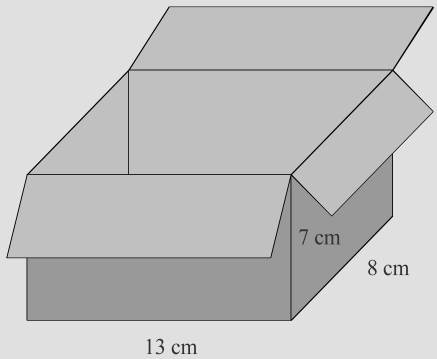
Moyenne des points : 0,77 (Cat.6) ; 0,83 (Cat.7) ; 0,97 (Cat.8)
Réponses correctes : (points 4 et 3) moyenne des 3 catégories 13%
Erreurs les plus fréquentes :
- joignent des faces non contiguës, mais qui coïncident par un point
- utilisent des faces qui se superposent par rotation ou translation
- utilisent des triangles isocèles ou rectangles au lieu de triangles équilatéraux
- 10% de non réponse (donnée commune aux 3 catégories)

Instruments et techniques utilisés
- 75% travaillent uniquement par dessin
- 15% découpent les pièces, les joignent et forment la pyramide, puis la dessinent

Analyse du problème D

La boîte de cubes (cat. 6, 7)
François a une boîte en forme de parallélépipède rectangle de dimensions intérieures13 cm, 8 cm et 7 cm.

Il dispose de nombreux cubes en bois,
les uns de 2 cm d'arête, les autres de 1cm d'arête.
François veut remplir complètement la boîte avec le moins possible de cubes.
Combien doit-il en mettre de chaque sorte ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



Les critères d'attribution des points, élaborés lors de l'analyse a priori du problème, étaient les suivants :
4 Réponse correcte (72 cubes de 2 cm d'arête; 152 cubes de 1 cm d'arête) avec explications claires
3 Réponse correcte avec explications peu claires ;
ou démarche correcte avec explications claires mais avec des erreurs de calcul (la réponse 160 pour le nombre de cubes de 1 cm d'arête est à considérer comme erreur de raisonnement et non comme simple erreur de calcul)
2 Réponse correcte pour le nombre d'un seul type de cubes avec explications claires et réponse erronée pour l'autre
1 Seulement un des deux nombres sans explications
0 Incompréhension du problème ou réponse « 91 + 0 »

Échantillon: 250 copies provenant de Parma et Riva del Garda
Moyenne des points : 0,5 (Cat.6) ; 0,8 (Cat.7)
Réponses correctes : (points 4 et 3) 11% en moyenne pour les 2 catégories
Erreurs les plus fréquentes
- calcul de 128 cubes de 1 cm^3 (104 au dernier étage + 24 des trois couches inférieures au lieu de 16 × 3 = 48, confusion entre aire et volume)
- solutions arithmétiques ; 91 (728 : 8 = 91), trouvé en divisant le volume total de la boîte par le volume d'un cube di côté 2 cm, sans se rendre compte que deux mesures de la boîte sont représentées par un nombre impair
- confusion entre cubes et carrés, aire et volume
- le volume de 728 cubes de côté 1 cm est considéré comme équivalent à celui di 364 cubes de 2 cm de côté
- le volume d'un cube de côté 1 est considéré comme le 1/4 du volume d'un cube de côté 2, comparaison de deux carrés dans le plan, confusion entre deux et trois dimensions
- 10% non-réponses

Instruments et techniques utilisés
- 32%, dessin plan vu du haut
- 3%, dessin en trois dimensions, dessinant les cubes internes couche par couche
- 45%, solution arithmétiques sans dessin

Notre groupe a trouvé ce problème particulièrement intéressant au vu des résultats obtenus et nous avons pensé à l'utiliser aussi dans d'autres contextes. En fait, nous l'avons proposé individuellement et aussi en catégorie 8, en modifiant ainsi les paramètres didactiques. Voici les résultats :

Échantillon : 258 copies de catégories 6, 7, et aussi de catégorie 8 avec des effectifs comparables à ceux des deux premières
Moyenne des points : 0,5 (Cat.6) ; 0,8 (Cat.7) ; 0,8 (Cat.8)
Réponses correctes : (3 et 4 points) 10% en moyenne pour les trois catégories
Erreurs les plus fréquentes
- 55%, confusion entre deux et trois dimensions, aire et volume
- 10%, calcul d'un seul type de cube
- 15%, erreur de calcul
- 24%, non-réponse

Instruments et techniques utilisés
- 50%, solution arithmétique sans dessin
- 45%, solution arithmétique avec un dessin dans le plan
- seulement le 5% de dessins en trois dimensions

La comparaison montre que les résultats obtenus dans les deux expérimentations (par groupes ou individuellement) sont très proches, voire les mêmes, y compris pour la catégorie 8, nouvelle, soit pour la typologie des erreurs observées, soit pour les instruments et techniques utilisés. La seule différence, très significative, concerne le nombre d'abandons, beaucoup plus fréquents chez les élèves qui ont travaillé individuellement, près de 24%, alors que seulement 10% des groupes n'avaient pas répondu lors de l'épreuve dans le cadre du Rallye.

Synthèse des résultats

Titre	Nb. copies	Cat.3	Cat.4	Cat.5	Moyenne
Boîtes	568	0,79	1,02	1,47	1,09
Tours bicolores	495	0,51	1,06	1,95	1,16
		Cat.6	Cat.7	Cat.8	Moyenne
Dév. de pyramide	648	0,77	0,83	0,97	0,86
Boîte de cubes	250 + 258	0,5	0,79	(0,8)	0,64

En observant les moyennes des points obtenus dans ce tableau pour les quatre problèmes on remarque une sensible amélioration, aux niveaux de l'école primaire ; en passant de la catégorie 3 à la catégorie 5, les valeurs doublent, voire triplent. Ceci laisse penser que en augmentant le nombre d'expériences vécues, les capacités requises s'améliorent aussi.
La progression ne se répète pas aux degrés de l'école secondaire où l'on ne relève pas de progrès sensible en passant de la catégorie 6 à la catégorie 8. En outre, les moyennes des points obtenus dans ces degrés sont toujours inférieures, et sensiblement, de 30% à 40%, par rapport à celles obtenues à l'école primaire.
C'est une première réponse à nos hypothèses initiales sur le parcours scolaire, sur la construction de ce concept et sur les différences entre les deux ordres d'enseignement.

Synthèse des analyses d'erreurs

De l'analyse des erreurs les plus fréquentes, apparaît l'existence d'un conflit significatif entre images mentales et concepts géométriques là où est exigé un changement de registre du plan à l'espace (passage entre la 2^e^ et la 3^e^ dimension). On l'observe surtout dans le langage utilisé tant à l'école primaire que secondaire :
- Boîtes : échange ou confusion des termes rectangle et parallélépipède
- Tours bicolores : échange ou confusion des termes carré et cube, aire et volume
- Boîte de cubes: échange ou confusion des termes carré et cube, aire et volume

Très souvent, la capacité de voir dans l'espace ou de visualiser des figures à trois dimensions fait entièrement défaut :
- Boîtes, méconnaissance des caractéristiques du parallélépipède (on parle de 7, 8, 9 faces)
- Tours bicolores, les cubes cachés sont ignorés
- Développements de pyramides : les symétries ne sont pas reconnues (on parle de 30 à 40 développements), les faces qui se superposent par rotation ou translation ne sont pas reconnues

Voici une autre réponse à nos hypothèses initiales sur l'existence de la construction de cette capacité lors du parcours scolaire (il ne le semble vraiment pas !!!!).

Les observations mises en évidence: les instruments

Des analyses des instruments maîtrisés et utilisés pour mettre en acte les stratégies die résolution, on relève que :
- à l'école primaire, le 30% des élèves font une représentation graphique dans le plan et seulement le 15% font un dessin à trois dimensions, et que la manipulation est privilégiée.
- à l'école secondaire, le dessin est préféré à la construction ou à la manipulation des objets géométriques

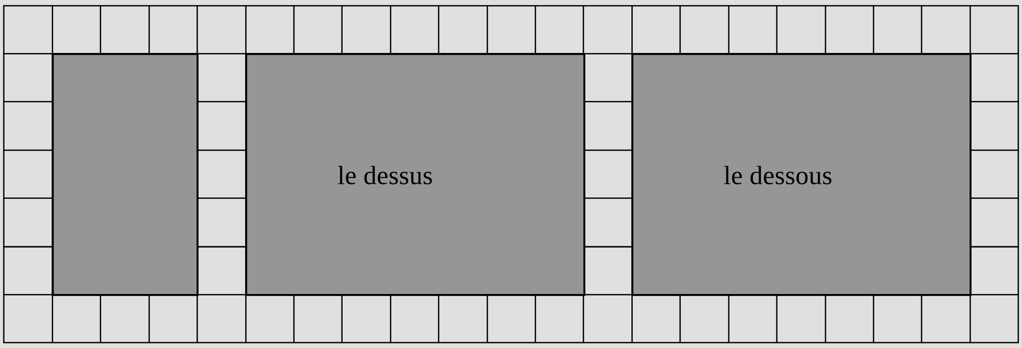
(Pyramide, 75% font seulement le dessin, 15% découpent) ; le dessin dans le plan se trouve dans 15% des cas contre 3% de dessin en 3D, et en outre, on tend à privilégier les solutions de type arithmétique, si possible (comme si l'on faisait plus confiance à celles-ci).
A la lumière de ces données, résultats, erreurs, instruments, nous nous sommes demandés s'il pouvait exister une relation entre les résultats obtenus et les instruments et techniques utilisées ?
En effet, nous avons noté que les résultats les meilleurs sont ceux de l'école primaire où les élèves privilégient la manipulation plutôt que l'imagination, où ils font appel aux représentations graphiques, dans le 30% des cas à deux dimensions et dans le 15 % en trois dimensions. A l'école secondaire de niveau I, on ne relève plus de recours à la manipulation et les représentations à trois dimensions sont extrêmement limitées : 3D, dans le 3% des cas (la géométrie dans l'espace ne se fait qu'en troisième année !!!).

Vérification des hypothèses sur les liens entre résultats et instruments utilisés

Pour co ntrôler si cette hypothèse qui relie les résultats obtenus aux instruments utilisés est fondée, nous avons décidé d'analyser trois autres problèmes :
E. Boîtes à recouvrir Cat. 3, 4, 5, 18 RMT I
F. Développement d'un prisme Cat. 8, 9, 10, 18 RMT I
G. Le cube Cat. 7, 8, 9, 10. 18 RMT II

Analyse du problème E

La boîte à recouvrir (Cat 3, 4, 5)
Graziella veut couvrir entièrement une boîte avec des rectangles de papier.
Elle a déjà dessiné ces trois rectangles pour couvrir exactement le dessous de la boîte, le dessus de la boîte et une des autres faces de la boîte.



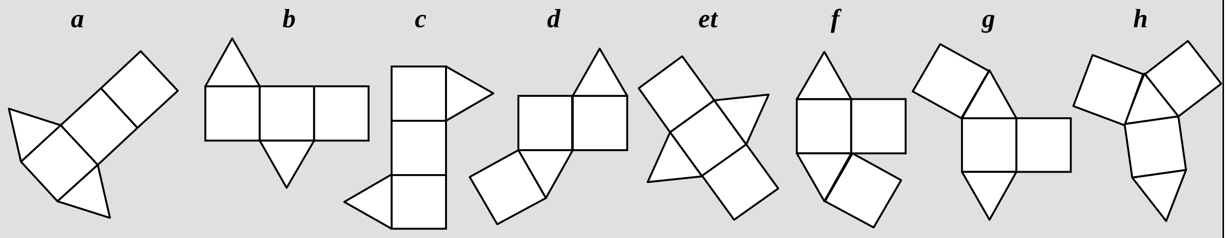
Dessinez sur le quadrillage ci-dessous les trois rectangles qui manquent pour couvrir exactement les autres faces de la boîte.

Attribution des points
4 *Dessin correct et précis des trois faces qui manquent (une face 3 x 5, deux faces 7 x 3)*
3 *Dessin correct des trois faces qui manquent, mais avec des tracés imprécis (à main levée, lignes qui ne correspondent pas exactement à celles du quadrillage,)*
2 *Dessin correct de la quatrième face (3 x 5) et une erreur dans les 5^e et/ou 6^e faces (s non correspondant aux données)*
1 *Dessin correct d'une ou deux faces*
ou trois faces dessinées mais avec erreurs (faisant seulement comprendre que les élèves se sont rendu compte qu'il fallait 6 faces en tout)
0 *Incompréhension du problème*
Échantillon 554 copies
Moyenne des points :(Cat.3) 2,3 → 2,8 → 3 (Cat.5)
Réponses correctes : la moyenne des points pour la catégorie 3 est de 60% par rapport aux 30% du problème isomorphe « Boîtes »
Erreurs les plus fréquentes
- dessinent un nombre erroné de rectangles ou avec des mesures de côtés qui ne correspondent pas
- dessinent trois faces égales à celles des figures de l'énoncé
Instruments et techniques utilisés:
- 90% dessin des trois faces seulement
- 10% découpage et construction de la boîte

Les réponses correctes obtenues à ce problème sont le double de celles obtenues pour le problème « Boîtes », passant de 30% à 60% pour la moyenne des trois catégories, mais les erreurs les plus communes relevées ici sont différentes (il n'y a plus de confusion entre rectangle et parallélépipède). Les instruments utilisés sont aussi très différentes (on ne rencontre la manipulation que dans le 10% des cas, contrairement avec ce qui est arrive souvent à l'école primaire) ; par conséquent, en analysant plus profondément ces deux situations, nous pensons que les deux problèmes en comparaison sont très différents. En fait, dans « La boîte à recouvrir », il n'est pas nécessaire de dessiner ou construire la boîte mais il suffit de désigner les trois faces qui manquent, en les joignant à celles qui sont déjà préparées, opération dans laquelle la visualisation spatiale intervient de façon marginale.

Analyse du problème F

Développements d'un prisme (Cat. 8, 9, 10)
Pour le 17e RMT, les élèves de la classe d'Antoine avaient dû chercher les différents développements d'une pyramide à base carrée, mais ils ne les avaient pas tous trouvés !
Aujourd'hui, ils doivent trouver tous les développements d'un prisme dont les deux bases sont des triangles équilatéraux et les trois autres faces sont des carrés.
Antoine a trouvé ces huit développements :



Ses camarades découvrent qu'il n'en a que sept valables, car il y a une figure qui ne convient pas, et qu'il manque encore d'autres figures.
Quelle est la figure fausse ? Pourquoi ?
Dessinez au moins un développement qu'Antoine n'a pas trouvé.

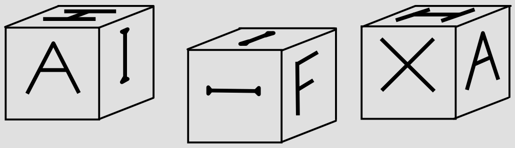
Échantillon: 274 copies di catégorie 8
Moyenne des points : 2,77 par rapport au 0,97 du problème isomorphe « Développement d'une pyramide »
Réponses correctes : 60% contre le 21% de l'autre
Erreurs les plus fréquentes
- unir des faces non contiguës par un point
- ne pas s rendre compte des figures symétriques

Instruments et techniques utilisés:
- découpage, pliages et construction en 3 D pour le 45% contre le 15% du problème isomorphe
- appel à des représentations mentales 25% contre le 75%

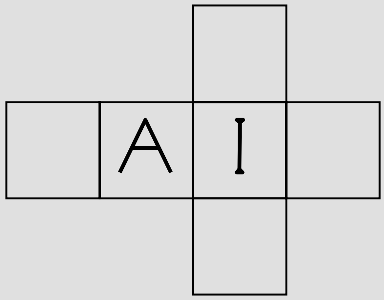
Les réponses correctes à ce problème ont triplé par rapport à celles obtenues pour « Développement d'une pyramide », les erreurs les plus fréquentes sont les mêmes alors que les instruments mis en œuvre changent de manière sensible : les élèves utilisent en effet majoritairement des manipulations comme le découpage, le pliage et la construction du solide en trois dimensions (le 45% contre le 15% du problème isomorphe de la « Pyramide ») et par conséquent recourent moins aux représentations mentales (25% contre le 75%).
On retrouve les mêmes observations dans la situation du problème proposé justement par notre groupe pour la deuxième épreuve du 18e RMT, « Le cube » (Cat. 7, 8, 9, 10).

Analyse du problème G

Le cube (Cat. 7, 8, 9, 10)
Roberto a construit un cube.
Il a écrit une lettre sur chaque face.
Il a ensuite photographié son cube dans plusieurs positions.
Voici trois de ces photos :



Carlo trouve que le cube de son ami Roberto est très intéressant et décide de construire, pour lui-même, un cube parfaitement identique.
Il a préparé un patron de son cube, avec les six faces qu'il va plier et coller avec du papier adhésif transparent.
Il a déjà dessiné le A et un I sur deux des faces.



Dessinez les lettres des quatre autres faces du cube de Carlo pour qu'elles se retrouvent dans les mêmes positions que sur le cube de Roberto.
Y a-t-il plusieurs possibilités de placer les lettres sur ces quatre faces ?
Si oui, faites un dessin pour chaque possibilité.

Echantillon: 266 classes de catégories 7 et 8, de Rozzano, Riva et Franche Comté ;
Moyenne des points : la moyenne des deux catégories est 2,3
Réponses correctes : la même proportion pour le deux catégories : 50%
Erreurs les plus fréquentes :
- concernent les symétries et en particulier l'orientation des lettres F et I
Instruments et techniques utilisés:
- les classes qui ont obtenus de bons résultats (4 ou 3 points) ont découpé des développements et effectué les constructions en 3 D, pour 40% d'entre elles ou des représentations graphiques planes 2D pour le 60% des autres,
- alors que le 90% de celles qui ont obtenus de moins bons résultats ont fait des dessins en plan et seulement le 10% ont eu recours aux manipulations.

On peut donc dire, comme en considérations finales qu'il existe vraiment une relation étroite entre les instruments utilisés et les résultats obtenus. En effet, les meilleures réussites s'obtiennent par une maîtrise de la représentation en 3D et le recours aux manipulations par une construction concrète des solides.

Conclusions

Quelles réflexions pouvons-nous faire à la lumière de ces données ?
Que faire pour améliorer les situations décrites ici ?
Le moment est certainement venu de repenser à une approche différente et à de nouveaux parcours pour pouvoir construire cette capacité mentale dans l'enseignement de base. En accord avec Vinicio Villani qui, depuis de nombreuses années, invitait les enseignants à construire les concepts géométriques en références à des expérimentations proposées dès les premières années de la scolarité pour éviter les obstacles à une visualisation spatiale inadéquate, nous réaffirmons qu'il faut privilégier un parcours, en référence à une méthodologie appropriée (ex. in CREM, 1995, 1999) : observation→ manipulation→ construction→ représentation graphique → communication). Commencer dès les premières années d'école primaire et continuer à l'école secondaire de degré I à expérimenter des situations didactiques concrètes et dans lesquelles les élèves peuvent s'engager pour permettre les passages de la deuxième à la troisième dimension.
Cette idée va contre le courant de l'étude traditionnelle de la géométrie, qui part de la définition des éléments constituants de la géométrie et de la classification des objets mathématiques, qui est encore proposée aujourd'hui dans les curriculum de mathématiques (voir Fioroni 2007 plan d'études de la Province du Trentino, 2009).
Par conséquent les obstacles à écarter sont surtout ceux qui dérivent des choix du parcours d'études de la géométrie selon le modèle traditionnel. Ce parcours a besoin de continuité entre les situations didactiques entre

les l’école primaire et l’école secondaire et d’une inversion des priorités. Les activités de classification des objets mathématiques devraient être situés en point d’arrivée et non comme, actuellement, un point de départ. Les élèves doivent déjà découvrir les propriétés caractéristiques des objets pour s’en construire des images mentales avant d’arriver aux concepts.

Bibliographie

CREM: 1995, *Les Mathématiques de la maternelle jusu’à 18 ans*, (*La matematica dalla scuola materna alla maturità*, edizione italiana a cura di Lucia Grugnetti e Vinicio Villani, 1999, Ed. Pitagora, Bologna, 6.1.1, La geometria a livello di base, pag. 136).

Fioroni: 2007, Indicazioni nazionali per il curricolo del primo ciclo d'istruzione, area matematico- scientifico-tecnologico, pag. 91-99.

M.Pellerey: 2009, Piani di studio provinciali primo ciclo di istruzione, linee guida per l'elaborazione dei piani di studio di Istituto, provincia autonoma di Trento, pag. 89-90.

Villani V.: 1987, ‘Geometria dello spazio’, *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.10, n°5, pag. 405-440.

IL NUMERO SI INCONTRA MOLTO PRESTO …. MA È UNA CONQUISTA DIFFICILE

Carla Crociani, Rita Spatoloni

A nome del Gruppo numerazione[1]

1. Introduzione

Il punto di partenza per parlare di matematica è diverso per ciascun allievo e dipende dalle precedenti esperienze personali di ognuno. L'insegnante di scuola Primaria, che dà inizio al percorso ufficiale, si trova pertanto a dover organizzare in classe un lavoro stimolante per tutti e che porti gli allievi ad un livello di saperi il più uniforme possibile. La "sfida" quotidiana, in particolare oggi, è quella di riuscire a conciliare questi due aspetti proprio sfruttando le disomogeneità "culturali" presenti nelle classi in modo che diventino un'utile opportunità di approfondimento e di stimolo alla comprensione di strutture fondanti.
Anche per la matematica che, in base al presupposto della sua universalità, è "*talvolta considerata alla stregua di una disciplina che risente poco dell'influenza dei diversi contesti culturali*"[2], si dovrebbero riconsiderare gli aspetti didattici in relazione alle diverse culture che si hanno di fronte, dal momento che ciascuna di esse ha influito sullo sviluppo e sulla costruzione di procedure differenti, grazie all'apporto di interpretazioni e modalità comunicative diverse. D'altra parte anche le Indicazioni Nazionali del 2007 fanno esplicito riferimento a questo aspetto inserendo tra gli obiettivi della classe V Primaria "*conoscere sistemi di notazione dei numeri che sono o sono stati in uso in luoghi, tempi e culture diverse dalla nostra*". E' chiaro che non si tratta solo di un'indicazione a livello di contenuti ma, soprattutto, di un invito a porre l'accento sul fatto che *"una storia che mostri la diversità, piuttosto che l'universalità, dello sviluppo matematico aggiunge una dimensione stimolante alla disciplina stessa. In particolare, rende possibile l'ingresso in classe del mondo e della sua storia, in modo da contrastare ogni ristretta visione etnocentrica*"[3] e questo è di fondamentale importanza in ogni ambito educativo!

Gli insegnanti di scuola Primaria sperimentano quotidianamente quale sia l'influenza del vissuto degli allievi nell'apprendimento di contenuti, perciò, prima di procedere all'introduzione di un argomento, dovrebbero effettuare una rilevazione sistematica del pregresso da tenere presente nel corso del lavoro successivo. E' importante, inoltre, condividere le esperienze collettive, per trarre contenuti comuni e sviluppare, in gruppo, la capacità di applicare strategie e di usare linguaggi progressivamente più tecnici. Questo accrescerà negli allievi la consapevolezza di quanto sia necessario l'uso di un lessico matematico specifico per risolvere le ambiguità che spesso le parole possono avere nel linguaggio comune. Un'adeguata e graduale autonomia nella comprensione del linguaggio e delle strutture comunicative specifiche facilita sicuramente l'acquisizione di contenuti e di procedure, con ripercussioni positive sulla conquista dei concetti.
Limitare l'uso di termini e di costrutti propri della disciplina potrebbe sembrare un'agevolazione utile all'allievo nello svolgimento del compito, permettendogli di raggiungere più facilmente il risultato; occorre tuttavia un'ulteriore riflessione su quanto il fornire risposte corrette sulla base di procedure standard possa invece impedirgli di mettersi in gioco, riducendo l'opportunità di considerare più a fondo le consegne e di cercare soluzioni alternative, impedendogli così di "allenare" il ragionamento.
Alla luce di queste considerazioni e nella variegata realtà scolastica, proprio il fornire gli algoritmi necessari per lavorare con i numeri, presentandoli nella loro meccanicità o senza soffermarsi attraverso una molteplicità di esperienze sul loro fondamento, può diventare forse oggi più che mai inutile ed anche controproducente.
Inoltre nel percorso di apprendimento non si dovrebbe trascurare, come purtroppo talvolta accade per mancanza di tempo, la sana abitudine di indirizzare gli allievi al controllo ed alla "stima" dei risultati ottenuti con i dati a disposizione. Occorre, infatti, tenere conto che, oltre alle implicazioni specifiche nell'ambito della matematica, anche la realtà quotidiana odierna richiede sempre di più precisione di linguaggio e rapidità nelle decisioni (spesso conseguenza di una stima numerica o di una valutazione veloce).
Nel Gruppo di Lavoro Numerazione[4], partendo da queste sintetiche riflessioni, abbiamo scelto di analizzare alcuni problemi del RMT i cui protocolli mostrano, accanto alle difficoltà legate alla costruzione del concetto di

[1] Abate L. (Rozzano), Bartolomei M. (Siena), Crociani C. (Siena), Del Monte F. (Parma), Gagliardo E.(Siena), Lucherini M. (Siena), Mandelli M. (Riva del Garda), Mazzoni C. (Parma), Parisi I (Riva del Garda), Pascale A.M. (Siena), Perna B.(Siena), Skilbecq P. (Belgio), Soto I. (Belgio), Spatoloni R. (Siena).

[2] Cfr. G. Bagni, 2007.

[3] Cfr. L. Grugnetti, L. Rogers, 2000.

[4] Tale gruppo, all'interno dell'ARMT, studia la costruzione del concetto di numero, del valore posizionale delle cifre, delle regolarità numeriche attraverso l'analisi a priori e a posteriori dei problemi del RMT.

numero, carenze di tipo trasversale, riscontrabili quindi nella risoluzione di ogni problema.

Abbiamo osservato, ad ogni livello:

- difficoltà di comprensione del linguaggio specifico: i significati di uso comune dei vocaboli prevalgono sulla comprensione dei termini specifici, inducendo gli allievi a commettere errori;
- difficoltà nella lettura e comprensione del testo: spesso gli allievi interpretano a modo loro, oppure riscrivono solo i dati senza preoccuparsi delle richieste del problema in oggetto e risolvono, a volte anche bene, altri problemi senza rendersene conto minimamente;
- difficoltà e mancanza di attenzione alla struttura del numero, che poi li aiuterebbe anche nella risoluzione algebrica dei problemi;
- difficoltà ad impostare un ragionamento corretto avendo chiaro quali siano gli effettivi dati a disposizione, presupposto questo per un avvio alla dimostrazione.

Nei paragrafi successivi ripercorriamo le tappe del gruppo di lavoro Numerazione dall'Incontro di Nivelles all'Incontro di Besançon[5], cercando di motivare, alla luce di quanto detto, sia la scelta dei problemi che le "*nostre*" sperimentazioni.

2. Problemi presentati a Nivelles

Per l'Incontro di Nivelles, abbiamo cercato di fissare l'attenzione su alcuni problemi che coinvolgessero vari aspetti inerenti il concetto di numerazione, accomunati da punteggi molto bassi riportati durante la gara e, soprattutto, nei quali abbiamo evidenziato le carenze elencate precedentemente. Si tratta di problemi che, sia per la loro tipologia che per i livelli di categoria cui sono destinati, permettono di mettere a fuoco quali aspetti del concetto di numero siano compresi e di conoscere quale sia il processo di acquisizione in relazione all'età, ma anche di riflettere su contenuti, apparentemente estranei a numero e posizionalità, che vengono acquisiti solo nella loro meccanicità forse proprio per la mancanza di un supporto solido della struttura di numero. Ad esempio questo avviene quando vengono introdotti gli algoritmi della moltiplicazione e della divisione senza soffermarsi abbastanza "su cosa e su come" si sta operando. In particolare, per quanto riguarda la divisione, su quando sia opportuno fermarsi una volta trovato un quoziente intero ed un eventuale resto, oppure continuare la ricerca di uno sviluppo decimale, in relazione al problema. In ogni caso, ogni volta che si "opera", è necessario far riflettere gli allievi su cosa si sta facendo, sul perché sia opportuno farlo e se il risultato che si ottiene sia compatibile con i dati e con l'obiettivo che si vuole raggiungere.

I problemi presentati sono stati:

La maratona di Transalpino (Cat.7, 8, 9, 10) 15° RMT I PROVA (n.16**)**

Le matite del 15° RMT (Cat.5, 6) 15° RMT II PROVA (n.8)

Compleanni e candeline (Cat.7, 8, 9, 10) 16° RMT Finale (n.14)

Strana moltiplicazione (Cat.7, 8, 9) 17° RMT I Prova (n.14)

Nell'intento di capire le cause dell'insuccesso di tali problemi, dopo averli presentati al gruppo, abbiamo discusso insieme sugli errori evidenziati e sui possibili ostacoli in cui gli allievi potevano essersi imbattuti nel risolverli.
Dallo studio degli elaborati è stato possibile infatti osservare quanto sia fondamentale che non solo i concetti di posizionalità e di numero siano affrontati attraverso una molteplicità di esperienze, ma anche che le procedure per le operazioni non vengano apprese solo come tali e che si ritorni a riflettervi, a livelli scolari diversi, per poterli utilizzare in modo proficuo e competente.

Abbiamo infine programmato una sperimentazione che, a partire da questi problemi, fornisse agli insegnanti coinvolti un'occasione per cercare di far superare gli ostacoli ed al tempo stesso per riflettere con i propri alunni sul concetto di dimostrazione.
Abbiamo principalmente lavorato sui primi due problemi e solo di questi tratteremo nel corso dell'articolo.

[5]Nivelles 2009, 13° Incontro ARMT e Besançon 2010, 14° Incontro ARMT.

LA MARATONA DI TRANSALPINO
Michel e Philippe hanno deciso di iscriversi alla grande Maratona di Transalpino ed hanno appena ricevuto i loro numeri di pettorale.
Si sa che:
sono due numeri consecutivi maggiori di 100 e minori di 1000;
per scrivere entrambi i numeri sono state utilizzate solo due differenti cifre;
la somma delle sei cifre che compongono i due numeri è 39.

Quali possono essere i due numeri di pettorale di Michel e di Philippe?

Spiegate come li avete trovati.

2.1. Analisi del problema *La maratona di Transalpino*

Dalla correzione degli elaborati, prodotti durante la gara, è emersa una carenza nella comprensione del testo caratterizzata da più fattori: lettura superficiale, non conoscenza di vocaboli specifici, scarsa abitudine ad elaborare una strategia che implichi l'esaustività della ricerca avviata, mancanza di criticità nel rilevare la presenza di informazioni inutili perché ridondanti[6].
Gli errori evidenziati sono sostanzialmente di due tipologie:

errori di tipo linguistico, che denotano poca padronanza di un linguaggio tecnico;

errori di tipo metodologico - procedurale, che denotano mancanza di senso critico nell'assumere certe ipotesi senza dimostrarle e, in generale, vere solo in casi particolari.

Tra gli errori di **tipo linguistico** è stata rilevata abbastanza spesso la non conoscenza del termine specifico "numeri consecutivi" che ha portato, in alcuni casi, a definire "*numero consecutivo quello in cui le cifre si susseguono successivamente"*. Coerentemente con tale definizione sono stati così trovati *"i due numeri consecutivi" 456 e 789,* (ciascuno "*consecutivo*") per i quali la somma delle sei cifre dà per risultato 39. La soluzione è unica!
Altri considerano i numeri 666-777 come consecutivi; anche con questa interpretazione, dovendo soddisfare il vincolo "somma delle cifre 39", la soluzione è unica!
L'errore più diffuso è stato però l'interpretazione della seconda clausola "*sono state utilizzate solo due cifre differenti*" che si può riassumere in:

"su ciascun pettorale sono utilizzate due sole cifre diverse", ma sui due pettorali "insieme" possono comparire tre cifre diverse. (Si trovano così soluzioni del tipo 883-884; 775-776;...)[7]
"i numeri dei due pettorali differiscono solo per due cifre", ma nei due pettorali insieme ne compaiono anche quattro. (Si trovano così soluzioni del tipo. 658-659, 568-569, 757-758 …)[8]

Entrambe le interpretazioni della seconda clausola danno luogo a molte soluzioni, ma gli allievi si fermano quasi sempre alla prima trovata o, al massimo, ne indicano due! Si potrebbe ipotizzare che la ragione di ciò sia da ricercare, a livello didattico, all'abitudine di molti insegnanti di "allenare" i propri allievi con problemi, ripetitivi ed in generale ad una sola soluzione, inerenti l'argomento appena spiegato. Specialmente a livelli più bassi gli allievi si convincono che una volta trovata **"la"** soluzione il loro compito sia finito.
I vincoli (numerici) "*somma 39*" e "*due numeri maggiori di 100 e minori di 1000"* sono stati sempre soddisfatti.
Il fatto che nella tradizione scolastica vengano proposti problemi nei cui testi prevalgono i dati numerici potrebbe spiegare questa constatazione, ma potremmo anche pensare che proprio i dati numerici costituiscano una rassicurante base di partenza e risultino i più facilmente gestibili, dal momento che con essi si può operare spesso in modo meccanico, pur senza una linea di ragionamento logico soggiacente!

Nell'analisi dei protocolli è stato inoltre riscontrato un **"uso libero"** di termini specifici**.** Ad esempio in un elaborato, dopo aver scoperto che le cifre sono 6 e 7, gli allievi scrivono 676 e 767 e spiegano che *"usando la formula inversa"* i numeri sono 676 – 677. A posteriori abbiamo cercato di ricostruire il loro ragionamento e di "tradurre" la loro espressione, e ci siamo resi conto che potrebbero aver ragionato così:
39:6=6,5 quindi ogni blocco di due cifre deve essere 6,5 cioè *67 67 67* (*6,5-0,5=6 6,5+0,5=7*) trovano così i due numeri di tre cifre 676, 767 che non sono consecutivi, ma cambiando l'ordine delle cifre nel secondo

---

[6]Nel caso specifico, la terza condizione afferma che le cifre sono in tutto sei e quindi i numeri sono compresi tra 100 e 1000, come afferma la prima condizione. Tuttavia la ripetizione, anche se ridondante, aiuta ad entrare nel problema. A posteriori possiamo dire che nessuno ha rilevato questo dato superfluo.

[7]Con questa interpretazione si hanno 4 soluzioni: 991-992, 883-884, 775-776, 667-668, dovendo rispettare il vincolo di somma 39.

[8]Con questa interpretazione si hanno 36 soluzioni: **991**-992, …,928-929; **892**-893,….,838-839; **793**.794,…, 748-749; …; 397-398 , 388-389; 298-299 (8+7+6+5+4+3+2+1= 36) sempre dovendo rispettare il vincolo di somma 39.

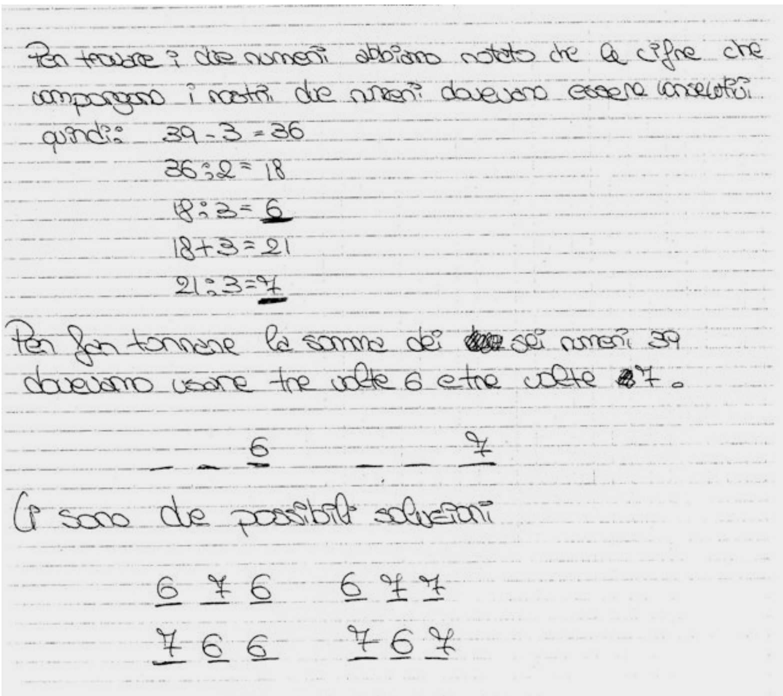
(*usando la formula inversa*) ottengono i numeri 676 – 677. Si fermano comunque alla prima soluzione trovata.

Tra gli errori di **tipo metodologico – procedurale** il più diffuso è stato quello di assumere, più o meno palesemente, che le due cifre consecutive compaiano tre volte ciascuna (il che è vero con le variabili numeriche presenti nel testo ma non in generale). E' interessante, tuttavia, l'analisi dei procedimenti adottati dagli allievi.

Alcuni, nelle categorie più elevate, utilizzano il linguaggio algebrico:
impostano 3x+3y=39 e y =x+1. (A priori, senza altra giustificazione potevano anche scrivere y+5x= 39 o, analogamente, x+5y=39 potevano solo scartare 4x+2y o 2x+4y perché la loro somma è pari e non può essere 39);
impostano xyx xyy e su questo schema costruiscono delle equazioni, sapendo che y=x+1. (Non accorgendosi che tale schema non è generico e quindi da esso non si possono ricavare tutte le informazioni);
- molti, in tutte le categorie, ricavano il valore numerico medio delle 6 cifre (39:6=6,5) e ne deducono che le cifre sono il 6 e il 7[9]. Sarebbe stato altrettanto facile ricavare i numeri di pettorale nel caso in cui la somma delle cifre fosse stata 35 o 31? (es. 35:6=5,8 fa capire che i 6 sono in quantità maggiore rispetto ai 5, ma 35:6=5 con resto di 5 fa capire che per ottenere 35 si deve avere esattamente una volta 5 e cinque volte 6. Così pure 31:6=5 con resto 1 fa capire che per ottenere 31 si deve sommare cinque volte 5 e una volta 6);
- altri trovano 13 = 39:3 come somma delle due cifre diverse che, dovendo essere consecutive, sono 6 e 7;
alcuni scoprono che se i due numeri sono consecutivi anche le somme delle cifre di ciascuno devono essere numeri consecutivi e quindi l'unico modo di ottenere 39 con questo vincolo è vederlo come somma di 19 e 20 (39=19+20).

Si fermano, in generale, alla prima soluzione trovata.

Riportiamo un esempio in cui gli allievi, pur ipotizzando che le cifre debbano comparire tre volte ciascuna, riescono ad elaborare un ragionamento corretto e ben articolato trovando entrambe le soluzioni. Si tratta comunque di un elaborato di cat. 9.


Per trovare i due numeri abbiamo notato che le cifre che compongono i nostri due numeri dovevano essere consecutivi
quindi: 39-3=36
36:2=18
18:3=6
18+3=21
21:3=7
Per far tornare la somma dei sei numeri 39 dovevamo usare tre volte 6 e tre volte 7.
_ _ 6 _ _ 7
Ci sono due possibili soluzioni
6 7 6 6 7 7
7 6 6 7 6 7

Gli allievi omettono una prima parte di ragionamento che potrebbe essere di questo tipo:
se i numeri sono consecutivi anche le uniche due cifre utilizzate sono consecutive e compaiono tre volte ciascuna.
Poi si può spiegare il ragionamento effettivamente presente nel testo così:
se la somma delle cifre è 39 allora se si toglie 3 da tale somma i due numeri che si ottengono hanno le stesse cifre e quindi si può effettuare la seguente serie di operazioni:
39-3=36, 36:2=18 e 18:3=6
da cui dedurre che ci sono tre cifre 6 e tre cifre 7 (perchè18+3=21 e 21:3 =7).
Gli errori che abbiamo evidenziato ci hanno portato a programmare una sperimentazione anche con allievi di

[9]Questo ragionamento è diverso da quello che compare nell'analisi a priori "*dividere 39 per 6 e trovare 6 con resto di 3; comprendere che per ottenere 39 si deve sommare 3 volte 6 e 3 volte 7*".

categorie più basse (cat. 5, 6) per:

conoscere il livello di comprensione e di uso del linguaggio specifico;
indagare sulle abilità relative al concetto di dimostrazione

soprattutto dal momento che i componenti del gruppo hanno ritenuto che i contenuti alla base della risoluzione del problema e le conoscenze relative al linguaggio specifico dovrebbero essere già posseduti (e forse non ancora dimenticati) anche a questi livelli[10].

Inoltre, proporre il problema a categorie più basse poteva fornire l'opportunità, agli insegnanti coinvolti, di avviare una riflessione con i propri allievi sul fatto che una ricerca esaustiva ed una buona spiegazione debbano far riferimento ad una "dimostrazione" che, per sua natura, non può partire da casi particolari ma deve sempre partire dalle ipotesi a disposizione senza introdurne di nuove e, attraverso un ragionamento logicamente corretto, deve portare a conclusioni universalmente accettabili.

La sperimentazione ha agito su tre versanti:

a) rendere più chiaro il testo del problema *La maratona di Transalpino* modificando l'espressione linguistica del secondo vincolo: "*per scrivere entrambi i numeri sono state utilizzate solo due differenti cifre*" in "*per scrivere i due numeri sono state utilizzate* ***in tutto solo*** *due differenti cifre*" e proporlo alle categorie 5, 6, 7, 8;
b) proporre un nuovo problema *Numeri di matricola* modificato nel contesto e nella variabile numerica, a classi di categoria 5, 6, 7, 8; la modifica delle variabili didattiche non consentiva di stabilire che ciascuna cifra comparisse tre volte, avremmo così potuto indagare sull'utilizzo di strategie più direttamente legate alla struttura posizionale del sistema di numerazione e all'uso della divisione con resto;
c) proporre agli allievi, divisi a coppie, a partire dalla cat. 6, un lavoro di riflessione sul problema che li impegnasse nella modifica delle variabili, numeriche e non numeriche, e nella successiva analisi dei risultati conseguiti.

Riportiamo qui di seguito i testi dei problemi e l'attività di modifica così come proposti per la sperimentazione indicata ai precedenti punti.

a)

LA MARATONA DI TRANSALPINO (Cat, 5, 6, 7, 8)
Michel e Philippe hanno deciso di iscriversi alla grande Maratona di Transalpino ed hanno appena ricevuto i loro numeri di pettorale.
Si sa che:
- sono due numeri consecutivi maggiori di 100 e minori di 1000;
- per scrivere i due numeri sono state utilizzate in tutto solo due differenti cifre;
- la somma delle sei cifre che compongono i due numeri è 39.

Quali possono essere i due numeri di pettorale di Michel e di Philippe?
Spiegate come li avete trovati.

b)

NUMERI DI MATRICOLA (cat. 5, 6, 7, 8)
Pietro si è iscritto all'Università ed ha avuto un numero di matricola di sei cifre. Ha notato che
- il numero formato dalla quarta, quinta e sesta cifra è consecutivo del numero formato dalla prima, seconda e terza cifra
- il numero di matricola ha solo 2 cifre diverse
- la somma delle cifre è 31

Quale può essere il numero di matricola di Pietro?
Spiegate come lo avete trovato?

c) Proposta di attività sul cambio di variabili[11]

2.1.1 Risultati della sperimentazione

In riferimento alla sperimentazione di cui al punto a) i risultati ottenuti dagli allievi nella risoluzione del nuovo problema *La maratona di Transalpino* non si discostano dai precedenti dopo la revisione della seconda clausola del testo originario; si evidenziano, infatti, ancora difficoltà su:

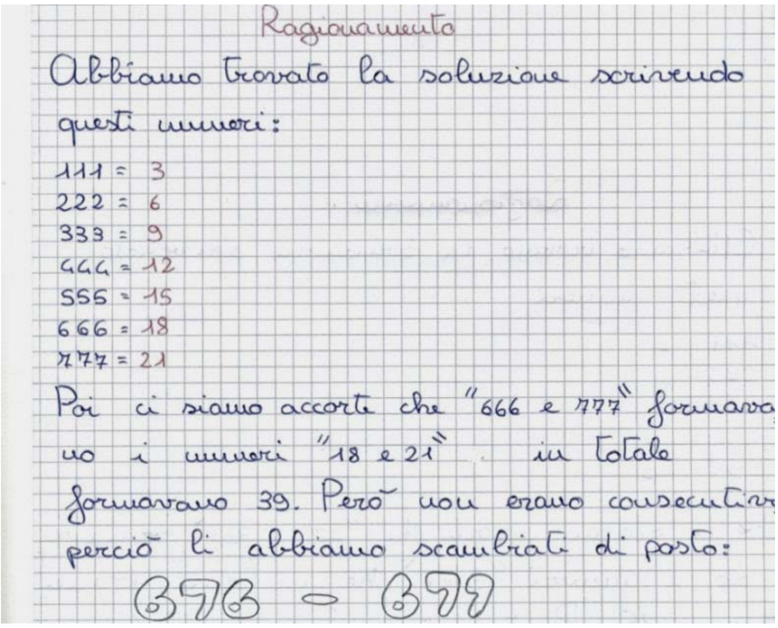
[10] Non è stato possibile sperimentare con classi di cat. 9 e di cat. 10 perché nel gruppo non ci sono insegnanti con classi di tali categorie e, al momento della sperimentazione, non abbiamo trovato disponibilità al di fuori del gruppo stesso.

[11] Per gli insegnanti oltre all'attività proposta agli allievi, è stata fornita una traccia con le soluzioni e le indicazioni di eventuali osservazioni su cui far riflettere gli allievi (cfr. Allegato 1).

aspetto linguistico (numeri consecutivi);
gestione dei vincoli;
qualità della spiegazione fornita.

Alcuni allievi, di cat. 6, nonostante la modifica, affermano esplicitamente che *la seconda clausola può essere interpretata in due modi diversi*, peccato che siano le due interpretazioni sbagliate già evidenziate! Ma il fatto "più grave" è che abbiamo ancora una volta avuto conferma che la maggior parte degli allievi, grandi o piccoli, si ferma alla prima, o al massimo alla seconda, soluzione trovata!

Il seguente esempio, prodotto da una classe di cat.5, mostra un ragionamento abbastanza buono, soprattutto in considerazione della categoria, ma che rivela comunque "il vizio di fondo" del ritenere che le due cifre differenti debbano apparire 3 volte ciascuna. E' comunque notevole che non si siano fermati alla prima soluzione ma che le abbiano trovate tutte, dimostrandosi più attenti e ben impostati a livello metodologico-dimostrativo dei loro compagni più grandi.



Ragionamento
Abbiamo trovato la soluzione scrivendo
questi numeri:
111 = 3
222 = 6
333 = 9
444 = 12
555 = 15
666 = 18
777 = 21
Poi ci siamo accorti che "666 e 777" formava
no i numeri "18 e 21" in totale
formavano 39. Però non erano consecuti
perciò li abbiamo scambiati di posto:
676 – 677

Da notare l'utilizzo della parola "formare" (qui intesa come "*le cifre 666 hanno per somma 18*") spesso fonte di cattive interpretazioni quando la trovano scritta in un testo di problema (più solitamente si dice che sono le *cifre 1 e 8 che formano il 18*). E' un altro esempio di approssimazione linguistica e della sovrapposizione del linguaggio comune su quello specifico.

Nessuno ha pensato di utilizzare la divisione con resto, nemmeno gli allievi di cat. 5 o di cat. 6 ai quali è stata introdotta come argomento recente e che non hanno avuto ancora il tempo di dimenticarla per l'utilizzo sempre più massiccio della calcolatrice. Forse questo potrebbe far riflettere sul fatto di dover insistere sulla divisione euclidea che in molti casi si rivela uno strumento più utile, in certi contesti, rispetto ad un risultato con sviluppo decimale.

In riferimento alla sperimentazione di cui al punto b) gli elaborati degli allievi di cat. 5 e 6 (non abbiamo risultati per le cat. 7 e 8) relativi al nuovo problema *Numeri di matricola*, denotano che il testo è risultato effettivamente più chiaro e la risoluzione più semplice e completa visto che la soluzione è unica. Tuttavia ancora in tanti non hanno chiara la distinzione fra "cifra e numero". Si continuano a trovare elaborati in cui si considerano cifre i numeri 10, 11, … e gli allievi non sono in grado di gestire tre vincoli contemporaneamente e spesso, dovendo scegliere, privilegiano il dato numerico " *somma 31*".
Fissando l'attenzione sulla somma **31**, cercano un numero che abbia le prime 3 cifre con somma 15 (es. 5+5+5) e le ultime tre con somma 16 (es. 9+2+5); perdono di vista gli altri vincoli imposti dal problema e, talvolta, aggiungono errori che evidenziano confusione nei concetti di base. Riportiamo di seguito alcuni esempi:

555925 (perdono di vista il vincolo di numeri consecutivi);
10 4 1 10 5 1 (evidente confusione fra cifra e numero e numeri consecutivi);
555547: solo 2 cifre diverse (4-7)[12] *la somma 5+4+7=16 che è consecutivo di 15 (5+5+5), 447448 perché ha solo due cifre diverse (7-8);*
663664 perché ha solo due cifre diverse (3-4) oppure *il numero è 771772 perché ha solo due cifre diverse (1-2)* ma non compare la soluzione 555556 probabilmente perché, secondo loro, c'è solo una cifra differente;
risposta 861862 *ha solo 2 cifre diverse;*
le ultime 3 cifre sono consecutive alle prime 3 (*xxx(x+1)(x+1)(x+1)*).

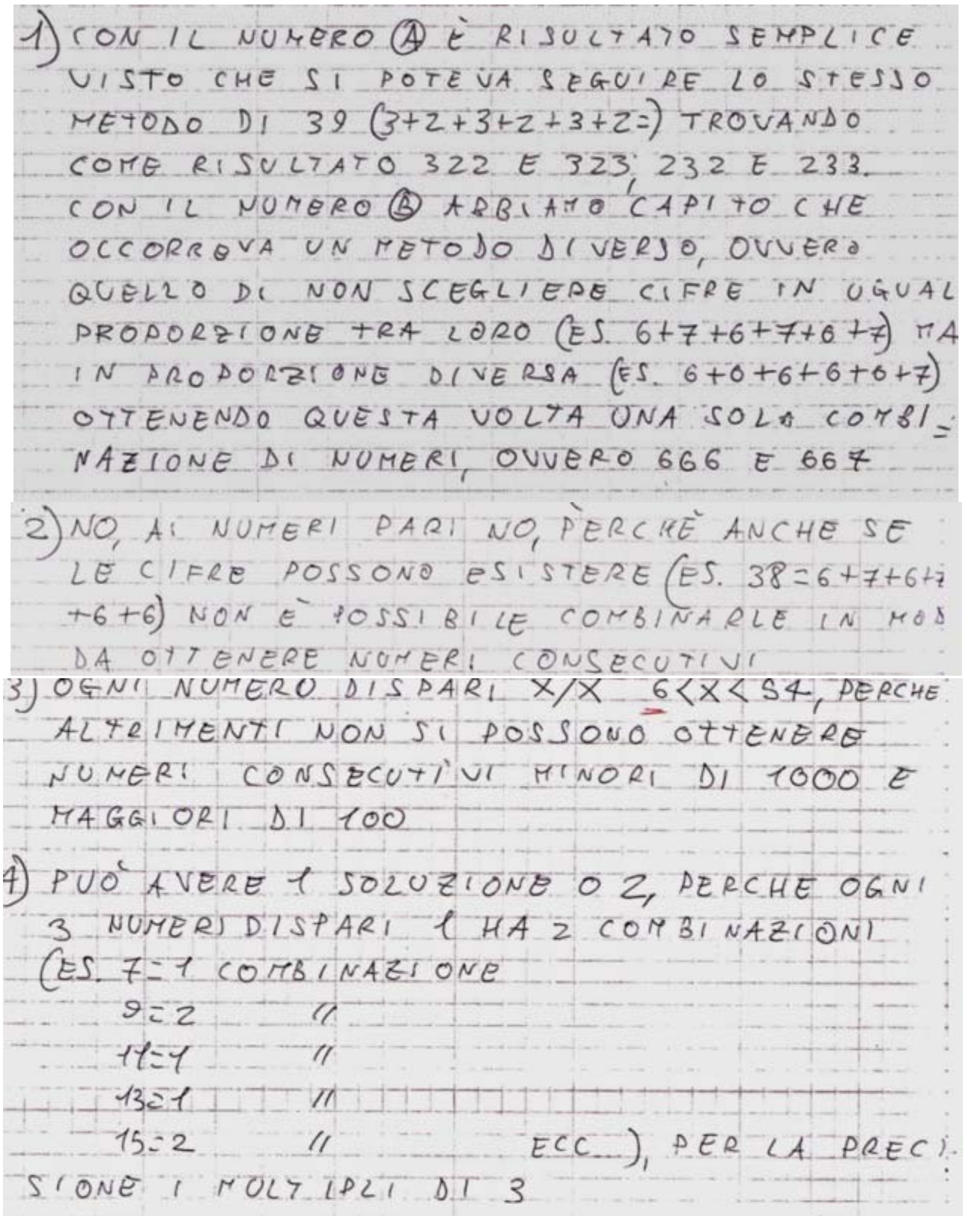
E' interessante riportare un altro esempio (in cat. 6) in cui gli allievi, sempre privilegiando il dato numerico (somma 31), tralascino (o non ne conoscano bene il significato!) il vincolo di *numeri consecutivi* ma sentano

[12] Le altre cifre sono tutte 5 e quindi solo le cifre 4 e 7 sono diverse.

comunque il bisogno di affiancare la giusta soluzione con alcune sue permutazioni (*555556 555655 555565*).
Purtroppo la sperimentazione fatta evidenzia che le difficoltà sulla comprensione del testo non sono state superate con il nuovo problema *Numeri di Matricola.* C'è invece conferma dell'abitudine degli allievi a leggere in modo approssimativo l'enunciato, ad iniziare la risoluzione senza aver chiaro quale sia l'obiettivo da raggiungere e quali siano i dati effettivamente disponibili; inoltre, una volta trovata la soluzione del problema, essi sono portati a concludere senza confrontare la compatibilità dei risultati con dati e richieste.

In riferimento alla sperimentazione di cui al punto c), le richieste per l'attività di cambio di variabili al testo del problema[13], così come le abbiamo proposte, sono state giudicate (da parte di insegnanti di scuola secondaria di primo grado) inadatte per le cat. 6-7 per i termini ed il linguaggio utilizzati[14]. Solo nella cat. 8 gli allievi si sono cimentati in questa richiesta, gli altri hanno semplicemente risolto il problema nella forma originale proposta loro evidenziando i soliti errori.

Riportiamo un esempio di elaborato di cat. 8 in cui si può vedere come gli allievi abbiano comunque provato a sostenere una "dimostrazione" che suffragasse le loro convinzioni.



1) CON IL NUMERO A È RISULTATO SEMPLICE VISTO CHE SI POTEVA SEGUIRE LO STESSO METODO DI 39 (3+2+3+2+3+2=) TROVANDO COME RISULTATO 322 E 323, 232 E 233.
CON IL NUMERO B ABBIAMO CAPITO CHE OCCORREVA UN METODO DIVERSO, OVVERO QUELLO DI NON SCEGLIERE CIFRE IN UGUAL PROPORZIONE TRA LORO (ES. 6+7+6+7+6+7) MA IN PROPORZIONE DIVERSA (ES. 6+6+6+6+6+7) OTTENENDO QUESTA VOLTA UNA SOLA COMBI= NAZIONE DI NUMERI, OVVERO 666 E 667

2) NO, AI NUMERI PARI NO, PERCHÈ ANCHE SE LE CIFRE POSSONO ESISTERE (ES. 38=6+7+6+7 +6+6) NON È POSSIBILE COMBINARLE IN MODO DA OTTENERE NUMERI CONSECUTIVI

3) OGNI NUMERO DISPARI X/X 6<X<54, PERCHE ALTRIMENTI NON SI POSSONO OTTENERE NUMERI CONSECUTIVI MINORI DI 1000 E MAGGIORI DI 100

4) PUÒ AVERE 1 SOLUZIONE O 2, PERCHE OGNI 3 NUMERI DISPARI 1 HA 2 COMBINAZIONI
(ES. 7=1 COMBINAZIONE
9=2 "
11=1 "
13=1 "
15=2 " ECC...), PER LA PRECI- SIONE I MOLTIPLI DI 3

[13]Il testo proposto è quello della versione prevista nel punto a).

[14]*Modificate il testo del problema cambiando la "variabile numerica" (39) della terza condizione "la somma delle sei cifre … ". Si ottiene ogni volta un nuovo problema.*

Abbiamo presentato l'attività di cui al punto c) anche a matricole del corso di laurea in Informatica, in Fisica e in Matematica. Le risposte ottenute non sono sempre state entusiasmanti. Anche se a volte si nota un certo gusto a formalizzare, utilizzando il linguaggio algebrico ed i connettivi logici (questi ultimi fuori luogo in questo contesto), i risultati non si discostano troppo da quelli degli studenti più giovani. Tuttavia qualche buon esempio di risoluzione che denota una giusta impostazione e piacere nei confronti "del dimostrare" lo abbiamo trovato!
Riportiamo alcune percentuali ricavate dall'analisi dei ventotto elaborati a nostra disposizione, non tanto a fini statistici quanto per meglio quantificare i risultati ottenuti anche a questo livello di studi:

Il 22% risolve il problema ipotizzando che le cifre 6 e 7 debbano comparire tre volte ciascuna.
Es. x=y-1 y=x+1 3x+3y=39 → 3x+3x+3=39 6x=36 x=6.

Il 26% trova una sola soluzione
Es. *Possiamo scrivere questi due numeri così: aba, abb* dove *a e b sono le cifre dei numeri e b=a+1. Se sostituiamo b con a+1 possiamo ricavare un'equazione così: a+a+1+a+a+a+1+a+1=x dove x è pari alla somma di tutte e sei le cifre. Se ad x sostituiamo il numero 39 otteniamo che 6a=39 → a=36/6=6 b=6+1=7 e quindi i due numeri sono 676 e 677.* Il loro schema non è generico, avrebbero dovuto prevedere anche *baa bab.*

Il 78% risponde giustamente alla richiesta 1). Più precisamente l'11% nel caso di somma 15 dà una sola risposta e l'11% risponde che con somma 37 non è possibile.

Es. *Il numero 15 deve prendere il posto del 39 nell'equazione a+a+1+a+a+a+1+a+1=x* …del precedente esempio.*…..a=12/6=2 b=2+1 quindi abbiamo soluzione. Per il 37; 6a+3=37 → a=34/6 tale rapporto non conduce a numeri naturali quindi non c'è soluzione*

Il 100% risponde giustamente alla richiesta 2), ma spesso la risposta non è motivata o la motivazione è errata.

L'89% risponde giustamente alla richiesta 3) ma si scende al 50% se si contano solo quelli che hanno giustamente motivato la risposta o capito che le possibili somme sono i numeri dispari compresi fra 5 e 53.

Il 100% o non risponde alla richiesta 4) o la motivazione è poco soddisfacente perché basata sui precedenti esempi o perché non giustificata. Anche tra loro nessuno utilizza la divisione con resto.

Es. *Il problema può avere due soluzioni se la somma delle cifre è un multiplo di 3, una soluzione se la somma delle cifre non è multiplo di tre*
Es. Se *x=((S-1)/2)-1∈N*[15] *le soluzioni possibili sono 2, altrimenti una sola, poiché nel primo caso la prima e seconda cifra sono differenti tra loro.*

---

[15]E' quanto dire che S è un multiplo di 3.

2.2. Analisi del problema *Le matite del 15° RMT*

LE MATITE DEL 15° RMT
Gli organizzatori hanno deciso di offrire una matita a tutti i partecipanti al 15° RMT.
Alla fabbrica delle matite, un operaio ha il compito di mettere un'etichetta con scritto «15° RMT, 2007» su ogni matita.
Con 10 matite riempie poi delle scatole sulle quali mette la stessa etichetta.
Quando ha riempito dieci scatole, ne fa un pacchetto, sul quale mette ancora l'etichetta «15° RMT, 2007».
Infine, con 10 pacchetti, egli riempie uno scatolone sul quale mette ancora l'etichetta «15° RMT, 2007».
Oggi, l'operaio ha preparato le matite richieste dalla sezione di Transalpino ed ha constatato che per questa sezione ha dovuto contare 2007 etichette «15° RMT, 2007».
Quante matite ha ordinato la sezione di Transalpino?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Attribuzione dei punteggi
4 Risposta «1808»con spiegazione completa
3 Risposta «1808» con spiegazione incompleta
2 Risposta con una dimenticanza: etichetta sul cartone che porta a 1809 matite, o sui pacchetti – 1824
oppure risposta con procedura corretta (con tutte le etichette corrette), ma con un errore di calcolo
1 Risposta con due dimenticanze: etichette su pacchetti e cartoni che porta a 1825 matite
o inizio di ricerca coerente
0 Risposta "2007" o incomprensione del problema

Abbiamo riportato l'attribuzione dei punteggi, presente nell'analisi a priori, perché in qualche modo è "responsabile" del punteggio basso ottenuto in generale: la tipologia di errori prevista era molto meno grave rispetto a quella riscontrata a posteriori! Si prevedeva infatti che lavorare con i raggruppamenti di 10 fosse alla portata degli allievi di cat. 5 e 6 sia dal punto di vista teorico che delle esperienze fatte; quindi gli errori previsti erano sostanzialmente errori di calcolo, di distrazione, ma non di concetto. **Così non è stato.**

Questo problema appartiene alla famiglia di problemi che utilizzano in modo esplicito la struttura posizionale del nostro sistema decimale[16]. Gli errori, rilevati in occasione della gara, possono essere sintetizzati essenzialmente in due tipologie: errori di contenuto matematico ed errori di tipo metodologico–procedurale.
Nel primo caso si evidenziano lacune nella conoscenza della scrittura posizionale basata sui raggruppamenti di 10 che rivelano l'aspetto "meccanicistico" con il quale spesso vengono imparate (o … insegnate) certe proprietà. Ed è la stessa meccanicità che spesso si manifesta anche nella lettura – interpretazione del testo di un problema: si risponde in modo automatico a certi input (in questo caso raggruppamenti di 10) senza preoccuparsi dei dati presenti e della problematica sollevata nel testo stesso. Si conosce la scrittura posizionale come argomento fine a se stesso e non la si sa utilizzare in situazioni non-standard!

Per quanto riguarda gli errori che abbiamo incluso in quelli di tipo metodologico - procedurale possiamo evidenziare:

la poca abitudine a riflettere sull'applicazione di procedure e sulla loro attinenza con le richieste del problema stesso;
la mancanza di abitudine ***a verificare*** la coerenza del risultato ottenuto con i dati del problema[17];
la scarsa abitudine a lavorare per successive ***approssimazioni*** (sensate) ogni volta verificando lo scarto (i numeri di scatole, pacchetti, … sono sempre numeri interi positivi).

Ad esempio, rispondono:

1000 o 10000 matite perché *10 matite 1 scatola 10 scatole* etc…10x10x10x10 senza preoccuparsi di cosa si chiede loro. In un elaborato, si trova addirittura come risposta 10^{10}*= 10x10x10x….*;

200 matite *perché abbiamo moltiplicato le 10 matite per il numero delle scatole*;

100 matite *perché le abbiamo disegnate e contate* (ma sul foglio non c'è il disegno);

66 matite(2007:30=66) con questo ragionamento: *abbiamo addizionato i tre 10 nominati nel testo e poi abbiamo fatto la divisione*;

200700 matite con la seguente spiegazione: *abbiamo fatto 10x10=100 e poi 2007x100=200700 perché 2007*

[16]Cfr. Atti Arco di Trento 2005, pp. 224-234.

[17]In generale si nota che data una risposta, spesso sbagliata, gli allievi non tornano indietro a fare la "verifica" che spesso, siamo convinti, sarebbero in grado di condurre giustamente.

sono le etichette e 100 le matite.

Ancora una volta: i dati numerici vanno utilizzati e combinati, non importa come!

Dall'analisi degli elaborati abbiamo evidenziato le risposte più ricorrenti con la motivazione degli allievi:

10 = etichette per le scatole; 10 = etichette per i pacchetti; 1 etichetta per lo scatolone; 10+10+1=21 etichette non usate per le matite.
2007-21=1986 matite in tutto;

1987:	*10+10=20 e 2007-20=1987;*
1996:	*2007-11=1996*;
1886:	*2007-121=1886*;
1888:	*1111+111x7=1888;*
1998:	*2007-111=1998.*

In molti elaborati, circa il 30%, si ricorre al disegno che, senz'altro, aiuta gli allievi ad immedesimarsi nel lavoro dell'operaio e a compiere tutte le operazioni svolte da quest'ultimo, anche se a volte questa "drammatizzazione" li porta a perdere di vista la richiesta del problema e a fermarsi non appena trovato il numero delle matite contenute in uno scatolone. Si forniscono così risposte del tipo:

1000 matite oppure *in uno scatolone ci sono 1111 matite*.

Talvolta, forse perché hanno risolto già problemi di questo tipo, rispondono in modo meccanico e confondono i dati conosciuti (il numero di etichette) con quelli incogniti (il numero delle matite). A tale proposito è esplicativo il seguente "conto" tratto da un elaborato

(2007+200+20)=2227.

Il ragionamento sarebbe stato **"quasi giusto"** (manca +2) se fosse stato richiesto*: Quante etichette, se le matite sono 2007?* ma il problema chiedeva invece Q*uante matite … ?*[18].

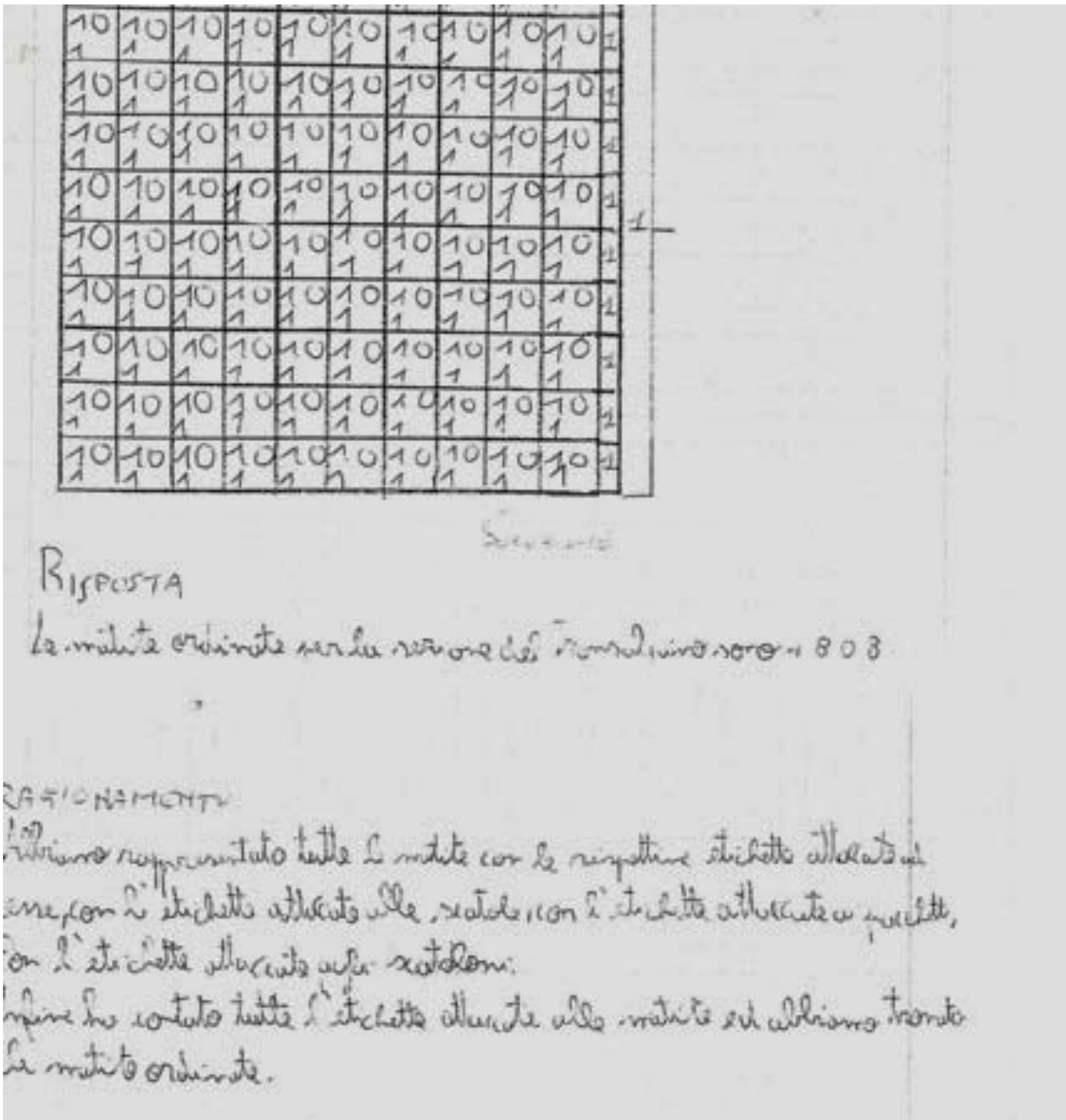
Se da un lato l'analisi degli elaborati ha messo in evidenza le numerose difficoltà sulle quali è opportuno riflettere, dall'altro è possibile affermare che, in particolare a livelli più bassi di categoria, l'abitudine degli allievi a rappresentare iconicamente il problema permette loro di appropriarsene e di risolverlo. Il disegno è, ancora una volta, la base da cui partire per entrare nella situazione ed affrontarla ma è anche spesso quello che dimostra quanto gli allievi stessi si siano impegnati e messi in gioco nell'attività di ricerca della soluzione[19]. Possiamo a questo punto ricordare Freudenthal che *"confronta il lavoro di chi impara la matematica con l'opera di chi fa ricerca perché la natura della matematica è di essere un'attività che si compie in prima persona"*[20].

L'elaborato in figura mostra un procedimento corretto e particolarmente interessante perché allievi, di cat. 5, riescono a rappresentare, con chiarezza, in due dimensioni, una situazione tridimensionale. La spiegazione è solo la descrizione del procedimento, ma d'altra parte è il disegno stesso che permette loro di trovare la soluzione. La visualizzazione del primo scatolone consente infatti di effettuare il conteggio delle etichette anche immaginandone un secondo e fermandosi quando si arriva alla 2007-esima etichetta per contare, successivamente, il numero delle matite.

[18]E' il procedimento utilizzato nel problema *Etichette,* cfr. Atti di Parma 2006, pp.124-125.

[19]Cfr. Crociani, Doretti, Salomone, 2004.

[20]Cfr. Freudenthal, 1994.



(*Abbiamo rappresentato tutte le matite con le rispettive etichette attaccate in esse, con le etichette attaccate alle scatole, con le etichette attaccate ai pacchetti, con le etichette attaccate agli scatoloni. Infine ho contato tutte le etichette attaccate alle matite ed abbiamo trovato le matite ordinate*).

Sulla base di questi risultati è stata impostata la seguente **ipotesi di lavoro** con gli obiettivi di:

facilitare la comprensione del testo e la gestione delle variabili numeriche;
indagare sul livello di conoscenza della scrittura posizionale.

La sperimentazione è consistita in due proposte:

risoluzione del problema originale, assegnato alle categorie 7 e 8 anziché 5 e 6, dal momento che al livello cui è stato proposto è stato un insuccesso;
modifica delle variabili numeriche e risoluzione di un nuovo problema “**Le matite del RMT**” da parte di allievi di cat. 5-6.

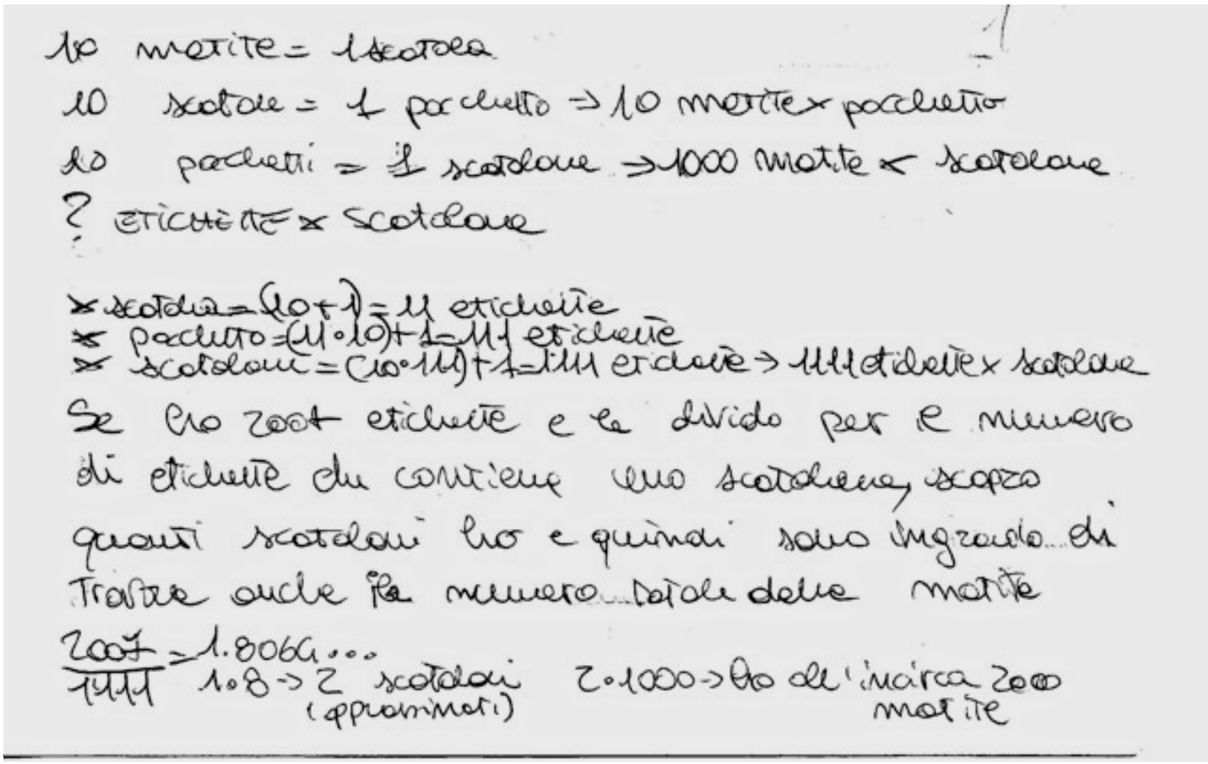
2.2.1 Risultati della sperimentazione

Per quanto riguarda il punto a) i risultati ottenuti nelle categorie 7 e 8 non si discostano da quelli ottenuti nelle categorie più basse. Questo non deve stupirci perché per superare gli errori e gli ostacoli rilevati non basta una maturità conseguita con la crescita biologica degli allievi, questi devono bensì essere colmati con una maturità che deriva dall’aver approfondito determinati concetti attraverso spiegazioni ed esperienze nuove. Purtroppo, spesso, nella scuola secondaria di primo grado non si ritorna su quei concetti fondamentali che sono stati introdotti nella scuola Primaria[21], perché si pensano già acquisiti ma ciò non è vero per tutti gli allievi. La

[21] La nostra “piccola esperienza” con il gruppo di lavoro Numerazione è una conferma di ciò: gli afferenti al gruppo, salvo poche eccezioni, sono tutti insegnanti di scuola Primaria!

ricorsività di esperienze diverse, su uno stesso contenuto e in età differenti, abitua comunque l'allievo a mettere in discussione le sue conoscenze, a ripensarle e riconfigurarle mentalmente alla luce dei nuovi input, offrendogli l'opportunità di ri-confrontarsi con se stesso, di rielaborare e condividere e con gli altri in un "crescendo" di apprendimento[22].

Il seguente esempio mostra la scarsa abitudine a lavorare per approssimazioni sensate:


10 matite = 1 scatola
10 scatole = 1 pacchetto → 10 matite x pacchetto
10 pacchetti = 1 scatolone → 1000 matite x scatolone
? etichette x scatolone
x scatola = (10+1) = 11 etichette
x pacchetto = (11·10)+1 = 111 etichette
x scatolone = (10·111)+1 = 1111 etichette → 1111 etichette x scatolone
Se ho 2007 etichette e le divido per il numero di etichette che contiene uno scatolone, scopro quanti scatoloni ho e quindi sono ingrado di trovare anche il numero scatole delle matite
2007/1111 = 1.8064...
1.8 → 2 scatoloni (approssimati) 2·1000 → ho all'incirca 2000 matite

(*…Se ho 2007 etichette e le divido per il numero di etichette che contiene uno scatolone, scopro quanti scatoloni ho e quindi sono in grado trovare anche il numero di scatole delle matite*
$\frac{2007}{1111} = 1{,}8064 \ldots$ *1,8*$\rightarrow_{\text{(approssimati)}}^{\text{2 scatoloni}}$*2·1000→ho all'incirca 2000 matite*)

Spesso arrivano a capire che per una scatola occorrono 111 etichette ed anche che per uno scatolone ne occorrono 1111. Costruttivamente riescono a trovare questi dati ma non sanno come gestire il problema oltre questo punto perché, da qui in poi, si perde la meccanicità dell'algoritmo.

Abbiamo evidenziato anche errori di calcolo che rivelano errori di concetto sulla proprietà associativa o più in generale sull'uso delle parentesi (spesso messe, o omesse, completamente a caso anche da allievi iscritti a facoltà scientifiche). A tale proposito citiamo il seguente esempio:

1 scatola = 10 matite + 1 etichetta = 11 etichette

1 pacchetto = 11x10+1=111 etichette

1 scatolone = 111x10+1= 1111 etichette

2007= 1 scatolone 8 pacchetti 8 matite

1111 + 888 + 8

Se avessero tratto da qui le giuste conclusioni, sarebbe stato perfetto e avrebbero trovato immediatamente la risposta, invece continuano commettendo errori nella gestione del calcolo.

Le matite sono *2007 - 111 - 80 =1816* perché sottraggono, **dicono**, le etichette che **non erano sulle matite.**

Proviamo a ricostruire il ragionamento che hanno seguito:

111 (=1111-1000) sono le etichette in uno scatolone, che non stanno sulle matite;
80 sono le etichette che stanno in 8 pacchetti, i quali contengono 800 matite, diminuite delle 8 matite singole.
Commettono così l'errore di applicare la proprietà associativa alla sottrazione:
2007-111-(88-8) anziché ((2007-111)-88)-8

[22] Cfr. Radford L., 2006 e Rizzo A., 2000.

2007-111-80, può essere considerato un abuso di scrittura un po' legato all'uso della calcolatrice.

nei ragionamenti si legge:

abbiamo sottratto tutte le etichette delle scatole e pacchetti per trovare il numero delle matite.

Questa loro espressione linguistica ricorda un po' il vecchio detto: *"sommare capre e cavoli"!*

Per quanto riguarda la proposta di lavoro b), riportiamo di seguito il testo del problema modificato, destinato ad allievi di categoria 5-6, con le osservazioni che abbiamo dedotto a seguito dell'esperienza fatta.

LE MATITE DEL RMT (Cat. 5, 6)
Quest'anno, gli organizzatori hanno deciso di offrire una matita a tutti i partecipanti al RMT.
Alla fabbrica delle matite, un operaio ha il compito di mettere un'etichetta con scritto « RMT» su ogni matita.
Con 10 matite riempie poi delle scatole sulle quali mette la stessa etichetta.
Quando ha riempito dieci scatole, ne fa un pacchetto, sul quale mette ancora l'etichetta «RMT».
Infine, con 10 pacchetti, egli riempie uno scatolone sul quale mette ancora l'etichetta « RMT».
Oggi, l'operaio ha preparato le matite richieste dalla sezione di Transalpino ed ha constatato che per questa sezione ha dovuto contare 759 etichette «RMT».
Quante matite ha ordinato la sezione di Transalpino?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Questa proposta intende sollecitare gli allievi ad "interrogarsi su cosa fare", piuttosto che ad impegnarsi nella ricerca dell'applicazione di una procedura nota, attività fondamentale per l'apprendimento, anche con riferimento al "contratto didattico" nella "Teoria delle situazioni didattiche" di Brousseau[23].

Dalla discussione nelle classi, seguita alla risoluzione del problema, è emerso che gran parte degli allievi non riesce a seguire il ragionamento, che è inverso a quello del raggruppare: al massimo arrivano a stabilire 111 etichette per un pacchetto ma poi non sanno come andare avanti. E' un po' come quando si affrontano i raggruppamenti in basi diverse da 10. Finché si tratta di raggruppare gli elementi e registrare il numero dei gruppi, scrivendo le cifre nella posizione giusta va tutto bene; quando, invece, si dà un numero espresso in una certa base e bisogna riportarlo in base 10, allora sorgono le difficoltà.
Inoltre l'informazione

"Infine, con 10 pacchetti, egli riempie uno scatolone sul quale mette ancora l'etichetta « RMT»"

che doveva semplicemente spiegare il processo, anche generalizzabile, **ha dato noia** (perché con 759 matite non si riesce a riempire uno scatolone) e in molti casi ha causato un vero blocco, non sapendo cosa fare di questo dato "inutile".

Quali riflessioni possiamo trarre da queste osservazioni**?**

Il nuovo problema doveva essere una versione facilitata nella gestione delle variabili numeriche rispetto alla versione originale e ciò per incentivare gli allievi a lavorare consapevolmente con la struttura posizionale soggiacente. Di nuovo così non è stato. Come abbiamo già accennato, il fatto che non si avessero sufficienti matite per riempire uno scatolone non li ha aiutati a capire la struttura posizionale ma è stato percepito come un "trabocchetto" e, come tale, non bisognava tenerne conto. Abbiamo, inoltre, avuto la conferma del fatto che i ragazzi non sono abituati a lavorare per approssimazioni (sensate) successive, ogni volta verificando lo scarto, anche se, come in questo caso, la verifica sarebbe stata alla loro portata ed avrebbe consentito di eliminare i risultati errati.
Ancora una volta dobbiamo concludere che la struttura posizionale non è acquisita, è conosciuta solo a livello di procedura di riferimento ma non la si sa utilizzare in applicazioni meno standardizzate né riconoscerla costantemente negli algoritmi operativi.

3. Alcune conclusioni

La ricerca sugli errori nella risoluzione dei problemi esaminati ha messo in evidenza che:

non sempre è facile stabilirne la causa, dunque assimilarli in una tipologia;
errori di contenuto matematico possono essere causati dalla non comprensione del contenuto stesso ma anche dall'enfasi posta sulle procedure standard o su parole-chiave (e divenire quindi conseguenza di metodo);
la metodologia di lavoro e l'approccio degli allievi al compito incidono notevolmente sul risultato;
la lacunosità o l'approssimazione delle spiegazioni rendono molto "interpretabili" le risposte.

La risposta, giusta o sbagliata, deriva da un sistema complesso di elementi che può divenire più chiaro solo se ci è data la possibilità di indagarlo direttamente nel contesto attraverso l'acquisizione di dati di diversa natura: tratti

[23]Cfr. D'Amore B., 2007.

dall'oralità, dall'osservazione di atteggiamenti, ….

La sperimentazione che abbiamo condotto è servita sia a mettere a fuoco certe difficoltà sia a far lavorare gli allievi attraverso una pluralità di proposte, quali la modifica delle variabili, la riflessione sui risultati conseguiti, la scoperta che le variabili numeriche debbano sottostare a certi vincoli dipendenti dalla natura stessa del problema, … .

Queste attività, unite alla discussione che si suggerisce di far seguire in classe, permettono all'insegnante di conoscere lo stato delle conoscenze dei singoli allievi, il loro modo di apprendere (sicuramente derivato dalle personali e dalle precedenti esperienze), ma anche agli allievi stessi di "costruire" il proprio sapere attraverso la condivisione e la socializzazione di nuovi significati. Tutto ciò può contribuire anche al progressivo superamento del *conflitto cognitivo*[24]. Tale conflitto può costituire un ostacolo che si crea anche quando la ripetizione di prove della stessa tipologia favorisce la formazione di un'immagine del concetto che in seguito, di fronte a proposte diverse, risulta inadeguata. Lo sforzo per superare il conflitto cognitivo è, tuttavia, un passaggio chiave per il "vero" apprendimento, benché esso vada considerato nella molteplicità di fattori che vi influiscono, alcuni di tipo oggettivo, come l'età degli allievi, altri più soggettivi, determinati anche dalla personalità di ciascuno.

Proprio in questo senso, il RMT si riconferma un buono strumento di lavoro per gli insegnanti in quanto permette di lavorare in classe a vari livelli: sulla lettura critica dei testi, sui dati numerici, sulle definizioni, sulle strategie utilizzabili, sulla coerenza del ragionamento seguito, ... creando le condizioni per un apprendimento "a spirale" che fa sì che gli allievi, sempre protagonisti nel p*arlare – raccontare – spiegare – argomentare*, aggiungano ogni volta un tassello in più nel loro cammino verso la formazione dei concetti.

Il lavoro, svolto con le classi al di fuori della gara, ci ha consentito di ribadire quanto sia importante e formativo richiedere agli allievi, fin dalla scuola Primaria, di fornire la spiegazione del procedimento seguito per risolvere un problema perché questo è senz'altro un primo approccio per guidarli verso la consapevolezza del concetto di dimostrazione del quale abbiamo riscontrato carenze anche fra gli studenti universitari.

Inoltre, il fatto che anche a livelli avanzati di apprendimento il dominio della struttura posizionale non sia completo, che esista ancora la scarsa abitudine alla verifica e che l'utilizzo del linguaggio specifico sia spesso solo formale, dimostra che si tratta di un concetto e di competenze di base fondamentali cui fare riferimento anche a livelli di studio superiore perché certi insuccessi degli studenti possono essere conseguenza anche di questi.

… la conquista del numero comincia molto presto ma … non sappiamo quando finirà!!!

BIBLIOGRAFIA

Bagni G. 2007, "*L'intercultura nei Programmi della Matematica*" in STRUMENTI CRES 2007, 47, 20–22, http://www.syllogismos.it/education/Intercultura-CRES.pdf ed anche
http://www.syllogismos.it/2009-VE-testo.pdf

Crociani C., Doretti L., Salomone L. 2004, *Strategie risolutive e registri di rappresentazione in problemi del Rally* in *RMT e Valutazione*, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico Transalpino, Mondorf-les-Bains (Luxembourg) 2004, ARMT, pp. 70-79.

Crociani C., Spatoloni R. (a nome del gruppo numerazione dell'ARMT) 2006, *Ancora problemi sul concetto di cifra-numero-posizionalità*, in *I problemi come supporto per l'apprendimento: il ruolo del RMT*, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino, Parma 2006, ARMT e Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, pp.117-132.

Crociani C., Spatoloni R. (a nome del gruppo numerazione dell'ARMT) 2005, *I problemi del rally come supporto didattico per l'avvio alla costruzione e al successivo consolidamento del concetto di cifra, numero e notazione posizionale*, in *RMT: dai problemi alla didattica quotidiana*, Atti delle giornate di studio sul rally matematico transalpino, Bourg-en-Bresse 2004- Arco di Trento 2005, ARMT, IPRASE Trentino, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en –Bresse, pp.224-234.

D'Amore B. 2007, *La didattica della matematica, oggi*. In: Marazzani I. (ed.) 2007. *La matematica e la sua didattica*. Atti del I Convegno Nazionale, Giulianova (Te), 4-5-6 maggio 2007, 18-24, Bologna: Pitagora.

D'Amore B. 2002, *La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica*. Scuola & Città. 4, 56-82.

Ferrari M. 2012, *Aritmetica e algebra nella scuola secondaria di primo grado, una proposta divisa per anni. Terza media: tiriamo le somme, usiamo i simboli e apriamo finestre*, in L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, centro ricerche didattiche Morin, Ed. G. Battagin (TV), Vol.35, n.1 Gennaio 2012

Freudenthal H. 1994, *Ripensando l'educazione matematica*, La Scuola

Grugnetti L., Rogers L. 2000, *Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues*, in Fauvel, J., van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, pp. 39-62, Dordrecht, Kluwer.

[24] Cfr. D'Amore 2002.

Longo A Paola 2008 *La scuola dell'infanzia, le Indicazioni nazionali, la matematica*, in http://www.comune.torino.it/centromultimediale/bambini_pensati/news_pdf/bpnw0802.pdf protocolli

Longo A.Paola 2008, *La scrittura posizionale dei numeri* in Emmeciquadro n.32, 19 aprile 2008, Euresis, Milano.

Radford, L. 2006, *Tre tradizioni semiotiche: Saussure, Peirce e Vygotskij* [*Three Semiotic Traditions: Saussure, Peirce and Vygotsky*]. Rassegna, 29, 34-39, Istituto Pedagogico Provinciale di Ricerca Sperimentazione e Aggiornamento Educativi del Gruppo linguistico Italiano della Provincia Autonoma di Bolzano.

Rizzo A. 2000, *La natura degli artefatti e la loro progettazione*, in <<Sistemi Intelligenti>> a. XII n. 3.

Sfard A. 2009, *Psicologia del pensiero matematico*, Trento Edizioni Erickson.

Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente, in *Gazzetta ufficiale dell'Unione europea* del 30.12.2006, L. 394/10-18.

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria e Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado, in *Indicazioni Nazionali per il curricolo delle scuole dell'infanzia e del primo ciclo*, Decreto ministeriale del 31 luglio 2007, in http://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/dir_310707.pdf

Allegato

Per gli insegnanti

Far lavorare gli allievi a coppie.

In risposta alle varie domande diamo le risposte che potrebbero essere utili quando si discute in classe con i propri allievi, sul loro operato:

con somma **15** si hanno i numeri **232** e **233** oppure **322** e **323**
con somma **37** si hanno i numeri **666** e **667**.

No, convincersi prima con degli esempi, e poi riflettere sul fatto che somma pari non si può mai avere perché i due numeri di tre cifre, dovendo essere consecutivi, sono uno pari ed uno dispari, quindi anche la somma delle cifre che compaiono nella loro scrittura è una pari e una dispari e, di conseguenza, la somma di tutte e 6 le cifre è dispari.

I numeri possibili come somma delle sei cifre, in modo che si rispettino tutte le altre condizioni, sono i numeri dispari da 5 a 53 perché:
avendo a disposizione sei cifre, di cui solo due diverse tra loro e consecutive, la somma minima possibile è 5 (uno 0 e tutte le altre 1) (110-111); (la coppia 000-001, che ha per somma 1 e le coppie 010-101 e 100-101, che hanno per somma 3, non sono accettabili perché non soddisfano la prima clausola);
avendo a disposizione sei cifre, di cui solo 2 diverse tra loro e consecutive, la somma massima possibile è 53 (un 8 e tutte le altre 9) (998-999)

In generale le soluzioni sono una o due. Per dimostrarlo si può procedere così:
dividere per 6 la somma delle cifre che compongono i due numeri e discutere sul resto di questa divisione per trovare il valore effettivo che ciascuna cifra deve avere.
Il resto di questa divisione (sempre diverso da zero) può essere 1-3-5 (dispari perché la somma delle cifre è sempre dispari) ed il numero delle soluzioni dipende dal valore di tale resto.
con resto 1 o 5 si ha una sola soluzione (resto 1 si ottengono due numeri formati dalle cinque cifre più basse e una più alta; resto 5 al contrario);
con resto 3 si hanno in generale due soluzioni perché le cifre compaiono esattamente tre volte ciascuna.

Altre strategie, per risolvere il problema e discuterne le soluzioni, qualunque sia la somma delle cifre dei due numeri:
dividere per 3 la somma delle cifre che compongono i due numeri. Si trova così il valore medio della somma di due qualunque cifre che occorrono nella scrittura del numero;
nel caso in cui la somma sia multiplo di 3, dovendo le cifre essere solo due diverse e consecutive, il valore medio dà proprio la somma delle due cifre diverse;
nel caso in cui la somma non sia multiplo di 3, il valore medio della somma dà comunque indicazione sulle due cifre diverse (es. somma=37, si ha: 37/3= 12 resto1e quindi si dovranno cercare due numeri consecutivi nei quali la somma delle cifre considerate a due a due abbiano somma compresa tra 12 e 13, e quindi le cifre saranno 6 e 7 e i due numeri cercati saranno 666 e 667);
- procedere algebricamente considerando che le cifre sono due, x e y, e che essendo consecutive si può porre ad esempio y=x+1, quindi lo schema delle soluzioni è:
xyx xyy → x(x+1)x x(x+1)(x+1) → 6x+3= S (somma delle cifre) → x=(S-3)/6 e quindi sono tutti i numeri che differiscono di 3 dai multipli di 6;

oppure
xxx xxy → xxx xx(x+1) → 6x+1=S → x= (S-1)/6 (nella divisione di S per 6 il resto è1);
oppure
yyx yyy → (x+1)(x+1)x (x+1)(x+1)(x+1) → 6x+5=S → (S-5)/6 (nella divisione di S per 6 il resto è 5).

Poiché i numeri devono essere consecutivi, la somma S deve essere dispari e le occorrenze delle cifre che compaiono possono essere solo dispari: 1-5 (una cifra una volta e la sua consecutiva 5 volte), 5-1 (una cifra cinque volte e la sua consecutiva una volta) oppure 3-3 (una cifra e la sua consecutiva entrambe tre volte).

LA RENCONTRE AVEC LE NOMBRE INTERVIENT VITE... …MAIS SA CONQUETE EST DIFFICILE

Carla Crociani et **Rita Spatoloni**

Au nom du « Groupe numération »[1]

1. Introduction

Le point de départ pour parler de mathématique diffère selon les élèves et dépend des expériences personnelles précédentes de chacun d'entre eux. Le professeur des écoles – l'enseignant du premier degré – donne le coup d'envoi officiel du parcours de l'élève ; il doit donc organiser un travail stimulant pour l'ensemble de la classe, permettant aux élèves d'atteindre un niveau de connaissance aussi homogène que possible. Le « défi » quotidien, surtout aujourd'hui, consiste justement à concilier ces deux aspects en exploitant les hétérogénéités « culturelles » propres à chaque classe, de manière à ce que celles-ci deviennent un tremplin, une motivation utile à la compréhension et à l'approfondissement des structures fondamentales.
Même si la mathématique, conformément au présupposé de son universalité, est « *parfois considérée comme une discipline peu influencée par les différents contextes culturels* »[2], l'on devrait revoir les multiples aspects de la didactique en fonction des cultures auxquelles on est confronté, dès lors que chacune d'entre elles a pesé sur le développement et sur la construction de procédures différenciées, du fait de l'apport d'interprétations et de modalités de communication des plus variées. Par ailleurs, les « Indications nationales » (directives) de 2007 se réfèrent explicitement à cette idée, puisqu'on y évoque, parmi les objectifs à atteindre en CM2 (cinquième année de l'école primaire), la connaissance *« des systèmes de notation des nombres qui sont, ou ont été, en vigueur dans des lieux, à des époques, et dans des cultures autres que la nôtre* ». À l'évidence, il ne s'agit pas seulement d'une directive portant sur les contenus : on y met surtout l'accent sur le fait qu'*« une histoire montrant la diversité, plutôt que l'universalité, du développement des mathématiques, ajoute une dimension stimulante à la discipline elle-même. Cela ouvre notamment sur la possibilité que le monde et son histoire pénètrent dans la classe, de manière à contrecarrer l'étroitesse d'esprit de toute vision ethnocentrique* »[3]. Et la chose est d'une importance fondamentale dans toutes les sphères de l'éducation !

Les professeurs du primaire font quotidiennement l'expérience de l'influence exercée par le vécu des élèves sur l'apprentissage des contenus ; raison pour laquelle, avant de procéder à la présentation d'une notion, ils devraient se livrer à un examen systématique des expériences antérieures de l'élève, et en tenir compte au cours du travail à venir. En outre, il est important de partager des expériences collectives, pour en tirer des contenus communs ; et il faut développer, en groupe, la capacité d'appliquer des stratégies et d'utiliser des langages au fur et à mesure toujours plus techniques. Les élèves prendront ainsi davantage conscience de la nécessité d'utiliser un lexique mathématique spécifique, ceci pour venir à bout des ambiguïtés que les mots peuvent souvent présenter dans le langage commun. Une autonomie progressive, toujours plus assurée, en ce qui concerne la compréhension du langage et des structures techniques de la communication, facilite sans nul doute l'acquisition des contenus et des procédures, et a des répercussions positives sur l'assimilation des notions.
On pourrait croire que limiter l'emploi des termes et des tournures propres à la discipline pourrait rendre la tâche plus facile à l'élève qui planche sur un problème et que cela lui permettrait de trouver plus facilement le résultat ; toutefois, il faut se demander dans quelle mesure le fait de fournir des réponses exactes sur la base de procédures standard, ne bride pas au contraire l'élan de l'élève qui s'abstient donc d'entrer dans le jeu en procédant à une analyse plus approfondie des consignes et en cherchant des solutions inventives – avec pour conséquence d'entraver son « entraînement » au raisonnement.
À la lumière de ces considérations, et au vu d'une réalité scolaire fort variée, le fait même de fournir les algorithmes nécessaires pour travailler avec les nombres, en les présentant sous l'angle de leur mécanicité ; ou sans se pencher – à travers toute une gamme d'exercices – sur leur fondement ; peut aujourd'hui plus que jamais s'avérer inutile, voire même néfaste.
De plus, durant son parcours d'apprentissage, l'on ne devrait pas négliger – comme, hélas, cela arrive parfois faute de temps – la bonne habitude de former l'élève au contrôle et à l'« évaluation » des résultats obtenus à

[1] Abate L. (Rozzano), Bartolomei M. (Sienne), Crociani C. (Sienne), Del Monte F. (Parme), Gagliardo E. (Sienne), Lucherini M. (Sienne), Mandelli M. (Riva del Garda), Mazzoni C. (Parme), Parisi I (Riva del Garda), Pascale A. M. (Sienne), Perna B. (Sienne), Skilbecq P. (Belgique), Soto I. (Belgique), Spatoloni R. (Sienne).

[2] Cf. G. Bagni, 2007.

[3] Cf. L. Grugnetti, L. Rogers, 2000.

l'aide des données mises à sa disposition. Du reste, on doit tenir compte du fait qu'aujourd'hui, outre certaines implications spécifiques au domaine des mathématiques, la réalité quotidienne exige des individus une précision de langage et une rapidité de décision optimales (souvent suite à une estimation numérique ou à une évaluation rapide).

À partir de ces réflexions synthétiques, et au sein du Groupe de Travail « Numération »[4], nous avons choisi d'analyser quelques énoncés du RMT : les copies rendues par les élèves présentaient en effet, parallèlement aux difficultés inhérentes à la construction du concept de nombre, des lacunes de type transversal qu'on pouvait cerner dans la résolution desdits problèmes.

Nous avons observé, tous niveaux confondus :

- des difficultés de compréhension du langage technique : le sens commun des mots prévaut sur la compréhension des termes spécifiques, ce qui conduit les élèves à commettre des erreurs ;
- des difficultés au niveau de la lecture et de la compréhension de l'énoncé : il n'est pas rare que les élèves l'interprètent à leur manière, ou recopient uniquement les données sans s'inquiéter des questions posées par le problème ; et ils résolvent, parfois même correctement, d'autres problèmes sans s'en rendre compte le moins du monde ;
- des lacunes et un manque d'attention quant à la structure du nombre ; autant de difficultés qui, une fois surmontées, seraient d'une grande aide pour la résolution algébrique des problèmes ;
- des difficultés à échafauder un raisonnement correct, en ayant clairement à l'esprit les données effectivement à disposition ; ce qui est à l'évidence une prémisse indispensable à tout commencement de démonstration.

Aux paragraphes suivants, nous décrirons les étapes parcourues par le groupe de travail « Numération » depuis la Rencontre de Nivelles, jusqu'à la Rencontre de Besançon[5], en cherchant à motiver, à la lumière des éléments exposés dans cette introduction, non seulement le choix des problèmes, mais aussi celui de *nos* expérimentations.

2. Les problèmes proposés à Nivelles

En ce qui concerne la « Rencontre de Nivelles », nous nous sommes concentrés sur les problèmes présentant des aspects inhérents au concept de numération, et dont le trait commun était des scores particulièrement bas lors du concours ; ces problèmes nous permettaient en outre (et surtout) de cerner les lacunes évoquées plus haut. Il s'agissait d'énoncés qui, de par leur typologie et du fait de la catégorie à laquelle ils étaient destinés, permettaient :

1) de focaliser les aspects du concept de nombre compris par les élèves ;

2) d'en savoir davantage sur le processus d'acquisition des notions en fonction de l'âge ;

3) de réfléchir sur des contenus – apparemment étrangers au nombre et à la valeur positionnelle des chiffres – assimilés mécaniquement par les élèves, car ces derniers ne possèdent sans doute pas une solide connaissance de la structure du nombre.

C'est, par exemple, ce qui arrive lorsqu'on introduit les algorithmes de multiplication et de division, parce qu'on ne consacre pas suffisamment de temps « *au pourquoi du comment* » de l'opération sur laquelle on est sensé travailler. En ce qui concerne la division, on n'insiste pas assez sur le fait qu'il est bon de s'arrêter une fois qu'on a trouvé un quotient entier et éventuellement un reste ; ou alors de poursuivre la recherche d'un développement décimal, en relation avec le problème. En tout état de cause, à chaque fois qu'on « fait des opérations », il faut faire réfléchir les élèves sur leur travail et sur la raison qui préside leur activité ; ils doivent en outre se demander si le résultat obtenu est compatible avec les consignes posées et avec l'objectif à atteindre.

Les problèmes présentés ont été les suivants :

Le marathon de Transalpie (Cat.7, 8, 9, 10) .15RMT.I.16
Les crayons du 15^{e} RMT (Cat.5, 6) 15RMT.II. 8
Anniversaires et bougies (Cat.7, 8, 9, 10) 16RMT.F.14
Drôle de multiplication (Cat.7, 8, 9) 17° RMT I Prova (n.14)

Voulant comprendre pourquoi ces problèmes avaient connu un tel taux d'échec, et après les avoir présentés au groupe, nous avons discuté ensemble des erreurs relevées et des éventuels obstacles que les élèves avaient pu rencontrer lors de leur résolution.

L'examen des copies a en effet permis d'observer qu'il est essentiel d'affronter les concepts de valeur positionnelle des chiffres et de nombre à travers toute une gamme d'expériences ; il est tout aussi impératif que les procédures

[4]Ce groupe, au sein de l'ARMT, étudie la construction du concept de nombre, de la valeur positionnelle des chiffres, des régularités numériques à travers l'analyse *a priori* et *a posteriori* des problèmes du RMT.

[5]Nivelles 2009, 13e Rencontre ARMT et Besançon 2010, 14e Rencontre ARMT.

visant à la résolution des opérations ne soient pas apprises en tant que telles : l'on doit en revanche y revenir tout au long de la scolarité, pour que les élèves puissent les maîtriser et les utiliser à bon escient.

Nous avons en dernier lieu programmé une expérience qui, à partir de ces problèmes, donnerait aux enseignants impliqués l'occasion d'aider leurs élèves à déjouer les obstacles en question, et, dans le même temps, de réfléchir avec eux sur le concept de démonstration.

Nous avons principalement travaillé sur les deux premiers problèmes et nous traiterons uniquement de ces deux énoncés au long de cet article :

2.1. Analyse du problème *Le marathon de Transalpie*

LE MARATHON DE TRANSALPIE
Michel et Philippe ont décidé de s'inscrire au grand Marathon de Transalpie et viennent de recevoir les numéros de leurs dossards.
On sait que :
- il s'agit de deux nombres entiers consécutifs supérieurs à 100 et inférieurs à 1000 ;
- pour écrire ces deux nombres, on n'utilise que deux chiffres différents ;
- la somme des six chiffres qui composent les deux nombres est 39.

Quels peuvent être les deux numéros de dossards de Michel et de Philippe.

Expliquez comment vous les avez trouvés ?

Il ressort de la correction des copies rédigées durant le concours, des carences dans la compréhension de l'énoncé dues à plusieurs facteurs : lecture superficielle ; méconnaissance des termes techniques ; non-élaboration d'une stratégie d'ensemble ; manque d'esprit critique car les élèves ne relèvent pas la présence d'informations inutiles car redondantes[6].
Les erreurs relèvent en substance de deux catégories :

- **erreurs de type linguistique,** qui montrent que le langage technique est peu ou mal maîtrisé ;
- **erreurs de type méthodologique/procédural,** qui dénotent un manque de sens critique consistant à avancer certaines hypothèses sans les démontrer – des hypothèses en général vraies uniquement dans des cas particuliers.

Parmi les erreurs de **type linguistique**, on remarque fréquemment la méconnaissance du terme technique « nombres consécutifs », ce qui a conduit, dans certain cas, à définir comme un « *nombre consécutif, celui où les chiffres se suivent l'un après l'autre* ». Conformément à cette définition, l'on a ainsi trouvé « *les deux nombres consécutifs » 456 et 789,* (chacun d'eux étant « *consécutif »*) dont la somme des six chiffres donne pour résultat 39. La solution est unique !
D'autres élèves considèrent comme consécutifs les nombres 666 – 777. Selon cette interprétation, et comme on ne peut enfreindre la consigne « *la somme des six chiffres qui composent les deux nombres est 39* », la solution est unique !
L'erreur la plus courante, qui concerne cependant l'interprétation de la deuxième consigne « *pour écrire ces deux nombres, on n'utilise que deux chiffres différents »,* peut être ainsi résumée :

« sur *chacun* des dossards, on n'a utilisé que deux chiffres différents », mais sur les deux dossards « mis ensemble » peuvent figurer trois chiffres différents. (On trouve des solutions du type 883-884 ; 775-776 etc.)[7]
« les nombres des deux dossards ne se distinguent que par deux chiffres », mais dans les deux dossards « mis ensemble », peuvent figurer jusqu'à quatre chiffres différents. (On trouve alors des solutions du type : 658-659, 568-569, 757-758 etc.)[8]

Les deux interprétations de la deuxième consigne donnent lieu à de nombreuses solutions, mais les élèves s'arrêtent presque toujours à la première trouvée ou, au maximum, ils en indiquent deux ! Peut-être est-ce dû au fait qu'en classe, de nombreux professeurs ont l'habitude d'« entraîner » leurs élèves en les faisant plancher sur des problèmes répétitifs n'ayant en général qu'une seule solution ; et portant sur la notion qu'ils viennent d'expliquer. Les élèves, surtout dans les catégories les plus basses, sont convaincus qu'une fois trouvée « **la »** solution, leur tâche est terminée.
Les consignes (numériques) « la *somme […] est 39* » et « *deux nombres entiers consécutifs supérieurs à 100 et*

---

[6] Dans ce cas précis, la troisième consigne affirme que les chiffres sont six en tout, et que les nombres sont compris entre 100 et 1 000, comme le dit la première consigne. Toutefois, la répétition, même si elle est redondante, aide à entrer dans le problème. *A posteriori*, nous pouvons affirmer que personne n'a considéré cette donnée comme superflue.

[7] Conformément à cette interprétation, il y a 4 solutions : 991-992, 883-884, 775-776, 667-668, car on doit respecter la consigne de la somme égale à 39.

[8] Conformément à cette interprétation, il y a 36 solutions : **991**-992… 928-929 ; **892**-893… 838-839 ; **793**-794… 748-749 ; 397-398 ; 388-389 ; 298-299 (8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36) toujours en respectant la consigne de la somme égale à 39.

inférieurs à 1000 » ont toujours été respectées.
Le fait que, dans la tradition scolaire, on propose des problèmes où prévalent les données numériques, pourrait expliquer ce constat ; on peut également imaginer que les données numériques constituent en soi une base de départ rassurante et qu'elles sont plus facilement gérables, car on peut jongler avec elles de manière souvent mécanique, sans l'ombre d'un raisonnement logique sous-jacent !

L'analyse des copies révèle en outre un « **emploi flou** » des termes techniques**.** Par exemple, dans une copie, après avoir découvert que les chiffres étaient 6 et 7, les élèves écrivent 676 et 767 et expliquent qu'« *en utilisant la formule inverse* » les nombres sont 676-677. Nous avons cherché à reconstruire *a posteriori* leur raisonnement et à « traduire » leur expression, et nous nous sommes rendu compte qu'ils pourraient avoir procédé de la sorte :
39 : 6 = 6,5 donc chaque bloc de deux chiffres doit être 6,5, c'est-à-dire *67 67 67* (*6,5 – 0,5= 6* ; *6,5 + 0,5 = 7*) ; ils trouvent ainsi les deux nombres de trois chiffres *676-767* qui ne sont pas consécutifs, mais ils changent l'ordre des chiffres dans le second (*en utilisant la formule inverse*) et obtiennent les nombres 676-677. Ils s'arrêtent de toute façon à la première solution trouvée.

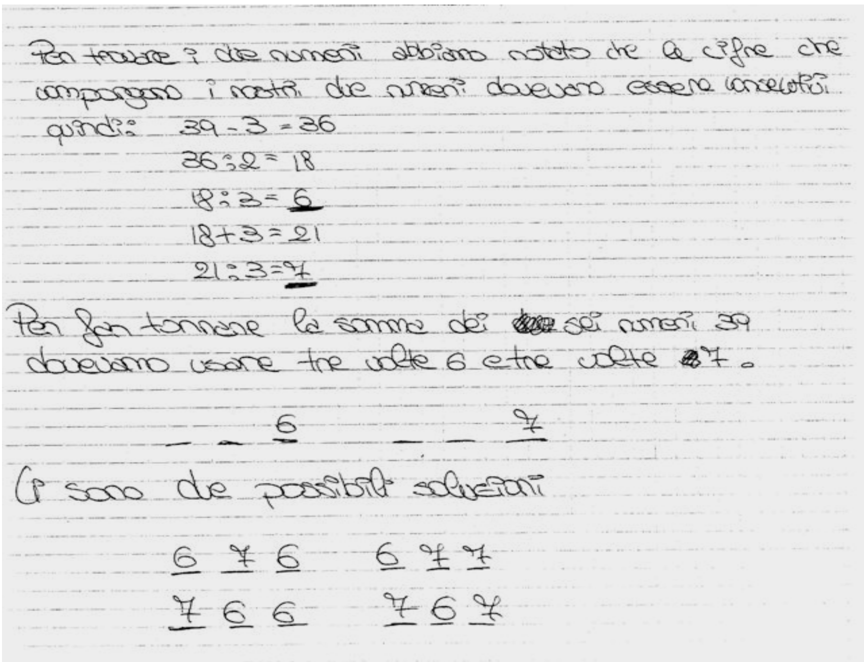
Parmi les erreurs de **type méthodologique/procédural,** la plus courante est la suivante : l'on admet, plus ou moins clairement, que les deux chiffres consécutifs apparaissent trois fois chacun (ce qui est vrai avec les variables numériques présentes dans l'énoncé, mais pas en général). Toutefois, l'analyse des procédures adoptées par les élèves est intéressante.

Certains, dans les catégories les plus élevées, utilisent le langage algébrique :
- Ils posent : 3x + 3y = 39 et y = x+1. (*A priori*, sans autre justification, ils pouvaient aussi bien écrire y + 5x = 39 ou, de la même manière, x + 5y = 39 ; ils ne pouvaient écarter que 4x + 2y ou 2x + 4y car leur somme est paire et ne peut donc être 39) ;
- Ils posent xyx - xyy et, conformément à ce schéma, ils construisent des équations, sachant que y = x + 1. (Ils ne s'aperçoivent pas que ce schéma n'est pas général, et que, par conséquent l'on ne peut en tirer toutes les informations nécessaires) ;
- Nombreux sont les élèves, toutes catégories confondues, qui trouvent la valeur moyenne numérique des six chiffres (39 : 6 = 6,5) et en déduisent que les chiffres sont le 6 et le 7[9]. Aurait-il été aussi facile de trouver les numéros de dossards si la somme des chiffres avait été 35 ou 31 ? (exemple : 35 : 6 = 5,8 laisse supposer que les 6 sont plus nombreux que les 5 ; mais 35 : 6 = 5 (reste 5) laisse entendre que pour obtenir 35 on doit avoir exactement une fois 5 et cinq fois 6. De même, 31 : 6 = 5 (reste 1) laisse également entendre que pour obtenir 31, on doit additionner cinq fois 5 et une fois 6).
- D'autres élèves trouvent 13 = 39 : 3 comme somme des deux chiffres différents qui, devant être consécutifs, sont 6 et 7 ; certains découvrent que si les deux nombres sont consécutifs, les sommes des chiffres de chacun des nombres doivent être des nombres consécutifs, si bien que la seule manière d'obtenir 39 avec cette consigne, est de l'envisager comme la somme de 19 et 20 (39 = 19 + 20).

Les élèves s'arrêtent généralement à la première solution trouvée.

Nous reproduisons ci-dessous une copie où les élèves, même s'ils supposent que les chiffres doivent figurer trois fois chacun, parviennent à élaborer un raisonnement correct et bien bâti en trouvant chacune des deux solutions. Il s'agit certes d'une copie de catégorie 9.

[9] Ce raisonnement diffère de celui qui figure dans l'analyse *a priori* « *diviser 39 par 6 et trouver 6 (reste 3) ; comprendre que pour obtenir 39, on doit additionner 3 fois 6 et 3 fois 7* ».



Per trovare i due numeri abbiamo notato che le cifre che compongono i nostri due numeri dovevano essere consecutivi

quindi: 39 - 3 = 36

36 : 2 = 18

18 : 3 = 6

18 + 3 = 21

21 : 3 = 7

Per far tornare la somma dei sei numeri 39 dovevamo usare tre volte 6 e tre volte 7.

_ _ 6 _ _ 7

Ci sono due possibili soluzioni

6 7 6 6 7 7

7 6 6 7 6 7

[Traduction : *Pour trouver les deux nombres nous avons remarqué que les chiffres qui composent nos deux nombres doivent être consécutifs, donc …*
Pour faire arriver la somme des six nombres à 39, nous devions utiliser trois fois 6 et trois fois 7.
Il y a deux solutions possibles.]

Les élèves omettent une partie du raisonnement qui pourrait être de ce type :

- si les nombres sont consécutifs, alors les deux seuls chiffres utilisés sont eux aussi consécutifs et figurent trois fois chacun.

On peut expliquer le raisonnement effectivement présent dans la copie de la manière suivante : si la somme des chiffres est 39, alors si l'on ôte 3 de la somme en question, les deux nombres obtenus présentent les mêmes chiffres et donc on peut effectuer la série d'opérations suivantes :

39 – 3 = 36 ; 36 : 2 = 18 et 18 : 3 = 6

d'où l'on déduit qu'il y a trois chiffres 6 et trois chiffres 7 (parce que 18 + 3 = 21 et 21 : 3 = 7).

Les erreurs que nous avons relevées nous ont amenés à programmer une expérience avec les élèves des catégories inférieures (cat. 5, 6) pour :

a) vérifier le niveau de compréhension et de maniement du langage technique ;
b) enquêter sur les compétences relatives au concept de démonstration,

notamment parce que les membres du groupe ont retenu que les notions sur lesquelles reposait la résolution du problème, ainsi que les connaissances relatives au langage technique, devraient déjà avoir été assimilées (et peut-être pas encore oubliées !), même dans ces catégories[10].

En outre, l'expérience consistant à proposer le problème à des catégories plus basses, pouvait fournir aux enseignants concernés l'occasion de réfléchir avec leurs élèves sur le fait qu'une recherche exhaustive et une explication correcte doivent nécessairement reposer sur une « démonstration » qui, de par sa nature même, ne peut partir de cas particuliers, mais toujours des hypothèses dont ils disposent (et ceci sans en introduire de nouvelles) ; qu'une démonstration doit, à travers un raisonnement correct et logique, amener à des conclusions universellement acceptables.

L'expérience comportait trois volets :

a) rendre plus clair le problème *Le marathon de Transalpie* en modifiant l'énoncé de la deuxième consigne : « *pour écrire ces deux nombres, on n'utilise que deux chiffres différents* » qui devient « *pour écrire ces deux nombres, on utilise* ***en tout et pour tout*** *deux chiffres différents* » ; proposer le problème aux catégories 5, 6, 7, 8;

b) proposer un nouveau problème, *Le matricule*, modifié au niveau du contexte et de la variable numérique, à des classes de catégorie 5, 6, 7, 8 ; la modification des variables didactiques ne permettait pas d'établir que chacun des chiffres figurait trois fois ; nous pouvions de la sorte enquêter sur l'emploi de stratégies plus directement liées à la structure positionnelle du système de numération, et à l'emploi de la division avec reste ;

10 L'expérience n'a pu être menée avec des classes de catégorie 9 et 10, car le groupe ne comptait pas de professeurs de classes de ces deux niveaux et, au moment de l'expérience, aucun enseignant extérieur au groupe n'était disponible.

c) proposer aux élèves, regroupés deux par deux à partir de la catégorie 6, un travail de réflexion susceptible de les associer à la modification des variables – numériques ou pas – ; puis à l'analyse des résultats obtenus.

Nous reproduisons ci-après l'énoncé des problèmes, et nous décrirons l'activité de modification, comme le prévoit l'expérience visée aux points précédents.

a)

LE MARATHON DE TRANSALPIE (Cat, 5, 6, 7, 8)
Michel et Philippe ont décidé de s'inscrire au grand Marathon de Transalpie et viennent de recevoir les numéros de leurs dossards.
On sait que :
- il s'agit de deux nombres entiers consécutifs supérieurs à 100 et inférieurs à 1 000 ;
- pour écrire ces deux nombres, on n'utilise en tout que deux chiffres différents ;
- la somme des six chiffres qui composent les deux nombres est 39.

Quels peuvent être les deux numéros de dossards de Michel et de Philippe.

Expliquez comment vous les avez trouvés ?

b)

LE MATRICULE (cat. 5, 6, 7, 8)
Pierre s'est inscrit à l'Université et a reçu un matricule qui est un nombre de six chiffres. Il a remarqué que :
- le nombre formé des quatrième, cinquième et sixième chiffres est consécutif au nombre formé des premier, deuxième et troisième chiffres,
- le matricule n'a que deux chiffres différents,
- la somme de ses chiffres est 31
Quel peut être le matricule de Pierre ?

Expliquez comment vous l'avez trouvé.

c) proposition d'activités sur le changement de variables[11]

2.1.1 Résultats de l'expérience

En référence à l'expérience évoquée au point a), les résultats obtenus par les élèves quant à la résolution du nouveau problème *Le marathon de Transalpie* ne s'éloignent guère des précédents scores, malgré la révision de la seconde consigne de l'énoncé original ; on relève en effet encore des difficultés au niveau de :

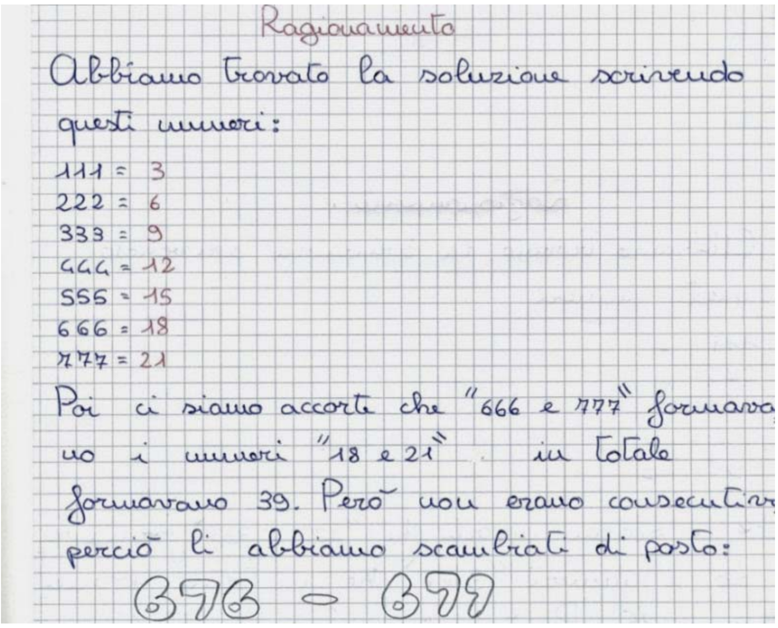
• l'aspect linguistique (nombres consécutifs) ;
• la gestion des consignes ;
• la qualité de l'explication fournie.

Certains élèves de la catégorie 6, nonobstant la modification, affirment sans ambages que *la seconde consigne peut être interprétée de deux manières différentes* ; dommage qu'il s'agisse des deux interprétations erronées déjà évoquées ! Mais l'élément « le plus grave », c'est que nous avons encore une fois eu la confirmation que la plupart des élèves, grands ou petits, s'arrête à la première, ou au maximum, à la deuxième solution trouvée !

La copie reproduite ci-dessous – rédigée dans une classe de catégorie 5 – présente un raisonnement plutôt correct (surtout si l'on tient compte du niveau), mais présente malgré tout un « vice de fond » consistant à retenir que les deux chiffres différents doivent figurer 3 fois chacun. Il est cependant remarquable que les élèves ne se soient pas arrêtés à la première solution mais les aient toutes trouvées, donnant la preuve qu'ils sont plus attentifs et mieux préparés au plan méthodologico-démonstratif que leurs aînés.

---

[11]Pour les enseignants, outre l'activité proposée aux élèves, l'on a fourni un corrigé avec les solutions et les indications d'éventuels éléments sur lesquels faire réfléchir les élèves (cf. Annexe 1).


Ragionamento
Abbiamo trovato la soluzione scrivendo
questi numeri:
111 = 3
222 = 6
333 = 9
444 = 12
555 = 15
666 = 18
777 = 21
Poi ci siamo accorti che "666 e 777" formava
no i numeri "18 e 21" in totale
formavano 39. Però non erano consecutivi
perciò li abbiamo scambiati di posto:
676 – 677

Notons l'emploi du mot « former » (ici entendu comme « *les chiffres 6 6 6 ont pour somme 18* »), souvent source de mauvaises interprétations quand les élèves le lisent dans l'énoncé d'un problème (le plus souvent, on dit que ce sont les *chiffres 1 et 8 qui forment le 18*). Il s'agit-là d'un autre exemple d'approximation linguistique et de superposition des langages commun et technique.

Personne n'a pensé à utiliser la division avec reste, pas même les élèves de catégorie 5 ou 6 qui ont abordé cette notion récemment et qui ne devraient donc pas l'avoir encore oubliée – un phénomène imputable au recours de plus en plus massif à la calculatrice. Cela montre qu'il faudrait peut-être insister davantage sur la division euclidienne qui, dans de nombreux cas, et dans certains contextes, s'avère être un instrument plus utile que le développement décimal pour parvenir au résultat.

À propos du point b) les copies des élèves de catégorie 5 et 6 (nous ne possédons pas de résultats pour les catégories 7 et 8) relatives au nouveau problème *Le matricule,* montrent que l'énoncé était effectivement plus clair, et que la résolution du problème fut plus simple et complète – ce qui est également dû au fait qu'il n'y avait qu'une seule solution. Malgré tout, nombreux sont les élèves qui n'ont pas encore clairement à l'esprit la différence entre *chiffre* et *nombre*. On continue de trouver des devoirs où l'on considère comme des chiffres les nombres 10, 11, etc. ; tandis que les élèves ne sont pas en mesure de gérer simultanément les trois consignes ; souvent, devant choisir, ils privilégient l'élément numérique « *somme 31* ».
Concentrant leur attention sur la somme **31**, ils cherchent un nombre dont les trois premiers chiffres auraient pour somme 15 (par exemple : 5 + 5 + 5) et les trois derniers auraient pour somme 16 (par exemple : 9 + 2 + 5) ; ils perdent ainsi de vue les autres consignes imposées par le problème et, parfois, ils font des erreurs indiquant une méconnaissance des notions fondamentales. Nous rapporterons ci-dessous quelques exemples :

[…] *555925* (ils perdent de vue la consigne *nombres consécutifs*) ;

[…] *10 4 1 10 5 1* (confusion évidente entre chiffre, nombre, et nombres consécutifs) ;

[…] *555547 : parce qu'il n'a que 2 chiffres différents* (4-7)[12] *la somme 5 + 4 +7 = 16 qui est consécutif de 15 (5 + 5 + 5), 447448 parce qu'il n'a que deux chiffres différents (7-8)* ;

[…] *663664 : parce qu'il n'a que deux chiffres différents (3-4)* ou bien *le nombre est 771772 parce qu'il n'a que deux chiffres différents (1-2)* mais la solution 555556 ne figure pas, probablement parce que, selon les élèves, le nombre n'a qu'un chiffre différent ;

[…] réponse 861862, *il n'a que deux chiffres différents ;*

[…] *les 3 derniers chiffres sont consécutifs aux 3 premiers* (*xxx (x + 1) (x + 1) (x + 1)*).

Il est intéressant de rapporter un autre exemple (catégorie 6) où les élèves, qui privilégient toujours la donnée numérique (somme 31), négligent (ou n'en connaissent pas bien la signification !) la consigne *nombres consécutifs,* mais ressentent toutefois le besoin d'accompagner la solution (exacte) de quelques-unes de ses permutations (*555556 555655 555565*).
Hélas, l'expérience montre que les difficultés inhérentes à la compréhension de l'énoncé, n'ont pas été évitées

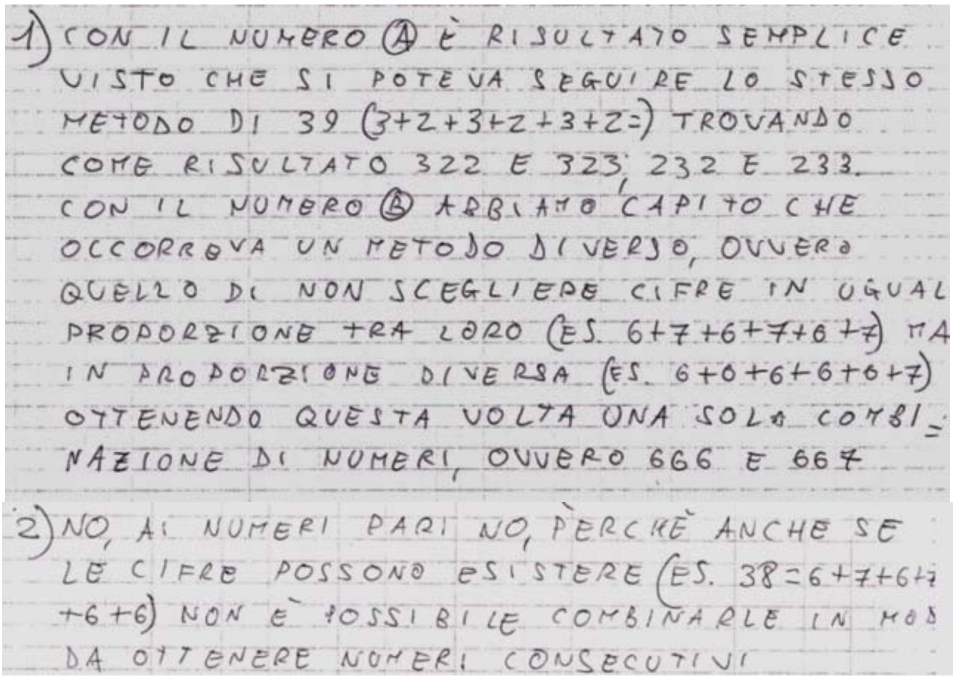
[12] Les autres chiffres sont tous 5 et donc seuls les chiffres 4 et 7 sont différents.

avec le nouveau problème *Le matricule*. En revanche, confirmation est faite de l'habitude des élèves de lire négligemment l'énoncé ; de se lancer dans la résolution du problème sans avoir clairement à l'esprit l'objectif à atteindre, ni les données effectivement à leur disposition ; de plus, une fois que la solution du problème a été trouvée, ils sont tentés de conclure sans confronter les résultats aux données et aux consignes.

Concernant l'expérience évoquée au point c), les professeurs de collège ont jugé que les clauses, inhérentes à l'activité de changement des variables dans l'énoncé du problème[13], ne convenaient pas – telles que nous les avions proposées – aux catégories 6-7, du fait des mots et du langage utilisés[14]. Seuls les élèves de la catégorie 8 se sont mesurés à cette nouvelle donne, tandis que les autres ont simplement résolu le problème dans sa forme originale, qui leur a été proposée en soulignant les erreurs habituelles.

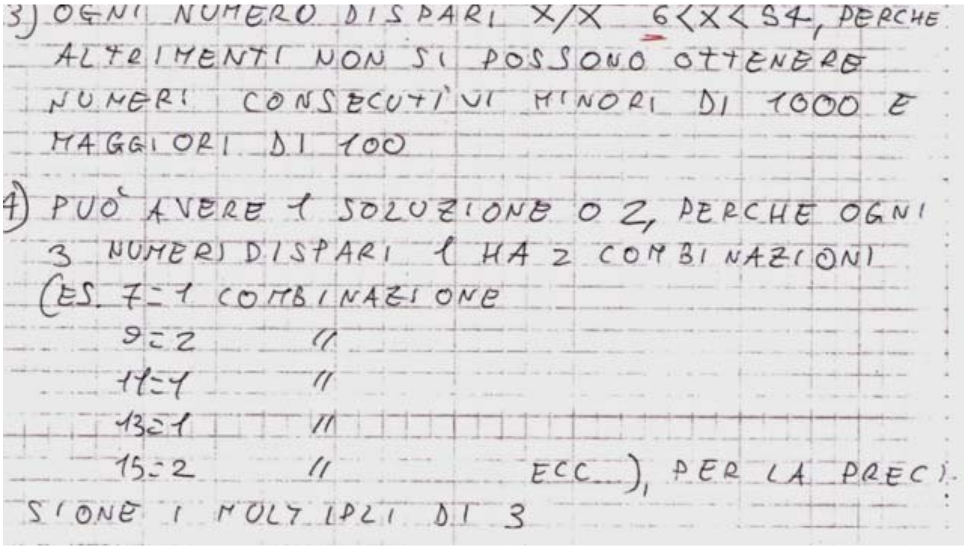
Nous reproduisons ci-dessous une copie de la catégorie 8, où l'on peut voir comment les élèves ont tout même essayé de soutenir une « démonstration » pouvant étayer leurs certitudes.

[Traduction des copies suivantes :
1) Dans le cas A, c'était simple vu que l'on pouvait suivre la même méthode que 39 (3+2+3+ 2+3+2 =) trouvant comme résultat 322 et 323, 232 et 233. Dans le cas B, nous avons compris qu'il fallait une autre méthode, c'est-à-dire celle de ne plus choisir les nombres dans les mêmes proportions (par ex. 6+7+6+7+6+7) mais dans une autre proportion (par ex. 6+6+6+6+6+7, obtenant cette fois une seule combinaison des nombres : 666 et 667).
2) Non, nombres pairs, Non, parce que si les chiffres peuvent exister (par ex 38 = 6+7+6+7+6+6), il n'est pas possible de les combiner de manière à avoir deux nombres consécutifs.
3) Chaque nombre impair x/x 6 < x <54 Parce que autrement on ne peut pas obtenir de nombres consécutifs plus petits que 1000 et plus grands que 100.
4) Il peut y avoir 1 solution ou 2. Parce que tous les 3 nombres impairs, il y a 2 combinaisons. (Par es : 7 = 1 combinaison 9 = 2 combinaisons ; 11 := 1 combinaison ; 13 = 1 combinaison ; 15 0 2 combinaisons, etc. (Pour être précis, tous les multiples de 3).]


1) CON IL NUMERO A È RISULTATO SEMPLICE
VISTO CHE SI POTEVA SEGUIRE LO STESSO
METODO DI 39 (3+2+3+2+3+2=) TROVANDO
COME RISULTATO 322 E 323, 232 E 233.
CON IL NUMERO B ABBIAMO CAPITO CHE
OCCORREVA UN METODO DIVERSO, OVVERO
QUELLO DI NON SCEGLIERE CIFRE IN UGUAL
PROPORZIONE TRA LORO (ES. 6+7+6+7+6+7) MA
IN PROPORZIONE DIVERSA (ES. 6+6+6+6+6+7)
OTTENENDO QUESTA VOLTA UNA SOLA COMBI-
NAZIONE DI NUMERI, OVVERO 666 E 667
2) NO, AI NUMERI PARI NO, PERCHÈ ANCHE SE
LE CIFRE POSSONO ESISTERE (ES. 38=6+7+6+7
+6+6) NON È POSSIBILE COMBINARLE IN MODO
DA OTTENERE NUMERI CONSECUTIVI

[13] L'énoncé proposé est celui de la version visée au point a).

[14] *Modifiez l'énoncé du problème en changeant la « variable numérique » (39) de la troisième consigne « la somme des six chiffres … ».On obtient à chaque fois un nouveau problème.*


3) OGNI NUMERO DISPARI X/X 6<X<54, PERCHE
ALTRIMENTI NON SI POSSONO OTTENERE
NUMERI CONSECUTIVI MINORI DI 1000 E
MAGGIORI DI 100

4) PUO' AVERE 1 SOLUZIONE O 2, PERCHE OGNI
3 NUMERI DISPARI 1 HA 2 COMBINAZIONI
(ES. 7=1 COMBINAZIONE
9=2 "
11=1 "
13=1 "
15=2 " ECC...), PER LA PRECI-
SIONE I MULTIPLI DI 3

Nous avons également proposé le travail évoqué au point c) aux étudiants inscrits en première année d'Informatique, de Physique et de Mathématique. Les réponses obtenues ne furent pas toujours enthousiasmantes. Même si l'on note parfois un certain goût pour la formalisation, à travers l'emploi du langage algébrique et d'articulations logiques (hors sujet dans ce contexte), les résultats obtenus ne se différencient guère de ceux de leurs jeunes collègues. Cependant, nous avons tout de même déniché quelques beaux exemples de résolution dénotant une méthodologie solide, et un goût certain pour « la démonstration » !
Ci-dessous, quelques éléments tirés de l'analyse des vingt-huit copies à notre disposition. En réalité, notre but n'était pas tant statistique ; car il s'agissait plutôt pour nous de mieux quantifier les résultats obtenus à ce niveau d'étude :

22% des élèves résolvent le problème en formant l'hypothèse selon laquelle les chiffres 6 et 7 doivent figurer trois fois chacun.
Exemple : x = y – 1   y = x + 1   3x + 3y = 39 → 3x + 3x + 3 = 39   6x = 36   x = 6.

26% des élèves ne trouve qu'une solution
Exemple : *nous pouvons écrire ces deux nombres comme ça : aba, abb* où *a et b sont les chiffres des nombres et b = a + 1. Si on remplace b par a + 1 on peut obtenir une équation comme celle-ci : a + a + 1 + a + a + a + 1 + a + 1 = x où x est égal à la somme des six chiffres. Si on remplace x par le nombre 39 on obtient 6a = 39 → a = 36/6 = 6   b = 6 +1=7 et donc les deux nombres sont 676 et 677.* Leur schéma n'est pas général ; ils auraient également dû prévoir *baa bab.*

78% des élèves répondent correctement à la consigne 1). Ou plus précisément, 11% dans le cas où la somme est 15, donne une seule réponse ; et 11% des élèves répond qu'avec la somme 37, ce n'est pas possible.

Ex : *le nombre 15 doit prendre la place du 39 dans l'équation   a + a + 1 + a + a + a + 1 + a + 1= x* … Cf. l'exemple précédent : *a =12/6 =2   b =2+1 donc on a la solution. Pour le 37 ; 6a + 3 = 37 → a = 34/6 ce rapport n'amène pas à des nombres naturels, donc il n'y a pas de solution.*

100% des élèves répondent de manière exacte à la consigne 2), mais la réponse n'est pas motivée, à moins que l'explication ne soit erronée.

89% des élèves répondent correctement à la consigne 3) mais le score plafonne à 50% si l'on ne compte que les élèves ayant correctement expliqué leur réponse, ou qui ont compris que les sommes possibles sont les nombres impairs compris 5 et 53.

100% des élèves, soit ne répond pas à la consigne 4) ; soit l'explication n'est guère satisfaisante car elle se base sur des exemples précédents ou parce qu'elle n'est pas justifiée. Personne n'utilise, ici non plus, la division avec reste.

Ex : *le problème peut avoir deux solutions si la somme des chiffres est un multiple de 3 ; une solution si la somme des chiffres n'est pas un multiple de trois.*

Ex : si *x= ((S-1)/2) – 1∈N*[15] *les solutions possibles sont au nombre de 2 ; autrement une seule, puisque dans le premier cas le premier et le second chiffre sont différents l'un de l'autre.*

2.2. Analyse du problème *Les crayons du 15ᵉ RMT*

LES CRAYONS DU 15ᵉ RMT
Les organisateurs ont décidé d'offrir un crayon à tous les participants du 15e RMT.
À la fabrique de crayons, un employé est chargé de mettre le logo « 15e RMT, 2007 » sur chaque crayon.
Avec 10 crayons, il remplit des boîtes sur lesquelles il met aussi le logo « 15e RMT, 2007 ».
Lorsqu'il a rempli dix boîtes, il en fait un paquet, sur lequel il marque de nouveau le logo « 15e RMT, 2007 ».
Finalement, avec 10 paquets, il remplit un carton sur lequel il marque encore le logo « 15e RMT, 2007 ».
Aujourd'hui, l'employé a préparé les crayons commandés par la section de Transalpie. Il a compté que, pour cette section, il a dû mettre 2007 logos « 15e RMT, 2007 ».
Combien de crayons la section de Transalpie a-t-elle commandés ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Attribution des points
4- Réponse «1808 » avec une explication complète
3- Réponse «1808» avec une explication incomplète
2- Réponse avec un oubli : logos sur le carton qui conduit à 1809 crayons, ou sur les paquets – 1824 ou réponse erronée due à une erreur de calcul, avec un raisonnement correct (avec tous les logos corrects)
1- Réponse avec deux oublis : logos sur les paquets et le carton qui conduit à 1825 crayons, ou début de recherche cohérente
0- Réponse « 2007 » ou incompréhension du problème

Nous avons rapporté ci-dessus les critères d'attribution des points figurant dans l'analyse *a priori*, car ils sont dans une certaine mesure « responsables » des scores généralement bas obtenus par les élèves : les erreurs prévues étaient bien moins graves que celles qui se sont vérifiées *a posteriori* ! L'on supposait en effet que le fait de travailler avec les groupes de 10 était à la portée des élèves de catégorie 5 et 6, tant point de vue théorique que des expériences faites ; les erreurs prévues étaient donc, en substance, des erreurs de calcul, d'étourderie ; mais pas des erreurs notionnelles. **Il n'en fut pas ainsi.**

Cet énoncé appartient à la famille des problèmes qui utilisent de manière explicite la structure positionnelle de notre système décimal[16]. Les erreurs, mises au jour à l'occasion du concours, relèvent essentiellement de deux catégories : les erreurs de contenu mathématique ; et les erreurs de type méthologico-procédural.
Dans le premier cas, on remarque des lacunes dans la connaissance de l'écriture positionnelle basée sur le groupe de 10, révélatrices du côté « mécanique » caractérisant l'apprentissage (ou… l'enseignement) de certaines propriétés. Et ces mêmes automatismes se manifestent souvent au niveau de la lecture et de l'interprétation de l'énoncé d'un problème : on répond machinalement à certains *inputs* (en l'occurrence les groupes de 10) sans s'inquiéter ni des données ni de la problématique soulevée par l'énoncé. On connaît l'écriture positionnelle en tant que notion propre, mais on ignore comment l'utiliser dans des situations autres que « standards » !

Quant aux erreurs relevant de la catégorie méthodologico-procédurale, elles sont notamment dues au fait que :

- les élèves n'ont pas l'habitude de réfléchir sur l'application des procédures et sur leur rapport avec les consignes du problème ;
- les élèves n'ont pas l'habitude de ***vérifier*** la cohérence du résultat eu égard aux données du problème[17] ;
- les élèves n'ont guère l'habitude de travailler par essais ou par ***approximations*** (sensées) en vérifiant systématiquement la différence (le nombre de boîtes, de paquets, etc. sont toujours des nombres entiers positifs).

Les élèves répondent par exemple :

- 1000 ou 10000 crayons car *10 crayons 1 boîte 10 boîtes* etc.…10 × 10 × 10 × 10 sans s'occuper de ce qu'on leur demande. Dans une copie, on trouve même pour réponse *10^{10}= 10 ×10×10×*. ;
- 200 crayons *parce que nous avons multiplié les 10 crayons par le nombre de boîtes* ;
- 100 crayons *parce que nous les avons dessinés et comptés* (mais aucun dessin ne figure sur la feuille) ;

[15] Cela revient à dire que S est un multiple de 3.

[16] Cf. « Actes de Trente 2005 », p. 224-234.

[17] On constate en général qu'après avoir donné une réponse (souvent erronée), les élèves ne reviennent pas en arrière pour procéder à une « vérification » que – nous en sommes persuadés – ils auraient capables de mener correctement.

- 66 crayons (2 007 : 30 = 66), une réponse accompagnée du raisonnement suivant : *on a additionné les trois 10 signalés dans l'énoncé et ensuite on a fait la division* ;
- 200700 crayons, avec l'explication suivante : *on a fait 10 × 10 = 100 et puis 2007 × 100 = 200700 car le nombre de logos est 2007 et le nombre de crayons s'élève à 100.*

Encore une fois : les données numériques doivent être utilisées et combinées… comment ? Qu'importe !

L'analyse des copies nous a permis de dégager les réponses les plus récurrentes accompagnées de la justification des élèves :

10 = logos pour les boîtes ; 10 = logos pour les paquets ; 1 logo pour le carton ; 10 + 10 + 1 = 21 logos qui ne sont pas utilisés pour les crayons.
2007 – 21 = 1 986 crayons en tout ;

1987 : *10 + 10 = 20 et 2007 – 20 = 1987 ;*

1996 : *2007 – 11 = 1996* ;

1886 : *2007 – 121 = 1886* ;

1888 : *1111 +111 × 7 =1888 ;*

1998 : *2007 – 111=1998.*

Dans de nombreuses copies (environ 30%), on recourt au dessin qui, certes, aide les élèves à s'identifier à l'employé et à faire toutes les opérations effectuées par ce dernier, même si cette « théâtralisation » leur fait parfois perdre de vue l'objectif du problème ; en outre, les élèves s'arrêtent dès qu'ils ont trouvé le nombre de crayons contenus dans un carton. On a ainsi des réponses comme :

1000 crayons ou alors *dans un cartons il y a 1111 crayons*.

Parfois, peut-être parce qu'ils ont déjà résolu des problèmes de ce genre, les élèves répondent mécaniquement, confondant les éléments connus (le nombre de logos) et les données inconnues (le nombre de crayons). À ce titre, voici le « décompte », tout à fait révélateur, qu'on peut lire sur une copie :

(2007 + 200 + 20) = 2227.

Ce raisonnement aurait été **« presque correct »** (il manque + 2) si l'on avait demandé : *Combien de logos, si les crayons sont au nombre de 2007 ?* Mais dans l'énoncé du problème, l'on demandait au contraire *Combien de crayons […] ?*[18]

Si, d'une part, l'analyse des copies a mis en évidence les nombreuses difficultés sur lesquelles il convient de réfléchir ; on peut d'autre part affirmer que, notamment dans les catégories les plus basses, l'habitude des élèves de traduire le problème par un dessin, leur permet de se l'approprier et de le résoudre. Le dessin est, une fois encore, le tremplin permettant d'entrer dans la situation et de l'affronter ; et c'est aussi le dessin qui, bien souvent, démontre et donne la mesure de l'implication des élèves dans la recherche de la solution[19]. Dès lors, nous pouvons citer Freudenthal qui « *compare le travail de celui qui apprend les mathématiques à celui de quelqu'un qui fait de la recherche, car les mathématiques se résument, de par leur nature, à une activité exercée à la première personne du singulier* »[20].

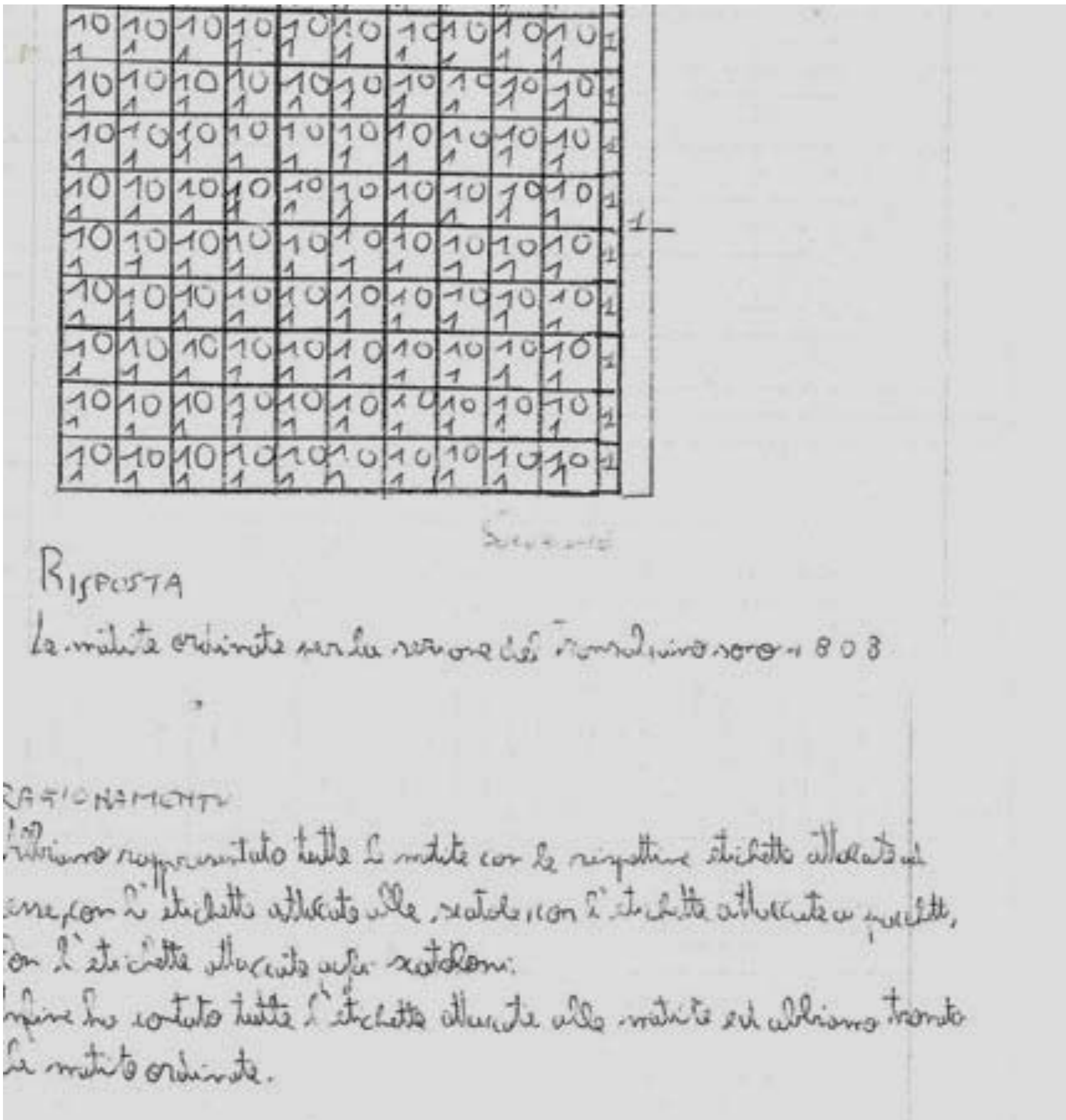
La copie ici reproduite présente une procédure correcte et particulièrement intéressante, car les élèves, de catégorie 5 parviennent à représenter clairement, en deux dimensions, une situation tridimensionnelle. L'explication se résume uniquement à la description de la procédure ; mais après tout, n'est-ce pas le dessin qui leur permet de trouver la solution ? La visualisation du premier carton permet en effet d'effectuer le décompte des logos, ceci en imaginant un second carton et en s'arrêtant quand on arrive au 2007ème logo pour compter, par la suite, le nombre de crayons.

---

[18] Il s'agit de la procédure utilisée dans le problème *Etiquettes*, cf. « Actes de Parme » 2006, p. 124-125.

[19] Cf. Crociani, Doretti, Salomone, 2004.

[20] Cf. Freudenthal, 1994.



*Nous avons représenté tous les crayons avec leurs étiquettes respectives collées dessus, avec les étiquettes collées sur les boîtes, avec les étiquettes collées sur les paquets, avec les étiquettes collées sur les cartons. Enfin, j'ai compté toutes les étiquettes collées sur les crayons et on a trouvé le nombre de crayons qui ont été commandé*s.

Sur la base de ces résultats, l'on a formulé **l'hypothèse de travail** suivante, dont l'objectif est de :

- faciliter la compréhension du texte et la gestion des variables numériques ;
- d'enquêter sur le niveau de compétence quant à l'écriture positionnelle.

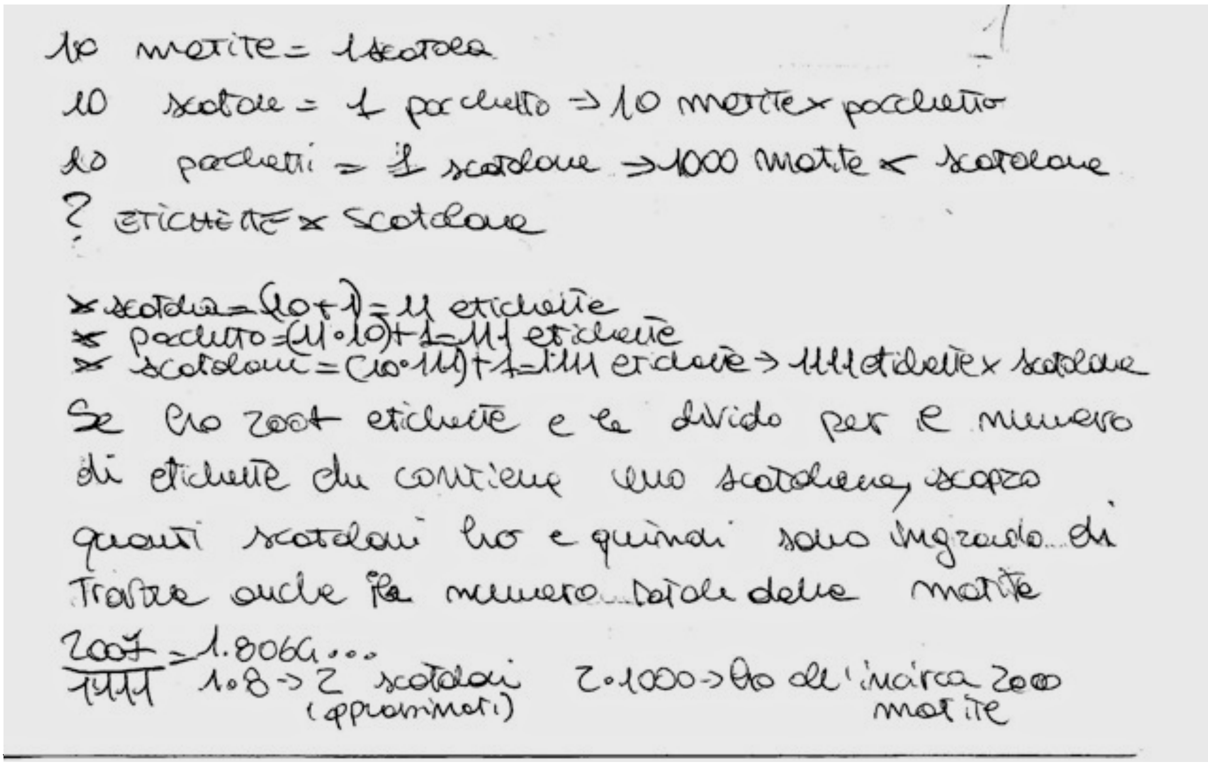
L'expérience a débouché sur deux propositions :

a) résolution du problème original, destiné aux catégories 7 et 8 en lieu et place des catégories 5 et 6, puisque qu'au niveau où il a été proposé, l'échec a été flagrant ;
b) modification des variables numériques et résolution d'un nouveau problème « **Les crayons du RMT** » par des élèves des catégories 5 et 6.

2.2.1 Résultats de l'expérience

Pour ce qui est du point **a)**, les résultats obtenus dans les catégories 7 et 8 ne s'éloignent guère de ceux des catégories inférieures. La chose n'est pas surprenante car pour déjouer les erreurs et les obstacles relevés, une maturité simplement due au fait que les élèves ont grandi en âge ne saurait suffire ; ces erreurs et ces obstacles doivent en effet être dépassés en vertu de l'approfondissement de concepts précis, à travers des explications et des expériences nouvelles. Hélas, bien souvent, on revient rarement, au collège, sur les notions fondamentales introduites dans le primaire[21], car on les donne pour acquises, ce qui n'est pas vrai pour tous les élèves. La récursivité d'expériences différentes, sur un même contenu et à des âges différents, habitue les élèves à revoir leurs connaissances, à les repenser et à les reconfigurer mentalement à la lumière de nouveaux *inputs* ; ceci leur offre l'opportunité de se confronter de nouveau à eux-mêmes, de réélaborer et de partager leurs connaissances avec autrui dans vertueux un « crescendo » d'apprentissage[22].

L'exemple suivant montre que les élèves n'ont guère l'habitude de procéder par approximations sensées :


10 matite = 1 scatola
10 scatole = 1 pacchetto → 100 matite × pacchetto
10 pacchetti = 1 scatolone → 1000 matite × scatolone
? etichette × scatolone

× scatola = (10+1) = 11 etichette
× pacchetto = (11·10)+1 = 111 etichette
× scatolone = (10·111)+1 = 1111 etichette → 1111 etichette × scatolone
Se ho 2007 etichette e le divido per il numero di etichette che contiene uno scatolone, scopro quanti scatoloni ho e quindi sono in grado di trovare anche il numero totale delle matite
$\frac{2007}{1111} = 1.8064...$
1.8 → 2 scatoloni (approssimati) 2·1000 → ho all'incirca 2000 matite

… Si j'ai 2 007 étiquettes et que je les divise par le nombre d'étiquettes (logos) que contient un carton, je trouve combien j'ai de cartons et je suis donc aussi en mesure de trouver le nombre de boîtes de crayons

$\frac{2007}{1111} = 1{,}8064$ ... *1,8→* $\underset{(approssimati)}{2\ scatoloni}$ *2·1000→ j'ai environ 2000 crayons*.

Souvent, les élèves arrivent à comprendre que pour une boîte, il faut 111 étiquettes (logos) et qu'il en faut 1111 pour un carton. Par reconstruction, ils réussissent à trouver ces données, mais ne savent pas comment gérer le problème outre cette étape car, à partir de ce moment, l'on perd la mécanicité de l'algorithme.

Nous avons aussi mis en évidence des erreurs de calcul révélatrices de lacunes notionnelles sur la propriété associative ou, plus généralement, sur l'emploi des parenthèses (souvent mises, ou omises, complètement au hasard, même par les étudiants inscrits en faculté scientifique). À ce propos, on se contentera de mentionner l'exemple suivant :

1 boîte = 10 crayons + 1 étiquette = 11 étiquettes

1 paquet = 11 × 10 + 1 = 111 étiquettes

1 carton = 111 × 10 + 1= 1111 étiquettes

2007 = 1 carton 8 paquets 8 crayons

1111 + 888 + 8

Si les élèves en avaient tiré de bonnes conclusions, le raisonnement aurait été parfait et ils auraient immédiatement trouvé la réponse ; mais ils poursuivent en faisant des erreurs dans la gestion du calcul.

Les crayons sont au nombre de *2007 – 111 – 80 = 1816* car ils soustraient, **disent-ils**, les étiquettes (logos) qui **n'étaient pas sur les crayons.**

Essayons de reconstruire leur raisonnement :

---

[21] Notre « petite expérience » avec le groupe de travail « Numération » en est la preuve : les membres du groupe, sont tous, à quelques exceptions près, des professeurs des écoles !

[22] Cf. Radford L., 2006 ; et Rizzo A., 2000.

111 (= 1111 – 1000) le nombre d'étiquettes (logos) dans un carton, qui ne figurent pas sur les crayons ;
80 le nombre d'étiquettes (logos) dans 8 paquets, lesquels contiennent 800 crayons, moins les 8 crayons isolés.
Ils commettent ainsi l'erreur d'appliquer la propriété associative à la soustraction :
2007 – 111 – (88 – 8) au lieu de ((2007 – 111) – 88) – 8
« 2007 – 111 – 80 », peut éventuellement être considéré comme un abus d'écriture, sans doute dû à l'utilisation de la calculette.

Dans le raisonnement, on lit :

Nous avons soustrait toutes les étiquettes (logos) *des boîtes et des paquets pour trouver le nombre de crayons.*

Cette tournure linguistique rappelle un peu le vieux dicton italien : « *additionner les chèvres et les choux* »[23] *!*

Pour ce qui concerne la plateforme de travail **b),** nous rapportons ci-après l'énoncé du problème modifié, destiné aux élèves des catégories 5-6, et accompagné d'observations extrapolées de notre expérience.

LES CRAYONS DU RMT (Cat. 5, 6)
Cette année, les organisateurs ont décidé d'offrir un crayon à tous les participants du RMT.
À la fabrique de crayons, un employé est chargé de mettre le logo « RMT » sur chaque crayon.
Avec 10 crayons, il remplit des boîtes sur lesquelles il met aussi le logo « RMT ».
Lorsqu'il a rempli dix boîtes, il en fait un paquet, sur lequel il marque de nouveau le logo « RMT ».
Finalement, avec 10 paquets, il remplit un carton sur lequel il marque encore le logo « RMT ».
Aujourd'hui, l'employé a préparé les crayons commandés par la section de Transalpie. Il a compté que, pour cette section, il a dû mettre 759 logos « RMT ».
Combien de crayons la section de Transalpie a-t-elle commandés ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Cette nouvelle mouture veut encourager les élèves à se demander « que faire ? », plutôt que de se lancer à la recherche de l'application d'une procédure connue ; une activité fondamentale pour l'apprentissage si l'on en croit le « contrat didactique » contenu dans la « Théorie des situations didactiques » de Guy Brousseau[24].

Il ressort de la discussion menée en classe suite à la résolution du problème, qu'une bonne part des élèves ne parvient pas à suivre un raisonnement autre que celui du regroupement : les élèves arrivent tout au plus à trouver 111 étiquettes par paquet, mais ignorent comment continuer. C'est un peu comme quand on aborde les groupements en base autre que 10. Tant qu'il s'agit de regrouper des éléments et de prendre acte du nombre de groupes, en écrivant les chiffres dans la position qu'il faut, tout va bien ; lorsqu'au contraire, on propose un nombre exprimé dans une base quelconque devant être converti en base 10, les difficultés commencent.
De plus, l'information :

> « *Finalement, avec 10 paquets, il remplit un carton sur lequel il marque encore le logo « RMT »*

qui devait simplement expliquer une procédure susceptible d'être généralisée, **a troublé** les élèves (car avec 759 crayons, on n'arrive pas à remplir un carton). Dans de nombreux cas, cette indication a débouché sur un véritable blocage, car les élèves ne savaient que faire de cette donnée « inutile ».

Quelles réflexions pouvons-nous tirer de ces observations **?**

Le nouveau problème devait être une version où, par rapport à l'original, on facilitait la gestion des variables numériques, ceci pour pousser les élèves à travailler délibérément avec la structure positionnelle sous-jacente. Il n'en fut cependant pas ainsi. Comme nous l'avons déjà dit, le fait qu'il n'y ait pas suffisamment de crayons pour remplir un carton, ne les a pas aidés à comprendre la structure positionnelle, et les élèves ont interprété la chose comme un « piège » dont, en tant que tel, il ne fallait pas en tenir compte. De plus, nous avons eu la confirmation que les élèves n'étaient pas habitués à travailler par approximations (sensées) successives, en vérifiant à chaque fois la différence ; même quand – et c'est ici le cas – la vérification aurait été à leur portée et leur aurait permis d'écarter les résultats erronés.
Encore une fois, nous devons en conclure que la structure positionnelle n'est pas acquise ; elle n'est connue qu'en tant que procédure de référence, mais on ne sait pas l'utiliser dans le cadre d'applications moins standardisées. D'autre part, les élèves ne la discernent pas toujours dans les algorithmes d'opération.

3. Quelques conclusions

Notre recherche sur les erreurs dans la résolution des problèmes examinés, a permis de souligner que :

- il n'était pas toujours facile d'en établir la cause, et donc de les assimiler à une typologie ;

[23] « *Ménager la chèvre et le chou* » se dit en italien « *Additionner les chèvres et des choux* ». (N.d.T)
[24] Cf. D'Amore B., 2007.

- les erreurs de contenu mathématique pouvaient résulter de l'incompréhension du contenu en soi ; mais aussi de l'accent mis sur les procédures standard ou sur les mots-clés (les méprises deviennent alors des erreurs de méthode) ;
- la méthode de travail et l'approche du problème influencent considérablement le résultat ;
- les lacunes ou les explications approximatives permettent d'« interpréter » en profondeur les réponses données par les élèves.

La réponse, que celle-ci soit juste ou erronée, résulte d'un système complexe pouvant devenir plus lisible uniquement s'il nous est donné d'enquêter directement, et contextuellement, à son propos ; ceci à travers la collecte d'une pléiade d'éléments, extrapolés de l'oralité, de l'observation des comportements, etc.

L'expérience que nous avons menée a servi non seulement à cerner certaines difficultés ; mais aussi à inviter les élèves à travailler sur toute une palette de propositions, comme la modification des variables ; la réflexion sur les résultats obtenus ; l'idée selon laquelle les variables numériques doivent répondre à certaines consignes inhérentes à la nature même du problème, etc.…

Ces activités – de même que le débat préconisé en classe dans un second temps – permettent au professeur de connaître l'état des connaissances de chacun de ses élèves ; d'en savoir davantage sur leur manière d'apprendre (résultant pour sûr d'expériences personnelles précédentes). Elles offrent également aux élèves l'occasion de « construire » par eux-mêmes leur propre savoir, à travers le partage et la mise en commun de nouveaux contenus – ce qui pourrait par ailleurs contribuer au dépassement progressif du *conflit cognitif.*[25] Ce conflit peut en effet constituer un obstacle qui se dresse devant l'élève, lorsque la répétition d'exercices du même genre favorise la formation d'une image de la notion qui, par la suite, et face à de nouvelles propositions, ne s'avère plus adaptée. L'effort visant au dépassement du *conflit cognitif* est, en tout état de cause, un passage-clé pour un « véritable » apprentissage, bien que celui-ci doive être saisi sous le prisme de multiples facteurs – certains de type objectif, comme l'âge des élèves ; d'autres plus subjectifs, comme la personnalité de chacun d'entre eux.

En ce sens, le RMT est, répétons-le, un remarquable outil de travail pour les enseignants, car il permet de travailler en classe – et à différents niveaux – sur la lecture critique des énoncés ; sur les données numériques ; sur les définitions ; sur les stratégies à utiliser ; sur la cohérence du raisonnement suivi etc. Ce *tout* crée les conditions d'un apprentissage « en spirale » qui permet aux élèves (toujours protagonistes de l'aventure consistant à *parler – raconter – expliquer – argumenter*) d'ajouter tour à tour une corde à leur arc dans leur cheminement vers la formation des concepts.

Ce travail, effectué avec des classes ne participant pas au concours, nous a permis de réaffirmer combien il était important et formateur de demander aux élèves, dès le primaire, de fournir l'explication de la procédure suivie pour la résolution d'un problème : il s'agit en effet d'un premier pas vers une assimilation raisonnée du concept de démonstration, puisque nous avons pu constater en ce sens des lacunes chez certains étudiants.

En outre, le fait qu'à un niveau d'apprentissage élevé, la maîtrise de la structure positionnelle n'est pas complète ; le fait qu'on n'a guère l'habitude de procéder à la vérification du résultat obtenu ; et que l'utilisation du langage technique est souvent formelle : tout cela semble indiquer qu'il s'agit d'une notion et de compétences fondamentales sur lesquelles on doit se pencher même dans le supérieur, car certains échecs des étudiants sont imputables à leur méconnaissance.

… la conquête du nombre commence très tôt … mais Dieu seul sait quand elle se terminera !

BIBLIOGRAPHIE

Bagni G. 2007, « *L'intercultura nei Programmi della Matematica* » in *STRUMENTI CRES*, 2007, 47, p. 20–22, http://www.syllogismos.it/education/Intercultura-CRES.pdf et aussi http://www.syllogismos.it/2009-VE-testo.pdf

Crociani C., Doretti L., Salomone L. 2004, *Strategie risolutive e registri di rappresentazione in problemi del Rally* in *RMT e Valutazione*, « Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique Transalpin », Mondorf-les-Bains (Luxembourg), 2004, ARMT, p. 70-79.

Crociani C., Spatoloni R. (au nom du groupe « Numération » de l'ARMT), 2006, *Ancora problemi sul concetto di cifra-numero-posizionalità*, in *I problemi come supporto per l'apprendimento: il ruolo del RMT*, « Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin », Parme, 2006, ARMT et Département de Mathématique de l'université de Parme, p.117-132.

Crociani C., Spatoloni R. (au nom du groupe « Numération » de l'ARMT), 2005, *I problemi del rally come supporto didattico per l'avvio alla costruzione e al successivo consolidamento del concetto di cifra, numero e notazione posizionale*, in *RMT: dai problemi alla didattica quotidiana*, « Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin », Bourg-en-Bresse, 2004 – Arco di Trento, 2005, ARMT, IPRASE Trentin, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en –Bresse, p. 224-234.

[25] Cf. D'Amore 2002.

D'Amore B. 2007, *La didattica della matematica, oggi*. In : Marazzani I. (éd.), 2007. *La matematica e la sua didattica*. « Atti del I Convegno Nazionale », Giulianova (Terramo), 4-5-6 mai 2007, p. 18-24, Bologne, Pitagora.

D'Amore B. 2002, *La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica*. Scuola & Città. 4, p. 56-82.

Ferrari M. 2012, *Aritmetica e algebra nella scuola secondaria di primo grado, una proposta divisa per anni. Terza media: tiriamo le somme, usiamo i simboli e apriamo finestre*, in « L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate », centro ricerche didattiche Morin, Ed. G. Battagin (TV), vol. 35, n° 1, janvier 2012.

Freudenthal H., 1991, *Revisiting mathematics education: China lectures*, Kluwer Academic Publication, Dordrecht, Netherlands.

Grugnetti L., Rogers L. 2000, *Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues*, in Fauvel, J., van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, p. 39-62, Dordrecht, Kluwer.

Longo A. Paola, 2008, *La scuola dell'infanzia, le Indicazioni nazionali, la matematica*, in http://www.comune.torino.it/centromultimediale/bambini_pensati/news_pdf/bpnw0802.pdfprotocolli.

Longo A. Paola, 2008, *La scrittura posizionale dei numeri* in Emmeciquadro n° 32, 19 avril 2008, Euresis, Milan.

Radford L., 2006, *Tre tradizioni semiotiche: Saussure, Peirce e Vygotskij* [*Three Semiotic Traditions: Saussure, Peirce and Vygotsky*]. Collection 29, 34-39, « Istituto Pedagogico Provinciale di Ricerca Sperimentazione e Aggiornamento Educativi del Gruppo linguistico Italiano della Provincia Autonoma » de Bolzano.

Rizzo A., 2000, *La natura degli artefatti e la loro progettazione*, in <<Sistemi Intelligenti>> XIIème année n° 3.

Sfard A., 2009, *Psicologia del pensiero matematico*, Trento Edizioni Erickson.

Recommandation du Parlement Européen et du Conseil du 18 décembre 2006, relative aux compétences-clés en vue de la formation permanente, in *Journal officiel de l'Union européenne* du 30.12.2006, L. 394/10-18.

« Objectifs pour le développement des compétences à la fin de l'école primaire » et « Objectifs pour le développement des compétences à la fin du collège », in *Indicazioni Nazionali per il curricolo delle scuole dell'infanzia e del primo ciclo*, Décret ministériel du 31 juillet 2007, *in* http://archivio.pubblica.istruzione.it/normativa/2007/allegati/dir_310707.pdf

ANNEXE

À l'intention des enseignants

Faire travailler les élèves deux par deux.

Pour ce qui est des différentes questions, nous donnons des réponses pouvant être utiles lorsque le professeur débat en classe, avec ses élèves, de leur travail :

Avec la somme **15,** on obtient les nombres **232** et **233** ou **322** et **323**
Avec la somme **37,** on obtient les nombres **666** et **667**.

Ne pas se convaincre d'abord par des exemples, et ensuite réfléchir sur le fait qu'on ne peut jamais obtenir une somme paire parce que les deux nombres de trois chiffres, devant être consécutifs, sont l'un pair et l'autre impair, donc la somme des chiffres qui figurent dans leur écriture est l'une paire et l'autre impaire et, par conséquent, la somme de l'ensemble des six chiffres est impaire.

Les nombres possibles comme somme des six chiffres, de manière à respecter toutes les autres consignes, sont les nombres impairs de 5 à 53 car :

- ayant à leur disposition six chiffres, dont seuls deux sont différents l'un de l'autre et consécutifs, la somme minimum possible est 5 (un 0 et tous les autres 1) (110-111) ; (la paire 000-001, qui a pour somme 1 et les paires 010-101 et 100-101, qui ont pour somme 3, ne peuvent être acceptées car elles ne respectent pas la première consigne) ;
- ayant à leur disposition six chiffres, dont seul deux sont différents l'un de l'autre et consécutifs, la somme maximum possible est 53 (un 8 et tous les autres 9) (998-999)

En général, il y a une ou deux solutions. Pour le démontrer, l'on peut procéder de la sorte :

- diviser par 6 la somme des chiffres qui composent les deux nombres et discuter sur le reste de cette division, pour trouver la valeur effective que chacun des chiffres doit avoir.
- le reste de cette division (toujours différent de zéro) peut être 1-3-5 (car la somme des chiffres est toujours impaire) et le nombre de solution dépend de la valeur du reste en question.
- avec reste 1 ou 5, on a une seule solution (reste 1, on obtient deux nombres formés par les cinq chiffres les plus bas et par un chiffre plus élevé ; avec reste 5, c'est le contraire) ;
- avec reste 3, on a généralement deux solutions car les chiffres figurent exactement trois fois chacun.

Autres stratégies pour résoudre le problème et discuter des solutions, quelle que soit la somme des chiffres des deux nombres :

- diviser par 3 la somme des chiffres qui composent les deux nombres. On trouve ainsi la valeur moyenne de la somme de deux chiffres quelconques revenant dans l'écriture du nombre ;
- quand la somme est un multiple de 3, et comme les chiffres doivent être au nombre de deux, différents et consécutifs, la valeur moyenne donne justement la somme des deux chiffres différents ;
- dans le cas où la somme n'est pas un multiple de 3, la valeur moyenne de la somme donne une indication sur les deux chiffres différents (exemple : somme = 37, on a : 37 / 3 = 12 reste 1, et l'on devra donc chercher deux nombres consécutifs dont la somme des chiffres considérés deux par deux, est comprise entre 12 et 13 ; les chiffres seront donc 6 et 7 et les deux nombres recherchés seront donc 666 et 667) ;
- procéder algébriquement en considérant que les chiffres sont au nombre de deux, x et y, et qu'étant consécutifs on peut par exemple poser : $y = x + 1$. Le schéma de la solution est donc le suivant :
  xyx xyy $\rightarrow$ x (x+1) x x(x+1) (x+1) $\rightarrow$ $6x + 3 = S$ (somme des chiffres) $\rightarrow$ $x = (S - 3)/6$ et ce sont donc tous les nombres qui diffèrent de 3 et des multiples de 6 ;

  ou :
  xxx xxy $\rightarrow$ xxx xx(x+1) $\rightarrow$ $6x + 1 = S$ $\rightarrow$ $x = (S-1)/6$ (dans la division de S par 6, reste 1) ;
  ou :
  yyx yyy $\rightarrow$ (x+1) (x+1) x (x+1) (x+1) (x+1) $\rightarrow$ $6x + 5 = S$ $\rightarrow$ $(S - 5)/6$ (dans la division de S par 6 le reste est 5).

Comme les nombres doivent être consécutifs, la somme S doit être impaire, et les chiffres qui reviennent ne peuvent qu'être qu'impairs : 1-5 (un chiffre une fois, et son consécutif 5 fois), 5-1 (un chiffre cinq fois et son consécutif une fois) ou 3-3 (un chiffre et son consécutif, chacun trois fois).

EQUAZIONE COME STRUMENTO E COME OGGETTO:

ANALISI DI DIFFICOLTÀ ED ERRORI

Maria Felicia Andriani, Lucia Doretti, Daniela Medici, M. Gabriella Rinaldi, Lucia Salomone

per il Gruppo Equazioni[1]

1. Introduzione

Nell'insegnamento, l'algebra è di solito presentata come generalizzazione dell'aritmetica della quale utilizza simboli - quelli delle operazioni ed il segno di uguale - e proprietà, *"tuttavia mentre in aritmetica si privilegiano gli algoritmi di calcolo e le stesse espressioni aritmetiche sono concepite come sequenza di operazioni da eseguire per ottenere un certo risultato, in algebra invece prevale lo studio delle rappresentazioni simboliche (espressioni, equazioni, funzioni) come oggetto matematico"* (Malara, 1997). Questo passaggio dall'aritmetica all'algebra pone di fronte ad un cambiamento di prospettiva, che sottintende il passaggio da un tipo di approccio che è prevalentemente procedurale (o operazionale) ad un approccio di tipo strutturale che studia certi oggetti e stabilisce relazioni tra essi. Secondo A. Sfard (1991), la dualità procedurale/strutturale caratterizza lo sviluppo storico dell'intera matematica ed è insita in ogni suo concetto[2].
Per il concetto di equazione, prevale l'aspetto procedurale quando l'equazione è vista come *strumento*, cioè procedimento di codifica delle relazioni espresse da un problema, prevale l'aspetto strutturale, quando l'equazione è vista come *oggetto di studio in sé*, quindi meritevole di attenzione teorica[3]. Nel processo di costruzione di tale concetto appare quindi fondamentale tenere conto dei due aspetti e favorirne il legame.
Nell'attività didattica, si tiene sufficientemente conto di questa duplicità insita nel concetto di equazione?
In realtà è più frequente constatare uno scollamento tra i due aspetti dimostrato dal fatto che gli allievi, nell'uso delle equazioni, spesso perdono di vista il significato delle scritture simboliche, delle procedure che applicano e del concetto stesso di soluzione.
Il Gruppo Equazioni, nel suo lavoro di ricerca e sperimentazione condotto fin dal 2005 (Doretti, Salomone, 2006; Medici, Rinaldi, 2006; Doretti *et al.*, 2007, 2008, 2009), è stato guidato dalla convinzione che gli allievi possano essere aiutati "a dare senso" al concetto di equazione e ad appropriarsene in modo sempre più consapevole se, fin dall'inizio, ne sperimentano ed apprezzano direttamente la validità *come strumento* per rappresentare e risolvere problemi. In particolare, lavorare su problemi che ammettono strategia di tipo algebrico, prima ancora dell'introduzione formale delle equazioni, può preparare la strada perché sia poi giustificata agli occhi degli allievi la necessità di studiare le equazioni *come oggetto matematico*.
Questo modo di procedere, non solo ricalca quanto è avvenuto storicamente, ma è anche in sintonia con le attuali *Indicazioni curricolari* per la scuola italiana nei quali si rinvia lo studio dell'algebra al Secondo ciclo di studi[4], mentre per il Primo ciclo[5] si cita solo la risoluzione delle equazioni di primo grado come strumento per risolvere problemi (*"Esplorare e risolvere problemi utilizzando equazioni di I grado"*), senza alcun riferimento al calcolo algebrico.

2. Scelta ragionata dei problemi per l'incontro di Nivelles

Per il 13° Incontro internazionale sul Rally Matematico Transalpino di Nivelles, *"Rally Matematico Transalpino, uno sguardo costruttivo sugli errori"*, si è presentata la necessità di selezionare alcuni problemi del RMT che, alla luce di quanto accaduto durante la gara, sembravano significativi per motivare l'utilizzo delle equazioni, ed anche per individuare ostacoli ed errori in quest'ambito.

---

[1] Laura BORTOLAN ; Antonella CASTELLINI ; Rosanna DILIDDO; Elisabetta GORI; Monalda PACIOTTI; Giuseppina RIGHI; Maria Federica RINALDI; Giovanna Maria RINALDI; Lonia SANTONICCOLO; René SCREVE; Anna URBANI.

[2] Ogni oggetto matematico, secondo A. Sfard, riassume in sé i due aspetti complementari, procedurale e strutturale, come due facce di una stessa moneta: nel primo prevale il punto di vista *operazionale* che è dinamico e sequenziale, nel secondo l'oggetto è visto come entità statica e si considera da un punto di vista *strutturale*.

[3] Anche storicamente le equazioni, usate all'inizio come strumento procedurale per risolvere problemi (presso i Sumeri e gli Egizi), diventano esse stesse oggetto di studio, quindi "teoria", solo nel Rinascimento (con Cardano, Tartaglia, Dal Ferro, Ferrari, Bombelli e Cartesio).

[4] Scuola secondaria di secondo grado (fascia di età 15-19 anni)

[5] Scuola secondaria di primo grado (fascia di età 12-14 anni)

Volevamo prendere in considerazione problemi che, più in generale, fossero adatti a fornire risposte alle seguenti domande:

- *quando il concetto di equazione comincia ad evidenziarsi, anche "in nuce", prima della sua istituzionalizzazione?*
- *come cambia (se cambia) il rapporto con le equazioni dopo che gli allievi le hanno incontrate e studiate nel loro percorso scolastico?*
- *quali errori emergono dall'esame dei protocolli nella messa in formula, nella successiva gestione sintattica del calcolo e nel controllo semantico dei risultati via via ottenuti?*

Sono stati così scelti i seguenti problemi, proposti nella gara da categoria 6 o 7 a categoria 10:

1.

UN MAZZO DI FIORI (Cat. 7, 8, 9, 10) (17°, I, 15)
Sandra è rappresentante di classe.
Gli studenti apprezzano molto la loro professoressa di matematica e decidono di regalarle un mazzo di fiori per le feste di Natale.
Ogni allievo ha versato tante volte 2 centesimi di euro quanti sono gli allievi della classe.
Sandra ha raccolto le quote e conta la cifra ottenuta. Senza considerare la sua quota, ha 22 euro e 44 centesimi.

Quanti allievi ci sono nella classe? Spiegate come avete trovato la risposta.

2.

L'ARTIGIANO (Cat. 7, 8, 9, 10) - 17° RMT II ,18
Un artigiano fabbrica oggetti di ceramica nel suo laboratorio. Oggi ha preparato 13 vasi che vuol vendere a 24 euro l'uno. Sfortunatamente, però, alcuni di essi si rovinano durante la cottura. L'artigiano decide allora di vendere quelli rimasti aumentando il prezzo di ciascun vaso di tante volte 3 euro quanto è il numero dei vasi rovinati.
Così facendo, la vendita dei vasi rimasti gli procurerà lo stesso importo che avrebbe ottenuto vendendo i 13 vasi previsti a 24 euro.
Quanti sono i vasi rovinati? Spiegate come li avete trovati.

3.

LA PREDIZIONE (Cat**. 7, 8, 9, 10) (14°, I, 14)**
Marco propone questo gioco al suo amico Luca:
- pensa un numero intero qualsiasi,
- aggiungi il numero immediatamente successivo,
- aumenta di 9 la somma precedente,
- dividi il risultato ottenuto per 2,
- sottrai il numero che hai pensato all'inizio.

Il risultato è 5, vero?
Luca è stupefatto, ma non è magia: si tratta solo di matematica.

Perché si ottiene sempre lo stesso risultato da qualunque numero parta il gioco? Spiegate il vostro ragionamento.

4.

COMPOSIZIONI DI ROSE (Cat. 6, 7, 8, 9, 10) (16°, F, 13)

La signora Flora, proprietaria di un famoso negozio di fiori, ha preparato per un cliente due bellissime composizioni di rose.
Nella prima composizione, fatta di rose bianche, rose rosse e rose gialle, ha usato 235 rose.
Nella seconda composizione, fatta solo di rose rosse e di rose bianche, ha usato 263 rose.
La signora Flora osserva che:

- il numero di rose bianche è lo stesso in entrambe le composizioni;
- nella prima composizione il numero delle rose gialle è un terzo di quello delle rose rosse;
- nella seconda composizione il numero delle rose rosse è il doppio del numero delle rose rosse della prima composizione.

Secondo voi quante sono le rose di ogni colore presenti in ciascuna composizione?

Spiegate come avete fatto a dare le vostre risposte.

Poiché si tratta di problemi risolubili sia con strategie aritmetiche che con strategie algebriche, sono interessanti per evidenziare la presenza di approcci di tipo prealgebrico[6] o per mostrare l'evoluzione del "pensiero algebrico" e, al contempo, per controllare il rapporto che gli allievi di categoria 9 e 10 hanno maturato con i concetti di equazione e sistema lineare. In relazione all'ambito algebrico, i problemi 1 e 2 sono entrambi formalizzabili con un'equazione di secondo grado di cui una sola delle due soluzioni è accettabile (si presenta la necessità del *controllo del risultato* ottenuto). Il problema 3 permette di indagare sullo strumento "calcolo letterale" per generalizzare una situazione. Infatti è sufficiente "mettere in formula" con una espressione polinomiale per

[6] Ad esempio: presenza di simboli o lettere per rappresentare dati incogniti; uso di tabelle o di scritture che, pur rimanendo in ambito aritmetico, permettono di esprimere in forma generale le relazioni tra i dati (scritture di tipo funzionale); traduzione delle relazioni tra i dati in forma di pseudo-equazione, …

giustificare l'asserto, ma è possibile anche tradurre algebricamente la situazione mediante un'equazione lineare, che deve essere riconosciuta come identità. Nelle categorie più basse (7-8) si può supporre il ricorso a vere e proprie dimostrazioni attraverso "l'algebra retorica" o anche la possibilità che possa essere evidenziata l'idea di funzione, come concetto in atto, attraverso la considerazione di numerosi esempi, al variare del numero scelto. Il problema 4 è formalizzabile con un sistema e prevede anche la possibilità di rappresentare graficamente le relazioni tra i dati[7].

3. Dall'analisi a posteriori dei problemi alla programmazione di ulteriori attività

Sono stati esaminati gli elaborati delle sezioni di Aosta, Cagliari, Canton Ticino, Parma, Puglia e Siena ed è stata fatta un'analisi qualitativa basata sul tipo di procedura risolutiva, piuttosto che sulla correttezza del risultato (cfr. Tabella 1).

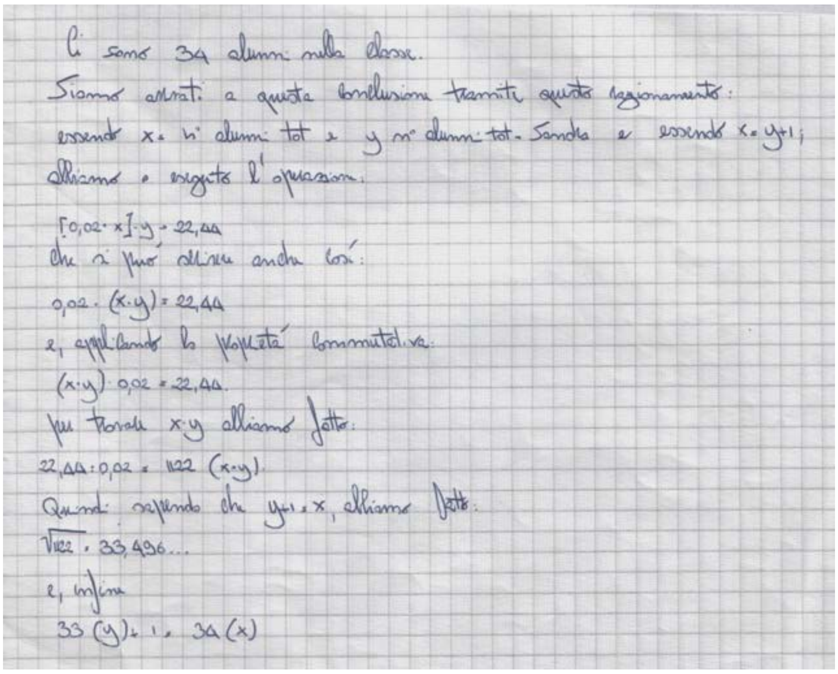
Tabella 1

UN MAZZO DI FIORI		**Cat.7** **209 classi**	**Cat.8** **130 classi**	**Cat.9** **119 classi**	**Cat.10** **86 classi**
Elaborati in bianco		*20%*	*14%*	*18%*	*16%*
Incomprensione		*49%*	*30%*	*24%*	*3%*
Strategia aritmetica		***29%***	***39%***	***32%***	***43%***
Procedimenti con aspetti prealgebrici		*1%*	*7%*	*11%*	*2%*
Strategia algebrica		***2%***	***10%***	***14%***	***35%***
L'ARTIGIANO			**Cat.8** **129 classi**	**Cat.9** **118 classi**	**Cat.10** **86 classi**
Elaborati in bianco			*5%*	*13%*	*14%*
Incomprensione			*16%*	*11%*	*3%*
Strategia aritmetica			***60%***	***58%***	***50%***
Procedimenti con aspetti prealgebrici			*7%*	*3%*	*2%*
Strategia algebrica			***12%***	***15%***	***30%***
LA PREDIZIONE		**Cat.7** **108 classi**	**Cat.8** **80 classi**	**Cat.9** **87 classi**	**Cat.10** **27 classi**
Elaborati in bianco		*6%*	*10%*	*6%*	*0%*
Incomprensione		*14%*	*9%*	*10%*	*7%*
Verifica su uno o più esempi numerici		*58%*	*33%*	*26%*	*11%*
Spiegazione verbale, senza ricorso al linguaggio algebrico		***12%***	***20%***	***11%***	***4%***
Spiegazione con ricorso ad un'espressione letterale o ad un'equazione		***9%***	***29%***	***46%***	***78%***
COMPOSIZIONI DI ROSE	**Cat.6** **13 classi**	**Cat.7** **12 classi**	**Cat.8** **14 classi**	**Cat.9** **16 classi**	**Cat.10** **15 classi**
Elaborati in bianco	*15%*	*17%*	*7%*	*13%*	*7%*
Incomprensione	*31%*	*0%*	*7%*	*6%*	*7%*
Strategia aritmetica	***46%***	***75%***	***36%***	***13%***	***7%***
Procedimenti con aspetti prealgebrici	*8%*	*8%*	*36%*	*0%*	*7%*
Strategia algebrica	***0%***	***0%***	***14%***	***69%***	***73%***

[7] Per il problema *La predizione* cfr. Medici, Rinaldi, 2010.

3.1. Analisi a posteriori in riferimento alla domanda: "quando il concetto di equazione comincia ad evidenziarsi, anche "in nuce", prima della sua istituzionalizzazione?"

Abbiamo cercato risposte a questa domanda analizzando, in particolare, i protocolli delle categorie 7 e 8 dei primi tre problemi e delle categorie 6 e 7 per *Composizione di rose*[8].
Ciò ha permesso di rilevare che prima dell'introduzione formale del calcolo letterale e della istituzionalizzazione del concetto di equazione, cioè in categoria 7, si trovano elaborati che mostrano chiaramente il ricorso al linguaggio algebrico sia nel rappresentare i dati incogniti che nel cercare di scrivere in modo "sintetico" le relazioni tra essi ("messa in formula").
Citiamo due esempi interessanti relativi al problema *Un mazzo di fiori*.
Nel primo elaborato (cat. 7) si arriva di fatto ad un'equazione, anche se non la si esprime in modo completamente formalizzato. Si trova scritto infatti:
"22,44 è uguale a N × (N–1)×2, cioè (ALUNNI CLASSE – 1) × (ALUNNI CLASSE × 2). Ora per trovare il numero di alunni non serve molto. Adesso procediamo con dei tentativi […]" **.** Si sostituiscono poi ad *N* valori numerici, osservando che è sufficiente prendere numeri aventi 3 nelle unità *"perché solo il 3 moltiplicato per (3+1) ×2 è uguale ad un numero con per unità 4"* e così, al secondo tentativo, si trova 33× 68 = 2244, da cui si ottiene che 34 è il numero degli allievi.
Nel secondo elaborato (cat. 7), riportato sotto, si nota un uso consapevole del linguaggio simbolico che, insieme ad una buona conoscenza delle proprietà delle operazioni e degli insiemi numerici, permette sostanzialmente agli allievi di risolvere un'equazione (di secondo grado) pur non avendo ancora mai trattato l'argomento nel loro percorso scolastico. Colpisce in particolare la strategia utilizzata per risolvere l'equazione, in cui compaiono le due incognite x (numero degli allievi) e y (numero degli allievi senza Sandra): è mostrato un buon controllo semantico e quantitativo dei simboli utilizzati, messo in evidenza dall'approssimare xy con y^2 , in modo da poter estrarre la radice, scegliendo poi il valore intero approssimato per difetto[9].


Ci sono 34 alunni nella classe.
Siamo arrivati a questa conclusione tramite questo ragionamento:
essendo x = n° alunni tot e y n° alunni tot - Sandra e essendo x = y+1;
abbiamo eseguito l'operazione:
[0,02 · x] · y = 22,44
che si può scrivere anche così:
0,02 · (x·y) = 22,44
e, applicando la proprietà commutativa:
(x·y) · 0,02 = 22,44.
per trovare x·y abbiamo fatto:
22,44 : 0,02 = 1122 (x·y).
Quindi sapendo che y+1 = x, abbiamo fatto:
√1122 = 33,496...
e, infine
33 (y) + 1 = 34 (x)

(Ci sono 34 alunni nella classe. Siamo arrivati a questa conclusione tramite questo ragionamento: essendo x = n° alunni tot e y n° alunni tot – Sandra e essendo x = y + 1, abbiamo eseguito l'operazione:[0,02· x] · y=22,44 che si può scrivere anche così: 0,02 · (x · y) = 22,44 e, applicando la proprietà commutativa: (x · y) ·0,02 = 22,44. Per trovare x · y abbiamo fatto: 22,44:0,02=1122(x·y). Quindi sapendo che y+1 = x, abbiamo fatto: $\sqrt{1122} = 33{,}496...$ *e, infine 33(y)+1=34(x))*

---

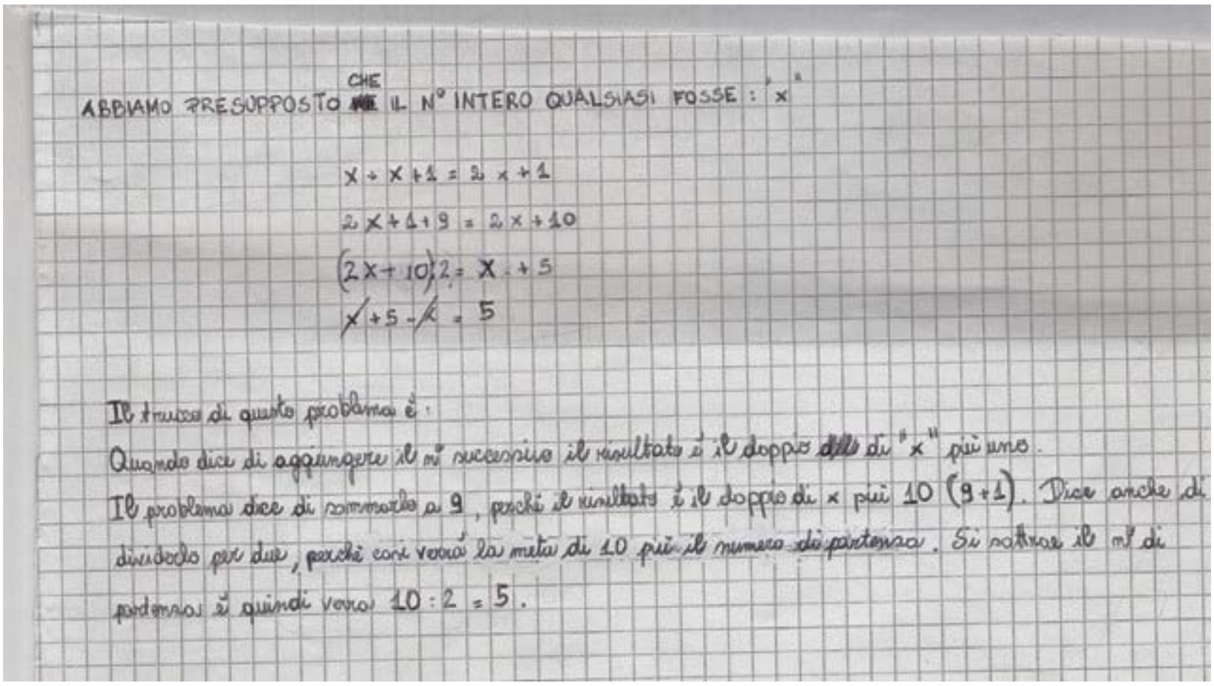
[5] Poiché *Composizione di rose* è un problema della finale, poteva essere affrontato dagli allievi di categoria 8 con strumenti algebrici, come in effetti risulta dalla Tabella 1.
[9] Altri aspetti che ci pare interessante sottolineare sono i seguenti: le lettere usate per rappresentare i dati incogniti esprimono, come indicato chiaramente, numeri interi positivi; i passaggi utilizzati per la risoluzione dell'equazione sono ben giustificati mediante le proprietà delle operazioni che risultano riconosciute e dominate; l'utilizzo consapevole degli operatori "inversi"; una buona conoscenza dei diversi ambiti numerici, interi, decimali, irrazionali, sui quali si sa ben operare.

Anche i seguenti due esempi (cat.7), entrambi relativi al problema *La predizione*, mostrano che gli studenti, nonostante la non familiarità con il calcolo algebrico, se “messi in situazione”, possono essere in grado di mantenere il controllo semantico attraverso un ragionamento di tipo retorico e di attuare procedure “personali” per lavorare correttamente in ambito algebrico.

1° elaborato

$$\frac{n+(n+1)+9}{2}-n=\frac{n+n+1+9}{2}-n=\frac{n+n+10}{2}-n=\tfrac{1}{2}n+\tfrac{1}{2}n+5-n = n+5-n = (n+5)-n = 5$$

2° elaborato:


ABBIAMO PRESUPPOSTO CHE IL N° INTERO QUALSIASI FOSSE: "x"

x + x + 1 = 2 x + 1

2 x + 1 + 9 = 2 x + 10

(2 x + 10) : 2 = x + 5

~~x~~ + 5 - ~~x~~ = 5

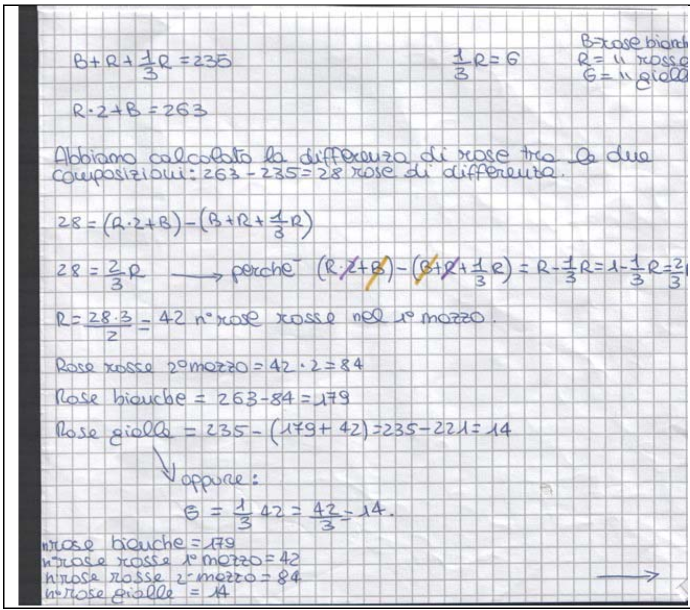
Il trucco di questo problema è:
Quando dice di aggiungere il n° successivo il risultato è il doppio di "x" più uno.
Il problema dice di sommarlo a 9, perché il risultato è il doppio di x più 10 (9+1). Dice anche di dividerlo per due, perché così verrà la metà di 10 più il numero di partenza. Si sottrae il n° di partenza e quindi verrà 10 : 2 = 5.

(*Abbiamo presupposto che il N ° intero qualsiasi fosse: “x” .*

x + x + 1 = 2x + 1; 2x + 1 + 9 = 2x + 10; (2x + 10) : 2 = x + 5; x + 5 – x =5

Il trucco del problema è: quando dice di aggiungere il n° successivo, il risultato è il doppio di “x” più uno. Il problema dice di sommarlo a 9, perché il risultato è il doppio di x più 10 (9+1). Dice anche di dividerlo per due, perché così verrà la metà di 10 più il numero di partenza. Si sottrae il numero di partenza e quindi verrà 10:2 = 5).

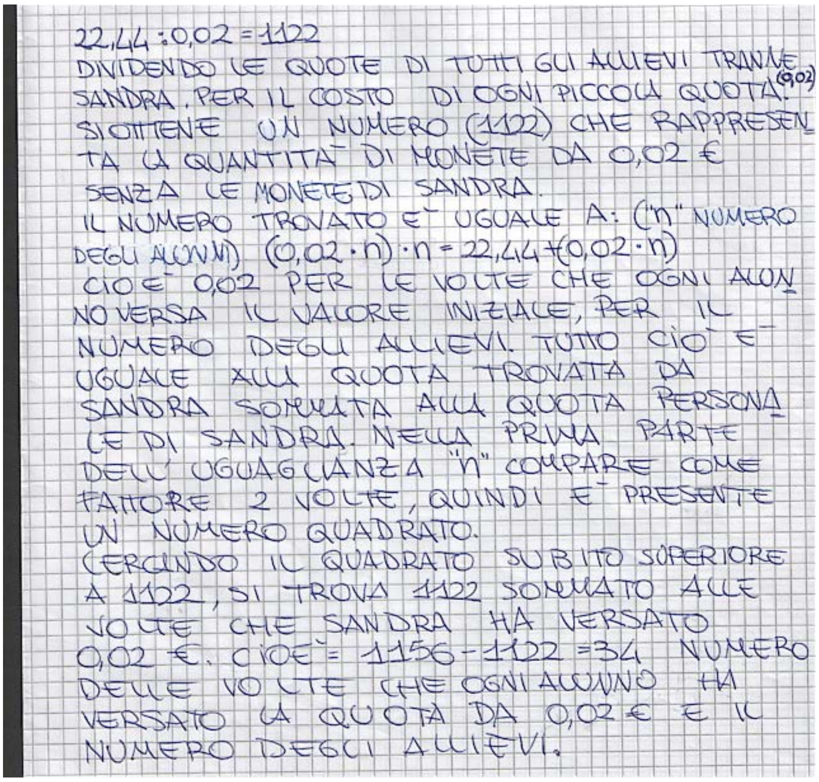
In qualche elaborato di categoria 8 si ricorre all’impostazione di un sistema lineare per la risoluzione del problema *Composizione di rose*, come mostra il seguente esempio:

	$(B+R+\frac{1}{3}R=235$ $\quad \frac{1}{3}R=6$ $B=$ rosebianche $\quad R=$ roserosse $\quad G=$ rosegialle $R\cdot 2+B=263$. Abbiamo calcolato la differenza di rose tra le due composizioni: $263-235=28$ rose di differe. $28=(R\cdot 2+B)-(B+R+\frac{1}{3}R)$ $28=\frac{2}{3}R \rightarrow$ perché $(R\cdot 2+B)-(B+R+\frac{1}{3}R)=$ $=R-\frac{1}{3}R=1-\frac{1}{3}R=\frac{2}{3}R$ $R=\frac{28\cdot 3}{2}=42$ n° rose rosse nel 1° mazzo. Rose rosse 2° mazzo $=42\cdot 2=84$. Rose bianche $=263-84=179$. Rose gialle $=235-(179+42)=235-221=14$ (oppure $G=\frac{1}{3}42=\frac{42}{3}=14$). n° rose bianche = 179 $\quad$ n° rose rosse 1° mazzo = 42 n° rose rosse 2° mazzo = 84 $\quad$ n° rose gialle = 14)

Si capisce che gli allievi sono consapevoli che le lettere rappresentano numeri e sono capaci di manipolare correttamente le due equazioni per ottenere l’equazione risolvente il sistema (di fatto usano il *metodo di riduzione*). Da notare come non disturbi, nella risoluzione, il fatto che l’incognita figuri al secondo membro!

In alcuni elaborati di categorie 7 e 8, nell’uso ancora ingenuo del linguaggio algebrico, si possono riconoscere le *fasi retorica*, *sincopata* e *simbolica*[10], costitutive del suo sviluppo storico.

Il seguente esempio (cat. 7) è relativo a *Un mazzo di fiori*:



(22,44:0,02=1122. Dividendo le quote di tutti gli alunni tranne Sandra per il costo di ogni piccola quota (0,02), si ottiene un numero (1122) che rappresenta la quantità di monete da 0,02 € senza le monete di Sandra. Il numero trovato è uguale a (“n”

---

[10] *Fase retorica* (anteriore a Diofanto di Alessandria, 250 d.C.): tutta a parole, senza simboli; *fase sincopata* (da Diofanto alla fine del XVI secolo): introduzione di abbreviazioni per le incognite, ma i calcoli sono espressi in lingua naturale; *fase simbolica* (introdotta da Viète, 1540-1603) in cui si usano le lettere per tutte le quantità incognite e non; l’algebra si usa sia per trovare l’incognita che per provare regole che legano le varie quantità ed esprimere così le soluzioni generali.

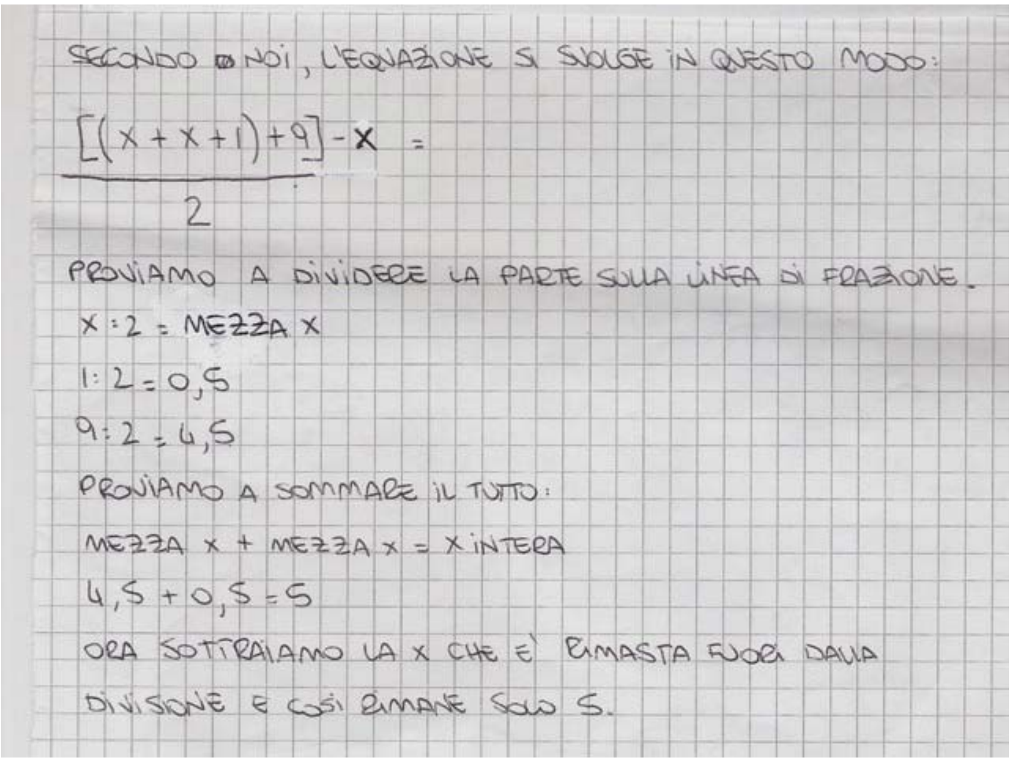
numero degli alunni) (0,02· n) · n = 22,44 + (0,02· n), cioè 0,02 per le volte che ogni alunno versa il valore iniziale, per il numero degli allievi. Tutto ciò è uguale alla quota trovata da Sandra sommata alla quota personale di Sandra. Nella prima parte dell'uguaglianza "n" compare come fattore 2 volte, quindi è presente un numero quadrato. Cercando il quadrato subito superiore a 1122, si trova 1122 sommato alle volte che Sandra ha versato 0,02 €, cioè
= 1156-1122 = 34 numero delle volte che ogni alunno ha versato la quota da 0,02 € e il numero degli allievi.)

Nell'elaborato gli allievi formalizzano correttamente l'uguaglianza che definisce l'equazione, e poi determinano la soluzione descrivendo i vari passaggi nel linguaggio naturale [*fase sincopata*]. Il ragionamento fatto mostra un buon dominio delle operazioni e delle loro proprietà (si noti in particolare il passaggio alla scrittura $n^2 = 1122 + n$, sulla quale si lavora, ottenuta dividendo per 2 entrambi i membri dell'uguaglianza).

In un elaborato di categoria 8 di *Un mazzo di fiori* troviamo un altro bell'esempio di ragionamento algebrico che mostra il passaggio dalla "fase retorica" alla "fase simbolica": gli allievi impostano un'equazione, anche se non sanno che si chiama così (parlano infatti di *formula*) e poi trovano la soluzione per tentativi. Riportiamo un passo importante della spiegazione:

"La formula che abbiamo usato l'abbiamo pensata con x che rappresenta il numero degli alunni, quindi siccome ogni persona della classe dà 2 centesimi per ogni compagno, viene x·2 per x ancora, perché bisogna moltiplicare per tutte le persone della classe, quindi $2\cdot x^2$. Siccome Sandra quando conteggia i soldi non tiene conto di se stessa, bisogna sottrarre la cifra che Sandra avrebbe versato, cioè due centesimi per ogni persona della classe, quindi 2·x. Alla fine quindi viene $(2 \cdot x^2) - (2 \cdot x) = 22{,}44$ euro".

In alcuni elaborati del problema *La predizione*, infine, l'algebra sincopata viene utilizzata per semplificare l'espressione, come nel seguente di categoria 8.



SECONDO NOI, L'EQUAZIONE SI SVOLGE IN QUESTO MODO:

$$\frac{[(x+x+1)+9]}{2} - x =$$

PROVIAMO A DIVIDERE LA PARTE SULLA LINEA DI FRAZIONE.
X : 2 = MEZZA X
1 : 2 = 0,5
9 : 2 = 4,5
PROVIAMO A SOMMARE IL TUTTO:
MEZZA X + MEZZA X = X INTERA
4,5 + 0,5 = 5
ORA SOTTRAIAMO LA X CHE È RIMASTA FUORI DALLA DIVISIONE E COSÌ RIMANE SOLO 5.

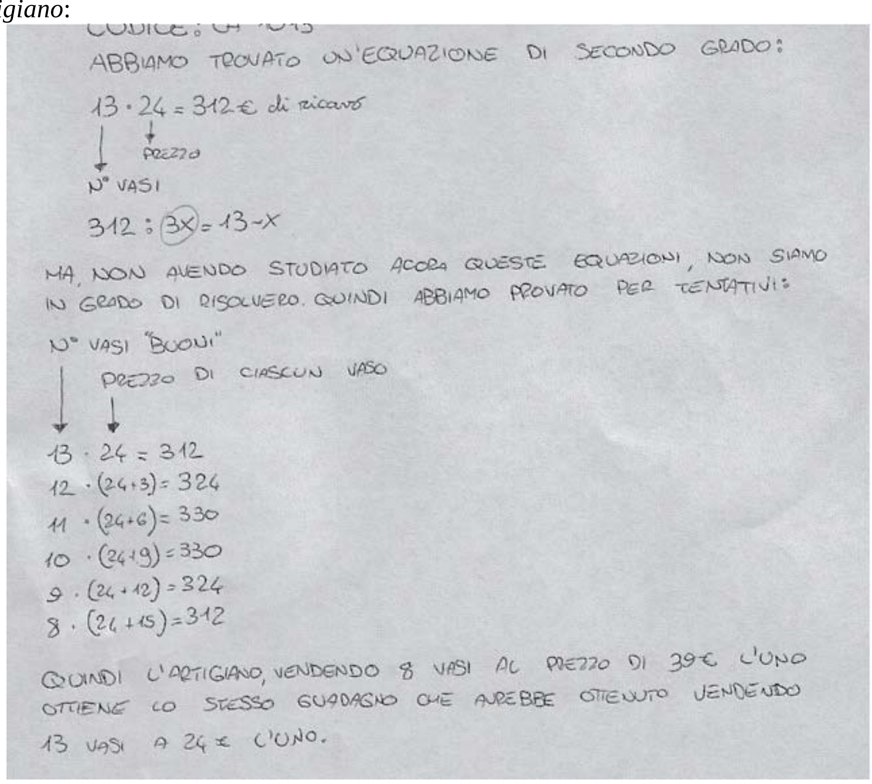
(Secondo noi l'equazione si svolge in questo modo: $\frac{[(x+x+1)+9]}{2} - x$. *Proviamo a dividere la parte sulla linea di frazione: x:2 = mezza x; 1:2 = 0,5; 9:2 = 4,5. Proviamo a sommare il tutto: mezza x + mezza x = x intera 4,5 + 0,5 = 5. Ora sottraiamo la x che è rimasta fuori dalla divisione e così rimane solo 5).*

3.2. Analisi a posteriori in riferimento alla domanda: *"Come cambia (se cambia) il rapporto con le equazioni, dopo che gli allievi le hanno incontrate e studiate nel loro percorso scolastico?"*

In relazione a questa domanda, la nostra attenzione si è incentrata sui protocolli delle categorie 9 e 10.
Una prima lettura della Tabella 1 evidenzia chiaramente che l'utilizzo della strategia algebrica progredisce all'aumentare del livello scolare, contemporaneamente alla diminuzione dell'incomprensione del problema.
Tale aumento tuttavia è meno deciso nei problemi *Un mazzo di fiori* e *L'artigiano* nei quali, fino in categoria 10, rimane predominante la procedura aritmetica. Questa scelta è stata probabilmente favorita da una non banale

traduzione in formula e, per il problema *L'artigiano*, anche dai dati numerici che permettevano di procedere facilmente per tentativi.
Nel caso del problema *La predizione*, il corretto procedimento risolutivo implica necessariamente l'utilizzo del concetto di parametro. La Tabella 1 evidenzia che dalla categoria 8 alla categoria 9 emerge una maggiore consapevolezza della necessità di una dimostrazione: in categoria 9 infatti la maggioranza (57%) ricorre ad una spiegazione di tipo algebrico, in forma retorica o simbolica. Tale tendenza si rafforza in categoria 10 (82%) in cui si ha un netto cambiamento di comportamento nel modo di affrontare il problema e l'utilizzo della forma simbolica è decisamente predominante. Inoltre in categoria 10 quasi tutti i protocolli sono risolti correttamente e per la prima volta si ha un salto di qualità: non più prove ma una dimostrazione, che consiste nel far vedere che l'equazione che traduce il problema è un'identità.
Si nota, inoltre, all'aumentare dell'età, una maggiore precisione di linguaggio dovuta, probabilmente, ad una maggiore consapevolezza dei termini usati. Si confondono infatti sempre meno le parole equazione/espressione, equazione indeterminata/identità, incognita/parametro.
Sempre dalla Tabella 1, relativamente al problema *Composizione di rose*, si evince un salto di qualità dalla categoria 8 alla 9, che diventa più deciso in categoria 10. Per questo problema, che richiedeva l'utilizzo di quattro incognite, la maggiore familiarità con il linguaggio simbolico ha permesso, a partire dalla categoria 9, la messa in formula. In particolare, proprio in categoria 9, cioè prima ch siano stati trattati i sistemi lineari, aumenta il numero dei protocolli in cui le relazioni sono sintetizzate in un'unica equazione, oppure sono scritte più equazioni e si opera su di esse, mostrando procedure risolutive di sistemi "in atto".

In altri elaborati traspare la fiducia acquisita nei confronti dello strumento algebrico: gli allievi non si scoraggiano di fronte ad un'equazione di secondo grado di cui non conoscono la formula risolutiva, ma cercano di risolverla per tentativi o con la legge di annullamento del prodotto, come mostra l'esempio seguente (cat. 10) relativo a *L'artigiano*:


ABBIAMO TROVATO UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO:
13 · 24 = 312 € di ricavo
N° VASI PREZZO
312 : 3X = 13 − X
MA, NON AVENDO STUDIATO ACORA QUESTE EQUAZIONI, NON SIAMO IN GRADO DI RISOLVERO. QUINDI ABBIAMO PROVATO PER TENTATIVI:
N° VASI "BUONI" PREZZO DI CIASCUN VASO
13 · 24 = 312
12 · (24+3) = 324
11 · (24+6) = 330
10 · (24+9) = 330
9 · (24+12) = 324
8 · (24+15) = 312
QUINDI L'ARTIGIANO, VENDENDO 8 VASI AL PREZZO DI 39 € L'UNO OTTIENE LO STESSO GUADAGNO CHE AVREBBE OTTENUTO VENDENDO 13 VASI A 24 € L'UNO.

(Abbiamo trovato un'equazione di secondo grado:
13(n° vasi)·24 (prezzo)=312 € di ricavo $312:3x = 13–x$
ma, non avendo studiato ancora queste equazioni, non siamo in grado di risolverla. Quindi abbiamo provato per tentativi.

N° vasi "buoni"		*prezzo di ciascun vaso*	
13	·	*24*	*= 312*
12	·	*(24+3)*	*= 324*
11	·	*(24+6)*	*= 330*
10	·	*(24+9)*	*= 330*
9	·	*(24+12)*	*= 324*
8	·	*(24+15)*	*= 312*

Quindi l'artigiano, vendendo 8 vasi al prezzo di 39 € l'uno, ottiene lo stesso guadagno che avrebbe ottenuto vendendo 13 vasi a 24 € l'uno.)

3.3. Analisi a posteriori in riferimento alla domanda: *"Quali errori emergono dall'esame dei protocolli nella messa in formula, nella successiva gestione sintattica del calcolo e nel controllo semantico dei risultati via via ottenuti?"*

Gli errori più frequenti emersi nella fase della *messa in formula* sono così riassumibili:
- si trascura di indicare esplicitamente il significato dell'incognita e l'insieme numerico cui deve appartenere;
- si usa una stessa lettera per indicare variabili diverse (in particolare in *Composizione di rose*);
- mancanza di attenzione nella lettura del testo e/o difficoltà di comprensione del modo con cui sono espresse le relazioni tra i dati;
- mancanza di controllo della "messa in formula" (quale significato ha? C'è compatibilità con le indicazioni contenute nel testo?).

Gli errori più frequenti *nella manipolazione algebrica dell'equazione* riguardano:
- difficoltà nell'applicazione dei principi di equivalenza;
- errata "gestione" del calcolo algebrico (ad es.: $x+2x+9$ viene sostituito con $12\,x$; $2a\times a$ diventa $3a$) dovuta a mancanza di consapevolezza e di controllo sui meccanismi di trasformazione;
- errori formali: di segno, nell'uso delle parentesi ...
- uso scorretto del simbolo "uguale" (ad es. $(x+1+9):2 = 10/2 = 5$, o anche $10+11=21+9=30:2=15–10=5$).

3.4. Programmazione di ulteriori attività

Dall'analisi degli elaborati sono emersi in categoria 8, ma talvolta anche in categoria 7, elementi positivi che mostrano come gli allievi, stimolati dalla situazione problematica, possono utilizzare lettere e simboli per esprimere dati e relazioni e mantenerne il controllo, fino ad arrivare a gestire l'intero processo risolutivo.
Per contro, si devono anche segnalare, a partire dalle categorie 6 e 7, ma anche in categoria 8, "comportamenti" o difficoltà, che costituiscono ostacoli per una corretta concettualizzazione delle equazioni, come ad esempio uso scorretto dell' "uguale", difficoltà a lavorare con numeri non interi, difficoltà a rappresentare la situazione problematica, mancanza di controllo dei risultati ottenuti e della loro compatibilità con i dati.
Inoltre, sempre dalla Tabella 1, si evidenzia un aumento della strategia algebrica da categoria 9 a categoria 10, ma, fatta eccezione per *La predizione*, tale aumento non è così rilevante come ci si potrebbe aspettare. Per i problemi *Mazzo di fiori* e *L'artigiano* si fa ricorso in categoria 10 alla strategia algebrica solo, rispettivamente, nel 35% e nel 30% degli elaborati. I dati su *Composizione di rose* avevano necessità di ulteriori conferme essendo relativi a poche classi "selezionate" perché finaliste nella gara.
L'analisi a posteriori ha anche mostrato l'esistenza, nella fase della scrittura dell'equazione e in quella della manipolazione, di certi tipi di errori persistenti anche in categorie più alte.
Il gruppo ha allora deciso di approfondire la ricerca sulle equazioni nel loro duplice aspetto di "strumento" e di "oggetto", con un'attività di indagine e di sperimentazione rivolta sia ad allievi che hanno appena incontrato il concetto di equazione[11], sia ad allievi che hanno già lavorato con le equazioni per un intero anno.

4. Il lavoro nell'A.S. 2009-2010: l'indagine e la sperimentazione

Nell'anno scolastico 2009/2010 è stata effettuata a Barletta, Parma e Siena un'indagine che ha coinvolto un migliaio di allievi di categorie 9 e 10. L'obiettivo era quello di avere informazioni sul ricorso spontaneo degli allievi alle equazioni come strumento nella risoluzione di problemi e sulla trattazione delle medesime come oggetto matematico, senza essere condizionati dall'aver svolto di recente nella pratica scolastica il capitolo "Equazioni". E'stato così deciso di effettuare l'indagine nei primi giorni dell'anno scolastico.
Nello stesso anno, è stata condotta a Parma una sperimentazione con allievi dell'ultimo anno di una scuola secondaria di primo grado (categoria 8), nell'ambito di attività di "potenziamento" organizzate dalla scuola stessa. In questo caso, l'obiettivo era in particolare quello di una "verifica a breve termine" delle conoscenze sul tema equazioni, maturate da allievi considerati ad un buon livello per la matematica. Tali allievi, infatti, avevano da poco trattato le equazioni nel loro percorso scolastico.

4.1. L'indagine

L'indagine rivolta alle categorie 9 e 10 è stata strutturata in due parti:

[11] Ricordiamo che nella scuola italiana, il primo contatto con l'algebra, e in particolare con le equazioni di primo grado, avviene infatti normalmente alla fine del terzo anno di Scuola secondaria di primo grado ed è ripreso durante il primo anno della Scuola secondaria di secondo grado.

Prima parte: risoluzione di *due problemi del RMT* per indagare sulla familiarità del ricorso alle equazioni come *strumento* per risolvere problemi.
Seconda parte: *questionario* con domande specifiche sul concetto di equazione per indagare sulle conoscenze maturate dagli allievi su tale *"oggetto matematico"*.
La modalità di effettuazione dell'indagine è stata la seguente:
- l'attività sui problemi ha preceduto di qualche giorno quella del questionario in modo da impedire che quest'ultima condizionasse il ricorso allo "strumento" equazioni nella risoluzione dei problemi;
- ogni allievo ha lavorato individualmente;
- il tempo massimo a disposizione per ciascuna parte è stato di un'ora.

La tabella seguente mostra i dati relative alle scuole e agli allievi coinvolti.

Tabella 2

	LS	*LC*	*IT*	*IP*	*Totale*
n° classi	12	2	14	19	**47**
n° allievi	272	44	318	401	**1035**

LS *Liceo scientifico e Liceo scientifico tecnologico;*
LC *Liceo classico;*
IT *Istituto tecnico industriale o commerciale;*
IP *Istituto professionale*

4.1.1. Prima parte: descrizione e risultati

Per la categoria 9, i problemi proposti sono stati *Composizione di rose* e *La predizione*, mentre per la categoria 10, *Composizione di rose* e *L'artigiano*.
La scelta di *Composizione di rose* per entrambe le categorie è stata motivata dal fatto che tale problema, non prestandosi ad essere risolto per tentativi, avrebbe dovuto favorire procedure di tipo aritmetico (eventualmente ricorrendo ad opportune rappresentazioni grafiche) o procedure di tipo algebrico, utilizzando una o più equazioni.
La scelta di *La predizione* per la categoria 9 è stata determinata dalla "naturalezza" con cui il testo doveva suggerire l'uso del linguaggio algebrico e mostrare quindi il grado di familiarità degli allievi verso l'uso delle lettere "per generalizzare".
Infine, il problema *L'artigiano* per la categoria 10 avrebbe dovuto fornire informazioni sia sulla frequenza del ricorso alla strategia algebrica, che prevedeva un'equazione di secondo grado, sia sulla capacità di risolvere tale equazione applicando la legge di annullamento del prodotto, non essendo ancora nota agli allievi la formula risolutiva.
Nella tabella che segue sono riportati i dati, in percentuale, relativi alle strategie scelte dagli allievi nella risoluzione dei problemi proposti:

	La predizione Cat.9 (508)	***L'artigiano*** Cat.10 (485)	***Composizione di rose*** Cat.9 (508)	***Composizione di rose*** Cat.10 (485)
Strategia algebrica	***6%***	***7%***	***8%***	***19%***
Corretto algebrico	*4%*	*2%*	*1%*	*13%*
Errato algebrico	*2%*	*5%*	*7%*	*6%*
Strategia aritmetica		***57%***	***18%***	***23%***
Corretto aritmetico		*43%*	*4%*	*8%*
Errato aritmetico		*14%*	*14%*	*15%*
In bianco	***5%***	***36%***	***74%***	***58%***

Tabella 3

Nel problema *La predizione*, il ricorso all'algebra è stato molto basso (6%), e concentrato quasi esclusivamente nei Licei, nonostante il fatto che le indicazioni del testo facilitassero la traduzione dal linguaggio naturale a quello algebrico. Il non utilizzo della via algebrica può essere attribuito ad una scarsa dimestichezza, diffusa negli allievi ad usare lettere per esprimere proprietà o descrivere procedimenti che valgono in generale (si preferisce giustificare per via retorica). L'idea di dimostrazione sembra, inoltre, non essere familiare agli allievi sottoposti all'indagine che hanno confuso "dimostrare" con "verificare in uno o più casi numerici", come è stato evidenziato in quasi il 90% degli elaborati.
Nel problema *L'artigiano* la preferenza per la strategia aritmetica rispetto a quella algebrica è stata ancora più netta che nella gara (57% contro il 7%). Si può quindi affermare che, di fronte ad una situazione che poteva

essere affrontata abbastanza semplicemente utilizzando sia lo strumento algebrico che quello aritmetico, gli allievi abbiano scelto il secondo, probabilmente perché considerato più sicuro e familiare rispetto al primo[12].
Per quel che riguarda il problema *Composizione di rose* il ricorso alla strategia algebrica è stato estremamente basso in categoria 9 (8% contro il 18% di strategia aritmetica) ed è rimasto comunque inferiore a quello della strategia aritmetica in categoria 10, (19% contro il 23%). In generale questo problema è risultato molto difficile sia in categoria 9 che in categoria 10, indipendentemente dal tipo di scuola, anche se tale difficoltà è stata notevolmente accentuata nell'Istituto Professionale, come è testimoniato dall'alto numero di protocolli consegnati in bianco (74% in categoria 9 e 58% in categoria 10).
L'attenzione del gruppo si è concentrata sull'analisi a posteriori di tale problema proprio perché il ricorso all'algebra, pur essendo basso, è stato comunque più elevato che negli altri due problemi.
In molti tra gli elaborati di *Composizione di rose* classificati "in bianco", compare solo il tentativo di riportare i "dati", quasi sempre tradotti in modo errato o confuso, come mostrano gli esempi seguenti:

Esempio 1

bianche 1 = 2 gialle 1/3 di quelle rosse rosse 2 = 1× 2

Esempio 2

B = C1, C2 C1 = G 1/3 di R
C2 R2 = R C1

Come si nota, lingua naturale e simboli matematici si mescolano, dando luogo a scritture ambigue, difficili da rielaborare.
In altri casi, dati e relazioni sono espressi in modo scorretto o incompleto, anche se è possibile riconoscere gradi differenti di familiarità dello studente con il linguaggio algebrico.

Esempio 3

Rose gialle 1/3 delle rose rosse
II composizione: Rose rosse il doppio → 526

Esempio 4

a+b+c=235
b+a=263
c è 1/3 di b
b è 2b nella prima composizione trasposizione

In questa difficoltà degli allievi a sintetizzare le informazioni del testo si riconosce facilmente un *ostacolo* per la risoluzione del problema. A tale proposito, ci sembra utile ricordare l'importanza di dedicare spazio, nell'attività didattica, alla lettura e comprensione del testo, prima di occuparsi della risoluzione di un problema: in altri termini, l'attenzione non deve essere tesa subito alla ricerca degli strumenti per ottenere la risposta, ma devono essere curate bene, prima, le fasi di *comprensione* e di *rappresentazione* (per via grafica, algebrica, …) delle relazioni esistenti tra i dati desumibili dall'enunciato.
Negli elaborati in cui si è fatto uso dell'algebra, gli errori più frequenti sono stati rilevati nella formalizzazione algebrica ed hanno riguardato in particolare la *scelta delle incognite* e la *"messa in formula"*.
Spesso una stessa lettera è stata utilizzata per indicare quantità diverse: nella maggior parte dei casi questo errore è dovuto alla presenza di rose rosse nelle due composizioni.

Esempio 5

x = rose bianche; y = rose gialle; z = rose rosse [13]
x + (1/3)z + (1/2)z = 235
x + 2z = 263

Nella scrittura precedente, come si può notare, il significato di *z* è ambiguo: non è specificato se indica il numero di rose rosse della prima (I) o seconda (II) composizione. Succede così che nel secondo addendo della prima equazione *z* assume il significato di " numero di rose rosse in I ", mentre nel terzo addendo quello di " numero di rose rosse in II " e di nuovo, nella seconda equazione, quello di " numero di rose rosse in I ".

[12] Il gruppo ha successivamente preparato una nuova versione del problema che potesse scoraggiare l'uso di una procedura per tentativi. La nuova versione è stata inserita nel 19° RMT, II Prova, con il titolo "La trasferta", ma, anche in questo caso, la strategia aritmetica è stata largamente privilegiata rispetto a quella algebrica (per ulteriori informazioni si rimanda alla relativa Scheda nella futura *Banca dei problemi – Sito internet:* *www.armtint.org*).
[13] Si trovano frequentemente negli elaborati scritture del tipo: *x = rose rosse, y = rose bianche, rose rosse = 1/3 rose gialle, …*
Gli allievi sono consapevoli che le lettere indicano numeri e non "oggetti"? Didatticamente è opportuno, soprattutto in una fase di approccio al concetto di equazione, non trascurare questo aspetto e invitare alla riflessione sul significato dei simboli che si introducono.

Altre volte si trovano scritte identità perché non si mettono in relazione i dati della prima composizione con quelli della seconda.

Esempio 6

x + (1/3)x + [235-(1/3)x-x)] = 235 e 2x + (263 – 2x) = 263

Si trovano anche elaborati in cui, nell'intraprendere la via algebrica, si procede in modo casuale, senza eseguire controlli sulla compatibilità tra scrittura simbolica e condizioni indicate nel testo.

Esempio 7

Si pone *x = rose rosse* e si imposta l'equazione : *1/3 x + x + 2x = 498 (235 + 263)*
… ma vengono dimenticate completamente le rose bianche!

Esempio 8

Si pone *x = rose bianche; y = rose gialle; z = rose rosse* e poi si scrive:

x + y + z = 235
x + y = 263 aggiungendo infine: *"NON LO SO FARE"*

In diversi elaborati compaiono anche più tentativi di messa in formula uno di seguito all'altro, come nel caso seguente:

Esempio 9

x + (1/3)x + x + x + 2x = 498
x + (1/3)y + z + z + y + 2y = 498
x + (1/3)x + x + 2x = 235

Appare evidente in elaborati di questo tipo l'incertezza nella matematizzazione e il non controllo di ciò che si sta scrivendo.

4.1.2. Seconda parte: descrizione e risultati

La seconda parte dell'indagine consisteva in un questionario praticamente identico sia in cat. 9 che in cat. 10 ma con l'aggiunta di due domande in più per gli allievi di categoria più alta.
Con i quesiti contenuti nel questionario (si veda ALLEGATO) volevamo in particolare indagare su:

- l'acquisizione delle tecniche di risoluzione di una equazione
- l'acquisizione del concetto di soluzione di un'equazione
- la capacità di interpretare e costruire formule

Volevamo inoltre raccogliere indicazioni sulla comprensione dei concetti di incognita e di parametro e, se possibile, fare emergere eventuali misconcetti. La Tabella 4 mostra il riepilogo delle risposte corrette.

Tabella 4 ***(totale risposte corrette e percentuali)***

Esercizio	1a	1b	1c	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g
cat.9	107 (41%)	70 (27%)	126 (49%)	91 (35%)	88 (34%)	192 (74%)	83 (32%)	67 (26%)	13 (5%)	
cat.10 non Licei	32 (58%)	29 (53%)	37 (67%)	27 (49%)	26 (47%)	49 (89%)	23 (42%)	17 (31%)	2 (4%)	3 (5%)
cat.10 Licei	97 (82%)	81 (68%)	106 (89%)	83 (70%)	104 (87%)	112 (94%)	90 (76%)	71 (60%)	51 (43%)	36 (30%)

Esercizio	3a	3b	4	5	6	7	8	9a	9b	9c
cat.9	17 (7%)	17 (7%)	8 (3%)		101 (39%)	75 (29%)	136 (53%)	122 (47%)	106 (41%)	31 (12%)
cat.10 non Licei	7 (13%)	6 (11%)	6 (11%)	17 (31%)	21 (38%)	20 (36%)	30 (55%)	17 (31%)	16 (29%)	9 (16%)
cat.10 Licei	56 (47%)	54 (45%)	47 (39%)	36 (30%)	74 (62%)	84 (71%)	97 (82%)	89 (75%)	82 (69%)	44 (37%)

In relazione ai tre obiettivi sopra citati, dal questionario emerge un miglioramento nel passaggio dalla cat.9 alla cat.10, evidentemente maggiore se si considerano classi di Liceo piuttosto che degli Istituti. Si osserva però che, anche

in cat.10, rimane comunque bassa la percentuale delle risposte corrette sia ai quesiti relativi all'acquisizione del concetto di soluzione di una equazione (una media del 40% nei Licei e solo del 16,5 % negli altri Istituti), sia a quelli inerenti la capacità di interpretare e costruire formule (una media del 66% nei Licei e del 34% negli altri Istituti).
Tra i quesiti proposti allo scopo di indagare sull'acquisizione delle tecniche risolutive di un'equazione, ci soffermiamo ad analizzare più in dettaglio i risultati di alcuni di essi (Portioli, 2010).

Quesito 2a : $-2x = 0$

Qui entrano in gioco il concetto di soluzione di un'equazione, la legge di annullamento del prodotto e, più in generale, il ruolo dello zero nella divisione e nella moltiplicazione.
Come mostra la tabella seguente, il quesito è risultato molto difficile; si nota un miglioramento solo in cat.10 nei Licei.

	Cat. 9	**Cat.10 (Licei)**	**Cat.10 (non Licei)**
Corretto	35%	70%	21%
Errato	45%	28%	44%
Non svolto	20%	2%	35%

Nella maggior parte delle risposte ottenute, si riscontra la tendenza ad applicare meccanicamente le "regole" per la risoluzione di equazioni (principi di equivalenza), ignorando le proprietà dello zero. Così, per esempio, si trova scritto: $-2x = 0$ da cui $x = 0/-2$ e si termina qui, oppure si dice che l'equazione è "impossibile" o "indeterminata"; c'è chi trova correttamente il risultato $x = 0$, ma poi dice che l'equazione è indeterminata (0 non è un numero?) o chi, sbagliando anche ad applicare il secondo principio, scrive: $x = 2 / 0 = 0$.
Questa difficoltà nella gestione dello zero e, in particolare, nell'applicazione della legge di annullamento del prodotto, ha trovato conferma anche negli altri quesiti in cui era richiesta la conoscenza e l'utilizzo di tale legge (cfr. 1b; 2f, 2g).
Ciò pensiamo sia riconducibile essenzialmente a due fatti:

1. nel passaggio dall'aritmetica all'algebra il problema dello zero, che spesso si trascina fin dalla scuola elementare, viene, purtroppo, nuovamente sottovalutato;
2. ci si concentra sulla risoluzione di equazioni via via più complesse, e si insiste su una classificazione delle equazioni (determinate, impossibili, indeterminate) che spesso rimane però per gli allievi, assolutamente priva di significato.

Quesiti 2b e 2d: $2 = 6x$ $4x + 7 = 25x$

	Cat. 9	**Cat. 10 (Licei)**	**Cat. 10 (non Licei)**
Corretti	23%	62%	10%

Nel primo di tali quesiti, come avevamo previsto, la presenza dell'incognita a destra dell'uguale ha costituito elemento di disturbo, confermando la difficoltà degli allievi nel riconoscere e gestire la proprietà simmetrica dell'uguaglianza e il condizionamento, loro trasmesso più o meno implicitamente, ad operare con l'incognita al primo membro. Si nota infatti la necessità di scambiare i termini prima di risolvere, e ciò comporta a volte errori, come nel seguente esempio:
$-6x = 2$, da cui $x = 1/-3$.
Sono stati riscontrati inoltre errori indotti dalla convinzione che, in una divisione, il divisore debba essere minore del dividendo, ad esempio: $x = 6/2 = 3$, $-21x = -7$ da cui $x = -21/-7 = 3$.
Un'ulteriore conferma della scarsa efficacia di un metodo di insegnamento che punta essenzialmente alla trasmissione di tecniche del calcolo letterale e di strategie risolutive, emerge dall'analisi delle risposte ai primi sette quesiti. Nonostante si trattasse di risolvere semplici equazioni di primo grado a coefficienti numerici, nelle classi seconde dei Licei, solo il 38% degli allievi ha dato tutte e sette le risposte corrette, mentre negli Istituti tale percentuale scende ulteriormente al 9%.
Significative, in quest'ottica, sono anche le basse percentuali di risposte corrette ottenute ai quesiti relativi all'acquisizione del concetto di equazione e alla capacità di interpretare e costruire formule.

Consideriamo, ad esempio, il *Quesito 5*:

Sapendo che a indica un numero che è soluzione dell'equazione
$2(x^2 - 3) - 5(1 + x^3) - 1 - x - 2(1 - x) = 0$
l'espressione
$2(a^2 - 3) - 5(1 + a^3) - 1 - a - 2(1 - a)$
ha valore
□ positivo □ negativo □ nullo
Spiega perché.

Tale quesito ha creato grosse difficoltà anche nelle classi seconde (cat. 10), infatti si è ottenuto solo il 30% di risposte corrette nei Licei e addirittura il 15% nei non Licei. C'è chi ha risposto *positivo*, chi *negativo*, chi *nullo* e chi ha dichiarato *non si può dire*, con una varietà di spiegazioni spesso interessanti per i misconcetti che da esse emergono [14].
Notevoli difficoltà sono state rilevate anche nelle risposte al seguente *Quesito 7*, in cui si chiede di interpretare una scrittura simbolica:

Indichiamo con *y* il numero delle autovetture e con *a* il numero delle moto di un'autorimessa. Esprimi a parole l'informazione che ottieni dalla seguente scrittura:
$y = 7a + 2$

Riportiamo alcune tra le risposte più frequenti: *"Ci sono 7 moto e 9 auto"*; *"I numeri delle auto sono equivalenti a 7 moto più altre 2"*; *"Le autovetture sono uguali a 7 delle moto più due di qualcosa che non conosciamo"* ; *"Le autovetture sono uguali a 7 moto più due altri veicoli"*.

4.2. Sperimentazione nella scuola secondaria di primo grado (potenziamento)

Abbiamo avuto l'occasione, su proposta della Dirigente di una Scuola secondaria di primo grado, di svolgere un'attività di "potenziamento". Si trattava di lavorare con 27 allievi appartenenti a sette diverse classi di categoria 8, scelti tra quelli con un buon profitto in matematica e interesse per la disciplina. L'attività, che si è svolta per un'ora alla settimana, per un totale di 15 ore, aveva lo scopo di aumentare l'interesse, fornire ulteriori stimoli, approfondire la comprensione dei concetti.
In alcune classi era già stato trattato il concetto di equazione, in altre è stato trattato contemporaneamente al nostro intervento. L'argomento era stato presentato in modo "tradizionale" a partire dal calcolo letterale e insistendo soprattutto sugli aspetti manipolativi. Per noi è diventata quindi occasione di verifica a "*brevissimo termine*" dell'apprendimento del concetto di equazione come "oggetto" e, al contempo, per la presentazione del concetto stesso come "strumento" attraverso la proposta di problemi del RMT.
Abbiamo proposto alcuni quesiti scelti tra quelli del questionario. Riportiamo i risultati dei quesiti presentati nel paragrafo precedente.

	Corretto	**Non svolto**
Quesito 2a	54%	0
Quesito 2b	59%	0
Quesito 2d	59%	4%
Quesito 7	50%	19%

Anche con questi allievi abbiamo rilevato difficoltà nella gestione del numero 0 e confusione tra equazione "impossibile" e "indeterminata", in quanto termini completamente privi di significato per gli allievi. Emblematica è la frase sfuggita ad una allieva di fronte all'equazione " $-2x = 0$": "*… non mi ricordo più se è impossibile o indeterminata*".
Diverso è stato l'atteggiamento degli allievi di fronte a problemi del RMT risolvibili con un'equazione o con un sistema lineare. Anche allievi a cui non era ancora stato introdotto il concetto di equazione, hanno spontaneamente utilizzato un'incognita (non sempre indicata con *x*) e messo in formula la situazione, cercando poi di risolverla, generalmente per tentativi più o meno organizzati, ma anche, in qualche caso, utilizzando la divisione come operazione inversa della moltiplicazione e applicando così, di fatto, il secondo principio di

[14] Ecco alcuni esempi: *"Non si può dire: dipende dal segno di a"*; *"Negativo: perché a^3 è l'elemento più grande che rimane negativo, ma che viene moltiplicato per un segno meno"*; *"Positivo perché i numeri alla sinistra dell'uguale sono tutti negativi e portandoli a destra diventano positivi"*; *"Positivo perché penso che visto che ci sono molte sottrazioni per ottenere zero la a deve essere un numero positivo"*; *"Nullo, perché non è più un'equazione"*.

equivalenza. In tal modo non hanno mai perso il controllo del senso, verificando anche in modo spontaneo il risultato ottenuto.
In alcuni casi di problemi formalizzabili algebricamente con un sistema, gli allievi hanno utilizzato in modo naturale due incognite, impostando così inconsapevolmente un sistema, che poi hanno risolto o per tentativi o escogitando metodi corrispondenti a quelli che, più avanti nel loro percorso scolastico, impareranno a chiamare " di riduzione" e "di sostituzione".

5. Riflessione sui risultati e nostre ipotesi sulla natura degli ostacoli incontrati dagli allievi

Dalla prima parte dell'indagine emerge una netta diminuzione del ricorso alle equazioni nel risolvere i problemi, rispetto a ciò che è accaduto nella gara. Pensiamo che questo risultato esprima più verosimilmente lo stato delle conoscenze algebriche degli allievi, poiché frutto di un lavoro individuale, mentre nella gara gli elaborati erano l'espressione di un lavoro di gruppo.
Si osserva anche, come prevedibile, una diversità di comportamento sul ricorso alle equazioni, dipendente sia dal tipo di scuola - nei licei le percentuali sono più elevate rispetto agli istituti tecnici, per essere praticamente nulle negli istituti professionali - sia dalla classe di appartenenza, segno evidente quest'ultimo dell'influenza dell'insegnamento ricevuto.
In particolare dai risultati in categoria 10, lo studio per un intero anno delle equazioni e delle loro proprietà non sembra avere avuto troppa influenza sulla capacità di risoluzione di problemi con strategia algebrica.
Di più, le difficoltà mostrate dagli studenti nel rispondere alle domande del questionario ci portano ad affermare che, nonostante la grande quantità di tempo che generalmente si dedica nella scuola all'argomento equazioni, rimangono lacune ed incertezze nella comprensione dei concetti di base, come quelli di soluzione, incognita, parametro e nella messa in pratica delle procedure risolutive. Tali lacune ed incertezze perdurano nel tempo, anche oltre la fine della Scuola secondaria di secondo grado. Abbiamo avuto conferma di ciò dai risultati di un questionario rivolto alle matricole dei corsi di laurea in Matematica, Fisica ed Informatica dell'Università di Siena e in Informatica e in Tecniche della Prevenzione dell'Università di Parma. Alcune domande del questionario erano le stesse proposte nella scuola secondaria. Anche in questo caso i risultati peggiori (intorno al 40% di risposte corrette) si sono avuti nei quesiti relativi al concetto di soluzione di un'equazione. In particolare, emerge ancora la convinzione che per risolvere un'equazione si debba necessariamente passare attraverso la manipolazione algebrica e l'utilizzo delle formule, senza in primo luogo fermarsi ad osservarla come un "tutto unico" per coglierne le peculiarità.
I risultati della sperimentazione in categoria 8 mostrano, inoltre, che anche allievi considerati "bravi" sembrano acquisire solo superficialmente concetti legati al calcolo letterale e all'approccio alle equazioni ed una maggioranza di essi applica in modo meccanico procedure di cui non ha compreso il significato.
Secondo una nostra prima ipotesi una causa del non reinvestimento delle conoscenze algebriche evidenziato sia dall'indagine che dalla sperimentazione, è prettamente di ***natura didattica.***
Riteniamo, infatti, che le difficoltà che incontrano gli studenti siano dovute alla tradizionale sequenza di insegnamento. Normalmente si inizia con l'introduzione del calcolo letterale, seguito da esercizi di difficoltà crescente, poi si passa all'introduzione delle equazioni e dei relativi principi di equivalenza, si affrontano equazioni sempre più complesse, anche a coefficienti letterali. Ci si limita quindi alle procedure di risoluzione delle equazioni, presentate come una sequenza di trasformazioni di tipo essenzialmente sintattico.
Questo fa sì che gli allievi lavorino su scritture già formalizzate manipolandole in vario modo, senza acquisire la capacità di interpretarle in linguaggi diversi da quello formale (es. grafico e verbale) e creando separazione tra il "mondo dei numeri e quello delle lettere". Anche i libri di testo, in genere, introducono prima le equazioni come "oggetto sul quale eseguire trasformazioni" e solo dopo chiedono di utilizzarle nei cosiddetti "problemi risolubili con equazioni".
Tale modo di procedere, tipico dell'insegnamento tradizionale, si ripercuote spesso negativamente anche sul piano dell'interesse e della motivazione. Si produce infatti negli allievi una visione delle equazioni come un insieme di meccanismi e procedure di calcolo, di cui non conoscono le applicazioni, non comprendendone così appieno l'importanza. Quando finalmente si arriva ai problemi, si tratta di solito di situazioni dapprima abbastanza semplici, spesso ben risolubili anche per via non algebrica, che non eliminano i dubbi sull'utilità dei concetti studiati e degli esercizi fatti. In seguito si mostrano strategie risolutive per classi di problemi. La strategia algebrica viene quindi percepita più come un'imposizione che come un indispensabile strumento per rappresentare e risolvere problemi.
Un'altra causa delle difficoltà incontrate dagli allievi è senza dubbio di ***natura epistemologica***, come mostra la lunga e difficile storia dello sviluppo del pensiero algebrico ed in particolare del concetto di equazione (es. D'Amore, 2001).
Pensiamo inoltre che un'ulteriore causa sia di ***natura ontogenetica***, legata all'età non precoce - intorno ai 13/14 anni - in cui gli allievi sono capaci di passare da un inventario sistematico ad una generalizzazione, come sembrano per esempio confermare le ricerche condotte dal "Gruppo funzioni" (Henry et al., 2011).

6. Alcuni suggerimenti

Quali indicazioni utili per gli insegnanti si possono trarre?

Il gruppo ritiene fondamentale curare le modalità di approccio all'algebra tenendo presente che l'obiettivo deve essere quello di far sperimentare, in una varietà di situazioni appositamente create, le diverse funzioni del formalismo algebrico, dalla messa in formule alle manipolazioni sintattiche. In particolare si concorda sulla necessità di porre attenzione all'attività di traduzione ed interpretazione di espressioni nei due linguaggi, naturale e formale, che punti a dare agli allievi consapevolezza del significato dei segni e dei simboli usati e controllo della validità delle scritture ottenute. Non si deve infatti dimenticare che, nella modellizzazione algebrica di un problema, l'elemento chiave è proprio la "messa in formula", cioè la traduzione mediante uguaglianze di relazioni espresse verbalmente.

Riportiamo di seguito altre indicazioni che il gruppo considera importanti per l'attività in classe:

- lasciare tempo agli allievi di passare gradualmente dal *linguaggio retorico,* al *sincopato* e al *simbolico* (in analogia a quanto storicamente avvenuto nello sviluppo dell'algebra), in modo che essi siano sempre più consapevoli del significato e della validità del linguaggio formale;
- discutere in classe le procedure risolutive dei problemi per mettere a disposizione di tutti il lavoro di singoli allievi o di gruppi ed avviare, nello stesso tempo, una riflessione sulla differenza tra le strategie di tipo aritmetico, finalizzate alla ricerca del risultato a partire dai dati, e le strategie algebriche, finalizzate alla formalizzazione delle relazioni contenute nell'enunciato mediante la scelta di opportune incognite;
- tenere in considerazione tutte quelle situazioni in cui emergono in maniera naturale legami di tipo funzionale con i dati incogniti, espressi inizialmente con schemi o tabelle, e che possono aiutare il processo di matematizzazione e la ricerca della soluzione;
- evidenziare, nella fase di discussione collettiva, limiti e potenzialità della strategia algebrica nella risoluzione di problemi;
- aiutare gli allievi a prendere confidenza con lo strumento algebrico senza bloccarsi di fronte a mancanza di conoscenze tecniche, ma stimolandoli a trovare soluzioni con i mezzi a disposizione;
- presentare problemi in cui gli allievi possano incontrare ed affrontare determinate difficoltà, e indirizzarli a superarle attraverso nuove ed appropriate situazioni didattiche proposte in classe.

Dall'esperienza maturata in questi anni (Doretti *et al.*, 2009, Grugnetti L. *et al.*, 2012), possiamo affermare che alcuni problemi del RMT ci sembrano particolarmente adatti ad essere usati in classe per far cogliere e far apprezzare la semplificazione apportata dall'uso del linguaggio algebrico. La necessità poi di imparare a manipolare espressioni simboliche, equazioni o funzioni ottenute attraverso il processo di modellizzazione, darà senso e giustificazione allo studio di tali oggetti matematici.

Il suggerimento che viene dal gruppo è allora quello di sostituire la "sequenza" tradizionale di avvicinamento all'algebra, *calcolo letterale - equazioni - problemi*, con la sua inversa, *problemi - equazioni - calcolo letterale*, in modo da dare priorità alla "ricerca del senso" piuttosto che puntare sulle tecniche di calcolo letterale o sulle procedure di risoluzione. Ci sembra che le seguenti parole sintetizzino bene quanto appena detto: *"Le equazioni dovrebbero essere studiate in vari contesti, cioè come mezzi per rispondere a domande. Saper mettere in equazione o, in altri termini modellizzare una situazione, avendo coscienza dei limiti del modello scelto, è ancora più importante che saper risolvere l'equazione"* (cfr. pag. 201, CREM, 1999).

Gli addestramenti alle pure manipolazioni sintattiche non hanno alcun effetto sulla comprensione dei concetti da parte degli allievi e sulle loro capacità di risolvere problemi: evitiamoli, quindi, ed investiamo il tempo in attività più utili e formative per i nostri studenti!

7. Bibliografia

CREM, 1999, (Ed. italiana) '*La Matematica dalla scuola materna alla maturità. Proposta di un percorso globale per l'insegnamento della matematica'*(a cura di Lucia Grugnetti e Vinicio Villani – traduzione di Silvano Gregori). Pitagora editrice - Testo originale: Rouche N. (a cura di): 1995, *Le Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'einsegnement des mathématiques.*

D'Amore B.: 2001, '*Didattica della matematica*', Pitagora editrice.

Doretti L., Salomone L.: 2006, 'Avvio al concetto di equazione con i problemi del RMT', in R. Battisti, R. Charnay, L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds.) *RMT : des problèmes à la pratique de la classe*, Vol. 5, ARMT, IPRASE Trentino, IUFM de Lyon - Centre de Bourg-en-Bresse, 235-244

Doretti L., Medici D., Rinaldi M. G., Salomone L.: 2007, 'Costruzione del concetto di equazione: dalla messa in formula alla risoluzione di equazioni e sistemi lineari', in L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M.G. Rinaldi (Eds.) *I problemi come supporto per l'apprendimento: il ruolo del RMT*, Vol. 6, Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Sezione di Parma dell'ARMT, ARMT, 133-150

Doretti L., Medici D., Rinaldi M. G., Salomone L.: 2008, 'Costruzione del concetto di equazione: un possibile percorso con i problemi del RMT', in L. Grugnetti, F. Jaquet, G. Bellò, R. Fassy, G. Telatin (Eds.) *RMT fra pratica e ricerca in didattica della matematica*, Vol. 7, Centro Risorse per la Didattica della Matematica, Sez. della Valle d'Aosta dell'ARMT, ARMT, 163-179

Doretti L., Medici D., Rinaldi M. G., Salomone L.: 2009, 'Dare significato ai concetti di equazione e di sistema: attività in classe con i problemi del RMT', in L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds), *Rallye Mathématiques Transalpin et interculturalité/Rally Matematico Transalpino e intercultura*, Vol. 8, Brigue 2008, ARMT, SCNAT, 121-142

Grugnetti L., Jaquet F., Medici D., Rinaldi M.G.: 2012, 'Vers la construction de concepts au travers de l'analyse des procedures del élèves e des obstacles qu'ils rencontrent lors de la resolution de problemes', in Atti del convegno Einsegnement des mathématiques et contract social enjeux et défis pour le 21° siècle, EMF 2012, Genève 2012, http://www.emf2012.unige.ch/ , 1192-1203

Henry A., Henry M., Rizza A.: 2011, 'Funzioni per risolvere problemi?', *La gazzetta di Transalpino,* Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino, n° 1, 42-61

Malara N. A.: 1997, 'Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'aritmetica all'algebra', *La matematica e la sua didattica*, n. 2, ed. CRSEM, 176-185

Medici D., Rinaldi M. G.: 2006, 'Messa in formula e risoluzione di equazioni e sistemi lineari con i problemi del RMT, in R. Battisti, R. Charnay, L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds) *RMT : des problèmes à la pratique de la classe*, ARMT, IPRASE Trentino, IUFM de Lyion- Centre de Bourg-en-Bresse, 245-253.

Medici D., Rinaldi M. G.: 2010, 'Un approccio costruttivo alla formalizzazione', in *Progettare Lavorare Scoprire* (a cura di Paola Vighi), Progetto Lauree Scientifiche, Università di Parma, 107-118

Portioli Y.: 2010, 'Indagine sull'apprendimento del concetto di equazione', *Tesi di Laurea Triennale in Matematica*, Università degli Studi di Parma (relatrice: Daniela Medici)

Sfard A.: 1991, 'On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin', *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, 1-36

ALLEGATO

QUESTIONARIO PROPOSTO IN CATEGORIA 10

1. Controlla se sono state risolte correttamente le seguenti equazioni. Eventualmente indica dove è l'errore e riporta a fianco il procedimento corretto.

$\mathbf{7x + 5 = 3x - 2}$	$\mathbf{7x + 5 + x - 5 = 0}$	$\mathbf{5x + 2 = 8x}$
$4x = 3$	$8x = 0$	$2 = 3x$
$x = -1$	$x = -8$	$2/3 = x$

2. Risolvi le seguenti equazioni, indicando tutti i passaggi.

a) $-2x = 0$	
b) $2 = 6x$	
c) $3x = 3$	
d) $4x + 7 = 25x$	
e) $(x-3)(x+3) + 1 - 3x = x(x-1)$	
f) $(x-2)^2 = 0$	
g) $(3-5x)(x+2) = 0$	

3. Data l'equazione $5a + 2x - 1 = 3a$ risolvila
   - considerando a come incognita:
   - considerando x come incognita:

4. Puoi stabilire se qualcuno tra i seguenti numeri è soluzione dell'equazione $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$?

   □ SI □ NO

   Se sì, indica quali: **a)** 1 **b)** 0 **c)** -1 **d)** -2

   Giustifica le tue risposte.

5. Sapendo che a indica un numero che è soluzione dell'equazione
   $2(x^2 - 3) - 5(1 + x^3) - 1 - x - 2(1 - x) = 0$ l'espressione
   $2(a^2 - 3) - 5(1 + a^3) - 1 - a - 2(1 - a)$ ha valore
   ☐ positivo ☐ negativo ☐ nullo
   Spiega perché.

6. Esprimi l'area di un trapezio in cui la base minore e l'altezza misurano entrambe a e la base maggiore $a + 4$.

7. Indichiamo con y il numero delle autovetture e con a il numero delle moto di un'autorimessa. Esprimi a parole l'informazione che ottieni dalla seguente scrittura: $y = 7a + 2$.

8. Individua quel numero che addizionato alla sua metà dà il numero stesso aumentato di 8. Indica il procedimento che hai seguito per trovare il numero richiesto.

9. Le dimensioni di un rettangolo, espresse in centimetri, sono a e $a+2$.
   - Cosa rappresenta per questo rettangolo l'espressione $a(a+2)$?
   - Indica il perimetro del rettangolo mediante un'espressione:

- Trova, se esiste, il valore di a per il quale il rettangolo ha lo stesso perimetro di un triangolo isoscele che ha la base di 6 cm e ciascun lato obliquo di misura a.

L'EQUATION EN TANT QU'OUTIL ET OBJET :

ANALYSE DES DIFFICULTES ET DES ERREURS

Maria Felicia Andriani, Lucia Doretti, Daniela Medici, M. Gabriella Rinaldi, Lucia Salomone

au nom du « Groupe Equations »[1]

1. Introduction

Dans l'enseignement, l'algèbre est habituellement présentée comme une généralisation de l'arithmétique dont elle utilise les symboles – ceux des opérations et le signe égal (=) – et les propriétés ; « *toutefois, tandis qu'en arithmétique, on privilégie les algorithmes de calcul, et que les expressions arithmétiques sont conçues comme une suite d'opérations à effectuer pour obtenir un résultat ; en algèbre, ce qui prévaut, c'est en revanche l'étude des représentations symboliques (expressions, équations, fonctions) en tant qu'objet mathématique* » (Malara, 1997). Ce glissement de l'arithmétique à l'algèbre, nous place face à un changement de perspective ; on passe ainsi d'une approche de type fondamentalement procédural (ou opérationnel) ; à une approche de type structurel puisqu'on étudie certains objets en établissant des relations entre ces derniers. Selon A. Sfard (1991), la dualité procédurale/structurelle caractérise l'évolution historique de la mathématique et est inhérente à chacune de ses notions[2].
Pour ce qui est de la notion d'équation, l'<u>aspect procédural</u> l'emporte lorsque l'équation est envisagée comme un *instrument*, c'est-à-dire comme un outil visant à la codification des relations exprimées par un problème ; tandis que prévaut l'<u>aspect structurel</u> lorsque l'équation est vue comme un *objet d'étude en soi*, méritant donc à ce titre une attention théorique[3]. Dans le processus de construction de ladite notion, il est donc fondamental de tenir compte des deux aspects et d'en favoriser le lien.
Dans l'activité didactique, tient-on suffisamment compte de cette dualité inhérente à la notion d'équation ?
En réalité, on constate le plus souvent une dichotomie entre ces deux aspects : c'est si vrai que les élèves, lorsqu'ils utilisent des équations, perdent souvent de vue la signification des écritures symboliques, des méthodes qu'ils appliquent, et de la notion-même de solution.
Le groupe « Equations », dans son travail de recherche et d'expérimentation mené depuis 2005 (Doretti, Salomone, 2006 ; Medici, Rinaldi, 2006 ; Doretti *et alii.*, 2007, 2008, 2009), a été habité par la conviction que les élèves peuvent être aidés à « donner du sens » à la notion d'équation en se l'appropriant de manière toujours plus tangible, à condition qu'ils en expérimentent et en apprécient *tout de suite* la valeur d'*outil* visant à représenter et à résoudre des problèmes. Pour être plus précis, travailler sur des problèmes prévoyant une stratégie de type algébrique – avant même l'introduction formelle des équations – peut certes ouvrir la voie, mais cette tactique doit être ensuite justifiée, aux yeux des élèves, par l'exigence d'étudier les équations *en leur qualité d'objet mathématique*.
Cette façon de procéder reproduit ce qui se passa au plan historique, et correspond aussi aux *Indications curriculaires* en vigueur (programmes) en Italie, car on renvoie l'étude de l'algèbre au lycée[4] ; tandis que pour le collège[5], on se contente d'évoquer la résolution des équations du premier degré tel un outil pour résoudre des problèmes (*« Explorer et résoudre les problèmes en utilisant des équations du I^{er} degré »*), sans aucune référence au calcul algébrique.

---

[1] Laura BORTOLAN ; Antonella CASTELLINI ; Rosanna DILIDDO ; Elisabetta GORI ; Monalda PACIOTTI ; Giuseppina RIGHI ; Maria Federica RINALDI ; Giovanna Maria RINALDI ; Lonia SANTONICCOLO ; René SCREVE ; Anna URBANI.
[2] Selon A. Sfard, tout objet mathématique présente en soi deux aspects complémentaires (procédural et structurel), à l'image des deux faces d'une même médaille : dans le premier prévaut le point de vue *opérationnel* qui est dynamique et séquentiel ; dans le second, l'objet est vu à l'instar d'une entité statique, et donc envisagé d'un point de vue *structurel*.
[3] Historiquement, les équations furent initialement utilisées comme un outil procédural pour résoudre des problèmes (chez les Sumériens et chez les Égyptiens). Ce n'est qu'à la Renaissance qu'elles devinrent un objet d'étude susceptible d'être théorisé (cf. Cardan, Tartaglia, Dal Ferro, Ferrari, Bombelli et Descartes).
[4] Le « Lycée » correspond dans le système italien à la *Scuola secondaria di secondo grado* (tranche d'âge 15-19 ans)
[5] Le « Collège » correspond dans le système italien à la *Scuola secondaria di primo grado* (tranche d'âge 12-14 ans)

2. Choix raisonné des problèmes pour la rencontre de Nivelles

Pour la 13ème Rencontre internationale sur le Rallye Mathématique Transalpin de Nivelles, *« Rallye Mathématique Transalpin, un regard constructif sur les erreurs »*, il s'avéra nécessaire de sélectionner certains problèmes du RMT qui, à la lumière de ce qui s'était passé durant le concours, semblaient particulièrement indiqués pour encourager l'utilisation des équations, tout en aidant à cerner les obstacles et les erreurs qui s'étaient entretemps vérifiés.

Nous avons voulu envisager un certain nombre de problèmes susceptibles de fournir une réponse satisfaisante aux questions suivantes :

- *Quand la notion d'équation commence-t-elle à se dessiner, même de façon embryonnaire, avant sa mise en place ?*
- *Comment change (s'il change) le rapport aux équations après que les élèves les ont rencontrées et étudiées durant leur parcours scolaire ?*
- *Quelles erreurs ressortent de l'examen des copies en ce qui concerne la mise en formule ; la gestion syntaxique du calcul ; et enfin le contrôle sémantique des résultats progressivement obtenus ?*

On a donc choisi des problèmes de catégorie 6, 7 et plus jusqu'à la catégorie 10, proposés lors du concours :

1. Le bouquet (Cat. 7, 8, 9, 10) (17. I. 15)
Dans la classe de Sandra, les élèves apprécient beaucoup leur professeur de mathématiques. Ils ont décidé de lui offrir un bouquet de fleurs pour la fête de Noël.
Chaque élève a donné autant de fois 2 centimes d'Euros qu'il y a d'élèves dans la classe.
Sandra a réuni les cotisations et fait le compte de ce qu'elle a reçu. Non compris sa propre contribution, elle a 22 euros et 44 centimes.

Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

2. L'artisan (Cat. 7, 8, 9, 10) (17. II.18)
Un artisan fabrique des objets en céramique dans son atelier. Aujourd'hui, il a préparé 13 vases qu'il désire vendre chacun à 24 €. Malheureusement, certains d'entre eux se sont fendus au cours de la cuisson. L'artisan décide alors de vendre ceux qui restent en augmentant le prix de chaque vase d'autant de fois 3 € qu'il y a de vases fendus.
En procédant ainsi, la vente des vases qui restent lui procurera le même montant qu'il aurait obtenu en vendant les 13 vases prévus à 24 €.
Combien y a-t-il de vases fendus ?
Expliquez comment vous avez trouvé.

3. La prédiction (Cat. 7, 8, 9, 10) (14. I. 14)
Marc propose le jeu suivant à son copain Luc :
- *Choisis un nombre entier ;*
- *ajoute le nombre qui le suit immédiatement ;*
- *augmente de 9 la somme précédente,*
- *divise le résultat obtenu par 2 ;*
- *soustrais le nombre que tu as choisi au début.*

Le résultat est 5, n'est-ce pas ?
Luc est étonné, pourtant cela n'a rien de magique ; il s'agit tout simplement de maths.
Pourquoi obtient-on toujours le même résultat quel que soit le nombre d'origine ?
Expliquez votre raisonnement.

4. Composition de roses (Cat. 6, 7, 8, 9, 10) (16. F. 13)
Madame Flora, propriétaire d'un célèbre magasin de fleurs, a préparé pour un client deux très belles compositions de roses.
Dans la première composition, faite de roses blanches, rouges et jaunes, elle a utilisé 235 roses.
Dans la seconde composition, faite seulement de roses rouges et blanches, elle a utilisé 263 roses.
Madame Flora observe que :
- le nombre des roses blanches est le même dans les deux compositions ;
- dans la première composition le nombre des roses jaunes est le tiers du nombre des roses rouges ;
- dans la seconde composition le nombre des roses rouges est le double du nombre des roses rouges de la première composition.

D'après vous combien y a-t-il de roses de chaque couleur dans chacune des compositions ?
Expliquez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

Ces problèmes sont tout à fait intéressants car, pouvant être résolus à l'aide de stratégies tant arithmétiques qu'algébriques, ils témoignent de la présence d'approches pré-algébriques[6] et aussi de l'évolution de la « pensée algébrique »- Dans le même temps, ces problèmes permettent de se pencher sur le rapport que les élèves de catégorie 9 et 10 entretiennent avec les notions d'équation et de système linéaire. En ce qui concerne le domaine algébrique, les problèmes 1 et 2 peuvent être formulés à l'aide d'une équation du second degré dont une seule des deux solutions peut être acceptée (la *vérification du résultat obtenu* s'avère donc nécessaire). Le problème 3 permet de se pencher sur l'instrument « calcul littéral » afin de généraliser une situation. Il est en effet suffisant de la « mettre en formule » à l'aide d'une expression polynomiale pour justifier l'assertion, mais il est également possible de traduire algébriquement cette même situation à travers une équation linéaire, qui doit être reconnue en tant qu'identité. Dans les catégories les plus basses (7 et 8), on peut envisager le recours à de véritables démonstrations, à travers l'utilisation de « l'algèbre rhétorique » ; ou encore la possibilité selon laquelle l'idée de fonction – en tant que concept-en-acte – peut être mise en évidence grâce à de nombreux exemples, dépendants du nombre choisi. On peut mettre en formule le problème 4 à l'aide d'un système ; et il offre également la possibilité de représenter graphiquement les relations entre les données[7].

3. De l'analyse *a posteriori* des problèmes à la programmation de nouvelles activités

On a examiné les copies des sections d'Aoste, Cagliari, Canton du Tessin, Parme, Pouilles et Sienne et l'on a effectué une analyse quantitative reposant davantage sur le type de méthode employée pour la résolution du problème, que sur la justesse du résultat (cf. *Tableau 1*).

Tableau 1

Le bouquet	**Cat.7 209 classes**	**Cat.8 130 classes**	**Cat.9 119 classes**	**Cat.10 86 classes**
Copies blanches	*20 %*	*14 %*	*18 %*	*16 %*
Incompréhension du problème	*49 %*	*30 %*	*24 %*	*3 %*
Stratégie arithmétique	***29 %***	***39 %***	***32 %***	***43 %***
Méthodes présentant des aspects pré-algébriques	*1 %*	*7 %*	*11 %*	*2 %*
Stratégie algébrique	***2 %***	***10 %***	***14 %***	***35 %***

L'artisan	**Cat.8 129 classes**	**Cat.9 118 classes**	**Cat.10 86 classes**
Copies blanches	*5 %*	*13 %*	*14 %*
Incompréhension du problème	*16 %*	*11 %*	*3 %*
Stratégie arithmétique	***60 %***	***58 %***	***50 %***
Méthodes présentant des aspects pré-algébriques	*7 %*	*3 %*	*2 %*
Stratégie algébrique	***12 %***	***15 %***	***30 %***

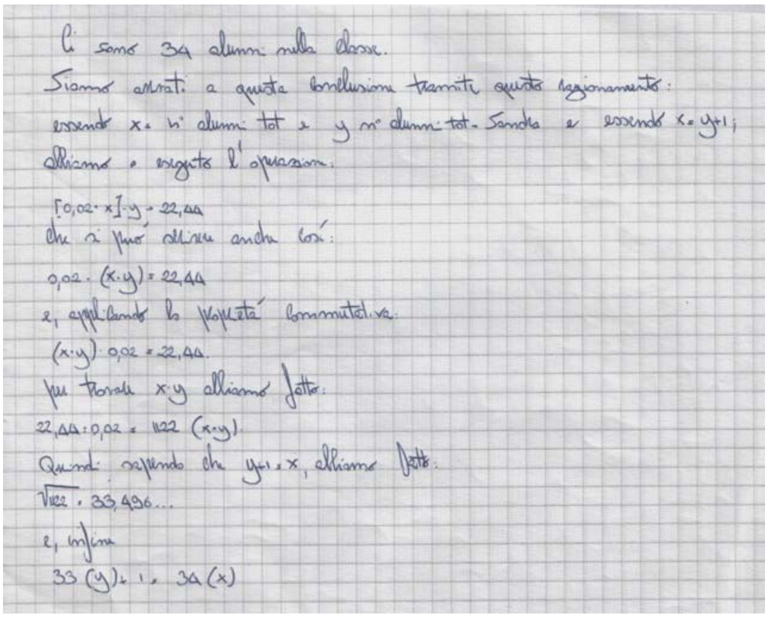
[6] Par exemple : présence de symboles ou de lettres pour représenter des données inconnues ; utilisation de tableaux ou d'écritures qui, tout en relevant de la sphère arithmétique, permettent d'exprimer de manière générale les relations entre les données (écritures de type fonctionnel) ; traduction des relations entre les données sous la forme d'une pseudo-équation etc.
[7] Pour le problème *La prédiction*, voir Medici, Rinaldi, 2010.

La prédiction		**Cat.7** **108 classes**	**Cat.8** **80 classes**	**Cat.9** **87 classes**	**Cat.10** **27 classes**
Copies blanches		*6 %*	*10 %*	*6 %*	*0 %*
Incompréhension du problème		*14 %*	*9 %*	*10 %*	*7 %*
Vérification d'un ou plusieurs exemples numériques		*58 %*	*33 %*	*26 %*	*11 %*
Explication verbale, sans recours au langage algébrique		***12 %***	***20 %***	***11 %***	***4 %***
Explication prévoyant un recours à une expression littérale ou à une équation		***9 %***	***29 %***	***46 %***	***78 %***
Composition de roses	**Cat.6** **13 classes**	**Cat.7** **12 classes**	**Cat.8** **14 classes**	**Cat.9** **16 classes**	**Cat.10** **15 classes**
Copies blanches	*15 %*	*17 %*	*7 %*	*13 %*	*7 %*
Incompréhension du problème	*31 %*	*0 %*	*7 %*	*6 %*	*7 %*
Stratégie arithmétique	***46 %***	***75 %***	***36 %***	***13 %***	***7 %***
Méthodes présentant des aspects pré-algébriques	*8 %*	*8 %*	*36 %*	*0 %*	*7 %*
Stratégie algébrique	***0 %***	***0 %***	***14 %***	***69 %***	***73 %***

3.1. Analyse *a posteriori* se référant à la question : « *Quand la notion d'équation commence-t-elle à se dessiner, même de façon embryonnaire, avant son institutionnalisation ?*? »

Nous nous sommes penchés sur cette question en analysant plus particulièrement les copies des catégories 7 et 8, pour les trois premiers problèmes ; et celles des catégories 6 et 7, pour *Composition de rosest*[8].
Ça nous a permis de montrer qu'avant l'introduction formelle du calcul littéral etl'institutionnalisation de la notion d'équation, c'est-à-dire à partir de la catégorie 7, on trouve des copies qui présentent de toute évidence un recours au langage algébrique, non seulement pour représenter les données inconnues mais aussi pour essayer de décrire de manière « synthétique » les relations entre ces dernières (« mise en formule »).
Citons à ce propos deux exemples intéressants relatif au problème *Le bouquet*.
Dans la première copie (cat. 7), on arrive de fait à une équation, même celle-ci n'est pas complètement formalisée. On peut y lire :
« 22,44 est égal à N × (N–1) ×2, c'est-à-dire (ÉLÈVES CLASSE – 1) × (ÉLÈVES CLASSE × 2). Maintenant, pour trouver le nombre d'élèves, il n'a a plus grand-chose à faire. Nous procédons maintenant par essais […] ».
On substitue à *N* des valeurs numériques, tout en observant qu'il suffit de prendre des nombres ayant **3** comme chiffre des unités « *parce que seul **3** multiplié par (3 +1) × 2 est égal à un nombre ayant 4 pour unité* » ; de sorte qu'au second essai, on trouve 33 × 68 = 2 244, d'où l'on déduit que les élèves sont au nombre de 34.
Dans la deuxième copie (cat. 7), reproduite ci-dessous, l'on remarque un emploi conscient du langage symbolique qui, conjugué à une bonne connaissance des propriétés des opérations et des ensembles numériques, permet en substance aux élèves de résoudre une équation (du second degré) même s'ils n'ont encore jamais abordé cette notion dans leur parcours scolaire. Ce qui frappe surtout, c'est la stratégie utilisée pour résoudre l'équation à deux inconnues x (nombre d'élèves) et y (nombre d'élèves sans Sandra) : on constate un solide contrôle sémantique et quantitatif des symboles utilisés, comme en témoigne le fait d'approcher xy avec y^2, de manière à pouvoir extraire la racine, en choisissant ensuite la valeur entière approchée par défaut[9].

[8] Comme *Composition de roses* est un problème de la finale, il pouvait être abordé par des élèves de la catégorie 8 à l'aide d'outils algébriques, comme l'indique en effet le « Tableau 1 ».
[9] Les autres aspects qu'il nous paraît intéressant de souligner sont les suivants : les lettres utilisées pour représenter les données inconnues expriment – c'est tout à fait clair – des nombres entiers positifs ; les différentes étapes en vue de la résolution de l'équation, sont solidement justifiées par des opérations sans nul doute connues et maîtrisées. On mentionnera également l'usage conscient des opérateurs « inverses » ; une bonne connaissance des différentes sphères numériques (nombres entiers, décimaux, irrationnels) sur lesquelles on opère correctement.


Ci sono 34 alunni nella classe.
Siamo arrivati a questa conclusione tramite questo ragionamento:
essendo x = n° alunni tot e y n° alunni tot - Sandra e essendo x = y+1;
abbiamo eseguito l'operazione:
[0,02 · x] · y = 22,44
che si può dire anche così:
0,02 · (x·y) = 22,44
e, applicando la proprietà commutativa:
(x·y) · 0,02 = 22,44
per trovare x·y abbiamo fatto:
22,44 : 0,02 = 1122 (x·y)
Quindi sapendo che y+1 = x, abbiamo fatto:
√1122 = 33,496...
e, infine
33 (y) + 1 = 34 (x)

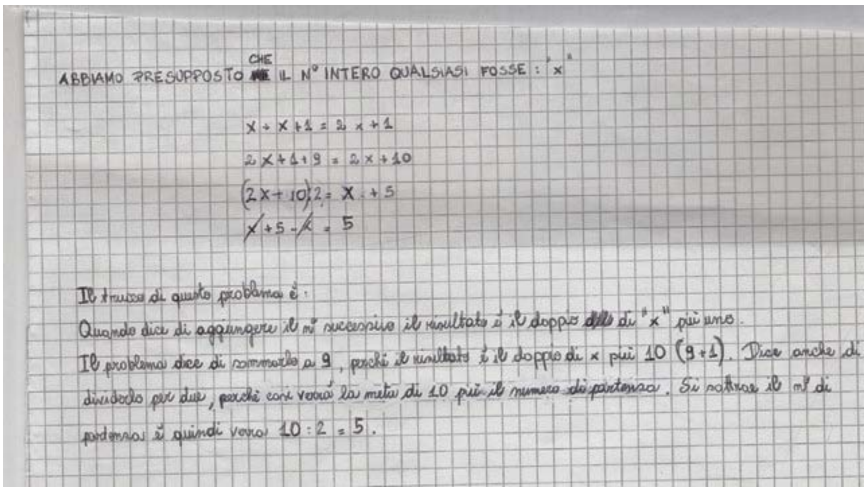
(Il y a 34 élèves dans la classe. Nous sommes arrivés à cette conclusion en faisant le raisonnement suivant : soit x = n° d'élèves X et y n° élèves X – Sandra ; on pose x = y + 1 ; nous avons fait l'opération :0,02 · x · y = 22,44 qu'on peut également écrire de la manière suivante : 0,02 · (x · y) = 22,44 et, en appliquant la propriété commutative : (x · y) ·0,02 = 22,44. Pour trouver x · y, on a fait : 22,44:0,02 = 1 122(x·y). Sachant que y + = x, nous avons donc fait : $\sqrt{1122} = 33{,}496...$ *et, enfin 33(y) +1=34(x))*

Les deux exemples suivants (cat.7), relatifs au problème *La prédiction*, montrent que les élèves – une fois « mis en situation », et même si le calcul algébrique ne leur est pas familier – sont en mesure de conserver un contrôle sémantique à travers un raisonnement de type rhétorique ; et de mettre en œuvre des méthodes « personnelles » pour opérer correctement dans le domaine algébrique.

1ère copie :

$$\frac{n+(n+1)+9}{2}-n=\frac{n+n+1+9}{2}-n=\frac{n+n+10}{2}-n={}^{1}\!/_{2}\,n+{}^{1}\!/_{2}\,n+5-n\;=\;n+5-n\;=\;(n+5)-n\;=\;5$$

2ème copie :


ABBIAMO PRESUPPOSTO CHE IL N° INTERO QUALSIASI FOSSE : "x"

x + x + 1 = 2x + 1
2x + 1 + 9 = 2x + 10
(2x + 10) : 2 = x + 5
$\cancel{x}$ + 5 - $\cancel{x}$ = 5

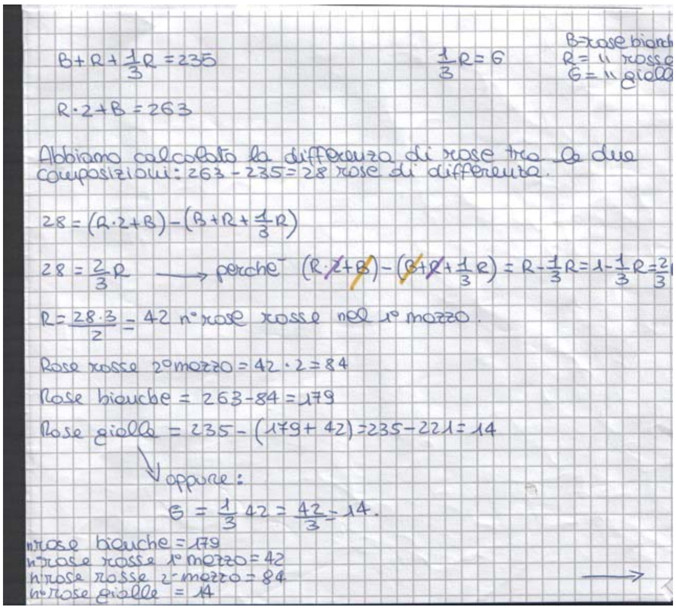
Il trucco di questo problema è:
Quando dice di aggiungere il n° successivo il risultato è il doppio di "x" più uno.
Il problema dice di sommarlo a 9, perché il risultato è il doppio di x più 10 (9+1). Dice anche di dividerlo per due, perché così verrà la metà di 10 più il numero di partenza. Si sottrae il n° di partenza e quindi verrà 10 : 2 = 5.

(Nous avons supposé que le *N° entier, quel qu'il soit était : « x ».*

x + x + 1 = 2x + 1 ; 2x + 1 + 9 = 2x + 10 ; (2x + 10) : 2 = x + 5 ; x + 5 – x = 5

Le truc du problème est : quand on dit d'ajouter le nombre suivant, le résultat est le double de « x » plus un. Le problème dit de l'ajouter à 9, parce que le résultat est le double de x plus 10 (9+1). On dit aussi de le diviser par *deux, parce que comme ça, on obtiendra la moitié de 10 plus le nombre de départ. On soustrait le nombre de départ, et l'on obtiendra donc 10 : 2 = 5).*

Dans certaines copies de catégorie 8, les élèves mettent en place un système d'équations linéaires pour la résolution du problème *Préparation de roses*, comme le montre l'exemple ci-dessous :



$(B+R+\frac{1}{3}R=235 \quad \frac{1}{3}R=6$

B = rose bianche R = rose rosse G = rose gialle

$R\cdot 2+B=263$. Abbiamo calcolato la differenza di rose tra le due composizioni : $263-235=28$ rose di differenza.

$28=(R\cdot 2+B)-(B+R+\frac{1}{3}R)$

$28=\frac{2}{3}R \rightarrow$ perché $(R\cdot 2+B)-(B+R+\frac{1}{3}R)=$

$=R-\frac{1}{3}R=1-\frac{1}{3}R=\frac{2}{3}R$

$R=\frac{28\cdot 3}{2}=42$ n° rose rosse nel 1° mazzo.

Rose rosse 2° mazzo $=42\cdot 2=84$.

Rose bianche $=263-84=179$.

Rose gialle $=235-(179+42)=235-221=14$

(oppure $G=\frac{1}{3}42=\frac{42}{3}=14$).

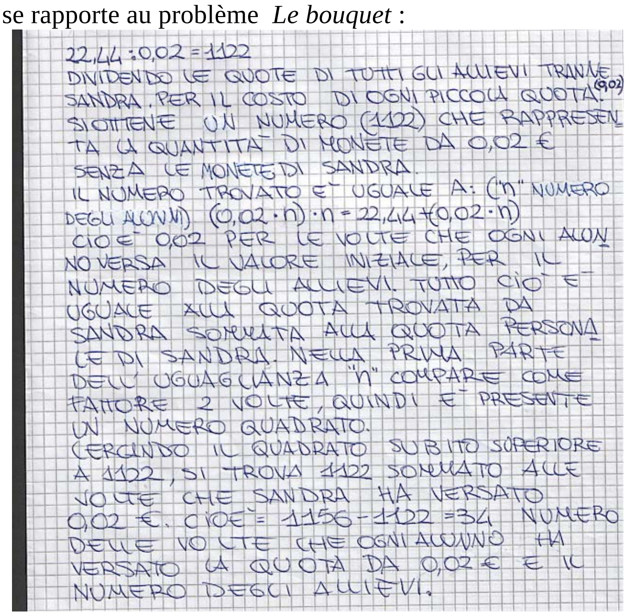
n° rose bianche $=179$ n° rose rosse 1° mazzo $=42$

n° rose rosse 2° mazzo $=84$ n° rose gialle $=14$)

On voit que les élèves sont conscients que les lettres représentent des nombres ; ils sont capables de manipuler correctement les deux équations pour obtenir l'équation résolvant le système (ils utilisent *de facto* la *méthode de réduction*). On notera que, dans la résolution du problème, le fait que l'inconnue figure au second membre ne dérange nullement les élèves !

Dans certaines copies de catégories 7 et 8, on peut déceler dans l'utilisation encore ingénue du langage algébrique les *formes rhétorique*, *syncopée* et *symbolique*[10], constitutives de l'évolution historique de l'algèbre.

L'exemple suivant (cat. 7) se rapporte au problème *Le bouquet* :



22,44 : 0,02 = 1122
DIVIDENDO LE QUOTE DI TUTTI GLI ALLIEVI TRANNE
SANDRA, PER IL COSTO DI OGNI PICCOLA QUOTA (0,02)
SI OTTIENE UN NUMERO (1122) CHE RAPPRESEN
TA LA QUANTITA' DI MONETE DA 0,02 €
SENZA LE MONETE DI SANDRA.
IL NUMERO TROVATO E' UGUALE A: ("n" NUMERO
DEGLI ALUNNI) $(0,02\cdot n)\cdot n=22,44+(0,02\cdot n)$
CIOE' 0,02 PER LE VOLTE CHE OGNI ALUN
NO VERSA IL VALORE INIZIALE, PER IL
NUMERO DEGLI ALLIEVI. TUTTO CIO' E'
UGUALE ALLA QUOTA TROVATA DA
SANDRA SOMMATA ALLA QUOTA PERSONA
LE DI SANDRA. NELLA PRIMA PARTE
DELL'UGUAGLIANZA "n" COMPARE COME
FATTORE 2 VOLTE, QUINDI E' PRESENTE
UN NUMERO QUADRATO.
CERCANDO IL QUADRATO SUBITO SUPERIORE
A 1122, SI TROVA 1122 SOMMATO ALLE
VOLTE CHE SANDRA HA VERSATO
0,02 €. CIOE' = 1156 - 1122 = 34 NUMERO
DELLE VOLTE CHE OGNI ALUNNO HA
VERSATO LA QUOTA DA 0,02 € E IL
NUMERO DEGLI ALLIEVI.

[10] *Forme rhétorique* (antérieure à Diophante d'Alexandrie, 250 apr. J.-C.) : tout est exprimé à l'aide de mots, et sans symbole ; *forme syncopée* (de Diophante à la fin du XVI^e siècle) : introduction d'abréviations pour les inconnues, mais les calculs sont exprimés en langue naturelle ; *forme symbolique* (introduite par Viète, 1540-1603) : on utilise des lettres pour toutes les quantités, inconnues ou pas ; on utilise l'algèbre non seulement pour trouver l'inconnue et mais aussi pour prouver les règles liant les différentes quantités et exprimer ainsi des solutions générales.

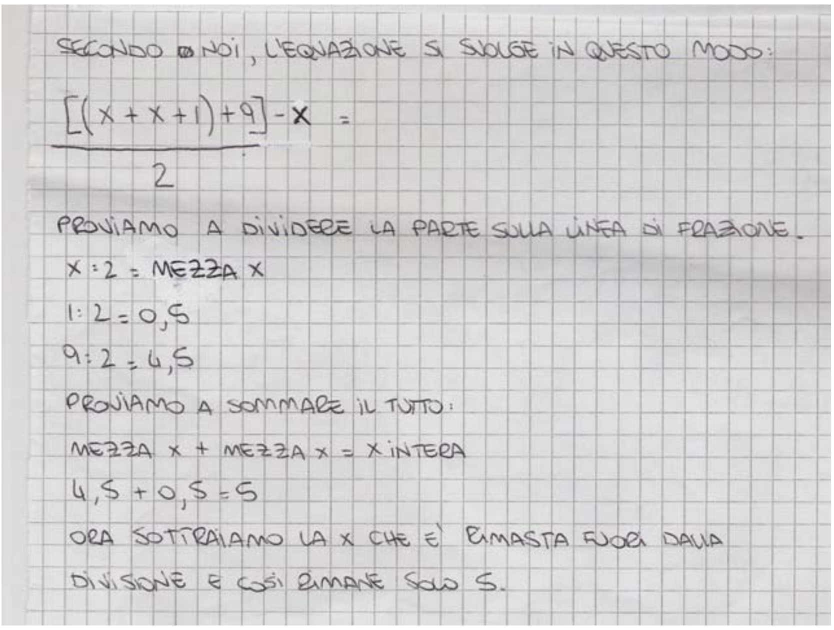
(22,44 : 0,02 = 1 122. En divisant la contribution de tous les élèves sauf Sandra par le montant de chaque petite cotisation (0,02), on obtient un nombre (1 122 qui représente la quantité de pièces de 0,02 € sans les pièces de Sandra. Le nombre trouvé est égal à (« n » nombre d'élèves) (0,02· n) · n = 22,44 + (0,02· n), c'est-à-dire 0,02 pour toutes les fois où chaque élève verse la valeur initiale, par le nombre d'élèves. Tout cela équivaut à la somme réunie par Sandra, ajoutée à la participation personnelle de Sandra. Dans la première partie de l'égalité « n » apparaît comme facteur 2 fois, donc un nombre carré est présent. En cherchant le carré immédiatement supérieur à 1 122, on trouve 1 122 ajouté aux fois où Sandra a versé 0,02 €, c'est-à-dire = 1156-1122 = 34, le nombre de fois où chaque élève a versé la cotisation de 0,02 € et le nombre d'élèves.)

Dans cette copie, les élèves mettent correctement en forme l'égalité qui définit l'équation ; puis ils déterminent la solution en décrivant les différentes étapes de leur raisonnement à l'aide du langage naturel [*forme syncopée*]. Leur raisonnement montre une bonne maîtrise des opérations et de leurs propriétés (l'on notera en particulier le passage à l'écriture $n^2 = 1\ 122 + n$, sur laquelle on travaille, obtenue en divisant par 2 les deux membres de l'égalité).

Dans une copie de catégorie 8 portant sur le problème *Le bouquet*, nous trouvons un autre bel exemple de raisonnement algébrique montrant le passage de la « forme rhétorique » à la « forme symbolique » : les élèves construisent une équation, même s'ils ne savent pas que c'en est une (ils parlent en effet de *formule*) et ils trouvent ensuite la solution par essais successifs. Nous rapportons ci-dessous un passage important du développement :

« La formule que nous avons utilisée, nous l'avons pensée avec x qui représente le nombre d'élèves ; donc, comme chaque personne de la classe donne 2 centimes par camarade, on obtient x·2 par encore x, parce qu'il faut multiplier par toutes les personnes de la classe, donc $2 \cdot x^2$*. Comme Sandra, quand elle compte l'argent, ne tient pas compte d'elle-même, il faut soustraire la somme que Sandra aurait versée, à savoir deux centimes par camarade de classe, donc 2·x. A la fin, on obtient* $(2 \cdot x^2) - (2 \cdot x) = 22{,}44$ *euros ».*

Enfin, dans certaines copies portant sur le problème *La prédiction*, l'algèbre syncopée est utilisée pour simplifier l'expression, comme en témoigne la copie suivante, de catégorie 8 :


SECONDO ~~~~ NOI, L'EQUAZIONE SI SVOLGE IN QUESTO MODO:

$$\frac{[(x+x+1)+9]-x}{2} =$$

PROVIAMO A DIVIDERE LA PARTE SULLA LINEA DI FRAZIONE.

X : 2 = MEZZA X

1 : 2 = 0,5

9 : 2 = 4,5

PROVIAMO A SOMMARE IL TUTTO:

MEZZA X + MEZZA X = X INTERA

4,5 + 0,5 = 5

ORA SOTTRAIAMO LA X CHE E' RIMASTA FUORI DALLA DIVISIONE E COSÌ RIMANE SOLO 5.

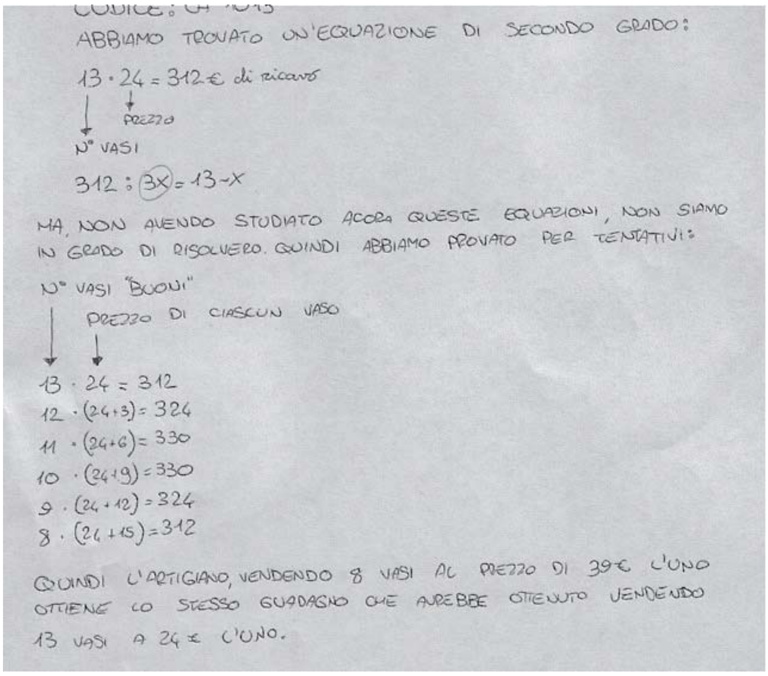
(Selon nous, l'équation se résout comme ça : $\frac{[(x+x+1)+9]}{2}-x$. *On essaie de diviser la partie sur la barre de fraction : x:2 = demi x ; 1:2 = 0,5 ; 9:2 = 4,5. On essaie d'additionner le tout : demi x + demi x = x entier 4,5 + 0,5 = 5. Maintenant, on soustrait le x qui est resté hors de la division et comme ça il ne reste que 5).*

3.2. Analyse *a posteriori* de la question : *« Comment change (s'il change) le rapport aux équations après que les élèves les ont rencontrées et étudiées durant leur parcours scolaire ? »*

À ce propos, notre attention s'est portée sur les copies des catégories 9 et 10.

Une première lecture du *Tableau 1* montre clairement que l'utilisation de la stratégie algébrique progresse à mesure que le niveau scolaire s'élève ; tandis que diminue simultanément le taux d'incompréhension du problème.
Toutefois, cette amélioration est moins marquée pour les problèmes *Le bouquet* et *L'artisan* où, y compris en catégorie 10, c'est la méthode arithmétique qui continue de l'emporter. Ce choix a probablement été favorisé par une traduction en formule peu banale et, pour le problème *L'artisan*, par des éléments numériques qui permettaient de procéder facilement par essais.
Dans le cas de *La prédiction*, la résolution du problème impliquait nécessairement l'emploi de la notion de paramètre. De la catégorie 8 à la catégorie 9, il ressort du *Tableau 1* une conscience accrue de l'exigence d'une démonstration : de fait, en catégorie 9, la majorité des élèves (57 %) recourt à une explication de type algébrique, sous forme rhétorique ou symbolique. Cette tendance se renforce dans la catégorie 10 (82 %), où l'on observe un net changement de cap dans la manière d'affronter le problème – l'utilisation de la forme symbolique étant à l'évidence prépondérante. De plus, dans la catégorie 10, le problème est presque toujours correctement résolu ; et pour la première fois, on constate un bond qualitatif : les preuves cèdent le pas à une démonstration qui montre que l'équation traduisant le problème est une identité.
En outre, à mesure que l'âge des candidats avance, on remarque une précision langagière accrue, probablement due à une meilleure connaissance des mots utilisés. On confond de moins en moins les termes équation/expression, équation indéterminée /identité, inconnue/paramètre.
Toujours au *Tableau 1*, cette fois à propos du problème *Composition de roses*, on remarque également un bond qualitatif lorsqu'on passe de la catégorie 8 à la catégorie 9 ; une tendance qui s'accentue encore dans la catégorie 10. Pour ce problème, qui exigeait l'emploi de quatre inconnues, davantage de familiarité avec le langage symbolique a permis, à partir de la catégorie 9, la mise en formule. Dans la catégorie 9, c'est-à-dire avant qu'aient été abordés les systèmes linéaires, on observe un regain du nombre de copies où les relations sont synthétisées au moyen d'une seule équation ; à moins que les élèves n'écrivent plusieurs équations et travaillent sur ces dernières, mettant en œuvre des méthodes de résolution de systèmes « en acte ».

Dans certaines copies, on sent une confiance nouvelle vis-à-vis de l'instrument algébrique : les élèves ne se découragent pas face à une équation du second degré dont ils ne connaissent pas la formule de résolution ; ils cherchent au contraire à la résoudre par essais ou conformément à la règle d'annulation d'un produit, comme en témoigne ce travail (cat. 10), portant sur le problème *L'artisan* :


ABBIAMO TROVATO UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO:
13 · 24 = 312 € di ricavo
PREZZO
N° VASI
312 : 3x = 13 − x
MA, NON AVENDO STUDIATO ACORA QUESTE EQUAZIONI, NON SIAMO IN GRADO DI RISOLVERO. QUINDI ABBIAMO PROVATO PER TENTATIVI:
N° VASI "BUONI"
PREZZO DI CIASCUN VASO
13 · 24 = 312
12 · (24+3) = 324
11 · (24+6) = 330
10 · (24+9) = 330
9 · (24+12) = 324
8 · (24+15) = 312
QUINDI L'ARTIGIANO, VENDENDO 8 VASI AL PREZZO DI 39€ L'UNO OTTIENE LO STESSO GUADAGNO CHE AVREBBE OTTENUTO VENDENDO 13 VASI A 24 € L'UNO.

(Nous avons trouvé une équation du second degré :
13 (Nb vases)·24 (prix)=312 € de bénéfice   *312:3x = 13–x*
Mais, comme nous n'avons pas encore étudié ces équations, nous ne sommes pas en mesure de résoudre celle-ci. On a donc procédé par essais.
NNb de « bons » vases   prix de chaque vase

13	·	*24*	*= 312*
12	·	*(24+3)*	*= 324*
11	·	*(24+6)*	*= 330*
10	·	*(24+9)*	*= 330*
9	·	*(24+12)*	*= 324*
8	·	*(24+15)*	*= 312*

Donc, l'artisan, en vendant 8 vases au prix de 39 € chacun, obtient la même somme qu'en vendant 13 vases à 24 € chacun.)

3.3. Analyse *a posteriori* de la question : *« Quelles erreurs ressortent de l'examen des copies en ce qui concerne la mise en formule ; la gestion syntaxique du calcul ; et enfin le contrôle sémantique des résultats progressivement obtenus ? »*

Les erreurs les plus fréquentes dans la phase de *mise en formule* peuvent être ainsi résumées :
- on néglige d'indiquer explicitement la signification de l'inconnue et l'ensemble auquel elle doit appartenir ;
- on utilise une même lettre pour indiquer des variables différentes (notamment dans *Composizione di rose*) ;
- lecture distraite de l'énoncé et/ou difficulté de compréhension quant à la manière dont sont exprimées les relations entre les données ;
- non-contrôle de la cohérence de la « mise en formule » (quelle signification a-t-elle ? Est-elle compatible avec les indications contenues dans l'énoncé ?).

Les erreurs les plus fréquentes *dans la manipulation algébrique de l'équation* relèvent :
- d'une difficulté d'application des principes d'équivalence ;
- de la mauvaise « gestion » du calcul algébrique (par exemple : $x + 2x + 9$ est remplacé par $12x$; $2a \times a$ devient $3a$) due à un manque de connaissance et à l'absence de vérification des mécanismes de transformation ;
- d'erreurs formelles : signes, utilisations des parenthèses...
- de l'usage incorrect du symbole « égal » (par exemple : $(x + 1 + 9) : 2 = 10/2 = 5$, ou encore 10+11= 21+9 = 30:2=15–10=5).

3.4. Programmation d'activités supplémentaires

Il ressort de l'analyse des copies de catégorie 8, mais aussi – et parfois – de catégorie 7, des éléments positifs montrant que les élèves, stimulés par la situation et le problème, peuvent utiliser des lettres et des symboles pour exprimer des données et des relations, tout en conservant le monitoring de ces dernières ; ils peuvent aussi gérer l'ensemble du processus de résolution.
En revanche, l'on se doit de signaler, à partir des catégories 6 et 7, mais aussi dans la catégorie 8, des « comportements » ou des difficultés, qui constituent un obstacle en vue d'une bonne conceptualisation des équations (en témoigne par exemple l'usage erroné du signe « égal ») ; les élèves ont en effet du mal à travailler avec des nombres non entiers ; à représenter la situation du problème ; ils ne vérifient ni les résultats obtenus ni leur cohérence avec les données de l'énoncé du problème.
En ce qui concerne le *Tableau 1*, on notera un recours accru à la stratégie algébrique, ceci de la catégorie 9 à la catégorie 10 ; mais, exception faite de *La prédiction*, cette tendance n'est pas aussi marquée qu'on aurait pu l'imaginer. Pour les problèmes *Le Bouquet* et *L'artisan*, l'on ne recourt – respectivement – à la stratégie algébrique (catégorie 10) que dans 35 % et 30 % des copies. Les données relatives au problème *Composition de roses* doivent être confirmées, car elles ne se rapportent qu'à quelques classes « sélectionnées » en leur qualité de finalistes du concours.
L'analyse a également montré l'existence, dans la phase d'écriture de l'équation et dans celle de sa manipulation, d'un certain nombre d'erreurs qui persistent dans les catégories supérieures.
Le groupe a donc décidé d'approfondir sa recherche sur les équations, dans leur double casquette d'« outil » et d'« objet », à travers une enquête et une expérimentation s'adressant non seulement aux élèves qui viennent d'aborder la notion d'équation[11] ; mais aussi à ceux qui ont déjà planché sur les équations pendant toute une année.

[11] Rappelons qu'en Italie, le premier contact avec l'algèbre, et plus particulièrement avec les équations du premier degré, se fait généralement à la fin du collège et en Seconde (première année du lycée).

4. Notre travail durant l'année scolaire 2009-2010 : enquête et expérimentation

Au cours de l'année scolaire 2009/2010, on a mené à Barletta, Parme et Sienne une enquête qui a impliqué un millier d'élèves appartenant aux catégories 9 et 10. L'objectif était le suivant : collecter des informations sur le recours spontané des élèves aux équations en tant qu'outil pour la résolution de problèmes ; et en tant qu'objet mathématique en soi. Et ceci sans qu'ils aient été conditionnés par le fait d'avoir récemment abordé, dans leur parcours scolaire, le chapitre « Équations ». On a donc décidé de mener notre enquête en tout début d'année scolaire.
La même année, l'on a mené à Parme une expérience avec des élèves de 3ème /de la dernière année du collège (catégorie 8), dans le cadre d'activités de « perfectionnement » organisées par l'établissement. Dans ce cas, l'objectif était notamment de vérifier « à court terme » les connaissances des élèves – considérés comme « bons en math » – au sujet des *équations*. Ces élèves avaient en effet abordé depuis peu ce chapitre.

4.1. L'enquête

L'enquête se penche sur les catégories 9 et 10 et se divise en deux parties :
<u>*Première partie*</u> : résolution de *deux problèmes du RMT* pour vérifier dans quelle mesure les élèves recourent aux équations en tant qu'*outil* pour résoudre les problèmes.
<u>*Seconde partie*</u> : *questionnaire* portant spécifiquement sur la notion d'équation, afin d'enquêter sur les connaissances acquises par les élèves quant à cet « *objet mathématique* ».
Les modalités et critères de l'enquête furent les suivants :

- l'activité sur les problèmes a précédé de quelques jours celle portant sur le questionnaire, de manière à empêcher que cette dernière ne conditionne le recours à l'*outil* équation dans la résolution des problèmes ;
- chaque élève a travaillé individuellement ;
- pour chacune des étapes, les élèves disposaient d'une heure au maximum.

Le tableau ci-dessous présente les données relatives aux établissements et aux élèves impliqués.

Tableau 2

	LS	*LC*	*IT*	*IP*	*Totale*
n° de classes	12	2	14	19	**47**
n° d'élèves	272	44	318	401	**1035**

LS *Lycée scientifique et Lycée scientifique et technologique ;*
LC *Lycée classesque (connaissance du grec et du latin) ;*
IT *Institut technique industriel ou commercial ;*
IP *Institut professionnel*

4.1.1. Première partie : description et résultats

Pour la catégorie 9, les problèmes proposés furent *Composition de roses* et *La prédiction*, tandis que la catégorie 10 a travaillé sur *Composition de roses* et *L'artisan*.
Le choix consistant à proposer *Composition de roses* pour les deux catégories, s'explique par le fait que ce problème, qui ne se prête pas à une résolution par essais, aurait dû encourager l'emploi de méthodes de type arithmétique (en recourant le cas échéant à des représentations graphiques) ; ou celui de procédures de type algébrique, en utilisant une ou plusieurs équations.
Le choix de *La prédiction* pour la catégorie 9, s'explique par le fait que l'énoncé se prêtait « naturellement » à l'emploi du langage algébrique, et montrait donc l'aisance des élèves à manier les lettres « pour généraliser ».
En dernier lieu, le problème *L'artisan* pour la catégorie 10 devait fournir des informations sur la fréquence du recours à la stratégie algébrique, qui prévoit une équation du second degré ; et aussi sur la capacité de résoudre cette équation en appliquant la règle d'annulation d'un produit, puisque les élèves ne connaissent pas encore la formule de résolution.
Dans ce tableau, sont rapportées, en pourcentage, les données relatives aux stratégies choisies par les élèves en vue de la résolution des problèmes proposés:

	La prédiction Cat.9 (508)	***L'artisan*** Cat.10 (485)	***Composition de roses*** Cat.9 (508)	***Composition de roses*** Cat.10 (485)
Stratégie algébrique	***6 %***	***7 %***	***8 %***	***19 %***
Correcte	*4 %*	*2 %*	*1 %*	*13 %*
Erronée	*2 %*	*5 %*	*7 %*	*6 %*
Stratégie arithmétique		***57 %***	***18 %***	***23 %***
Correcte		*43 %*	*4 %*	*8 %*
Erronée		*14 %*	*14 %*	*15 %*
Copies blanches	***5 %***	***36 %***	***74 %***	***58 %***

Tableau 3

Dans le problème *La prédiction*, le recours à l'algèbre a été très faible (6 %), et concerne presque exclusivement les Lycées, bien que les indications de l'énoncé facilitent le passage du langage naturel au langage algébrique. La non-utilisation de la voie algébrique peut être attribuée à un manque de familiarité généralisé, et traduit la réticence des élèves à utiliser des lettres pour exprimer des propriétés ou décrire des procédures possédant une valeur générale (on préfère passer par la voie rhétorique pour justifier les résultats). De plus, l'idée de démonstration semble passablement étrangère aux élèves dont les travaux ont été analysés, puisqu'ils ont confondu « démontrer » et « vérifier dans un ou plusieurs cas numériques », comme on a pu le constater dans près de 90 % des copies.

Dans le problème *L'artisan*, la préférence pour la stratégie arithmétique, en lieu et place de la stratégie algébrique, a été encore plus nette que lors du concours (57 % contre 7 % de stratégie arithmétique). On peut donc affirmer que, face à une situation qui pouvait être affrontée assez simplement en utilisant l'outil algébrique ou l'outil arithmétique, les élèves ont choisi le second, probablement parce qu'ils le considèrent comme plus sûr et familier[12].

Pour ce qui est du problème *Composition de roses*, le recours à la stratégie algébrique a été extrêmement faible dans la catégorie 9 (8 % contre 18 % pour la stratégie arithmétique) ; et il est resté de toute façon inférieur au recours à la stratégie arithmétique dans la catégorie 10 (19 % contre 23 %). De manière générale, ce problème s'est avéré très difficile non seulement en catégorie 9 mais aussi en catégorie 10, tous types d'établissements confondus, même si les difficultés furent quasiment insurmontables pour les élèves des Instituts professionnels, comme en témoigne le nombre considérable de copies blanches (74 % dans la catégorie 9 et 58 % dans la catégorie 10).

Le groupe s'est concentré sur l'analyse *a posteriori* de ce problème, en vertu du fait que le recours à l'algèbre, même s'il est moindre, fut de toute façon plus fréquent que pour les deux autres problèmes.

Dans de nombreux travaux (considérés comme des *copies blanches*) portant sur le problème *Composition de roses*, l'on se borne à rapporter les « données », presque toujours traduites de manière erronée ou confuse :

Exemple 1

Blanches 1 = 2　　*jaunes 1/3 des rouges*　　*rouges 2 = 1× 2*

Exemple 2

B = C1, C2　　*C1 = G 1/3 de R*　　*C2 R2 = R C1*

Comme on peut le noter, langue naturelle et symboles mathématiques se mêlent, donnant lieu à des écritures ambigües, difficiles à manier.

Dans d'autres cas, les données et les relations sont exprimées de façon incorrecte ou incomplète, même si l'on constate que les élèves sont plus ou moins à l'aise avec le langage algébrique.

Exemple 3

Roses jaune 1/3 des roses rouges　　*La conposition: Roses rouges le double → 526*

Exemple 4

a + b + c = 235　　*b + a = 263*

c est 1/3 de b　　*b est 2b dans la première composition transposition*

Les élèves ont du mal à synthétiser les informations de l'énoncé, ce qui constitue clairement un *obstacle* en vue de la résolution du problème. À ce propos, il nous semble utile de rappeler combien il est important de réserver du temps, durant l'activité didactique, à la lecture et à la compréhension de l'énoncé, avant de s'occuper de la résolution du problème : en d'autres termes, la priorité immédiate n'est pas la recherche d'outils pour obtenir la réponse ; on doit en revanche être très attentif, au préalable, aux phases de *compréhension* et de *représentation* (graphique, algébrique …) des relations entre les données, susceptibles d'être déduites de l'énoncé.

Dans les copies où l'algèbre est utilisée, les erreurs les plus fréquentes on été relevées au niveau de la formalisation algébrique, et ont notamment concerné le *choix des inconnues* et la *« mise en formule »*.

Une même lettre a été utilisée pour indiquer des quantités différentes : la plupart du temps, cette erreur est due à la présence de roses rouges dans les deux compositions

[12] Le groupe par la suite préparé une nouvelle version du problème qui visait à décourager l'utisation d'une méthode par essais. La nouvelle version a été proposée lors du 19° RMT, II Épreuve, intitulée *Le déplacement* mais dans ce cas aussi, la stratégie arithmétique a été largement plébicitée par rapport à la statégie algébrique (pour davantage d'informations, nous renvoyons à la Fiche de la *Banque de problèmes – Site internet :* www.armtint.org).

x = roses blanches ; y = roses jaunes ; z = roses rouges [13]
x + (1/3)z + (1/2)z = 235
x + 2z = 263

Dans l'écriture ci-dessus, comme on peut le noter, la signification de « *z* » est ambigüe : on ne spécifie pas si la lettre indique le nombre de roses rouges de la première (I) ou de la seconde (II) transposition. De sorte que dans le second terme de la première équation, « *z* » prend le sens de « nombre de roses rouges dans I, tandis que dans le troisième terme il prend celui de « nombre de roses rouges dans II et à nouveau, dans la deuxième équation, celui de « nombre de roses rouges dans I ».
D'autres fois encore, on trouve des identités parce que les élèves ne mettent pas en relation les données de la première composition avec celles de la seconde.

Exemple 6

x + (1/3) x + [235-(1/3)x - x)] = 235 et 2x + 263 – 2x = 263

Il y a des copies où, tout en empruntant la voie algébrique, l'élève procède de manière aléatoire, sans procéder à des vérifications sur la compatibilité de l'écriture symbolique et des conditions indiquées dans l'énoncé.

Exemple 7

L'élève pose : *x = roses rouges* puis il pose l'équation : *1/3 x + x + 2x = 498 (235 + 263)*
… mais il oublie complètement les roses blanches !

Exemple 8

L'élève pose *x = roses blanches ; y = roses jaunes ; z = roses rouges* et il écrit :
x + y + z = 235
x + y = 263 ajoutant en dernier lieu : *« JE NE SAIS PAS FAIRE ÇA »*

Dans différentes copies, figurent plusieurs essais de mise en formule, l'un après l'autre, comme dans le cas suivant :

Exemple 9

x + (1/3)x + x + x + 2x = 498
x + (1/3)y + z + z + y + 2y = 498
x + (1/3)x + x + 2x = 235

Ce genre de copie indique des défaillances au niveau de la mathématisation et montre que l'élève ne vérifie pas ce qu'il est en train d'écrire.

4.1.2. Seconde partie : description et résultats

La seconde partie de l'enquête se constituait d'un questionnaire pratiquement identique pour les catégories 9 et 10, hormis deux questions supplémentaires pour les élèves de la catégorie 10.
À travers ce questionnaire (voir l'*Annexe*) nous voulions en particulier analyser :

- l'acquisition des techniques de résolution d'une équation ;
- l'acquisition de la notion de solution d'une équation ;
- la capacité d'interpréter et de construire des formules.

Nous voulions en outre rassembler des indications sur la compréhension des notions d'inconnue et de paramètre et, si possible, faire ressortir d'éventuelles erreurs. Le *Tableau 3* constitue la récapitulation des réponses correctes :

[13] On trouve fréquemment dans les copies des choses du genre : *x = roses rouges, y = roses blanches, roses rouges = 1/3 roses jaunes, …Les élèves sont-ils conscients que les lettres indiquent des nombres et non pas des « objets » ?* Du point de vue pédagogique, surtout durant la phase où l'on aborde la notion d'équation, il convient de ne pas négliger cet aspect et d'inviter à une réflexion sur la signification des symboles introduits.

Tableau 3 ***(total des réponses correctes et pourcentages)***

Questions	**1a**	**1b**	**1c**	**2a**	**2b**	**2c**	**2d**	**2e**	**2f**	**2g**
cat.9	107 (41 %)	70 (27 %)	126 (49 %)	91 (35 %)	88 (34 %)	192 (74 %)	83 (32 %)	67 (26 %)	13 (5 %)	
cat.10 autres établissements	32 (58 %)	29 (53 %)	37 (67 %)	27 (49 %)	26 (47 %)	49 (89 %)	23 (42 %)	17 (31 %)	2 (4 %)	3 (5 %)
cat.10 lycées	97 (82 %)	81 (68 %)	106 (89 %)	83 (70 %)	104 (87 %)	112 (94 %)	90 (76 %)	71 (60 %)	51 (43 %)	36 (30 %)
Questions	**3a**	**3b**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9a**	**9b**	**9c**
cat.9	17 (7 %)	17 (7 %)	8 (3 %)		101 (39 %)	75 (29 %)	136 (53 %)	122 (47 %)	106 (41 %)	31 (12 %)
cat.10 autres établissements	7 (13 %)	6 (11 %)	6 (11 %)	17 (31 %)	21 (38 %)	20 (36 %)	30 (55 %)	17 (31 %)	16 (29 %)	9 (16 %)
cat.10 lycées	56 (47 %)	54 (45 %)	47 (39 %)	36 (30 %)	74 (62 %)	84 (71 %)	97 (82 %)	89 (75 %)	82 (69 %)	44 (37 %)

Conformément aux trois objectifs décrits précédemment, il ressort du questionnaire un progrès lors du passage de la catégorie 9 à la catégorie 10 ; un progrès à l'évidence plus important si l'on envisage les classes des Lycées, plutôt que celles des Instituts. On observe cependant, même dans la catégorie 10, un pourcentage modeste de réponses correctes aux questions portant sur l'acquisition de la notion de solution d'une équation (une moyenne de 40 % dans les lycées et de seulement 16,5 % dans les autres types d'établissements), et aux questions inhérentes aux capacités d'interpréter et de construire des formules (une moyenne de 66 % pour les lycées et 34 % pour les autres types d'établissements).
Parmi les questions posées afin d'enquêter sur l'acquisition des techniques de résolution d'une équation, nous analyserons plus en détail les résultats de certaines d'entre elles (Portioli, 2010).

Question 2a : $-2x = 0$

Entrent ici en lice la notion de solution d'une équation ; la règle d'annulation d'un produit ; et plus généralement, le rôle du zéro dans la division et dans la multiplication.
Comme le montre le tableau ci-dessous, la question s'est révélée très difficile ; l'on note une progression uniquement dans la catégorie 10/Lycées.

	Cat. 9	**Cat.10 (lycées)**	**Cat.10 (autres établissements)**
Réponses exactes	35 %	70 %	21 %
Réponses erronées	45 %	28 %	44 %
Aucune réponse	20 %	2 %	35 %

Dans la plupart des réponses obtenues, on constate une tendance à appliquer mécaniquement les « règles » pour la résolution d'équations (principes d'équivalence), en ignorant les propriétés du zéro. Ainsi, il est écrit : $-2x = 0$ d'où $x = 0/-2$ et on s'arrête-là ; à moins que l'élève ne déclare que l'équation est « impossible » ou « indéterminée » ; certains élèves trouvent correctement le résultat $x = 0$, mais affirment ensuite que l'équation est indéterminée (0 n'est-il pas un nombre ?) ; enfin, certains élèves, qui appliquent erronément le second principe, écrivent : $x = 2 / 0 = 0$.
Cette gestion difficile du zéro, notamment dans l'application de la règle d'annulation d'un produit, est confirmée par les autres questions où étaient requises la connaissance et l'utilisation de cette même règle. (cf. 1b ; 2f, 2g).
Cette situation est, selon nous, imputable à deux choses :

1 dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre, le problème du zéro, que l'on traîne souvent depuis l'école élémentaire, est hélas à nouveau sous-estimé ;

2 on se concentre sur la résolution d'équations de plus en plus complexes, et l'on insiste sur le classement des équations (déterminées, impossibles, indéterminées) ; un classement souvent dépourvu de sens pour les élèves.

Questions 2b et 2d : ***$2 = 6x$*** ***$4x + 7 = 25x$***

Dans le premier de ces problèmes, la présence de l'inconnue à la droite de du signe = a – comme prévu – déstabilisé les élèves ; ce qui confirme leur difficulté à reconnaître et à gérer la propriété symétrique de l'égalité. On peut aussi conclure à l'existence d'un conditionnement – transmis aux élèves plus ou moins implicitement –, qui consiste à travailler avec l'inconnue dans le premier membre de l'équation : certains élèves ressentent donc le besoin de changer les termes avant de résoudre le problème, ce qui comporte parfois des erreurs, comme dans le cas suivant :
$-6x = 2$, d'où $x = 1/-3$.
De plus, on a constaté des erreurs induites par la conviction selon laquelle, dans une division, le diviseur doit être inférieur au dividende, comme par exemple : $x = 6/2 = 3$, $-21x = -7$ d'où $x = -21/-7 = 3$.
Une autre confirmation de l'efficacité modeste d'une méthode d'enseignement visant essentiellement à la transmission de techniques de calcul littéral et de stratégies de résolution, ressort de l'analyse des résultats des sept premiers problèmes. Bien qu'il s'agisse de résoudre de simples équations du premier degré à coefficients numériques, dans les classes de deuxième année de lycée, seul 38 % des élèves ont donné sept réponses exactes ; tandis que dans les autres types d'établissements (Instituts), ce pourcentage dégringole à 9 %.
De ce point de vue, il est tout à fait significatif que les problèmes relatifs à l'acquisition de la notion d'équation et à la capacité d'interpréter et de construire des formules, obtiennent un faible pourcentage de réponses exactes. Considérons, par exemple, la *Question 5* :

Sachant que *a* indique un nombre qui est la solution de l'équation

$$2(x^2 - 3) - 5(1 + x^3) - 1 - x - 2(1 - x) = 0$$

l'expression

$$2(a^2 - 3) - 5(1 + a^3) - 1 - a - 2(1 - a)$$

a une valeur

□ positive **□ négative** **□ nulle**

Explique pourquoi.

Ce problème a également posé de grosses difficultés aux classes de Seconde (cat. 10) : on n'a obtenu que 30 % de réponses exactes dans les classes de lycée, un pourcentage qui chute de moitié (15 %) dans les autres types d'établissements (Instituts). Certains ont répondu que l'expression avait une valeur *positive* ; d'autres *négative* ; d'autres encore *nulle* ; tandis que des élèves ont déclaré *on n'en sait rien*, avec toute une gamme d'explications souvent intéressantes du fait des erreurs qu'elles véhiculent[14].
De grosses difficultés ont également été relevées dans les réponses au *Problème 7*, où l'on demandait d'interpréter une écriture symbolique :

On désigne par *y* le nombre de voitures et par *a* le nombre de motos du garage.
Exprime avec des mots l'information que te communique l'écriture suivante

$$y = 7a + 2$$

	Cat. 9	Cat. 10 (lycées)	Cat. 10 (autres établissements)
Réponses exactes	23 %	62 %	10 %

Nous reproduirons ici quelques réponses parmi les plus fréquentes : *« Il y a 7 motos et 9 autos »* ; *« Le nombre d'autos est équivalent à 7 motos plus 2 »* ; *« Les voitures sont égales à 7 des motos, plus deux quelque chose qu'on ne connaît pas »* ; *« Les voitures sont égales à 7 motos plus deux autres véhicules ».*

4.2. Expérimentation dans le cadre du collège (perfectionnement)

Nous avons eu l'occasion, à la demande d'une directrice de collège, de proposer une activité de « perfectionnement ». Il s'agissait de travailler avec 27 élèves de sept classes différentes de catégorie 8, choisis

[14] Voici quelques exemples : *« On n'en sait rien : ça dépend du signe de a »* ; *« Négative : parce que a^3 est l'élément le plus grand qui reste négatif, mais qui est multiplié par un un signe négatif »* ; *« Positive parce que les nombres à la gauche du signe = sont tous négatifs et en les mettant à droite ils deviennent positifs »* ; *« Positive,car je pense que vu qu'il y a beaucoup de soustractions, pour obtenir zéro le **a** doit être un nombre positif »* ; *« Nulle, parce que ce n'est plus une équation ».*

parmi ceux qui étaient bons en mathématique et s'intéressaient à cette matière. L'activité, qui se déroulait une heure par semaine, pour un total de 15 heures, avait pour objectif de développer l'intérêt des élèves, de les stimuler, et d'approfondir en leur compagnie la compréhension des notions.
Dans certaines classes, on avait déjà abordé la notion d'équation ; dans d'autres, elle a fut abordée parallèlement à notre intervention.
La notion a été présentée de manière « traditionnelle », à partir du calcul littéral, en insistant surtout sur les aspects manipulatoires. Pour nous, ce fut donc l'occasion de vérifier « *à très court terme* » l'apprentissage de la notion d'équation en tant qu'« objet » ; et, dans le même temps, nous avons eu l'opportunité de présenter ce concept en tant qu'« outil » à travers l'éventail de problèmes du RMT.
Nous avons proposé quelques problèmes choisis parmi ceux du questionnaire. Nous rapportons les résultats des questions présentées au paragraphe précédent.

	Réponses exactes	**Incompréhension du problème**
Question 2a	54 %	0
Question 2b	59 %	0
Question 2d	59 %	4 %
Question 7	50 %	19 %

Nous avons également relevé chez ces élèves des difficultés au niveau de la gestion du nombre 0, tandis qu'ils confondaient équation « impossible » et équation « indéterminée », dans la mesure où ces termes étaient pour eux complètement dépourvus de sens. À cet égard, les mots qui ont échappé à une élève devant l'équation « $-2x = 0$ » sont tout à fait emblématiques : « *… je ne me rappelle plus si elle est impossible ou indéterminée* ».
Face aux problèmes du RMT susceptibles d'être résolus à l'aide d'une équation ou d'un système linéaire, l'attitude des élèves a été différente. Même les élèves qui n'avaient pas encore abordé la notion d'équation, ont spontanément utilisé une inconnue (qui n'était pas toujours indiquée par x) et mis en formule la situation, en cherchant ensuite à la résoudre, généralement par essais plus ou moins organisés ; mais aussi, dans certain cas, en utilisant la division en tant qu'opération inverse de la multiplication – appliquant ainsi (et de fait) le second principe d'équivalence. De cette manière, ils n'ont jamais perdu le fil du problème, vérifiant de manière spontanée le résultat obtenu.
Dans le cas de problèmes formalisables à l'aide d'un système algébrique, les élèves ont naturellement utilisé deux inconnues, mettant inconsciemment en place un système, qu'ils ont ensuite résolu soit par essais, soit en excogitant élaborant des méthodes correspondant à celles qu'ils apprendront à appeler – plus tard dans leur parcours scolaire – des méthodes de « réduction » et de « substitution ».

5. Réflexion sur les résultats : nos hypothèses sur la nature des obstacles rencontrés par les élèves

Il ressort de la première partie de l'enquête une nette diminution du recours aux équations pour résoudre les problèmes, par rapport à ce qui s'était passé pendant le concours. Nous pensons que ce résultat exprime plus vraisemblablement l'état des connaissances algébriques des élèves, fruit d'un travail individuel ; tandis que lors du concours, les copies étaient l'expression l'un travail de groupe.
Comme c'était prévisible, on observe une différence de comportement quant au recours aux équations, en fonction du type d'établissement (dans les lycées, le pourcentage est plus élevé que dans les instituts techniques ; les scores sont pratiquement nuls dans les instituts professionnels) ; et en fonction de la classe dont proviennent les élèves, ce qui souligne le rôle revêtu par l'enseignement reçu.
Dans les résultats de la catégorie 10, l'étude, une année durant, des équations et de leurs propriétés, ne semble avoir eu guère d'influence sur la capacité de résolution des problèmes à l'aide de la stratégie algébrique.
De plus, les difficultés qu'ont eues les élèves à répondre aux questions du questionnaire, nous permettent d'affirmer que, malgré le grand nombre d'heures consacré en classe à l'étude des équations, il n'en demeure pas moins des lacunes et des incertitudes en ce qui concerne la compréhension des notions de base (solution, inconnue, paramètre) ; et en ce qui concerne la mise en œuvre des méthodes de résolution du problème. Ces lacunes et ces incertitudes perdurent bien après la fin du second degré. Nous en avons eu la preuve en analysant les résultats d'un questionnaire destiné aux étudiants inscrits en première année de Mathématique, de Physique et d'Informatique à l'université de Sienne, et en première année de Techniques de la Prévention à l'université de Parme. Certains problèmes du questionnaire étaient les mêmes que ceux qui avaient été proposés dans le second degré. Dans ce cas, les plus mauvais résultats obtenus (environ 40 % de réponses exactes) concernent aussi les problèmes relatifs au concept de résolution d'une équation. On signalera en particulier la conviction tenace selon laquelle, pour résoudre une équation, on doit nécessairement en passer par la manipulation algébrique et l'utilisation de formules, sans prendre le temps, au préalable, d'observer l'équation tel « un tout unique » pour en saisir les spécificités.

En ce qui concerne la catégorie 8, les résultats de l'expérience montrent en outre que même les « forts en math » ne semblent avoir assimilé que superficiellement les notions liées au calcul littéral et à l'approche des équations ; tandis que la majorité d'entre eux applique mécaniquement des méthodes dont ils n'ont pas compris la signification.

Notre première hypothèse est la suivante : l'une des premières causes du non-redéploiement des connaissances algébriques constaté lors de l'enquête et pendant l'expérience, est de ***nature strictement didactique.***

Nous retenons en effet que les difficultés rencontrées par les élèves, sont dues à la séquence traditionnelle de l'enseignement. On commence en effet par l'introduction du calcul littéral, suivie d'exercices d'une complexité croissante ; puis on passe à la présentation des équations et des principes d'équivalence qui leur sont inhérents ; et on se lance enfin dans des équations toujours plus complexes, voire même dans des équations à coefficients littéraux. On se borne donc aux formes de résolution des équations, présentées comme une suite de transformations essentiellement syntaxiques.

Les élèves travaillent donc sur des écritures déjà formalisées et les manipulent de diverses façons, sans acquérir la capacité de les décliner dans des langages autres que le langage formel (par exemple graphique et verbal), ce qui crée une séparation entre « le monde des nombres et celui des lettres ». De manière générale, les manuels introduisent tout d'abord les équations comme des « objets sur lesquels il faut réaliser des transformations » ; c'est seulement plus tard qu'on demande de les utiliser, comme on a coutume de le dire, pour les « problèmes pouvant être résolus au moyen d'équations ».

Cette manière de procéder, typique de l'enseignement traditionnel, a des répercussions souvent négatives sur la motivation des élèves et sur leur intérêt pour la matière. Il se configure chez eux l'idée selon laquelle les équations seraient à l'image d'un ensemble de mécanismes et de méthodes de calcul, dont on ignore les applications car on n'en comprend pas pleinement l'importance. Enfin, lorsque vient le temps des problèmes, on tombe souvent sur des situations d'abord assez simples, qu'on peut – le cas échéant – résoudre en employant des stratégies autres qu'algébriques : ce qui ne permet pas de lever le doute sur l'utilité des notions étudiées, ni sur celle des exercices effectués. On illustre ensuite les méthodes de résolution en fonction du type de problèmes. La stratégie algébrique est donc perçue davantage comme une contrainte que comme un outil indispensable pour représenter et résoudre certains problèmes.

Une autre raison expliquant les difficultés rencontrées par les élèves est sans nul doute de ***nature épistémologique***, comme en témoigne la longue et laborieuse histoire du développement de la pensée algébrique et plus particulièrement de la notion d'équation (voir par exemple D'Amore, 2001).

Nous pensons en dernier lieu que l'explication des difficultés rencontrées par les élèves est de ***nature ontogénétique*** : elles sont en effet liées à l'âge relativement tardif – vers 13/14 ans – où les élèves sont capables de passer d'un inventaire systématique à une généralisation. Et c'est bien ce que semblent confirmer les recherches menées, notamment, par le « Groupe fonctions » (Henry *et alii*, 2011).

6. Quelques suggestions

Quelles indications utiles pour les enseignants peut-on tirer de ce travail ?

Pour le groupe, il est fondamental de veiller soigneusement aux modalités d'approche de l'algèbre, en tenant compte du fait que l'objectif visé consiste à faire l'expérience – à travers toute une gamme de situations expressément pensées – des différentes fonctions du formalisme algébrique ; de la mise en formule ; et des manipulations syntaxiques. On s'accorde notamment sur l'exigence d'insister sur la traduction et l'interprétation des expressions dans les deux langages – naturel et formel –, une activité ayant pour but de sensibiliser les élèves à la signification des signes et des symboles utilisés ; et de les engager à vérifier la validité des écritures obtenues. En effet, on ne doit pas oublier que, dans la modélisation algébrique d'un problème, l'élément-clé est précisément la « mise en formule », c'est-à-dire la traduction – à travers des égalités – de relations exprimées verbalement.

Nous rapportons ci-dessous quelques conseils importants préconisés par le groupe lors du travail en classe :

- laisser le temps aux élèves de passer progressivement du *langage rhétorique*, au *langage syncopé* et enfin au *langage symbolique* (à l'instar de ce qu'il advint dans l'évolution historique de l'algèbre), de manière à ce qu'ils prennent toujours davantage conscience de la signification et de la valeur du langage formel ;
- discuter des méthodes de résolution des problèmes, de façon à mettre à la disposition de l'ensemble de la classe le travail de chaque élève ou de chaque groupe ; et, parallèlement, engager une réflexion sur la différence entre les stratégies de type arithmétique, ayant pour finalité la recherche du résultat à partir des données ; et les stratégies algébriques, ayant pour finalité la formalisation des relations contenues dans l'énoncé, à travers des inconnues opportunément choisies ;

- tenir compte de toutes les situations où émergent naturellement des relations de type fonctionnel avec des données inconnues préalablement exprimées à l'aide de schémas ou de tableaux pouvant aider au processus de mathématisation et à la recherche de la solution ;
- souligner, dans le cadre du débat collectif, les limites et les potentialités de la stratégie algébrique pour ce qui est de la résolution des problèmes ;
- aider les élèves à se fier à l'outil algébrique, sans qu'ils se paralysent face à un manque de connaissances techniques ; et les pousser à trouver des solutions avec les moyens dont ils disposent ;
- présenter des problèmes où les élèves peuvent rencontrer et affronter des difficultés bien précises ; pousser les élèves à déjouer ces difficultés grâce à des enjeux didactiques – nouveaux et appropriés – proposés en classe.

L'expérience accumulée au cours de ces dernières années (Doretti *et alii*, 2009, Grugnetti L. *et alii*, 2012), nous permet d'affirmer que certains problèmes du RMT semblent particulièrement adaptés au travail en classe, car ils permettent de saisir et d'apprécier la simplification apportée par l'usage du langage algébrique. Par la suite, l'exigence d'apprendre à manipuler des expressions symboliques, des équations ou des fonctions, à travers le processus de modélisation, donnera tout son sens et toute sa justification à l'étude de ces objets mathématiques.

Le groupe suggère donc de remplacer l'approche traditionnelle de l'algèbre prévoyant la « séquence » : *calcul littéral – équations – problèmes* ; par l'enchaînement inverse : *problèmes – équations – calcul littéral*, de manière à donner la priorité à la « recherche de sens » plutôt que de miser sur les techniques de calcul littéral ou sur les méthodes de résolution. Il nous semble, en guise de conclusion, que la réflexion suivante synthétise excellemment notre propos : *« Les équations devraient être étudiées dans différents contextes, comme des outils permettant de répondre à des questions. Savoir mettre en équation ou, en d'autres termes, modéliser une situation en étant conscient du modèle choisi, est encore plus important que de savoir résoudre l'équation »* (cf. p. 201, CREM, 1999).

Les exercices portant purement et simplement sur les manipulations syntaxiques n'ont eu aucun effet sur la compréhension des notions, ni sur la capacité des élèves de résoudre les problèmes : donc, évitons-les et consacrons notre temps à des activités de formation plus utiles pour nos élèves !

7. Bibliographie

CREM, 1999, (édition italienne) « *La Matematica dalla scuola materna alla maturità. Proposta di un percorso globale per l'insegnamento della matematica* » (sous la direction de Lucia Grugnetti et Vinicio Villani – traduction de Silvano Gregori). Pitagora editrice – Texte original de Rouche N. (sous la direction de), 1995, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques.*
D'Amore B. : 2001, « *Didattica della matematica* », Pitagora editrice.
Doretti L., Salomone L. : 2006, « Avvio al concetto di equazione con i problemi del RMT », *in* R. Battisti, R. Charnay, L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds.) *RMT : des problèmes à la pratique de la classe,* vol. 5, ARMT, IPRASE Trentino, IUFM de Lyon – Centre de Bourg-en-Bresse, p. 235-244.
Doretti L., Medici D., Rinaldi M. G., Salomone L. : 2007, « Costruzione del concetto di equazione: dalla messa in formula alla risoluzione di equazioni e sistemi lineari », *in* L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M. G. Rinaldi (Eds.) *I problemi come supporto per l'apprendimento: il ruolo del RMT*, vol. 6, Département de Mathématique de l'université de Parme, Section de Parme de l'ARMT, ARMT, p. 133-150.
Doretti L., Medici D., Rinaldi M. G., Salomone L. : 2008, « Costruzione del concetto di equazione: un possibile percorso con i problemi del RMT », *in* L. Grugnetti, F. Jaquet, G. Bellò, R. Fassy, G. Telatin (Eds.) *RMT fra pratica e ricerca in didattica della matematica*, vol. 7, Centro Risorse per la Didattica della Matematica, section de la Vallée d'Aoste de l'ARMT, ARMT, p. 163-179.
Doretti L., Medici D., Rinaldi M. G., Salomone L.: 2009, « Dare significato ai concetti di equazione e di sistema: attività in classe con i problemi del RMT », *in* L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds), *Rallye Mathématiques Transalpin et interculturalité/Rally Matematico Transalpino e intercultura,* vol. 8, Brigue, 2008, ARMT, SCNAT, p. 121-142.
Grugnetti L., Jaquet F., Medici D., Rinaldi M.G. : 2012, « Vers la construction de concepts à travers l'analyse des procédures des élèves et des obstacles qu'ils rencontrent lors de la résolution de problèmes », in *Enseignement des mathématiques et contrat social, enjeux et défis pour le 21^e siècle*, « Actes du colloque EMF 2012 », Genève 2012, http://www.emf2012.unige.ch/ , p. 1192-1203.
Henry A., Henry M., Rizza A. : 2011, « Funzioni per risolvere problemi? », *La gazzetta di Transalpino,* Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin, n° 1, p. 42-61.
Malara N. A. : 1997, « Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'aritmetica all'algebra », *La matematica e la sua didattica,* n° 2, éd. CRSEM, p. 176-185.
Medici D., Rinaldi M. G. : 2006, « Messa in formula e risoluzione di equazioni e sistemi lineari con i problemi del RMT » *in* R. Battisti, R. Charnay, L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds) *RMT : Des problèmes à la pratique de la classe*, ARMT, IPRASE Trentin, IUFM de Lyon – Centre de Bourg-en-Bresse, p. 245-253.
Medici D., Rinaldi M. G. : 2010, « Un approccio costruttivo alla formalizzazione », in *Progettare Lavorare Scoprire* (sous la direction de Paola Vighi), projet Licences scientifiques, université de Parme, p. 107-118.
Portioli Y. : 2010, « Indagine sull'apprendimento del concetto di equazione », *Mémoire de maîtrise en Mathématique*, Université de Parme (directeur de maîtrise : Daniela Medici).
Sfard A. : 1991, « On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin », *Educational Studies in Mathematics,* vol. 22, p. 1-36.

ANNEXE

QUESTIONNAIRE PROPOSÉ EN CATÉGORIE 10

2. Vérifie si les équations suivantes ont été résolues correctement. Relève éventuellement l'erreur et rapporte en marge la méthode correcte.

$\mathbf{7x + 5 = 3x - 2}$ $4x = 3$ $x = -1$	$\mathbf{7x + 5 + x - 5 = 0}$ $8x = 0$ $x = -8$	$\mathbf{5x + 2 = 8x}$ $2 = 3x$ $2/3 = x$

2. Résous les équations suivantes, en indiquant tous les passages.

a) $-2x = 0$	
b) $2 = 6x$	
c) $3x = 3$	
d) $4x + 7 = 25x$	
e) $(x - 3)(x + 3) + 1 - 3x = x(x - 1)$	
f) $(x - 2)^2 = 0$	
g) $(3 - 5x)(x + 2) = 0$	

3. Étant donnée l'équation $5a + 2x - 1 = 3a$ résous-la,
- en considérant *a* comme l'inconnue :
- en considérant *x* comme l'inconnue :

4. Peux-tu décider si l'un des nombres suivants est la solution de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$?

□ OUI □ NON

Si oui, indique lequel : **a)** 1 **b)** 0 **c)** -1 **d)** -2

Justifie tes réponses.

5. Sachant que *a* indique un nombre qui est la solution de l'équation :
$2(x^2 - 3) - 5(1 + x^3) - 1 - x - 2(1 - x) = 0$ l'expression
$2(a^2 - 3) - 5(1 + a^3) - 1 - a - 2(1 - a)$ a une valeur
□ positive □ négative □ nulle
Explique pourquoi.

6. Trouve l'aire d'un trapèze où la petite base et la hauteur mesurent toutes deux *a* et la grande base $a + 4$.

7. On désigne par *y* le nombre de voitures et par *a* le nombre de motos du garage. Exprime avec des mots l'information que te communique l'écriture suivante : $y = 7a + 2$.

8. Trouve le nombre qui, ajouté à sa moitié, donne le nombre lui-même augmenté de 8. Indique la méthode que tu as utilisée pour trouver ce nombre.

9. Les dimensions d'un rectangle, exprimées en centimètres, sont *a* et *a+2*.
   - Que représente pour ce rectangle l'expression *a (a+2)* ?
   - Indique le périmètre du rectangle à travers une expression :

- Trouve, si elle existe, la valeur de *a* par laquelle le rectangle a le même périmètre qu’un triangle isocèle ayant une base de 6 cm et chacun des deux autres côtés mesurant *a*.

USO DEI PROBLEMI DEL RMT IN CLASSE

Graziella Telatin

A nome del gruppo di lavoro[1]

Premessa

Il gruppo "Uso dei problemi del Rally in classe", che ha lavorato durante il 15° convegno dell'ARMT a Barletta, era composto da 14 insegnanti che appartenevano sia alla scuola primaria, sia alla scuola secondaria di primo grado. Alcuni di loro avevano già utilizzato i problemi del Rally nella loro pratica didattica, mentre altri erano alla scoperta di questo utile strumento per affrontare la matematica "in modo diverso".
Fin da subito, sono emerse all'interno del gruppo le diverse modalità individuali di affrontare la didattica della matematica e le aspettative rispetto all'uso del RMT.
Le osservazioni e i problemi emersi durante un primo momento di confronto sono stati molto interessanti. Eccone un elenco sintetico:

1. Da parte di chi già conosceva il Rally, è stato sollevato il problema del coinvolgimento dei colleghi in questa attività. A questo proposito si sono delineati due modi di porsi: obbligare gli insegnanti a provare il Rally affinché si rendano conto delle sue potenzialità, oppure aspettare che sia una scelta volontaria.
   Si è visto, nel tempo, che la scelta di obbligare gli insegnanti non è pagante, perché, se non convinti, utilizzeranno i problemi senza coglierne la valenza positiva. D'altra parte è necessario che gli insegnanti vengano a conoscenza di questo strumento. Può essere utile, quindi, che ci sia qualche insegnante convinto che inizi ad utilizzarli, coinvolgendo poi i colleghi in questa attività. Oppure ci si può rivolgere a quegli insegnanti formatori che utilizzano questo strumento durante le loro formazioni, affinché lo rendano noto.
2. Coinvolgimento degli allievi.
   Questo è in realtà molto meno difficile, perché gli alunni sono normalmente felici di partecipare a questa competizione, che offre loro modo di lavorare sulla matematica in modo forse diverso da quello a cui sono abituati. Bisogna però sottolineare che la scelta di aderire al RMT deve essere condivisa e fatta propria dalla classe e non può mai essere imposta dall'insegnante. È per questo che è opportuno che gli alunni facciano una prima prova di allenamento per rendersi conto di che cosa si tratta, prima di aderire alla gara.
3. Coinvolgimento dei genitori.
   Anche i genitori devono essere convinti che l'utilizzo del RMT non sia una perdita di tempo, ma che permetta di fare veramente della matematica e che ogni alunno ne tragga dei vantaggi. A questo proposito sono state illustrate delle esperienze che hanno visto i genitori pienamente coinvolti con problemi del Rally che sono stati loro proposti. I problemi venivano assegnati come un "compito a casa"; questa attività li ha fatti appassionare alla risoluzione di questi problemi, ed ha visto tutta la famiglia responsabile.
4. Collaborazione con i colleghi di altre discipline.
   I colleghi della scuola secondaria di primo grado hanno sottolineato la possibilità di collaborare con gli insegnanti di lingua per un'analisi attenta della funzione di ogni singola parola nel contesto del problema. Questa attività si dimostra molto ricca di spunti per uno studio morfologico e sintattico della lingua.
5. Recupero di alunni in difficoltà.
   L'ampia possibilità di scelta che il RMT offre, permette di selezionare i problemi a seconda della necessità e di dare la possibilità, anche agli alunni in difficoltà, di confrontarsi con situazioni che stimolino il loro pensiero e permettano di favorire dei processi di astrazione. Nulla vieta che problemi che sono stati studiati per categorie basse nell'ambito della competizione, vengano utilizzate per categorie più alte, a seconda della necessità.
6. Recupero dell'autostima
   Strettamente legato al punto precedente, ma più orientato su aspetti di competenze psicologiche e sociali, la possibilità che gli alunni hanno di confrontarsi, vedendo rispettato il proprio punto di vista e sentendosi ascoltati, permette di accrescere la propria autostima. Si è molto parlato in questo gruppo di come il nostro

[1] Telatin Graziella (Aosta coordinatore gruppo di lavoro), Asara Maddalena (Sassari), Cateni Chiara (Siena), Corigliano Graziella (Siena), Di Gennaro Rosaria (Puglia), Guastalla Rossella (Parma), Lucarelli Elena (Siena), Malcangi Rosa (Puglia), Massai Stefania (Siena), Mecacci Angela (Siena), Miraglia Mariapina (Parma), Sciscioli Rosaria (Puglia), Speranza Arcangelo (Puglia), Zingarelli M. Giuseppina (Puglia).

Rally offra spunto per costruire la capacità di lavorare nel gruppo e di assumersi responsabilità nei confronti della classe. Lavorare in gruppo non è una capacità innata, deve essere costruita e il Rally è uno strumento ideale. Inoltre è una modalità che può essere trasferita in tutte le altre discipline, che possono essere affrontate in modo problematico attraverso lavori di gruppo.

7. Cambiamento di ottica sull'insegnamento.
   Infine, il RMT offre la possibilità di cambiare il proprio modo di concepire l'insegnamento, offrendo uno strumento adeguato ad una concezione dell'apprendimento che permetta agli alunni di costruire il proprio sapere. I problemi del Rally possono essere utilizzati all'interno della propria classe, con il vantaggio di sapere che sono stati inventati in modo mirato, testati e analizzati su un gran numero di alunni.

Programma di lavoro

Il gruppo ha lavorato per sette ore e mezzo. Si è seguito il seguente programma (Crociani, Doretti, Salomone, 2005) :

Effettuare una analisi a priori dei problemi presentati su Geometria dello spazio, Cifra-numero-posizionalità, annotando le proprie osservazioni:

- *sulla comprensione e adeguatezza del testo,*
- *sui saperi matematici che si presume possano essere attivati o consolidati negli allievi o su eventuali nuove conoscenze che potrebbero essere stimolate,*
- *su come gli alunni, a seconde delle categorie alle quali il problema viene proposto, potrebbero risolverlo,*
- *su possibili difficoltà ed errori degli allievi,*
- *sulle opportunità didattiche offerte dal problema (esistenza di più soluzioni, possibilità di seguire più strategie, di favorire l'attività di collaborazione e discussione all'interno di un gruppo, ...),*
- *sulla possibilità di inserimento dei problemi proposti nei percorsi che ogni insegnante mette in atto nella propria classe per affrontare e lavorare sui suddetti argomenti.*

Sono stati presi in considerazione solo 3 dei problemi che erano stati preparati (una dozzina), ma su di essi sono state fatte osservazioni approfondite e la discussione che si è sviluppata è stata molto proficua.
Problemi presi in considerazione:

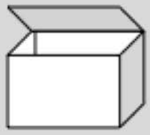
SCATOLINE: 17° RMT I-Prob. N. 5 Cat. 3, 4, 5
LA SCATOLA DA RICOPRIRE: 18° RMT I-Prob. N. 4 Cat. 3, 4, 5
LE MATITE DEL 15° RMT: 15° RMT II- Prob. N. 8 Cat. 5, 6

La scelta di due problemi di geometria dello spazio è stata fatta perché questo campo concettuale non è adeguatamente preso in considerazione, soprattutto nella didattica della scuola primaria. La sua importanza è fondamentale se si vuole passare dal mondo reale al mondo astratto della geometria bidimensionale ed alla sue figure.

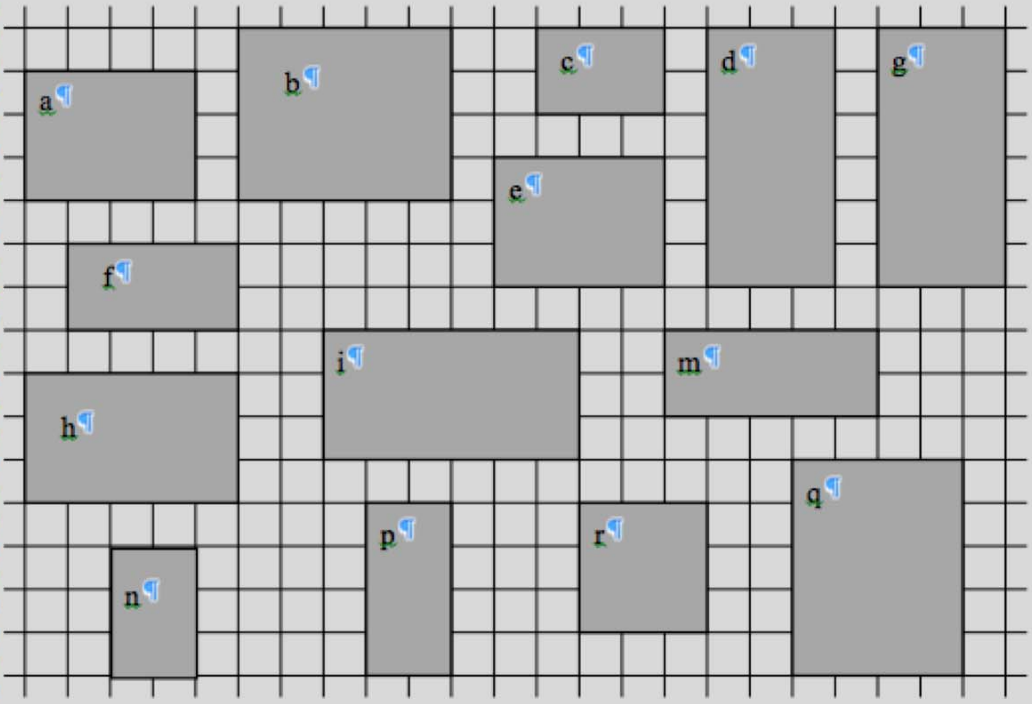
L’attività con i problemi

SCATOLINE (Cat. 3, 4, 5)

Franco ha dei cartoncini che unisce con dello scotch per ottenere delle scatoline tipo questa:



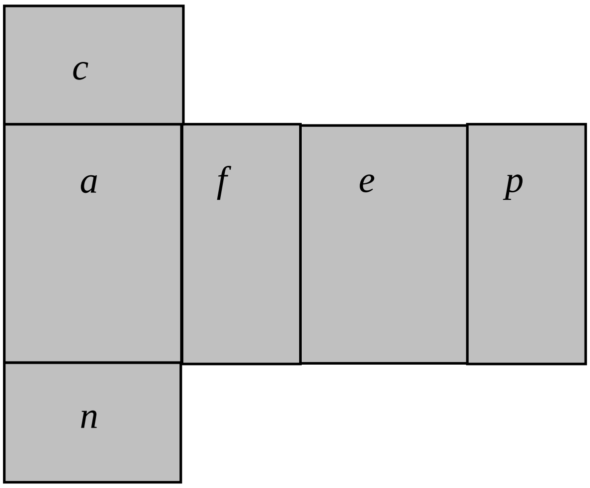
Ogni cartoncino è una faccia della scatolina. Franco li utilizza così come sono, senza tagliarne via dei pezzi e senza piegarli. Ha già costruito parecchie scatoline, ma gli restano ancora i cartoncini che vedete in basso:



Quante scatoline può ancora fare con i cartoncini che gli restano?
Dite quali sono i cartoncini che gli serviranno e come avete fatto a trovarli.

Gli insegnanti presenti si sono divisi in gruppetti di lavoro di tre o quattro persone ed hanno avuto esclusivamente il testo del problema, senza analisi a priori, né indicazioni dell’attribuzione delle classi a cui era destinato. Visto tutti i punti che dovevano essere trattati, gli insegnanti avevano a disposizione più tempo di quello che si concede in classe per risolvere i problemi.
Come primo compito i vari gruppetti hanno dovuto risolvere il problema. Un solo gruppo ha ritagliato le varie facce e ha provato a metterle insieme per vedere se i lati contigui combaciavano.
Gli altri gruppi si sono orientati su strategie di conteggio dei quadretti come unità di misura per la grandezza delle facce e sul conteggio di un lato dei quadretti preso come unità di misura lineare per la lunghezza dei lati.
Nella messa in comune del lavoro si sono fatte numerose osservazioni sulla completezza e la comprensione del testo, come richiesto dal punto 1 del programma.
Innanzitutto si è notato che il modello, in alto a destra, della scatola, che voleva essere di aiuto per immaginarla con il coperchio, era inadeguato. Troppo piccolo, passava quasi inosservato, mentre avrebbe potuto essere veramente di aiuto, ingrandito e messo in giusto risalto, per suggerire la forma della scatola. Inoltre sembrava suggerire che una faccia fosse un quadrato, portando fuori strada.
Nel testo stesso mancavano delle indicazioni importanti: è necessario dire che non si possono aggiungere pezzi e si suggerisce di sostituire “senza tagliarne via dei pezzi e senza piegarli” con un più generico “senza modificarli” che include anche il divieto ad aggiungere delle parti.
Il secondo punto del programma ha suscitato numerose osservazioni, sia da parte degli insegnanti della scuola primaria, sia da parte di quelli della scuola secondaria.

Per entrambe le scuole c'è la capacità importante di saper "vedere" gli oggetti nella propria testa in tre dimensioni e saper passare dallo spazio al piano e viceversa. Inoltre ci deve essere la capacità di misurare usando una unità di misura adeguata. In questo caso l'unità di misura era suggerita, o imposta, dalla quadrettatura del foglio.
Per quello che riguarda la scuola primaria, si è messo in evidenza che ci doveva essere consapevolezza, da parte degli alunni, di trovarsi di fronte ad una scatola già vista, conosciuta. Il richiamo ad un oggetto che rientra tra quelli consueti, avrebbe potuto far loro capire che la forma delle facce era sempre rettangolare e che le facce erano sei. Era inoltre necessario avere presente o costruire il concetto che le facce opposte erano uguali e parallele. Quindi si trattava di cercare tre coppie di rettangoli uguali. A questo punto, però, mentre le prime due coppie erano facilmente individuate e collegate dal fatto che la lunghezza del lato congruente era sempre la stessa per le quattro figure, per trovare la terza coppia idonea a chiudere la scatola bisognava considerare prima un lato, che doveva essere congruente ad un lato di una delle facce già prese in considerazione, e poi l'altro lato, che doveva essere congruente al lato di un'altra faccia presa in considerazione. Nel nostro caso era facile individuare le facce *a, e, f, p* per le quali il lato congruente era sempre di 4 quadretti, mentre era più difficile trovare la terza coppia formata dalle facce *c, n* che andavano individuate considerando prima il lato lungo 3, congruente con il lato libero della faccia *a,* e poi il lato lungo 2, congruente con il lato libero della faccia *f.*



Per la scuola secondaria, si sono sottolineati i concetti di unità lineari e quadrate, il concetto di congruenza e parallelismo.
Durante la discussione su quali potessero essere le procedure utilizzate nei due ordini di scuola, si è evidenziato che, da un ordine all'altro, c'è una notevole differenza per quello che riguarda la capacità di astrazione. Mentre per la scuola di primo grado ci si può aspettare che gli alunni ritaglino effettivamente i pezzi e cerchino poi di ricostruire la scatola, come in un puzzle, andando un po' per tentativi, nella scuola secondaria gli alunni possono lavorare in modo astratto misurando, classificando e ragionando sui dati ottenuti. A questo proposito si è suggerito che, nell'uso eventuale di questo problema in classe, per la scuola secondaria, si aggiunga la condizione "senza ritagliare" in modo da sollecitare l'uso dell'astrazione.
Nell'immaginare le difficoltà che avrebbero potuto avere i bambini, si è passati da difficoltà pratiche nell'uso delle forbici e del ritaglio, ad altre più legate alla conoscenza del parallelepipedo. Per quanto riguarda le prime, i bambini della classe terza hanno ancora delle difficoltà a ritagliare seguendo esattamente una linea. Non danno importanza alla precisione nel fare combaciare le linee e si accontentano di un risultato approssimato, per cui sovrappongono o ritengono che anche se ne manca un pezzettino vada bene lo stesso. A questo proposito si è discusso sull'opportunità di valorizzare le varie competenze degli alunni che i problemi del RMT offre. Se si deve ritagliare, anche i bambini che non hanno, forse, grandi capacità di astrazione, ma che hanno buone capacità manuali possono essere gratificati dal lavoro nel gruppo. L'importante è che la distribuzione dei compiti al suo interno sia a carico dei bambini e che non venga imposto dall'insegnante.
La mancata conoscenza del parallelepipedo, invece, mette in luce altre difficoltà. Sembra strano pensare che un oggetto così usuale nella vita dei bambini, come può essere una scatola, si riveli così sconosciuto. Le difficoltà che i bambini incontrano fanno capire una volta di più che senza una riflessione e una istituzionalizzazione delle osservazioni fatte, non esiste vera conoscenza. Quindi si sono trovate, analizzando gli elaborati della prova, molte scatole con solo cinque facce o con sette.
Una difficoltà concettuale importante è stata messa in evidenza facendo notare che per passare dall'identificazione delle facce congruenti, dove veniva usato il quadretto come unità di misura quadrata,

all'identificazione delle facce che potevano incernierarsi a coppie, bisognava passare ad un'unità di misura lineare, identificando nella lunghezza di un lato del quadretto l'unità di misura adeguata. Era un continuo passare dal bidimensionale al lineare, per costruire un oggetto tridimensionale: assolutamente non facile!
Un'altra difficoltà che nel gruppo non è emersa, ma che era risultata importante dall'analisi degli elaborati, era legata alle lettere in corsivo minuscolo che identificavano la facce. Alcune lettere sono simmetriche o ruotate. Finché hanno un orientamento sul foglio non esistono problemi, ma nel momento in cui le facce vengono ritagliate e si mescolano sul banco non è più possibile dire se si sta maneggiando la faccia b, d, p o q. Molti degli errori riscontrati hanno avuto origine proprio dal fatto che non si era prevista questa difficoltà (come riportato nel verbale del gruppo di lavoro: geometria solida (incontro internazionale dell'ARMT a Nivelles, 2009).
Gli insegnanti del gruppo hanno ritenuto che il problema fosse difficile per classi di terza, possibile per classi di quarta e quinta per iniziare uno studio del parallelepipedo, e adatto in classi di prima della scuola secondaria di 1 grado per rivedere le difficoltà legate a questo argomento.
Si è poi andati a vedere i risultati ottenuti da questo problema nella competizione.

Scatoline / Boîtes 17RMT I 21 sections/sezioni

punteggi	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Totale	m
Cat. 3	202	72	24	24	28	350	0,87
Cat. 4	200	96	44	53	41	434	1,17
Cat. 5	155	104	38	64	62	423	1,47
tot	557	272	106	141	131	1207	1,19

in %

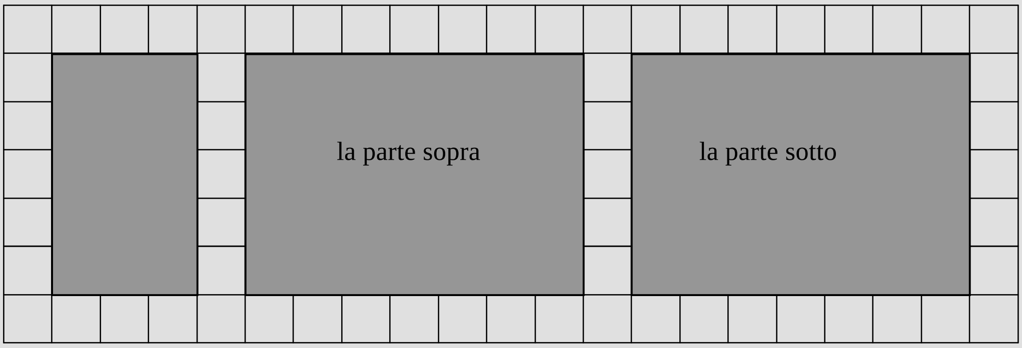
Cat. 3	58%	21%	7%	7%	8%
Cat. 4	46%	22%	10%	12%	9%
Cat. 5	37%	25%	9%	15%	15%
tot	46%	23%	9%	12%	11%

I risultati ottenuti dimostrano chiaramente che questo problema era troppo difficile per classi di categoria 3, molto difficile anche per le classi di categoria 4 e 5, nonostante si noti un miglioramento, anche se non significativo, nel passaggio da un livello all'altro.

A questo punto si è analizzato, in modo meno approfondito, il problema:

LA SCATOLA DA RICOPRIRE (Cat. 3, 4, 5)

Graziella vuole ricoprire interamente una scatola con dei rettangoli di carta.
Ha già disegnato questi tre rettangoli per coprire esattamente la parte sopra della scatola, la parte sotto della scatola e una delle altre facce della scatola.



Disegnate sulla quadrettatura in basso i tre rettangoli che mancano per ricoprire esattamente le altre facce della scatola.

Il problema è stato proposto nelle stesse classi in cui era stato proposto "Scatoline". Nonostante non fosse presente nessun modello di riferimento, il problema non ha incontrato delle difficoltà particolari. I risultati dimostrano che i bambini sono riusciti a risolverlo in modo soddisfacente.

Scatola da ricoprire / Boîte à recouvrir 18RMT I

punteggi	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Totale	m
Cat. 3	56	77	87	40	101	361	2,15
Cat. 4	53	82	87	39	225	486	2,62
Cat. 5	49	85	56	50	305	545	2,88
tot	158	244	230	129	631	1392	2,60

in %

Cat. 3	16%	21%	24%	11%	28%
Cat. 4	11%	17%	18%	8%	46%
Cat. 5	9%	16%	10%	9%	56%
tot	11%	18%	17%	9%	45%

Nel testo del problema si è cercato di ovviare alle difficoltà che l'analisi del primo problema aveva fatto emergere. Quindi si è semplificato togliendo le facce in eccesso, che potevano essere un distrattore. Poiché si era visto che molti bambini avevano pensato ad una scatola a cinque facce, perché non avevano considerato o il coperchio o la base della scatola, nel testo si parla espressamente di "parte sopra" e "parte sotto". Il nocciolo del problema risulta comunque lo stesso: si tratta sempre di immaginare un oggetto tridimensionale, vedere la facce opposte uguali e parallele e poi considerare i lati di queste facce, in un continuo andirivieni tra misure lineari, quadrate e oggetti tridimensionali.
Si è discusso a questo punto sulle carenze che i problemi del RMT consentono di mettere in luce nella didattica del lavoro in classe. In questo caso appare evidente che la scuola elementare non prevede di lavorare sulla geometria tridimensionale, e soprattutto prevede poca manipolazione, costruzione di modelli, riflessioni su quanto si ottiene. Questo passaggio dal lavoro pratico alla teoria viene svolto, quando viene svolto, in tempi brevi per arrivare subito all'astrazione. I bambini hanno invece bisogno di soffermarsi a lungo sulla possibilità di manipolare e di costruire, lavorando in gruppo, di modo che le osservazioni di uno diventino fonte di conoscenza per tutti.

Dopo aver fatto un tuffo nella geometria, si è preso in considerazione un altro argomento, molto sentito dalle insegnanti delle scuole elementari, ma importante anche negli altri ordini di scuola: *Cifra-numero-posizionalità*. Il Rally ha messo a punto numerosi problemi che affrontano questo concetto e il gruppo cifra-numero-posizionalità li ha analizzati ampiamente (Crociani, Spatoloni, 2005, 2006, 2007, 2008). Tra tutti, noi abbiamo analizzato il seguente:

LE MATITE DEL 15° RMT (Cat. 5, 6)
Gli organizzatori hanno deciso di offrire una matita a tutti i partecipanti al 15° RMT.
Alla fabbrica delle matite, un operaio ha il compito di mettere un'etichetta con scritto «15° RMT, 2007» su ogni matita.
Con 10 matite riempie poi delle scatole sulle quali mette la stessa etichetta.
Quando ha riempito dieci scatole, ne fa un pacchetto, sul quale mette ancora l'etichetta «15° RMT, 2007».
Infine, con 10 pacchetti, egli riempie uno scatolone sul quale mette ancora l'etichetta «15° RMT, 2007».
Oggi, l'operaio ha preparato le matite richieste dalla sezione di Transalpino ed ha constatato che per questa sezione ha dovuto contare 2007 etichette «15° RMT, 2007».

Quante matite ha ordinato la sezione di Transalpino?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Questo problema ha messo in evidenza come il Rally matematico sia interessante e presenti delle difficoltà anche a livello adulto. I gruppi si sono infatti lasciati coinvolgere nella ricerca della soluzione, lavorando tutti con concentrazione e grande impegno. Nell'analisi che è stata fatta, a soluzione avvenuta, si è messo in luce come all'inizio sia quasi inevitabile partire con una ricerca più pratica, che si avvale per esempio di disegni. La difficoltà consiste nel fatto che non si riesce ad arrivare alla fine del problema solo con disegni; è opportuno ad un certo punto ragionare in modo più astratto. In questo passaggio dalla fase pratica a quella più teorica è facile "perdere il filo" e commettere errori. Il problema è stato ritenuto adatto per le classi per le quali era stato pensato, può essere un buono spunto per rivedere il valore di posizione nel sistema decimale o, con opportune variabili, può essere di aiuto per introdurre sistemi di numerazione con basi diverse da 10.
Anche questo problema ci ha permesso di ragionare sulle pratiche didattiche della scuola primaria. Ci si è chiesti se è sufficiente il lavoro di manipolazione, di raggruppamento di oggetti concreti e di sistematizzazione del lavoro fatto che viene praticato, normalmente nelle prime due classi della scuola elementare. Già a partire dalla classe terza si richiede ai bambini uno sforzo di astrazione che non è detto che sia stato raggiunto da tutti. Sarebbe probabilmente opportuno continuare con attività di raggruppamento di oggetti non solo fino alle decine, ma sicuramente anche alle centinaia e alle migliaia.
Il lavoro che in queste sette ore e mezzo è stato fatto è stato un lavoro ad ampio respiro che ha permesso non solo di prendere in considerazione i concetti matematici che i problemi affrontavano, ma anche problemi di dinamiche di gruppo e di didattica normale di classe.
Analizzando le dinamiche che si erano attivate nei gruppi che hanno lavorato, si è potuto riconoscere le stesse che si evidenziano nei gruppi degli alunni. Di fronte ad un nuovo problema, dopo un primo momento di appropriazione individuale, ci possono essere dei gruppi nei quali si attiva una discussione serrata tra diverse opinioni, altri in cui ci si aiuta in modo più pacato e si costruisce insieme la soluzione, altri ancora nei quali emerge un leader che, per le proprie capacità o per la propria personalità, si impone al gruppo. Non serva a nulla liquidare le dinamiche che creano degli ostacoli al buon funzionamento del gruppo come dinamiche sbagliate; è molto più utile osservarle per vedere quali risultati si ottengono. In classe è compito dell'insegnante aiutare gli alunni a riflettere su come ha funzionato il gruppo e su cosa si può fare per farlo funzionare in modo più efficace. È sempre compito dell'insegnante aiutare a capire che l'efficacia non consiste solo nella corretta soluzione del problema, ma nella possibilità che tutti i componenti del gruppo partecipino al lavoro, abbiano la possibilità di esprimere la propria idea e siano considerati dagli altri. Tanto più il lavoro farà partecipare e discutere tutti, tanto più il gruppo si arricchirà non solo di conoscenze, ma anche di abilità sociali, quelle che ci fanno star bene con gli altri.
I gruppi si sono confrontati sulla didattica usuale che permette di affrontare i concetti presi in considerazione dai problemi. Si è riconosciuto che sovente si è troppo sbrigativi nel considerare un concetto come trattato a fondo e ci si illude che il lavoro fatto sia sufficiente, mentre sarebbe necessario soffermarsi molto più a lungo su attività di costruzione del concetto. Il confronto di quello che si fa nella scuola elementare e in quella di primo grado superiore ha permesso di conoscere meglio i punti di partenza, le aspettative e i programmi reciproci.
Ancora una volta si è capito quale grande importanza abbiano i problemi del RMT. Sono utili sicuramente per offrire una motivazione piacevole e accattivante ad interessarsi alla matematica nel momento della gara. Il loro valore travalica però la competizione per offrire un validissimo supporto alle insegnanti in classe per affrontare,

costruire o consolidare i concetti previsti dal programma. Inoltre possono essere visti anche come una cartina di tornasole che mette in luce le carenze esistenti rispetto ad un determinato argomento, dando perciò all'insegnante la possibilità di intervenire sia utilizzando i problemi stessi, sia creando in classe percorsi adeguati ai propri allievi che permettano di approcciare correttamente i concetti.

Bibliografia

Crociani C., Doretti L., Salomone L.: 'Riflettere insieme agli insegnanti sul lavoro in classe con problemi del RMT: resoconto di un'esperienza', *Atti Bourg-en Bresse 2004-Arco di Trento 2005*, ARMT, IPRASE Trentino, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en Bresse, Tipografia "Il torchio" Cagliari, 135-150.

Crociani C., Spatoloni R.: 'I Problemi del Rally come supporto didattico per l'avvio alla costruzione e al successivo consolidamento del concetto di cifra, numero e notazione posizionale', *Atti Bourg-en Bresse 2004-Arco di Trento 2005*", ARMT, IPRASE Trentino, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en Bresse, Tipografia "Il torchio" Cagliari, 224-234.

Crociani C., Spatoloni R.: 'Ancora problemi sul concetto di cifra-numero-posizionalità, *Atti Parma 2006*, ARMT, sezione di Parma dell'ARMT, Dipartimento di matematica dell'università di Parma, PRESSCOLOR, Quartu S. Elena, Cagliari, 117-132.

Crociani C., Spatoloni R.: 'Sui concetti di cifra, numero, valore posizionale; resoconto di alcune esperienze', *Atti Bard 2007*, ARMT, sezione della Valle d'Aosta dell'ARMT, Centro risorse per la didattica della matematica, Tipografia Valdostana, Aosta, 143-162.

Crociani C., Spatoloni R.: 'Cifra-numero... tanti problemi: resoconto di tre anni del gruppo di lavoro', *Atti Brigue 2008*, ARMT, SCNAT, PRESSCOLOR, Quartu S. Elena, Cagliari, 99-120.

UTILISATION EN CLASSE DES PROBLEMES DU RMT

Graziella Telatin

Au nom du groupe de travail[1]

Préambule

Le groupe « Utilisation des problèmes du Rallye en classe », qui a travaillé durant la 15^{e} conférence de l'ARMT à Barletta, se composait de 14 enseignants venant de l'école primaire et du collège. Certains d'entre eux avaient déjà utilisé les problèmes du Rallye dans leur pratique didactique ; tandis que d'autres allaient à la découverte d'un instrument utile pour aborder les mathématiques « de manière différente ».
Dès le début, se sont fait jour – au sein du groupe – non seulement la manière dont chacun abordait l'enseignement des mathématiques, mais aussi les différentes attentes inhérentes à l'utilisation du RMT.
Les observations et les problèmes qui se sont dégagés lors d'une première phase de confrontation se sont avérés du plus grand intérêt. En voici une liste synthétique :

1. Ceux qui connaissaient déjà le Rallye ont soulevé le problème de l'implication de leurs collègues dans cette activité. À cet égard, deux positions se sont dessinées : obliger les enseignants à essayer le Rallye de sorte qu'ils se rendent compte de ses potentialités ; ou attendre que ce choix soit volontaire.
   On a vu, chemin faisant, que la contrainte n'était pas payante. De fait, si les professeurs ne sont pas convaincus du bien-fondé de leur choix, ils utiliseront les problèmes sans en saisir la valeur positive. Il n'empêche cependant que les enseignants doivent être à même de connaître cet instrument. Il serait donc bon qu'un professeur gagné à la cause du RMT commence à en utiliser les problèmes et, dans un deuxième temps, implique ses collègues dans cette activité. À moins que l'on ne s'adresse aux enseignants-instructeurs qui utilisent cet outil durant leur formation, afin qu'ils en fassent la promotion.
2. Implication des élèves.
   La chose est en réalité bien moins difficile, car les élèves sont généralement heureux de participer à cette compétition, qui leur permet peut-être de travailler sur les mathématiques d'une manière différente de celle à laquelle ils sont habitués. Il nous faut toutefois souligner que le choix d'adhérer au RMT doit être partagé, intégré par la classe, et ne peut en aucun cas être imposé par l'enseignant. Raison pour laquelle il est souhaitable que les élèves participent à un premier entraînement, afin qu'ils sachent à quoi s'attendre avant d'entrer dans la compétition.
3. Implication des parents.
   Les parents doivent être convaincus que le recours au RMT ne représente pas une perte de temps ; qu'il permet vraiment de faire des mathématiques ; et que chaque élève en tire des avantages. À ce propos, on a décrit des expériences ayant vu des parents pleinement impliqués dans les problèmes du Rallye qui leur ont été proposés. Les problèmes étaient donnés comme « devoirs à domicile» ; et cette activité leur a permis de se passionner pour la résolution des problèmes, non sans impliquer l'ensemble de la famille.
4. Collaboration avec les collègues des autres disciplines.
   Les collègues du second degré ont souligné la possibilité de collaborer avec les professeurs de langue pour une analyse attentive de la fonction de chaque mot dans le contexte du problème. Cette activité, riche de multiples pistes, vise à une étude morphologique et syntaxique de la langue.
5. Soutien et rattrapage des élèves en difficulté.
   Le large éventail offert par le RMT, permet de sélectionner les problèmes selon les exigences du moment ; et donne la possibilité, notamment aux élèves en difficulté, de se confronter à des situations susceptibles de stimuler leur réflexion et de favoriser leur cheminement vers l'abstraction. Rien n'empêche que les problèmes étudiés, dans le cadre de la compétition, pour des catégories inférieures, ne soient le cas échéant utilisés pour des catégories plus élevées.
6. Renouer avec l'estime de soi
   Étroitement liée au point précédent, l'idée de renouer avec l'estime de soi repose davantage sur certains aspects inhérents aux compétences psychologiques et sociales ; la possibilité qu'ont les élèves de se confronter, en se sentant écoutés et en voyant leur propre point de vue respecté, permet en effet de

[1] Telatin Graziella (Aoste, coordinatrice du groupe de travail), Asara Maddalena (Sassari), Cateni Chiara (Sienne), Corigliano Graziella (Sienne), Di Gennaro Rosaria (Pouilles), Guastalla Rossella (Parme), Lucarelli Elena (Sienne), Malcangi Rosa (Pouilles), Massai Stefania (Sienne), Mecacci Angela (Sienne), Miraglia Mariapina (Parme), Sciscioli Rosaria (Pouilles), Speranza Arcangelo (Pouilles), Zingarelli M. Giuseppina (Pouilles).

développer l'estime de soi. Dans ce groupe, on a abondamment parlé de la manière dont notre Rallye offre l'occasion, à l'élève, de se forger la capacité de travailler au sein du groupe et de prendre des responsabilités vis-à-vis de la classe. Travailler en groupe n'est pas une capacité innée ; celle-ci se doit d'être construite et le Rallye est, à cet égard, un instrument idéal. Cette compétence peut, en outre, s'appliquer à toutes les autres disciplines, qui peuvent être abordées et problématisées à travers les travaux de groupes.

7. Changement d'optique quant à l'enseignement.
   Le RMT permet en dernier lieu de changer notre manière d'envisager l'enseignement, car il offre un outil adapté à une conception de l'apprentissage permettant aux élèves de construire leur propre savoir. Les problèmes du Rallye peuvent être utilisés en classe, et présentent l'avantage suivant : ils ont été inventés de façon ciblée ; ils ont été analysés et testés sur un grand nombre d'élèves.

Programme de travail

Le groupe a travaillé durant sept heures et demie, selon le programme suivant (Crociani, Doretti, Salomone, 2005) :

Effectuer une analyse a priori *des problèmes présentés sur la Géométrie de l'espace ; Chiffre-nombre-numération de position, en notant nos propres observations :*

- *sur la compréhension et le bien-fondé du texte ;*
- *sur les savoirs mathématiques dont on suppose qu'ils pourront être mis en œuvre ou consolidés chez les élèves ; et sur les nouvelles connaissances qui pourraient éventuellement en découler ;*
- *sur la manière dont les élèves, selon les catégories auxquelles le problème est proposé, pourraient le résoudre ;*
- *sur les éventuelles difficultés et erreurs des élèves ;*
- *sur les opportunités didactiques offertes par le problème (existence de plusieurs solutions ; possibilité de suivre plusieurs stratégies, de favoriser l'activité de collaboration et de discussion au sein du groupe ...),*
- *sur la possibilité d'introduire les problèmes proposés dans le parcours que chaque enseignant met en œuvre dans sa propre classe, ceci afin d'affronter et de travailler sur les aspects évoqués ci-dessus.*

Nous nous sommes bornés à envisager trois des problèmes préparés (une douzaine) ; mais on s'est livré à leur propos à des observations approfondies, et la discussion qui s'est développée fut en tout état de cause très fructueuse.
Les problèmes envisagés :

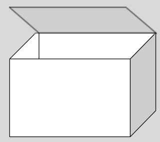
Boîtes: 17$^{\text{ème}}$ RMT I-Problème n° 5 Catégories 3, 4, 5
La boîte à recouvrir : 18$^{\text{ème}}$ RMT I-Problème n° 4 Catégories 3, 4, 5
Les crayons du 15$^{\text{e}}$ RMT : 15$^{\text{ème}}$ RMT II- Problème n° 8 Catégories 5, 6

Si l'on a choisi deux problèmes de géométrie de l'espace, c'est parce que ce domaine conceptuel n'est pas considéré avec l'attention qu'il mérite, surtout à l'école primaire. Son importance est pourtant fondamentale si l'on veut passer du monde réel au monde abstrait de la géométrie bidimensionnelle et à ses figures.

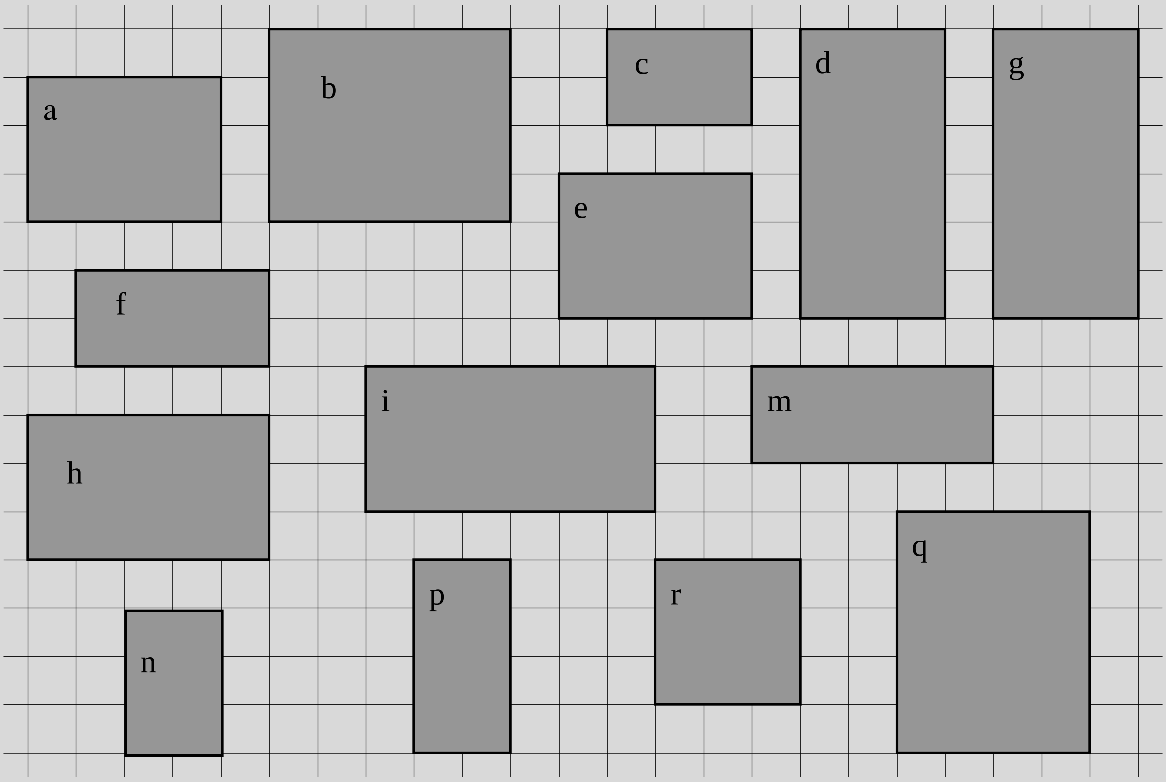
L’activité et les problèmes

BOÎTES (Catégories 3, 4, 5)

Franco assemble des cartes avec du papier collant pour obtenir des boîtes de ce genre :



Chaque carte est une face de la boîte. Franco les utilise comme elles sont, sans les découper et sans les plier. Il a déjà construit plusieurs boîtes, mais il lui reste encore les cartes que vous voyez ci-dessous :

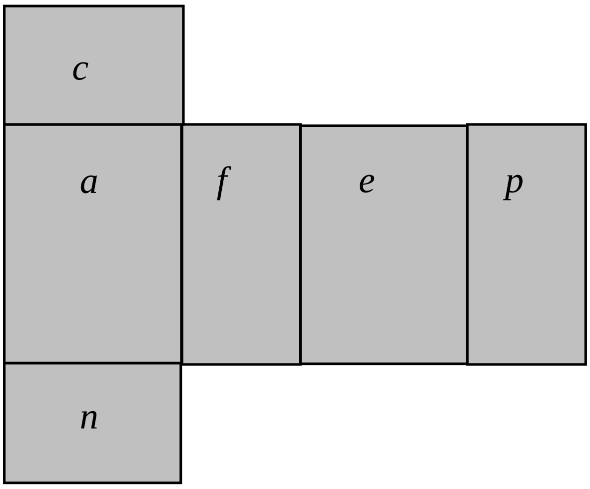


Combien de boîtes pourra-t-il encore construire avec les cartes qui restent ?
Dites quelles sont les cartes qui lui serviront.

Les professeurs présents se sont divisés en petits groupes de travail formés de trois ou quatre personnes, et ont reçu exclusivement le texte du problème, sans analyse *a priori*, ni indications quant aux classes visées. Une fois vus tous les éléments à traiter, les enseignants eurent à leur disposition davantage de temps qu’on en accorde en classe pour résoudre les problèmes.
La première tâche des différentes équipes consista à résoudre le problème. Un seul groupe a découpé les faces et a essayé de les réunir pour voir si les côtés contigus coïncidaient.
Les autres groupes ont opté pour des stratégies de décompte des carreaux comme unité de mesure de la grandeur des faces ; et de décompte d’un côté des carreaux pris comme unité de mesure linéaire pour la longueur des côtés.
Lors de la mise en commun du travail, de nombreuses remarques furent avancées sur le bien-fondé et la compréhension du texte, comme l’exige le premier point de notre programme.
On a avant tout observé que le modèle, en haut à droite, de la boîte – qui avait précisément pour vocation d’aider à imaginer la boîte et son couvercle – était plutôt raté. Trop petit, on le remarquait à peine ; tandis qu’il aurait vraiment pu, agrandi et mis en évidence, aider à trouver la solution en suggérant la forme de la boîte. En outre, le croquis semblait indiquer que l’une des faces était carrée, et les élèves risquaient par conséquent de faire fausse route.
D’autre part, des indications importantes faisaient défaut dans le texte : il fallait en effet dire qu’on ne pouvait pas ajouter d’éléments ; et l’on a suggéré de remplacer « *sans les découper et sans les plier* » par l’expression un peu plus générale « *sans les modifier* » qui implique également l’interdiction d’ajouter des éléments.

Le deuxième point du programme a suscité de nombreuses réflexions, de la part des professeurs du premier et du second degré.
Dans le primaire comme dans le secondaire, il est important de savoir « visualiser » mentalement les objets en trois dimensions ; il faut aussi savoir passer de l'espace au plan et vice-versa. De plus, on doit être capable de mesurer en utilisant une unité adaptée. Dans ce cas, l'unité de mesure était suggérée, ou imposée, par le quadrillage de la feuille.
Pour ce qui est du primaire, on a souligné que les élèves devaient avoir conscience de se trouver devant une boîte qu'ils avaient déjà vue, qu'ils connaissaient. L'évocation d'un objet des plus courants, aurait pu leur faire comprendre que la forme des faces était toujours rectangulaire et que celles-ci étaient au nombre de six. Il était en outre nécessaire d'avoir à l'esprit – ou de construire – le concept selon lequel les faces opposées étaient égales et parallèles. Il s'agissait ensuite de chercher trois paires de rectangles égaux. Dès lors, cependant, tandis que les deux premières paires étaient facilement repérables en vertu du fait que la longueur du côté isométrique était la même pour les quatre figures ; pour trouver la troisième paire susceptible de terminer la boîte, il fallait d'abord envisager un côté, qui devait être isométrique à un côté de l'une des faces déjà envisagées ; et puis l'autre côté, qui devait être isométrique au côté de l'autre face envisagée. Dans notre cas, il était facile de repérer les faces *a, e, f, p* où le côté isométrique était toujours de quatre carreaux, tandis qu'il était plus difficile de trouver la troisième paire formée par les faces *c, n* qui devaient être découvertes en envisageant d'abord le côté long 3, isométrique au côté libre de la face *a,* et ensuite le côté long 2, isométrique au côté libre de la face *f.*

s



Pour le secondaire, on a veillé à insister sur les concepts d'unités de longueur et d'aire, ainsi que sur les concepts d'isométrie et de parallélisme.
Au cours de la discussion sur les procédures pouvant être mises en œuvre dans le primaire et dans le second degré, on a souligné qu'entre le primaire et le collège, il existait une différence importante quant à la capacité d'abstraction. Tandis que dans le primaire, on peut s'attendre à ce que les élèves découpent effectivement les éléments et essayent ensuite de reconstituer la boîte, à l'instar d'un puzzle, en procédant un peu par approximation ; dans le second degré, les élèves peuvent travailler dans l'abstrait en mesurant, en classant, en réfléchissant sur les données obtenues. À cet égard, l'on a suggéré que, si l'on devait éventuellement utiliser ce problème en classe, il faudrait ajouter pour le second degré la clause « *sans découper* » de manière à encourager le recours à l'abstraction.
Imaginant les difficultés qu'auraient pu avoir les enfants, on est passé des difficultés pratiques (telles que l'utilisation des ciseaux et le découpage), à des difficultés davantage liées à la connaissance du parallélépipède. Pour ce qui est de la première catégorie de difficultés, les enfants de troisième année d'école primaire (8-9 ans) ont encore du mal à découper les rectangles en suivant exactement une ligne. Pour eux, faire coïncider précisément les lignes importe peu, et ils se contentent d'un résultat approximatif. Raison pour laquelle ils superposent les éléments, à moins qu'ils ne retiennent que si un petit bout manque, c'est du pareil au même. À ce propos, on s'est demandé s'il ne fallait pas valoriser, chez les élèves, les différentes compétences que les problèmes du RMT permettent de mettre en œuvre. S'il s'agit de découper, les enfants qui n'ont peut-être pas de grosses capacités d'abstraction, mais qui possèdent en revanche une bonne manualité, peuvent être gratifiés par leur travail au sein du groupe. L'important, c'est que la répartition des tâches dans le groupe soit du ressort des enfants et non pas imposée par le professeur.
La méconnaissance du parallélépipède pointe, en revanche, d'autres difficultés. Il peut en effet paraître étrange qu'un objet tel qu'une boîte, fort courant dans la vie des enfants, s'avère si mystérieux. Les difficultés que les enfants rencontrent, montrent encore une fois que sans une réflexion et sans une institutionnalisation des

observations, aucune véritable connaissance n'est possible. On a par conséquent trouvé, en analysant les copies , de nombreuses boîtes présentant seulement cinq faces, ou d'autres qui en étaient pourvues de sept.
Un obstacle conceptuel important a été mis en évidence lorsqu'on a indiqué que, pour passer de l'identification des faces isométriques – où l'on utilisait le carreau comme unité d'aire– à l'identification des faces pouvant aller par paire, il fallait passer à une unité de longueur, en identifiant dans la longueur d'un côté du carreau la bonne unité de mesure. On passait en permanence du bidimensionnel au linéaire, et ce pour construire un objet tridimensionnel : vraiment pas facile du tout !
Une autre grande difficulté qui ne s'est pas fait jour dans le groupe, mais qui résultait de l'analyse des copies, était liée aux lettres minuscules en italique identifiant les faces. Certaines lettres sont symétriques ou retournées. Dès lors qu'elles ont une orientation sur la feuille, il n'y a pas de problème ; mais à partir du moment où les faces sont découpées et se mélangent sur le pupitre, il devient impossible de dire si l'on est en train de manier la face b, d, p ou q. Beaucoup d'erreurs relevées, tiennent précisément au fait que l'on n'avait pas prévu cette difficulté (en témoigne le rapport du groupe de travail : géométrie solide – rencontre internationale de l'ARMT à Nivelles, 2009).
Les professeurs du groupe ont retenu que le problème était difficile pour les classes de catégorie 3 (8-9 ans), envisageable pour celles de catégories 4 et 5 (9-10 et 10-11 ans) afin d'entamer l'étude du parallélépipède ; et utile au collège pour passer en revue les difficultés inhérentes à ce genre de sujet.
On est ensuite allé voir les résultats obtenus sur ce problème au sein de la compétition.

Scatoline / Boîtes 17RMT I 21 sections/sezioni

Scores	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 3	202	72	24	24	28	350	0,87
Cat. 4	200	96	44	53	41	434	1,17
Cat. 5	155	104	38	64	62	423	1,47
total	557	272	106	141	131	1 207	1,19

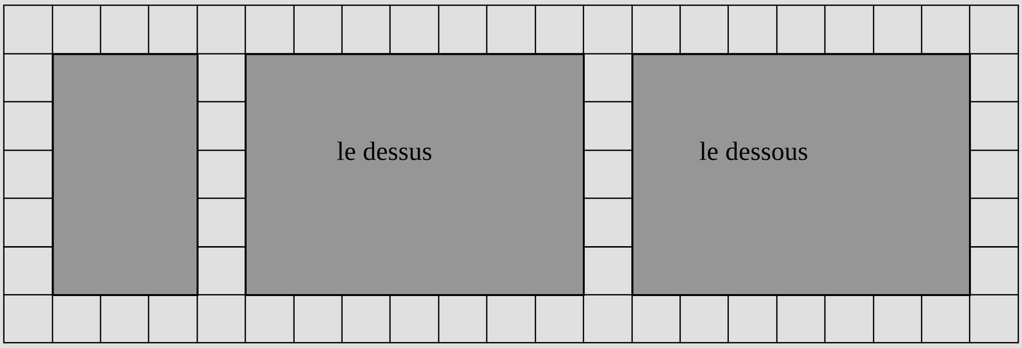
en %

Cat. 3	58 %	21 %	7 %	7 %	8 %
Cat. 4	46 %	22 %	10 %	12 %	9 %
Cat. 5	37 %	25 %	9 %	15 %	15 %
total	46 %	23 %	9 %	12 %	11 %

Les résultats obtenus montrent clairement que ce problème était trop difficile pour les classes de catégorie 3 ; et également très difficile pour les classes de catégorie 4 et 5, bien qu'on remarque une amélioration – certes guère significative – dans le passage d'un niveau à un autre.
On a alors analysé, mais de manière moins approfondie, le problème :

LA BOÎTE À RECOUVRIR (Cat. 3, 4, 5)

Graziella veut couvrir entièrement une boîte avec des rectangles de papier.
Elle a déjà dessiné ces trois rectangles pour couvrir exactement le dessous de la boîte, le dessus de la boîte et une des autres faces de la boîte.



Dessinez sur le quadrillage ci-dessous les trois rectangles qui manquent pour couvrir exactement les autres faces de la boîte.

Ce problème a été proposé aux classes qui s'étaient penchées sur celui des « Boîtes ». Bien qu'aucun modèle de référence ne soit présent, l'exercice n'a pas posé de problème particulier. Les résultats prouvent que les enfants sont parvenus à résoudre le problème de manière satisfaisante.

Scatola da ricoprire / La boîte à recouvrir 18RMT I

Scores	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 3	56	77	87	40	101	361	2,15
Cat. 4	53	82	87	39	225	486	2,62
Cat. 5	49	85	56	50	305	545	2,88
Total	158	244	230	129	631	1 392	2,60

en %

Cat. 3	16 %	21 %	24 %	11 %	28 %
Cat. 4	11 %	17 %	18 %	8 %	46 %
Cat. 5	9 %	16 %	10 %	9 %	56 %
total	11 %	18 %	17 %	9 %	45 %

Dans l'énoncé de ce problème, on a cherché à remédier aux difficultés que l'analyse du premier problème avait permis de dégager. On l'a donc simplifié en ôtant les faces superflues, qui pouvaient induire en erreur. Comme de nombreux enfants avaient pensé à une boîte à cinq faces (ils n'avaient en effet pas pris en considération le couvercle ou la base de la boîte) on parle expressément dans le texte de « *partie du dessus* » et de « *partie du dessous* ». Mais le nœud du problème demeure de toute façon le même : il s'agit toujours d'imaginer un objet tridimensionnel ; de repérer les faces opposées, identiques et parallèles ; et enfin d'envisager les côtés de ces faces dans un va-et-vient incessant entre les mesures de longueur et d'aire, et les objets tridimensionnels.
C'est alors que nous avons discuté des carences que les problèmes du RMT permettent de déceler dans le cadre de l'enseignement et du travail en classe. Dans le cas qui nous occupe, il est évident que l'école élémentaire n'envisage pas de travailler sur la géométrie tridimensionnelle ; et, surtout, qu'il n'y a guère de place pour la manipulation, pour la construction de modèles, pour une réflexion sur le résultat obtenu.Ce passage des travaux pratiques à la théorie advient – lorsqu'il advient – brièvement, de manière à parvenir immédiatement à l'abstraction. Or les enfants ont besoin de s'attarder longuement sur la possibilité de manipuler et de construire ; et ils doivent travailler en groupe de manière à ce que les observations d'un enfant deviennent une source de connaissances pour tous.
Après notre incursion dans la géométrie, on s'est penché sur un autre sujet, cher aux professeurs du de l'école primaire, mais tout aussi important pour les autres niveaux : *Chiffre-nombre-numération de position*. Le Rallye a

mis au point de nombreux problèmes qui abordent ce concept et le groupe *Chiffre-nombre-numération de position* les a amplement analysés (Crociani, Spatoloni, 2005, 2006, 2007, 2008). De tous ces problèmes, nous avons analysé le suivant :

LES CRAYONS DU 15ème RMT (Cat. 5, 6)

Les organisateurs ont décidé d'offrir un crayon à tous les participants du 15^{e} RMT.

À la fabrique de crayons, un employé est chargé de mettre le logo « 15^{e} RMT, 2007 » sur chaque crayon.

Avec 10 crayons, il remplit des boîtes sur lesquelles il met aussi le logo « 15^{e} RMT, 2007 ».

Lorsqu'il a rempli dix boîtes, il en fait un paquet, sur lequel il marque de nouveau le logo « 15^{e} RMT, 2007 ».

Finalement, avec 10 paquets, il remplit un carton sur lequel il marque encore le logo « 15^{e} RMT, 2007 ».

Aujourd'hui, l'employé a préparé les crayons commandés par la section de Transalpie. Il a compté que, pour cette section, il a dû mettre 2007 logos « 15^{e} RMT, 2007 ».

Combien de crayons la section de Transalpie a-t-elle commandés ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Ce problème a montré que le Rallye mathématique est intéressant aussi pour les adultes. Les groupes se sont en effet impliqués dans la recherche de la solution, travaillant tous avec concentration et entrain. Dans l'analyse qui fut faite, après que la solution a été trouvée, on a souligné qu'au début, il était presque inévitable de démarrer par une recherche plus pratique, à travers l'utilisation – par exemple – de dessins. Le *hic* résidait dans le fait qu'on ne parvenait pas à arriver à la fin du problème uniquement à l'aide de dessins ; il fallait, à un certain moment, raisonner de manière plus abstraite. Mais lors du passage de la phase pratique à une phase plus théorique, il était facile de « perdre le fil » et de faire des erreurs. On a retenu que le problème était approprié aux classes pour lequel il avait été conçu ; c'était aussi une excellente occasion de revoir la valeur de position dans le système décimal ; et suite à quelques modifications indispensables, ce problème pouvait aussi servir à introduire des systèmes de numération n'utilisant pas la base 10.
Ce problème nous a également permis de réfléchir aux pratiques didactiques à l'école primaire. On s'est demandé si le travail de manipulation, de regroupement d'objets concrets, et de systématisation du travail accompli était suffisant – cette activité étant normalement pratiquée durant les deux premières années d'école primaire. Dès la troisième année (CE2, en France), on demande en effet aux enfants un effort d'abstraction dont rien ne dit qu'il puisse être fourni par tous les élèves. En tout état de cause, il serait peut-être utile de poursuivre des activités de regroupement d'objets non seulement jusqu'aux dizaines, mais aussi – et certainement – jusqu'aux centaines et aux milliers.
Le travail de longue haleine effectué au cours de ces sept heures et demie, a permis non seulement d'envisager les concepts mathématiques que les problèmes affrontaient, mais aussi les problèmes de dynamique de groupe et d'enseignement ordinaire en classe.
En analysant les dynamiques qui s'étaient mises en place dans les groupes de travail, on a pu constater qu'elles se répétaient à l'identique dans les groupes d'élèves. Face à un nouveau problème, et après une première phase d'appropriation individuelle, survenait dans certains groupes un débat soutenu où se confrontaient différentes opinions ; dans d'autres groupes, on s'aidait mutuellement de manière plus sereine et l'on élaborait ensemble la solution ; dans d'autres encore, émergeait un leader qui, du fait de ses capacités ou de sa personnalité, s'imposait à l'équipe. Il ne sert à rien de faire fi des dynamiques faisant obstacle au bon fonctionnement du groupe sous le prétexte que celles-ci sont mauvaises ; il est bien plus utile de les observer et de voir les résultats obtenus. En classe, il revient au professeur d'aider les élèves à réfléchir sur la manière dont le groupe a fonctionné, et sur ce que l'on peut faire pour qu'il fonctionne de façon plus efficace. Il est toujours du devoir de l'enseignant d'aider à comprendre que l'efficacité ne relève pas seulement de la solution correcte du problème, mais aussi du fait que tous les membres du groupe puissent participer au travail ; qu'ils aient la possibilité d'exprimer leur propre opinion ; et qu'ils soient considérés par les autres. Plus le travail permettra la participation, l'échange et la discussion générale, plus le groupe s'enrichira non seulement au niveau des connaissances, mais aussi des habilités sociales permettant d'être bien avec autrui.
Les groupes se sont confrontés sur les conceptions didactiques qui permettent d'aborder les concepts envisagés par les problèmes. On considère trop hâtivement qu'un concept a été traité à fond, et l'on se leurre en estimant que le travail effectué est suffisant, alors qu'il serait nécessaire de se consacrer bien plus longuement aux activités visant à l'élaboration du concept. La comparaison entre ce qui se fait au cours élémentaire et au cours moyen a permis de mieux connaître les points de départ, les attentes et les programmes réciproques.
Encore une fois, on a saisi la grande importance des problèmes du RMT. Ils sont de toute évidence utiles car ils éveillent la curiosité ; ils plaisent et motivent les élèves et les poussent à s'intéresser aux mathématiques lors du concours. Leur valeur dépasse toutefois l'épreuve et ils offrent un excellent support aux enseignants qui, en classe, doivent aborder, construire ou consolider les concepts prévus par le programme. Les problèmes du RMT

peuvent également être envisagés comme révélateurs des carences des élèves sur un sujet déterminé ; ils offrent donc la possibilité au professeur d'intervenir non seulement en utilisant les problèmes mais aussi en instaurant en classe des parcours adaptés à leurs élèves. Autant de stratégies permettant d'aborder correctement les concepts.

Bibliographie

Crociani C., Doretti L., Salomone L. : '*Riflettere insieme agli insegnanti sul lavoro in classe con problemi del RMT : resoconto di un'esperienza*', Actes Bourg-en Bresse 2004-Arco di Trento 2005, ARMT, IPRASE Trentino, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en Bresse, Typographie "Il torchio" Cagliari, p. 135-150.

Crociani C., Spatoloni R. : '*I Problemi del Rally come supporto didattico per l'avvio alla costruzione e al successivo consolidamento del concetto di cifra, numero e notazione posizionale*', Actes Bourg-en Bresse 2004-Arco di Trento 2005, ARMT, IPRASE Trentino, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en-Bresse, Typographie "Il torchio" Cagliari, p. 224-234.

Crociani C., Spatoloni R. : '*Ancora problemi sul concetto di cifra-numero-posizionalità*', Actes Parme 2006, ARMT, section de Parme de l'ARMT, Département de mathématique de l'université de Parme, PRESSCOLOR, Quartu S. Elena, Cagliari, p. 117-132.

Crociani C., Spatoloni R. : '*Sui concetti di cifra, numero, valore posizionale; resoconto di alcune esperienze*', Actes Bard 2007, ARMT, section de la Vallée d'Aoste de l'ARMT, Centre ressources pour l'enseignement des mathématiques, Typographie 'Valdostana', Aoste, p. 143-162.

Crociani C., Spatoloni R. : '*Cifra-numero... tanti problemi : resoconto di tre anni del gruppo di lavoro*', Actes Brigue 2008, ARMT, SCNAT, PRESSCOLOR, Quartu S. Elena, Cagliari, p. 99-120.

C’È PUNTO E PUNTO

Rossella Guastalla[1]

Premessa

L’attività che qui viene presentata fa parte di un progetto interdisciplinare che si è svolto all’inizio dell’anno scolastico 2011-2012 in due classi di quarta elementare con organizzazione modulare di Viadana (Mantova).

L’attività nel suo specifico ha riguardato il primo giorno di scuola ed è stata realizzata in sala mensa in modo tale da permettere ad un gruppo numeroso di bambini di partecipare, 41 per l’appunto.

Fin dal primo momento i bambini sono stati coinvolti in esperienze accattivanti e ludiche per stimolare la loro curiosità e il loro interesse, senza tralasciare momenti di riflessione collettiva per favorire la loro partecipazione attiva.

Riconoscere la scuola come gruppo sociale con regole proprie, rendere ogni alunno consapevole delle funzioni e del ruolo particolare che occupa in un gruppo, sviluppare cognitivamente il senso di appartenenza a quel gruppo e riflettere sui processi di socializzazione, sono alcuni degli obiettivi che si volevano raggiungere con la modalità organizzativa delle classi aperte. Tale modalità peraltro viene utilizzata ogni qualvolta si presenta l’occasione di affrontare attività di gruppo, che richiedono novità e freschezza di apporti diversi dalle dinamiche già conosciute e sfruttate all’interno delle medesime classi. I bambini si possono raggruppare in maniera diversa per attività specifiche, per alcuni periodi dell’anno o per alcuni giorni della settimana in determinate fasce orarie. La formazione dei gruppi per sorteggio è una iniziativa molto gradita ai bambini che li eccita particolarmente: il raggruppamento poi può avvenire sia per interessi comuni sia per livelli diversi di apprendimento. In altre parole, ogni alunno ha come polo di riferimento la propria classe, ma per alcune attività scolastiche gli allievi vengono organizzati in gruppi di lavoro mobili che cercano di valorizzare il processo di crescita, quello di apprendimento e quello espressivo di ciascuno. Naturalmente, per sentirsi protagonisti nel gruppo, occorre che i bambini imparino a parlare di sé, a raccontarsi: in questo modo appagano il loro desiderio di mostrarsi agli altri, di sentirsi importanti, e infine, permettono agli insegnanti di conoscerli meglio in una dimensione in continuo divenire. I gruppi così concepiti non sono meri spazi del sapere, ma soprattutto luoghi dove si impara, si pratica il rispetto, si educa ai sentimenti, si valorizzano le capacità del bambino, dove si aiuta ciascuno ad essere se stesso. Sono altresì luoghi di socializzazione e di realizzazione individuali in cui i protagonisti attivano risorse personali, reattive e di competenze, unitamente al bisogno profondo di ciascuno di emergere e ben figurare coi compagni. In questo contesto, l’insegnante è tutor, guida e coordinatore, e, soprattutto, è disponibile ad essere guidato dagli alunni stessi, per perseguire insieme obiettivi formativi quali: lo sviluppo della creatività, la motivazione all’apprendimento, l’autostima, la capacità di ascolto di sé e degli altri, la capacità di attenzione e di concentrazione.

Un ringraziamento particolare alla collega di italiano Rosetta Vezzola, persona sensibile e collaborativa in ogni occasione, anche quando l’imprevisto ha richiesto di cambiare “rotta” nell’arco della stessa mattinata.

Descrizione dell’attivita’

Fase 1.

Le due classi sono state accompagnate in sala mensa per ascoltare la lettura del libro “Il punto” di Peter H. Reynolds (ed. ape junior). Prima di iniziare la lettura si è chiesto loro di provare ad immaginare il contenuto tenendo conto solo del titolo. Ecco le loro risposte riportate su un cartellone:

Forse parla di un bambino che si annoia e fa un punto su un foglio con la biro e improvvisamente la punta della biro parte e racconta un’avventura che diverte il bambino e lui impara che scrivere quando non sa cosa fare è un modo per non annoiarsi. (Arianna)

Oppure della punta magica di un pennello che trasforma una bambina in una pittrice famosa (Alice).

Oppure di un pennarello che non si ferma mai di scarabocchiare punti sul banco, sulla lavagna, sul muro, sul pavimento e in cielo … e tutti lo rincorrono ma non lo prendono mai … e così tutto il mondo è colorato e la gente non è più triste. (Sofia, Elena)

O di una matita che scrive tante cose belle che cominciano tutte con un punto sulla carta e non si ferma mai; le persone le leggono e diventano più buone. (Debora)

[1] Scuola Primaria Statale Lodovico Grossi (Direzione Didattica), Via Vanoni, 46030 Viadana (Mn)

Secondo me parla del punto di partenza di una gara in barca a vela in giro per il mondo (Liù) *e anche del suo punto d'arrivo.* (Lucrezia)

O di un giro in moto per il mondo e il motociclista ogni volta che si ferma in un posto fa un punto sulla sua cartina così alla fine vede tutte le soste del viaggio. (Marco)

Parla di un cane che ha un punto grosso e nero sulla schiena che se glielo tocchi fa fare delle belle magie. (Denis)

Parla di una bambina che ha un punto colorato sulla fronte. (Aminder)

A me fa venir in mente un palloncino che scappa via dalla mano di un bambino e vola sempre più in alto fino a diventare piccolo come un punto. (Claudia)

Forse è un aquilone che sale sale sale in alto nel cielo fino a diventare un piccolo punto, solo quando un colpo di vento lo riporta sulla Terra allora diventa il compagno di giochi di un bambino che è sempre solo. (Davide e Alessandro)

Per me potrebbe essere la storia di una macchiolina di gelato grossa come un punto sulla maglia di una bambina che la mamma non riesce a lavare e alla fine diventa l'amica dei suoi segreti. (Francesca e Lucrezia)

Per me parla di un libro per imparare bene quando mettere il punto, il punto di domanda, il punto interrogativo (Francesco) *… ma è la stessa cosa del punto di domanda* (Lucrezia) *… e poi quello esclamativo, i due punti* (Riccardo) *e il punto e virgola* (Anna).

Forse ci insegna con dei fumetti che cos'è il punto in matematica … o in geometria … o in geografia. (Riccardo, Filippo, Matilde)

Può darsi che parli della stella polare che era il punto di riferimento dei popoli antichi. (Alessia)

Potrebbe parlare di due bambini che hanno litigato e un giorno s'incontrano proprio nello stesso punto dove avevano litigato e fanno pace. (Kushi ed Erduan)

Può darsi che parli del punto di ritrovo come quello che c'è fuori dalla scuola, sì quando facciamo la prova di evacuazione. (Alex e Matteo)

Secondo me è la storia di un bambino che ha una grande paura e gli altri lo prendono in giro perché è un fifone, solo l'amico del cuore gli crede e gli insegna come non avere più paura. (kevin)

Potrebbe raccontare la storia della vita perché tutto nasce da un puntino che sia il bambino o un pulcino o un fiorellino. (Chiara)

Fase 2.

Durante la lettura, da parte dell'insegnante, tutti hanno ascoltato rapiti la storia della protagonista. Vashti è una bambina che non vuole disegnare perché convinta di non esserne capace. Così quando la maestra le dà un foglio bianco per esprimere la propria arte, la piccola Vashti disegna semplicemente un punto, non tanto per il piacere di disegnare qualcosa, ma per una ripicca perché è sicura che la maestra finalmente si convincerà che davvero non è in grado di esprimersi artisticamente. La maestra invece le spiega che un punto è sempre un inizio e la incoraggia a continuare e a "lasciare la sua impronta" sui fogli da disegno. Solo allora Vashti non pensa più al punto come ad una nullità, a qualcosa di insignificante di cui vergognarsi. Al contrario libera tutta la sua creatività artistica disegnando tutta una serie di punti grandi e piccoli, colorati e non, su tanti di quei fogli che la maestra decide di conservare con cura per poi esporli in una mostra alla fine della scuola. La mostra raccoglie molti consensi tra i visitatori, in modo particolare quelli di un coetaneo, che si stupisce di tanta bravura e dice di non saper disegnare perché l'unica cosa che sa fare sono le righe. Vashti allora gli consegna un foglio bianco, lo sollecita a riprodurle come è capace e infine lo invita ad apporre la sua firma, proprio come aveva fatto la maestra con lei. In questo modo spera che anche lui possa capire che dove c'è un punto c'è un inizio.

Nella conversazione collettiva i bambini hanno esternato emozioni, sentimenti e condiviso momenti di riflessione molto interessanti sul comportamento della protagonista e della sua maestra; non sono mancati confronti con la loro esperienza scolastica e con quanto avevano ipotizzato inizialmente (e annotato sul cartellone) sul significato del titolo.

In aggiunta, qualcuno ha suggerito di realizzare un elenco di "Punti" da rispettare nell'ambito della vita di classe da appendere in ciascuna classe perché ci ricordasse in ogni momento quanto è importante rispettare e farsi rispettare. Alla fine ne sono stati trovati dieci (alcuni specifici sul rispetto, altri ad essi in qualche modo connessi)e i bambini, opportunamente guidati dalle insegnanti, lo hanno chiamato "decalogo del rispetto". Successivamente si è concordato di trascriverli uno per uno su dei fogli A4 colorati da appendere alla controsoffittatura dell'aula con dei fili da pesca, per averli sempre sott'occhio. Nel dettaglio il decalogo include:

1. Rispettare il proprio **punto** di partenza

2. Rispettare il **punto** di partenza degli altri
3. Rispettare il **punto** di vista degli altri
4. Riuscire a dire "**punto … a capo"**
5. Imparare a fare il **punto** della situazione
6. Trovare un **punto** d'incontro
7. Trovare il **punto** di riferimento
8. Non esagerare coi **puntini** sulle "i"
9. Dove c'è un **punto** c'è un inizio
10. L'amico è un **punto** d'ascolto

A ben guardare non tutti i punti hanno a che fare direttamente col "Rispetto" e quando le insegnanti lo hanno fatto notare, i bambini sono rimasti stupiti perché convinti del contrario. Ad esempio, a proposito di "**imparare a fare il punto della situazione"**, Lucrezia e Camilla hanno detto:- Ci sono momenti in cui bisogna dire "adesso basta", così non va bene, devo comportarmi meglio. Non è bello e non è neanche giusto fare arrabbiare la mamma, la maestra, i compagni. Se mi comporto bene sto bene io e stanno bene anche gli altri. Bisogna rispettare le regole sia in casa che in classe".

Chiedere ad un bambino di riflettere sul proprio comportamento per migliorarlo non è cosa semplice e scontata. Quante volte è capitato agli insegnanti di pronunciare frasi del tipo: "Vai al posto e ripensa a ciò che hai fatto!" Oppure: "Rifletti sul tuo comportamento, così non va!" E' un po' quello che succede quando un bambino sbaglia e gli si dice di andare al posto e riguardare ciò che ha fatto. In queste situazioni il bambino va aiutato a capire l'errore con un atteggiamento paziente e disponibile e non solo abbandonato alle sue convinzioni, che potrebbero non essere sbagliate del tutto, ma solo imprecise o confuse. In questi casi giocano senza dubbio un ruolo importante la motivazione e la voglia di cambiare, la fiducia e l'incoraggiamento dei compagni e degli adulti in un clima di collaborazione e reciproco rispetto. Tutti vanno rispettati anche i bambini più "monelli" - dice Anna – però loro devono rispettare quelli che li aiutano, non devono prenderli in giro.

Anche "Trovare il **punto** di riferimento" sembra non avere molto in comune con il "Rispetto", ma non per Filippo, che spiega: "Se un bambino non tanto bravo a scuola chiede aiuto a un compagno, che invece è bravo perché prende dei bei voti, lui però deve essere gentile, paziente, non vantarsi, fargli capire le cose senza mettergli fretta altrimenti non lo rispetta per com'è. Allora sì che questo bambino è un punto di riferimento per l'altro perché se ha bisogno sa che lui lo potrà aiutare."

Che dire di "L'amico è un **punto** d'ascolto"? Arianna precisa che l'amico ti ascolta e ti aiuta, altrimenti non è un amico. E poi se ti confida ad esempio un segreto tu non devi dirlo a nessuno, devi rispettare il suo segreto, altrimenti non sei un amico sincero. Tutti e due si devono rispettare se no non c'è vera amicizia.

Per i bambini ciascun punto dell'elenco si basa sul rispetto di sé o degli altri e sicuramente per tutti "star bene a scuola" significa "star bene insieme". Questo è … il punto!**Fase 3**

I bambini, dietro suggerimento dell'insegnante, si sono liberamente disposti attorno ai tavoli per realizzare un disegno, che poi avrebbero autografato, senza vincoli sul soggetto da rappresentare né sugli strumenti da utilizzare. Ultimato il disegno con la tecnica pittorica preferita, ogni bambino ha provveduto ad incorniciarlo incollando tutto intorno spezie e semi vari. I tempi di esecuzione sono stati naturalmente diversi, per cui ad un certo punto c'era chi ancora disegnava e chi invece stava già ultimando la sua "opera d'arte". Tutti comunque hanno lavorato in un clima di serenità e divertimento, ma anche di impegno per ciò che si stava realizzando.

Ad un certo punto, mentre stavo ritagliando dei cartoncini colorati su cui incollare le dieci regole del Punto, Davide si è avvicinato e mi ha detto: “Sono dieci regole che valgono sempre, come nel Rally Matematico”.

In quel momento mi sono trovata ad un bivio: dire al bambino che ne avremmo parlato un’altra volta per non interrompere l’attività programmata e che si stava svolgendo oppure cogliere lo spunto “inaspettato”, senza sapere in anticipo gli sviluppi. Ho capito che avevo tra le mani un’occasione importante per ampliare la trasversalità del lavoro in corso.

Senza ripensamenti ho richiamato l’attenzione degli altri bambini e chiesto a Davide di ripetere ai compagni la sua osservazione. Via via il dibattito si è fatto sempre più interessante e i diversi interventi hanno dato ragione a Davide. Di seguito riportiamo gli interventi spontanei che gli alunni hanno espresso al riguardo di ogni punto del decalogo.

1. Rispettare il proprio punto di partenza

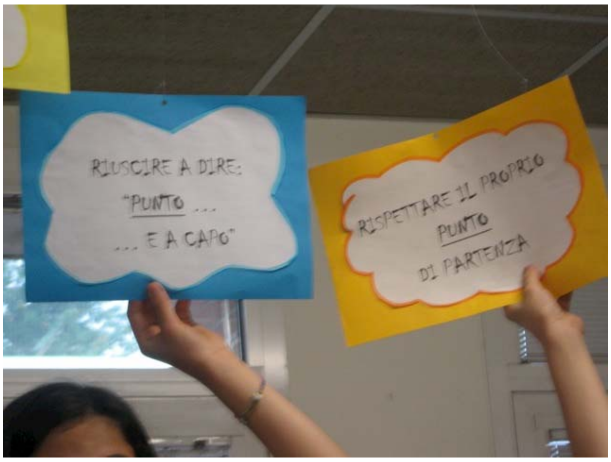
Se un bambino riesce a fare solo la prima parte del problema non deve prendersela (Davide D.) … … *perché se sta calmo e ci pensa su, magari riesce a finirlo* (Lucrezia).

Non devo abbattermi subito, devo provarci (Francesco).

Devo avere fiducia in me (Davide G.).

Se tu all’inizio del lavoro pensi a una cosa e poi al primo tentativo la sbagli, non c’è da arrendersi. Devi stare su quell’argomento finché ti accorgi che ce l’hai fatta (Anna);

… siccome so fare poco e sbaglio quasi sempre allora non ce la farò mai, questo non si deve pensare né dire perché può essere la volta buona … bisogna avere fiducia in se stessi, credere in se stessi è importante quando si inizia un compito (Debora e Riccardo).



2. Rispettare il punto di partenza degli altri

Dobbiamo rispettare quello che gli altri sanno fare perché all’inizio non sappiamo subito se quello che sappiamo fare basterà o no, è utile o no, giusto o no. Può darsi che quello che scrive uno sembri sbagliato agli altri che non la pensano come lui, ma poi alla fine sia giusta la sua risoluzione. (Matilde, Riccardo, Filippo).

Quando un compagno esprime la sua opinione, gli altri non devono dirgli subito che è sbagliata, ma dargli il tempo di spiegare perché ha pensato proprio a quella risposta (Liù).

Non bisogna giungere subito a conclusioni affrettate (Lucrezia).

Può succedere che un bambino all’inizio non sappia risolvere il problema, allora tu devi aiutarlo a tirare fuori quello che sa fare perché tutti sappiamo fare qualcosa, bisogna provare con quello che sa fare (Davide D.)

3. Rispettare il punto di vista degli altri

Rispettare l’idea degli altri (Alex), *con l’ascolto* (Camilla) *e con la partecipazione* (Lucrezia).

Non pensare sempre che la nostra idea è giusta mentre quella degli altri è sbagliata perché è diversa dalla nostra (Davide D.).

Può darsi che uno dà una soluzione e un altro ne dà una diversa. Poi però scopre che mettendole insieme fanno la risposta esatta (Lucrezia).

Bisogna rispettare l’ipotesi del compagno o dei compagni di gruppo e non dirgli subito NO! (Elena B.)

4. Riuscire a dire “punto … a capo”

Vuol dire che se sbagli, rifai (Edo).

Se fai un ragionamento e poi non ci salti più fuori, ti conviene usare un altro sistema (Riccardo).

Sbagli la risoluzione di un problema e dici basta non faccio più il Rally, non c’è mica da dire questo (Anna).

Se un compagno di gruppo è triste perché ha sbagliato, tu gli devi dire ricomincia da capo, non fartene un problema (Filippo),

… non arrenderti, non scoraggiarti (Matilde).

Riuscire a ricominciare dopo uno sbaglio senza andare in panico, ma ricominciare voltando il foglio, o ricominciare con l’aiuto dei compagni che però non devono dire “non copiare da me!”, ma caso mai “facciamolo insieme, vuoi?”(Chiara).

Ad esempio io provo la mia soluzione e il mio gruppo dice che è sbagliata, io non me la prendo e non insisto sulla mia risposta ma provo a trovarne un’altra (Omar).

5. Imparare a fare il punto della situazione

Due litigano sulla risposta da scrivere, occorre un altro bambino che li metta d’accordo. Ad esempio uno sta lavorando e il capogruppo gli dice “fino adesso non hai fatto questo, ma hai fatto quest’altro, se non cambi esci dal gruppo” (Liù).

Devi decidere se restare nel gruppo e impegnarti o uscire dal gruppo e fare qualcos’altro con la maestra” (Gian Marco e Lucrezia).

Quando c’è confusione nel gruppo, uno di loro deve prendere il comando e fare in modo che il gruppo vada d’accordo (Sofia).

Ad esempio c’è poco tempo alla fine della gara, nel gruppo c’è confusione, bisogna che qualcuno intervenga a portare la calma e faccia il riassunto della situazione (Elena B. e Filippo).

Dopo tutto quello che è stato detto, adesso cosa scriviamo sul foglio di bella? (Anna).

6. Trovare un punto d’incontro

E’ necessario trovare un punto d’incontro quando si deve scrivere la risposta sul foglio di bella perché è una sola (Omar).

Due soluzioni diverse, ma solo una deve essere ricopiata e l’accordo è obbligatorio (Liù) .Il capogruppo dice ai bambini che devono scambiarsi il foglio e guardare il lavoro dell’altro. Devono trovare quale foglio ricopiare in bella (Alessandro).

Il confronto serve per andare d’accordo (Matteo).

Penso che si deve sempre ascoltare il compagno quando spiega il suo ragionamento (Dennis).

L’amico ti deve aiutare quando sei in difficoltà per confrontarsi … per ascoltarsi (Debora e Sofia).

Nel gruppo il conforto di qualcuno ti aiuta ad andare avanti (Elena F.).

Bisogna poter confidare sui compagni e loro non ti devono umiliare (Elena B.)

… neanche litigare (Alessandro).

L’amico non ti dice arrangiati!, ma guarda quello che ho fatto e prendi spunto da me! (Anna)

7. Trovare il punto di riferimento

Trovare il punto di riferimento vuol dire sapere da dove partire (Alex).

L'aiuto del compagno è un punto di riferimento se ti aiuta a capire il problema (Omar).

Quando uno non riesce a concludere il suo lavoro e il suo compagno lo aiuta e finirlo (Lucrezia).

Da un piccolo ragionamento si può arrivare a un grande ragionamento che ti può far risolvere il problema (Anna).

Può succedere che anche solo con un piccolo ragionamento si può arrivare alla soluzione del problema, così al primo tentativo (Filippo).

Quando al Rally ti viene consegnato il problema dal compagno del tuo gruppo, ecco quel problema è il punto d'inizio perché da lì parte tutto il lavoro del gruppo (Nicolò).

8. Non esagerare coi puntini sulle "i"

Non devi fare apposta i pallini sulle "i" (Francesco).

Non esagerare con la precisione (Kevin).

Non essere pesante (Lucrezia).

Non essere insistente (Camilla).

Non fare troppo il capetto (Edi).

Non essere esaltato (Gian Marco).

Non esagerare con le spiegazioni che si perde tempo (Omar)

… e poi si rischia di diventare rimbambito (Davide G.).

Non essere troppo insistente, non continuare a chiedere una cosa che non va bene col problema che stai risolvendo (Elena F.),

… bisogna essere corti (Sofia),

… cioè sintetizzare. Non si deve perdere la cognizione del tempo, occorre andare subito al sodo senza essere troppo puntigliosi (Riccardo).

Il compagno mette troppe i e gli altri pensano che ha messo tanti puntini (Denis).

Non passare tutto il tempo a fare il sapientone cioè vantarsi con gli altri continuamente che sai fare questo e quello … intanto il tempo passa e il problema non è risolto (Debora).

Oppure, uno dice la sua soluzione e il compagno poi gliela corregge così tanto che manda all'aria il lavoro dell'altro; la correzione va bene ma senza esagerare (Anna).

Può capitare che un bambino alla fine della gara si va a vantare con gli altri della sua bravura e fa una lista di tutte le cose che ha fatto per far guadagnare punti alla squadra (Alessandro e Riccardo);

…in questo modo non è più il Rally ma una verifica! (Anna).

Il merito può essere di uno o di una squadra, ma chi vince è la classe e non quella squadra (Alessandro).

9. Dove c’è un punto c’è un inizio

Tutti possono diventare un punto di riferimento perché ognuno è bravo in qualcosa, l’importante è sapere chi in quel momento ci può aiutare (Filippo).

Il punto di riferimento non deve essere solo quello che lavora e gli altri aspettano che lui faccia tutto (Anna). Può capitare che anche quel bambino che è sempre bravo, possa sbagliare o avere difficoltà in quel momento (Alice).

Trovare il punto di riferimento in un compagno non significa solo del proprio gruppo, ma cercarlo anche negli altri gruppi (Alessandro),

… così il confronto è più allargato (Debora)

… e possiamo incrementare le probabilità di realizzare un bel punteggio (Riccardo).

E’ come trovare un arbitro che mette d’accordo due bambini che non trovano una soluzione comune e poi scoprire alla fine che potevano andare bene tutte e du , solo che una era spiegata meglio dell’altra (Nicolò).

Quando hai finito di risolvere il problema e rimane tempo non devi disturbare, ma incominciarne un altro per aiutare un altro gruppo (Matteo).

Se il problema ha più di una soluzione … insomma quando ne hai trovata una, devo cercare di trovare anche le altre (Lucrezia).

Per me può anche voler dire punto e lettera maiuscola perché bisogna scrivere bene (Kevin).

10. L’amico è un punto d’ascolto

E’ importante soprattutto quando si deve scrivere la soluzione sul foglio di bella perché tutto il gruppo deve essere d’accordo su chi la scrive, su cosa deve copiare e come la deve scrivere (Riccardo, Elena, Edoardo).

L’amico ti può dare dei consigli utili e tu devi ascoltarlo (Alessandro).

Ascoltare l’amico che ti vuole aiutare è giusto ma senza soffocare (Edi).

Non devo avere paura di chiedere aiuto ai compagni, anche di un altro gruppo,ma senza disturbare però perché stanno concentrati su un altro problema (Francesco).

Riflessioni conclusive

Inizialmente avevo pensato di trascrivere solo alcuni interventi, ma erano tutti così spontanei, sinceri e personali che ho preferito non tralasciarne alcuno. In fondo è questo il nocciolo della questione: saper ascoltare è una predisposizione della mente e dell’anima, che richiede pazienza e accoglienza, umiltà e altruismo, sia da parte dell’insegnante che da parte dei bambini.

Infatti, ascoltare i bambini non è facile, perché il più delle volte richiede dei cambiamenti, ad esempio interrompere ciò che si sta facendo o che si è programmato di fare per affrontare un’altra problematica, che può essere attinente o meno. Certo è che approfondire o recuperare un concetto o un’abilità coinvolgendo la classe per supportare la richiesta del compagno può spiazzare l’insegnante. Spesso ciò che è banale per l’insegnante non lo è per i bambini: se anche le osservazioni che scaturiscono da un’attività sono in parte o del tutto scontate per gli alunni, vale comunque la pena di approfittare dell’occasione per lasciare gestire la situazione alla classe mentre l’insegnante osserva, ascolta e media. C’è tutto un mondo da valutare: chi parla? Come parla ? Cosa racconta? Come persuade o convince gli altri?

Sarebbe sicuramente più semplice dire al bambino: «*Adesso non è il momento … ne riparleremo un'altra volta … in questo momento non ha attinenza con quel che stiamo facendo … adesso stiamo parlando di tutt'altro … quando avremo finito se ci sarà il tempo …. non rientra nel programma, te lo spiegherò l'anno prossimo …*»

Gli interrogativi dei bambini non sono sempre inadeguati, occorre saperli tradurre in quel momento per quel contesto e trarne tutti i possibili vantaggi sia dal punto di vista disciplinare che metodologico. Se non avessi ascoltato Davide, non avrei raccolto tutte queste riflessioni emotive sull'attività del Rally, che chiariscono personalità e carattere, permettono di evidenziare spontaneamente la scoperta, l'invenzione e l'immaginazione che sono proprie di chi si sente attore – protagonista, nonché risolutore consapevole.

L'ascolto dell'altro e di sé è centrale per capire e per trovare modalità adeguate di intervento.

IL RALLY MATEMATICO TRANSALPINO
Un trionfo per la II D

Pianigiani Elisa[1]

Lo scorso sabato 19 maggio 2012 la nostra classe, la II D, si è recata nel Centro Didattico di San Miniato per sostenere la prova finale del Rally Matematico Transalpino. La partecipazione a questa gara è stata vivamente consigliata dalla Professoressa Santori, docente di Matematica e Scienze, che aveva già partecipato negli anni precedenti con le classi a cui insegnava, spesso ottenendo buoni risultati. Il Rally prevede la risoluzione e spiegazione di problemi aperti, che inducono i membri del gruppo a discutere e a cercare una strategia per trovare la soluzione, solitamente non immediata, con la conseguente spiegazione del procedimento utilizzato. I problemi, suddivisi in categorie, sono generalmente molto stimolanti. La gara, a carattere regionale, prevede due prove iniziali, la cui somma di punteggi realizzati da ogni classe iscritta avrebbe deciso la partecipazione alla finale, quella disputata appunto lo scorso 19 maggio.
Quel giorno, noi alunni della II D della Cecco Angiolieri ci dirigiamo al Centro Didattico accompagnati dalle Professoresse Santori e Cammarata. Lì ci rechiamo in un’aula nella quale risolviamo i problemi previsti per la nostra categoria, tutti apparentemente andati bene. Facciamo del nostro meglio, perché sappiamo che il risultato finale sarebbe dipeso esclusivamente da questa prova. Finito il tempo a disposizione, con un po’ di paura consegniamo tutti i fogli. Usciamo, aspettando che la giuria finisca di correggere tutti i problemi. Arriva poi il momento della premiazione, atteso da tutti. Ci tremano le gambe. Sappiamo che anche se arriviamo terzi sarebbe un ottimo risultato, ma come sempre aspiriamo al meglio: il primo posto in tutta la Toscana, con coppa e medaglie. Ci fanno accomodare nell’enorme Aula Magna, dove dopo pochi minuti sono presenti tutte le classi finaliste della Toscana. I nostri “avversari” sono altre due classi seconde, una di una scuola di Monteriggioni, l’altra di una di Grosseto. Prima di annunciare i risultati, la responsabile del Rally Matematico Transalpino in Toscana, pronuncia un discorso, ripetendo gli scopi del rally e facendo complimenti ad alunni e insegnanti per l’ottimo risultato già ottenuto. Poi inizia ad annunciare le classi vincitrici per ogni categoria. Quando arriva a proclamare i vincitori della nostra, siamo agitatissimi. La responsabile annuncia prima la classe terza classificata: si tratta della II A Dante Alighieri di Monteriggioni. Ciò significa che siamo almeno secondi! Dopo aver consegnato i premi, continua annunciando: La classe che si è classificata al secondo posto è …

la II F della Giovanni Pascoli di Grosseto!
Saltiamo in piedi ed esultiamo: siamo arrivati primi, primi in tutta la Toscana!!! Dopo aver realizzato che non era un sogno ma la pura verità, ci precipitiamo giù per le scale per prendere la coppa e le medaglie. Ringraziamo quindi la nostra professoressa, anche lei visibilmente entusiasta, poiché senza di lei non saremmo riusciti ad ottenere questo grande risultato. Dopo aver ricevuto l’applauso della platea, ritorniamo ai nostri posti molto soddisfatti. Aspettiamo quindi il termine della premiazione e torniamo al nostro pullman stracolmi di felicità e di orgoglio per l’ottimo piazzamento. Appena tornati a scuola posizioniamo la coppa sullo scaffale, in modo che sia ben visibile a tutti.
Nonostante questa fosse la nostra prima esperienza al Rally, siamo riusciti ad ottenere questo inaspettato ma certamente molto gradito primo posto in Toscana, con tanto di coppa e di medaglie.
Partecipare al Rally Matematico Transalpino è stata una fantastica esperienza, che, oltre a farci approfondire le nostre abilità nel risolvere problemi, ci ha anche unito come classe e ci ha fatto notare che insieme possiamo fare molto.

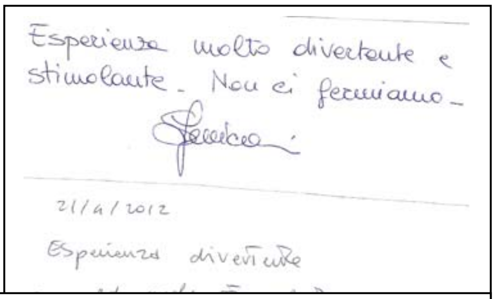
[1] Alunna della II D nell’anno scolastico 2011-2012, presso Istituto Cecco Angiolieri di Siena.

Alunni e professoressa con coppa e medaglie.

IL RALLY MATEMATICO PER I GENITORI

Antonella Castellini, Lucia Fazzino[1]

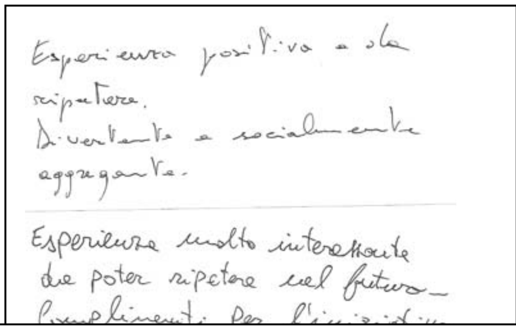
Dal 1998 abbiamo sempre aderito al **Rally Matematico Transalpino** con tutte le nostre classi, condividendone appieno le finalità didattiche ed educative.
Per tali motivi e per soddisfare le richieste che negli anni ci sono pervenute, poiché il Rally li aveva da sempre intrigati, abbiamo proposto ai genitori di confrontarsi con i problemi del rally e di sperimentare quindi un modo diverso di fare matematica e scoprire il piacere di risolvere insieme e non da soli un problema.
Ci piace ricordare, perché ne siamo convinte, che la Matematica è un'attività del pensiero e come tale non può essere appresa meccanicamente. Fare matematica significa risolvere problemi ed i problemi sono situazioni nuove per affrontare le quali non si possono utilizzare schemi di comportamento appresi una volta per sempre, ma si richiede l'attività dell'intelligenza, la quale, secondo il Piaget, si configura, appunto, come la capacità di far fronte alle situazioni nuove.
Abbiamo quindi invitato i genitori inviando loro un modulo di partecipazione
Grande è stata la sorpresa nel ricevere circa 80 adesioni di babbi e mamme che hanno voluto cimentarsi per la serie: "la matematica per noi non è un problema", dimostrando così capacità e voglia di sapersi mettere in gioco.
Il giorno stabilito, 21 Aprile 2012, i genitori si sono presentati a scuola all'inizio un po' timorosi ma pronti alla "singolar tenzone".
Divisi in 4 gruppi di 16, Gruppo Pitagora, Gruppo Euclide, Gruppo Talete, Gruppo Archimede, lavorando in equipe ci hanno dato dentro, impegnandosi con serietà e divertendosi molto come testimoniano le loro dichiarazioni


Esperienza molto divertente e stimolante. Non ci fermiamo.

21/4/2012

Esperienza divertente

,

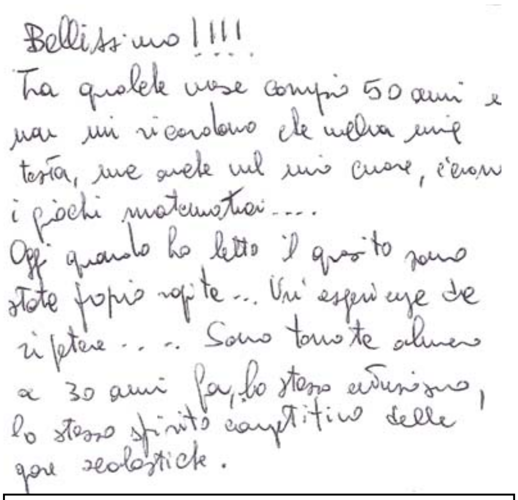

Esperienza positiva e da ripetere.
Divertente e socialmente aggregante.

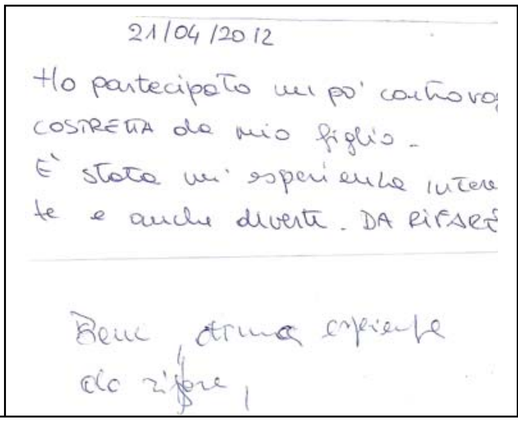
Esperienza molto interessante da poter ripetere nel futuro.

Esperienza molto divertente e stimolante Non ci fermiamo
Esperienza divertente … ed anche stimolante. Da ripetere

Esperienza positiva e da ripetere. Divertente e socialmente aggregante.
Esperienza molto interessante da potere ripetere nel futuro. Complimenti per l'iniziativa.
Esperienza, interessante, stimolante, divertente.

[1] Scuola secondaria primo grado L. da Vinci Poggibonsi (SI)


Bellissimo!!!!
Tra qualche mese compio 50 anni e mai mi ricordavo che nella mia testa, ma anche nel mio cuore, c'erano i giochi matematici....
Oggi quando ho letto il quesito sono stata proprio rapita... Un'esperienza da ripetere... Sono tornata almeno a 30 anni fa, lo stesso entusiasmo, lo stesso spirito competitivo delle gare scolastiche.


21/04/2012
Ho partecipato un po' controvog
COSTRETTA da mio figlio.
È stata un'esperienza intere
te e anche diverte. DA RIFARE

Bene, ottima esperienza
da rifare

Bellissimo!!!! Tra qualche mese compio 50 anni e non ho mai pensato ai giochi matematici … oggi quando ho letto il quesito sono stata rapita … Sono tornata almeno a 30 anni fa, lo stesso entusiasmo, lo stesso spirito competitivo delle gare scolastiche.

Ho partecipato un po' controvoglia costretta da mio figlio ..ma è stata una esperienza interessante e anche divertente. Da rifare Bene, ottima esperienza, da rifare

Come da regolamento i genitori dovevano risolvere 7 problemi in 50 minuti scelti con la preziosa collaborazione di Lucia Grugnetti e Francois Jaquet che venuti a conoscenza del progetto hanno sostenuto e incoraggiato le insegnanti con l'entusiasmo di sempre aiutandole nella individuazione dei testi.
Durante lo svolgimento abbiamo notato come i problemi abbiano fatto subito da collante anche tra persone che non si conoscevano dimostrando ancora una volta la validità sociale della gara; i componenti i vari gruppi collaboravano e lavoravano tutti con serietà e caparbietà discutendo fra di loro per la condivisione di una soluzione così come è nello spirito del Rally.

Allo scadere del tempo, una volta ritirate le prove, le abbiamo corrette con la preziosa collaborazione di Francesca Ricci del dipartimento di matematica dell’Università di Siena.

Dopo la correzione, è avvenuta la premiazione alla presenza del Dirigente scolastico Dott. Luca Guerranti.

Ogni partecipante ha ricevuto un attestato di partecipazione


IL RALLY MATEMATICO TRANSALPINO
PER I GENITORI

Scuola secondaria di primo grado "L. da Vinci"
Poggibonsi

1 CLASSIFICATO

Il /la Sig. ……………………………………………

del gruppo …………………………………

Un bel problema, anche se non lo risolvi, ti fa compagnia se ci pensi ogni tanto
Ennio De Giorgi

Il Dirigente scolastico
Prof. L.Guerranti

Le insegnanti responsabili
A.Castellini A.L.Fazzino

Poggibonsi 21 aprile 2012

Per la cronaca ha vinto il gruppo Euclide, ma in realtà hanno vinto tutti: i genitori, i figli, le insegnanti, ma soprattutto ha vinto la matematica che non è arida e noiosa ne è motivo di angoscia ma può e sa essere aggregante, divertente e stimolante.