La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse, siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.org

ISSN 2234-9596

TABLE DES MATIÈRES / INDICE

ÉDITORIAL : ÉCRIRE À PROPOS DU RMT

François Jaquet, rédacteur responsable

Les statistiques à la mode en cette période de crise économique font apparaître les inégalités dans la répartition des richesses : un très faible pourcentage des habitants d'un pays possède autant que la très grande majorité de la population.

En consultant la liste des publications sur le RMT[1] on voit le même genre d'inégalités à propos de l'écriture de nos textes : sur 220 articles environ publiés dans des revues comme *Math-Ecole* (25), *L'Educazione Matematica* (14), le *Livret du RMT* de la SBPMef (10), *Grand N* et autres (13) dans des publications de congrès et rencontres (19), dans nos *Actes du RMT* vol 1 à 8, (129), dans *La Gazette de Transalpie* (13) on trouve environ 50 noms d'auteurs, dont 25 n'apparaissent qu'une seule fois, 10 de deux à quatre fois et les 15 derniers de cinq à dix fois et même jusqu'à 40 et 60 fois.

En résumé, quelques auteurs, moins d'une dizaine, se partagent 90 % des articles publiés sur le RMT - sans être milliardaires pour autant ! Sur une population de plusieurs milliers de maîtres des classes participant au Rallye, ou, sur les quelques centaines de personnes engagées plus directement dans les tâches de nos sections, la représentation est inégale et l'on peut se demander pourquoi.

La première raison à évoquer est le temps. Il en faut pour écrire et chacun sait que les enseignants n'en ont pas trop, mais chacun est à la même enseigne, qu'on soit retraité ou non, engagé dans la recherche ou la formation. C'est un fait de société : personne n'a le temps !

Une deuxième raison est la difficulté de la tâche. Écrire un article, demande une réflexion et des lectures préalables, et aussi une aisance au niveau de la langue et de la forme. On ne s'adresse plus à ses élèves, mais à d'autres adultes et à ses collègues. La difficulté s'accompagne de craintes, si l'on sait que le texte s'adresse à un public de didacticiens : va-t-on trouver les termes justes, va-t-on être capable de se prononcer sur des thèmes qu'on pense réservés à la recherche, supposant parfois l'usage d'un langage ésotérique ?

On peut comprendre cette gêne et ces craintes, mais il faut les combattre. Pourquoi les textes sur le Rallye mathématique transalpin ne devraient-ils être rédigés que par des chercheurs, dans une langue « savante » comme s'ils émanaient de personnes qui en « savent plus » que les autres ?

Il ne doit pas y avoir de monopole de l'écriture au sein du RMT ; même si la tâche n'est pas aisée, chacun de ses animateurs doit pouvoir s'exprimer par écrit comme il le fait oralement. Il n'y a pas de jugement, de bonnes ou de mauvaises notes. Tout au plus ceux qui ont l'habitude de rédiger des textes peuvent-ils fournir une « aide à l'écriture ». Et pour *La Gazette de Transalpie*, il y a même un Comté de rédaction qui est chargé d'harmoniser les textes, d'encourager les auteurs, de faire des propositions pratiques.

La troisième raison à envisager concerne les contenus. Pour écrire sur le RMT, il faut avoir des choses à communiquer, c'est-à-dire des observations, des expériences pratiques, des points de vue d'élèves, de collègues, ou de parents, des analyses a posteriori, des activités …

Et là, qui d'autre que ceux qui ont mis la main à la pâte peuvent-ils rendre compte de toute l'activité engendrée par le RMT ?

Nous terminons ces quelques remarques par un appel : quelle que soit la fonction que vous pensez remplir au sein du RMT, communiquez vos expériences, impressions ou informations, prenez le temps nécessaire (fermez la TV, débranchez un moment votre portable ou votre dernier gadget électronique, ne pensez plus aux vicissitudes de l'euro ou de votre gouvernement) et envoyez un texte (ou un simple brouillon qu'on aménagera à plusieurs) à la rédaction de *La Gazette de Transalpie*. Le seul risque que vous courez c'est d'être lu et d'intéresser les autres personnes engagées dans le RMT.

[1] Voir le site www.armtint.org, La Gazette de Transalpie et les publications à propos du RMT.

EDITORIALE: SCRIVERE A PROPOSITO DEL RMT

François Jaquet, direttore responsabile

Le statistiche alla moda in questo periodo di crisi economica mettono in evidenza le diversità nella ripartizione della ricchezza o dei redditi: una piccola percentuale di abitanti di un paese possiede tanto quanto la grande maggioranza della popolazione.

Nel consultare la lista delle pubblicazioni sul RMT[2] si nota lo stesso tipo di diversità a proposito della scrittura dei nostri testi: su circa 220 articoli pubblicati in riviste quali *Math-Ecole* (25), *L'Educazione Matematica* (14), il *Livret du RMT* della SBPMef (10), *Grand N* e altri (13), in pubblicazioni di congressi e incontri (19), in nostri *Atti del RMT* volumi da 1 a 8, (129), ne *La Gazzetta d Transalpino* (13) si trovano circa 50 nomi di autori, di cui 25 appaiono una sola volta, 10 da due a quattro volte e gli ultimi 15 da cinque a dieci volte ed anche fino a 40-60 volte.

In sintesi, alcuni autori, meno di una decina, di dividono il 90% degli articoli pubblicati sul RMT - senza per questo essere miliadari! - Su una popolazione di diverse migliaia di insegnanti di classi che partecipano al Rally, o sulle centinaia di persone che svolgono più o meno direttamente dei compiti nelle nostre sezioni, la presenza in quanto autori non è uniforme e ci si domanda perché.

La prima ragione da evocare è il tempo. Ce ne vuole molto per scrivere e si sa bene che gli insegnanti non ne hanno a sufficienza, ma nessuno ne ha, che si sia pensionati o no, impegnati nella ricerca o nella formazione. E' un problema della società: nessuno ha tempo.

Una seconda ragione è la difficoltà del compito. Scrivere un articolo, richiede una riflessione e letture pregresse, ma anche facilità a livello della lingua e delle forma. Non ci si rivolge più ai propri allievi, ma ad altri adulti e ai propri colleghi. La difficoltà si accompagna al timore, laddove si sa che il testo è rivolto ad un pubblico di didattici: troveremo i termini giusti, saremo capaci di esprimerci su temi che si pensa essere riservati alla ricerca, che presuppongono talvolta l'uso di termini esoterici?

E' possibile capire questo imbarazzo e questi timori, ma bisogna combatterli. Perché i testi sul Rally matematico transalpino dovrebbero essere redatti solo dai ricercatori, in una lingua "sapiente" come se provenissero da persone che ne "sanno più" degli altri?

Non deve esserci un monopolio della scrittura in seno al RMT; anche se il compito non è agevole, ognuno degli animatori deve poter esprimersi per iscritto così come lo fa oralmente. Non vi è un giudizio, voti buoni o cattivi. Tutt'al più coloro che hanno l'abitudine alla redazione di testi possono offrire un "aiuto alla redazione". E per *La Gazzetta di Transalpino*, c'è anche un comitato di redazione che ha il compito di armonizzare i testi, di incoraggiare gli autori, di fare proposte pratiche.

La terza ragione da considerare riguarda i contenuti. Per scrivere sul RMT, bisogna avere qualcosa da comunicare, cioè osservazioni, esperienza pratiche, punti di vista degli allievi, dei colleghi, o dei genitori, analisi a posteriori, attività …

E in questo caso, chi se non coloro che sono coinvolti direttamente, può dar conto dell'attività generata dal RMT?

Terminiamo queste osservazioni con un appello: qualunque sia la funzione che pensate di svolgere in seno al RMT, comunicate le vostre esperienze, impressioni o informazioni, prendete il tempo necessario (spegnete la TV, per un momento anche il vostro cellulare o il vostro ultimo gadget elettronico, non pensate più alle vicissitudini dell'euro o del vostro governo) e inviate un testo (o una semplice bozza che sistemeremo a più mani) alla redazione de *La Gazzetta di Transalpino*. Il solo rischio che correte è di essere letti e di interessare le altre persone implicate nel RMT.

[2] Si veda il sito www.armtint.org, La Gazzetta di Transalpino e le pubblicazioni a proposito del RMT.

PRESENTAZIONE DEL NUMERO

Questo numero 2 de *La Gazzetta di Transalpino* contiene sei articoli che costituiscono un campione dei contenuti potenziali della rivista, sia nella varietà dei temi sia nello stile.

- ***I problemi tra storia ed epistemologia: alberi dai molti frutti.*** Conferenza di ***Lucia Grugnetti***, al 15° Incontro ARMT di Barletta. La conferenza è una rilettura personale della storia del problema di Delo attraverso cui appare con chiarezza che *i problemi, analizzati dal punto di vista storico ed epistemologico, sono come alberi dai molti frutti*.

- Nell'articolo ***Nascita e primi passi di un problema del RMT***, **Annamaria d'Andrea e François Jaquet** raccontano la storia di un problema dalla sua origine alla versione definitiva per una prova del 19° RMT. Ci si rende conto, nel passare da una versione all'altra dell'enunciato – dal *Quadrotto* ai *Quadrati di Paolo* – e della sua analisi a priori, dell'importanza delle riflessioni, degli scambi e delle evoluzioni nell'elaborazione di un problema del RMT. Un breve epilogo presenta i risultati globali ottenuti nella prova del Rally e qualche analisi a posteriori di elaborati che mostrano bene il cammino che resta da fare nella costruzione dei concetti messi in opera in questa semplice attività di quadrati da ricostruire destinata ad allievi della categorie da 3 a 5.

- ***Approccio alla nozione di probabilità negli allievi dai 10 ai 15 anni*** di **Michel Henry et François Jaquet.** L'articolo riporta l'analisi a posteriori di un problema del RMT, *I barattoli di caramelle* e di due sue varianti, dove gli allievi devono fare una scelta di natura probabilistica. Nei tre casi è stato possibile constatare che bisogna aspettare i 14, 15 anni per veder apparire il concetto adeguato che riposa sul rapporto (di probabilità), mentre prima di quell'età le procedure scelte si rifanno in linea di massima agli scarti tra le grandezze in gioco. Un quarto problema, di ricetta di cucina nell'ambito della proporzionalità, evidenzia il medesimo conflitto, alla stessa età tra le procedure additive (scarti) e quelle moltiplicative (rapporti).

- ***Difficoltà nel confronto di lunghezze*** di **Carla Crociani, Lucia Doretti e Lucia Grugnetti.** Le autrici si occupano qui in particolare di un ostacolo legato alla conservazione di lunghezze e angoli in una griglia quadrettata. Le difficoltà all'origine di risposte errate o di procedure inadeguate relative ad un problema del RMT non vengono facilmente alla luce: un primo problema rivela un errore frequente che si ritrova poi in un secondo problema; un'ipotesi sulle origini dell'errore permette di elaborare un terzo problema … e così, via via, la difficoltà viene identificata e analizzata con sempre maggior precisione, talvolta in un lungo periodo di tempo.

- ***C'è problema e ...problema*** di **Lucia Stella.** In quest'articolo viene presentata l'attività sperimentale di un gruppo di ricerca-azione di Pisa che, pur non partecipando con proprie classi al RMT, utilizza in maniera interessante alcuni dei problemi del RMT stesso. Viene in particolare riportata l'analisi di due esempi scelti tra i più significativi, con l'intento di evidenziare attraverso le considerazioni degli insegnanti e le risposte degli alunni, le opportunità didattiche che tali proposte offrono.

- L'articolo ***RMT: un'edizione straordinaria per i genitori,*** di **Angela Mecacci e Francesca Ricci** fa riferimento all'iniziativa rivolta ai genitori dal titolo: "***Scoprire e riscoprire la matematica" - "Rally Matematico Transalpino" non è una corsa ma è solo divertimento*** organizzata dalla Direzione Didattica del 1° circolo di Poggibonsi (SI), scuola primaria, con la finalità di rendere consapevoli le famiglie degli alunni delle metodologie e delle sperimentazioni adottate nella pratica didattica quotidiana.

PRÉSENTATION DU NUMERO

Ce numéro 2 de *La Gazette de Transalpie* contient six articles qui constituent un échantillon des contenus potentiels de la revue, dans des styles et sur des thèmes variés :

- ***I problemi tra storia ed epistemologia: alberi dai molti frutti*** est le texte de la conférence de ***Lucia Grugnetti***, lors de la 15^{e} rencontre de l'ARMT à Barletta, en octobre 2011. Il s'agit d'une relecture personnelle de l'histoire du problème de Délos (duplication du cube) au travers de laquelle apparaît clairement que *les problèmes, vus des points de vue historique et épistémologique sont comme des arbres aux nombreux fruits.*

- Dans l'article ***Naissance et premiers pas d'un problème du RMT,*** **Annamaria d'Andrea et François Jaquet** racontent l'histoire d'un problème de son origine à sa version définitive pour une épreuve du 19^{e} RMT. On se rend compte, au fil des différentes versions de l'énoncé - du *Quadrotto* aux *Carrés de Paul* - et de son analyse a priori, de l'importance des réflexions, échanges et évolutions dans l'élaboration d'un problème du RMT. Un court épilogue, présente les résultats globaux obtenus après la passation et quelques analyses a posteriori de copies qui montrent bien le chemin qui reste à faire dans la construction des concepts mis en œuvre dans cette simple activité de carrés à reconstituer destinée à des élèves de catégories 3 à 5.

- ***Approche de la notion de probabilité chez des enfants de 10 – 15 ans*** di **Michel Henry et François Jaquet.** L'article développe l'analyse a posteriori d'un problème du RMT, *Les pots de bonbons* et de deux de ses variantes, où les élèves doivent faire un choix de nature probabiliste. Dans les trois cas, on a pu constater qu'il faut attendre l'âge de 14 à 15 ans pour voir apparaître le concept adéquat, reposant sur un rapport (de probabilité) alors que précédemment, les procédures de choix reposent majoritairement sur les écarts entre les grandeurs en jeu. Un quatrième problème, de recette culinaire, dans le cadre de la proportionnalité, fait apparaître le même conflit, au même âge, entre les procédures additives (écarts) ou multiplicatives (rapports).

- ***Difficultés dans la comparaison des longueurs*** de **Carla Crociani, Lucia Doretti et Lucia Grugnetti.** Les auteurs s'occupent ici notamment d'un obstacle lié à la conservation des longueurs et des angles, dans un réseau quadrillé. Les difficultés à l'origine de réponses erronées ou de procédures inadéquates n'apparaissent cependant pas facilement : un premier problème révèle une erreur fréquente, qu'on retrouve dans un deuxième problème. Une hypothèse sur les origines de l'erreur permet d'élaborer un troisième problème … et ainsi, de proche en proche, la difficulté est identifiée et analysée de plus en plus précisément, sur plusieurs années parfois.

- ***C'è problema e ...problema*** de **Lucia Stella.** Cet article présente l'activité expérimentale d'un groupe de recherche-action de Pise, qui, bien que leurs classes ne participent pas au RMT, utilise de manière intéressante certains de ses problèmes. En particulier, l'analyse de deux exemples choisis parmi les plus significatifs met en évidence les opportunités didactiques qu'offrent ces deux situations, au travers des commentaires des enseignants et des réponses des élèves.

- L'article ***RMT: un'edizione straordinaria per i genitori*** d'**Angela Mecacci et Francesca Ricci** se réfère à une initiative concernant les parents d'élèves sous le titre : « ***Découvrir et redécouvrir les mathématiques – Rallye Mathématique Transalpin », ce n'est pas seulement un concours mais un plaisir,*** organisée par la Direction Didactique du 1^{e} Cercle de Poggibonsi (SI), école primaire, dans le but de sensibiliser les familles des élèves aux méthodes et aux expérimentations adoptées dans les pratiques didactiques.

I PROBLEMI TRA STORIA ED EPISTEMOLOGIA:

ALBERI DAI MOLTI FRUTTI

Lucia Grugnetti[3]

1. Introduzione

Un settore della scienza è vivo fino a quando offre molti problemi.
Il venire meno di questi indica la sua morte o il termine del suo sviluppo
David Hilbert

È difficile, se non improbabile, apportare elementi di novità, o quantomeno di originalità, ad una tematica ben nota. Tanto è stato scritto su problemi famosi che si sono sviluppati nella storia e per diversi fra voi, tutto ciò che dirò non sarà una novità. Me ne scuso in anticipo.

In ogni modo, questa mia vuol essere solo una rilettura personale.

Sono tanti i problemi che hanno offerto alla matematica innumerevoli frutti, basti pensare, ad esempio, alla successione di Fibonacci che è foriera di risultati e sviluppi ancora oggi dopo più di 800 anni dalla proposta del problema dei conigli[4], presentato da Leonardo Pisano (Fibonacci) nel suo Liber Abaci del 1202. I numeri della successione di Fibonacci, o numeri di Fibonacci, godono di un insieme vastissimo di proprietà, si incontrano nei modelli matematici di svariati fenomeni, sono utilizzabili per molti procedimenti computazionali, posseggono inoltre varie generalizzazioni interessanti e sono utilizzati in ambiti non puramente matematici, financo nell'arte. A questi argomenti viene addirittura espressamente dedicato un periodico scientifico, *The Fibonacci Quarterly.*

Nicolas Rouche sottolinea come nel corso dei secoli, le teorie sono state elaborate, ognuna di esse, per rispondere a domande che si pongono o che si ponevano in un dato contesto. Il contesto può essere matematico, con domande del tipo

- C'è un'infinità di numeri primi?
- Qual è il volume della sfera?
- Possiamo risolvere le equazioni algebriche di un qualunque grado utilizzando delle radici (quadrate, cubiche, …)
- …

Il contesto può anche essere situato al di fuori della matematica, con domande del tipo

- Qual è la forma delle orbite dei pianeti?
- Come crescono le popolazioni in circostanze diverse?
- Come ripartire la posta tra i giocatori quando viene interrotto un gioco d'azzardo?
- ...

E' peraltro molto celebre la frase con cui David Hilbert[5] aprì la sua conferenza al secondo congresso internazionale dei matematici a Parigi, l'8 agosto 1900: *Se vogliamo immaginarci lo sviluppo presumibile della conoscenza matematica nel prossimo futuro, dobbiamo far passare davanti alla nostra mente le questioni aperte e dobbiamo considerare i problemi che sono posti dalla scienza attuale e la cui soluzione attendiamo dal futuro. Questi giorni, che stanno a cavallo tra due secoli, mi sembrano ben adatti per una rassegna dei problemi ....".* Egli propose quindi 23 questioni, ancora aperte all'epoca, che riguardano fra l'altro, i fondamenti dell'analisi e della geometria, la teoria dei numeri e le teorie fisiche.

E proprio le "questioni aperte", antiche e moderne, hanno fatto della matematica una scienza dinamica, in continuo sviluppo.

Nella società, al contrario, c'è spesso la tendenza a considerare la matematica una scienza statica, data una volta per tutte. Idea forse supportata anche dal riferimento alla Geometria Euclidea che affonda le sue radici a quasi

---

[3] lucia.grugnetti@unipr.it

[4] Riporto qui il problema della moltiplicazione dei conigli, nella formulazione originale (dall'edizione critica di B. Boncompagni del 1857): Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur. Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circundatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secondo mense ab eorun nativitate germinant.

[5] Nato il 23 gennaio 1862, morto il 14 febbraio 1943, è il matematico la cui ricerca in geometria ebbe la maggiore influenza nel campo dal tempo di Euclide.

2500 anni fa e che è ancora quella alla quale, almeno nominalmente, si fa riferimento a livello della cultura di base.

L'esattezza della Geometria (…) - scriveva però Federigo Enriques nel 1906[6] - è un'ipotesi, in ogni momento del progresso scientifico verificata **fino ad un certo punto**, dalle esperienze fatte, la quale anticipa il risultato di altre esperienze possibili. Ed è chiaro che codesta ipotesi non potrà mai essere definitivamente provata, poiché la serie delle esperienze possibili è illimitata; nulla osta invece che possa venire **negata.**

Nel citare questo passo, Francesco Speranza (1994), sottolinea come la coscienza della irraggiungibilità della verità esalta gli aspetti dinamici della scienza.

Come ben sappiamo problemi e teoremi degli antichi mantengono la loro validità "relativa" e il loro interesse, benché sia via via mutato il loro impianto epistemologico.

2. Come nel "complicarsi la vita" si costruiscono conoscenze

La questione n. 3, del programma di Hilbert, esprime l'esigenza di una dimostrazione rigorosa dell'impossibilità per due tetraedri di uguale base ed altezza di essere equiscomponibili in generale.[7]

Diversi matematici si occuparono della questione, ma solo nel 1965, Jean-Pierre Sydler, matematico svizzero, ha dato una condizione necessaria e sufficiente per l'equiscomponibilità di poliedri.

E le questioni sui solidi e sui volumi non solo affondano le loro radici nell'antichità, ma hanno dato luogo a ricerche fruttuose che hanno attraversato, come un fil rouge, le varie epoche.

Certamente "alberi dai molto frutti" sono stati i tre famosi problemi dell'antichità greca:

la quadratura del cerchio,

la trisezione dell'angolo

la duplicazione del cubo.

La lunga storia degli sforzi compiuti per risolvere tali problemi, ha loro attribuito il significato quasi proverbiale di "problemi impossibili". Ma questa impossibilità è vera solo in un certo senso.

I geometri dell'antichità, infatti, consideravano un problema risolto, soltanto quando era risolubile col solo uso della riga e del compasso.

L'importanza di questi tre problemi sta nel fatto che essi non possono essere risolti geometricamente attraverso la costruzione di un numero finito di rette e di cerchi. **La ricerca della loro risoluzione è servita come mezzo di penetrazione in nuovi campi della matematica.**

I Greci stessi proposero soluzioni richiedenti l'uso di altre linee curve, anziché di rette e circonferenze. E ci fu un fiorire di curve, dalle coniche, alla concoide di Nicomede, alla quadratrice, alla spirale di Archimede, tanto per citarne alcune.

Le "soluzioni" definitive dei tre problemi non furono altro che dimostrazioni della *impossibilità* di effettuare tali costruzioni con il solo uso di riga e compasso.

Tali dimostrazioni, elaborate con un ritardo di due millenni dal momento della formulazione dei relativi problemi, fanno ricorso a nozioni algebriche che non erano note ai Greci e possiamo ben comprendere le difficoltà da essi incontrate, difficoltà che sono state peraltro foriere di grandi "invenzioni" matematiche, come, ad esempio le coniche ancora prima che Apollonio ne facesse una trattazione sistematica, dal punto di vista puramente geometrico.

Per mettere la parola fine alla risoluzione dei tre problemi, bisognerà però aspettare gli sviluppi dell'algebra.

Nel secolo XVII, F. Viète (1540-1603) dimostra che la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo portano ad equazioni di terzo grado e R. Descartes (1596-1650) afferma, dandone peraltro una dimostrazione inadeguata, che equazioni di questo tipo non possono essere risolte con riga e compasso.

Nel 1837, P. L. Wantzel (1814-1848) dimostra compiutamente i due asserti precedenti. Dimostra infatti che i soli numeri costruibili con riga e compasso sono i numeri soluzioni di equazioni a coefficienti razionali e di grado una potenza di 2.

Nel 1882, C. L. F. Lindemann (1852-1939) dimostra in maniera definitiva che π è un numero trascendente e stabilisce così, definitivamente, che poiché π non è un numero algebrico, il cerchio non può essere quadrato con riga e compasso.

Si può dunque ben comprendere come la ricerca di soluzione dei tre problemi da parte dei Greci antichi fosse, in un certo senso, votata all'insuccesso, pur risultando ricca, questa ricerca, di innumerevoli frutti.

---

[6] In *problemi della Scienza*, Zanichelli, Bologna (ristampa del 1983).

[7] Due figure sono equiscomponibili se si possono dividere in un numero finito di parti rispettivamente uguali o, che è lo stesso, se è possibile decomporne una in un numero finito di parti da riposizionare per comporre l'altra.

In questo intervento ricorderò e riprenderò in esame alcuni aspetti del problema della duplicazione del cubo, ma anche altre problematiche riguardanti "il volume", foriere di risultati, centrali nelle speculazioni matematiche del XVII secolo. Sull'argomento "volumi" ci sarebbe tanto da dire, in particolare sui grandi risultati dell'impareggiabile Archimede, ma ovviamente, nell'ambito di un intervento, è necessario fare delle scelte.

Va certamente ricordato che Archimede (287 a.C.-212 a.C), nell'occuparsi di problemi quali la quadratura del cerchio e la rettificazione della circonferenza, o ancora, la ricerca del volume della sfera, a differenza dei predecessori, sostituisce la ricerca di una costruzione con quello di una misura. In tal modo ricerca la soluzione a questi problemi in termini di approssimazione.

3. Il problema di Delo

In una lettera[8] a Tolomeo III (284 a.C. circa – 221 a.C.), sovrano egizio, Eratostene di Cirene[9] (276 a.C. circa – 194 a.C circa) scrive:

"Eratostene a Tolomeo salute. Narrano che uno degli antichi poeti tragici facesse apparire Minosse nell'atto di far costruire una tomba a Glauco, e che Minosse, accorgendosi che questa era lunga da ogni lato cento piedi, dicesse: Piccolo spazio invero accordasti ad un sepolcro di re; raddoppialo conservandolo, sempre di forma cubica, raddoppia subito tutti i lati del sepolcro".

Secondo un'altra leggenda, l'oracolo di Apollo a Delo venne interrogato sul modo di allontanare la peste che aveva decimato la popolazione. L'oracolo parlò e disse che doveva essere raddoppiata l'ara cubica di Apollo.

Sorse così la questione di costruire, con riga e compasso, il lato del cubo doppio di un cubo dato.

3.1. Costruzioni con riga e compasso

Per gli antichi Greci, un problema richiede che si trovi o si costruisca qualcosa. E le costruzioni si fanno con riga e compasso.

Il problema delle costruzioni che possono essere fatte utilizzando riga e compasso ha accompagnato gli sviluppi della geometria nella Grecia antica.

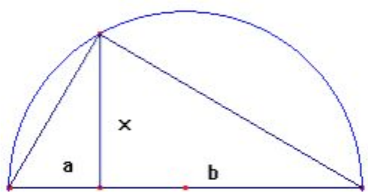
Per riga i greci intendevano la possibilità di tracciare un segmento che congiunge due punti qualsiasi (del piano) e per compasso la possibilità di tracciare una circonferenza dato centro e raggio.

In particolare, un problema è risolvibile con riga e compasso se si può ricondurre ad una successione finita di operazioni che rientrano tra le seguenti:

- dati due punti costruire la retta che passi per essi;
- dato un punto e un segmento trovare una circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio;
- date due rette trovare il punto in comune;
- data una retta e una circonferenza trovare i punti comuni;
- date due circonferenze trovarne i punti comuni.

3.2. Come risolvere il problema di Delo?

La base dei metodi risolutivi di problemi di costruzione, nel senso degli Antichi Greci, è l'inserimento di un segmento incognito, tra due segmenti dati. Ai Pitagorici era noto come effettuare tale inserimento, cioè come costruire segmenti che verificassero una proporzione, in linguaggio moderno, del tipo $a: x = x: b$



[10]

Fig.1

[8] Di cui parla Eutocio e che si stima essere da lui ricostruita. Eutocio (nato verso il 480 d.C., ha scritto dei Commentari all'opera di Archimede *Sulla sfera e il cilindro*. Tali commentari sono pubblicati in: Mugler Charles (ed.), Archimède, tome IV (Commentaires d'Eutocius et fragments), Paris, Les Belles Lettres, 1972.

[9] Oggi Shahhat, in Libia.

[10] Come ben sappiamo il triangolo in figura è rettangolo perché iscritto in una semicirconferenza, per il secondo teorema di Euclide l'altezza è medio proporzionale fra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa cioè: $a : x = x : b$

Tale costruzione rispetta i canoni greci dell'uso di soli riga e compasso.

E nel caso della duplicazione del cubo, con che tipo di proporzione è necessario operare?

Sembra che l'idea sia venuta inizialmente ad Ippocrate di Chio (470 a.C. - 410 a.C) secondo il quale era necessario ricorrere alla inserzione di due medi proporzionali fra due segmenti dati che noi rappresenteremmo, per esempio, nel modo seguente:

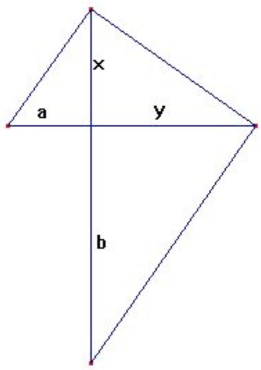


Fig. 2

In linguaggio moderno potremmo enunciare come:

dati due segmenti *a* e *b*, costruirne altri due *x* e *y* che, con *a* e *b* presi come termini estremi, formino una catena di rapporti uguali, ovvero:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

con una scrittura che testimonia un salto storico ed epistemologico notevole rispetto agli antichi Greci che non avevano il simbolismo algebrico attuale.

E qui iniziano, per i Greci Antichi, le difficoltà, perché tale problema non è risolubile con riga e compasso!

L'inserzione di due medi proporzionali, infatti, serve unicamente per trasformare il problema originale in uno di differente enunciato, ma di uguale difficoltà.

Consideriamo quattro segmenti AB, CD, EF, GH e facciamo l'inserimento di due medi proporzionali alla maniera degli Greci AB : CD = CD : EF = EF : GH (con il moderno simbolismo, dalla figura 2, si ha $a : x = x : y = y : b$).

Bernard Vitrac (2004) illustra questa catena di rapporti nel modo seguente:

Sia AK il cubo descritto sulla retta AB (dunque AB = BL = LK),

e BD il cubo descritto sulla retta CD (dunque DC = CQ = QB).

Si completano i parallelepipedi rettangoli KP e PN. Allora:

AK : KP ::[11] AB : BP :: AB : CD poiché BP = CD;

KP : PN :: KM : MN :: AB : CD poiché KM = AB e MN = CD;

PN : BD :: MB : BQ :: AB : CD poiché MB = AB e BQ = CD.

Dunque AK : BD è il rapporto triplo del rapporto AB : CD.

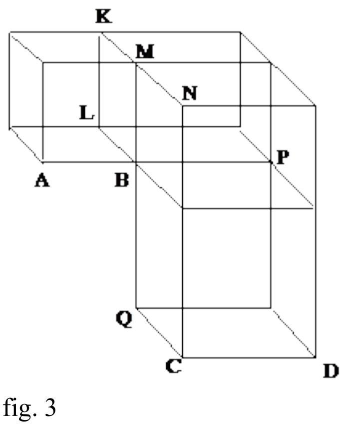


fig. 3

E in termini moderni, scriveremmo: $AB^3/CD^3 = (AB/CD)^3$. Data una retta AB e il suo doppio GH, se inseriamo fra esse due medi proporzionali, CD, EF, il rapporto tra il cubo descritto su AB a quello su CD sarà quello tra AB e GH. Cioè, il cubo su CD sarà il doppio del cubo su AB.

[11] Nel caso di una catena di rapporti al posto del simbolo = viene talvolta usato il simbolo ::

Naturalmente qui si tratta di una procedura “a posteriori”. Sappiamo già quale sarà il segmento cercato e dimostriamo che è proprio quello.

Come hanno proceduto i Greci?

Le proposte sono state molteplici, ma per forza di cose tutte elaborate con strumenti diversi dalla riga e dal compasso. Mi limito qui all'idea soggiacente la soluzione proposta da Menecmo (attivo intorno al 350 a.C.), che propongo in notazione moderna.

In effetti, se in $a : x = x : y = y : b$, poniamo $2a$ al posto di b, l'espressione conduce all'intersezione di due parabole:

(in notazione moderna)

$$a/x = x/y;\ x^2 = ay;\ y = (1/a)\, x^2$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{2a};\ y^2 = 2ax;\ x = \frac{1}{2a}y^2$$

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{a}x^2 \\ x = \frac{1}{2a}y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{a}x^2 \\ x = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{a^2}x^4;\ \frac{1}{2a^3}x^4 - x = 0;\ x\left(\frac{1}{2a^3}x^3 - 1\right) = 0 \end{cases}$$

$x = 0$; $x^3 = 2a^3$ da cui $x = a\sqrt[3]{2}$ che rappresenta la lunghezza del lato del cubo richiesto.

E con una rappresentazione cartesiana, noi, ma non gli antichi Greci, possiamo visualizzare le due parabole e il punto A di ascissa $a\sqrt[3]{2}$ (es. Loria, 1950)

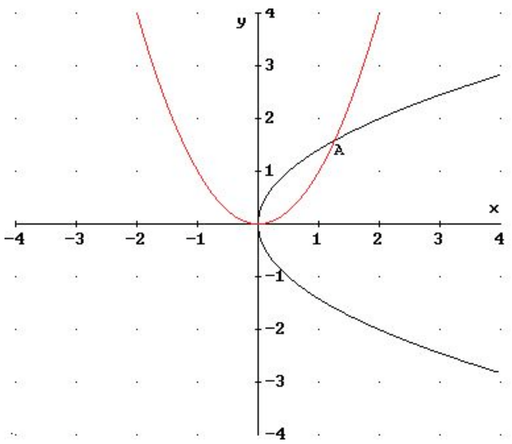


Fig. 4

Si ritiene che Menecmo abbia proposto una soluzione facente per l'appunto ricorso a due parabole, ovviamente non rappresentate con linguaggio algebrico. Gli si attribuisce l'idea di studiare le curve ottenute dalla sezione di un cono con un piano. Menecmo aveva presumibilmente fatto le sue considerazioni partendo da un cono circolare retto e la cui generatrice abbia un angolo di 45°, tagliato da un piano perpendicolare ad una semiretta generatrice della superficie conica.

Un po' più tardi, Apollonio di Perga (262 a.C. – 190 a.C.) nel suo *trattato sulle sezioni coniche*, in otto libri[12], presenta un lavoro sistematico. E' questo un notevole salto epistemologico ed una grande spinta in avanti della ricerca matematica, come diremmo oggi. Apollonio, infatti, analizza tutte le curve che si possono ottenere a partire da un (doppio) cono circolare qualunque. Egli fissa il cono e fa variare la posizione del piano ottenendo così curve da lui dette ellissi, parabole e iperboli, nomi che sono a noi ben noti. In ogni modo, era la costruzione che definiva una nuova curva.

[12] I primi quattro sono noti tramite dei manoscritti greci dei secoli XII e XIII, altri tre tramite fonti arabe (Thabit ibn Qurra) del XIII secolo e l'ultimo, purtroppo, è andato perso. In Italia vengono stampati i libri dal V al VII a cura di Alfonso Borelli solo nel 1661.

in Les Matin des Mathématiciens (1985) Jean Dhombres sottolinea in particolare che "*questi nomi delle curve sono interessanti proprio perché ci vengono da Apollonio. Ellisse significa qualcosa di meno, iperbole significa qualcosa in più, parabola significa qualcosa di uguale. E questo vocabolario, di colpo, rappresenta uno degli apporti più importanti di Apollonio: in quanto ciò che stabilisce Apollonio, è l'esistenza di una relazione qualitativa, una relazione metrica, tra certe quantità su queste diverse curve. In maniera precisa, egli privilegia una certa retta in una delle sue curve che chiama diametro, e privilegia poi un'altra retta sullo stesso piano della curva. (…) Queste due rette corrispondono ai nostri assi delle coordinate, salvo che in generale questi assi non sono ortogonali.*"

La corda passante per un fuoco di una conica, parallela alla direttrice (retta passante per il vertice e perpendicolare all'asse della conica), viene detta da Apollonio "latus rectus", rappresentata qui in notazione moderna

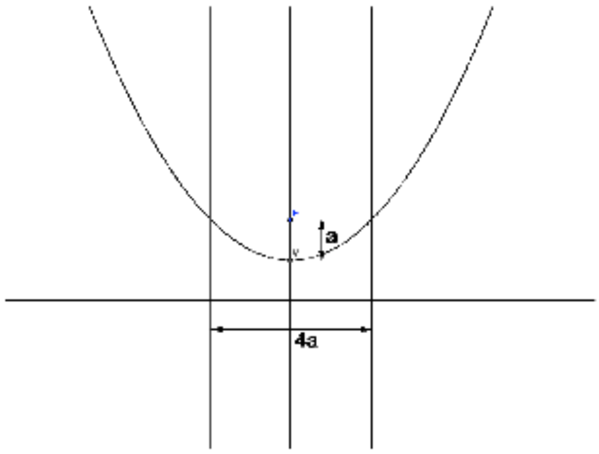


Fig. 5

Con le parole di Morris Kline: "*Come impresa questa è talmente grande ed importante che praticamente chiude l'argomento per gli studiosi successivi, almeno dal punto di vista puramente geometrico.*"

Ora la palla è lanciata nel campo dell'algebra e bisognerà aspettare che questa si sviluppi, dagli arabi agli algebristi italiani e francesi del XVI e XVII secolo, fino a Descartes, dapprima e poi, come ho ricordato, ai matematici del XIX secolo. Perché una conica, ad esempio, possa essere rappresentata con un'equazione algebrica, molta acqua dovrà passare sotto i ponti della conoscenza matematica. Un storia lunga più di 2000 anni.

Proprio l'introduzione da parte di Apollonio, della direttrice e del latus rectus, porterà Descartes a quelle che hanno poi preso il nome di "coordinate cartesiane", che permetteranno al matematico-filosofo francese di introdurre la notazione matematica moderna per le equazioni e di rappresentare le coniche per l'appunto con le equazioni algebriche.

3.3. Il problema di Delo nella Magna Grecia

Quando parliamo della Grecia Antica intendiamo anche e in particolare la Magna Grecia di cui fa parte, fra l'altro, la Puglia. Qui spicca la figura di Archita di Taranto (428-347 a.C.).

[13]

Egli fu un personaggio molto importante sia dal punto di vista politico, sia da quello scientifico. Nella sua qualità di "governatore", promosse una politica di grande sviluppo di Taranto. Fu discepolo di Filolao di Crotone e amico di Platone.

Morì in un naufragio nelle acque del Gargano. Con le parole di Orazio (Ode ,I.28): *"...Te maris et terrae numeroque carentis harenae / mensorem cohibent, Archyta, / pulveris exigui prope litus parva Matinum / munera nec qicquam tibi prodestaerias temptasse domos animoque rotundumpercurrisse polum morituro* ". ("...Te misuratore del mare e della terra e delle immensurabili arene, coprono, o Archita, pochi pugni di polvere presso il lido Matino, né può giovarti l'aver scrutato dello spazio le dimore, e l'aver percorso l'arco del cielo con cuore mortale.).

Qual è il metodo di Archita in merito alla duplicazione dl cubo? E' un metodo molto ingegnoso, ma certamente complesso, come vedremo.

Sembra che Eratostene avesse eretto una colonna, ad Alessandria, con un epigramma inscritto su di essa, che faceva riferimento alla sua soluzione meccanica personale al problema della duplicazione del cubo: "*Se, cari amici, voi cercaste di ottenere da ogni piccolo cubo un cubo doppio di esso, e regolarmente, cambiare ogni figura solida in un'altra, questo è in vostro potere; voi potete trovare la misura di un ovile, un fosso o un'ampia profondità di un buco, attraverso questo metodo, che consiste nel mettere tra due regolatori, due medi con i loro estremi che convergono. Non cercate di compiere la difficile impresa dei cilindri di Archyta, o di tagliare un cono in tre parti come Menecmo, o di tracciare col compasso una forma curva di linee, come è descritto dal timoroso di Dio, Eudosso. Inoltre, potreste, su queste tavolette, trovare facilmente una miriade di significati, cominciando da una piccola base. Felice arte, Tolomeo, in quello, i suoi figli uguali per vigore nella gioventù, voi stessi avete dato loro tutto ciò che è caro alle muse e ai Re, e potrebbe forse in futuro, O Zeus, dio del paradiso, ricevere lo scettro nelle sue mani. Potrebbe essere così, e lasciate che ciascuno che vede questa offerta dica 'Questo è il dono di Eratostene di Cirene".*

In effetti, Eratostene aveva inventato una "macchina" atta a risolvere l'inserzione delle medie proporzionali e quindi il problema della duplicazione dl cubo. Tale "macchina" è detta mesolabio (cercare il punto di mezzo) e su di esso siamo informati in dettaglio da Eutocio di Ascalona, il quale fa riferimento a Eudemo, storico della geometria del III secolo a.C.

Ci torneremo a proposito di Descartes!

Veniamo invece al metodo di Archita.

Secondo Heath (1921) quella di Archita è "un'ardita costruzione tridimensionale" determinante un punto di intersezione fra tre superfici di rivoluzione: un cono, un cilindro e un toro. L'intersezione tra le due ultime superfici, dà una certa curva e il punto richiesto sarà il punto in cui il cono incontra questa curva.

Archita dimostra come il punto determinato dall'intersezione di tre superfici di rivoluzione, un cono circolare retto, un cilindro e un toro, consenta di trovare le due medie proporzionali.

[13] http://spazioinwind.libero.it/popoli_antichi/Magna%20Grecia/indice.html

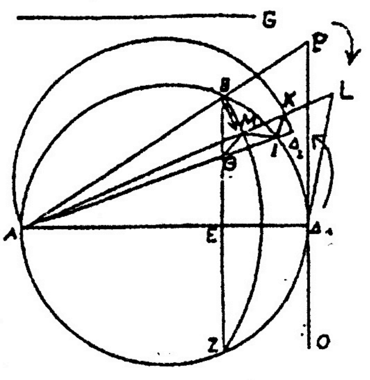


Fig. 6

La figura 6 ricorda quella la soluzione antica di Archita (Delattre, 1993), riportata da Eudemo al problema enunciato come segue: siano le due rette date AD e G, bisogna trovare tra AD e G due medie proporzionali.

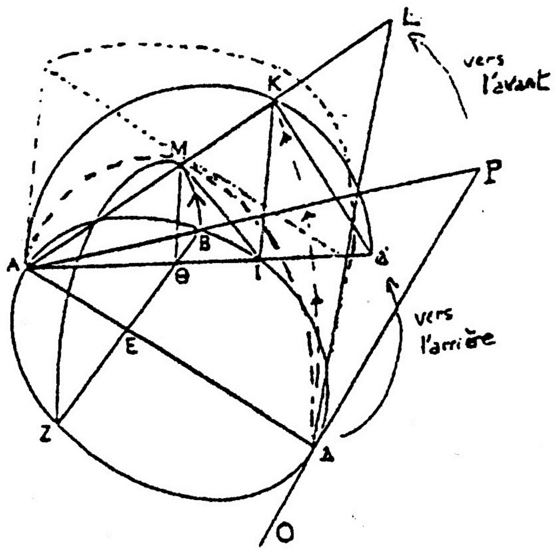


Fig. 7

La figura 7 (Delattre,1993) mostra la procedura di costruzione:

A resta fisso; la semicirconferenza su AD si muove verso il retro attraverso il semicilindro sul quale descrive una curva di D in K;

AD resta fisso; il triangolo APD gira in avanti secondo un movimento opposto, descrivendo una superficie conica che taglia il cilindro risalendo fino a K;

quando la posizione dei due elementi è fissa, nel punto d'incontro K sul cilindro, la perpendicolare KI è abbassata sulla circonferenza ABDZ (lungo il cilindro);

il punto B rimonta sulla semicirconferenza BMZ perpendicolare al cerchio ABDZ; arriva in M; si determinano i triangoli simili: AMI, MIO e MAO; MO ortogonale alla circonferenza ABDZ → MO perpendicolare a BZ, e MO parallela a KI;

ora BO • OZ oppure AO • OI = MO^2, e gli angoli IMA, DKA sono retti;

dunque KD // MI, e AD, AK, AI, AM formano una proporzione continua; AM = AB = G e due i due inserimenti tra AD e G sono trovati.

In termini moderni il problema diventa quello di risolvere il sistema seguente, di tre equazioni in tre variabili:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 = 2ax \\ (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2) \end{cases}$$

rispettivamente equazioni del cono circolare retto, del cilindro e del toro, costruiti a partire dalla rotazione di tre cerchi tra loro perpendicolari, aventi centro nel punto C(a, 0, 0) e raggio a (che è la lunghezza del lato a del cubo dato) in un sistema cartesiano ortogonale. Un punto di intersezione ha per ascissa $a\sqrt[3]{2}$.
Sul sito:
http://www.amici-del-newton.com/Matematica/archita_di_taranto.htm
Si trova una bella rappresentazione della situazione:
a partire dai tre cerchi suddetti

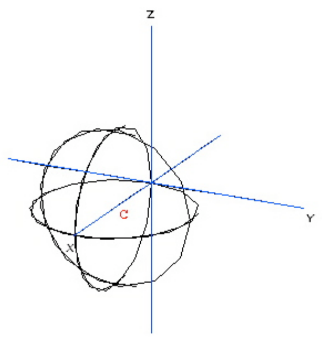
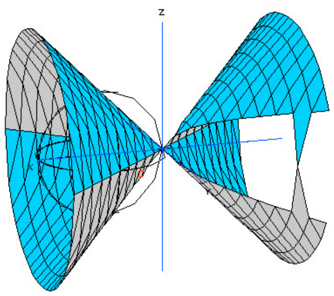
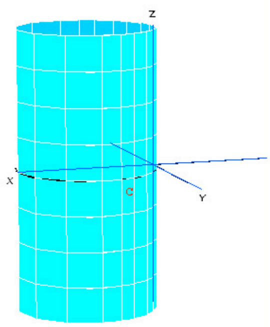


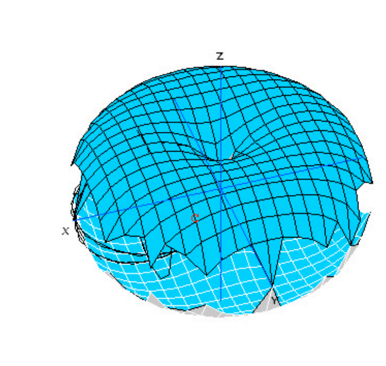
Fig. 8

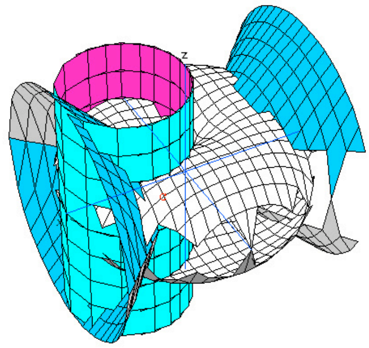
si ottengono le tre superfici di rotazione





che si intersecano:





Uno dei punti di intersezione delle tre superfici ha come ascissa $a\sqrt[3]{2}$.
E tutto ciò ci mostra quanto fosse ardita la proposta di Archita che non poteva avvalersi né dell'algebra, né della rappresentazione cartesiana… né degli odierni mezzi grafici!

4. Dai Greci antichi al sec XVII

La traduzione delle opere classiche, a partire da quelle di Euclide e Archimede, compiuta nel secolo XVI, aveva fatto riscoprire, in particolare, problemi sul calcolo di aree e di volumi. Tali problemi venivano affrontati col metodo di esaustione. Questo però, era un metodo non euristico, solo dimostrativo, a posteriori; cioè quando già il risultato era noto. Il fatto che fosse una tecnica a posteriori fu la causa del suo declino. Non era un metodo dimostrativo diretto.
La geometria dell'inizio del 1600 era quindi in sostanza quella dei greci e dunque le ricerche vertevano prevalentemente su rette, cerchi, alcune coniche; poco spazio avevano le altre curve dell'antichità (quadratrice, spirale di Archimede). Si avvertiva, una sorta di ristrettezza dell'ambito puramente geometrico.

Infatti, ancora a causa del legame stretto con la geometria greca, le costruzioni geometriche dovevano essere, come ampiamente ricordato, rigorosamente costruzioni con riga e compasso e si avvertiva il disagio con le coniche, non costruibili in quel modo.

I problemi geometrici vertevano su casi particolari.

Questi sono gli aspetti precipui che portano Bonaventura Cavalieri a mettere a punto e a proporre nel 1635 la sua *Geometria degli indivisibili*[14].

E nel 1637 viene data alle stampe l'altra opera fondamentale di questa prima metà del secolo XVII e cioè Le *Géométrie* di René Descartes.

Da un lato, i problemi di geometria si sviluppano avvalendosi del metodo degli indivisibili[15] e, dall'altro, il simbolismo algebrico di Descartes consente la necessaria generalizzazione dei problemi sulle curve.

4.1. La ricerca di "volumi" con il metodo degli indivisibili

Il calcolo di aree e di volumi di figure geometriche era al centro di molti problemi che venivano studiati all'inizio del XVII secolo, a seguito della traduzione di alcuni grandi Greci, e come ho appena ricordato, un impulso importante veniva dal metodo degli indivisibili di Cavalieri. Tale metodo era ampiamente utilizzato anche da altri matematici dell'epoca. Uno dei problemi intriganti è, per esempio, la ricerca del volume del solido intersezione di due cilindri.

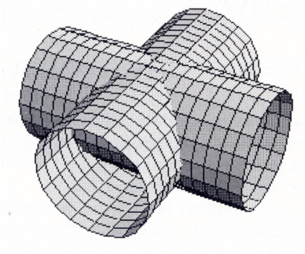
Lo presento seguendo l'idea del ricorso al metodo degli indivisibili, nella versione rielaborata in Andriani et al (2005), dal gruppo Zeroallazero, che con Carlo Marchini coordino,

---

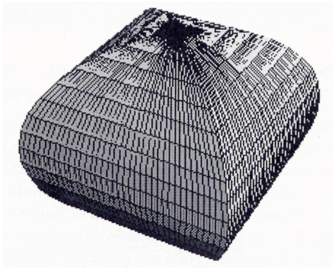
[14] Il titolo originale è: *Geometria Indivisibilibus Continuorum nova quidam ratione promota.*

[15] Giusti (1982) chiarisce che *pare importante distinguere con precisione tra la teoria degli indivisibili, e cioè il complesso di definizioni e di teoremi generali che la caratterizzano, ed il metodo degli indivisibili, ovvero l'applicazione della teoria ai problemi geometrici, in primo luogo al calcolo delle aree e dei volumi delle figure geometriche piane e solide. Chiarissimo il metodo, consistendo essenzialmente nell'applicazione di un unico teorema: "Figure piane hanno tra di loro il medesimo rapporto . che hanno tutte le linee di esse prese con un riferimento qualunque; e figure solide lo stesso rapporto che hanno tutti i piani de esse presi rispetto a un riferimento qualunque.*

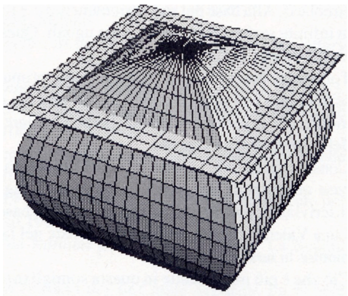
Intersecando due cilindri retti di egual raggio (avente misura *r*) quando essi sono posizionati in modo tale che i loro assi siano perpendicolari



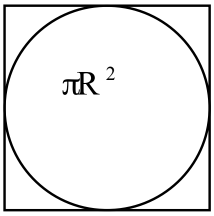
si ottiene il solido, che indichiamo con *S*, che possiamo rappresentare nel modo seguente:



Se sezioniamo tale solido con paralleli ai due assi dei cilindri, otteniamo dei quadrati



Nel solido *S* è inscritta una sfera tangente ai due cilindri.
Le sezioni della sfera con i piani considerati in precedenza sono ovviamente dei cerchi. Per ogni piano considerato, si avranno sezioni del tipo



$4R^2$

Facendo ricorso al principio degli "indivisibili i Cavalieri", il rapporto fra le sezioni della sfera e del solido *S*

$$\frac{Area\ Sezione S}{Area\ Sezione Sfera} = \frac{4R^2}{\pi R^2} = \frac{4}{\pi}$$

sarà uguale al rapporto fra i loro volumi

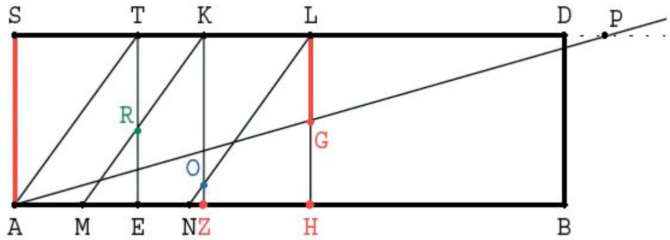
$$\frac{Volume\ solido S}{Volume\ sfera} = \frac{4}{\pi}$$

da cui si ricava:

$$Volume\ S = Volume\ sfera \times \frac{4}{\pi} = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{4}{\pi} = \frac{16}{3} r^3$$

4.2. Con Descartes torniamo ad Eratostene e "chiudiamo il cerchio"

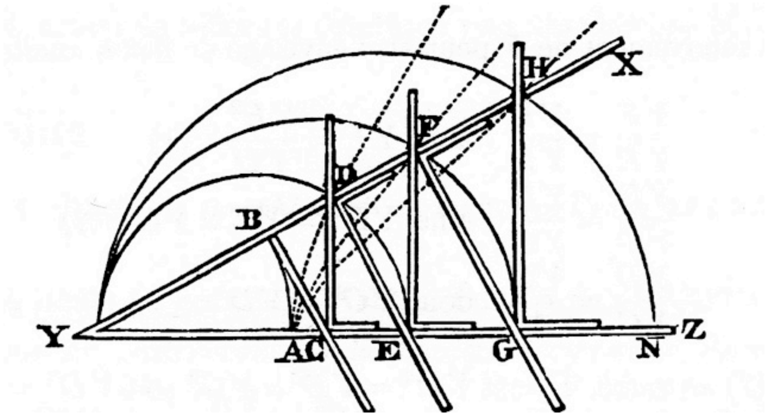
In Vitrac (2004) è scritto, a proposito degli strumenti per la risoluzione "relativa" (senza riga e compasso) del problema di Delo, *lo strumento più ambizioso era il mesolabio di Eratostene che permette di prendere (in teoria)* *tante medie quanto si vuole e non solo due. Un esemplare era stato consacrato in un tempio, accompagnato da un epigramma di dedica al re Tolomeo III. Eutocio ce lo ha conservato. Eratostene vi critica le soluzioni precedenti (quelle di Archita, di Menecmo e di Eudosso), secondo lui molto laboriose, mentre la sua è tanto semplice. Nicomede, nel suo trattato sulle concoidi, gli girerà la stessa critica!*



Questo dispositivo permette di inserire due medie proporzionali tra due segmenti dati e quindi, risolvere il problema della duplicazione del cubo.

Dalla costruzione, nella quale figurano, su una tavoletta SABD, tre triangoli rettangoli uguali dei quali il primo è fissato in A e gli altri due possono scorrere se si vogliono trovare due medie proporzionali, da inserire tra LG e SA, dove G è un punto qualunque di LH, è necessario allineare su AG le intersezioni O e R, spostando i triangoli. Una volta che l'allineamento di A, G, O e R sia stato ottenuto, LG, KO e TR sono in proporzione in virtù del teorema di Talete.

Quasi 2000 anni dopo, Descartes, nella sua *Géomètrie* presenta uno strumento (Andrieu, 2004)



che permette di costruire un numero **svariato** di segmenti, tali che due consecutivi abbiano lunghezze in un rapporto costante. Come chiarisce Andrieu, *questo permetterà dunque di sistemare tante medie quante si vuole tra due grandezze date, (...). Le curve descritte dai punti consecutivi B, D, F. H sono,via via complesse, Descartes fa una classificazione delle curve secondo il grado delle equazioni messe in gioco, questo corrisponde al numero di squadre necessarie ad ottenere la curva nel movimento di XZ.*

Il processo di generalizzazione delle curve è sulla buona strada e i frutti sono quasi maturi.

Bibliografia

Andriani, M. F., Dalla Noce, S., Falcade, R., Foglia, S., Gregori, S., Grugnetti, L., Maffini, A., Marchini, C., Rizza, A. & Vannucci, V.: 2005, *Oltre ogni limite: percorsi didattici per insegnanti spericolati*, Pitagora Editrice, Bologna.

Andrieu E.: 2004, 'Duplication du cube : calcul de moyennes proportionnelles', in *Instruments scientifiques à travers l'histoire*, ellipses, 299-313.

Baccou R.: 1951, *Histoire de la science grecque*, Paris.

Bkouche R., Delattre J.: 1992, 'Pourquoi la règle et le compas ?', in Historire de problèmes, histoire de mathématiques, ICME – Québec 92, Irem de Lyon, 79-100.

Delattre J.:1993, 'Approche mecanique et géométrique du mouvement dans l'antiquité grèque', in *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique,* IREM de Montpelier.

Enriques F.: 1906, *Problemi della Scienza*, Zanichelli, Bologna (ristampa del 1983).

Giusti E.: 1982, 'Dopo Cavalieri. La discussione sugli indivisibili', in O. Montaldo, L. Grugnetti (Eds), *Atti del Convegno "La storia delle matematiche in Italia",* Cagliari, 29 settembre - 1 ottobre 1982, Università di Cagliari, Monograf, Bologna, 85-114.

Grugnetti L.: 1987, 'I tre famosi problemi dell'antichità greca: quali strumenti per risolverli?', *L'educazione Matematica*, Supplemento n. 1, 105-123.

Heath T.L.: 1921, *A History of Greek Mathematics*, Vol. 1, Oxford, (alle pagine pp246 segg).

Kline M.: 1976, *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli.

Loria G.: 1950, *Storia delle Matematiche – dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX* (2a edizione), Ulrico Hoepli, Milano.

Mugler C. (ed.): 1972, *Archimède*, tome IV (Commentaires d'Eutocius et fragments), Paris, Les Belles Lettres, 1972.

Noël E. (a cura di): 1985, *le matin des mathématiciens*, Belin Pour la Science, Paris.

Rouche N.: 1995, *L'enseignement des mathématiques d'hier à demain*, CREM a.s.b.I.

Speranza F.: 1987, 'A che cosa serve la filosofia della matematica?', *La Matematica e la sua didattica,* a. 1, 14-24.

Speranza F.: 1994, 'Attualità del pensiero di Enriques', *La matematica e la sua didattica*, (82), 112-132.

Sydler J.P: 1965, 'Condizions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions', *Comment. Math. Helvetica*, 40, 43-80.

Vitrac B.: 2004, *Les géomètres de la Grèce antique*, Génies de la Sciente, n. 21.

Sitologia

http://www.flickr.com/photos/24126063@N03/4219898016/

http://biografieonline.it/biografia.htm?BioID=2270&biografia=Eratostene+di+Cirene

http://www.liceo-newton.com/archita_di_taranto.htm

http://spazioinwind.libero.it/popoli_antichi/Magna%20Grecia/indice.html

NASCITA E PRIMI PASSI DI UN PROBLEMA DEL RMT

Annamaria D'Andrea[16], François Jaquet[17]

1. Introduzione

Leggendo per la prima volta una prova del RMT, non si immagina certo la storia di ciascuno dei venti problemi che la costituiscono, ossia la loro evoluzione dal progetto iniziale alla versione definitiva. Non si conosce, infatti, il lavoro delle persone che hanno partecipato alla sua elaborazione, da colui che ha avuto l'idea a tutti i lettori che hanno proposto le ultime modifiche; né si percepisce interamente il contenuto matematico che è stato previsto durante l'elaborazione.

Un problema del RMT è un "opera" in tutti i sensi del termine (*Le Robert* della lingua francese cita: "attività, lavoro, creazione, produzione, azione umana, risultato sensibile di un'azione o di una serie di azioni orientate ad un fine …"). Alla stregua di un'opera pittorica, letteraria, musicale, il problema è una creazione, in un contesto storico e sociale.

In questo articolo presenteremo un esempio di progettazione e di elaborazione di un problema, *Il quadrotto*, dall'idea iniziale ad una versione che è stata proposta ai responsabili della prima prova del 19° RMT.

Si tratta soltanto delle prime quattro tappe nella vita di questo problema, dalla sua nascita ai suoi primi passi. Probabilmente ce ne saranno molte altre, durante le quali il problema si evolverà ancora, superando numerosi "esami", prima di essere approvato e quindi proposto alle classi. Ma inevitabilmente la sua vita non si fermerà qui. Se l'analisi dei risultati rivelerà potenzialità per la valutazione di conoscenze o per il loro apprendimento, il problema potrà "diventare più consistente" o dar luogo a "fratellini" in previsione di ulteriori utilizzazioni in classe.

La prima tappa consiste nel passaggio dall'idea iniziale alla prima versione del testo. Si svolge in un contesto e con dei personaggi che devono essere presentati per conoscere le circostanze della nascita del progetto.

Una studentessa, Elena, tirocinante nella classe di un'animatrice della sezione di Udine dell'ARMT, Annamaria, accetta di buon grado di contribuire alla creazione dei problemi. Questa prima tappa è individuale. Elena, che ha avuto l'idea di questo problema di matematica, deve sistemarlo seguendo lo schema dei problemi del RMT. È il passaggio alla scrittura del testo che comprende l'enunciato e l'analisi a priori.

La seconda tappa è collettiva e si svolge nell'ambito di un gruppo composto, oltre che da Elena e Annamaria, anche da Luciana, Paola, Michela e Giuliano, gli altri membri della sezione di Udine. Insieme discuteranno il progetto e predisporranno una seconda versione da proporre ad un livello più generale, seguendo le procedure d'elaborazione delle prove del RMT. Dalla prima alla seconda versione, si vedranno apparire modifiche rivelatrici delle sfide del problema.

La terza tappa è un allargamento del dibattito precedente, con la partecipazione del responsabile del GPP (gruppo permanente dei problemi dell'ARMT), che farà intervenire le proprie conoscenze maturate con la pratica in numerosi anni di creazione, osservazione e analisi dei problemi. I contenuti matematici avranno, in questa fase, il ruolo principale.

Nella maggioranza dei problemi proposti dalle sezioni, le tappe seguenti sono una lettura interna al GPP che opera una prima scelta, quindi un'analisi approfondita con due o tre sezioni responsabili di una prova, ed infine la lettura da parte di tutte le sezioni, prima dell'ultima messa a punto secondo i pareri espressi nel corso della consultazione generale.

Nel caso de *Il quadrotto*, considerata d'interesse la partecipazione di una tirocinante all'elaborazione del problema, c'è stato un ritorno agli autori d'origine, che hanno potuto tenere conto delle prime osservazioni ricevute prima di inviare una terza versione del problema.

---

[16] Responsabile della sezione di Udine.

[17] Responsabile del Gruppo permanente dei problemi dell'ARMT.

2. Le origini

In questo esempio, il problema nasce da una conversazione tra Annamaria D'Andrea, responsabile della sezione di Udine, e una delle sue tirocinanti che si presenta così:

Mi chiamo Elena Sabbadini, ho 24 anni e vivo in una piccola frazione del comune di Coseano, nella provincia di Udine. Frequento l'Università degli Studi di Udine, in particolare sono all'ultimo anno del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria. Il corso prevede che ogni anno accademico lo studente svolga alcune ore di tirocinio in una scuola ed io, sin dal primo anno di università, pratico il tirocinio presso la Scuola Primaria di Cisterna. L'ultimo anno di università include lo svolgimento di 65 ore di tirocinio che possono essere suddivise in due blocchi oppure svolte tutte in una volta. Io ho optato per la prima alternativa: 35 ore le ho già svolte su un percorso didattico riguardante l'acqua ed ora sto svolgendo le rimanenti 30 dedicandomi al rally matematico, l'argomento della mia tesi.

*L'idea di creare alcuni problemi da inserire nelle prove ufficiali del RMT è nata insieme ad Annamaria: questo avrebbe permesso di incrementare il numero di problemi a disposizione dell'ARMT. L'esperienza mi ha anche permesso di addentrarmi in modo più profondo nel mondo del rally e capire meglio il complesso lavoro che sta alla sua base. Ho quindi creato alcuni problemi facendo attenzione che fossero utilizzabili anche per la terza categoria***,** *visto che sto svolgendo il mio tirocinio in una classe terza; essi sono stati prima esaminati e corretti insieme alla maestra Annamaria, successivamente, sono stati analizzati da altri docenti della sezione.*

Quattro proposte sono state effettivamente inviate da Annamaria al responsabile del GPP nel febbraio del 2010, con qualche parola di spiegazione: *Caro François, con l'aiuto di una nostra tirocinante abbiamo preparato altri problemi che ti invio ...*

Si trattava di

- *L'indovinello* (cat. 3): scomposizione del numero 30 in somme di due termini, di cui uno è il doppio dell'altro, all'interno di una raccolta di figurine per bambini. (Questo problema comparirà tra quelli che saranno proposti per il 19° RMT)
- *Striscione*: in un contesto di bandierine di due colori, allineate su un filo, trovare la scomposizione additiva del 100 secondo la successione progressiva dei numeri naturali ripetuti ciascuno due volte (solo l'ultimo termine può non rispettare la regolarità) $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 5 + ... = 100$. (Questo problema è diventato "*Guirlandes/ Le bandierine"* 18.II.2)
- Due versioni de *Il Quadrotto*, di cui una per le categorie da 3 a 5.

Quest'ultimo problema appartiene ad una famiglia numerosa fra gli argomenti proposti nelle prove del RMT, quella della combinatoria in contesti di figure geometriche da riunire quindi da contare.

Nonostante la lunga esperienza riguardo all'elaborazione di questo tipo di problemi, restiamo sempre sorpresi dal loro scarso tasso di successo, ed abbiamo difficoltà ad identificare gli ostacoli che incontrano gli allievi a cui viene richiesto di cercare disposizioni geometriche. È questa una delle ragioni per cui abbiamo scelto *Il quadrotto* per illustrare la problematica dell'evoluzione di un problema.

Ma occorre risalire nel tempo e ritornare all'idea di partenza, cioè alla prima versione elaborate da Elena.

3. L'idea di Partenza

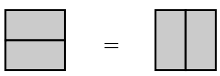
Elena presenta così la sua idea di partenza:

La primissima versione del problema è un insieme di appunti poco precisi che ho scritto su un block notes. Le annotazioni sono le seguenti:

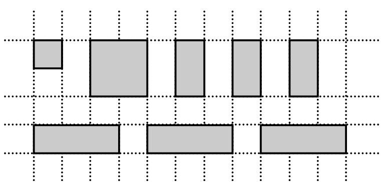
Obiettivo: formare quadrati usando uno o più pezzi.

Non si può utilizzare più di una volta la stessa combinazione.

ad esempio [18] *:*

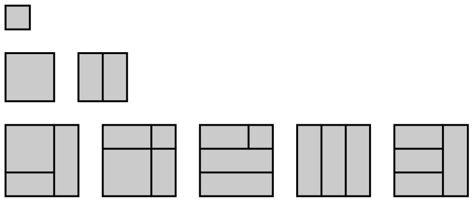


Pezzi a disposizione:



[18] Le immagini sono state ridotte per questo articolo

Soluzioni:



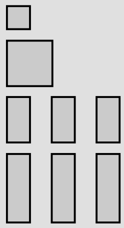
Ambito concettuale: geometria: quadrati e rettangoli, rotazione.

Questo problema, essendo tra quelli candidati ad essere proposti nelle gare ufficiali, non è mai stato svolto in classe.

4. La prima versione

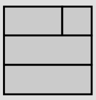
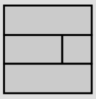
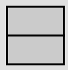
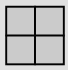
Per passare dall'idea di partenza, ancora virtuale, alla forma scritta di un problema candidato ad una prova del RMT, è necessario immaginare un contesto, redigere l'enunciato ed effettuare un'analisi a priori. Ecco il risultato di questo lavoro di elaborazione effettuato da Elena, e proposto per un primo esame ai membri della sezione di Udine.

Il quadrotto (Cat. 3, 4, 5) (Versione 1)



Paolo, per il compleanno, ha ricevuto un nuovo gioco: il quadrotto.
Nella scatola del gioco c'è un cartoncino da cui si devono staccare i seguenti pezzi.
Questo gioco ha due regole
- si devono formare dei quadrati utilizzando uno o più pezzi tra quelli a disposizione
- non si può usare più di una volta la stessa combinazione di pezzi.

Ad esempio il quadrato 1 ed il quadrato 2 vengono considerati un quadrato solo perché sono costruiti con gli stessi pezzi.
Invece il quadrato 3 ed il quadrato 4 sono considerati due quadrati diversi perché sono costruiti con pezzi diversi.

1  2  3  4 

Qual è il numero massimo di quadrati diversi che potranno essere costruiti da Paolo?
Disegnateli tutti.

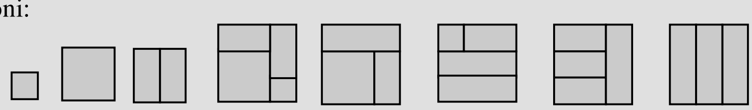
Analisi a priori

Ambito concettuale

- Geometria: quadrati e rettangoli; rotazione
- Logica: ricerca ordinata di combinazioni

Analisi del compito

- disegnare ed eventualmente ritagliare i pezzi
- Costruire i quadrati manipolando i pezzi
- Capire che i rettangoli si possono disporre sia uno sotto l'altro che accostati
- Capire che la stessa combinazione non può essere utilizzata più di una volta
- Procedere in modo sistematico per trovare tutti i modi possibili per disporre i pezzi
- Disegnare le 8 soluzioni:



Attribuzione dei punteggi

4 Otto quadrati disegnati con precisione (uno di 1 x 1, due di 2 x 2 e cinque di 3 x 3) senza ripetizione della stessa combinazione

3 Sei quadrati disegnati con precisione senza la ripetizione della stessa combinazione

2 Quatto quadrati disegnati con precisione senza ripetizione della stessa combinazione oppure più di quattro quadrati disegnati con la ripetizione di almeno una combinazione

1 Due quadrati disegnati con precisione senza ripetizione di combinazioni

0 Incomprensione del testo del problema

Livello: 3, 4, 5 **Origine:** Udine

Dall'idea di partenza alla prima versione:

- C'è una situazione: Paolo; il compleanno; il gioco di costruzione con parti da staccare; le regole del gioco, la seconda delle quali è illustrata da due esempi che permettono di precisare ciò che l'autore intende con "la stessa" combinazione; infine la domanda sul numero di quadrati "diversi" che Paolo potrà costruire.
- Nell'ambito concettuale, si osserva l'aggiunta della "logica".
- L'analisi del compito è nuova, riguarda soprattutto la manipolazione delle parti e non precisa come trovare "tutti i modi possibili di disporre i pezzi del gioco", benché la figura mostri una classificazione delle soluzioni in base alla dimensione dei quadrati.
- I criteri d'attribuzione dei punteggi, anch'essi nuovi, evidenziano che la soluzione del problema consisterà nel trovare otto quadrati evitando le ripetizioni delle combinazioni.

5. La seconda versione

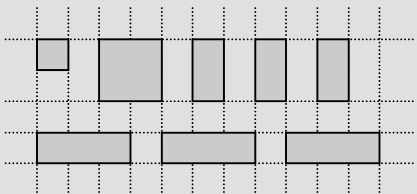
Questa seconda versione è il frutto del lavoro di rilettura e riesame da parte di Elena, Annamaria e degli animatori della sezione di Udine.

(Per facilitare il confronto con la versione precedente, abbiamo barrato le parti eliminate e sottolineato le parti modificate o nuove.)

Il quadrotto (Cat. 3, 4, 5) (Versione 2)

Paolo, per il compleanno, ha ricevuto un nuovo gioco, il quadrotto.

Nella scatola del gioco c'è un cartoncino da cui si devono staccare i seguenti pezzi.



(nuova presentazione, su quadrettatura[19])

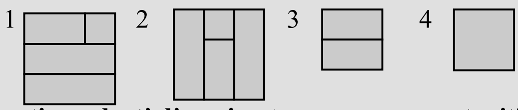
Il gioco consiste nel formare un quadrato con uno o più pezzi tra quelli a disposizione (vecchia regola 1).

Paolo incomincia il gioco, forma un quadrato, lo disegna e poi rimette tutti i pezzi insieme per formare un altro quadrato, in questo modo riesce a costruirne molti, uno diverso dall'altro.

Un quadrato è considerato diverso da un altro se non è formato con gli stessi pezzi.

Ad esempio il quadrato 1 ed il quadrato 2 vengono considerati un quadrato solo perché sono costruiti con gli stessi pezzi.

Invece il quadrato 3 ed il quadrato 4 sono considerati due quadrati diversi perché sono costruiti con pezzi diversi.



(l'ultimo quadrato è formato da un solo pezzo anziché da quattro quadrati piccoli)

Quanti quadrati diversi potranno essere costruiti da Paolo?

Disegnateli tutti.

[19] Come in tutto l'articolo, i disegni sono stati ridotti rispetto agli originali

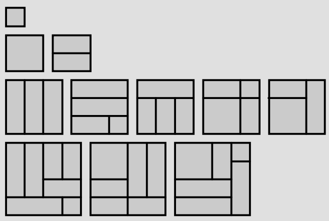
Analisi a priori

Ambito concettuale

- Geometria: quadrati e rettangoli; ~~rotazioni~~ equiestensioni
- Logica: ricerca ordinata di combinazioni

Analisi del compito

- Capire che una volta formato un quadrato si devono rimettere insieme tutti i pezzi per formare un nuovo quadrato
- Capire che si possono formare quadrati anche con un solo pezzo.
- Capire che i rettangoli si possono disporre sia uno sotto l'altro, sia accostati.
- Capire che ~~la stessa combinazione non può essere utilizzata più di una volta~~ due quadrati formati con gli stessi pezzi non sono quadrati diversi e che, quindi, la stessa combinazione di pezzi, disposti in modo diverso, non può essere utilizzata più di una volta
- Procedere in modo sistematico per trovare tutti i modi possibili per disporre i pezzi disegnando o incollando i pezzi ritagliati
- Disegnare o incollare gli ~~8~~ 11 quadrati (uno da 1 x 1, due da 2 x 2, cinque da 3 x 3 e tre da 4 x 4):



Attribuzione dei punteggi

4 ~~Otto~~ Undici quadrati diversi disegnati o incollati con precisione ~~(uno di 1 x 1, due di 2 x 2 ...)~~

3 Nove quadrati diversi disegnati o incollati con precisione ~~senza la ripetizione de la stessa combinazione~~

2 Sei quadrati disegnati o incollati con precisione senza ripetizione di una stessa combinazione oppure più di sei quadrati con la ripetizione di almeno una combinazione

1 Tre quadrati diversi (anche se sono gli stessi utilizzati nell'esempio) disegnati o incollati con precisione senza ripetizione di combinazioni oppure quattro o cinque quadrati con la ripetizione di una o più combinazioni

0 Incomprensione ~~del testo~~ del problema o meno di tre quadrati.

Nel passaggio dalla prima alla seconda versione ci sono stati notevoli cambiamenti che mettiamo in evidenza.

- Le figure del gioco sono presentate su quadrettatura, cosa che evita tutte le ambiguità sulla lunghezza dei lati.
- Il contesto è lo stesso, ma il testo è stato riformulato: non ci sono più le due regole; si precisa che le parti sono rimesse in gioco dopo le costruzioni precedenti e che si possono ottenere molti quadrati "diversi". Ma il cambiamento più significativo avviene nella definizione dei criteri in base ai quali si deve riconoscere una costruzione possibile: "non si può usare più di una volta la stessa combinazione di pezzi" diventa "Un quadrato è considerato diverso da un altro se non è formato con gli stessi pezzi."
- Le immagini che dimostrano la seconda regola sono state leggermente modificate: l'immagine 2 è stata ruotata di un quarto di giro (i rettangoli sono "verticali") e l'immagine 4 non è più suddivisa in quattro quadrati.
- Nell'"ambito concettuale", il cambio da "rotazione" a "equiestensione" rivela un'evoluzione dal campo geometrico al campo aritmetico, con l'introduzione della misura di superficie.
- L'analisi del compito rinuncia alla parte descrittiva relativa alla manipolazione e la sostituisce con considerazioni sulla comprensione delle modalità di scelta dei pezzi, che devono tener conto delle limitazioni imposte.
- Sono state scoperte tre nuove soluzioni, il loro numero passa da 8 a 11! I criteri di attribuzione dei punteggi sono stati adattati alla scoperta delle tre nuove figure.

Tutte queste modifiche sono caratteristiche peculiari del passaggio da una prima elaborazione individuale, ad una riflessione collettiva a livello di sezione.

In particolare, la scoperta delle tre soluzioni non previste nella versione precedente, è un fenomeno molto frequente nell'evoluzione dei problemi del RMT. Un autore, infatti, crea un problema partendo da sue immagini implicite o da un contesto personale: in questo caso, l'idea iniziale era probabilmente di cercare quadrati di dimensioni pari o inferiori alla più grande dimensione dei pezzi - cioè 3 volte il lato del quadrato unità - senza rendersi conto che l'enunciato non impedisce di andare oltre e di trovare lati lunghi 4 “quadratini piccoli”. È nel momento in cui altre persone risolvono il problema che appaiono le carenze negli enunciati o nelle analisi d'origine. Lo stesso fenomeno può essere osservato negli allievi, in occasione di convalide collettive efficaci.

6. Una nuova lettura del problema

Quando il progetto passa da una sezione al Gruppo permanente dei problemi (GPP), ci si avvicina al livello più ampio dell’ARMT. I criteri con cui il problema viene esaminato si avvalgono dei numerosi anni di pratica nell'elaborazione dei nostri problemi: letture e riflessioni attuate tra i membri delle commissioni responsabili di una prova o raccolte in occasione delle consultazioni generali.

La seconda versione de *Il quadrotto* ha suscitato, da parte del responsabile del GPP, alcune considerazioni che sono state prontamente comunicate alla sezione di Udine. Come già detto, questa procedura è insolita. Sono le circostanze particolari in cui è avvenuta l’elaborazione di questo problema e la partecipazione attiva di uno studente tirocinante alla sua creazione, che l’hanno suggerita come opportuna.

Una prima osservazione si riferisce alle difficoltà incontrate, nel corso degli anni, dagli allievi e dagli autori dei problemi **a proposito della terminologia** “stessi”, “uguali”, “equivalenti”, “isometrici”, “sovrapponibili”, “identici”, “congruenti”, “diversi”, ... Questi termini possono qualificare sia gli oggetti fisici, sia le loro varie rappresentazioni, ma anche le loro astrazioni come figure geometriche.

Nel contesto de *Il quadrotto* “i pezzi” sono oggetti con proprietà fisiche parzialmente determinate, si sa che sono in cartone e che ce ne sono otto: due quadrati, uno piccolo da 1 x 1 e uno grande da 2 x 2, tre rettangoli piccoli (1 x 2) rappresentati “verticalmente” nel disegno e tre rettangoli grandi (3 x 1) disposti “orizzontalmente”.

Per il bambino questi otto “pezzi” hanno ognuno un proprio aspetto, anche se alcuni si “rassomigliano”. Ad esempio uno potrebbe avere uno strappo dopo essere stato “staccato dal cartone” giustificando l’idea che uno dei rettangoli con le stesse dimensioni non è “uguale” agli altri due.

Per l’adulto non c’è alcun dubbio che tre rettangoli aventi le stesse dimensioni (secondo l'unità di misura data dalla quadrettatura) sono una sola “figura geometrica”, nonostante l’immagine sia ripetuta tre volte.

Sarebbe necessario sostituire nell’enunciato “stessi pezzi” con “stesso tipo di pezzo”. Ma anche in questo caso comparirebbero immediatamente delle nuove ambiguità!

Una seconda osservazione riguarda la **posizione dei pezzi riportata negli esempi**. I bambini avranno difficoltà a comprendere che i due quadrati del primo esempio devono essere considerati uguali nonostante la posizione “orizzontale” dei rettangoli della prima figura e “verticale” della seconda.

Una terza osservazione riguarda le **difficoltà di lettura** osservate spesso in occasione delle analisi a posteriori delle nostre prove. Si tratta, in questo caso, della doppia negazione utilizzata nella definizione del criterio-chiave del problema: “un quadrato è considerato *diverso* da un altro se *non è formato* con gli stessi pezzi” che è necessario interpretare come “due quadrati sono considerati *uguali* se *sono formati* con gli stessi pezzi”. Quest'ultima formulazione è scelta per il primo esempio ma, in base a quanto detto nella prima osservazione, il suo rigore logico lascia a desiderare.

Una quarta osservazione viene da una tendenza attuale a rinunciare, per i problemi del RMT, alle domande del genere “Trovate tutte le soluzioni possibili!” che si incontrano molto spesso nei nostri problemi più vecchi a proposito della ricerca di possibili combinazioni (codici segreti, disposizioni di oggetti, colorazioni, numeri che dipendono da alcune proprietà, ...). Inseriamo qui la **distinzione tra un “esercizio”** e un **“vero problema”**. La ricerca di tutti i quadrati che si possono costruire con i pezzi del gioco *Il quadrotto* è una domanda dell’adulto o piuttosto un'imposizione, che viene data dagli autori del problema o da un'autorità esterna rispetto a chi lo risolve. Dal punto di vista dell'insegnante o del matematico, sono importanti la ricerca di tutte le soluzioni e il modo per trovarle, ma sarebbe auspicabile che l'allievo capisse autonomamente che deve prevedere tutte le soluzioni. Se riusciamo a favorire la comprensione autonoma dei dati contenuti nel testo del problema, da parte di chi lo deve risolvere, ci avviciniamo al concetto di “devoluzione” didattica. Occorrerebbe allora cercare di modificare il contesto del problema per evitare la domanda esplicita sulla ricerca delle soluzioni.

7. Terza versione

Questa nuova versione è stata elaborata dal gruppo di Udine tenendo conto delle osservazioni precedenti.

Per facilitare il confronto con la versione precedente, abbiamo cancellato le parti eliminate e sottolineato le parti modificate o nuove rispetto alla seconda versione.

Il quadrotto (Cat. 3, 4, 5) (Versione 3)

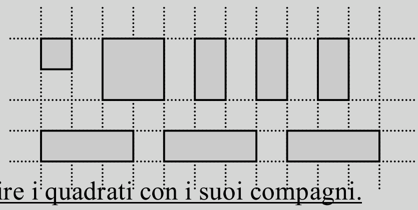
Paolo, per il compleanno, ha ricevuto un nuovo gioco, il quadrotto.

Paolo vede che il suo gioco è formato da 8 tessere di cartoncino con le quali si devono costruire solo quadrati.

Ci sono quattro tipi di tessere:

- un quadrato piccolo - un quadrato grande - tre rettangoli piccoli -tre rettangoli grandi.

Ecco il disegno delle tessere:



Paolo sta giocando a costruire i quadrati con i suoi compagni.

Riesce a formare un quadrato usando solo due tipi di tessere.

Anna osserva con attenzione il quadrato di Paolo, rimette insieme tutte le tessere e forma un quadrato usando solo tre tipi di tessere.

Infine ci prova anche Elena che, dopo aver rimesso insieme tutte le tessere, riesce a formare un quadrato utilizzando tutti i tipi di tessere.

Quali quadrati potrebbero aver costruito Paolo, Anna ed Elena?

Disegnateli tutti con precisione e indicate chi li ha costruiti.

Analisi a priori

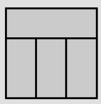
Ambito concettuale

- Geometria: quadrati e rettangoli; equiestensioni
- ~~Logica: ricerca ordinata di combinazioni~~

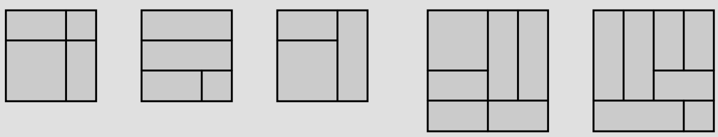
Analisi del compito

- Capire che per costruire i quadrati si possono usare solo le tessere contenute nella scatola.
- Capire che una volta formato un quadrato si devono rimettere insieme tutte le tessere per formare un nuovo quadrato.
- Capire che non è necessario utilizzare tutte le tessere per costruire un quadrato.
- Saper scegliere le tessere che accostate formano un quadrato.
- Procedere in modo sistematico per trovare tutti i modi possibili per disporre le tessere disegnandole o incollandole dopo averle ritagliate.
- Disegnare o incollare i 7 quadrati indicando quali possono essere stati costruiti da ciascun bambino:

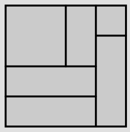
1. Paolo, con due soli tipi di pezzi, può aver formato un solo quadrato 3x3 con tre pezzi da 2 e uno da 3 (2+2+2+3=9)



2. Anna, con solo tre tipi di pezzi, può aver costruito uno tra 3 possibili quadrati 3x3 (1+2+2+4 = 1+2+3+3 = 2+3+4=9) oppure uno tra 2 quadrati 4x4 (2+2+2+3+3+4 = 1+2+2+2+3+3+3=16). Esempi:



3. Elena, con tutti i quattro tipi di pezzi può aver costruito solo un quadrato 4x4 (1+2+3+3+3+4=16). Esempio:



Attribuzione dei punteggi

4 I sette quadrati disegnati o incollati con precisione e la corretta indicazione di chi può averli costruiti (si accetta anche la soluzione con più di 7 quadrati perché alcuni ottenuti tramite rotazione, simmetria o diversa disposizione degli stessi pezzi).

3 Cinque o sei quadrati (anche se, oltre ad essi, ci sono altri quadrati ottenuti tramite rotazione, simmetria o per diversa disposizione degli stessi pezzi) disegnati o incollati con precisione e la corretta indicazione di chi può averli costruiti

oppure i sette quadrati disegnati o incollati con precisione (anche se, oltre ad essi, ci sono altri quadrati ottenuti tramite rotazione, simmetria o per diversa disposizione degli stessi pezzi), ma senza l'indicazione di chi può averli costruiti.

2 Tre o quattro quadrati (anche se, oltre ad essi, ci sono altri quadrati ottenuti tramite rotazione, simmetria o per diversa disposizione degli stessi pezzi) disegnati o incollati con precisione e l'indicazione di chi può averli costruiti.

oppure cinque o sei quadrati (anche se, oltre ad essi, ci sono altri quadrati ottenuti tramite rotazione, simmetria o per diversa disposizione degli stessi pezzi) disegnati o incollati con precisione, ma senza l'indicazione di chi può averli costruiti

1 Uno o due quadrati (anche se, oltre ad essi, ci sono altri quadrati ottenuti tramite rotazione, simmetria o per diversa disposizione degli stessi pezzi) disegnati o incollati con precisione, con o senza l'indicazione di chi può averli costruiti.

oppure tre o quattro quadrati disegnati o incollati con precisione, ma senza indicazione di chi può averli costruiti

0 Incomprensione del problema o quadrati ottenuti anche con pezzi non appartenenti a quelli dati (più di un quadrato piccolo o grande, più di 3 rettangoli piccoli o grandi)

Dalla seconda alla terza versione si può notare che, sempre nel contesto del gioco di costruzione, è stata inserita una modifica fondamentale dei criteri di scelta dei quadrati: si presentano in modo esplicito i quattro tipi di pezzi in gioco e si distinguono i quadrati secondo il numero dei tipi di pezzi utilizzati. Si evitano così le definizioni di quadrati uguali o diversi e gli esempi che li illustrano.

Con un nuovo scenario che fa intervenire diversi personaggi il compito è alleggerito. Per i quadrati di Paolo (due tipi di pezzi) ed Elena (quattro tipi di pezzi), la ricerca si limita a un solo quadrato, ma richiederà tuttavia la verifica che non ci siano altre soluzioni. Questo compito è lasciato all'allievo in entrambi i casi. Per il quadrato di Anna (tre tipi di pezzi), ci sono cinque soluzioni da trovare e alcune da eliminare. Resta, tuttavia, una "domanda-imposizione": "Disegnateli tutti con precisione". È importante per l'adulto, certamente, ma la decisione di rappresentare in modo ordinato le soluzioni trovate non è lasciata all'azione intenzionale dell'allievo.

L'analisi del compito e i criteri d'attribuzione del punteggio sono stati modificati di conseguenza.

Per i correttori che dovranno attribuire il punteggio, il lavoro sarà un po' più semplice, poiché le soluzioni da controllare passano da 11 a 7.

8. Il futuro del problema[20]

La terza versione de *Il quadrotto* è stata inserita tra le proposte che sono state prese in considerazione dal GPP, e trasmesse ai gruppi responsabili delle prove del 19° RMT. Il problema continuerà probabilmente ad evolvere, per raggiungere in seguito la fase della consultazione alle sezioni, prima di raggiungere la versione finale che sarà proposta alle classi.

Si possono già prevedere alcune delle osservazioni che susciterà questa terza versione in occasione delle prossime tappe.

---

[20] Quest'articolo è stato scritto prima del 19° RMT come verrà spiegato nell'epilogo. Il paragrafo 8. è dunque ancora scritto "al futuro" benché ormai il 19° RMT si sia concluso.

Si rifletterà certamente sulla difficoltà che rappresenta, soprattutto per i più piccoli tra gli allievi, la distinzione tra il numero dei pezzi ed il numero dei tipi di pezzi. Si può prevedere l'aggiunta di un esempio o l'identificazione dei quattro tipi di pezzi con un numero o una lettera.

Sarà anche necessario riflettere sulle categorie alle quali sarà attribuito il problema ed eventualmente facilitare la comprensione del problema da parte dei più piccoli. A questo scopo, si potrà agire sulle parti a disposizione, sul testo dell'enunciato, sugli esempi dati o su altro ancora.

Nella rubrica "ambito concettuale", si dovrà verificare se il problema è puramente geometrico o se si inserisce in un quadro aritmetico o logico. Questa riflessione avrà conseguenze sull'analisi del compito, sui criteri d'attribuzione dei punteggi e sugli obiettivi matematici che si sceglieranno per *Il quadrotto.*

L'attività proposta dal problema potrebbe effettivamente essere considerata dal punto di vista della manipolazione dei pezzi, della loro disposizione e delle loro combinazioni. I quadrati formati potrebbero essere il risultato di tentativi organizzati in modo "astuto" (non possiamo dire "rigoroso" poiché il "rigore scientifico" sembra qui fuori luogo) o con prove aleatorie e molta perseveranza. Secondo questo punto di vista, si valuteranno i risultati conseguiti in funzione del numero di soluzioni ottenute, distinguendo in particolare quelle che sono diverse per i tipi dei pezzi utilizzati, da quelle che sono diverse per la disposizione dei pezzi. Si terrà conto anche della qualità dei disegni o del modo in cui i pezzi sono stati incollati.

L'attività potrebbe peraltro anche essere considerata da un punto di vista logico ed aritmetico, che non appare nell'analisi del compito né nei criteri d'attribuzione dei punteggi delle prime tre versioni del problema. Occorrerebbe allora ricorrere alle superfici dei vari tipi di pezzi.

Per esempio, dalla prima alla seconda versione, sono stati scoperti tre nuovi quadrati di 4 unità di lato; ma non si fa alcun cenno alle procedure che permettono di essere sicuri che non ve ne siano altri di questa dimensione e che non ci siano quadrati di 5 unità di lato. Nella terza versione, inoltre, non si spiega il motivo per cui c'è un solo quadrato di 4 unità di lato costruito con i quattro tipi di pezzi, né perché non ci possono essere quadrati di 3 unità di lato costruiti con i quattro tipi di pezzi.

In questa scelta tra i due punti di vista, spaziale (orientato verso la geometria) e logico (orientato verso l'aritmetica), occorrerà anche pensare alle possibilità di utilizzo del problema nella pratica didattica.
A questo proposito si ricorda la varietà dei nostri problemi: certi sono dei semplici ma interessanti rompicapo molto comuni nelle gare; altri sono utili per favorire la ricerca di strategie risolutive diverse; altri ancora sono pensati per agevolare la costruzione di nozioni e concetti matematici.

9. Conclusioni

- In primo luogo, bisogna ricordare la testimonianza di Elena che ha avuto l'idea di creare questo problema, raccolta nelle prime fasi dell'elaborazione:

  Questa esperienza è stata molto bella e soprattutto utile. Mi ha infatti permesso di addentrarmi in modo più profondo nel mondo del rally e capire meglio il complesso lavoro che sta dietro. Visto dal di fuori sembra che sia tutto molto semplice: qualcuno crea i problemi, delle classi cercano di risolverli, ed in base alla loro riuscita o meno ricevono una valutazione.

  Invece non è così, questa gara è molto più articolata: è necessario creare problemi che parlino di situazioni vicine agli studenti, che richiedano dei procedimenti di risoluzione non meccanici, ma sui quali si debba ragionare, che permettano a tutti gli studenti di affrontarli seguendo diverse strategie risolutive. Problemi le cui caratteristiche offrono spunti di riflessione per me, futura insegnante convinta che i bambini debbano essere al centro del sapere e debbano essere loro, benché aiutati, a conquistarlo. Non importa quali sono le strategie che utilizzano, l'importante è che le adoperino e che raggiungano l'obiettivo da soli.

  Questa testimonianza non ha bisogno di commenti, ci fa entrare direttamente nella problematica dell'argomento descritto in questo articolo.
- Come seconda osservazione conclusiva, è opportuno sottolineare l'aspetto cooperativo dell'elaborazione di un problema del RMT. È un'impresa collettiva con numerosi partner che intervengono, ciascuno al proprio livello di lettura o di responsabilità professionale. Una sola persona può portare l'idea di base o un contributo importante nella messa a punto, ma il suo intervento non è mai esclusivo.
- Una terza osservazione si riferisce all'aspetto evolutivo di un problema. Ad un certo punto, per le necessità della prova, è necessario arrivare ad un testo che tutti i partner abbiano accettato, con la consapevolezza che la vita del problema continua. La sua evoluzione potrà avvenire alla luce delle analisi a posteriori in particolare, ma anche a seguito di altre successive riflessioni, o anche sotto l'influenza dell'analisi di problemi analoghi. Attraverso le diverse versioni de *Il quadrotto* presentate nelle pagine precedenti, si intravedono già delle alternative sul piano geometrico o aritmetico.

- Un'ultima osservazione si riferisce ad altre possibili finalità didattiche del problema, descritte già in occasione dei suoi primi passi. In quali percorsi di apprendimento potrà essere inserito in classe? Sarà pertinente in un lavoro sulle superfici di quadrati e di rettangoli? O nello studio delle isometrie? Oppure nella combinatoria? In conclusione saranno le potenzialità didattiche a determinare il futuro de *Il quadrotto* e la sua evoluzione da semplice problema di una gara a strumento didattico vero e proprio.

10. Epilogo

La storia delle origini di questo problema è stata scritta prima che questo fosse entrato a far parte di una delle prove del RMT. Le pagine precedenti sono state tenute in sospeso per non divulgare il problema prima della sua apparizione ufficiale in una delle prove.

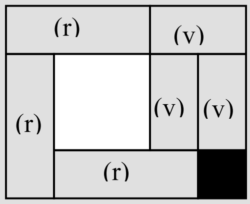
I responsabili della prova I del 19° RMT hanno fatto leggeri adattamenti al progetto *Il quadrotto*, e poi, durante la consultazione rivolta alle sezioni, sono state apportate ulteriori modifiche che lo hanno perfezionato.

Diventato *I quadrati di Paolo*, il problema ha continuato il suo cammino. Ecco la **versione definitiva del problema**, così come è stato infine proposto ai ragazzi nella prima prova del 19° RMT.

I quadrati di Paolo (cat. 3, 4, 5)

Paolo ha ricevuto un gioco di costruzioni, composto da otto pezzi sistemati in una scatola, come quella che vedete qui disegnata.

Ci sono quattro tipi di pezzi di quattro colori
- un quadrato grande in bianco,
- tre rettangoli grandi in rosso (r),
- tre rettangoli piccoli verde (v),
- un quadrato piccolo in nero.

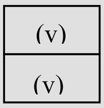


Colorate tutti pezzi rossi (r) e verde (v)

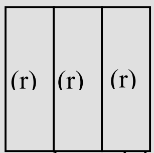
Il gioco consiste nell'utilizzare più pezzi per formare dei quadrati.

Paolo ha potuto formare due quadrati con più pezzi di uno stesso colore:

uno verde

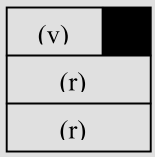


e uno rosso



Ha inoltre potuto formare molti quadrati di tre colori (utilizzando tre tipi di pezzi).

Per esempio: con il quadrato nero,
un rettangolo verde (v)
due rettangoli rossi (r) :



Provate a formare un quadrato di due colori (utilizzando soltanto due tipi di pezzi).

E provate a formare un altro quadrato, di quattro colori (utilizzando i quattro tipi di pezzi).

Disegnate i quadrati che avete potuto formare (solo uno di due colori e solo uno di quattro colori) e fate in modo che si vedano i pezzi che avete utilizzato.

Come ci aspettavamo, (vedi capitolo "Il futuro del problema") la distinzione tra il numero dei pezzi e il numero dei tipi di pezzi è stata chiarita attraverso i colori. È sembrato più semplice parlare di pezzi bianchi, verdi, rossi e neri che ripetere ogni volta "piccoli" e "grandi", "quadrati" o "rettangoli". L'aggiunta di esempi è stata suggerita da più lettori ed è stata approvata. E, soprattutto, la ricerca è stata limitata a 2 quadrati invece dei 7 della versione III.

Malgrado tutti questi "aiuti alla risoluzione" introdotti all'atto dell'elaborazione dell'enunciato, gli allievi delle categorie 3 e 4 non hanno risposto alle attese o speranze degli autori. Bisogna aspettare la categoria 5 per avere una riuscita "accettabile" (il dettaglio dei risultati è in appendice).

Come nella maggioranza dei problemi in cui ci sono puzzle o figure da ricostruire, è difficile identificare i saperi mobilitati per l'analisi delle figure: spaziali, numerici, logici? (vedi il capitolo "Il futuro del problema")

In appendice è riportata anche una prima analisi degli elaborati della sezione di Udine che conduce ad osservazioni interessanti sulla nozione di "quadrato", sui rapporti tra le misure dei pezzi e la comprensione del testo.

Per finire, il problema *I quadrati di Paolo* ha dietro si sé una lunga storia che mostra tutte le difficoltà del passaggio da un gioco di costruzione dove si tratta di assemblare dei pezzi per formare quadrati ad un'attività corrispondente, ma su figure geometriche e le cui regole sono enunciate tramite un testo da leggere e decodificare.

Questo passaggio è difficile per giovani allievi. Una grande maggioranza non è arrivata alle due soluzioni attese, ma il lavoro non è finito, anzi. Ora conosciamo il problema *I quadrati di Paolo* dalla sua origine fino alla sua somministrazione in più di 1500 classi e conosciamo anche qualche analisi iniziale. L'essenziale della sua storia è di là da venire: che cosa faremo di ciò che è per ora solo il punto di partenza per un'azione didattica? Possiamo pensare a dibattiti in classe, a confronti tra allievi, a validazioni tramite un ritorno agli oggetti del gioco di costruzione, a istituzionalizzazioni... senza i quali gli allievi non potranno progredire veramente nella costruzione dei concetti di quadrato e di composizione di figure.

NAISSANCE ET PREMIERS PAS D'UN PROBLÈME DU RMT

Annamaria D'Andrea[21], François Jaquet[22]

1. Introduction

Lorsqu'on découvre une épreuve du RMT et sa vingtaine de problèmes, on ne soupçonne pas toujours l'histoire de chacun des sujets : son évolution, de l'ébauche à la version définitive ; on ne connaît pas les personnes qui ont participé à son élaboration : de celui qui a eu l'idée aux lecteurs qui ont proposé les derniers aménagements ; on ne perçoit plus l'ensemble des contenus mathématiques qui ont été envisagés en cours de création.

Un problème du RMT est une « oeuvre » dans tous les sens du terme (Le *Robert* de la langue française mentionne : « activité, travail, création, production, action humaine, résultat sensible d'une action ou d'une série d'actions orientées vers une fin ... ») Au même titre qu'une oeuvre picturale, littéraire, musicale, le problème est une création, dans un contexte historique et social.

Dans cet article, nous allons présenter un exemple de conception et d'élaboration d'un problème, *Il quadrotto*[23], de l'idée initiale à une version proposée aux responsables de la première épreuve du 19^{e} RMT.

Il ne s'agit que de quatre premières étapes dans la vie de ce problème, de sa naissance à ses premiers pas. Il y en aura beaucoup d'autres encore, vraisemblablement, au cours desquelles le problème va encore croître, passer de nombreux « examens » puis, en cas d'admission, être proposé aux classes. Mais sa vie ne s'arrêtera pas forcément là. Si l'analyse des résultats révèle des potentialités pour l'évaluation de connaissances ou leurs apprentissages, le problème pourra encore « prendre de la bouteille » ou faire apparaître de « petits frères », en vue d'exploitations ultérieures en classe.

La première étape est celle du passage de *l'idée initiale* à la *première version*. Elle se déroule dans un contexte et avec des personnages qui doivent être présentés pour saisir les circonstances de la naissance du projet. On y constate qu'une étudiante, Elena, en stage dans la classe d'une animatrice du RMT, Annamaria, animatrice de la section d'Udine, est en mesure de contribuer efficacement à la création de problèmes. Cette première étape est individuelle. Elena, qui a eu l'idée de ce problème de mathématiques, doit le mettre en forme afin de le communiquer. C'est le passage à l'écriture d'un texte comprenant l'énoncé et une analyse a priori.

La deuxième étape est collective, elle se déroule au sein d'un groupe, composé d'Elena, Annamaria, ainsi que de Luciana, Paola, Michela e Giuliano, les autres membres de la section d'Udine, qui va discuter le projet et élaborer une *deuxième version* à proposer à un niveau plus général en suivant les procédures d'élaboration des épreuves du RMT. De la première à la deuxième version, on verra apparaître des modifications révélatrices des enjeux du problème.

La troisième étape est un élargissement du débat précédent, avec la participation du responsable du GPP (groupe permanent des problèmes de l'ARMT), qui va faire intervenir les connaissances construites par la pratique de longues années de construction, d'observation et d'analyses de problèmes. Les contenus mathématiques y tiendront les rôles principaux.

Pour la majorité des problèmes proposés par les sections, les étapes suivantes sont une lecture interne au GPP qui établit un premier choix, puis une analyse approfondie par les deux ou trois sections responsables d'une épreuve, puis la lecture par toutes les sections, avant la dernière mise au point selon les avis émis lors de la consultation générale.

Dans le cas de *Il quadrotto* vu l'intérêt de la participation d'une stagiaire à l'élaboration de ce problème, il y a eu un retour aux auteurs d'origine qui ont pu tenir compte des premières remarques reçues avant d'envoyer une *troisième version* du problème.

2. Les origines

Pour cet exemple, le problème naît d'une rencontre entre Annamaria d'Andrea, responsable de la section d'Udine et l'une de ses stagiaires qui se présente ainsi:

Je m'appelle Elena Sabbadini, j'ai 24 ans et je vis dans un petit village de la commune de Coseano, dans la province d'Udine en Italie. Je fréquente l'Università degli Studi di Udine, où je suis en dernière année de

---

[21] Responsable de la section d'Udine

[22] Responsable du Groupe permanent des problèmes

[23] Nous conservons, dans la version française de cet article, le titre original italien. Si le problème poursuit sa route jusqu'à une épreuve du RMT, il est vraisemblable qu'on lui trouvera un titre en français.

licence en Sciences de l'Éducation pour la formation primaire. Le programme de formation prévoit que, chaque année académique, l'étudiant effectue un stage dans une école. Dès la première années d'université, j'ai été stagiaire à l'école primaire dei Cisterna. La dernière année d'université comprend un stade de 65 heures qui peuvent être réparties en deux blocs ou être effectuées d'un seul trait. J'ai opté pour le premier volet de l'alternative : j'ai déjà accompli 35 heures sur un parcours didactique à propos de l'eau et j'effectue actuellement les 30 heures restantes en me consacrant au rallye mathématique, qui est le thème de ma thèse de licence.

L'idée de créer quelques problèmes à proposer pour les épreuves du RMT est née lors de discussions avec Annamaria : dans le but d'augmenter le nombre de sujets à disposition pour les futures épreuves. Cette expérience m'a aussi permis de m'engager plus activement dans le monde du rallye et de mieux percevoir la complexité du travail qui en constitue l'essence. J'ai ainsi créé quelques problèmes utilisables en particulier pour les classes de catégorie 3. Avec Annamaria, la maîtresse de stage, nous les avons vus, discutés et corrigés, puis ils ont encore été analysés par d'autres enseignants de la section.

Quatre propositions ont en effet été envoyées au responsable du GPP (Groupe permanent des problèmes du RMT) par Annamaria, en février 2010 avec un petit mot d'explication : "*cher François, avec l'aide de notre stagiaire nous avons préparé d'autres problèmes que je t'envoie ...*

Il s'agissait de

- *L'indovinello* (cat. 3): décomposition de 30 en somme de deux termes dont l'un est le double de l'autre, dans le contexte d'une collection de figures pour enfant. (Ce problème figurera parmi les candidats pour le 19e RMT)
- *Striscione*: trouver la décomposition additive de 100 selon la suite progressive des nombres naturels répétés chacun deux fois et la plus longue possible (dont le dernier terme seulement peut ne pas respecter la régularité) 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 5 + ... = 100; dans un contexte de drapeaux de deux couleurs, alignés sur un fil. (Ce problème est devenu *Guirlandes / Le bandierine* 18.II.2)
- Deux versions de *Il quadrotto*, dont l'une pour les catégories 3 à 5.

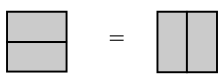
Ce dernier problème appartient à une famille nombreuse parmi les sujets proposés dans nos épreuves du RMT, celle de la combinatoire, dans des contextes de figures géométriques à assembler puis à dénombrer. Nous avons une longue expérience à propos de l'élaboration de ce type de problèmes et, pourtant, nous sommes très souvent surpris de leurs faibles taux de réussite : nous avons de la peine à identifier les obstacles que rencontrent les élèves placés devant ces dénombrements de dispositions géométriques. C'est une des raisons pour laquelle nous choisissons *Il Quadrotto* pour illustrer la problématique de l'évolution d'un problème.

Mais il faut remonter dans le temps et revenir à l'idée de départ et à la première version élaborée par Elena.

3. L'idée de départ

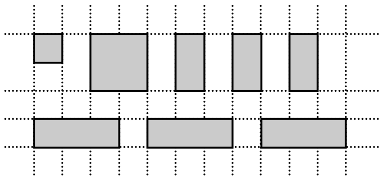
Elena présente ainsi son idée de départ :

> *La première version du problème est tirée d'un ensemble de notes peu précises relevées sur un bloc. Les annotations sont les suivantes :*
>
> *Objectif : former des carrés en utilisant une ou plusieurs pièces*
>
> *On ne peut utiliser plus d'une fois la même combinaison*
>
> *Par exemple*[24] *:*

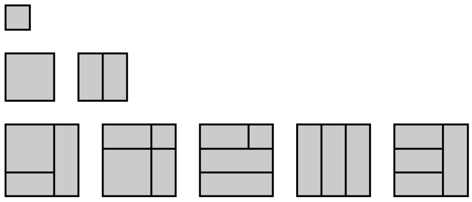


[24] Les dessins ont été réduits pour cet article

Pièces à disposition :



Solutions :



Domaine de connaissances : géométrie ; carrés et rectangles, rotations

Étant candidat pour une des épreuves officielles, ce problème n'a jamais été proposé en classe.

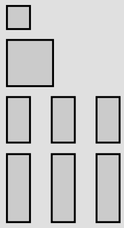
4. La première version

De l'idée de départ, encore virtuelle, à la forme écrite d'un problème candidat à une épreuve du RMT il faut imaginer un contexte et un scénario, rédiger l'énoncé et une analyse a priori. Voici le résultat de ce travail d'élaboration, effectué par Elena et proposé pour un premier examen aux membres de la section d'Udine.

Il quadrotto (Cat. 3, 4, 5) (Version 1)

Pour son anniversaire, Paul a reçu un nouveau jeu : le quadrotto.

Dans la boîte du jeu, il y a un carton dont il faut détacher les pièces suivantes :

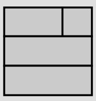
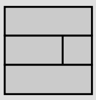
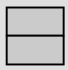
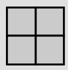


Il y a deux règles à ce jeu :

- on doit former des carrés en utilisant une ou plusieurs pièces à disposition,
- on ne peut pas utiliser plus d'une fois la même combinaison de pièces.

Par exemple, le carré 1 et le carré 2 sont considérés comme un seul carré parce qu'ils sont construits avec les mêmes pièces.

En revanche, le carré 3 et le carré 4 sont considérés comme deux carrés différents parce qu'ils sont construits avec des pièces différentes.

1  2  3  4 

Quel est le nombre maximum de carrés différents qui pourront être construits par Paul ?
Dessinez-les tous.

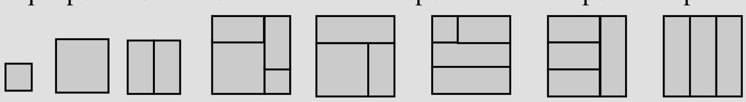
Analyse a priori

Domaine de connaissances

- Géométrie : carrés et rectangles, rotations
- Logique: recherche ordonnée de combinaisons

Analyse de la tâche

- Dessiner et éventuellement découper les pièces
- Construire les carrés en manipulant les pièces
- Comprendre que les rectangles peuvent se disposer soit les uns sous les autres, soit les uns à côté des autres.
- Comprendre que la même combinaison ne peut être utilisés plus d'une fois.
- Procéder de manière systématique pour trouver toutes les manières possibles de disposer les pièces.
- Dessiner les 8 solutions :



Attribution des points

4 Huit carrés dessinés avec précision (un de 1 x 1, deux de 2 x 2 et cinq de 3 x 3) sans répétition de la même combinaison

3 Six carrés dessinés avec précision sans répétition de la même combinaison

2 Quatre carrés dessinés avec précision sans répétition de la même combinaison ou plus de quatre carrés dessinés avec répétition d'au moins une combinaison

1 Deux carrés dessinés avec précision sans répétition de combinaisons

0 Incompréhension de l'énoncé

Niveaux 3, 4, 5 **Origine:** Udine

De l'idée de départ à la première version :

- Il y a une mise en scène : Paul, l'anniversaire, le jeu de construction avec pièces à détacher, les règles du jeu dont la deuxième est illustrée par deux exemples permettant de préciser ce que l'auteur entend par « la même » combinaison ; pour aboutir à la demande du nombre de carrés « différents » que Paul pourra construire.
- Dans le domaine de connaissances, on remarque l'adjonction de la « logique ».
- L'analyse de la tâche est nouvelle ; elle porte avant tout sur la manipulation des pièces et ne précise pas comment trouver « toutes les manières possibles de disposer les pièces », bien que la figure montre une classification des solutions selon la grandeur des carrés obtenus.
- Les critères d'attribution des points, nouveaux eux aussi, montrent que les enjeux du problème seront d'éviter les répétitions de combinaisons tout en cherchant à trouver les « huit » carrés.

5. La deuxième version

Cette deuxième version est le fruit du travail de relecture et d'examen par Elena, Annamaria et quelques autres animateurs de la section d'Udine.

(Pour faciliter la comparaison avec la version précédente, nous avons biffé les parties supprimées et souligné les parties modifiées ou nouvelles.)

Il quadrotto (Cat. 3, 4, 5) (Version 2)

Pour son anniversaire, Paul a reçu un nouveau jeu : le quadrotto.

Dans la boîte du jeu, il y a un carton dont il faut détacher les pièces suivantes :

(nouvelle présentation, sur quadrillage[25])

Le jeu consiste à former un carré avec une ou plusieurs pièces à disposition. (ancienne règle 1)

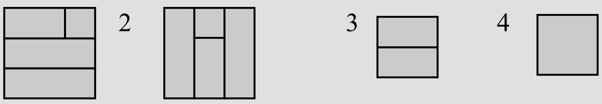
Paul commence le jeu, il forme un carré, le dessine, puis il remet toutes les pièces ensemble pour former un autre carré. De cette façon il arrive à construire beaucoup de carrés, chacun différent des autres.

Un carré est considéré comme différent d'un autre s'il n'est pas formé avec les mêmes pièces.

Par exemple, le carré 1 et le carré 2 sont considérés comme égaux parce qu'ils sont construits avec les mêmes pièces.

En revanche, le carré 3 et le carré 4 sont considérés comme deux carrés différents parce qu'ils sont construits avec des pièces différentes.

1 2 3 4



(ce dernier carré en une pièce au lieu de quatre petits carrés)

Combien Paul pourra-t-il construire de carrés différents ? Dessinez-les tous.

[25] Comme pour tout l'article, les dessins sont réduits

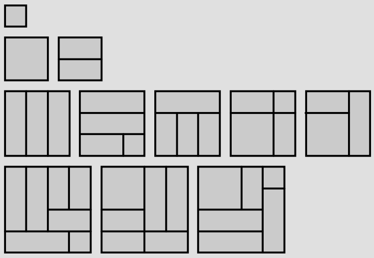
Analyse a priori

Domaine de connaissances

- Géométrie : carrés et rectangles, ~~rotations~~, équivalence d'aire
- Logique: recherche ordonnée de combinaisons

Analyse de la tâche

- Comprendre que, lorsqu'un carré est formé, il faut remettre toutes les pièces ensemble pour en former un nouveau.
- Comprendre qu'on peut aussi former des carrés d'une seule pièce.
- Comprendre que ~~la même combinaison ne peut être utilisés plus d'une fois~~ deux carrés formés des mêmes pièces ne sont pas des carrés différents et que, par conséquent, la même combinaison de pièces, disposées de manières différentes, ne peut être utilisée plus d'une fois.
- Procéder de manière systématique pour trouver toutes les manières possibles de disposer les pièces, en dessinant ou en collant les pièces découpées.
- Dessiner ou faire un collage des ~~8~~ 11 solutions (une de 1 x 1, deux de 2 x 2, cinq de 3 x 3 et trois de 4 x 4) :



Attribution des points

4	~~Huit~~ Onze carrés différents dessinés ou collés avec précision ~~(un de 1 x 1, deux de 2 x 2 et cinq die3 x 3) sans répétition de la même combinaison~~
3	Neuf carrés différents dessinés ou collés avec précision ~~sans répétition de la même combinaison~~
2	Six carrés dessinés ou collés avec précision sans répétition de la même combinaison ou plus de six carrés dessinés avec répétition d'au moins une combinaison
1	Trois carrés différents (même si ce sont les mêmes que ceux de qui sont utilisés dans l'exemple) dessinés ou collés avec précision sans répétition de plus d'une combinaisons
0	Incompréhension ~~de l'énoncé du problème~~ ou moins de trois carrés

De la première à la deuxième version on relèvera en particulier :

- Les figures du jeu sont présentées maintenant sur quadrillage, ce qui évite toutes les ambiguïtés sur les longueurs des côtés.
- Le contexte est conservé, mais le texte est reformulé : il n'y a plus les deux règles ; on précise que les pièces sont remises en jeu après les constructions précédentes et qu'on peut obtenir beaucoup de carrés « différents ». Mais le changement significatif se situe au niveau de la définition des critères de reconnaissance des constructions à effectuer : « On ne peut pas utiliser plusieurs fois la même combinaison de pièces » devient « Un carré est considéré comme différent d'un autre s'il n'est pas formé avec les mêmes pièces. »
- Les figures qui illustrent la deuxième règle sont légèrement modifiées : la figure 2 a subi une rotation d'un quart de tour, les rectangles sont « verticaux » et la figure 4 n'est plus partagée en quatre carrés.
- Dans le « domaine de connaissances », le remplacement de « rotation » par « équivalence d'aire » révèle une évolution du cadre géométrique au cadre arithmétique avec l'introduction de la mesure d'aire.
- L'analyse de la tâche renonce à la partie descriptive des manipulations et les remplace par des considérations sur la compréhension des enjeux sur le choix des pièces en tenant compte des contraintes.
- Trois nouvelles solutions sont découvertes ! (Leur nombre passe de 8 à 11). Les critères d'attribution des points sont adaptés à la découverte des 3 figures supplémentaires

Toutes ces modifications sont caractéristiques du passage d'une première élaboration, individuelle, à une réflexion collective au niveau de la section. En particulier, la découverte des trois solutions (oubliées dans la version précédente) est un phénomène très fréquent dans l'évolution des problèmes du RMT : un auteur crée un problème avec ses images implicites ou dans un contexte personnel (dans le cas présent, l'idée initiale était vraisemblablement de chercher des carrés de dimensions égales ou inférieures à la plus grande dimension des pièces - c'est-à-dire 3 fois le côté du carré unité - sans se rendre compte que l'énoncé n'empêche pas d'aller au-delà et de trouver des côtés de 4 unités de côté) ; c'est au moment où d'autres personnes « résolvent » le problème qu'apparaissent les insuffisances des énoncés ou des analyses d'origine. C'est le même phénomène que l'on observe chez les élèves, lors de validations collectives efficaces.

6. Une nouvelle lecture du problème

Lorsque le projet passe d'une section au groupe permanent des problèmes (GPP), on s'approche du niveau le plus étendu de l'ARMT. Les critères d'examen tiennent compte des longues années de pratique dans l'élaboration de nos problèmes : lectures et réflexions au sein de commissions responsables d'une épreuve ou issues des consultations générales.

La deuxième version de *Il Quadrotto* a suscité, de la part du responsable du GPP, quelques réactions qui ont été transmises à la section d'Udine. (Comme nous l'avons dit précédemment, ce retour de commentaires est inhabituel. Ce sont les circonstances particulières de l'élaboration de ce problème et la participation active d'une étudiante stagiaire à son élaboration, qui l'ont décidé.)

Une première remarque se réfère aux difficultés rencontrées au cours des années, par les élèves comme par les rédacteurs des problèmes, **à propos de la terminologie :** « mêmes », « égaux », « équivalents », « isométriques », « superposables », « identiques », « congruents », « différents », ... Ces termes peuvent qualifier soit des objets physiques, soit leurs différentes représentations, soit encore leurs abstractions en tant que figures géométriques.

Dans le contexte de *Il Quadrotto* les « pièces » sont des objets avec des propriétés physiques partiellement déterminées : on sait qu'elles sont en carton et qu'il y en a huit : un petit et un grand carré de (1 x 1) et (2 x 2), trois petits rectangles (1 x 2) placés horizontalement sur la feuille et trois grands rectangles (3 x 1) placés verticalement.

Pour l'enfant ces huit « pièces » ont chacune leur propre existence, même si certaines se « ressemblent ». Par exemple l'une pourrait conserver une déchirure après avoir été « détachées du carton » permettant de dire que l'un des rectangles de mêmes dimensions n'est pas le « même » que les deux autres.

Pour l'adulte, il ne fait aucun doute que trois rectangles de mêmes dimensions (selon l'unité de mesure donnée par le quadrillage) sont une seule et même « figure géométrique », même si elle est représentée trois fois dans la figure de l'énoncé.

Il faudrait remplacer « mêmes pièces » par « même type de pièce » dans l'énoncé. Mais là encore on voit immédiatement poindre de nouvelles ambiguïtés !

Une deuxième remarque concerne la **position des pièces sur les exemples**. Les enfants auront de la peine à comprendre que les deux carrés du premier exemple doivent être considérés comme égaux malgré la position « horizontale » des rectangles dans le premier dessin et « verticale » dans le second.

Une troisième remarque concerne les **difficultés de lecture** souvent observées lors des analyses a posteriori de nos épreuves. Il s'agit ici de la double négation utilisée dans la définition du critère-clé du problème : « un carré est considéré comme *différent* d'un autre s'il *n'est pas formé* avec les mêmes pièces » qu'il faut comprendre comme « deux carrés sont considérés comme *égaux* s'ils *sont formés* avec les mêmes pièces ». Cette dernière formulation est choisie pour le premier exemple mais, au vu de ce qui précède, on voit que sa rigueur logique laisse à désirer.

Une quatrième remarque vient d'une tendance actuelle à renoncer, pour les problèmes du RMT, aux demandes du genre : « Trouvez toutes les solutions possibles ! » qu'on rencontre très souvent dans nos anciens problèmes à propos de dénombrements (codes secrets, disposition d'objets, coloriages, nombres répondant à certaines propriétés ...). On aborde ici la **distinction entre un « exercice » et un « vrai problème »**. La recherche de tous les carrés qu'on peut construire avec les pièces du jeu *Il quadrotto* est une demande d'adulte ou, plutôt, une injonction, qui vient des auteurs du problème ou d'une autorité extérieure pour celui qui le résout. Du point de vue de l'enseignant ou du mathématicien, c'est bien l'exhaustivité des solutions et le moyen d'y arriver qui sont intéressants ici ; mais on souhaiterait que l'élève comprenne de lui-même qu'il doit envisager toutes les solutions. (Cette prise en charge de l'entrée dans la recherche par celui qui résout le problème est proche du concept de « dévolution » des didacticiens). Il faudrait alors chercher à modifier le contexte du problème pour éviter la demande explicite de l'inventaire des solutions.

7. Troisième version

Cette nouvelle version a été élaborée par l'équipe d'Udine en tenant compte des remarques précédentes.

(Pour faciliter la comparaison avec la version précédente, nous avons biffé les parties supprimées et souligné les parties modifiées ou nouvelles par rapport à la deuxième version.)

Il quadrotto (Cat. 3, 4, 5) (Version 3)

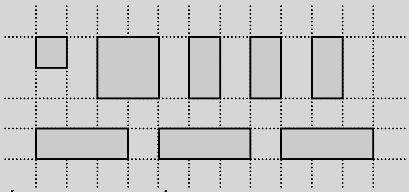
Pour son anniversaire, Paul a reçu un nouveau jeu : le quadrotto.

Paul voit que son jeu est formé de 8 pièces de carton avec lesquelles il faut construire des carrés seulement.

Il y a quatre types de pièces :

- un petit carré - un grand carré - trois petits rectangles - trois grands rectangles.

Voici le dessin des pièces :



Paul joue à construire les carrés avec ses amis.

Il réussit à former un carré en utilisant seulement deux types de pièces.

Anne observe avec attention le carré de Paul, remet toutes les pièces ensemble et forme un carré en utilisant seulement trois types de pièces.

Enfin, Elena essaie aussi. Après avoir remis toutes les pièces ensemble , elle réussit à former un carré en utilisant tous les types de pièces.

Quels carrés peuvent avoir construit Paul, Anna et Elena ?

Dessinez-les tous précisément et indiquez qui les a construits.

Analyse a priori

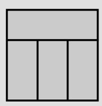
Domaine de connaissances

- Géométrie : carrés et rectangles, équivalence d'aire
- ~~Logique: recherche ordonnée de combinaisons~~

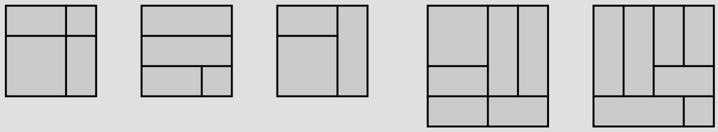
Analyse de la tâche

- Comprendre que, pour construire les carrés on ne peut utiliser que les pièces contenues dans la boîte.
- Comprendre que, lorsqu'un carré est formé, il faut remettre toutes les pièces ensemble pour en former un nouveau.
- Comprendre qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser toutes les pièces pour former un carré.
- Savoir choisir les pièces qui, disposées côte à côte, forment un carré.
- Procéder de manière systématique pour trouver toutes les manières possibles de disposer les pièces, en les dessinant ou en collant les pièces.

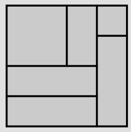
  1. Paul, avec deux types de pièces, ne peut avoir formé qu'un seul carré de 3 x 3 avec trois pièces de 2 et une de 3 (2 + 2 + 2 + 3 = 9)



2. Anna, avec trois types de pièces, peut avoir construit un des trois carrés possibles de 3 x 3 (1 + 2 + 2 + 4 = 9), (1 + 2 + 3 + 3 = 9), (2 + 3 + 4 = 9) ou un des deux carrés possibles de 4 x 4 (2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 16), (1 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 = 16) ; exemples :



3. Elena, avec les quatre types de pièces, ne peut avoir construit qu’un seul carré de 4 x 4, (1 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 = 16) :



Attribution des points

4 Les sept carrés dessinés ou collés avec précision avec l’indication de qui peut les avoir construits (on accepte aussi les solutions avec plus de sept carrés lorsque certains sont obtenus par symétries, rotations ou dispositions différentes des pièces)

3 Cinq ou six carrés (aussi si, en plus de ceux-ci, il y a d’autres carrés obtenus par symétries, rotations ou dispositions différentes des pièces) dessinés ou collés avec précision avec l’indication de qui peut les avoir construits

ou les sept carrés dessinés ou collés avec précision (aussi si, en plus de ceux-ci, il y a d’autres carrés obtenus par symétries, rotations ou dispositions différentes des pièces) mais sans l’indication de qui peut les avoir construits

2 Trois ou quatre carrés (aussi si, en plus de ceux-ci, il y a d’autres carrés obtenus par symétries, rotations ou dispositions différentes des pièces) dessinés ou collés avec précision avec l’indication de qui peut les avoir construits

ou cinq ou six carrés dessinés ou collés avec précision (aussi si, en plus de ceux-ci, il y a d’autres carrés obtenus par symétries, rotations ou dispositions différentes des pièces) mais sans l’indication de qui peut les avoir construits

1 Un ou deux carrés (aussi si, en plus de ceux-ci, il y a d’autres carrés obtenus par symétries, rotations ou dispositions différentes des pièces) dessinés ou collés avec précision, avec ou sans l’indication de qui peut les avoir construits

ou trois ou quatre carrés dessinés ou collés avec précision mais sans l’indication de qui peut les avoir construits

0 Incompréhension du problème ou carrés obtenus aussi avec d’autres pièces qui ne sont pas données (plus d’un petit ou grand carré, plus de trois rectangles petits ou grands)

De la deuxième à la troisième version, on relèvera que, toujours dans le contexte du jeu de construction, il y a une modification fondamentale des critères de choix des carrés à construire : on présente explicitement les quatre types de pièces en jeu et l’on distingue les carrés selon le nombre de types de pièces utilisées. On évite ainsi les définitions de carrés égaux ou différents et les exemples qui les illustrent.

Avec un nouveau scénario qui fait intervenir plusieurs personnages la tâche est découpée. Pour les carrés de Paul (deux types de pièces) et Elena (les quatre types), l’inventaire se limite à un seul carré mais nécessitera cependant la vérification qu’il n’y a pas d’autres solutions. Cette tâche est dévolue à l’élève dans les deux cas. Pour les carrés d’Anna (trois types), il y a cinq solutions à trouver et d’autres à éliminer. Une « question-injonction » subsiste : « dessinez-les tous précisément ». Elle intéresse l’adulte, certes, mais n’est pas dévolue à l’élève.

L’analyse de la tâche ainsi que les critères d’attribution des points sont modifiés en conséquence.

Pour les correcteurs qui devront attribuer les points, le travail sera un peu plus simple puisqu’on passe de 11 à 7 solutions à contrôler.

8. L'avenir du problème[26]

La troisième version de *Il quadrotto* a été retenue parmi les propositions par le GPP transmises aux équipes responsables des épreuves du 19^{e} RMT. Le problème continuera vraisemblablement à évoluer pour atteindre ensuite le stade de la consultation des sections avant d'atteindre la version finale qui sera proposée aux classes.

On peut déjà prévoir quelques-unes des interrogations que suscitera cette troisième version lors des prochaines étapes :

On réfléchira certainement sur la difficulté que représente, pour de jeunes élèves, la distinction entre le nombre de pièces et le nombre de types de pièces. On peut envisager l'adjonction d'un exemple ou la désignation des quatre types de pièces par un numéro ou une lettre.

Il faudra aussi réfléchir aux catégories auquel sera attribué le problème et éventuellement faciliter son appropriation par de jeunes élèves. À cet effet, on peut agir sur les pièces à disposition, sur le texte de l'énoncé, sur les exemples donnés ...

Dans la rubrique « domaine de connaissances », il faudra vérifier si le problème est purement géométrique ou s'il s'insère dans un cadre numérique ou logique. Cette réflexion aura des conséquences sur l'analyse de la tâche, sur les critères d'attribution des points et sur les objectifs mathématiques que l'on choisira pour *Il quadrotto* :

On pourrait effectivement considérer cette activité du point de vue de la manipulation des pièces, de leur déplacement et de leurs combinaisons. Les carrés formés peuvent être le résultat d'essais organisés de manière « astucieuse » (sans dire « rigoureuse » car la « rigueur scientifique semble ici hors d'atteinte) ou par des essais aléatoires et beaucoup de persévérance. Selon ce point de vue, on jugera les résultats obtenus en fonction du nombre de solutions obtenues (en distinguant minutieusement celles qui sont différentes par les types de pièces utilisées de celles qui sont différentes par la disposition des pièces) et on tiendra compte aussi de la qualité des dessins ou collages.

On pourrait aussi considérer cette activité d'un point de vue logique et arithmétique, qui n'apparaît pas dans l'analyse de la tâche ni dans les critères d'attribution des trois premières versions du problème. Il faudrait alors recourir aux aires des différents types de pièces.

Par exemple, de la première à la deuxième version, trois nouveaux carrés de 4 unités de côté ont été découverts ; mais aucune allusion n'est faite aux procédures permettant d'être certain qu'il n'y en a pas d'autres de cette dimension et qu'il n'y en a pas de 5 unités de côté. Dans la troisième version, on n'explique pas non plus pourquoi il n'y a qu'un seul carré de 4 unités de côté construit avec les quatre types de pièces, ni pourquoi il ne peut pas y avoir de carrés de 3 unités de côté construit avec les quatre types de pièces.

Dans ce choix entre les deux points de vue : spatial (orienté vers la géométrie) et logique (orienté vers l'arithmétique), il faudra aussi penser à l'exploitation du problème pour des pratiques de classe. À ce propos, il faut évoquer la gamme variée de nos problème : certains sont de simples casse-tête motivants comme on en trouve beaucoup dans les concours, d'autres sont là pour stimuler l'apparition de différentes stratégies résolutives en cours d'épreuve ; d'autres sont là en vue d'exploitations ultérieures pour la construction de notions et concepts mathématiques ...

9. Conclusions

- En premier lieu, il faut relever ici le témoignage d'Elena, qui était à l'origine du problème, recueilli après ces premières phases d'élaboration :

  C'était une très belle expérience et, surtout, utile. En effet, elle m'a permis d'entrer plus en profondeur dans le monde du rallye et de mieux percevoir la complexité du travail qui s'y déroule. Vu de l'extérieur, il semble que tout est très simple : quelqu'un crée les problèmes, des classes cherchent à les résoudre et en fonction de leur degré de réussite, reçoivent une note.

  Mais la réalité est bien différente. Cette confrontation est beaucoup plus complexe : il est nécessaire de créer des problèmes qui partent de situations proches des élèves, qui requièrent des procédures de résolution non mécaniques mais pour lesquels il faut raisonner, qui permettent à tous les élèves de les affronter selon différentes stratégies de résolution. Ce sont des problèmes dont les caractéristiques me poussent à la réflexion en tant que future enseignante qui pense que les élèves doivent être au centre du savoir et que ce sont eux qui, bien qu'on les aide doivent conquérir ce savoir. Peu importe les stratégies qu'ils mettent en oeuvre, l'important est qu'ils les choisissent et qu'ils atteignent l'objectif par eux-mêmes.

  Ce témoignage n'a pas besoin de commentaires, il nous fait entrer directement dans la problématique du sujet décrit dans cet article.

---

26 Cet article a été écrit avant le 19^{e} RMT, comme on le verra par la suite dans « Epilogue ». Le chapitre 8 sur l'avenir du problème est dont encore écrit au futur.

- Comme deuxième remarque conclusive, il faut souligner l'aspect coopératif de l'élaboration d'un problème du RMT. C'est une entreprise collective avec de nombreux partenaires qui interviennent chacun à leur niveau de lecture ou de préoccupations professionnelles. Une personne peut apporter l'idée de base ou une contribution importante dans la mise au point, mais son intervention n'est jamais exclusive.
- Une troisième remarque se rapporte à l'aspect évolutif d'un problème. À un moment, pour les besoins de l'épreuve, il faut bien aboutir à un texte que tous les partenaires ont accepté, mais la vie du problème n'est pas terminée. Son évolution pourra se poursuivre, à la lumière des analyses a posteriori en particulier mais aussi à la suite d'autres réflexions ultérieures ou encore sous l'influence d'analyses d'autres problèmes voisins. Au travers des différentes versions de *Il quadrotto* présentées dans les pages précédentes, on voit déjà s'esquisser des variantes, dans le cadre géométrique ou arithmétique.
- Une dernière remarque se rapporte aux futures exploitations didactiques du problème, esquissées déjà lors de ses premiers pas. Dans quels parcours d'apprentissage pourra-t-on l'insérer en classe de mathématiques ? sera-t-il pertinent dans un travail sur les aires de carrés et de rectangles ? ou dans l'étude des isométries ? ou encore en combinatoire ? Ce sont finalement ses potentialités pour une pratique d'enseignement ou apprentissage qui détermineront le futur statut de *Il quadrotto*, d'un simple problème de concours à un instrument didactique.

10. Épilogue

L'histoire de la naissance de ce problème a été écrite avant qu'il ne soit inséré dans une des épreuves du RMT. Les pages précédentes ont donc été tenues en veilleuse, pour ne pas dévoiler le problème, au cas où il serait retenu, avant son apparition officielle.

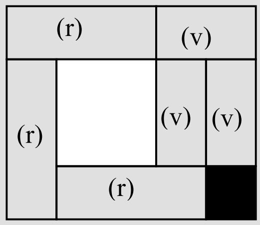
Les responsables de l'épreuve I du 19e RMT ont légèrement adapté le projet *Il quadrotto* , puis, lors de la consultation des sections, de nouvelles améliorations y ont été apportées.

Devenu *Les carrés de Paul* , le problème a continué son chemin, il a été résolu par 1260 classes de 19 sections, nous connaissons les nombres de points qui lui ont été attribués.

Voici la **version définitive du problème**, tel qu'il a été proposé pour l'épreuve I du 19e RMT

Les carrés de Paul (Cat 3, 4, 5)

Paul a reçu un jeu de construction, composé de huit pièces rangées dans une boîte, comme celle dessinée ici :



Il y a quatre sortes de pièces, de quatre couleurs:

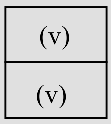
- un grand carré blanc,
- trois grands rectangles rouges, (r)
- trois petits rectangles verts, (v)
- un petit carré noir.

<u>*Coloriez toutes les pièces rouges* (r) *et vertes* (v)</u>

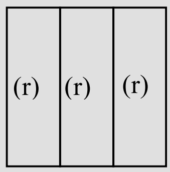
Le jeu consiste à former des carrés avec plusieurs pièces données.

Paul a pu former deux carrés de plusieurs pièces d'une seule couleur :

un vert



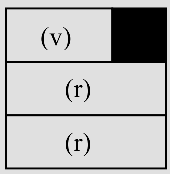
et un rouge



Il a aussi pu former beaucoup de carrés de trois couleurs (avec trois sortes de pièces).

Par exemple :

avec le carré noir,
un rectangle vert (v)
et deux rectangles rouges (r) :



Essayez de former un carré de deux couleurs (en utilisant deux sortes de pièces seulement).

Essayez de former un autre carré, de quatre couleurs, (en utilisant les quatre sortes de pièces).

Dessinez les carrés que vous avez pu former (seulement un de deux couleurs et seulement un de quatre couleurs) en faisant bien apparaître les pièces que vous avez utilisées.

Comme nous l'avions prévu, la distinction entre le nombre de pièces et le nombre de types de pièces a été précisée, au moyen de couleurs. Il a paru plus simple de parler de pièces blanches, vertes, rouges et noires que de passer chaque fois par un retour aux appellations « petits » et « grands » « carrés » ou « rectangles ». L'adjonction d'exemples a aussi été proposée par plusieurs lecteurs et retenue. Et surtout, la recherche a été limitée à 2 carrés au lieu de 7 dans la version III.

Mais, malgré toutes ces « aides à la résolution » introduites au cours de l'élaboration de l'énoncé, les élèves de catégories 3 et 4 n'ont pas répondu aux attentes ou espoirs des auteurs. Il faut attendre la catégorie 5 pour atteindre une réussite « acceptable ». (Le détail des résultats figure en annexe).

Comme pour la majorité des problèmes de puzzles ou de figures à reconstituer, il est difficile d'identifier les savoirs mobilisés pour l'analyse des figures : visuels, numériques, logiques … évoqués déjà dans le chapitre « l'avenir du problème ».

On trouvera encore, en annexe, une première analyse des copies de la section d'Udine qui conduisent à des observations intéressantes sur la notion de « carré », sur les rapports entre les mesures des pièces et la compréhension du texte.

Finalement, le problème *Les carrés de Paul,* a une longue histoire derrière lui qui montre toutes les difficultés du passage d'un jeu de construction où il s'agit d'assembler certaines pièces pour former des carrés à une activité correspondante, mais sur des figures géométriques et dont les règles sont énoncées par un texte à lire et à décoder.

Ce passage est difficile pour de jeunes élèves. Une grande majorité d'entre eux ne sont pas arrivés aux deux solutions attendues, mais le travail n'est pas fini, loin de là. On connaît le problème *Les carrés de Paul* de son origine jusqu'à sa passation dans plus de 1500 classes et quelques premières analyses. L'essentiel de son histoire est à venir : que fera-t-on de ce qui n'est encore qu'un point de départ pour une action didactique ? On peut imaginer des débats en classe, des confrontations entre élèves, des validations par un retour aux objets du jeu de construction, des institutionnalisations … sans lesquels les élèves ne pourront pas vraiment progresser dans la construction des concepts de carré, d'aire et de composition de figures.

ALLEGATO / *ANNEXE*

A.

I criteri d'attribuzione e i punteggi attribuiti a 1539 elaborati di 19 sezioni dell'RMT per il problema *I quadrati di Paolo* (19RMT.I.4) **/**

***Les critères d'attribution et les points attribués sur 1539 copies de 19 sections du RMT à propos du problème* Les carrés de Paul** *(19RMT.I.4)*

4 I due quadrati disegnati correttamente con i pezzi ben evidenziati indipendentemente dalla disposizione dei vari pezzi / *Les deux carrés dessinés correctement, avec les pièces apparentes indépendamment de la disposition des pièces*

3 I due quadrati disegnati correttamente con l'indicazione dei pezzi, con altri quadrati ottenuti con gli stessi pezzi ma disposti in una maniera diversa (contrariamente alla richiesta: "disegnate un solo quadrato di 2 o 4 colori") / *Les deux carrés dessinés correctement, mais avec la présence d'autres carrés obtenus avec les mêmes pièces, disposées autrement (contrairement à la demande : « ne dessinez qu'un seul carré de 2 ou 4 couleurs »)*

2 Uno dei quadrati con l'indicazione dei pezzi / *Un seul des deux carrés avec les pièces apparentes*
oppure i due quadrati disegnati correttamente con uno o più quadrati che non rispettano le condizioni (per esempio due volte il quadrato piccolo o più di tre rettangoli piccoli, oppure tre colori al posto di due) / *ou les deux carrés dessinés correctement avec un ou plusieurs autres carrés qui ne satisfont pas les conditions (avec par exemple deux carrés noirs, ou plus de trois rectangles verts, ou trois couleurs au lieu de deux…)*

1 Uno o due quadrati di due o quattro colori, che non soddisfano le condizioni o un rettangolo (non quadrato) che rispetta le condizioni / *Un ou deux carrés de deux ou quatre couleurs, qui ne satisfont pas les conditions ou un rectangle (non carré) respectant les contraintes*

0 Incomprensione del problema / *Incompréhension du problème*

Punti/*points*	0	1	2	3	4	Classi	m
Cat. 3	48 %	15 %	18 %	4 %	15 %	408	1,2
Cat. 4	44 %	15 %	18 %	3 %	19 %	523	1,4
Cat. 5	27 %	15 %	18 %	3 %	36 %	608	2,1
totale	**39%**	**15%**	**18%**	**4%**	**25%**	**1539**	**1,6**

B.

Analisi degli elaborati[27]

L'analisi dei protocolli effettuata dalla sezione di Udine ha condotto, inoltre, ad interessanti osservazioni sulla nozione di "quadrato", sui rapporti tra le misure dei pezzi e sulla comprensione del testo.

Dopo aver rivisto più e più volte tutti gli elaborati, ho cercato di classificarli secondo tre criteri:

1. Esiste l'idea della figura chiamata "quadrato" (disegnati solo quadrati)
2. Sono stati rispettati i rapporti tra le misure dei pezzi
3. Il testo è stato compreso (sono stati costruiti i quadrati con due colori o (vel) con quattro colori utilizzando solo il numero di pezzi consentito). Non ho tenuto conto, nella comprensione del testo, la lettura delle immagini (anche se fanno parte, a tutti gli effetti, del testo stesso) perché il rapporto tra le misure dei pezzi è contemplata al punto 2.

[27] Estratto del rapporto di Annamaria D'Andrea

Analyses des copies[28]

L'analyse des copies effectuée au sein de la section d'Udine a permis, entre autres, des observations intéressantes sur la notion de « carré », sur les rapports entre les mesures des pièces et sur la compréhension de l'énoncé.

Après avoir relu toutes ces copies plusieurs fois, j'ai cherché à les classer selon trois critères :

1. L'existence d'une figure appelée « carré » (là où ne sont dessinés que des carrés)

2. Le respect des rapports entre les mesures des pièces

3. La compréhension du texte (les carrés sont construits avec deux couleurs ou quatre couleurs et seulement avec le nombre de pièces demandées). Je n'ai pas tenu compte, dans cette compréhension du texte, de la lecture des images (même si elles constituent un élément à part entière de l'énoncé) parce que le rapport entre les mesures des pièces est traité dans le critère précédent.

La tabella che segue dà le frequenze di risposte positive secondo i tre criteri per 9 classi di categoria 3, 19 classi di categoria 4, 18 classi di categoria 5,

Le tableau suivant donne les fréquences de réponses positives de ces trois critères pour les 9 classes de catégorie 3, 19 classes de catégorie 4 et 18 classes de catégorie 5 de la section d'Udine

	Idea di quadrato *Idée de carré*	Rapporti di misure *Rapports de mesures*	Comprensione del testo *Compréhension du texte*	N
Cat. 3	7 (78%)	6 (66%)	5 (55%)	9
Cat. 4	15 (79 %)	9 (47%)	9 (47%)	19
Cat. 5	16 (89 %	8 (44%)	9 (50%)	18

Non si notano differenze significative da una sezione all'altra secondo i criteri precedenti. Il criterio "dell'idea di quadrato" è positivo nella maggior parte dei casi, ma bisogna considerarlo nel suo contesto: i quadrati qui sono figure su carta quadrettata con due lati orizzontali e due verticali. Gli angoli retti sono pertanto impliciti e interviene solo la congruenza dei quattro lati. I risultati più deboli secondo i criteri del rapporto di misure e della comprensione del testo evidenziano ostacoli effettivi, come mostrano bene gli esempi seguenti, scelti fra gli elaborati di categorie 4 e 5.

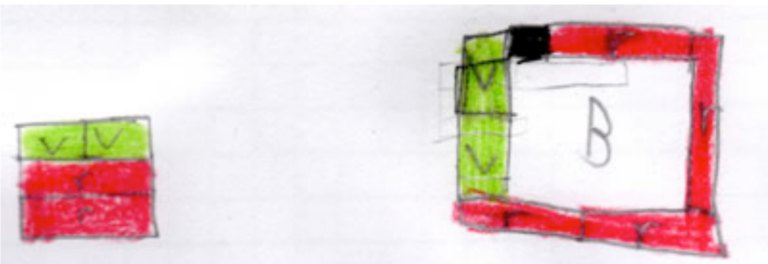
On ne note pas de différences significatives d'une section à l'autre selon ces critères. Le critère de « l'idée de carré » est positif pour la majorité des cas, mais il faut bien le replacer dans son contexte : les carrés sont ici des figures sur papier quadrillé avec deux côtés horizontaux et deux verticaux. Les angles droits sont donc implicites et seule intervient l'isométrie des quatre côtés. Les résultats plus faibles selon les critères de rapport de mesures et de compréhension du texte révèlent de réels obstacles, comme le montrent les exemples suivants, choisis parmi des copies de catégories 4 et 5.

C.

Esempi

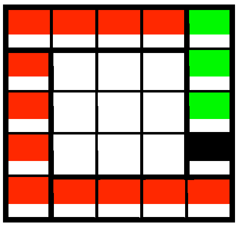
Quelques exemples

1) Senza commenti / *Sans commentaire*

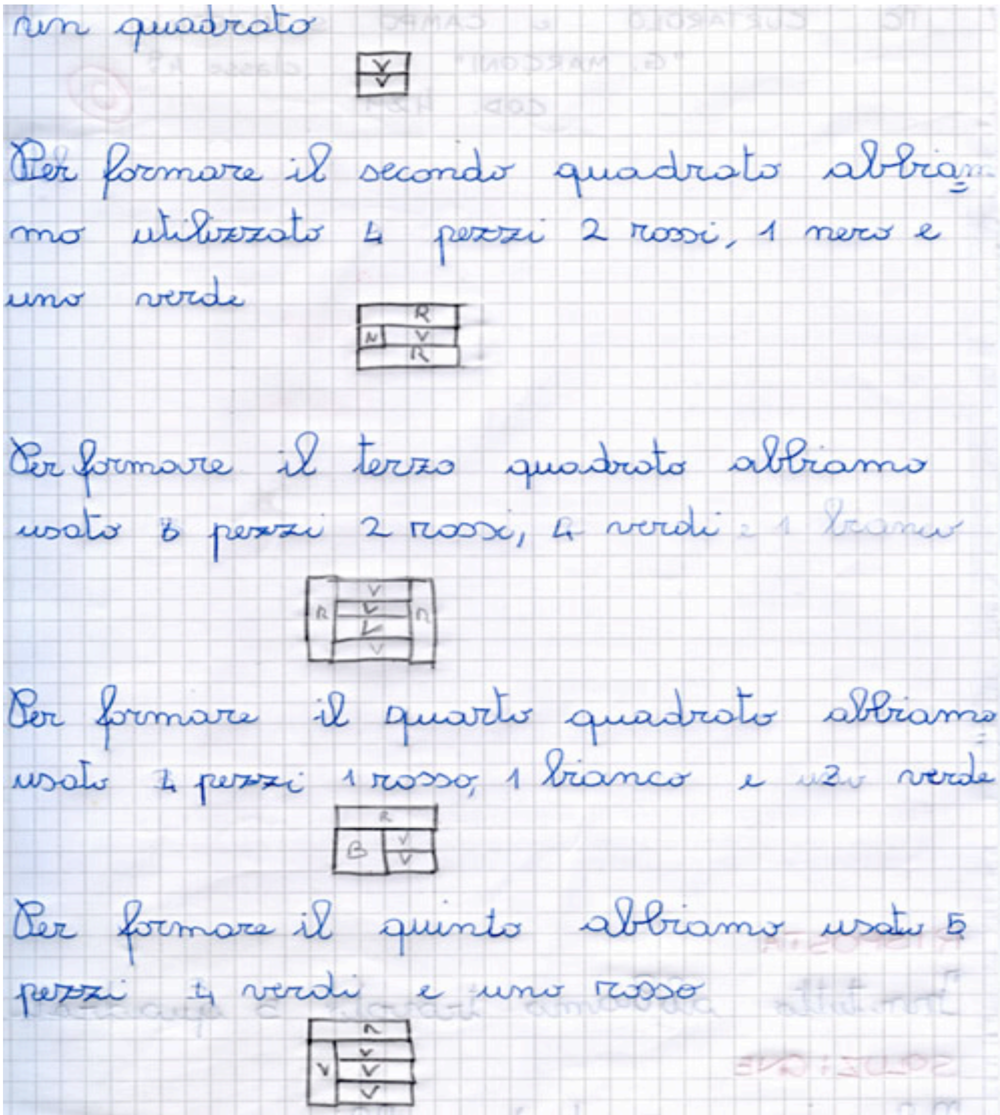


[28] Extrait du rapport de Annamaria D'Andrea

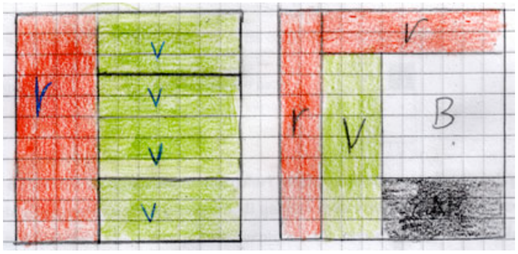
2) Il quadrato con due tipi di pezzi (corretto) e un quadrato con quattro tipi di pezzi, ma senza il rispetto dei rapporti tra le misure dei pezzi.
Le carré de deux pièces est correct, celui avec les quatre types de pièces ne respecte pas les mesures.



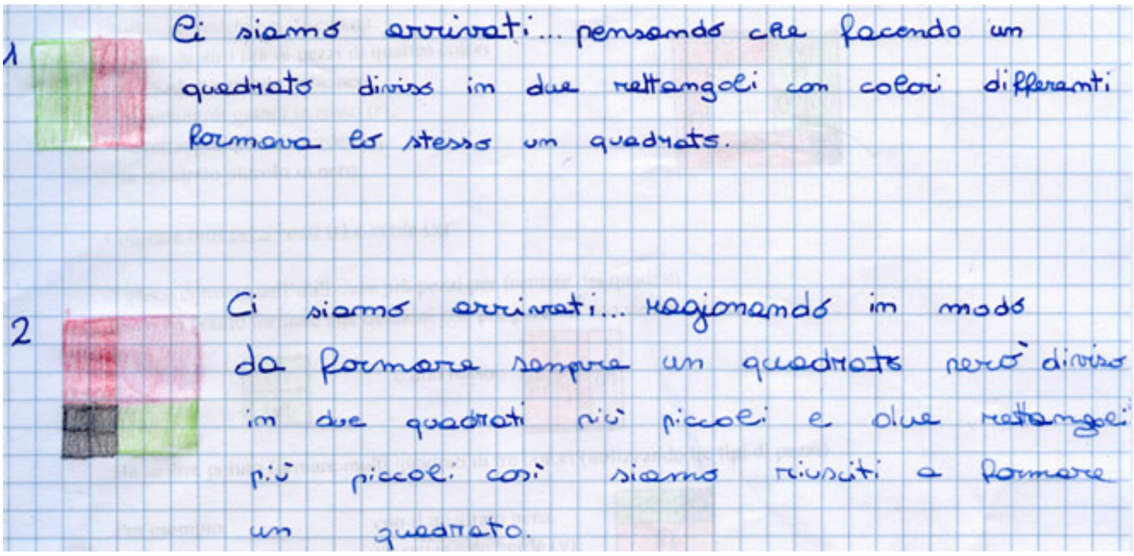
3) Da quest'esempio si capisce che le idee sono molto confuse sia sull'idea di quadrato che nella comprensione del testo scritto.
un exemple où tout est confus: idée de carré, compréhension du texte, mesures



4) Due quadrati in cui non vengono rispettati né i rapporti tra le misure dei pezzi, né il numero dei pezzi.
Deux carré pour lesquels ni le rapport des mesures ni le nombre de pièces sont respectés



6) Qui con i quadrati ci siamo, ma la comprensione del testo è s
On y est pour les carrés, mais la compréhension du texte est nulle



APPROCHE DE LA NOTION DE PROBABILITÉ CHEZ DES ENFANTS DE 10 – 15 ANS[29]

F. Jaquet, M. Henry

Introduction

Peut-on proposer une approche de la notion de probabilité dans l'enseignement des mathématiques, et à quel âge ?

Ce thème suscite beaucoup de résistances. Il a été totalement absent des programmes des collèges français, jusqu'à l'introduction en 2008-2009 de quelques notions élémentaires en classe de troisième (16 ans, niveau 9).

Dans d'autres pays, la situation est légèrement différente au niveau des programmes. En Suisse romande, par exemple, on voit apparaître les probabilités dans les moyens d'enseignement de l'école secondaire (dès 12 -13 ans), sous forme d'approche, en « privilégiant les situations concrètes, accessibles aux élèves, parce qu'elles peuvent être jouées, expérimentées, et parce qu'elles offrent la possibilité de dénombrer, sans trop de difficultés, les cas possibles et les cas favorables à la réalisation d'un événement » [Brêchet et all, 2003]. En Italie, les programmes mentionnent déjà en fin d'école primaire une « reconnaissance d'événements certains, possibles, impossibles, équiprobables, plus ou moins probables » et un chapitre des programmes de secondaire inférieur est intitulé « mathématique du certain et mathématique du probable ».

Nos jeunes élèves ont pourtant des intuitions à propos des probabilités. Dans leur langage, ils utilisent couramment des expressions comme « j'ai plus de chances de ... que de ... ». Ils ont aussi des certitudes et des stratégies dans des situations où le hasard intervient.

Un problème du 14ème RMT (2006), *Les pots de bonbons*, supposant une intuition probabiliste élémentaire nous a permis de voir comment les élèves le résolvent et présentent leur solution. (Il a été proposé à près de 1200 classes de 6 pays de catégories 5 à 9 (de 10-11 ans à 14-15 ans).

Après l'énoncé du problème (§1) et quelques éléments d'analyse de la tâche nous présentons les points attribués sur l'ensemble des classes (§2), puis une analyse plus détaillée des copies des 96 classes de la section de Franche-Comté des niveaux 6, 7, 8 (6e, 5e et 4e), qui aboutit à un tableau synthétique des démarches adoptées (§3). Il apparaît que les représentations des élèves sont étroitement liées à leur maîtrise de la proportionnalité, passant d'une appréhension des écarts dans le cadre de structures additives à une compréhension plus précise des rapports dans le cadre de structures multiplicatives au sens de Gérard Vergnaud [Vergnaud, 1981]. Nos résultats montrent que le passage d'une structure à l'autre dépend de l'âge des élèves et nous conduit à l'interpréter en termes de saut épistémologique.

Pour corroborer cette observation, nous avons alors construit deux nouveaux problèmes du même type (§4) en jouant sur deux variables didactiques : habillage et données numérique, proposés dans le cadre des 15e et 16e sessions du RMT. Nous avons analysé encore les réponses à un quatrième problème, issu d'une étude sur la proportionnalité, où le hasard n'intervient pas mais dont la structure est très proche de celle des trois problèmes précédents (§5).

Nous terminons par quelques remarques générales et propositions de recherches.(§6).

---

[29] Communication présentée lors de la 14^{e} rencontre internationale de l'ARMT, à Besançon, en octobre 2010

1. L'énoncé du problème

Les pots de bonbons

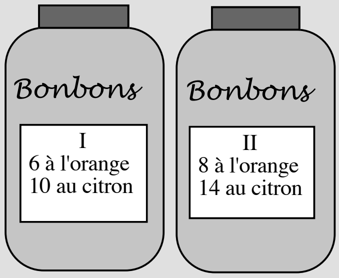
Dans un premier pot, Grand-mère met 6 bonbons à l'orange et 10 au citron.

Dans un deuxième pot, elle met 8 bonbons à l'orange et 14 au citron.

Les bonbons sont de même forme et enveloppés de la même façon.

Comme Grand-mère sait que Julien n'aime pas le goût du citron, elle lui dit :

Tu peux prendre un bonbon. Je te laisse choisir le pot dans lequel tu pourras glisser ta main, sans regarder à l'intérieur.



Julien réfléchit bien et choisit enfin le pot où il pense avoir la meilleure chance de prendre un bonbon à l'orange.

À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ?

Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.

Il faut remarquer qu'il est difficile d'éviter tous les mots évoquant l'idée de probabilité dans l'énoncé d'un problème destiné précisément à percevoir comment les élèves la perçoivent. La question « À la place de Julien, quel pot auriez-vous choisi ? » sans la phrase qui la précède paraissait trop vague et aurait provoqué des difficultés d'attribution des points à la réponse. On y a ajouté la phrase qui précède la question, rappelant que Julien n'aime pas le goût du citron, avec l'expression « avoir la meilleure chance » qui a semblé un mal nécessaire mais acceptable.

L'analyse de la tâche, rédigée par des adultes, ne prévoyait que des « comparaisons de rapports » ou la « planification d'un raisonnement proportionnel du type : dans un pot de 6/10 on aurait les mêmes possibilités que dans un pot de 12/20 … ».

2. Analyse a posteriori : résultats généraux et différentes procédures

Les critères d'attribution des points, déterminés a priori, comme l'analyse de la tâche, ne pouvaient pas s'inspirer de résultats d'autres variantes du problème car celui-ci était le premier sur ce thème dans l'histoire du RMT. Les voici :

4 Bonne réponse (premier pot) et justification claire du procédé
3 Réponse correcte mais justification incomplète ou peu claire
2 Réponse correcte sans explications
ou faute de calcul et réponse cohérente, avec explications
1 Début de raisonnement correct
0 Incompréhension du problème

On constatera plus tard, lors de l'analyse des procédures, les faiblesses de ces critères. On y parle en effet de « bonne réponse (premier pot) » ou de « réponse correcte » sans s'être rendu compte que le premier pot peut être choisi sur la base d'un raisonnement inadéquat ; ce qui rend problématique les interprétations de « Début de raisonnement correct » ou « réponse cohérente » (critères 1 et 2).

Voici les résultats de l'attribution des points de ce problème *Les pots de bonbons* des 1166 classes ayant participé à la première épreuve du 14e RMT (2006)

catégorie	5	6	7	8	9	Nb. classes
4 points	9%	3%	24%	43%	58%	248
3 points	3%	3%	10%	9%	14%	74
2 points	14%	12%	7%	9%	7%	119
1 point	56%	52%	41%	26%	20%	496
0 point	18%	30%	19%	13%	1%	229
Nb. classes	222	357	269	223	95	1166
moyenne	1.3	1.0	1.8	2.4	3.1	

Malgré toutes les incertitudes sur l'attribution du « 1 point » relevées précédemment, on constate une progression significative des moyennes, de 1 à 3 points environ des catégories 5 et 6 (10-12 ans) à la catégorie 9 (14-15 ans).

Selon les critères 3 et 4, de l'attribution des points, qui témoignent d'une réponse plus ou moins justifiée, on constate qu'une très faible minorité d'élèves de catégorie 5 et 6 (12% et 6%) arrivent à résoudre le problème, qu'une moitié y parvient en catégories 8 (52%) et qu'il faut attendre la catégorie 9 (72%) pour obtenir une majorité de réussites.

3. Analyse des copies

Ce problème des Pots de bonbons s'est donc révélé très difficile globalement et nous a incité à approfondir l'analyse a posteriori pour chercher à déterminer la nature des obstacles à sa résolution. Nous avons donc examiné les copies de 96 groupes d'élèves (de la section de Franche-Comté) où figurent leurs calculs et leurs explications. Les stratégies de résolution qui apparaissent à la lecture de ces copies se répartissent en cinq catégories parfaitement identifiables (que nous avons notées A, B, C, D et M), révélatrices des représentations des élèves à propos de la probabilité en fonction de leurs âges.

A. Comparaison des nombres de bonbons au citron, d'un pot à l'autre

Il est étonnant de constater que les élèves qui comparent les nombres de bonbons de chaque goût d'un pot à l'autre centrent leur attention sur les bonbons au citron pour comparer les « risques » d'en tirer un du pot choisi, plutôt que de s'intéresser aux « chances » de tirer un bonbon à l'orange. Parmi les 96 copies examinées, six copies de niveau 6 et une de niveau 8 constituent cette catégorie, dont voici quatre exemples.

- *« Le pot n° 2 a beaucoup de bonbons au citron. Le pot n° 1 a moins de bonbons au citron. Il y a plus de chance d'en prendre un à l'orange dans le pot n° 1 »* (Cat. 6)
- *« À la place de Julien je choisirais le pot I car il y a moins de bonbons au citron car il n'aime pas. »* (Cat. 8)
- *« À la place de Julien on aurait plongé la main dans le pot I. Julien n'aime pas les bonbons au citron, comme il y en a moins dans le pot I que dans le pot II, il a plus de chance de tomber sur un bonbon à l'orange. »* (Cat. 6)
- *« Julien doit prendre la boîte n° 1 car il y a moins de bonbons au citron que dans la boîte n° II. »* (Cat. 6)

B. Comparaisons des différences internes d'un pot à l'autre

L'argumentation repose sur la différence interne des nombres de bonbons des deux types au sein de chaque pot. Le raisonnement ne prend en compte que les bonbons au citron « en plus » de ceux qui sont à l'orange. Selon cette conception, le « risque » de prendre un bonbon au citron se traduit numériquement par la comparaison entre 6 (pot II : 14 – 8) et 4 (pot I : 10 – 6). En minimisant cette différence, on augmente ses chances de prendre un bonbon à l'orange. Tous les élèves qui ont suivi ce raisonnement optent donc pour le pot I.

Cependant, dans cette démarche de comparaison des différences, il peut y avoir implicitement pour certains élèves l'idée de minimiser le poids des bonbons au citron dans le pot, ce qui révèlerait une approche qualitative de la notion de probabilité. Mais une différence à l'avantage des bonbons à l'orange ne garantit pas qu'ils soient dans une proportion plus grande dans le pot.

Par exemple, si, au lieu de placer 8 bonbons à l'orange et 14 au citron dans le pot II, on en avait mis respectivement 4 et 7 (sans modifier leur rapport), la différence serait alors de 3 contre 4. Ces élèves auraient-ils choisi le second pot ?

Cette remarque suppose une certaine maîtrise de la proportionnalité que n'ont pas encore acquise les enfants de cet âge. Dans ce type de raisonnement, l'obstacle principal se situerait plus au niveau de la construction de la proportionnalité qu'à celui de la comparaison des « chances », dans l'expression d'un processus de construction d'une sorte de préprobabilité.

Cette procédure est observée dans 22 classes de catégorie 6, où elle est la plus fréquente, 12 et 5 de catégories 7 et 8. En voici quelques exemples :

- *« Dans le pot I, il y a 4 bonbons au citron de plus que de bonbons à l'orange. Dans le pot II, il y a 6 bonbons au citron de plus que de bonbons à l'orange. Donc nous choisissons le pot I. ... car il y a moins de bonbons au citron en plus dans le pot I. »* (Cat . 6 et 7).
- *« Nous avons choisi le n° 1 car il n'y a que 4 bonbons à l'orange de moins qu'au citron tandis que dans le n° 2 il y a 6 bonbons de moins, donc il y a plus de chances. »* (Cat. 6).
- *« ... Il faut prendre le pot n° 1 car il y a moins de différence entre les bonbons à l'orange et au citron. »* (Cat. 6).

- « *... car dans le pot n° 1 il y a moins de différence entre les deux sortes de bonbons donc plus de chance des bonbons à l'orange, en quelque sorte il y a plus de bonbons à l'orange donc on a plus de chance d'avoir un bonbon à l'orange dans le pot n° 1.* » (Cat. 7).

En terme de « risque » de prendre un bonbon au citron :

- *« À la place de Julien, j'aurais choisi le pot n° 1 car l'écart des bonbons au citron et à l'orange est de 4 et l'autre pot est de 6 donc il y a moins de risque de prendre un bonbon au citron. »* (Cat. 6 et 8).

Avec des raisonnements où cette différence est exprimée en termes de rapport :

- *« ... car il n'a qu'une chance sur 4 de prendre des bonbons au citron alors que, dans le 2^{e} pot, il a 6 chances de prendre un bonbon au citron... »* (Cat. 6).
- *« Il faut donc choisir le pot I car il n'y a qu'une chance sur 4 de ne pas se tromper alors qu'avec le pot II il y a une chance sur 6 de ne pas se tromper. »* (Cat. 8).
- *« Je calcule le pot 1 : 10 – 6 = 4. Il y a 4 fois plus de chance de tomber sur un bonbon à l'orange. Je calcule le pot 2 : 14 – 8 = 6. Il y a 2 fois moins de chance de tomber sur un bonbon à l'orange. Conclusion : Le pot I a plus de chance d'avoir un bonbon à l'orange. »* (Cat. 7).
- *« ... Il a deux chances de prendre un bonbon à l'orange dans le pot I que dans le pot II car*
  6 – 10 = 4 et 8 – 14 = 6 4 – 6 = 2 2 chances. » (Cat. 7).

C. Comparaison des variations d'un pot à l'autre

Se situant encore dans une structure additive, l'argumentation - trouvée dans 6 classes de catégorie 6, 3 de catégories 7 et 8 - repose sur le constat que, du premier pot au second, le nombre des bonbons à l'orange a augmenté de 2 et celui des bonbons au citron de 4.

Le raisonnement présente un aspect plus « dynamique » que celui de la catégorie précédente qu'on pourrait alors qualifier de « statique » : c'est la modification d'un pot à l'autre, l'adjonction de 2 bonbons à l'orange et de 4 au citron, qui est prise en considération, avec une comparaison de l'augmentation relative des nombres de chaque sorte de bonbons.

Ce principe, « en ajoutant plus de bonbons au citron que de bonbons à l'orange, on augmente leur poids relatif », ne s'exprime pas par l'évolution d'un rapport. En voici trois exemples,

- *« Nous avons choisi le pot I car : dans le pot II il y a que 2 bonbons de plus à l'orange mais 4 de plus au citron. »* (Cat 6).
- *« Il faut prendre le premier pot car 6 + 2 = 8 et que 10 + 4 = 14, comme 2 < 4 donc on rajoute plus de citron que d'orange. »* (Cat. 6).
- *« ... car il y a plus de chance de prendre le 1er pot de bonbons sachant que dans le 1er pot il y -a moins de bonbons au citron que dans le 2e pot : le premier contient 10 bonbons au citron et le 2e pot en contient 14 donc il y a 4 bonbons de plus au citron, alors qu'il y a que 2 bonbons à l'orange rajoutés dans le 2ème pot .»* (Cat. 8).

Il faudrait interroger les élèves de vive voix pour savoir s'ils ont été conscients d'une variation des rapports entre les nombres de bonbons de chaque sorte, d'un pot à l'autre et percevoir l'existence éventuelle d'une intuition préprobabiliste.

D. Fractions ou rapports

La procédure qui conduit à la réponse correcte nécessite une comparaison de rapports et non de différences. On trouve deux choix de rapports dans les copies examinées :

D.1 rapports o/c entre les nombres de bonbons à l'orange et ceux au citron (6/10 et 8/14), ou

D.2 rapports entre les nombres de bonbons d'une sorte et le total de ceux qui sont contenus dans le pot (6/16 et 8/22 pour ceux qui sont à l'orange ; 10/16 et 14/22 pour ceux au citron).

Procédure D.1

Dans cette procédure, observée dans 12 copies, le rapport o/c est pertinent, mais ne correspond pas au modèle probabiliste. Il s'agit d'une fraction qui n'est pas spontanément comprise comme un nombre rationnel.

La tâche que les élèves se fixent consiste à trouver un moyen de comparer les deux rapports 6/10 et 8/14, par l'intermédiaire de fractions équivalentes, de même dénominateur ou de même numérateur, ou plus rarement en recourant aux nombres décimaux.

Il est intéressant de lire, dans ce cas, la « traduction » que font les élèves de leurs résultats pour justifier leur choix, avec le plus souvent une terminologie impropre d'un point de vue probabiliste.

Exemples extraits de copies où l'on parle de « plus de chance », avec parfois une interprétation en nombre de bonbons :

- *« À la place de Julien on aurait choisi le pot 1. Il faut mettre 6/10 et 8/14 sur le même dénominateur ... 42/70 = 21/35 et 30/70 = 20/35. Julien aurait plus de chance de choisir le 1er pot. »* (Cat. 8).
- *« Dans le pot I, il y a 6/10 bonbons. Dans le pot 2, il y a 8/14 bonbons.*

  6/10 = 42/70 <—— bonbons à l'orange

  8/14 = 40/70 <—— bonbons à l'orange

  42 > 40. Donc j'aurais choisi le pot I car quand on met au même dénominateur 6/10 et 8/14 le nombre de bonbons à l'orange dans le pot I est de 42 et dans le pot II de 40. » (Cat. 8).
- « (début identique aboutissant à : ... 21/35 > 20/35. *Donc je choisirais à la place de Julien le pot n°1, car il a une chance de plus que dans le second pot. »* (Cat. 7).
- *« Pour savoir dans quel pot il y a le plus de chance d'avoir un bonbon à l'orange, il faut exprimer le nombre de bonbons à l'orange en pourcentages.*

  Pot I) 6 pour 10 $\xrightarrow[\times 10]{}$ 60 %

  Pot II) 100/14 ≈ 7,14 8 pour 14 $\xrightarrow[\times 7,14]{}$ 57,12 %

  Il y a plus de chance de trouver un bonbon à l'orange dans le pot I (60 %). » (Cat. 8).

Parfois on parle de « chances sur » avec un usage impropre du « sur », ou de « pourcentage de chance » :

- *« (après avoir écrit 6/10 x 7 = 42/70 et 8/14 x 5 = 40/70) ... donc il y a 42 chances sur 70 d'avoir un bonbon à l'orange dans le I. Et il n'y en a que 40 sur 70 dans le II. ... »* (Cat. 7).
- *« (après avoir transformé les rapports 8/14 et 4/10 en pourcentages : 40% et 42,84%) ... Dans le pot I il y a 40% de chance de tomber sur un bonbon au citron. Dans le pot II il y a 42,84% de chance de tomber sur un bonbon au citron, donc il faut prendre un bonbon dans le pot I. »* (Cat. 7).
- *« Dans le premier pot il y a 60% de chance qu'il y ait un bonbon à l'orange car 6 orange/10 citron = 60 orange/100 citron alors que dans le deuxième il n'y aura que : 8x100/14 ≈ 57,142857%. Julien prendra le 1er pot. »* (Cat. 8).

Procédure D.2

Dans cette procédure observée majoritairement en catégories 7 et 8, c'est le rapport o/(o+c) qui est pris en compte et qui correspond au nombre de cas favorables (orange) sur le nombre total de bonbons (ou le rapport c /(o + c) correspondant au nombre de cas défavorables (citron) sur le nombre total. Cette conception sous-jacente renvoie à l'approche classique de la notion de probabilité.

La grande majorité des copies de cette dernière procédure conduisent à des réponses correctes après une comparaison des deux fractions 6/16 et 8/22 ou des rapports correspondants.

Les modalités de comparaison se font en cherchant un dénominateur commun, 352, 176 ou 88, ou par comparaison de rapports de dénominateur, 22 ou 44, avec des numérateurs décimaux non entiers ; par exemple : « 13,75/22 < 14/22 ou 8,25/22 > 8/22 » ou encore par un numérateur commun, 12 comme dans l'exemple suivant :

- *« ... 12/32 > 12/33 donc 6/16 > 8/32, car si 2 nombres en écriture fractionnaire ont le même numérateur, alors le plus grand est celui qui a le plus petit dénominateur. »* (Cat. 7).

Quelques copies montrent des rapports en pourcentages, par division ou « règle de trois » :

- *« Le nombre des bonbons de la boîte n°1 est égal à 16. En divisant le nombre des bonbons à l'orange (6) et au citron (8) par 16, on obtient alors.*

  ** Bonbons à l'orange : 37,5%*

  ** Bonbons au citron : 62,5 %*

  Le nombre des bonbons de la boîte n°II est égal à 22. En divisant le nombre des bonbons à l'orange (8) et au citron (14) par 22, on obtient alors.

  ** Bonbons à l'orange : 36%*

  ** Bonbons au citron : 64 %*

  Si nous étions à la place de Julien, j'aurais choisi le pot n°1, car il a plus de chances d'avoir un bonbon à l'orange (37,5 % contre 36 %) dans le pot n°2 » (Cat. 7).
- *« On fait un pourcentage : 6/16 = x/100 6 × 100 = 16 × x x = 600/16 = 37,5.*

Il y a 37,5 % de chance de tomber sur un bonbon à l'orange dans le pot 1. .... » (Cat. 8).

Dans un cas, la comparaison se fait en « chances sur 2 » :

- *« ... Pot 1 : 6 : 8 = 0,75. Il y a 0,75 chances sur 2 de tomber sur un bonbon à l'orange.*
  Pot 2 : 8 : 11 = 0,72. Il y a 0,72 chances sur 2 de tomber sur un bonbon à l'orange. » (Cat. 7).

Cet extrait est assez étonnant pour un élève de 12-13 ans (rédacteur en principe au nom d'un groupe, mais la copie est rédigée à la première personne). Il a certes bien vu la simplification des dénominateurs par 2, ce qui a pu induire la suite. Remarquons que le calcul et la comparaison des décimaux interviennent après cette réduction alors qu'ils auraient pu être faits sur les données d'origine. Mais le commentaire qui suit est intéressant. Il montre que cet élève a surmonté le biais psychologique de l'équiprobabilité que l'on rencontre chez les jeunes enfants, quand devant deux issues parfaitement incertaines, ils déclarent avoir une chance sur deux d'obtenir l'une ou l'autre.

Ce commentaire montre aussi une bonne approche intuitive de la notion de probabilité, s'appuyant sur une certaine maîtrise de la proportionnalité.

M. Procédures mixtes

Trois classes, de degrés 7 et 8, font simultanément référence à la soustraction et aux rapports.

C'est un faible pourcentage des 96 copies examinées, mais elles nous paraissent révélatrices de l'évolution d'une procédure à l'autre, illustrant le passage encore non achevé des structures additives aux structures multiplicatives chez ces élèves de 12 à 14 ans :

- *« I : 10 + 6 = 16, 10 – 6 = 4, donc il y a 4/16 de chance de tomber sur un bonbon au citron.*
  16 : 4 = 4. Il a 4 fois plus de chance de tomber sur un bonbon au citron.
  II : 14 + 8 = 22 ; 14 – 8 = 6, donc il y a 6/22 de chance de tomber sur un bonbon au citron.
  22 : 6 = 3,6. Il a 3,6 fois plus de chance de tomber sur un bonbon au citron.

Donc, à la place de Julien, je choisirais le IIe pot.» (Cat. 7).

- *« À la place de Julien, je choisirais le pot no 1 car dans ce pot il y a 4 bonbons de plus qu'à l'orange et dans le pot n° 2 il y a 6 bonbons au citron de plus qu'à l'orange. Et car il y a 37,5 % de bonbons à l'orange dans le pot n°1 contre 36,4% dans le pot 2.*
  Pot 1 : 6/16 = 0,375 x 100 = 37,5%. Pot 2 : 8/22 ≈ 0,36 x 100 ≈ 36,36 %.» (Cat. 7).
- *« À la place de Julien nous aurions choisi le pot I*
  1e Méthode : pour pot I : nous avons fait 100 : 16 = 6,25 ; 6,25×6 = 37,5
  pour pot II : nous avons fait 100 : 22 = 4,54 ; 4,54×8 = 36,32
  Conclusion : il y a une plus grande chance de tirer des bonbons à l'orange dans le pot I ; il y a une différence de 1,18 %.
  2e Méthode : nous avons fait 10 – 6 = 4 ==> Pot I ; 14 – 8 = 6 ==> Pot II
  Il y a deux bonbons au citron de plus dans le pot II que dans le pot I, donc il y a plus de chances de prendre un bonbon à l'orange dans le pot I vue qu'il y a moins de différence entre les deux goûts dans le pot I.
  ! Ceci est le cas où elle mélange les bonbons ==> si elle ne les mélange pas, c'est le pot II, car il y a plus de bonbons à l'orange sur le dessus .». (Cat 8)

Nous avons pu classer 94 copies (sur 96) dans les catégories décrites précédemment :

Procédures / Catégories	A	B	C	D	M	total
6 (11-12 ans)	6 ou **17 %**	22 ou **61 %**	6 ou 17 %	2 ou 6 %	0	36 ou 100%
7 (12-13 ans)	0	12 ou **41 %**	1 ou 3 %	14 ou **48 %**	2 ou 7 %	29 ou 100%
8 (13-14 ans)	1 ou 4%	5 ou 17 %	2 ou 7 %	20 ou **69 %**	1 ou 3 %	29 ou 100%
Total						94

On constate clairement une évolution vers les « procédures multiplicatives » (D) avec le passage des niveaux 6 à 8. Celles qui reposent sur les différences (B et C), sont choisies par plus des trois quarts des élèves du niveau 6 et celles qui font appel aux rapports, D1 et D2, sont largement majoritaires au niveau 8, les deux types de procédures étant partagés au niveau 7.

La progression des moyennes (de 1 point à 3 points) en fonction de l'âge a été observée à large échelle sur l'ensemble des 1200 classes (voir le paragraphe 2). Elle est confirmée ici à l'examen des 96 copies examinées.

Le passage vers les procédures multiplicatives est à mettre en relation avec la construction du nombre rationnel et du concept de proportionnalité.

4. Poursuite de la recherche sur des variantes du problème *Les pots de bonbons*

La relation entre le niveau des classes (âge) et l'utilisation d'un rapport pour interpréter une notion intuitive de probabilité est flagrante dans ce contexte des *Pots de bonbons*, inspiré d'un modèle d'urne. En préparant ce problème, nous avions fait l'hypothèse que ce modèle, par sa simplicité, est le plus propice à l'introduction de la notion de probabilité qui peut fonctionner implicitement dans des situations de comparaison. Une définition « cardinaliste »[30] n'est pas nécessaire pour comprendre qu'il s'agit alors de comparer les « poids » respectifs des boules colorées dans deux urnes à deux couleurs[31]. Par contre, une acquisition minimale de la proportionnalité semble induire fortement l'expression de ces « poids » en termes de rapports, permettant de formuler des réponses pertinentes.

Cette remarque nous conduit à penser qu'il peut être vain d'introduire la notion de probabilité à l'école primaire ou au début du collège sous la forme du rapport « du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles ». Si la notion de quotient peut être utile sur le plan numérique, on peut douter que les élèves de ces niveaux de classes lui donnent un sens probabiliste.

Nous avons souhaité corroborer les résultats obtenus dans cette première étude et avons proposé des variantes de ce problème sous des habillages différents pour les épreuves des 15e et 16e RMT (2007 et 2008). Au vu des difficultés rencontrées par les élèves des catégories 5 et 6 dans *Les pots de bonbons*, les variantes n'ont été proposées qu'aux classes de catégories 7, 8, 9 et 10.

Des truites

Dans une pisciculture, on élève deux sortes de truites pour la consommation : des blanches et des saumonées. Il y a deux bassins, A et B, dans lesquels un employé doit pêcher les truites demandées par un client. Mais il ne peut reconnaître le type d'une truite qu'après l'avoir attrapée.

- Dans le bassin A, il y a 60 truites blanches et 100 truites saumonées.
- Dans le bassin B, il y a 80 truites blanches et 140 truites saumonées.

Un client préfère les truites blanches, il en voudrait une.

Dans quel bassin l'employé doit-il pêcher pour avoir le plus de chances d'avoir une truite blanche du premier coup ?

Expliquez votre raisonnement.

---

[30] Telle que celle de Laplace, qui donne dans son premier principe la définition suivante : « la probabilité … est le rapport du nombre de cas favorables à celui de tous les cas possibles » [Laplace].

[31] Dites de Bernoulli, en référence à son œuvre magistrale, *Ars Conjectandi,* publiée en 1713, qui donne une première démonstration de la loi des grands nombres à partir de ce modèle d'urne [Bernoulli].

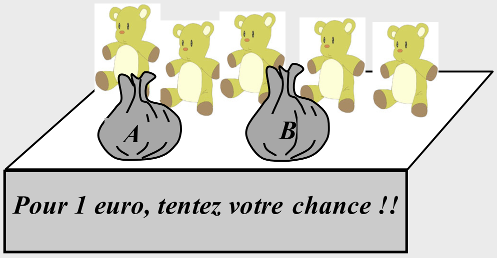
La main dans le sac

À la fête du village, un forain propose aux passants le jeu suivant :

Donnez-moi un euro et tirez une seule boule dans le sac de votre choix. Si la boule est rouge, vous gagnez un ours en peluche !

Dans le sac A, il y a 6 boules rouges et 10 boules blanches

Dans le sac B, il y a 9 boules rouges et 14 boules blanches



Toutes les boules sont de même grandeur, de même poids et de même matière. Les sacs sont opaques et l'on ne peut pas voir les boules qu'ils contiennent, on ne peut qu'y plonger la main pour tirer une boule.

Vous n'avez qu'un euro en poche et vous aimeriez bien gagner un ours.

Dans quel sac préférez-vous tirer une boule ?

Expliquez pourquoi.

Les structures des trois problèmes se distinguent par leurs effectifs et leurs rapports : s

Pots I	6	10		—>	6/16 = 3/8 = 33/88 = 0,375
II	8	14		—>	8/22 = 4/11 = 32/88 = 0,3636...
Truites	A	60	100	—>	60/160 = 3/8 = 33/88 = 0,375
	B	80	140	—>	80/220 = 4/11= 32/88 = 0,3636...
Sacs	A	6	10	—>	6/16 = 3/8 = 69/184 = 0,375
	B	9	14	—>	9/23 = 72/184 = 0,391…

Des *Pots* aux *Truites* il n'y a qu'une multiplication par 10 des quatre données, les rapports sont donc conservés. Pour les *Sacs*, on reprend les données des Pots en remplaçant 8 par 9.

Ce passage du couple 8 et 14 au couple 9 et 14 n'est pas anodin ; il modifie le choix du sac favorable. Alors que c'était le pot I et le bassin A qui étaient les plus favorables dans deux premiers problèmes, c'est maintenant le sac B qui l'est dans le troisième problème. On évite ainsi l'inconvénient des problèmes des *Pots de bonbons* et des *Truites* où, aussi bien par un raisonnement additif que par une démarche de proportionnalité, les élèves étaient conduits à la bonne réponse.

Au niveau des contextes, les modifications sont peu importantes. Des *Pots* aux *Truites* on quitte le modèle de « l'urne » pour un habillage moins statique avec peut être une moindre implication psychologique : les enfants qui se mettaient « à la place de Julien » voient maintenant « de l'extérieur » le problème de l'employé qui se demande « dans quel bassin doit-il pêcher », mais l'expression « la meilleure chance » ou « le plus de chances » subsiste. Des *Pots* aux *Sacs* la grand-mère est remplacée par un forain. Le mot « chance » disparaît et le choix est entièrement dévolu à l'élève qui choisit en fonction de l'envie de gagner un ours.

Comparaison des moyennes

Une première comparaison est celle des moyennes de points obtenus par les classes de toutes les sections qui ont résolu les trois problèmes lors des épreuves de 2006 pour Les pots de bonbons, 2007 pour Les truites et 2008 pour La main dans le sac. Comme nous l'avons déjà signalé au §2, l'attribution des points repose sur des critères communs, certes, mais qui peuvent présenter des ambiguïtés ou être interprétés de manière différente par les jurys locaux. Les critères eux-mêmes ont été légèrement adaptés et précisés d'une variante à l'autre du problème, en fonction des analyses a posteriori.

Il faut donc considérer ces moyennes comme un simple indicateur de tendance, significatifs cependant au vu de la grandeur des effectifs.

Les moyennes indiquées sont calculées sur les critères d'attribution des points de 1 à 4.

Catégories	5	6	7	8	9/10	effectif (classes)
moyenne les *Pots*	1,3	1,0	1,8	2,4	3,1	1166
moyenne les *Truites*			1,7	2,3	2,7	825
moyenne les *Sacs*			1,5	2,1	2,2	988

À l'évidence, la réussite croît avec l'âge et est du même ordre de grandeur d'un problème à l'autre. Ce n'est qu'à partir de la catégorie 8 (13 - 14 ans) qu'on peut espérer un premier accès au concept de probabilité.

On constate une légère baisse des moyennes pour le problème des *Sacs*. Notre hypothèse est qu'elle est due au fait que la « réponse juste » aux deux premiers pouvait être obtenue par une démarche erronée (additive) et recueillir des points (1 ou 2) en raison des lacunes des critères d'attribution des points, déjà mentionnées au §2. Ces critères ont été améliorés pour le problème des *Sacs* : une démarche additive conduit à une erreur et ne peut obtenir « 1 point » qu'en cas d'explication de type probabiliste. Le nouveau critère d'attribution des points correspondant le précise:

1 Solution juste (le sac B) ou fausse (le sac A), reposant sur une comparaison des différences des nombres de boules au sein d'un sac ou des écarts entre un sac et l'autre (relations additives), avec cependant une explication de type probabiliste (on a plus de chances de ... car il y a plus de ...),

Analyse des copies

Les analyses des copies d'élèves ont été reprises pour les *Truites* et les *Sacs* selon le modèle adopté pour les *Pots* §3 : Les procédures de résolution observées sont quasi les mêmes pour les trois problèmes :

A. Comparaison des nombres d'objets de même nature (bonbons au citron, truites saumonées, boules blanches) d'un récipient à l'autre. Ces procédures qu'on trouvait encore dans les copies des jeunes élève (17% en catégorie 6 pour Les pots de bonbons) sont très rares (de 2 à 3%) dans les catégories supérieures.
B. Comparaisons des différences internes entre les deux types d'objets dans chaque récipient
C. Comparaison des différences entre les nombres d'objets de même type, d'un récipient à l'autre
D. Fractions ou rapports

Le tableau suivant compare les procédures les plus fréquentes : celles des écarts (B et C) où les élèves restent dans le cadre additif et celle des rapports (D), où ils passent au cadre multiplicatif.

	Problèmes :	Cat. 6	Cat. 7	Cat. 8
Procédure additives	*Pots*	78 %	44 %	24 %
(écarts, B et C)	*Truites*	78 %	31 %	30 %
	Sacs		22 %	16 %
Procédures multiplicatives	*Pots*	6 %	48 %	69 %
(rapports, D)	*Truites*	7 %	68 %	67 %
	Sacs		70 %	77 %

Ici encore, la comparaison est évidente : ce n'est qu'à partir de 12 à 13 ans (Catégorie 7) que les élèves abandonnent les procédures additives pour prendre en compte les rapports.

5. Rencontre avec la proportionnalité

Le hasard intervient dans les trois situations des problèmes précédents. Peut-il créer une difficulté de compréhension particulière qui ait pour conséquence de perturber chez les élèves le fonctionnement encore peu stabilisé de la proportionnalité ?

Le problème des *Confitures*, proposé en catégories 6, 7, 8 pour la finale du 15e RMT en 2007, qui sur le plan des procédures à mettre en œuvre conduit aussi à des comparaisons de rapports va nous donner des éléments de réponse à la question précédente.

Les confitures

C'est la récolte des cerises. Grand-mère prépare des confitures dans son énorme chaudron, pour sa famille et ses voisins.

Lundi, elle cuit 8 kg de cerises avec 5 kg de sucre.

Mardi, elle cuit 10 kg de cerises avec 7 kg de sucre.

Jeudi, jour de la plus grande récolte, elle cuit 16 kg de cerises avec 10 kg de sucre.

Samedi, fin de la récolte, elle cuit 5 kg de cerises avec 3 kg de sucre.

Quel est le jour où elle a fait la confiture qui a le goût le plus sucré ?

Y a-t-il des jours où les confitures ont le « même goût » en sucre ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

La structure du problème se résume ainsi, selon qu'on s'intéresse aux écarts ou aux rapports entre les quantités de sucre et de cerises :

	sucre	cerise	écarts	rapports
lundi	5	8	+3	0,625
mardi	7	10	+3	0,7
jeudi	10	16	+6	0,625
samedi	3	5	+2	0,6

Les résultats confirment les observations précédentes. Au niveau 6 la majorité des copies examinées 56 % font apparaître des procédures additives et aboutissent à la réponse : les confitures ont le même goût le lundi et le mardi car il y a 3 kg de différence … et 44% des copies se réfèrent au rapport 0.625.

En catégorie 7, la tendance s'inverse : 24% pour les écarts et 76% pour les rapports.

En catégorie 8, il ne reste plus que 11% des copies en faveur des écarts et 89% pour les rapports.

Les résultats précédents sont calculés sur une centaine de classes finalistes (donc triées sur le volet) en fin d'année scolaire, ils ont été confirmés par de très nombreuses autres expérimentations où l'attrait de la procédure additive est beaucoup plus fort et le passage aux rapports n'apparaît vraiment qu'au degré 8.

6. Première synthèse et perspectives d'avenir

Nous sommes partis d'une interrogation : peut-on proposer une approche de la notion de probabilité dans l'enseignement des mathématiques, et à quel âge ?

Sur ce sujet, en quatre ans de constructions de problèmes, d'analyses a priori, d'observations a posteriori, de recueil de données sur des milliers de classes, d'expérimentations et réflexions, nous avons obtenu quelques données importantes pour la poursuite du débat.

Nous avons dépassé le stade des observations personnelles, des contextes particuliers - locaux ou nationaux (classes, élèves, programmes) - des croyances ou convictions individuelles. Nous *pensions* que des problèmes pour l'approche de la notion de probabilité pouvaient être envisagés pour le Rallye ; nous *savons* maintenant qu'il en existe, *Les pots de bonbons*, *Les truites*, *La main dans le sac*, qu'ils placent les élèves devant une difficulté réelle, que ceux-ci disposent de plusieurs procédures pour déterminer une solution, que c'est vers l'âge de 13 à 14 ans qu'ils sont en mesure de passer des écarts aux rapports pour surmonter l'obstacle.

Nous avons pu constater que ce passage de procédures additives aux procédures multiplicatives se fait très précisément au même âge pour un problème de proportionnalité (*Les confitures*) sur des nombres entiers du même ordre de grandeur.

Nous avons été surpris de la simultanéité de la maîtrise du concept de rapport dans le contexte probabiliste (nombre des cas favorables sur le nombre des cas possibles) et dans celui de la proportionnalité. Nous l'attendions plus tôt dans ce dernier contexte, vu le travail des années précédentes sur les divisions et les fractions et vu les nombreux « problèmes » que l'élève résout depuis les niveaux 5, voire 4, à propos de recettes culinaires, de mélanges d'eau ou de sucre…

Nous savions encore que, selon Piaget [Piaget, (1951]), ce n'est pas avant le stade des opérations formelles que l'élève peut envisager des raisonnements probabilistes, qui requièrent les opérations combinatoires et les proportions[32]

Pour revenir à notre interrogation sur l'âge auquel on pourrait envisager d'aborder la notion de probabilité, nous avons donc une limite d'âge clairement déterminée par nos résultats, nos analyses du concept de rapport et par les recherches en psychologie génétique.

Cette première synthèse, concerne des faits observés, analysés sur la base des explications des élèves, mais elle reste statique : un recueil de données, des tableaux, des inventaires de procédures significatives.

Il est temps de revenir à la dynamique du RMT et de ses problèmes qui vivent au-delà de leur conception, de leurs phases de résolution et d'analyses a posteriori : pour être repris en classe à des fin didactiques.

Les pots de bonbons et les autres problèmes de cette famille ont une caractéristique que nous n'avons pas encore prise en compte dans cette présentation : ils permettent à tous les groupes d'élèves de s'approprier la situation, d'en percevoir les enjeux, de faire intervenir des relations entre les nombres donnés pour expliquer leur stratégie. Un indice incontestable : nous n'avons pas trouvé de « feuille blanche » parmi les copies examinées.

On est donc certain que, en proposant *Les pots de bonbons* et *La main dans le sac* à une classe de niveaux 6, 7 ou 8, par groupes, sans intervention de l'enseignant, on obtiendra des stratégies, procédures et solutions diverses, qui pourront être confrontées lors d'un débat collectif.

Nous n'allons pas entrer dans les modalités de gestion de cette phase collective, mais nous pouvons facilement en imaginer les potentialités :

- conflit entre procédures reposant sur les écarts ou sur les rapports ;
- conflit entre les procédures additives qui conduisent au pot I avec les couples de nombres (6 ;10) et (8 ; 14) pour *Les pots de bonbons*. et les mêmes procédures additives qui conduisent au sac B avec les couples de nombres (6 ;10) et (9 ;14) pour *La main dans le sac* ;
- passage à la vérification sur de très grands nombres de tirages dans une approche par les « fréquences » et les tendances du phénomène, vu que les conflits ne pourront vraisemblablement pas être résolus (à moins que l'enseignant n'impose sa vérité) ;
- …

Il est vrai qu'il faudra du temps pour le débat, l'organisation des tirages, le recueil et l'analyse des données expérimentales. Il semble cependant que le jeu en vaille la chandelle lorsqu'on imagine toutes les connaissances mathématiques mises en œuvre, avec du sens, pour se convaincre que c'est bien dans le pot I ou dans le sac B qu'il faut plonger la main.

Références bibliographiques

BERNOULLI, Jakob (1713). *Ars Conjectandi*, 4ème partie. Traduit du latin par Norbert MEUSNIER dans Jacques Bernoulli et l'Ars conjectandi, IREM de Rouen, 1987.

BRÊCHET,. Michel, et all (2003). *Nombres et opérations*, (Méthodologie et commentaires) 2003 CIIP (Conférence intercantonale de l'Instruction publique de la Suisse romande et du Tessin) et LEP (Editions Loisirs et pédagogie).

LAPLACE, Pierre Simon de (1814). *Essai philosophique sur les probabilités* (5ème édition, 1825), Editions Bourgois, 1986.

PIAGET, Jean (1951). *La Genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, Jean Piaget, Barbel Inhelder eds., PUF 1951.

VERGNAUD, Gérard (1991). *La théorie des champs conceptuels*, Recherches en didactique des mathématiques, 10, 2-3, pp.135-169.

---

[32] La constitution des notions de hasard et d'irréversibilité suppose néanmoins l'intervention d'opérations déductives. Piaget constate en effet qu'avant la constitution des premières opérations logico-mathématiques et spatio-temporelles élémentaires, l'enfant ne différencie pas ce qui est possible et ce qui est nécessaire et il ne comprend pas l'irréversibilité liée aux phénomènes de brassage et de mélange. ...

À l'étape ultérieure, les opérations combinatoires et les proportions, propres au niveau formel, permettent d'inventorier les possibilités et de les doser en attribuant à chaque cas isolé une probabilité à titre de fraction de la distribution de l'ensemble total. C'est à ce niveau qu'apparaît le jugement de probabilité résultant d'une synthèse du hasard et des opérations, par assimilation du premier aux secondes, et dont la signification est de marquer les limites de l'action du sujet à une certaine échelle. (Fondation Jean Piaget, Piaget et l'épistémologie par M.-F. Legendre).

APPROCCIO ALLA NOZIONE DI PROBABILITA'
NEGLI ALLIEVI DAI 10 AI 15 ANNI

François Jaquet, Michel Henry

Introduzione

E' possibile proporre un approccio alla nozione di probabilità nell'insegnamento della matematica e a quale età?

Questo tema suscita molte resistenze. E' stato totalmente assente dai programmi dei *collèges* francesi fino all'introduzione nel 2008-2009 di qualche nozione elementare nel livello 9 (16 anni).
In altri paesi la situazione è leggermente diversa per ciò che riguarda i programmi. In Svizzera romanda, ad esempio, la probabilità appare nei manuali della scuola secondaria (a partire dai 12-13 anni), sotto forma di approccio, nel "privilegiare le situazioni concrete, accessibili agli allievi, poiché possono essere vissute e ssperimentate e poiché offrono la possibilità di contare, senza troppe difficoltà, i casi possibili e i casi favorevoli alla realizzazione di un evento" (Brêchet et. al, 2003). In Italia, le "Indicazioni per il curricolo" menzionano già alla fine della scuola primaria alcuni aspetti quali "In situazioni concrete, di una coppia di eventi intuire e cominciare ad argomentare qual è il più probabile, dando una prima quantificazione, oppure riconoscere se si tratta di eventi ugualmente probabili." Inoltre, un capitolo dei programmi di scuola secondaria di primo grado ha per titolo "*Misure, dati e previsioni*".

Peraltro, i nostri giovani allievi hanno delle intuizioni a proposito della probabilità. Usano correntemente espressioni come "ho più possibilità di... che di...". Hanno anche certezze e strategie nelle situazioni dove interviene il caso.

Un problema del 14° RMT (2006), *I barattoli di caramelle*, dove abbiamo supposto ci fosse un'intuizione probabilistica elementare, ci ha permesso di vedere come gli allievi lo risolvono e presentano la loro soluzione (è stato proposto a circa 1200 classi di 6 paesi, per allievi delle categorie da 5 a 9 (dai 10-11 anni ai 14-15 anni).

Dopo l'enunciato del problema (§1) e qualche elemento dell'analisi del compito, presentiamo i punteggi attribuiti sull'insieme delle classi (§2), poi un'analisi più dettagliata degli elaborati di classi della sezione Franche-Comté delle categorie 6, 7, 8 (scuola secondaria di primo grado), che conduce ad una tabella sintetica delle procedure adottate (§3). Sembrerebbe che le rappresentazioni degli allievi siano strettamente legate alla loro padronanza della proporzionalità, passando da un ricorso agli scarti nell'ambito di strutture additive ad una comprensione più precisa dei rapporti nell'ambito di strutture moltiplicative nel senso di Gérard Vergnaud (1981). I risultati mostrano che il passaggio da una struttura all'altra dipende dall'età degli allievi e ci conduce a interpretarlo in termini di salto epistemologico.

Per avvalorare questa osservazione, abbiamo allora costruito due nuovi problemi del medesimo tipo (§4), agendo su due variabili didattiche, contesto dell'enunciato e dati numerici e li abbiamo proposti in prove del 15° e 16° RMT. Abbiamo analizzato anche le risposte ad un quarto problema, pensato per uno studio sulla proporzionalità dove il caso non interviene, ma la cui struttura è molto vicina a quella dei tre problemi precedenti (§5).

Terminiamo poi con qualche osservazione generale e qualche proposta di ricerca in guisa di conclusione (§6).

1. L'enunciato del problema

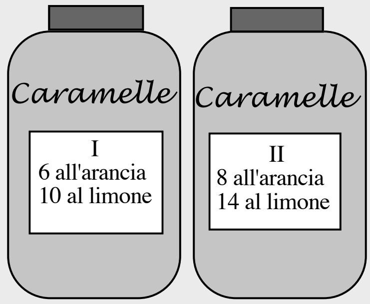
I Barattoli di Caramelle

Nonna Matilde mette in un barattolo 6 caramelle all'arancia e 10 al limone.

In un secondo barattolo mette 8 caramelle all'arancia e 14 al limone. Le caramelle hanno la stessa forma e sono incartate nello stesso modo.

La nonna sa che a Giulio non piacciono le caramelle al limone e quindi gli dice:

«Puoi prendere una caramella. Ti lascio scegliere il barattolo nel quale puoi infilare la mano, senza guardare dentro.»



Giulio ci pensa un po' e sceglie infine il barattolo che, secondo lui, gli offre più possibilità di prendere una caramella all'arancia.

Al posto di Giulio quale barattolo scegliereste?

Spiegate il vostro ragionamento.

Va osservato che è difficile evitare tutti i termini che evocano l'idea di probabilità nell'enunciato di un problema destinato proprio a cercare di capire come gli allievi la percepiscano.

La domanda "Al posto di Giulio quale barattolo scegliereste?" senza la frase che la precede sarebbe sembrata troppo vaga e avrebbe provocato delle difficoltà nell'attribuzione dei punteggi.

E' stata aggiunta la frase che precede la domanda che ricorda che a Giulio non piacciono le caramelle al limone, tramite l'espressione "avere più possibilità" che sembrava essere un male necessario, ma comunque un male accettabile.

L'analisi del compito, redatto da adulti, prevedeva solo "confronti di rapporti" o la "pianificazione di un ragionamento proporzionale del tipo: in un barattolo di 6 / 10 si avrebbero le stesse possibilità di un barattolo di 12 / 20..."

2. Analisi a posteriori: risultati generali e procedure varie

I criteri di attribuzione dei punteggi, determinati a priori, come l'analisi del compito, non potevano ispirarsi ai risultati di altre varianti del problema in quanto questo era il primo su tale tematica nella storia del RMT.

Eccoli:

4 *Risposta corretta (primo barattolo) con spiegazione chiara del ragionamento seguito*

3 *Risposta corretta, ma spiegazione incompleta o poco chiara*

2 *Risposta corretta senza spiegazione*
oppure errore di calcolo ma risposta coerente, con spiegazione

1 *Avvio di ragionamento corretto*

0 *Incomprensione del problema*

Constateremo più avanti, all'atto dell'analisi delle procedure, la debolezza di tali criteri.

Si parla in effetti di "risposta corretta (primo barattolo) senza che ci si sia resi conto che il primo barattolo può essere scelto anche sulla base di un ragionamento inadeguato; cosa che rende problematiche le interpretazioni relative al punteggio 1 che recita "Avvio di ragionamento corretto" o, per il punteggio 2, "risposta coerente".

Vengono qui di seguito riportati i risultati dell'attribuzione dei punteggi relativi al problema in oggetto che riguardano 1166 classi che hanno partecipato alla prima prova del 14° RMT (2006)

categorie	5	6	7	8	9	N. classi
4 punti	9%	3%	24%	43%	58%	248
3 punti	3%	3%	10%	9%	14%	74
2 punti	14%	12%	7%	9%	7%	119
1 punti	56%	52%	41%	26%	20%	496
0 punti	18%	30%	19%	13%	1%	229
N. classi	222	357	269	223	95	1166
media	1.3	1.0	1.8	2.4	3.1	

Malgrado tutte le incertezze sull'attribuzione del punteggio "1", rilevate precedentemente, si può constatare una progressione significativa delle medie, da 1 a 3 punti circa dalle categorie 5 e 6 (10-12 anni) alla categoria 9 (14-15 anni).

Secondo i criteri per i punteggi 3 e 4, che riguardano una risposta più o meno spiegata, si constata che una piccola minoranza di allievi di categoria 5 e 6 (12% e 6%) riescono a risolvere il problema, che circa la metà vi riesce in categoria 8 (52%) e che bisogna aspettare la categoria 9 (72%) per ottenere una maggioranza di riuscite.

3. Analisi degli elaborati

Il problema *I barattoli di caramelle*, si è dunque rivelato globalmente molto difficile e ci ha incitati ad approfondire l'analisi a posteriori per cercare di determinare la natura degli ostacoli alla sua risoluzione. Abbiamo pertanto analizzato gli elaborati di 96 gruppi di allievi (della sezione di Franche-Comté) dove figurano i loro calcoli e le loro spiegazioni. Le strategie risolutive che appaiono alla lettura di questi elaborati si possono ripartire in cinque categorie perfettamente identificabili (che abbiamo indicato con A, B, C, D e M), rivelatrici delle rappresentazioni degli allievi a proposito della probabilità in funzione delle loro età.

A. Confronto dei numeri di caramelle al limone, da un barattolo all'altro

E' sorprendente constatare che gli allievi che confrontano tra loro i numeri di caramelle aventi il medesimo gusto da un barattolo all'altro, centrano la loro attenzione sulle caramelle al limone per confrontare i loro "rischi" di estrarne una dal barattolo scelto, piuttosto che interessarsi alle "possibilità" di estrarre una caramella all'arancia. Tra i 96 elaborati analizzati, 6 elaborati di livello 6 e 1 di livello 8 costituiscono questa categoria, di cui riportiamo quattro esempi.

- *"Il barattolo n° 2 ha molte caramelle al limone. Il barattolo n° 1 ha meno caramelle al limone. Ci sono maggiori possibilità di prenderne una all'arancia nel barattolo n° 1"* (Cat. 6)
- *"Al posto di Julien sceglierei il barattolo I perché ci sono meno caramelle al limone perché non gli piacciono"* (Cat. 8)
- *"Al posto di Julien avremmo infilato la mano nel barattolo I. A Julien non piacciono le caramelle al limone, poiché ce ne sono meno che nel barattolo II, ha più possibilità di prendere una caramella all'arancia."* (Cat.6)
- *"Julien deve prendere il barattolo n° 1 perché ci sono meno caramelle al limone che nel barattolo n° II."* (Cat. 6)

B. Confronto delle differenze interne da un barattolo all'altro

L'argomentazione poggia sulle differenze interne dei numeri di caramelle dei due tipi in seno a ciascun barattolo. Il ragionamento tiene conto solo delle caramelle al limone "in più" di quelle all'arancia. Secondo questa concezione, il "rischio" di prendere una caramella al limone si traduce numericamente nel confronto tra 6 (barattolo II: 14 – 8) e 4 (barattolo I: 10 – 6). Minimizzando questa differenza si aumentano le possibilità di prendere una caramella all'arancia. Tutti gli allievi che hanno seguito questo ragionamento hanno optato dunque per il barattolo I.

Tuttavia, in questa procedura di confronto delle differenze, ci può essere implicitamente per certi allievi l'idea di minimizzare il "peso" delle caramelle al limone nel barattolo, cosa che rivelerebbe un approccio qualitativo alla nozione di probabilità. Ma una differenza a vantaggio delle caramelle all'arancia non garantisce che siano in una proporzione maggiore nel barattolo. Ad esempio, se invece di mettere 8 caramelle all'arancia e 14 al limone nel barattolo II ne avessimo messe rispettivamente 4 e 7 (senza modificarne il rapporto), la differenza sarebbe stata allora di 3 contro 4. Questi allievi avrebbero scelto il secondo barattolo.

Questa considerazione presuppone una certa padronanza della proporzionalità che gli allievi di questa età non hanno ancora. In tale tipo di ragionamento, l'ostacolo principale si situa a livello della costruzione della proporzionalità piuttosto che a quello del confronto delle "possibilità", in un processo di costruzione della pre-probabilità[33].

Questa procedura appare in 22 classi di categoria 6, dove in effetti è la più frequente, in 12 e 5 rispettivamente di categoria 7 e 8. Ecco qualche esempio:

- *"Nel barattolo I, ci sono 4 caramelle al limone in più di quelle all'arancia. Nel barattolo II, ci sono 6 caramelle al limone in più di quelle all'arancia. Dunque noi scegliamo il barattolo I…perché ci sono meno caramelle al limone in più nel barattolo I."* (Cat . 6 e 7)
- *"Abbiamo scelto il n°1 perché ci sono solo 4 caramelle all'arancia in meno di quelle al limone mentre nel n° 2 ci sono 6 caramelle in meno, dunque ci sono più possibilità."* (Cat 6)
- *"Bisogna prendere il barattolo n. 1 perché c'è una differenza più piccola tra le caramelle all'arancia e quelle al limone."* (Cat, 6).
- *" … poiché nel barattolo n°1 c'è meno differenza tra i due tipi di caramelle dunque più possibilità delle caramelle all'arancia, in un certo senso ci sono più caramelle all'arancia dunque ci sono più possibilità di avere una caramella all'arancia nel barattolo n°1."*(Cat. 7)

In termini di "rischio" di prendere una caramella al limone:

- *"Al posto di Julien, avrei scelto il barattolo n°1 perché lo scarto delle caramelle al limone e all'arancia è di 4 e nell'altro barattolo è di 6 dunque c'è meno rischio di prendere una caramella al limone."* (Cat. 6 e 8)

Con ragionamenti nei quali questa differenza è espressa in termini di rapporto:

- *" … perché c'è solo una possibilità su 4 di prendere delle caramelle al limone mentre nel 2° barattolo ci sono 6 possibilità di prendere una caramella al limone..."* (Cat. 6)
- *"Bisogna dunque scegliere il barattolo I in quanto c'è solo una possibilità su 4 di non sbagliarsi mentre con il barattolo II c'è una possibilità su 6 di non sbagliarsi."*. (Cat. 8)
- *"Calcolo il barattolo 1: 10 – 6 = 4. Ci sono 4 possibilità in più di cadere su una caramella all'arancia. Calcolo il barattolo 2: 14 – 8 = 6. Ci sono 2 possibilità in meno di cadere su una caramella all'arancia. Conclusione: Il barattolo I ha più possibilità di avere una caramella all'arancia."* (Cat. 7)
- *" …ci sono due possibilità di prendere una caramella all'arancia nel barattolo I piuttosto che nel barattolo II perché 6 – 10 = 4 e 8 – 14 = 6 4 – 6 = 2 2 possibilità."* (Cat. 7)

C. Confronto delle variazioni da un barattolo all'altro

Nel situarsi ancora in una struttura additiva, l'argomentazione - rilevata in 6 classi di categoria 6, 3 di categoria 7 e 8 - si basa sulla constatazione che, dal primo al secondo barattolo, il numero di caramelle all'arancia è aumentato di 2 e quello delle caramelle al limone di 4.

Il ragionamento presenta un aspetto più "dinamico" di quello della categoria B che potremmo qualificare come "statico": sono prese in considerazione le modifiche da un barattolo all'altro e l'aggiunta di 2 caramelle all'arancia e di 4 al limone, con un confronto dell'aumento dei numeri di ciascun tipo di caramelle.

Il principio secondo il quale "aggiungendo più caramelle al limone che caramelle all'arancia, si aumenta il loro peso relativo" non si esprime attraverso l'evoluzione di un rapporto. Ecco tre esempi:

- *"Abbiamo scelto il barattolo I in quanto: nel barattolo II ci sono solo 2 caramelle in più all'arancia ma 4 in più al limone."* (Cat. 6)

---

[33] Indichiamo come pre-probabilità l'idea, sovente implicita, che è possibile quantificare l'attesa di un evento dovuto al caso tramite un un rapporto di numeri di possibilità concepite come casi elementari che realizzano o no un evento.

- *"Bisogna prendere il primo barattolo perché 6+2=8 e 10+4=14, poiché 2 < 4 allora si aggiunge più limone che arancia."* (Cat. 6)
- *" ... perché ci sono più possibilità si prendere il 1° barattolo di caramelle sapendo che nel 1° barattolo ci sono meno caramelle al limone che nel 2° barattolo: il primo contiene 10 caramelle al limone e il 2° barattolo ne contiene 14 dunque ci sono 4 caramelle di più al limone, mentre ce ne sono solo 2 all'arancia aggiunte nel 2°."* (Cat. 8)

Bisognerebbe interrogare gli allievi per cercare di capire se fossero coscienti di una variazione di rapporti tra i numeri di caramelle di ciascun tipo, da un barattolo all'altro e percepire così l'esistenza eventuale di una intuizione pre-probabilistica.

D. Frazioni o rapporti

La procedura che conduce alla risposta corretta necessita di un confronto di rapporti e non di differenze.

Troviamo due scelte di rapporti negli elaborati esaminati:

D.1 rapporti tra i numeri di caramelle all'arancia e quelli al limone (6/10 e 8/14), o

D.2 rapporti tra i numeri di caramelle di un tipo e il totale di quelli contenuti nel barattolo (6/16 e 8/22 per quelle all'arancia; 10/16 e 14/22 per quelle al limone).

Procedura D.1

In questa procedura, osservata in 12 elaborati, il rapporto a/l è pertinente, ma non corrisponde al modello probabilistico. Si tratta di una frazione che non è compresa spontaneamente come numero razionale.

Il compito che gli allievi si prefiggono consiste nel trovare un modo per confrontare i due rapporti 6/10 e 8/14, per il tramite di frazioni equivalenti, con lo stesso denominatore o con lo stesso numeratore, o, più raramente con il ricorso a numeri decimali.

E' interessante, in casi di questo tipo, leggere la "traduzione" che gli allievi fanno dei loro risultati per giustificare la loro scelta, con, nella maggior parte dei casi, una terminologia impropria dal punto di vista probabilistico.

Di seguito, riportiamo alcuni esempi estratti da elaborati nei quali si parla di "maggiori possibilità", con talvolta una interpretazione in numeri di caramelle:

- *"Al posto di Julien avremmo scelto il barattolo I. Bisogna mettere 6/10 e 8/14 sullo stesso denominatore...*
  42/70 = 21/35 e 30/70 = 20/35. Julien avrebbe più possibilità di scegliere il barattolo I. " (Cat. 8)
- *"Nel barattolo I ci sono 6/10 caramelle. Nel barattolo 2, ci sono 8/14 caramelle.*
  6/10 = 42/70 <—— caramelle all'arancia
  8/14 = 40/70 <—— caramelle all'arancia
  42 > 40. Dunque avrei scelto il barattolo I perché quando si mettono con lo stesso denominatore 6/10 e 8/14 il numero di caramelle all'arancia nel barattolo I è 42 e nel barattolo II è 40." (Cat. 8)
- "(inizio identico che porta a: ... *21/35 > 20/35. Dunque al posto di Julien sceglierei il n°1, perché ha una possibilità in più del secondo barattolo.*" (Cat. 7)
- *"Per sapere in quale barattolo c'è maggiore possibilità di avere una caramella all'arancia, bisogna esprimere il numero di caramelle all'arancia in percentuale.*
  Barattolo I) 6 per 10 ———> 60 %
  x 10
  Barattolo II) 100/14 ≈ 7,14 8 per 14 ———> 57,12 %
  x 7,14

Ci sono più possibilità di trovare una caramella all'arancia nel barattolo I (60 %)." (Cat. 8)

Talvolta si parla di "possibilità su" con un uso improprio di "su" o di "percentuale di possibilità":

- *"Nel primo barattolo c'è il 60% di possibilità che ci sia una caramella all'arancia in quanto 6 arancia/10 limone mentre nel secondo ci sarò solo: 8x100/14 ≈ 57,142857%. Julien prenderà il 1° barattolo."* (Cat. 8)

Procedura D.2

In questa procedura osservata soprattutto nelle categorie 7 e 8, è il rapporto a/(a+l) ad essere preso in considerazione, rapporto che corrisponde al numero di casi favorevoli (arancia) sul numero totale di caramelle o al rapporto l/(a+l) che corrisponde al numero di casi sfavorevoli (limone) sul numero totale. La concezione soggiacente rinvia all'approccio classico alla nozione di probabilità.

La gran parte degli elaborati con quest'ultima procedura danno risposte corrette dopo un confronto delle due frazioni 6/16 e 8/22 o dei rapporti corrispondenti.

Le modalità di confronto consistono nel cercare un denominatore comune 352, 176 o 88, oppure nel confrontare rapporti di denominatore 22 o 44, con numeratori decimali non interi; per esempio: "13,75/22 < 14/22 o 8,25/22 > 8/22" o ancora tramite numeratore comune 12 come nell'esempio seguente:

- *" ... 12/32 > 12/33 dunque 6/16 > 8/32, perché se 2 numeri in scrittura frazionaria hanno lo stesso numeratore, allora il più grande è quello con il denominatore minore.* (Cat. 7)

Qualche elaborato mostra i rapporti in percentuale, tramite divisione o "regola del tre":

- *"Il numero delle caramelle della scatola n. I è uguale a 16. Dividendo il numero delle caramelle all'arancia (6) e al limone (8) per 16, si ottiene allora :*

  ** Caramelle all'arancia: 37,5%*
  ** Caramelle al limone: 62,5 %*

  Il numero delle caramelle della scatola n. II è uguale a 22. Dividendo il numero delle caramelle all'arancia (8) e al limone (14) per 22, si ottiene allora:
  ** Caramelle all'arancia: 36%*
  **Caramelle al limone: 64 %*

  Se fossimo al posto di Julien, avrei scelto il barattolo n°1, perché ci sono più possibilità di avere una caramella all'arancia (37,5 % contro 36 % nel barattolo n°2." (Cat. 7)

In un caso il confronto è fatto in "possibilità su 2":

- *"... Barattolo 1: 6 : 8 = 0,75. Ci sono 0,75 possibilità su 2 di cadere su una caramella all'arancia..*
  Barattolo 2: 8 : 11 = 0,72. Ci sono 0,72 possibilità su 2 di cadere su una caramella all'arancia." (Cat. 7)

L'estratto di questa spiegazione è abbastanza sorprendente per un allievo di 12-13 anni (in linea di massima redattore a nome del gruppo; l'elaborato è redatto in prima persona). Egli ha certamente visto la semplificazione dei denominatori per 2, cosa che ha potuto indurre il seguito. Si può osservare che il calcolo e il confronto delle cifre decimali interviene dopo la redazione, mentre sarebbe stato possibile farlo sui dati iniziali. Il commento dell'allievo è comunque interessante e mostra com'egli abbia superato il blocco psicologico dell'equiprobabilità che si riscontra nei giovani quando, di fronte a due risultati incerti, dichiarano di avere una possibilità su due di ottenere l'uno o l'altro.

Questo commento mostra anche un buon approccio intuitivo della nozione di probabilità che si appoggia su una certa padronanza della proporzionalità.

M. Procedure miste

Tre classi, di categoria 7 e 8, fanno riferimento simultaneamente alla sottrazione e ai rapporti. E' una piccola percentuale sui 96 elaborati esaminati, ma sembra rivelatrice dell'evoluzione da una procedura all'altra e illustra il passaggio ancora non concluso dalle strutture additive alle strutture moltiplicative in allievi da12 ai 14 anni:

- *"Al posto di Julien, sceglierei il barattolo n. I perché in questo barattolo ci sono 4 caramelle in più di quelle all'arancia e nel barattolo n. 2 ci sono 6 caramelle al limone in più.*
  E poiché c'è il 37,5 % di caramelle all'arancia nel barattolo n. I contro 36,4% nel barattolo 2.
  Barattolo 1: 6/16 = 0,375 x 100 = 37,5%.
  Barattolo : 8/22 ≈ 0,36 x 100 ≈ 36,36 %." (Cat. 7)

Abbiamo potuto classificare 94 elaborati (su 96) nelle categorie descritte in precedenza:

Procedure Categorie	A	B	C	D	M	total
6 (11-12 anni)	6 **17 %**	22 **61 %**	6 17 %	2 6 %	0	36 100%
7 (12-13 anni)	0	12 **41 %**	1 3 %	14 **48 %**	2 7 %	29 100%
8 (13-14 anni)	1 4%	5 17 %	2 7 %	20 **69 %**	1 3 %	29 100%
Totale						94

Si constata un'evoluzione verso le procedure "moltiplicative" (D) nel passaggio dal livello 6 al livello 8. Quelle che si basano sulle differenze (B e C) sono scelte dai tre quarti degli allievi di livello 6 e quelle che fanno appello ai rapporti, D_1 e D_2 è largamente maggioritaria a livello 8. A livello 7 si trovano entrambe le procedure, additiva e moltiplicativa.

La progressione delle medie (da 1 punto a 3 punti) in funzione dell'età è stata osservata su larga scala su un campione di 1200 classi (si veda il paragrafo 2) ed è confermata dai 96 elaborati esaminati.

Il passaggio verso procedure moltiplicative è da mettere in relazione con la costruzione del numero razionale e del concetto di proporzionalità.

4. Proseguo della ricerca su varianti del problema *I barattoli di caramelle*

La relazione tra il livello delle classi (età) e l'uso di un rapporto per interpretare una nozione intuitiva di probabilità è evidente nel caso de *I barattoli di caramelle*, che si ispira ad un modello di urna. Nel preparare questo problema avevamo fatto l'ipotesi che tale modello, per la sua semplicità, fosse il più propizio all'introduzione della nozione di probabilità che può funzionare implicitamente nelle situazioni di confronto. Una definizione "cardinalista"[34] non è necessaria per capire che si tratta allora di confrontare i "pesi" rispettivi delle palline colorate nelle due urne a due colori[35]. Invece, un'acquisizione seppur minima della proporzionalità sembra indurre fortemente l'espressione di tali "pesi" in termini di rapporti, permettendo così di formulare risposte pertinenti. Questa osservazione ci ha portati a pensare che può essere vano introdurre la nozione di probabilità alla scuola primaria o all'inizio della secondaria di primo grado sotto forma del rapporto "del numero di casi favorevoli su quello dei casi possibili". Se la nozione di quoziente può essere utile sul piano numerico, ci sono poche possibilità che gli allievi di questi livelli scolari le diano un senso probabilistico. Abbiamo pensato di convalidare i risultati ottenuti in questo primo studio ed abbiamo proposto alcune varianti di questo problema con contesti differenti per le prove del 15° e del 16° RMT (2007 e 2008). Viste le difficoltà riscontrate negli allievi delle categorie 5 e 6 ne *I barattoli di caramelle*, le varianti sono state proposte solo a classi delle categoria da 7 a 10.

Trote

In un allevamento di pesci, vengono allevati due tipi di trote per la consumazione: quelle bianche e quelle salmonate.

Ci sono due vasche, A e B, nelle quali un addetto deve pescare le trote richieste dai clienti. Riesce però a riconoscere il tipo di trota solo dopo averla pescata.

- Nella vasca A ci sono 60 trote bianche e 100 trote salmonate.
- Nella vasca B, ci sono 80 trote bianche e 140 trote salmonate.

Un cliente preferisce le trote bianche e ne vorrebbe una.

In quale vasca l'addetto deve pescare la trota per avere più possibilità di prendere una trota bianca al primo colpo?

Spiegate il vostro ragionamento.

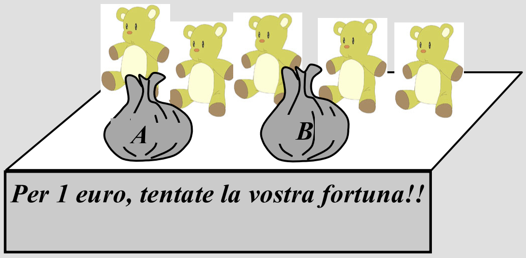
[34] Secondo quella di Laplace che dà nel suo primo principio la definizione seguente: la probabilità...è il rapporto del numero di casi favorevoli su quello di tutti i casi possibili (Laplace, 1814).

[35] Detta di Bernoulli, in riferimento alla sua opera magistrale "Ars conjectandi, pubblicata nel 1713, che dà una prima dimostrazione della legge dei grandi numeri a partire da questo modello di urna (Bernoulli, 1713).

La mano nel sacco

Alla fiera del paese, il proprietario di un baraccone propone ai passanti il gioco seguente:

«*Datemi un euro ed estraete una sola pallina da un sacco a vostra scelta.*
Se la pallina è rossa, vincerete un orso di peluche!»



Nel sacco A, ci sono 6 palline rosse e 10 palline bianche.
Nel sacco B, ci sono 9 palline rosse e 14 palline bianche.
Tutte le palline sono della stessa grandezza, dello stesso peso e dello stesso materiale.
I sacchi non sono trasparenti e non si possono vedere le palline che contengono, vi si può solo infilare la mano per estrarre una pallina.
Voi avete solo un euro in tasca e vorreste vincere un orso.

Da quale sacco provereste ad estrarre una pallina?

Spiegate la vostra risposta.

Le strutture dei tre problemi si distinguono in merito ai loro rapporti:

Barattoli	I	6	10	—>	6/16 = 3/8 = 33/88 = 0,375
	II	8	14	—>	4/11 = 32/88 = 0,3636...
Trote	A	60	100	—>	60/160 = 3/8 = 33/88 = 0,375
	B	80	140	—>	80/220 = 4/11= 32/88 = 0,3636...
Sacchi	A	6	10	—>	6/16 = 3/8 = 69/184 = 0,375
	B	9	14	—>	9/23 = 72/184 = 0,391…

Dai *Barattoli* alle *Trote* c'è solo una moltiplicazione per 10 nei dati e i rapporti sono dunque conservati. Per i *Sacchi*, abbiamo ripreso i dati dei *barattoli* ma mettendo 9 al posto di 8.

Questo passaggio dalla coppia 8 e 14 alla coppia 9 e 14 non è privo di senso; esso modifica infatti la scelta del sacco favorevole. Mentre nei primi due problemi erano il barattolo I e la vasca A ad essere quelli "più favorevoli", nel terzo problema è il sacco B ad avere la meglio. Si evita così l'inconveniente dei primi due problemi nei quali gli allievi potevano arrivare ad una risposta giusta sia con un procedimento additivo (scorretto), sia con la proporzionalità.

A livello dei contesti, le modifiche non sono molto importanti. Dai *Barattoli* alle *Trote* si abbandona il modello dell'urna per un "rivestimento" meno statico con forse minori implicazioni psicologiche: gli allievi che si mettevano "al posto di Julien" vedono ora "dall'esterno" il problema dell'addetto alla pesca che si chiede "in quale vasca deve pescare", ma l'espressione "maggiori possibilità" sussiste. Dai *Barattoli* ai *Sacchi* la nonna è rimpiazzata dal proprietario di un baraccone di una fiera. Il termine "possibilità" sparisce e la scelta è interamente devoluta all'allievo che sceglie in funzione del desiderio di vincere un orso di peluche.

Confronto delle medie

Un primo confronto è quello delle medie dei punteggi ottenuti dalle classi di tutte le sezioni che hanno risolto il problema delle prove del 2006 per *I barattoli di caramelle*, 2007 per *Le trote* e 2008 per *La mano nel sacco*. Come è già stato ricordato al §2, l'attribuzione dei punteggi si basa su criteri comuni che però possono presentare delle ambiguità o essere interpretati in maniera diversa da una commissione locale all'altra. I criteri sono stati peraltro leggermente adattati e precisati da una variante all'altra del problema, in funzione delle analisi a posteriori. Pertanto, queste medie vanno considerate come un semplice indicatore di una tendenza, comunque significativa vista l'ampiezza del campione.

Le medie indicate sono calcolate sui criteri di attribuzione dei punteggi da 1 a 4.

Categorie	5	6	7	8	9/10	effettivi (classi)
medie *Barattoli*	1,3	1,0	1,8	2,4	3,1	1166
medie *Trote*			1,7	2,3	2,7	825
medie *Sacchi*			1,5	2,1	2,2	988

Dalla tabella dei risultati si evince pertanto che la riuscita cresce con l'età ed è dello stesso ordine da un problema all'altro. E' solo a partire dalla categoria 8 (13 -14 anni) che si può sperare di avere un primo accesso al concetto di probabilità.

Si può constatare una leggera diminuzione delle medie nel caso del problema dei *Sacchi*. La nostra ipotesi è che sia dovuta al fatto che la "risposta giusta" ai primi due problemi potesse essere ottenuta con un procedimento errato (additivo), dando così la possibilità di ricevere punteggi "1" o "2" in ragione di lacune nei criteri di attribuzione dei punteggi come già menzionato al §2. Questi criteri sono stati migliorati per il problema dei *Sacchi*: una procedura additiva conduce ad un errore e può ottenere "1 punto" solo nel caso di una spiegazione di tipo probabilistico:

1. Soluzione esatta (il sacco B) o falsa (il sacco A), che si basa su un confronto delle differenze dei numeri di palline all'interno di un sacco o degli scarti tra un sacco e l'altro (relazioni additive), con tuttavia una spiegazione di tipo probabilistico (si hanno più possibilità di ... perché ci sono più di ...)

Analisi degli elaborati

Le analisi degli elaborati degli allievi sono state effettuate per le *Trote* e i *Sacchi* secondo il modello adottato per i *Barattoli* §3: le procedure di risoluzione osservate sono quasi le stesse per i tre problemi:

A. Confronto del numero di oggetti della stessa natura (caramelle al limone, trote salmonate, palline bianche) da un recipiente all'altro. Queste procedure che erano presenti nel caso dei *Barattoli* negli elaborati degli allievi di categoria più bassa (17% in categoria 6), sono qui (categorie dalla 7) molto rare (da 2 a 3%).

B. Confronto delle differenze interne tra i due tipi di oggetti in ciascun recipiente.

C. Confronto delle differenze tra i numeri di oggetti dello stesso tipo, da un recipiente all'altro.

D. Frazioni o rapporti.

La tabella che segue confronta le procedure più frequenti: quelle degli scarti (B e C) dove gli allievi restano nell'ambito additivo e quello dei rapporti (D), dove passano ad un ambito moltiplicativo.

	Problemi:	Cat. 6	Cat. 7	Cat.8
Procedure additive	Barattoli	78 %	44 %	24 %
(scarti, B e C)	Trote		31 %	30 %
	Sacchi		22 %	16 %
Procedure moltiplicative	Barattoli	6 %	48 %	69 %
(rapporti, D)	Trote		68 %	67 %
	Sacchi		70 %	77 %

Qui ancora, il confronto è chiaro: è solo a partire dai 12-13 anni (categoria 7) che gli allievi abbandonano le procedure additive a favore dei rapporti.

5. Incontro con la proporzionalità

Nelle tre situazioni dei problemi precedenti interviene il caso. Ci si chiede allora se il caso possa rappresentare una difficoltà di comprensione particolare che turbi gli allievi nel funzionamento ancora poco stabile della proporzionalità.

Il problema *Le marmellate*, proposto nelle categorie 6, 7, 8 della finale del 15° RMT nel 2007, che sul piano delle procedure conduce anch'esso a confronti di rapporti, può dare qualche risposta alla questione precedente.

Le marmellate (Cat 6, 7, 8)
C'è la raccolta delle ciliegie. La nonna prepara la marmellata in un enorme paiolo, per la sua famiglia e i vicini.
Lunedì cuoce 8 kg di ciliegie con 5 kg di zucchero.
Martedì cuoce10 kg di ciliegie con 7 kg di zucchero.
Giovedì, giorno di maggior raccolta, cuoce 16 kg di ciliegie con 10 kg di zucchero.
Sabato, fine della raccolta, cuoce 5 kg di ciliegie con 3 kg di zucchero.
Qual è il giorno in cui la nonna ha preparato la marmellata più zuccherata?
Ci sono giorni in cui le marmellate hanno lo stesso grado di dolcezza?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

La struttura del problema si riassume nel modo seguente a seconda che ci si interessi agli scarti o ai rapporti tra le quantità di zucchero e di ciliegie:

	zucchero	ciliegie	scarti	rapporti
lunedì	5	8	+3	0,625
martedì	7	10	+3	0,7
giovedì	10	16	+6	0,625
sabato	3	5	+2	0,6

I risultati confermano le osservazioni precedenti. Nella categoria 6 la maggior parte degli elaborati esaminati, il 56 % evidenziano delle procedure additive che portano alla risposta: le marmellate hanno lo stesso gusto il lunedì e il martedì perché ci sono 3 Kg di differenza … e il 44% degli elaborati fanno riferimento al rapporto 0.625.
Nella categoria 7, la tendenza si inverte: il 24% risolve con gli scarti e il 76% con i rapporti.
Nella categoria 8, resta solo l'11% degli elaborati in favore degli scarti il l' 89% in favore dei rapporti.

I risultati precedenti sono calcolati su un centinaio di classi finaliste (dunque le migliori) alla fine dell'anno scolastico e sono stati confermati da numerose sperimentazioni dove il ricorso alla procedura additiva è molto più forte e il passaggio ai rapporti appare veramente solo nella categoria 8.

6. Prima sintesi e prospettive per l'avvenire

Siamo partiti da una domanda: "E' possibile proporre un approccio alla nozione di probabilità nell'insegnamento della matematica e a quale età?"
Su questo tema, in quattro anni di costruzioni di problemi, di analisi a priori, di osservazioni a posteriori, di raccolta di dati su migliaia di classi, di sperimentazioni e riflessioni, abbiamo ottenuto alcuni dati importanti per il proseguo del dibattito.
Siamo andati oltre lo stadio delle osservazioni personali, dei contesti particolari – locali o nazionali (classi, allievi, programmi) – delle credenze o convinzioni individuali. *Pensavamo* che si potessero costruire per il RMT problemi per l'approccio alla nozione di probabilità; ora *sappiamo* che ve ne sono alcuni, *I barattoli di caramelle*, *Le trote, La mano nel sacco*, che pongono gli allievi di fronte ad una difficoltà reale e che essi dispongono di diverse procedure per determinare una soluzione, che è verso i 13/14 anni che riescono a passare dagli scarti ai rapporti per superare l'ostacolo.
Abbiamo potuto constatare che questo passaggio da procedure additive a procedure moltiplicative avviene precisamente alla stessa età in cui avviene nei riguardi della proporzionalità (*Le marmellate)* su numeri interi dello stesso ordine di grandezza.
Siamo rimasti sorpresi della simultaneità della padronanza del concetto di rapporto nel contesto probabilistico (numero di casi favorevoli su numero di casi possibili) e in quello della proporzionalità. Pensavamo che in quest'ultimo caso "arrivasse" prima, visto il lavoro degli anni precedenti sulla divisione e sulle frazioni e visti i numerosi "problemi" che l'allievo è chiamato a risolvere dalla quinta primaria, se non dalla quarta, a proposito di ricette culinarie, di misture d'acqua o di zucchero …

Sapevamo, ben inteso, che secondo Piaget (1951), prima dello stadio delle operazioni formali l'allievo non può accedere ai ragionamenti probalistici che richiedono le operazioni della combinatoria e le proporzioni[36].

Per tornare al nostro interrogativo sull'età alla quale si può pensare di affrontare la nozione di probabilità, abbiamo dunque un soglia iniziale di età chiaramente determinata dai nostri risultati, le nostre analisi del concetto di rapporto e tramite i lavori di psicologia.

Questa prima sintesi riguarda fatti osservati e analizzati sulla base delle spiegazioni degli allievi, ma è statica: una raccolta di dati, di tabelle, di inventari di procedure significative.

E' tempo di tornare alla dinamica del RMT e dei suoi problemi che vivono al di là delle loro concezioni, delle loro fasi di risoluzioni e di analisi a posteriori: per essere ripresi in classe a fini didattici.

I barattoli di caramelle e gli altri problemi di questa famiglia hanno una caratteristica di cui non abbiamo ancora tenuto conto: essi permettono a tutti i gruppi di allievi di appropriarsi della situazione, di percepirne le sfide, di fare intervenire relazioni tra i numeri dati per spiegare le loro strategie. Un indice incontestabile: non abbiamo trovato "fogli bianchi" tra gli elaborati esaminati.

Siamo dunque certi che, nel proporre *I barattoli di caramelle* e *La mano nel sacco* ad una classe di categoria 6, 7 o 8, a gruppi, senza intervento dell'insegnante, si otterranno strategie, procedure e soluzioni diverse, che potranno essere confrontate all'atto di un dibattito collettivo.

Non entriamo nelle modalità di gestione di questa fase collettiva, ma possiamo facilmente immaginarne le potenzialità:

- conflitto tra procedure che si reggono sugli scarti o sui rapporti;
- conflitto tra procedure additive che conducono al barattolo I con le coppie di numeri (6;10) e (8;14) per *I barattoli di caramelle* e le stesse procedure additive che conducono al sacco B con le coppie di numeri (6;10) e (9;14) per *La mano nel sacco*;
- passaggio alla verifica su grandi numeri di lanci in un approccio tramite le "frequenze" e le tendenze del fenomeno visto che i conflitti non potranno essere verosimilmente risolti (a meno che l'insegnante non imponga la sua verità);
- …

E' vero che ci vorrà del tempo per il dibattito, l'organizzazione dei lanci, la raccolta e l'analisi dei dati sperimentali. Sembra però che il gioco valga la candela quando pensiamo a tutte le conoscenze matematiche messe in opera, con del senso, per convincersi che è proprio nel barattolo I o nel sacco B che bisogna mettere la mano.

Bibliografia

BERNOULLI, Jakob (1713). *Ars Conjectandi,* 4ème partie. Traduit du latin par Norbert MEUSNIER dans *Jacques Bernoulli et l'Ars conjectandi,* IREM de Rouen, 1987.

BRÊCHET, Michel et all (2003). *Nombres et opérations, (Méthodologie et commentaires)* CIIP (Conférence intercantonale de l'Instruction publique de la Suisse romande et du Tessin) et LEP (Editions Loisirs et pédagogie).

LAPLACE, Pierre Simon de (1814). *Essai philosophique sur les probabilités* (5ème édition, 1825), Editions Bourgois, 1986.

PIAGET, Jean (1951). *La Genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, Jean Piaget, Barbel Inhelder eds., PUF.

VERGNAUD, Gérard (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques,* 10, 2-3, pp.135-169.

[36] La costituzione di nozioni di caso e di irreversibilità suppone tuttavia l'intervento di operazioni deduttive. Piaget constata in effetti che prima della costituzione delle prime operazioni logico-matematiche e spazio-temporali elementari, il bambino non distingue ciò che è possibile e ciò che è necessario e non comprende l'irreversibilità legata ai fenomeni di fusione e di mescolanza….

Nella fase successiva, le operazioni combinatorie e le proporzioni, proprie del livello formale, permettono di inventariare le possibilità e di misurarle attribuendo a ciascun caso isolato una probabilità a titolo di frazione della distribuzione dell'insieme totale. E' a questo livello che apparirà il giudizio di probabilità risultante da una sintesi del caso e delle operazioni, per assimilazione del primo alle seconde, e il cui significato è di sottolineare i limiti dell'azione di un soggetto ad una certa scala… (Fondation Jean Piaget, Piaget et l'épistémologie par M.-F. Legendre) .

DIFFICOLTÀ NEL CONFRONTO DI LUNGHEZZE

Carla Crociani, Lucia Doretti, Lucia Grugnetti

1. Una lunga storia

Gli allievi, quando risolvono un problema del Rally Matematico Transalpino, lavorano in gruppo, in autonomia, senza, cioè, alcun aiuto esterno. Devono leggere l'enunciato, capirlo ed appropriarsi della situazione, scegliere le strategie di risoluzione e scrivere il risultato della ricerca collettiva del gruppo, ma con la richiesta supplementare di spiegare in che modo vi sono arrivati.

Consegnano dunque un elaborato nel quale figurano la o le risposte, ma anche e soprattutto le procedure di risoluzione.

L'analisi di centinaia di elaborati relativi ad un medesimo problema permette di raggrupparli per categorie di procedure o di risposte: soluzioni corrette possono essere il frutto di strategie corrispondenti a livelli molto diversi di padronanza dei saperi utilizzati; soluzioni errate possono evidenziare concetti ancora inadeguati e difficoltà od ostacoli di diversa natura.

Le difficoltà all'origine di risposte errate o di procedure inadeguate non vengono facilmente alla luce: un primo problema rivela un errore frequente che si ritrova poi in un secondo problema; un'ipotesi sulle origini dell'errore permette di elaborare un terzo problema … e così, via via, la difficoltà viene identificata e analizzata con sempre maggior precisione, talvolta in un lungo periodo di tempo. Presentiamo qui un ostacolo, tra gli altri, legato alla conservazione di lunghezze e angoli.

1.1. Prime osservazioni

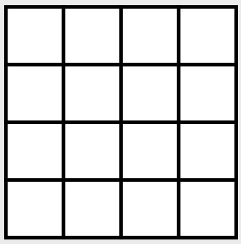
Le prime osservazioni in questo ambito risalgono a situazioni nelle quali gli allievi devono riconoscere alcune figure elementari all'interno di figure più complesse per poi contarle in modo da rispondere a domande quali "Quanti quadrati si possono distinguere in questa figura?". Nel caso in cui la figura è una griglia quadrata 4x4 (problema del 2° Rally, 1994), sappiamo bene che gli allievi rispondono 16 poiché tengono conto solo dei 16 quadrati unità, o al massimo 17 se aggiungono il quadrato che contiene la griglia.

Quadrati

In questa figura ci sono molti quadrati.

Quanti ne vedete?

Spiegate come li avete contati.



Un'analisi più fine del compito e delle risposte a questo tipo di problemi mostra che bisogna prendere in considerazione le figure interne che si sovrappongono (e non solo la pavimentazione o la suddivisione dell'insieme) ed anche le diverse misure dei lati dei quadrati presenti. Questa presa in considerazione simultanea di svariati criteri costituisce uno dei primi ostacoli da superare ed è possibile immaginare le difficoltà dell'organizzazione sistematica del conteggio nel caso di questa situazione in rapporto agli esercizi scolastici più "classici" nei quali le figure sono presentate in modo ben distinto al fine di facilitarne il riconoscimento.

Dopo il compito volto all'identificazione di figure già disegnate, come nell'esempio precedente, un compito un po' più complesso consiste nel ritrovare certi poligoni elementari i cui vertici vanno scelti tra un insieme di punti.

Il primo problema di questo tipo "I quadrati" è stato proposto nella prova di finale del 5° RMT.

I quadrati

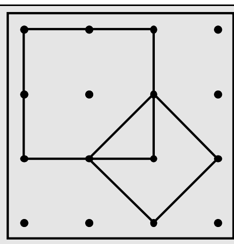
In questo riquadro sono segnati 16 punti.

Sono già stati costruiti due quadrati ognuno dei quali ha per vertici quattro di questi punti.

Si potrebbe costruirne molti altri.

Quanti quadrati aventi per vertici quattro dei 16 punti dati è possibile costruire?

Spiegate come li avete trovati.



In questo caso non ci sono solo figure sovrapposte e diverse misure dei quadrati, ma anche posizioni differenti in rapporto alla griglia e il compito di immaginare le figure o di disegnarle tutte sapendo che sono troppe per poterle distinguere su un solo disegno.

Uno degli esempi dà un quadrato in posizione "privilegiata" (con i lati orizzontali e verticali) e l'altro aiuta a rendersi conto che ci sono anche altre posizioni possibili.

Le grandezze in gioco, distanza e angolo, richiedono agli allievi un'analisi più dettagliata.

Essi vedono bene i 9 quadrati "piccoli" in posizione privilegiata, poi i 4 "medi" dei quali uno è già disegnato e il "grande", ma anche i 4 "in diagonale" di cui uno è disegnato. Le difficoltà nascono a proposito dei due quadrati i cui lati sono diagonali del rettangolo 1 x 2 (o segmenti di componenti 1 e 2 / 2 e 1): tali quadrati non sono visibili, sono in posizione non abituale, certo, ma soprattutto la loro identificazione esige che si riconosca la congruenza dei quattro lati e la presenza di angoli retti (con la misura con la squadra oppure nell'immaginare una rotazione di un quarto di giro della figura).

1.2. Diagonali e lati di quadrati

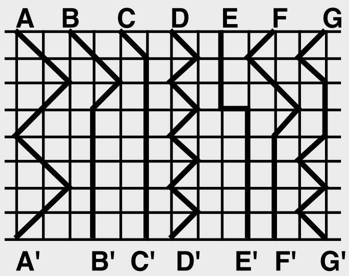
In Crociani et al. (2001), le difficoltà della relazione tra lato e diagonale di un quadrato nell'ambito della conservazione o non conservazione di lunghezze sono chiaramente messe in evidenza nell'analisi degli elaborati degli allievi che descrivono le loro procedure di risoluzione del problema "Attraverso la quadrettatura", per le categoria 5, 6, 7 (da 10 a 12 anni).

Riportiamo il problema ed uno stralcio dell'analisi a posteriori.

ATTRAVERSO LA QUADRETTATURA (Cat. 5, 6, 7) 8° RMT – II prova

Andrea, Berta, Carlo, Denise, Emilio, Francesco e Giorgia hanno scelto ognuno un percorso per attraversare la quadrettatura.

Andrea è partito da **A** per arrivare ad **A'**, Berta da **B** a **B'**, ecc.



Elencate questi percorsi dal più corto al più lungo.
Indicate come avete stabilito l'ordine dei percorsi e spiegate il vostro ragionamento.

Nell'analisi di Crociani et al., è ben evidenziato il fatto che:

"a) Un errore piuttosto diffuso, e decisamente strano, presente a tutti e tre i livelli e in sedi e nazionalità diversi, è consistito nel valutare la diagonale la metà del lato.

"Una linea tracciata in verticale vale un quadretto, mentre le linee tracciate in obliquo valgono mezzo quadretto."

b) Un errore, previsto nell'analisi a priori, commesso da coloro che stilano la seguente classifica: "E" è il percorso più lungo, tutti gli altri sono secondi a pari merito.

In questo caso non viene fatta distinzione tra lato e diagonale. (...) Questo errore è stato per lo più commesso da classi di livello 5 e 6 e denota, in generale, l'assenza di una precisa distinzione tra la distanza e il percorso scelto per colmare tale distanza (l'avere isolato "E" deriva semplicemente dal fatto che è l'unico con un tratto palesemente inutile).

1.3. La questione delle distanze

Ci siamo interessati, oltre che alle diagonali della quadrettatura, anche agli altri segmenti o figure i cui vertici sono punti della quadrettatura (già incontrati in precedenza, ma senza farne l'oggetto di un'attenzione particolare).

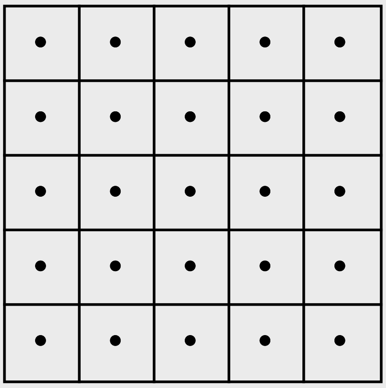
Nel 2004, nell'ambito del 12° RMT, è stato proposto alle classi un problema dal titolo "A quale distanza?" basato sulla problematica delle distanze di punti su una griglia quadrata. Il problema è risultato, ancora una volta, piuttosto difficile, con una riuscita media da 1 a 1,8, a seconda delle sezioni, benché fosse stato proposto alle categorie 7 e 8.

A quale distanza?

Un giardiniere ha piantato degli alberi a distanza regolare in un terreno quadrato come mostra il disegno.

Suo figlio, che ha una mente matematica, osserva che la distanza tra due alberi non è sempre la stessa. Egli pone questa domanda:

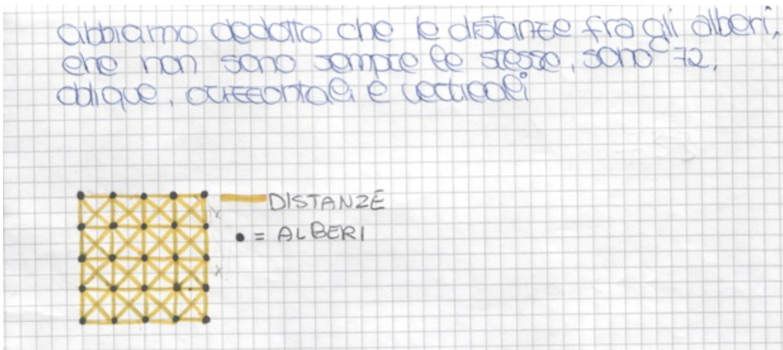
"Quante distanze differenti ci sono tra due alberi del tuo giardino?"



Rispondete anche voi a questa domanda.
Spiegate come avete trovato la soluzione.

Gli errori sono stati di vario tipo, tutti però incentrati sulle difficoltà nella conservazione delle lunghezze senza l'uso degli strumenti di misura abituali, appoggiandosi solo sull'osservazione delle "componenti" verticale e orizzontale dei segmenti.

En passant, abbiamo anche potuto constatare che il termine "distanza" utilizzato nella domanda "Quante distanze differenti ci sono tra due alberi del tuo giardino?" ha due accezioni: quella dell'insegnante di matematica come "misura di una lunghezza di segmento" e quella di numerosi allievi come "cammino", "segmento", "percorso". Un esempio per tutti, di categoria 7, è il seguente:



(Abbiamo dedotto che le distanze tra gli alberi, che non sono sempre le stesse, sono 72, oblique, orizzontali e verticali)

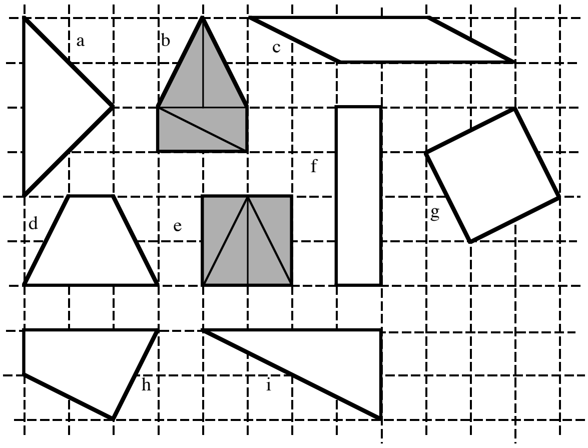
dove si afferma che le distanze differenti sono 72 perché si considerano tutti i segmenti possibili che uniscono in orizzontale, verticale e in diagonale due punti "vicini" nella quadrettatura, senza rilevarne la congruenza.

1.4. La famiglia di segmenti di componenti 1 e 2

Le difficoltà osservate su certi lati e diagonali di quadrati hanno condotto alla creazione di nuovi problemi nei quali entrano in gioco diagonali di rettangoli della griglia (o quadrettatura) 1 x 2. I triangoli rettangoli corrispondenti non sono più isosceli come i semi-quadrati, ma sembrano facilmente identificabili: uno dei lati dell'angolo retto vale il doppio dell'altro. E' una figura che si incontra di frequente nei problemi di costruzione, ricoprimento o puzzle.

I problemi 2 e 8 della finale del 15° RMT (2007) hanno evidenziato nuove difficoltà.

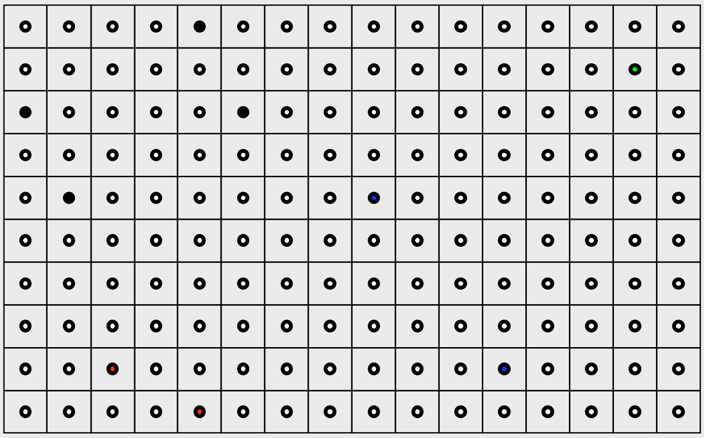
Si tratta di sapere se è possibile ricoprire certe figure (a, c, d, f, g, h, i) con quattro triangoli rettangoli (semi-rettangoli di 2 x 1), secondo i due esempi (b ed e).



La maggior parte degli allievi (circa i tre quarti) sono riusciti a ricoprire le figure c d ed f, ma solo la metà è riuscita nell'intento nel caso delle figure h ed i, e soprattutto, una gran parte ha ricoperto le figure a e g con triangoli, senza constatare che erano diversi dagli altri.

Un altro problema, della finale internazionale del 2008, "Il tavolo da spostare" mette ancora una volta in evidenza le difficoltà legate alla conservazione delle lunghezze, combinate con quelle relative alla conservazione dell'angolo retto.

Il tavolo da spostare



Questo disegno rappresenta il pavimento della cucina di Giulia con un cerchietto al centro di ciascuna piastrella quadrata.

Giulia osserva una cosa sorprendente: in certe posizioni, i quattro piedi del tavolo di cucina ricoprono esattamente quattro cerchietti del pavimento.

Per cominciare Giulia sistema il tavolo in una certa posizione, con i quattro piedi che ricoprono esattamente i quattro cerchietti segnati in nero sul disegno (in alto a sinistra).

Poi lo sposta in modo che i quattro piedi del tavolo poggino su altri quattro cerchietti. Due di questi cerchietti sono segnati in rosso sul disegno.

Segnate in rosso gli altri due cerchietti ricoperti dagli altri due piedi del tavolo in questa seconda posizione.

Giulia sposta ancora il tavolo, in una terza posizione in modo che i piedi del tavolo siano ancora su quattro cerchietti. Due di questi sono segnati in blu.

Segnate in blu gli altri due cerchietti ricoperti dagli altri due piedi del tavolo in questa terza posizione.

Si potrebbe spostare ancora il tavolo in modo che i quattro piedi ricoprano ancora quattro cerchietti, uno dei quali è segnato in verde?

Se sì, dite in quanti modi è possibile sistemare il tavolo con un piede sul cerchietto verde e gli altri tre su altri cerchietti e segnate questi cerchietti in verde e con altri colori se c'è più di una possibilità.

Le prime analisi dei risultati hanno in effetti rivelato un ostacolo molto grosso nella distinzione tra rettangolo e parallelogramma, dovuto alla non conservazione dell'angolo retto o delle lunghezze di una coppia di lati paralleli (segmenti di componenti 2 e 4 che ritroveremo più avanti). Numerose sperimentazioni successive hanno ben mostrato che l'ostacolo sussiste al di là delle categorie 4 e 5 alle quali il problema era stato proposto in origine. Le analisi di Jaquet (2009) e Anselmo et al. (2011) ne sono una testimonianza.

Le stesse difficoltà si ritrovano in un problema "I dieci punti", proposto nella prima prova del 18° RMT (2010) nell'ambito delle sperimentazioni seguite alle analisi del problema "Il tavolo da spostare".

I dieci punti

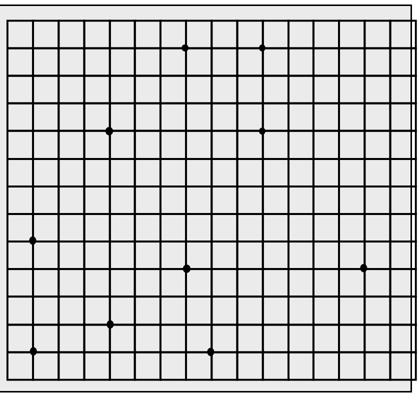
Ci sono dieci punti segnati qui sotto su una griglia quadrettata.

Francesco ne ha trovato quattro che sono i vertici di un rettangolo.

Individuate questi quattro punti, disegnate il rettangolo in rosso e spiegate perché pensate che sia un rettangolo.

Anna dice che può disegnare più di un rettangolo i cui vertici sono quattro dei dieci punti dati.

Che cosa ne pensate?



Nel seguito di questa "lunga storia" che non è finita, è stato elaborato per il 19° RMT (2011) un nuovo problema che si inserisce in questa lunga successione di problemi su una griglia quadrata.

Questa volta l'interesse è volto alla lunghezza di segmenti i cui estremi sono nodi della quadrettatura, di componenti 2 e 4 (o 4 e 2). Poiché qui l'angolo retto non è al centro delle nostre preoccupazioni, possiamo passare ad altre figure e lavorare su triangoli isosceli.

2. Il problema "Ritaglio di triangoli"

Ritaglio di triangoli (Cat. 6, 7, 8)

Cristina disegna alcuni triangoli su un foglio quadrettato e poi li ritaglia.

Tutti i suoi triangoli hanno:

- due lati della stessa lunghezza di quella del segmento disegnato sulla quadrettatura sottostante;
- tutti i vertici in punti di intersezione della quadrettatura.

Quanti triangoli differenti (cioè non esattamente sovrapponibili dopo averli ritagliati) può aver ritagliato Cristina?

Disegnateli tutti utilizzando la quadrettatura qui sotto.

Questo problema fa appello alle nozioni di geometria piana: angoli, triangoli isosceli, figure isometriche.

Per risolverlo, gli allievi devono comprendere le condizioni da rispettare nella loro ricerca:

- i triangoli devono essere isosceli;
- i lati congruenti sono della stessa lunghezza del segmento indicato;

- i vertici sono i punti di intersezione della quadrettatura;
- i triangoli devono essere tutti diversi (non isometrici).

L'analisi a priori del compito dell'allievo ha potuto basarsi sulle osservazioni della lunga serie dei nostri problemi su una griglia quadrata che hanno permesso di formulare diverse ipotesi su difficoltà e ostacoli:

- la percezione della lunghezza del segmento dato come quella della diagonale di un rettangolo 2 x 4 della quadrettatura la cui misura è presa "in modo indiretto" (o senza il righello che non dà una misura sufficientemente precisa);
- la distinzione tra il lato e la diagonale della quadrettatura (apparsa nel problema già citato "Attraverso la quadrettatura" in Crociani, 2001) estesa qui a quella tra il lato più lungo e la diagonale del rettangolo;
- il riconoscimento di triangoli congruenti in posizioni differenti (in risposta alla domanda "Quanti triangoli differenti può aver ritagliato Cristina?") con la precisazione secondo la quale non può sovrapporli dopo averli ritagliati, che mette in gioco le isometrie come spostamenti effettivi;
- la conservazione delle lunghezza data nelle diverse posizioni, come proseguo dello studio pubblicato in "Il rettangolo...non così evidente", dal titolo sintomatico delle difficoltà nel riconoscere non solo gli angoli retti, ma anche le lunghezze dei lati (Anselmo et al. 2011);
- le abitudini "scolastiche" nella disposizione dei triangoli isosceli: con la "base" orizzontale o verticale.

Quest'analisi ha tenuto conto di altri lavori (es. Vighi, 2005) nei quali gli allievi, più giovani, devono cercare la posizione del terzo vertice di un triangolo isoscele su una quadrettatura di cui uno dei due lati congruenti è già disegnato.

3. Analisi a posteriori del problema "Ritaglio di triangoli"

Il problema "Ritaglio di triangoli" è stato proposto alle categorie 6, 7 e 8 ed è risultato piuttosto difficile.

3.1 I risultati

I criteri di "attribuzioni dei punteggi" del problema in oggetto, determinati all'atto dell'analisi a priori, sono i seguenti:

4 Risposta corretta (5) con disegno che mostri i triangoli ben disposti sulla quadrettatura e con le giuste dimensioni

3 Risposta con un solo triangolo "dimenticato" o una ripetizione (un triangolo congruente ad uno dei precedenti) o un errore (triangolo non conforme alle richieste: non isoscele o con i vertici non sulle intersezioni della quadrettatura)

2 Risposta con due triangoli "dimenticati" o due ripetizioni o due errori

1 Risposta con tre triangoli "dimenticati" o tre ripetizioni o tre errori

0 Risposta con un solo triangolo corretto o incomprensione del problema (disegni di triangoli che non tengono conto delle condizioni)

Le percentuali dei punteggi ottenuti sono le seguenti:

Punteggi attribuiti	0	1	2	3	4	N. classi	*m*
Categoria 6 (in %)	46,99	21,13	11,94	12,72	7,21	2177	1,1
Categoria 7 (in %)	43,11	21,55	11,11	15,39	8,84	747	1,3
Categoria 8 (in %)	38,46	18,01	14,07	16,51	12,95	533	1,5
Totale (in %)	45	21	12	14	8	3457	1,14

Tabella 1: percentuale dei punteggi attribuiti (da 0 a 4) ai 2177 elaborati di 23 sezioni per il problema *Il ritaglio di triangoli*, *m*: media dei punteggi .

La percentuale molto alta, in tutte le categorie, di punteggi "0" e le medie molto basse (da 0,8 a 1,5 punti, su 4) ci hanno portato a chiederci quale ne fossero le ragioni.

Una delle ipotesi, formulata più sopra, sugli ostacoli che possono incontrare gli allievi, riguarda la posizione dei triangoli isosceli, "privilegiata" (con la "base" orizzontale o verticale) o no. Il suo esame è l'oggetto di una seconda fase di analisi a posteriori, secondo l'inventario che segue relativo alle diverse posizioni possibili dei triangoli (Figura 1):

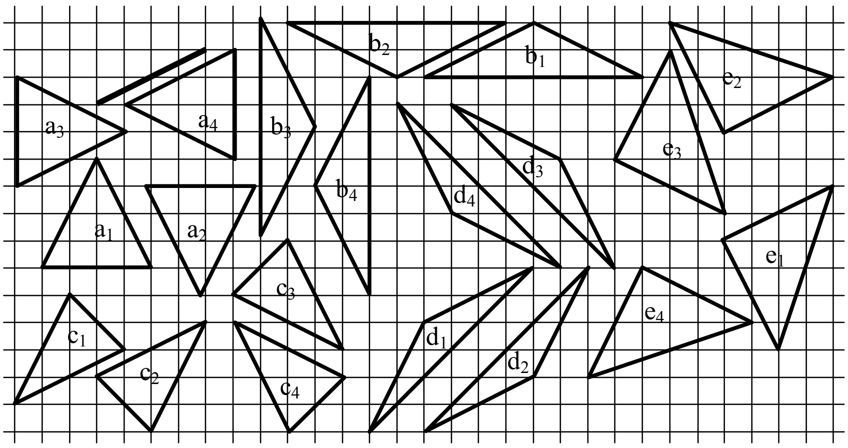


Figura 1. Le posizioni che possono occupare ciascuno dei cinque triangoli (a, b, c, d, e) scoperte dagli allievi e, in grassetto, la posizione del segmento dato nell'enunciato del problema

Nell'inventario si distinguono:

- i triangoli isosceli con angoli acuti e con un lato orizzontale o verticale

a_1 in posizione tradizionale (o "privilegiata")

a_2 in posizione "sulla punta"

a_3 con lato verticale a sinistra e un altro parallelo al segmento "modello"

a_4 con lato verticale a destra e un altro parallelo al modello

- i triangoli isosceli con un angolo ottuso e con un lato orizzontale o verticale

b_1 in posizione privilegiata e un altro lato parallelo al modello

b_2 in posizione "sulla punta" e un altro lato parallelo al modello

b_3 lato verticale a sinistra senza lato parallelo al modello

b_4 lato verticale a destra e senza lato parallelo al modello

- i triangoli isosceli con angoli acuti c_1, $c_{2,}$, c_3, c_4 (i primi due con un lato parallelo al modello)

- i triangoli isosceli con un angolo ottuso d_1, $d_{2,}$, d_3, d_4 (i primi due con un lato parallelo al modello)

- i triangoli rettangoli e_1, $e_{2,}$, e_3, e_4 (i primi due con un lato parallelo al modello).

L'analisi degli elaborati della sezione di Siena, che ha un numero di classi partecipanti al 19° RMT molto alto, è sufficiente ad ottenere dati significativi (401 elaborati esaminati, di cui rispettivamente 155, 140 e 106 delle categorie 6, 7 e 8) che offrono risposte chiare alla questione relativa alla posizione dei triangoli ottenuti (*Tabella 2*).

	a_1	**a_2**	**a_3**	**a_4**	**b_1**	**b_2**	**b_3**	**b_4**	**c_1**	**c_2**	**c_3**	**c_4**	**d_1**	**d_2**	**d_3**	**d_4**	**e_1**	**e_2**	
Cat.6	43	7	18	48	99	14	4	4	5	11	2	3	1	1	1	1	17	9	288
Cat.7	43	4	11	32	88	9	2	7	6	11	3	6	7	1	0	5	26	7	268
Cat.8	40	9	12	36	59	12	3	3	3	12	1	8	7	1	3	6	19	13	247
Totale	**126**	20	41	**116**	**246**	35	9	14	14	34	6	17	15	3	4	12	62	29	803
en %	**31**	5	10	**29**	**61**	9	2	3,5	3,5	8,5	1,5	4	3,8	0,7	1	3	15	7	
	a				**b**				**c**				**d**				**e**		
Totale	**303 / 76 %**				**304 / 76 %**				71 / 18%				34 / 8%				91/ 23%		803

Tabella 2. Occorrenza dei triangoli trovati secondo l'inventario della figura 1

L'esame della tabella 2 evidenzia delle tendenze piuttosto nette.

- Tra i triangoli trovati, i tre quarti (76%) sono in una delle posizioni privilegiate con la "base" orizzontale o verticale (a oppure b dell'ultima riga)
- In seno a queste categorie generali, si può osservare come, su 401 elaborati in totale, il triangolo con un angolo ottuso, un lato parallelo al modello e la "base" in basso (b_1) appare 246 volte, cioè nel 61% delle classi, mentre lo stesso triangolo, ma con la "base" in alto (b_2) appare solo 35volte (9%).

Per i triangoli con un angolo acuto e la "base" orizzontale, questa è in basso (a_1) in 126 elaborati (31%) e in alto (a_2) in 20 elaborati (5%) solamente. Si trovano invece molti triangoli congruenti con la "base" verticale, ma la frequenza delle disposizioni varia sensibilmente a seconda del lato parallelo al modello: lo si trova in 116 elaborati (29%) quando il modello è in alto (a_4) e in 41 elaborati solamente (10%) quando è in basso (a_3). Le medesime considerazioni sono ancora valide per i triangoli di tipo b_3 e b_4.

- Bisogna ancora rilevare le deboli occorrenze degli altri tipi di triangoli: 91 (23%) triangoli rettangoli con un lato parallelo al modello, di cui 62 in basso (e_1) e 29 in alto (e_2) e nessun triangolo rettangolo senza lato parallelo al modello (e_3 ed e_4); 71 (18%) triangoli di tipo c di cui la metà con un lato parallelo al modello sistemato in alto (c_2); solo 34 (8%) triangoli di tipo d.
- Le osservazioni precedenti riguardano tutte e tre le categorie 6, 7 e 8.

Da un punto di vista generale, i fattori che influenzano la "scoperta" dei triangoli sono, nell'ordine:

- la "posizione privilegiata" di un triangolo isoscele, ereditata da immagini scolastiche e culturali tradizionali come "il tetto", "una bandiera" (Marchini et al., 2002);
- il segmento disegnato; (gli allievi non hanno preso in considerazione la frase dell'enunciato "due lati della stessa lunghezza di quella del segmento disegnato sulla quadrettatura sottostante");
- le abitudini della lettura e del disegno da sinistra a destra e dall'alto in basso (viene disegnato un segmento nella posizione del modello in alto a sinistra dello spazio disponibile sul foglio e si continua a destra e in basso). A tal proposito, la posizione del modello del segmento in alto a sinistra sembrerebbe aver giocato un ruolo importante nelle scoperta dei triangoli di ciascuno dei tipi a, b, c, d ed e: laddove si sistemi il primo lato del triangolo sul modello, il posto rimanente sul foglio permetterebbe una sola costruzione: a_4 (116) piuttosto che a_3 (41), b_1 (246) piuttosto che b_2 (35), c_2 (34) piuttosto che c_1 (14), d_1 (15) piuttosto che d_2 (3), a_4 (116) piuttosto che a_3 (31).

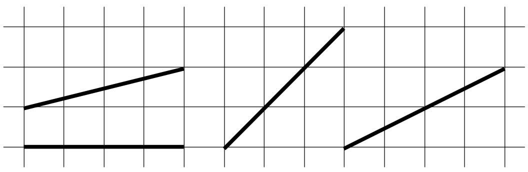
Al di là di questi aspetti noti e in qualche modo attesi, le medie molto basse dei punteggi ottenuti sono dovute anche alla frequenza piuttosto elevata di tre tipologie di errori.

3.2. Errori caratteristici

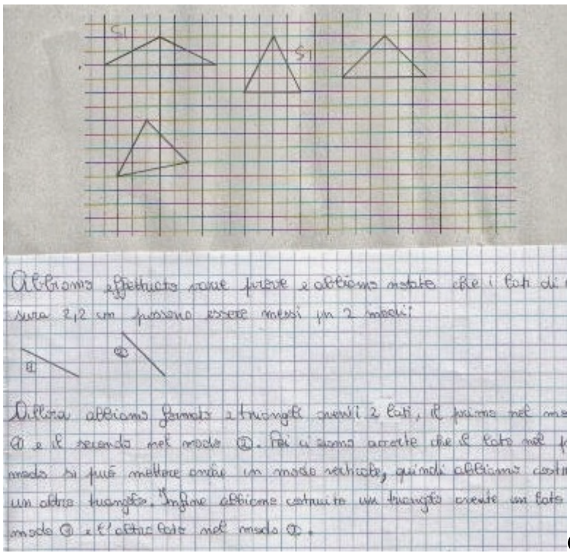
Tra le tre tipologie che verranno qui di seguito descritte, la più significativa è quella relativa alle difficoltà connesse alla conservazione delle lunghezze, così come era stato rilevato, in particolare, in merito al problema "Il tavolo da spostare" (Jaquet, 2009, Anselmo et al., 2011).

3.2.1. Errori nella rilevazione della congruenza tra segmenti (si considerano isosceli triangoli che non lo sono)

L'errore è quello di considerare congruenti segmenti che non lo sono, come ad esempio tutti quelli evidenziati in grassetto qui sotto (sia in diagonale che lungo la quadrettatura):



In alcuni elaborati si arriva a questa conclusione facendo riferimento esplicito alla misura:

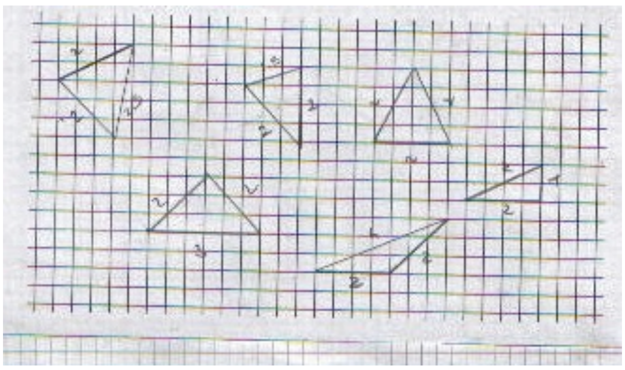

Cat. 7

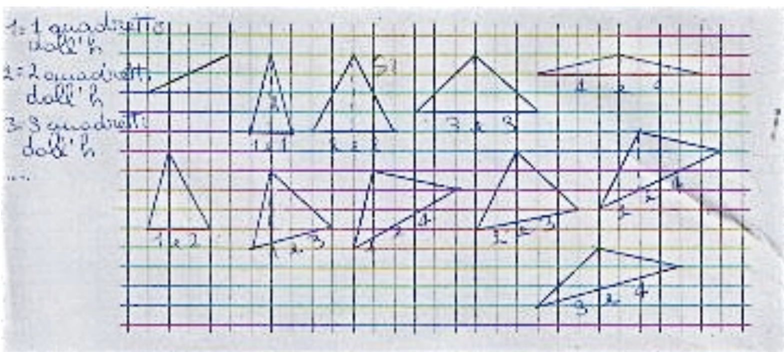
(*Abbiamo effettuato varie prove e abbiamo notato che i lati di misura 2,2 cm possono essere messi in due modi (1 e 2). Allora abbiamo formato 2 triangoli aventi 2 lati, il primo nel modo 1 e il secondo nel modo 2. Poi ci siamo accorte che il lato nel primo modo si può mettere anche in modo verticale, quindi abbiamo costruito un altro triangolo. Infine abbiamo costruito un triangolo avente un lato nel modo 1 e l'altro nel modo 2*).

In altri sembra che si faccia il conteggio del numero di quadretti della griglia "interessati" dal segmento (esempio, nella prima e terza figura riportate qui sotto, i segmenti evidenziati sono considerati congruenti perché coinvolgono 4 quadretti), oppure si fa una stima "ad occhio". Sembra che in nessun caso la quadrettatura suggerisca il riferimento ai triangoli rettangoli e di conseguenza al teorema di Pitagora.

Questa tipologia di errore è presente in tutte le categorie, con una frequenza minore nella categoria 8:

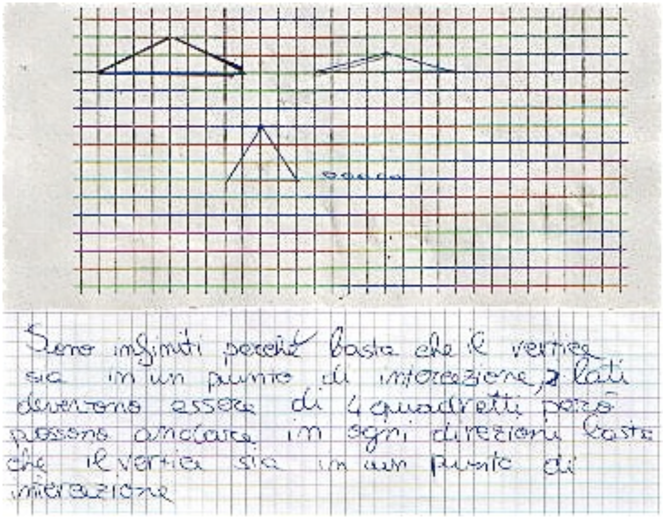
- categoria 6: 47%,
- categoria 7: 44%,
- categoria 8: 26%.


Cat. 7



Cat. 8

La non conservazione delle lunghezze ha anche portato a riposte che prevedono infiniti triangoli isosceli con i vertici in punti di intersezione della quadrettatura. Le risposte di questo tipo non sono numerose, ma compaiono in tutte e tre le categorie. Un esempio è il seguente:

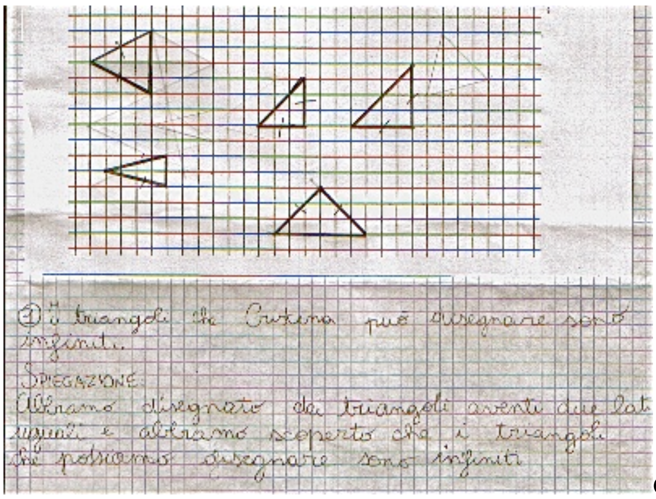


Cat. 6

(*Sono infiniti perché basta che il vertice sia in un punto di intersezione, 2 lati devono essere di 4 quadretti però possono andare in ogni direzione basta che il vertice sia in un punto di intersezione*)

3.2.2. Risposte in cui i triangoli disegnati non tengono conto del primo vincolo

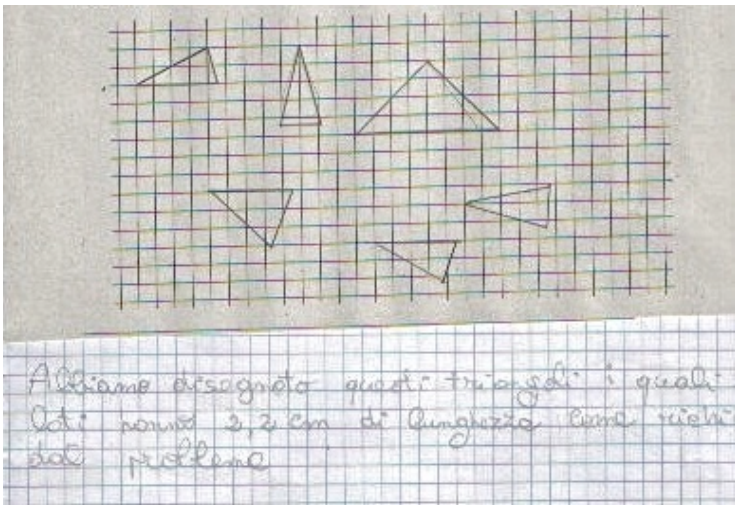
In questi elaborati non è tenuto presente il vincolo della congruenza con il segmento riportato sulla griglia, ad eccezione del caso del triangolo disegnato a partire proprio da tale segmento (a meno che non si commetta l'errore di cui al punto 3.2.1.).



Cat. 7

(1- I triangoli che Cristina può disegnare sono infiniti.
SPIEGAZIONE. Abbiamo disegnato dei triangoli aventi due lati uguali e abbiamo scoperto che i triangoli che possiamo disegnare sono infiniti.)

Ci sono anche elaborati in cui ci sono più tipologie di errori contemporaneamente:



(Abbiamo disegnato questi triangoli i quali 2 lati sono 2,2 cm di lunghezza come richiesto dal problema)

3.3.3. Pavimentazione

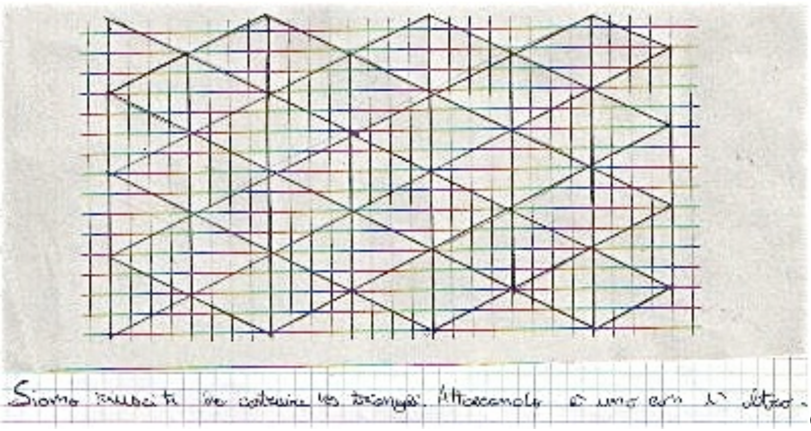
Si riempie l'intera quadrettatura con triangoli isosceli (solitamente di tipo a_3, a_4 oppure b_1, b_2) e poi si contano come se fossero "mattonelle" di una pavimentazione.

Questo tipo di errore è di natura completamente differente dai precedenti. Non riguarda più la misura di lunghezze, bensì una incomprensione dell'enunciato.

In effetti, si potrebbe pensare che "la pavimentazione" sia l'interpretazione che gli allievi hanno dato all'espressione "non esattamente sovrapponibili". In alcuni elaborati si completa tale pavimentazione evidenziando lungo i bordi triangoli di tipo diverso. Forse, gli allievi interpretano "triangoli differenti" come triangoli diversi dal modello usato per la pavimentazione.

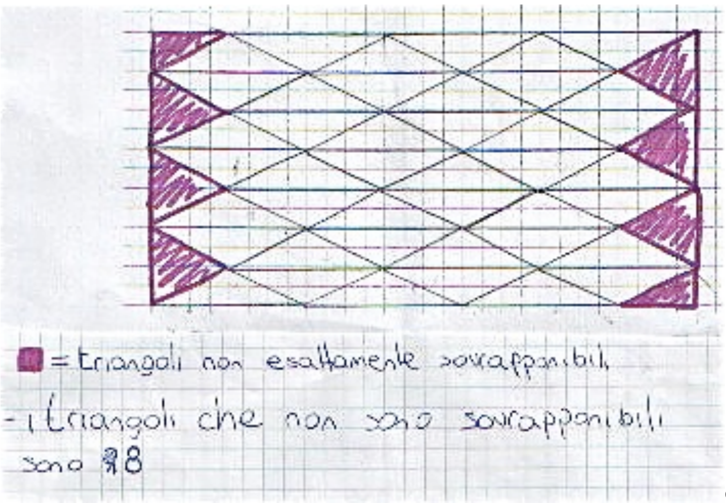
Questa tipologia di errore è presente in tutte le categorie e con frequenza similare:

- categoria 6: 10% elaborati,
- categoria 7: 9% elaborati,
- categoria. 8: 11% elaborati.

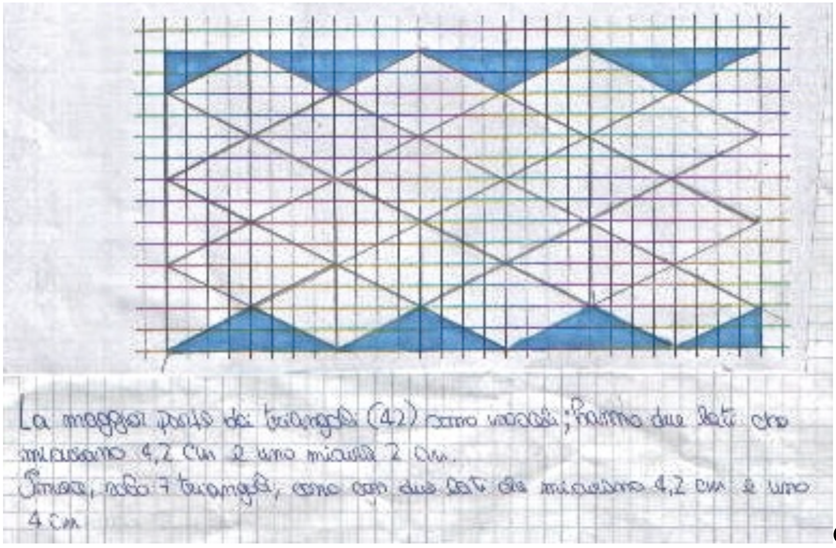


Cat. 6

(*Siamo riusciti a costruire i triangoli attaccandoli l'uno con l'altro*).

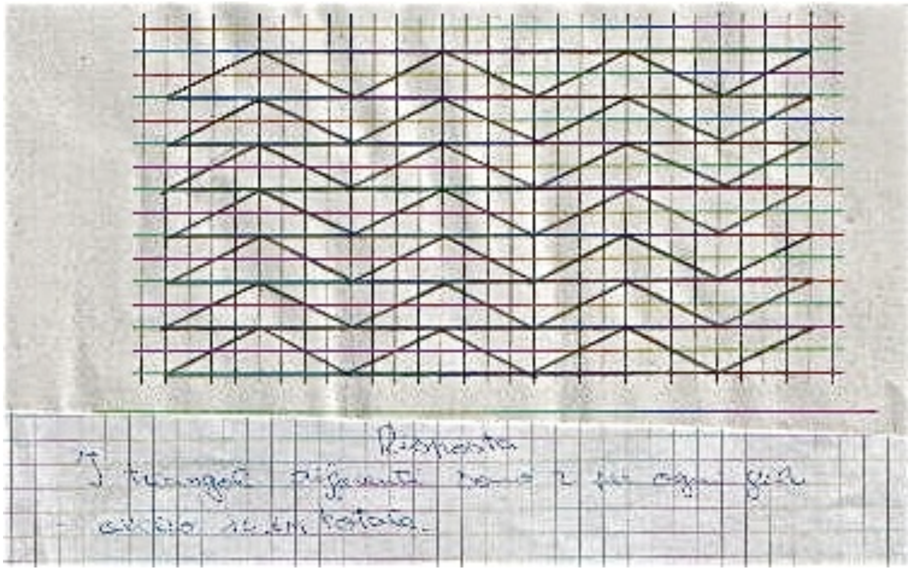


Cat. 7



Cat. 8

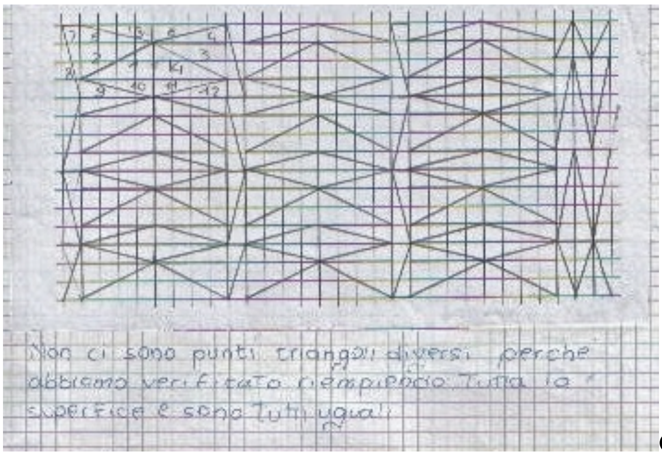
(*La maggior parte dei triangoli (42) sono isosceli; hanno due lati che misurano 4,2 cm e uno misura 2 cm. Invece, solo 7 triangoli, sono con due lati che misurano 4,2 cm e uno 4 cm*).



Cat. 8

(*Risposta. I triangoli differenti sono 2 per ogni fila, ovvero 14 in totale)*.

Un tipo ancora diverso di pavimentazione è il seguente:



Cat. 6

(*Non ci sono punti*[37] *triangoli diversi perché abbiamo verificato riempiendo tutta la superficie e sono tutti uguali*).

4. Qualche osservazione conclusiva

L'analisi del problema "Il tavolo da spostare"[38] aveva ben evidenziato diverse tipologie di difficoltà nel riprodurre una figura su una data quadrettatura, una delle quali è certamente la non conservazione dell'angolo retto. Un'altra difficoltà è stata, come nel caso del problema "Il ritaglio di triangoli" quella connessa alla "non conservazione di lunghezze" che ha portato addirittura a "tavoli" (rettangoli) che diventando parallelogrammi non rettangoli, non mantenevano le dimensioni del tavolo (rettangolo) di partenza. L'oggetto ideale "tavolo" era stato perso di vista. In effetti, come mostrato in Anselmo et al., anche con varianti del problema originale (non più tavolo-3D, ma tappeto-2D), con o senza quadrettatura, le difficoltà non sono state da meno.

Il problema "A quale distanza?" ha evidenziato in maniera inequivocabile, la difficoltà a capire che su righe di punti (orizzontali, verticali o oblique) si possono trovare molte coppie di punti equidistanti tra loro, forse dovuta alla difficoltà a trovare una strategia opportuna per valutare le distanza fra due punti, laddove sia necessario confrontare segmenti "orizzontali" o "verticali" con segmenti "obliqui".

La questione relativa alle difficoltà della conservazione di lunghezze non va trascurata nell'insegnamento-apprendimento della geometria per le implicazioni che queste difficoltà giocano nel corretto processo di costruzione di concetti geometrici.

Un problema come "Il ritaglio di triangoli" permette, come i precedenti, di far venire alla luce ostacoli caratteristici a proposito di nozioni che sembrerebbero acquisite, come il triangolo isoscele, la sua posizione e la congruenza di segmenti. Si osserva chiaramente che l'immagine di triangolo isoscele che hanno gli allievi è quella di una figura con tre lati di cui uno è orizzontale e gli altri due, congruenti, sono obliqui. Si tratta di una figura simmetrica con asse verticale (nel senso di Lismont & Rouche, 2001), dove l'oggetto di riferimento è "il tetto" (es. Marchini et al., 2002). Il termine "base" fa sì che quel lato non solo sia orizzontale ma anche "in basso". Il modello "bandiera", (ancora nel già citato Marchini et al.), è molto meno frequente.

A proposito della ricerca delle altre posizioni del segmento di riferimento, sembra che ci si scontri con una difficoltà di altro genere: la concezione di questo segmento come una delle diagonali di un rettangolo di 2 x 4 o di un vettore di componenti 2 e 4 (es. Vighi, 2005). Per trovare le diverse posizioni di questo segmento, è necessario capire che "4 passi verso destra e 2 passi verso l'alto " rappresentano uno spostamento isometrico a "2 passi verso destra e 4 passi verso alto" per commutatività, o ancora "2 passi verso sinistra e 4 passi verso il basso" per inversione tra destra e sinistra o tra alto e basso, etc.

Le questioni che si pongono dal punto di vista didattico sono molteplici.

E' possibile "lottare" contro la predominanza di certe immagini mentali associate al triangolo isoscele? Come? Potrebbe essere sufficiente evitare di utilizzare il termine "base" e non disegnare il triangolo isoscele sistematicamente con un lato orizzontale?

Per preparare il concetto di modulo di un vettore bisogna aspettare il "Teorema di Pitagora" o proporre attività di misurazione effettive, …? Se alcuni allievi pensano che la diagonale di un quadrato valga la metà di uno dei suoi lati (si veda il primo esempio "Attraverso la quadrettatura"), se altri pensano che tutti i rettangoli con una

[37] In Toscana, l'espressione "non ci sono punti triangoli" ha il significato di "non c'è nessun triangolo".

[38] Si vedano i già citati Anselmo et al. (2011) e in Jaquet (2009).

dimensione di lunghezza 4 hanno le diagonali della stessa lunghezza, c'è qualcosa che non funziona riguardo al senso che si attribuisce in classe ai termini "lunghezza", "distanza", "congruenza o isometria".

La storia di questa famiglia di problemi, già piuttosto lunga, non è peraltro finita; sarà arricchita da altri problemi che riguarderanno sempre più da vicino gli ostacoli e le difficoltà incontrate dagli allievi, al fine di descriverli in maniera sempre più precisa agli insegnanti.

Quando questi ultimi vedranno le risposte scorrette dei loro allievi, non le tratteranno più come errori, ma come difficoltà "naturali" che si possono superare solo con discussioni, confronti e rilanci di concetti da riprendere per poter raggiungere un livello più alto di costruzione.

Bibliografia

Anselmo B., Bisso C., Grugnetti L. (a nome del gruppo geometria dell'ARMT): 2011, 'Il rettangolo…non così evidente', *La Gazzetta di Transalpino*, n. 1.

Crociani C., Salomone L.: 2001, 'Un problema di tipo geometrico: *Attraverso la quadrettatura*', in Grugnetti, Jaquet, Crociani, Doretti, Salomone (Eds.) *RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici*, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino, Siena 1999 - Neuchâtel 2000, Università di Siena, IRDP di Neuchâtel, 118-128.

Jaquet F.: 2009, 'La finale internationale du 16^{e} RMT, problèmes et analyse', in L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds) *Rally Matematico Transalpino e intercultura*, ARMT, SCNAT, 225-253.

Marchini C., Rinaldi M.G., Bedulli M., Grugnetti L.: 2002, 'Tetti e bandiere', *Processi didattici innovativi per la Matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora (Bo), 223-236.

Lismont L, Rouche N. (a cura di): 2001, *Forme et mouvements*, CREM.

Vighi P.: 2005, 'Measurement on the squared paper', in: Bosch, M., (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 4, Sant Feliou de Guixols (Spagna), 18-21/02/05, pp. 777-786, ISBN: 84-611-3282-3, [Copyright left to the authors in 2006], pubblicato su CD.

DIFFICULTÉS DANS LA COMPARAISON DE LONGUEURS

Carla Crociani, Lucia Doretti, Lucia Grugnetti

1. Une longue histoire

Lorsqu'ils résolvent un problème dans le cadre du Rallye mathématique, les élèves travaillent en groupes autonomes, sans aucune aide extérieure. Ils doivent lire l'énoncé, le comprendre et s'approprier la situation, choisir les stratégies et donner le résultat de la recherche collective du groupe, mais avec la demande supplémentaire d'expliquer comment ils y sont arrivés.

Ils rendent donc une copie où figurent non seulement la(les) réponse(s), mais aussi, et surtout, les procédures de résolution.

L'analyse de centaines de copies d'un même problème permet de les regrouper par catégories de procédures ou de réponses : des solutions correctes peuvent être issues de stratégies correspondant à des niveaux très différents de maîtrise des savoirs utilisés ; des solutions erronées peuvent faire apparaître des concepts encore inadéquats, des difficultés ou des obstacles de types divers.

Les difficultés à l'origine de réponses erronées ou de procédures inadéquates n'apparaissent cependant pas facilement : un premier problème révèle une erreur fréquente, qu'on retrouve dans un deuxième problème, une hypothèse sur les origines de l'erreur permet d'élaborer un troisième problème … et ainsi, de proche en proche, la difficulté est identifiée et analysée de plus en plus précisément, sur plusieurs années parfois. Nous présentons ici, un obstacle parmi d'autres, lié à la conservation des longueurs et des angles dans le cas particulier de figures sur quadrillages.

1.1. Premières observations

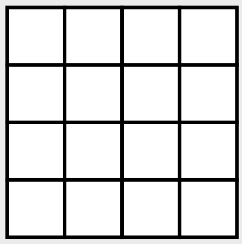
Les premières observations dans ce domaine remontent aux situations où les élèves doivent reconnaître des figures élémentaires au sein de figures plus complexes, et les dénombrer, pour répondre à des questions du genre « Combien de carrés peut-on distinguer dans cette figure ? ». Dans le cas où la figure est une grille carrée de 4 x 4 (Problème du 2e Rallye, 1994), on sait que la plupart des élèves répondront 16, en ne prenant en compte que les 16 carrés unités, ou 17 en y ajoutant le carré extérieur.

Carrés

Il y a beaucoup de carrés dans cette figure.

Combien en voyez-vous?

Expliquez comment vous les avez comptés.



Une analyse plus fine de la tâche de résolution et des réponses à ce type de problème montre qu'il faut prendre en compte les figures internes qui se superposent (et non seulement le pavage ou la partition de l'ensemble) et aussi les différentes mesures des côtés des carrés présents. Cette prise en compte simultanée de plusieurs critères est un des premiers obstacles à surmonter et l'on imagine aisément la difficulté de l'organisation systématique du dénombrement dans cette situation, par rapport aux tâches scolaires plus « classiques » où les figures sont présentées bien distinctement afin de faciliter leur reconnaissance.

Après les tâches d'identification de figures déjà dessinées comme dans l'exemple précédent, une tâche un peu plus complexe consiste à retrouver certains polygones élémentaires dont les sommets sont à choisir parmi un ensemble de points.

Le premier problème de ce type « Les carrés » a été proposé lors de la finale du 5e RMT (1997).

Les carrés

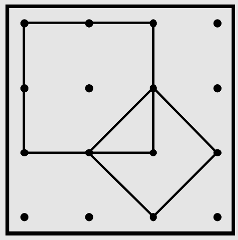
Dans ce cadre, 16 points sont marqués.

On a déjà formé deux carrés, dont les sommets sont quatre de ces points.

On pourrait en construire beaucoup d'autres.

Combien peut-on construire de carrés, en tout, dont les sommets sont quatre des 16 points donnés ?

Expliquez comment vous les avez trouvés



Il y a ici non seulement la superposition de figures, différentes grandeurs de carrés comme dans la catégorie précédente, mais aussi différentes positions par rapport au réseau et la tâche d'imaginer les figures ou de les dessiner tout en sachant qu'il y en a trop pour pouvoir les distinguer sur un même dessin.

Un des exemples donne un carré en position « privilégiée » (avec leurs côtés horizontaux et verticaux), et l'autre aide à se rendre compte qu'il y en a aussi dans d'autres positions.

Les grandeurs en jeu, distance et angle, exigent de l'élève une analyse plus détaillée. Il voit bien les 9 « petits » carrés en position privilégiée, puis les 4 « moyens » dont l'un est déjà dessiné, et le « grand » ainsi que les 4 « en diagonale » dont l'un est dessiné. C'est à propos des deux carrés dont les côtés sont des diagonales de rectangles 1 x 2 (ou des segments de composantes 1 et 2 / 2 et 1) que les difficultés apparaissent : ils ne sont pas évidemment visibles, ils sont dans une position inhabituelle, certes, mais surtout, leur identification exige de reconnaître l'isométrie des quatre côtés et la présence d'angles droits (par mesure à l'équerre ou par l'imagination d'une rotation d'un quart de tour de la figure).

1.2. Diagonales et côtés de carrés

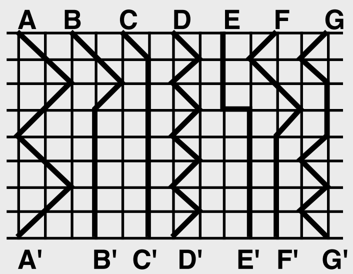
Dans Crociani et al. (2001), les difficultés de la relation entre côté et diagonale d'un carré d'un quadrillage dans le cadre de la conservation (ou non conservation) des longueurs sont clairement mises en évidence par l'analyse des copies d'élèves décrivant leur procédure de résolution du problème « La traversée du quadrillage », proposé en catégories 5, 6 et 7, (10 à 12 ans) lors du 8^{e} RMT (2001).

Voici l'énoncé de ce problème avec quelques fragments de son analyse :

La traversée du quadrillage

André, Berthe, Carlo, Denise, Émile, François et Géraldine ont chacun choisi un chemin pour traverser le quadrillage.

André est parti de A pour arriver à A', Berthe de B à B', etc.



Classez ces chemins du plus court au plus long.

Indiquez comment vous avez établi votre classement et justifiez votre raisonnement.

De l'analyse de Crociani et al., on voit notamment que:

a) Une erreur assez fréquente et décidemment étrange, relevée à tous les niveaux et dans toutes les sections des différents pays, consiste à considérer la diagonale comme la moitié d'un côté de carré.

« Une ligne tracée verticalement vaut un carré et une ligne en oblique vaut demi-carré. »

b) Un erreur, prévue dans l'analyse a priori, est celle de considérer que : « E » est le parcours le plus long et tous les autres viennent en second, à égalité.

Dans ce cas, la distinction entre côté et diagonale n'est pas faite. (...) cette erreur est la plus fréquente pour les classes de degrés 5 et 6 et dénote la confusion entre la distance et le parcours suivi pour effectuer le trajet (le choix de « E » vient simplement du fait que c'est le seul parcours avec un trait qui est évidemment inutile).

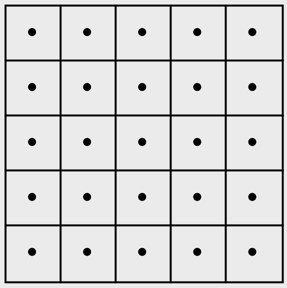
1.3. La prise en compte des distances

Après les diagonales du quadrillage, on s'est intéressé de plus près aux autres segments ou figures dont les sommets sont des points du quadrillage (déjà rencontrés précédemment mais sans faire l'objet d'une attention particulière).

En 2004, dans le cadre du 12e RMT, un problème *Combien de distances* construit sur la problématique des distances entre les sommets d'un quadrillage s'est révélé encore une fois plutôt difficile, avec une réussite moyenne de 1 à 1,8 points, selon les sections, bien qu'il ait été proposé en catégories 7 et 8.

Combien de distances

Un pépiniériste a planté des arbres très régulièrement sur un terrain de forme carrée, comme le montre ce dessin.



Son fils, qui a l'esprit mathématique, remarque que la distance entre deux arbres n'est pas toujours la même. Il lui pose alors cette question : *« Combien existe-t-il de distances différentes entre deux arbres de ta plantation ? »*

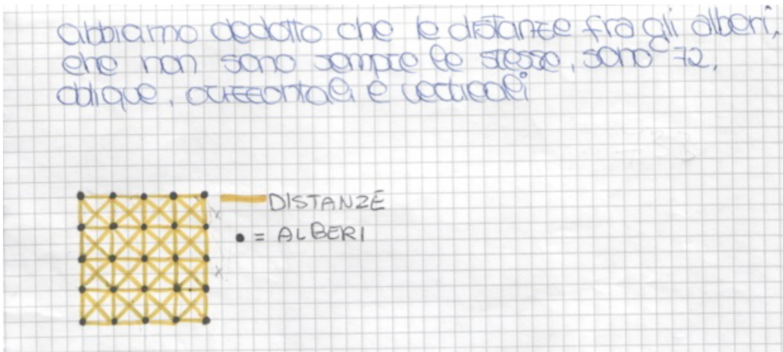
Répondez vous aussi à cette question.

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

Les erreurs, de natures différentes, trouvaient cependant une origine commune dans la difficulté de la comparaison des longueurs sans utiliser les instruments de mesure habituels, en s'appuyant sur l'observation des « composantes » verticale et horizontale des segments.

En passant on a encore pu constater que le mot « distance » utilisé dans la question *« Combien existe-t-il de distances différentes entre deux arbres de ta plantation ? »* a deux acceptions : celle du professeur de mathématiques comme « mesure d'une longueur de segment » et celle de nombreux élèves comme « chemin », « segment », « parcours ».

Un exemple révélateur, tiré d'une copie de catégorie 7, est le suivant:



(Nous avons trouvé que les distances entre les arbres, qui ne sont pas toujours les mêmes, sont au nombre de 72, obliques, horizontales et verticales)

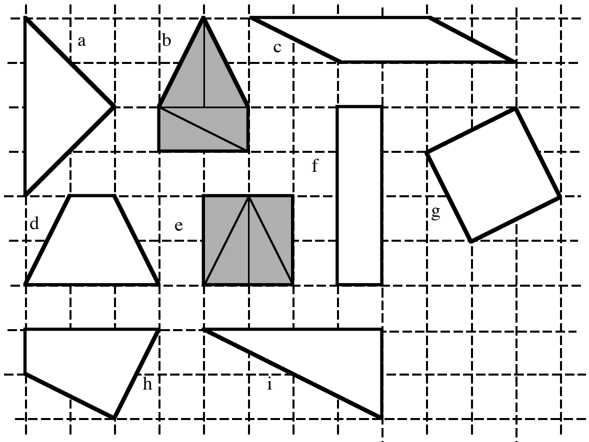
où l'on affirme qu'il y a 72 distances : tous les segments possibles qui relient horizontalement, verticalement ou en diagonale deux points voisins du quadrillage, sans se référer à leur mesure.

1.4. La famille des segments de composantes 1 ; 2

Les difficultés observées sur des côtés et diagonales de carrés ont conduit à la création de nouveaux problèmes où entrent en jeu des diagonales de rectangles du quadrillage de 1 x 2. Les triangles rectangles correspondants ne sont plus isocèles comme les demi-carrés, mais ils semblent facilement identifiables: un des côtés de l'angle droit vaut le double de l'autre. C'est une figure qu'on rencontre fréquemment dans les problèmes de construction, de superpositions ou de puzzles.

Les problèmes 2 et 8 de la finale du 15e RMT (2007) ont fait apparaître de nouvelles difficultés.

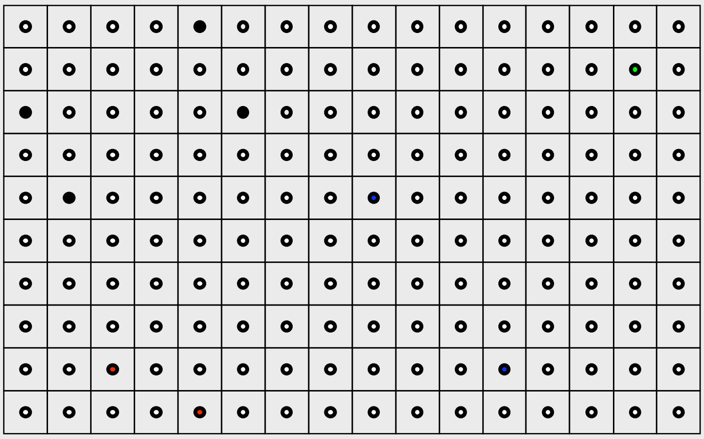
Il s'agit de savoir s'il est possible de recouvrir des figures (a, c, d, f, g, h, i) avec quatre triangles rectangles (demi-rectangles de 2 x 1), selon les deux exemple (b et e).



Une majorité des élèves (environ les trois quarts) sont arrivés à recouvrir les figures c d et f, ils n'étaient plus que la moitié pour les figures h et i, mais surtout, une grande partie a recouvert les figures a et g avec des triangles, sans constater qu'ils étaient différents des autres.

Un autre problème, de la finale internationale de 2008, « La table à déplacer » met encore une fois en évidence les difficultés liées à la conservation des longueurs, combinées avec celles relatives à la conservation de l'angle droit.

La table à déplacer



Ce dessin représente le sol de la cuisine de Julie avec des petits cercles au centre de chaque carreau.

Julie a remarqué une chose étonnante : dans certaines positions, les quatre pieds de la table de cuisine recouvrent exactement quatre petits cercles du carrelage.

Julie place tout d'abord la table dans une certaine position, avec les quatre pieds qui recouvrent exactement les quatre cercles marqués en noir sur le dessin (en haut à gauche).

Julie la déplace de manière que les quatre pieds de la table recouvrent exactement quatre autres cercles. Deux de ces cercles sont marqués en rouge sur le dessin.

Marquez en rouge les deux autres cercles recouverts par les deux autres pieds de la table dans cette deuxième position.

… (suivent encore deux demandes de déplacements successifs de la table dont la position de un ou deux pieds est notée)

Les premières analyses des résultats ont en effet révélé un très gros obstacle dans la distinction entre rectangle et parallélogramme, dû à la non conservation de l'angle droit ou des longueurs d'une paire des côtés parallèles (des segments de composantes 2 et 4 qu'on retrouvera par la suite). De nombreuses expérimentations successives ont montré que l'obstacle subsiste bien au-delà des niveaux 4 et 5 où le problème a été traité à l'origine. Les analyses de Jaquet (2009) et Anselmo et al. (2011) en témoignent.

Les mêmes difficultés se retrouvent dans un problème, "Les dix points", (présenté en annexe) proposé par la première épreuve du 18^{e} RMT (2010) dans le cadre des expérimentations issues des analyses du problème « La table à déplacer ».

Les dix points

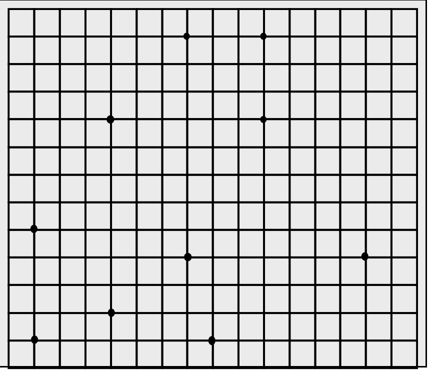
Il y a dix points marqués sur la grille dessinée ici.

François en a trouvé quatre qui sont les sommets d'un rectangle.

Trouvez ces quatre points, dessinez le rectangle en rouge et expliquez pourquoi vous pensez que c'est un rectangle.

Anne dit qu'on peut dessiner plus d'un rectangle dont les sommets sont quatre des dix points donnés.

Qu'en pensez-vous ?



Dans la suite de cette « longue histoire » qui n'est pas terminée, un nouveau problème « Découpages de triangles » a été élaboré pour la deuxième épreuve du 19° RMT, (2011) dans cette succession de problèmes sur quadrillage.

On s'intéresse cette fois-ci aux longueurs de segments dont les sommets sont des nœuds du quadrillage, de composantes 2 ; 4 (ou 4 ; 2) et puisque l'angle droit n'est plus au centre de nos préoccupations pour ce problème, on peut passe à d'autres figures que les carrés et les rectangles : les triangles isocèles.

2. Le problème « Découpage de triangles »

Découpage de triangles

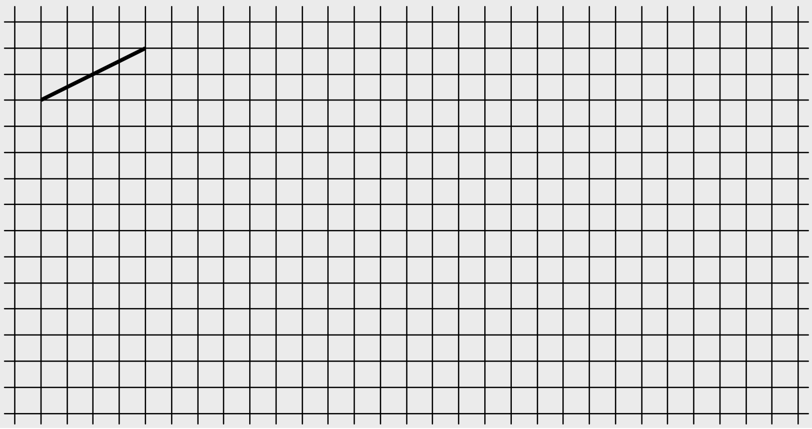
Christine découpe des triangles dans une feuille quadrillée. Tous ses triangles ont :

- deux côtés de même longueur que le segment déjà dessiné dans le quadrillage ci-dessous ;
- tous leurs sommets sont sur des points d'intersection du quadrillage.

Combien Christine peut-elle découper de triangles différents ?

(Qu'elle ne peut pas superposer après les avoir découpés.)

Dessinez-les tous sur le quadrillage ci-dessous.



Ce problème fait appel aux notions de géométrie plane : angles, triangles isocèles, figures isométriques,

Pour le résoudre, les élèves doivent comprendre les conditions à respecter dans leur recherche :

- les triangles doivent être isocèles ;
- les côtés isométriques sont de même longueur que le segment indiqué ;
- les sommets sont des points d'intersection du quadrillage ;
- les triangles doivent être tous différents (non isométriques).

L'analyse a priori de la tâche de l'élève a pu s'appuyer sur les observations de la longue série de nos problèmes sur quadrillage qui ont permis d'envisager de formuler plusieurs hypothèses sur les difficultés et obstacles :

- la perception de la longueur du segment donné comme celle de la diagonale d'un rectangle 2 x 4 du quadrillage dont la mesure est prise « indirectement » (ou sans la règle qui ne donne pas une mesure suffisamment précise ;

- la distinction entre le côté et la diagonale d'un carré du quadrillage (apparue dans le problème déjà cité « La traversée du quadrillage » in Crociani, 2001) étendue ici à celle entre le côté le plus long et la diagonale du rectangle ;
- la reconnaissance de triangles isométriques dans des positions différentes (en réponse à la question « Combien peut-elle découper de triangles différents ») avec la précision « Qu'elle ne peut pas superposer après les avoir découpés » mettant en jeu les isométries comme déplacements effectifs ;
- la conservation de la longueur donnée dans des positions différentes, dans la suite de l'étude « Le rectangle… pas si évident » titre symptomatique des difficultés à reconnaître non seulement les angles droits mais aussi les longueurs des côtés (Anselmo et al. 2011) :
- les habitudes « scolaires » dans la disposition des triangles isocèles : avec la « base » horizontale ou verticale.

Cette analyse a aussi tenu compte d'autres travaux (ex., Vighi, 2005) où des élèves, plus jeunes, doivent chercher la position du troisième sommet d'un triangle isocèle sur quadrillage dont l'un des deux côtés isométriques est déjà dessiné.

3. Analyse a posteriori du problème « Découpages de triangles »

Ce problème a été proposé en catégories 6, 7 et 8 et s'est avéré plutôt difficile.

3.1 Les résultats

Les critères de « l'attribution des points » du problème, déterminés lors de l'analyse a priori du problème sont les suivants :

4 Réponse correcte : 5 triangles avec dessins bien disposés dans le quadrillage, avec les bonnes dimensions

3 Réponse avec un seul oubli ou une répétition (triangle isométrique à l'un des précédents) ou une erreur (triangle non conforme aux demandes : non isocèle ou avec des sommets qui ne sont pas des points d'intersection du quadrillage)

2 Réponse avec deux oublis ou deux répétitions ou deux erreurs

1 Réponse avec trois oublis ou trois répétitions ou trois erreurs

0 Un seul triangle correct ou incompréhension du problème

Les pourcentages des points attribués sont donnés: *(Tableau 1):*

Points attribués	0	1	2	3	4	N. classes	*m*
Catégorie 6	55%	23%	11%	8%	2%	897	0,8
Catégorie 7	43%	22%	11%	15%	9%	747	1,3
Catégorie 8	38%	18%	14%	17%	13%	533	1,5
Total	47%	21%	12%	13%	7%	2177	1,1

Tableau 1: Pourcentages des points attribués (de 0 à 4) aux 2177 copies de 23 sections pour le problème. *Découpage de triangles*, *m* : moyennes des points

Le pourcentage très élevé de « 0 point », dans toutes les catégories, et les moyennes très basses (de 0,8 à 1,5 points, sur 4) nous ont conduit à nous interroger sur les causes de ces échecs.

Une des hypothèses, formulée précédemment, sur les obstacles que peuvent rencontre les élèves concerne les positions des triangles isocèles, « privilégiés » (avec la « base » horizontale ou verticale) ou non. Son examen a fait l'objet d'une seconde phase de l'analyse a posteriori, selon l'inventaire suivant des différentes positions possibles des triangles : (Figure 1)

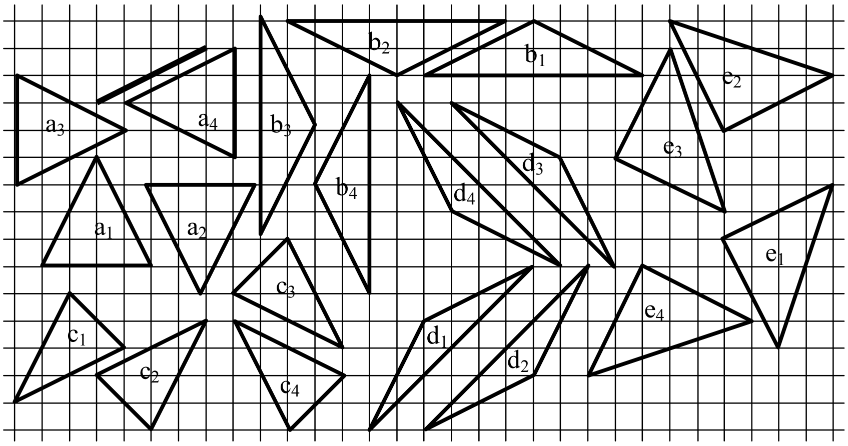


Figure 1. Les positions que peuvent occuper chacun des cinq triangles (a, b, c, d, e) découverts par les élèves et, en trait gras, la position de segment donné dans l’énoncé du problème

Dans cet inventaire, on distingue:

- les triangles isocèles aux angles aigus avec un côté horizontal ou vertical

a_1 en position traditionnelle (ou « privilégiée »)

a_2 en position « sur la pointe »

a_3 avec un côté vertical à gauche et un autre parallèle au segment « modèle »

a_4 avec un côté vertical à droite et un autre parallèle au modèle

- les triangles isocèles avec un angle obtus et un côté horizontal ou vertical

b_1 en position « privilégiée » et un autre côté parallèle au modèle

b_2 en position « sur la pointe » et un autre côté parallèle au modèle

b_3 côté vertical à gauche sans côté parallèle au modèle

b_4 côté vertical à droite sans côté parallèle au modèle

- les triangles isocèles aux angles aigus c_1, c_2,, c_3, c_4 (les deux premiers avec un côté parallèle au modèle)

- les triangles isocèles avec un angle obtus d_1, d_2,, d_3, d_4 (les deux premiers avec un côté parallèle au modèle)

- les triangles rectangles e_1, e_2,, e_3, e_4 (les deux premiers avec un côté parallèle au modèle).

L’examen des copies de la section de Siena, dont le nombre de classes participant au 19e RMT est suffisant pour obtenir des données significatives (401 copies examinées, dont respectivement 155, 140 et 106 de catégories 6, 7 et 8) apporte des réponses claires aux question relatives à la position des triangles obtenus (*Tableau 2*).

	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	c_4	d_1	d_2	d_3	d_4	e_1	e_2	
Cat.6	43	7	18	48	99	14	4	4	5	11	2	3	1	1	1	1	17	9	288
Cat.7	43	4	11	32	88	9	2	7	6	11	3	6	7	1	0	5	26	7	268
Cat.8	40	9	12	36	59	12	3	3	3	12	1	8	7	1	3	6	19	13	247
Total	**126**	20	41	**116**	**246**	35	9	14	14	34	6	17	15	3	4	12	62	29	803
en %	**31**	5	10	**29**	**61**	9	2	3,5	3,5	8,5	1,5	4	3,8	0,7	1	3	15	7	
	a				**b**				**c**				**d**				**e**		
Total	**303 / 76 %**				**304 / 76 %**				71 / 18%				34 / 8%				91/ 23%		803

Tableau 2. Occurrence des triangles trouvés selon l’inventaire de la figure 1

L’examen du tableau 2 fait apparaître des tendances très nettes.

- Parmi les triangles trouvés, les trois quarts (76%) sont dans l’une des positions privilégiées avec la « base » horizontale ou verticale (a ou b de la dernière ligne)
- Au sein de ces catégories générales, on remarque que, sur les 401 copies au total, le triangle avec un angle obtus, un côté parallèle au modèle et la « base » en bas (b_1) apparaît 246 fois, c’est-à-dire dans

61% des classes alors que le même triangle, mais avec la « base » en haut (b_2) n'apparaît que 35 fois (9%).

Pour les triangles avec un angle aigu et la « base » horizontale, celle-ci est en bas (a_1) dans 126 copies (31%) et en haut (a_2) dans 20 copies (5%) seulement. On trouve en revanche beaucoup de triangles isométriques avec la « base » verticale, mais la fréquence des dispositions varie sensiblement selon la position du côté parallèle au modèle : on le trouve dans 116 copies (29%) lorsque le modèle est en haut (a_4) et dans 41 copies seulement (10%) lorsqu'il est en bas (a_3). Les mêmes considérations sont valables pour les triangles de type b_3 et b_4.

- Il faut encore relever les faibles occurrences des autres types de triangles : 91 (23%) triangles rectangles avec un côté parallèle au modèle, dont 62 au-dessous (e_1) et 29 au-dessus(e_2) et aucun triangle rectangle sans côté parallèle au modèle (e_3 et e_4) ; 71 (18%) triangles de type c dont la moitié avec un côté parallèle au modèle placé en haut (c_2) ; seulement 34 (8%) triangles de type d.
- Les observations ci-dessus sont valables pour chacune des catégories 6, 7 et 8.

D'une manière générale, les facteurs qui influencent la « découverte » des triangles sont, dans l'ordre :

- la « position privilégiée » d'un triangle isocèle, héritée d'images traditionnelles scolaires ou culturelles comme « le toit », le « fanion » (Marchini et al., 2002) ;
- le segment dessiné ; (les élèves n'ont pas pris en compte la « longueur » mais plutôt la figure et sa position dans la phrase de l'énoncé « deux côtés de même longueur que le segment déjà dessiné dans le quadrillage ci-dessous ») ;
- les habitudes de lecture et de dessin de gauche à droite et de haut en bas (on dessine un segment dans la position du modèle en haut à gauche de l'espace disponible sur la feuille et l'on continue à droite et au-dessous). À ce propos, la position du modèle de segment, en haut à gauche a semble-t-il joué un rôle important dans la découverte des triangles de chacun des types a, b, c, d et e : en plaçant le premier côté du triangle sur le modèle, la place disponible sur la feuille ne permettait qu'une construction : a_4 (116) plutôt que a_3 (41), b_1 (246) plutôt que b_2 (35), c_2 (34) plutôt que c_1 (14), d1 (15) plutôt que d_2 (3), a_1 (116) plutôt que a_3 (31).

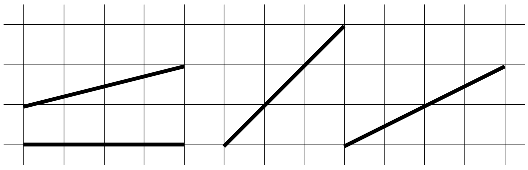
Au-delà de ces aspects connus et attendus en quelque sorte, les moyennes très basses des points obtenus sont aussi dues à la fréquence plutôt élevée de trois typologies d'erreurs.

3.2. Erreurs caractéristiques

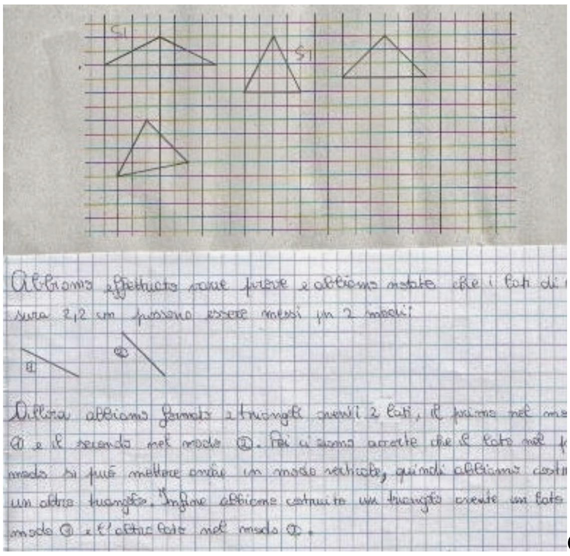
Parmi les trois typologies qui seront décrites par la suite, la plus significative est celle qui est relative aux difficultés liées à la conservation des longueurs, comme nous l'avions déjà relevé, en particulier dans le problème « La table à déplacer ».

3.2.1. Erreur dans la détermination de l'isométrie de segments (on considère comme isocèles des triangles qui ne le sont pas)

L'erreur consiste à considérer comme isométriques des segments qui ne le sont pas, comme, par exemple, tous ceux qui sont marqués en gras ci-dessous (soit en diagonale, soit le long du quadrillage):



Dans quelques copies, on arrive à cette conclusion en se référant explicitement à la mesure :

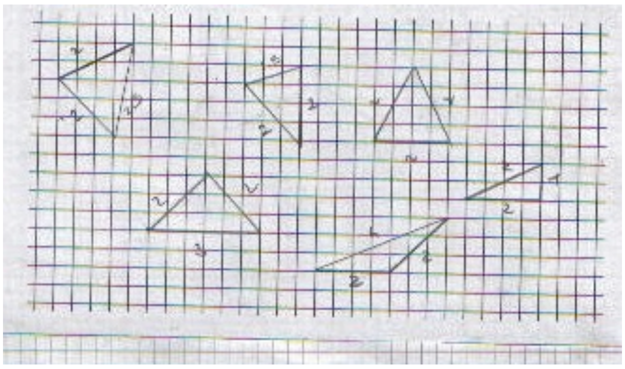

Cat. 7

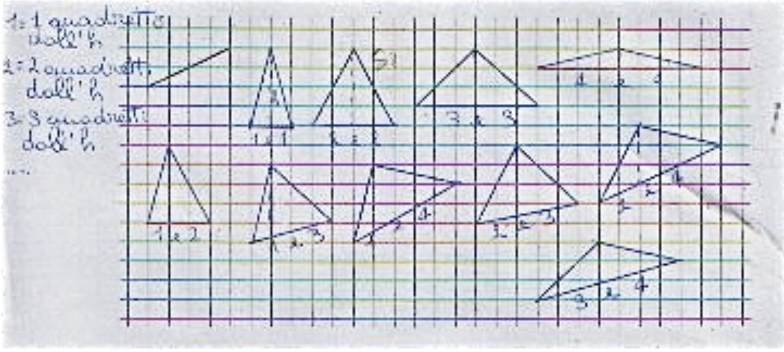
(*Nous avons effectué plusieurs essais et avons remarqué que les côtés de mesure 2,2 cm peuvent être placés selon deux dispositions (1 et 2). Alors nous avons formé 2 triangles ayant 2 côtés, le premier dans la disposition 1 et le second dans la disposition 2. Puis nous nous sommes rendu compte que le côté dans la première disposition peut se mettre aussi verticalement, et nous avons donc construit un autre triangle. Enfin nous avons construit un triangle ayant un côté dans la disposition 1 e l'autre dans la disposition 2*).

Dans d'autres cas, il semble qu'on compte les carrés de la grille « concernée » par le segment (exemples dans la première et la troisième figure reportée ci-dessous, les segments mis en évidence sont considérés comme isométriques parce qu'ils font intervenir 4 carrés) ou qu'on estime « à l'œil ». Il semble qu'en aucun cas le quadrillage ne suggère une référence aux triangles rectangles et par conséquent au théorème de Pythagore.

Cette typologie d'erreur est présente dans toutes les catégories, avec une fréquence plus faible en catégorie 8:

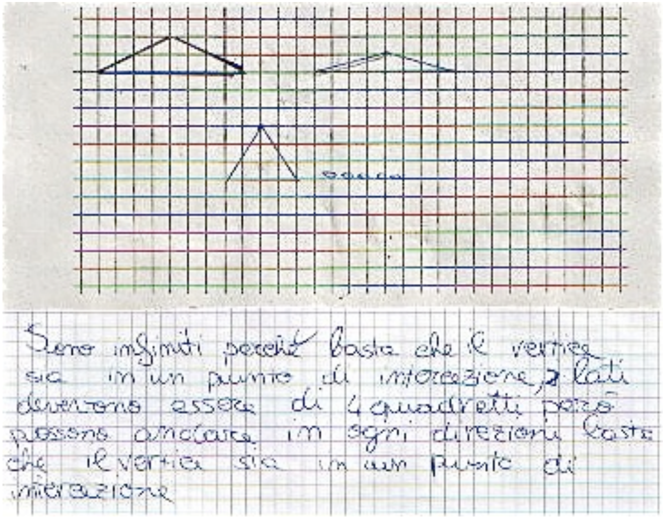
- catégorie 6: 47%,
- catégorie 7: 44% ,
- catégorie 8: 26%.


Cat. 7



Cat. 8

La non conservation des longueurs a aussi conduit aux réponses qui donnent une infinité de triangles isocèles ayant leurs sommets sur des points d'intersection du quadrillage. Les réponses de ce type sont nombreuses, mais on les retrouve dans chacune des trois catégories. En voici un exemple :

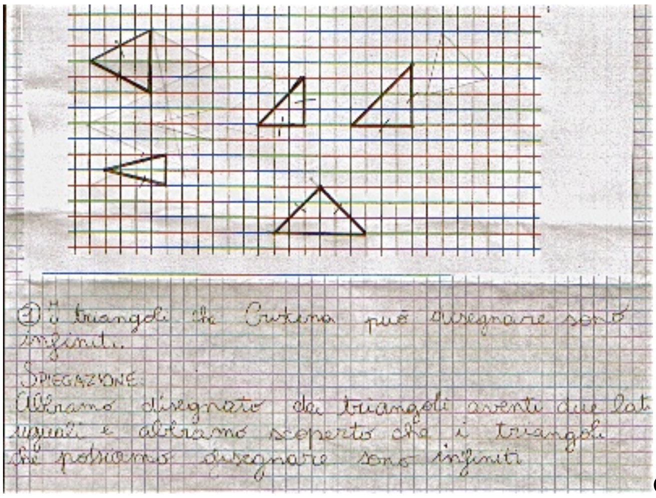


Cat. 6

(*Il y en a une infinité parce qu'il suffit que le sommet soit un point d'intersection, 2 côtés doivent être de 4 carrés, mais on peut aller dans n'importe quelle direction, il suffit que le sommet soit un point d'intersection.)*

3.2.2. Réponses dans lesquelles les triangles dessinés ne tiennent pas compte de la première contrainte

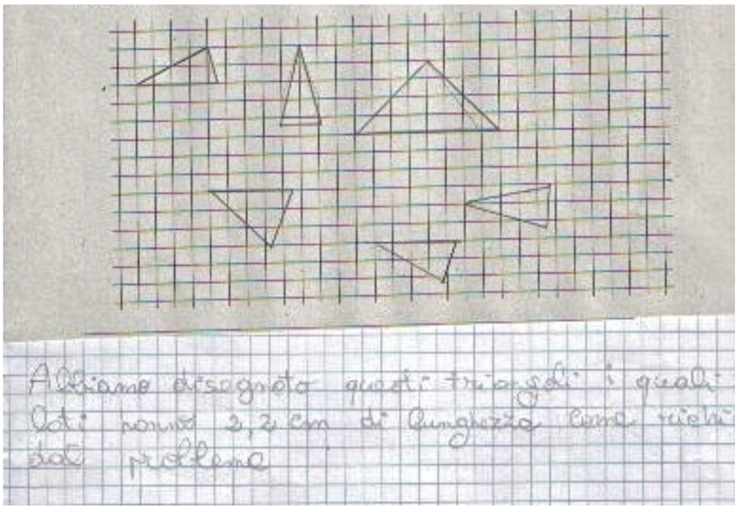
Ces copies ne tiennent pas compte de l'isométrie avec le segment dessiné sur la grille, à l'exception des cas ou le triangle est dessiné directement sur ce segment (à moins que l'on ne commette pas l'erreur décrite au point 3.2.1).



Cat. 7

(2- Il y a un nombre infini de triangles que Cristina peut dessiner.
EXPLICATION. Nous avons dessiné des triangles ayant deux côtés égaux et avons découvert qu'il y a un nombre infini de triangles que nous pouvons dessiner.)

Il y a aussi des copies dans lesquelles se trouvent plusieurs typologies d'erreurs simultanément :



(Nous avons dessiné ces triangles dont deux côtés sont de 2,2 cm de longueur comme nous le demande l'énoncé du problème).

3.3.3. Pavage

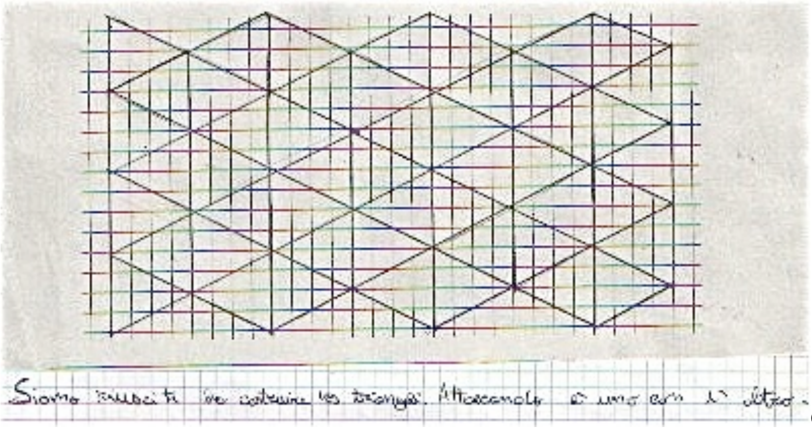
Le quadrillage est entièrement recouvert de triangles isocèles (seulement de types a_3, a_4 ou b_1, b_2) qui sont comptés comme s'il s'agissait de pièces d'un pavage.

Ce type d'erreur est de nature complètement différente des précédents. Il ne s'agit plus de mesure des longueurs mais d'une incompréhension de l'énoncé.

En effet, on pourrait penser que le pavage soit l'interprétation donnée par les élèves à l'expression "*Qu'elle ne peut pas superposer après les avoir découpés*". Dans quelques copies, ce pavage met en évidence des triangles de types différents le long des bords. Peut-être que les élèves ont interprété "triangles différents" comme triangles qui se distinguent du modèle utilisé pour le pavage.

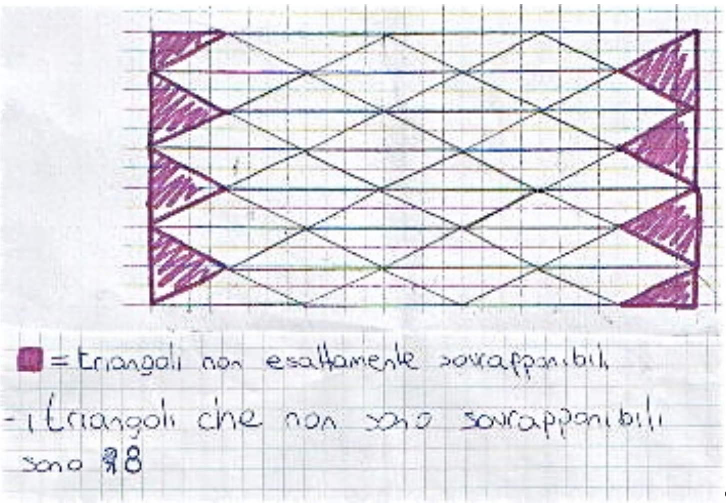
Cette typologie d'erreur est présente dans toutes les catégories, avec des fréquences comparables :

- catégorie 6: 10% des copies),
- catégorie 7: 9% des copies,
- catégorie. 8: 11% des copies.

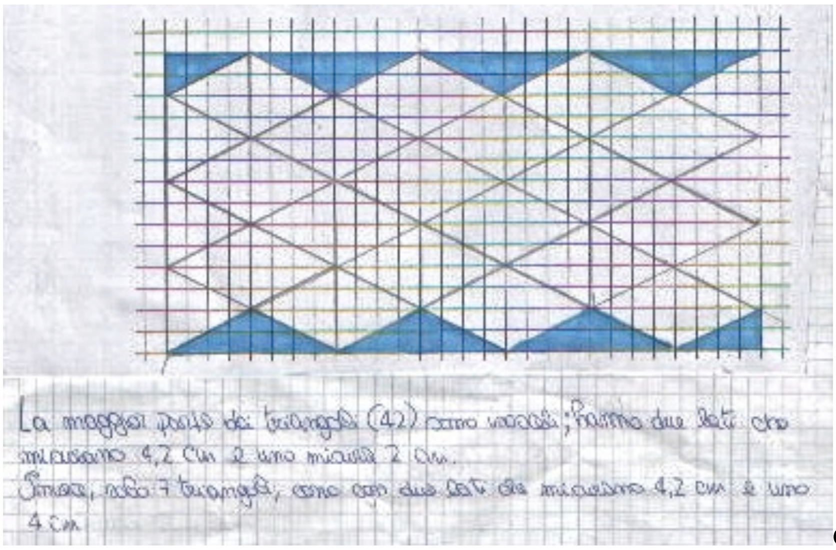


Cat. 6

(*Nous avons réussi à construire les triangles en les collant l'un contre l'autre*).

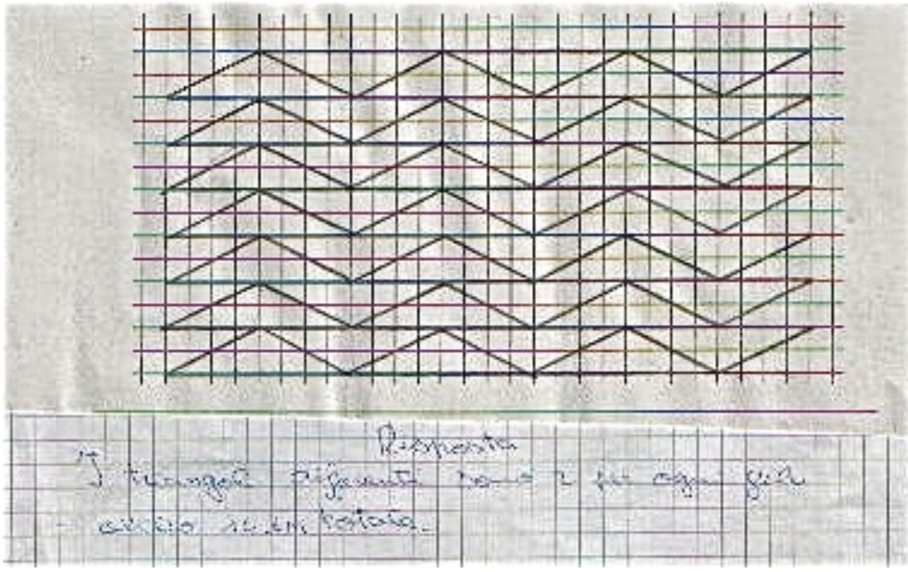


Cat. 7



Cat. 8

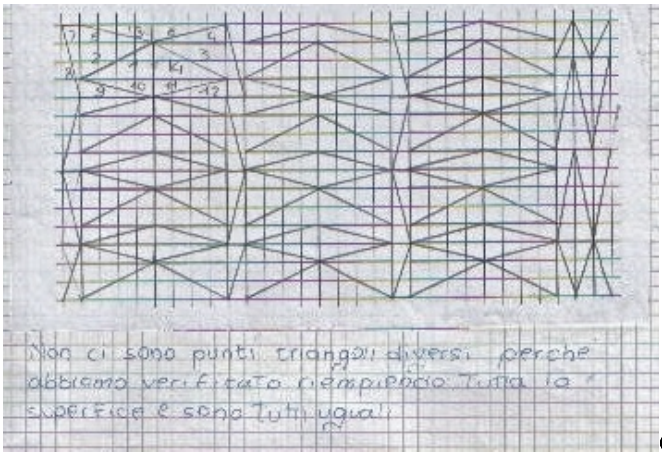
(*La majeure partie des triangles (42) sont isocèles; ils ont deux côtés qui mesurent 4,2 cm et un mesure 2 cm. En revanche, 7 triangles seulement, ont deux côtés qui mesurent 4,2 cm et un 4 cm*).



Cat. 8

(*Réponse. Il y a 2 triangles différents par ligne, c'est-à-dire,14 au total)*.

Un type encore différent de pavage est le suivant :



Cat. 6

(*Non ci sono punti*[39] *triangoli diversi … Il n'y a pas de triangles différents parce que nous avons vérifié en remplissant toute la surface, ils sont tous égaux*).

4. Quelques observations en conclusion

L'analyse du problème « La table à déplacer »"[40] avait bien mis en évidence certaines difficultés dans la reproduction d'une figure donnée sur quadrillage, dont l'une est certainement la non conservation de l'angle droit, Une autre difficulté est celle, comme dans le cas du problème « Découpage de triangles » qui se rapporte à la non conservation des longueurs et a fait apparaître des « tables » (rectangles) qui deviennent des parallélogrammes non rectangles, ne conservant pas les dimensions du rectangle de départ. L'objet idéal « table » a été perdu de vue. En effet, comme le montrent Anselmo et al., les difficultés subsistent, même si l'on présente des variantes du problème d'origine (où la table en 3D est remplacée par un tapis en 2D), avec ou sans quadrillage.

Le problème « Combien de distances » a mis en évidence de manière incontestable la difficulté de comprendre que sur des lignes de points (horizontales, verticales ou obliques) on peut trouver de nombreux couples de points équidistants. Elle est peut-être due à la difficulté de trouver une stratégie opportune pour évaluer le distances entre deux points, là où il est nécessaire de confronter des segments « horizontaux » ou « verticaux avec des segments « obliques ».

---

[39] En Toscana, l'espressione "non ci sono punti triangoli" signifie di "il n'y a aucun triangle".

[40] Voir les ouvrages déjà cités: Anselmo et al. (2011) et Jaquet (2009).

La question relative aux obstacles liés à la conservation des longueurs ne doit pas être négligée dans l'enseignement et apprentissage de la géométrie par les implications que ces difficultés jouent dans le processus correct de construction des concepts géométriques.

Un problème comme « Découpage de triangles » permet, comme les précédents, de mettre en lumière des obstacles caractéristiques à propos de notions qui sembleraient acquises comme le triangle isocèle, la position et l'isométrie de segments. On observe clairement que l'image du triangle isocèle des élèves est celle d'une figure de trois côtés dont l'un est horizontal et les deux autre, isométriques, sont obliques. Il s'agit d'une figure symétrique avec un axe vertical (dans le sens de Lismont & Rouche, 2001), où l'objet de référence est le « toit » (ex. Marchini et al., 2002). Le terme « base » est interprété non seulement comme horizontal mais aussi « en bas ». Le modèle « fanion » (aussi cité chez Marchini et al.), est beaucoup moins fréquent..

À propos de la recherche des autres positions du segment de référence, il semble qu'on soit en présence d'une difficulté d'un autre genre : la conception de ce segment comme une des diagonales d'un rectangle de 2 x 4 ou d'un vecteur de composantes 2 et 4 (Vighi, 2005). Pour trouver les différentes positions de ce segment il est nécessaire de comprendre que « 4 pas vers la droite et 2 pas vers le haut » représentent un déplacement de même longueur que « 2 pas vers la droite et 4 pas vers le haut » par commutativité, ou encore « 2 pas vers la gauche et 4 pas vers le bas » par inversion entre droite et gauche et entre haut et bas, etc.

Les questions qui se posent du point de vue didactique sont multiples.

Est-il possible de « lutter » contre la prédominance de certaines images mentales associées au triangle isocèle ? Comment? Serait-il suffisant d'éliminer le terme « base » et de ne pas dessiner systématiquement le triangle isocèle avec un côté horizontal ?

Pour préparer le concept de module d'un vecteur, faut-il attendre le « Théorème de Pythagore ou proposer des activités de mesure effective …? Si quelques élèves pensent que la diagonale d'un carré vaut la moitié de son côté (voir l'exemple de « La traversées du quadrillage »), si d'autres pensent que tous les rectangles dont une dimension a 4 cm de longueur ont des diagonales de la même longueur, il y a quelque chose qui ne fonctionne pas à propos du sens qu'on attribue en classe aux termes « longueur », « distance », « isométrie ».

L'histoire de cette famille de problèmes, déjà longue, n'est pas finie ; elle sera complétée par d'autres problèmes qui cerneront de plus en plus près les obstacles et difficultés rencontrées par les élèves, afin de les décrire aussi de plus en plus précisément aux maîtres.

Lorsque ceux-ci verront apparaître les réponses erronées de leurs élèves, ils ne les traiteront plus comme des fautes, mais comme des difficultés « naturelles » qu'on ne peut surmonter qu'en engageant des débats, des confrontations et des remises en question de concepts à retravailler pour atteindre un niveau plus élevé de construction.

Bibliographie

Anselmo B., Bisso C., Grugnetti L. (a nome del gruppo geometria dell'ARMT): 2011, 'Il rettangolo…non così evidente', *La Gazzetta di Transalpino*, n. 1.

Crociani C., Salomone L.: 2001, 'Un problème di type geometrico: *Attraverso la quadrillage*', in Grugnetti, Jaquet, Crociani, Doretti, Salomone (Eds.) *RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici*, Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino, Siena 1999 - Neuchâtel 2000, Università di Siena, IRDP di Neuchâtel, 118-128.

Jaquet F.: 2009, 'La finale internationale du 16e RMT, problèmes et analyse', in L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds) *Rally Matematico Transalpino e intercultura*, ARMT, SCNAT, 225-253.

Marchini C., Rinaldi M.G., Bedulli M., Grugnetti L.: 2002, 'Tetti e bandiere', *Processi didattici innovativi per la Matematica nella scuola dell'obbligo*, Pitagora (Bo), 223-236.

Lismont L, Rouche N. (a cura di): 2001, *Forme et mouvements*, CREM.

Vighi P.: 2005, 'Measurement on the squared paper', in: Bosch, M., (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 4, Sant Feliou de Guixols (Spagna), 18-21/02/05, pp. 777-786, ISBN: 84-611-3282-3, [Copyright left to the authors in 2006], pubblicato su CD.

C'È PROBLEMA E...PROBLEMA[41]

Lucia Stelli

Premessa

Dall'anno scolastico 2003-04 è attivo nell'Istituto Comprensivo "G. Gamerra" di Pisa un laboratorio di progettazione/sperimentazione del curricolo di matematica, la cui genesi e articolazione è documentata nel Quaderno n° 10 sui curricoli verticali a cura del C.R.E.D. di Pisa e nella banca dati del Sistema Web-learning della regione Toscana (Progetto TRIO). Si tratta di un laboratorio di ricerca–azione che sperimenta varie modalità di approccio e di interazione con il **problema**.

Le situazioni problematiche a cui ci riferiamo non sono quelle comunemente rintracciabili nei testi scolastici, che chiedono l'applicazione di "classici" procedimenti illustrati dall'insegnante o dal manuale. In altre parole non si tratta di svolgere esercizi, ma di affrontare *problemi*, cercando vie risolutive personali che richiedono l'utilizzazione di conoscenze possedute.

L'abilità a risolvere problemi si costruisce gradualmente affrontando una serie di problemi "esemplari" secondo una metodologia laboratoriale centrata sul *cooperative-learning*.

Le fonti a cui facciamo riferimento per la ricerca dei problemi sono sia riviste di enigmistica che siti di varie Associazioni che organizzano gare matematiche.

Il laboratorio, frequentato dal 90% degli insegnanti di matematica dell'istituto, si articola nelle seguenti fasi: individuazione e selezione di problemi con specifiche caratteristiche; sperimentazione in classe; confronto e discussione dei risultati raccolti.

In base alle considerazioni desunte dalla sperimentazione e dall'analisi a posteriori degli elaborati degli alunni, vengono scelti i problemi che più si prestano a mettere in pratica una didattica del *problem solving* e a contribuire allo sviluppo di competenze matematiche. Tale didattica fa anche emergere le difficoltà dell'allievo, le sue emozioni e convinzioni, il modo in cui "vede" e "vive" l'attività di risoluzione dei problemi; si rivela quindi preziosa per l'insegnante che può così conoscere meglio i suoi alunni, capirli ed aiutarli a superare le difficoltà nell'apprendimento della matematica.

I problemi ritenuti 'buoni' per gli scopi suddetti, vanno a costruire un'antologia della scuola che si arricchisce di anno in anno; in questo modo ogni insegnante contribuisce alla costruzione di un repertorio ragionato di problemi che diventerà patrimonio condiviso dagli insegnanti della scuola.

Il gruppo di insegnanti del laboratorio è supportato dal professor Brunetto Piochi, docente di Matematica all'Università di Firenze, e dalla professoressa Rosetta Zan del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa.

Criteri per la scelta di un problema

I problemi che si prestano ad un'attività di *problem-solving* devono avere le seguenti caratteristiche:

- essere sufficientemente 'difficili' da non consentire una risposta immediata
- consentire a tutti gli allievi la possibilità di esplorare e di costruire percorsi anche parziali (in altre parole non devono essere del tipo 'tutto o niente')
- prevedere la possibilità di diversi approcci (grafico, manipolativo…) e di diversi processi risolutivi.

Modalità di lavoro sui problemi

In relazione agli obiettivi del progetto didattico si utilizzano varie modalità di lavoro: individuale, a coppie, a piccoli gruppi, l'intera classe.

I docenti del laboratorio concordano nel ritenere che la modalità più rispondente agli obiettivi del progetto risulta quella a coppie di livello omogeneo.

L'attività comunque non si esaurisce col seguire gli alunni mentre risolvono i problemi, ma include una fase di confronto che costituisce il vero momento dell'apprendimento; la classe deve infatti avere l'opportunità di conoscere e discutere le diverse strategie messe in atto, per avviare un'ulteriore riflessione metacognitiva: ci si può render conto in questo modo che per uno stesso problema esistono percorsi risolutivi diversi, si prende atto di altri modi di ragionare e si confrontano con il proprio, in definitiva si impara dal lavoro altrui.

---

[41] Conferenza tenuta al terzo convegno nazionale CIDI a Firenze.

Spesso uno stesso problema viene proposto a classi di livello diverso sia per capire il target più adatto che per indagare sulle diverse modalità di approccio; si constata che le risoluzioni cambiano con l'età dei risolutori secondo una gradualità che dal concreto procede verso l'astrazione. La conoscenza da parte degli alunni (e degli insegnanti) di tali modalità di pensiero permette di riconoscere il proprio stile cognitivo e quello altrui e allo stesso tempo di vedere l'apprendimento della matematica come un processo da tutti percorribile; ciò contribuisce ad avere fiducia in sé stessi e a superare la paura della matematica.

Esempi di attività sperimentate nelle classi

Il gruppo di ricerca-azione ha sperimentato vari problemi in diverse classi dell'istituto comprensivo; riporto due esempi scelti tra i più significativi, con l'intento di evidenziare attraverso le considerazioni degli insegnanti e le risposte degli alunni, le opportunità didattiche che tali proposte offrono.

Si tratta di due problemi tratti dalla raccolta del Rally Matematico Transalpino. Accanto al titolo tra parentesi è indicata con l'abbreviazione cat. (sta per categoria) la corrispondente classe di riferimento a partire dalla terza della scuola primaria. (Le categorie 6, 7, 8 corrispondono alle tre classi della secondaria di I grado).

PUZZLE DI RETTANGOLI (Cat. 3, 4, 5)

Luigi disegna su un foglio quadrettato un rettangolo e poi lo divide in tre rettangoli più piccoli:

- un rettangolo che contiene esattamente 5 quadratini della quadrettatura,

- un rettangolo che ne contiene 10,

- un rettangolo che ne contiene 15.

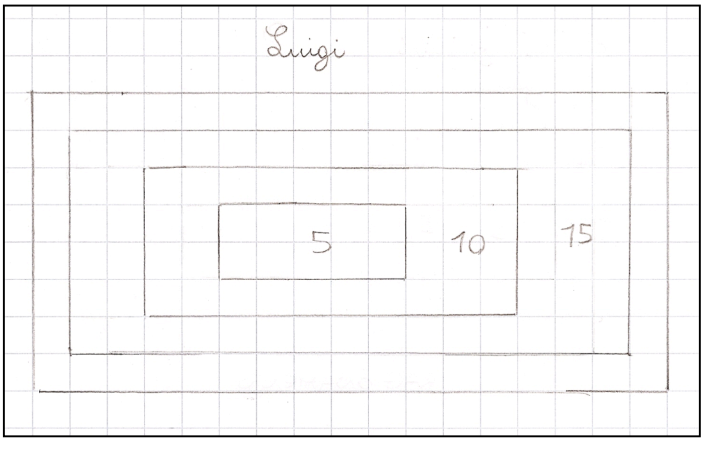
Giulia disegna un rettangolo diverso da quello di Luigi, ma anche lei riesce a dividerlo in tre rettangoli più piccoli di 5, 10 e 15 quadratini.

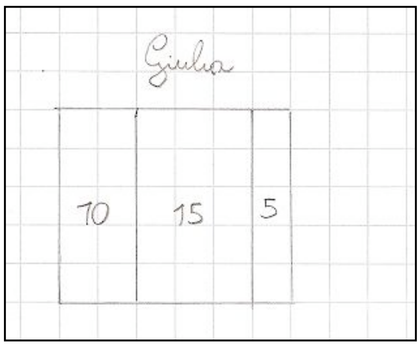
Quanti rettangoli differenti potete disegnare in modo da dividerli in tre rettangoli più piccoli di 5, 10 e 15 quadratini? Disegnali e spiega come hai fatto a individuarli.

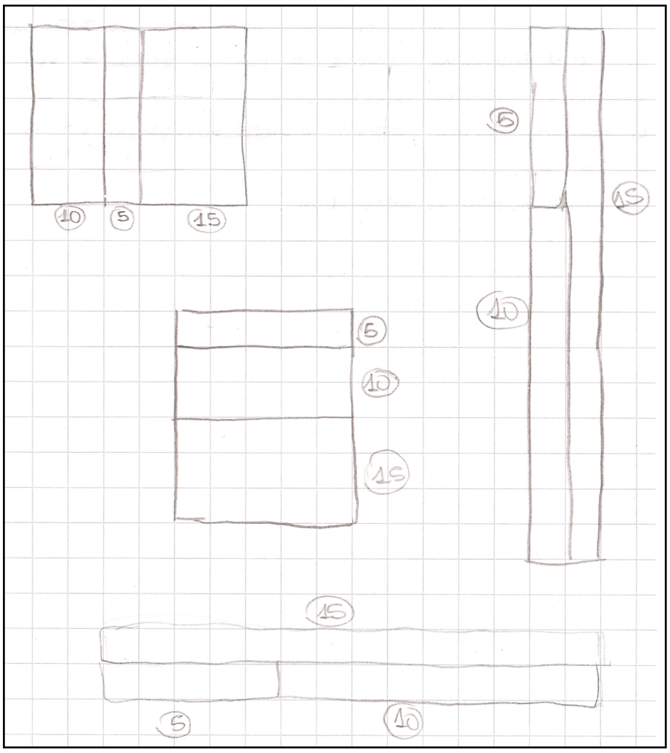
Per risolvere il problema è necessario capire che l'area del rettangolo grande resta invariata (30 quadratini) ma che i suoi lati possono assumere misure diverse, ottenute cercando i divisori di 30. Si può partire dalla ricerca delle coppie moltiplicative di 30, disegnare i 4 possibili rettangoli (1x30, 2x15, 3x10, 5x6) e poi operare su di essi con la suddivisione richiesta , oppure si può anche partire dai possibili rettangoli da 5 (5x1), da 10(10x1 e 5x2) e da 15 (15x1 e 5x3) e combinarli per formare i rettangoli grandi. I protocolli degli allievi dimostrano che la ricerca dei rettangoli non segue processi di pensiero così ben definiti, attestano comunque che vengono intraprese entrambe le strade, e una volta superate alcune difficoltà iniziali il problema viene risolto con successo da tutte le classi in cui è sperimentato (4^a e 5^a della scuola primaria e 1^a della secondaria).

E' stato prima proposto in tutte le classi quinte, poi nella classe 1^a e infine nella 4^a, ma in quest'ultimo caso il testo è stato modificato in alcune parti, in quanto gli stessi alunni avevano indicato due punti di criticità: ' i quadratini della quadrettatura' e i 'rettangoli differenti'.

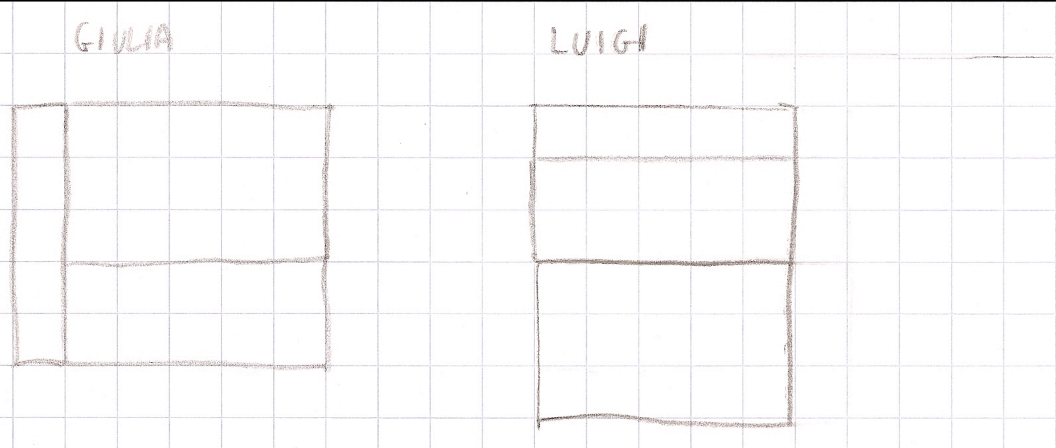
Ecco alcune interpretazioni che attestano le difficoltà rilevate:







ABBIAMO TROVATO 4 RETTANGOLI CON LA STESSA AREA MA TUTTI DIVERSI, CON POSIZIONI DIVERSE E CON LA POSIZIONE DEI RETTANGOLI DENTRO DIVERSO.
LI ABBIAMO TROVATI METTENDO INSIEME RETTANGOLI DA 5, DA 10 E DA 15.
ABBIAMO TROVATO 4 RETTANGOLI.



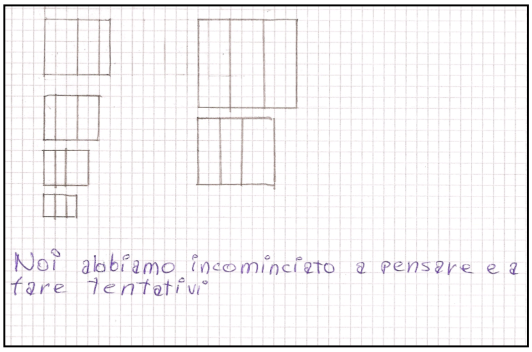
Abbiamo pensato che l'area dei due rettangoli fosse 30, abbiamo applicato la proprietà associativa (~~5+10+15~~=30) (5+10+15=15+15=30) e lo abbiamo diviso in 3 strisce una più grande dell'altra.
Abbiamo applicato lo stesso ragionamento per Giulia scambiando le strisce

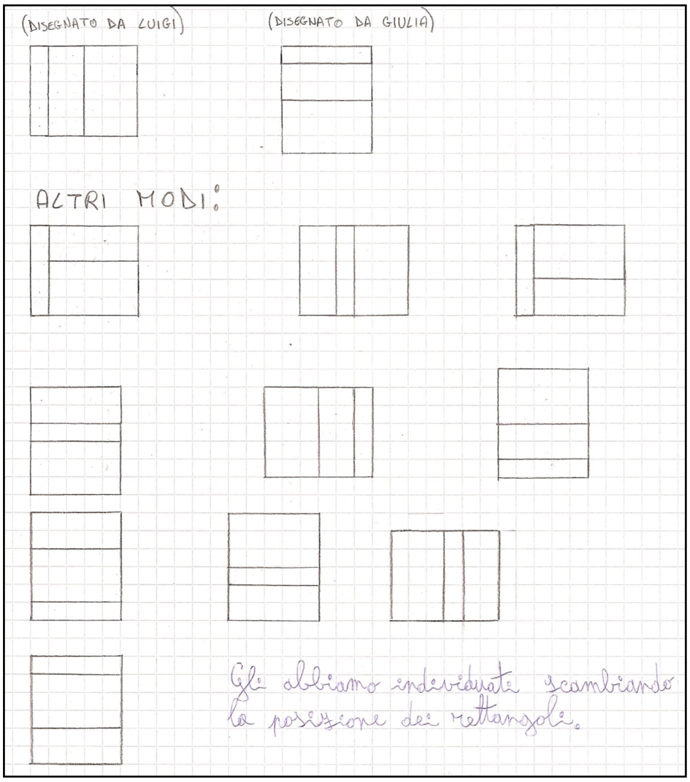
Da sottolineare il fatto che per molti alunni è importante indicare gli autori dei rettangoli; possono far sorridere frasi del tipo "abbiamo applicato lo stesso ragionamento per Giulia" o "abbiamo iniziato cercando quello di Luigi", ma non sono da ignorare.

Passaggi come questi fanno pensare che su certi alunni gli aspetti narrativi esercitano una maggiore attrattiva rispetto a quelli logici e che questi ultimi si fanno strada tra una moltitudine di tentativi. E' quindi necessario che gli insegnanti, osservando e interpretando le produzioni dei propri alunni, pongano maggiore attenzione alla formulazione del testo per fare in modo che il problema riesca a stimolare proprio quei processi su cui vogliamo far lavorare gli allievi.

Abbiamo iniziato cercando quello di Luigi, e poi con alcuni tentativi abbiamo trovato anche quello di Giulia. Poi dopo ci siamo messi e con molti tentativi abbiamo trovato anche gli altri

Come si evince dai seguenti esempi, anche nella scuola secondaria la comprensione del testo ha presentato delle difficoltà:





I docenti hanno pertanto pensato di riformulare il testo prima di proporlo in una classe quarta.

PUZZLE DI RETTANGOLI (Cat. 3, 4, 5)

Durante l'ora di geometria la maestra ha chiesto alla classe di disegnare sul quaderno a quadretti un rettangolo che può essere scomposto in tre rettangoli più piccoli:

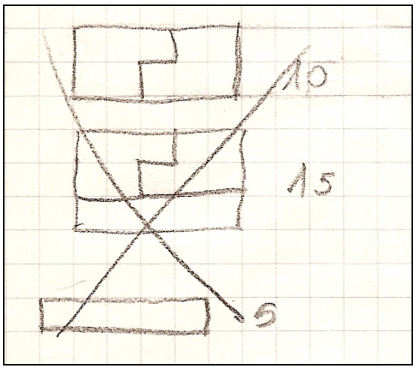
- un rettangolo che contiene esattamente 5 quadretti,
- un rettangolo che ne contiene 10,
- un rettangolo che ne contiene 15.

Giulia e Luigi che sono accanto di banco si accorgono alla fine del lavoro di aver disegnato due rettangoli diversi, ma ambedue giusti.

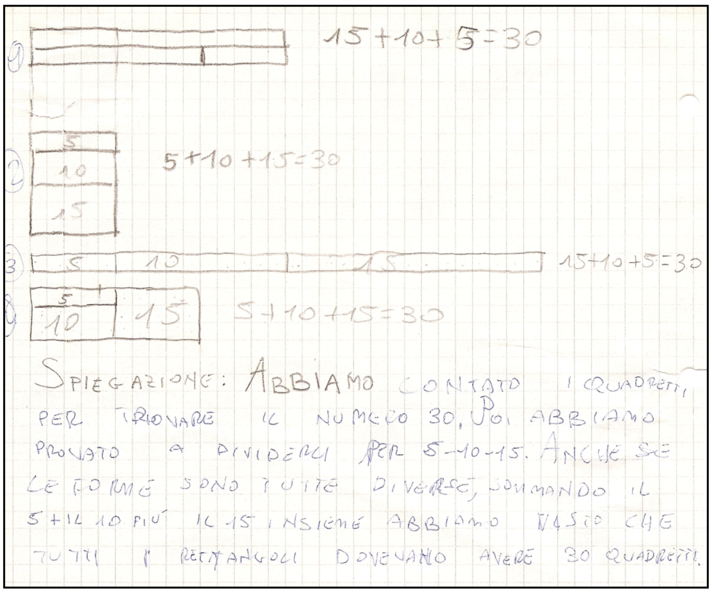
Quali rettangoli possono aver disegnato Giulia e Luigi?

Disegnali e spiega come hai fatto a trovarli.

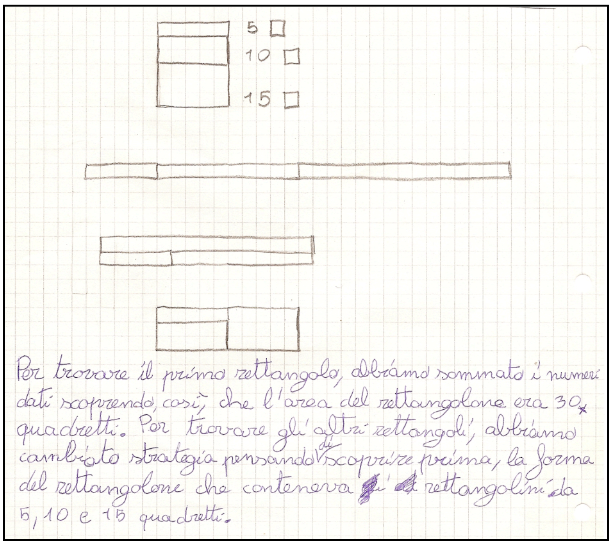
Anche in questa classe qualcuno non ha compreso inizialmente le condizioni del problema, e c'è chi ha pensato di dover suddividere ciascun triangolo di 5,10 e 15 quadratini in parti più piccole:



ma dopo opportuni orientamenti mirati a chiarire le relazioni tra i vari rettangoli, è pervenuto alla risoluzione corretta:



Ma c'è anche chi non ha avuto bisogno di suggerimenti, ha ben compreso il testo si è orientato strada facendo...



La riformulazione del testo forse ha facilitato l'approccio al problema (saranno necessarie ulteriori sperimentazioni per verificarlo e probabilmente l'esperienza ci porterà ancora a modificare il testo), ma è un fatto certo che nella classe quarta l'attività di *problem solving* non è una pratica occasionale. L'abitudine già dalla prima ad affrontare "buoni" problemi ha indubbiamente permesso agli alunni di questa classe di acquisire gradualmente strumenti logici e linguistici che altri ragazzi più grandi ancora non hanno; colpisce in particolare la chiarezza con cui viene spiegato il ragionamento seguito e poco importa se le figure non sono disegnate con precisione.

Di contro, nella scuola secondaria si assiste a una "rigidità" di pensiero e ad una povertà di linguaggio, che in considerazione dell'imprinting derivato dall'insegnamento ricevuto nella scuola primaria, rischiano di rimanere tali nonostante si verifichino cambiamenti di prospettiva.

La constatazione che l'attività del *problem solving* praticata con sistematicità fin dall'inizio della scuola primaria produce risultati come quelli qui descritti, può dare ampiamente ragione alla decisione di aver inserito nel curricolo questa modalità di "fare matematica".

I tempi necessari affinché questa attività diventi una prassi didattica diffusa pensiamo siano ancora lunghi, ma i riscontri ottenuti incoraggiano a proseguire su questa strada.

L'esempio che segue, trattato fino ad ora soltanto nella scuola secondaria, porta a riflettere ulteriormente sul fatto che il testo può essere di ostacolo alla comprensione del problema e conferma la necessità di affrontare situazioni problematiche di questo tipo già nella scuola primaria. Il concetto di rapporto e quello di proporzionalità sono infatti troppo importanti per essere affrontati soltanto nella classe seconda della scuola secondaria e in un ristretto periodo di tempo, ma hanno bisogno (come tutti i concetti fondanti) di una costruzione lenta e graduale. In quest'ottica, attraverso un percorso mirato a partire da diversificate situazioni problematiche sarà possibile pervenire col tempo al riconoscimento da parte degli allievi di una medesima struttura matematica.

Pulizie (Cat. 4, 5, 6)

I 18 alunni della classe di Marta e i 24 alunni della classe di Andrea hanno pulito la piazza del paese e le rive del ruscello.

Il panettiere è molto soddisfatto e per ringraziarli offre 14 pacchi di biscotti.

Marta propone che ogni classe prenda 7 pacchi.

Andrea dice che non è giusto perché nella sua classe gli alunni sono di più.

Quanti pacchi di biscotti deve ricevere ogni classe per non fare ingiustizie?

Spiegate il vostro ragionamento

Il problema è stato assegnato a singoli alunni, durante l'ora settimanale dedicata al *problem solving*, prima di introdurre il concetto di rapporto. L'intento era quello di far leva su un contesto coinvolgente per verificare se possedevano tale concetto a livello intuitivo; la divisione proposta da Marta, solo in apparenza equa, avrebbe dovuto motivarli a proporne una di tipo proporzionale.

Solo un paio di alunni su 15 hanno corrisposto alle aspettative, la maggior parte non ha saputo risolvere il problema ed alcuni hanno trovato il testo poco realistico. Secondo loro una persona "normale" non si sarebbe comportata come quel panettiere dando solo 14 scatole di biscotti, ma avrebbe dovuto esprimere la propria soddisfazione con un regalo più consistente. Qualcuno ha aggiunto che dopo tutto il lavoro fatto, gli alunni si sarebbero meritati almeno un pacco di biscotti a testa.

Dalle risoluzioni qui riportate si evince che prevale la tendenza a seguire il canale del pensiero narrativo piuttosto che quello logico. Tra tutte è interessante analizzare quella di Tommaso, che ha anche riformulato il testo. Si tratta di un ragazzino che eccelle nelle materie linguistiche e sostiene di non riuscire a matematica in quanto "geneticamente negato" - non riesce a spiegare il suo procedimento, dice semplicemente che si è sbagliato (confrontandosi con il compagno di classe "bravo a matematica" ha constatato che la sua soluzione era diversa) -, e si sottrae a qualsiasi tipo di considerazione, come dire: "Ci ho provato, non ci sono riuscito, è quello che mi aspettavo e ora non ci voglio più pensare" (C'è poco da fare l'insegnante finisce sempre per interrogare! Bisogna ancora imparare a interagire con gli alunni in difficoltà!).

Nella riscrittura del testo, Tommaso ha sentito il bisogno di giustificare il comportamento del panettiere che secondo lui ha regalato pochi pacchi di biscotti: ".... non gliene può dare altri perché è l'ora di chiudere il negozio..."

(18+24=42)
(42:14=3)
24-18=6 bambini in più della classe di Andrea
Ogni classe deve ricevere nove pacchi di biscotti per non fare ingiustizie

TOMMASO
PULIZIE
I 18 alunni della classe di Marta e i 24 alunni della classe di Andrea,
hanno pulito la piazza del Paese e le rive del ruscello.
Il panettiere è molto soddisfatto e per ringraziarli offre loro 14 pac
chi di biscotti, Ma non gliene può dare altri perchè è l'ora di
chiudere il negozio.
Marta propone che ogni classe prenda 7 pacchi.
Andrea dice che non è giusto perchè nella sua classe gli alunni
sono di più.

Ecco altre due risoluzioni "inaspettate":

Secondo me la classe di Marta dovrebbe prendere 3
pacchi di biscotti e la classe di Andrea 11 pacchi
di biscoti. Oppure il panettiere poteva dare più pacchi.
non mi riesce di spiegarlo

Di seguito sono riportate tre soluzioni corrette: nel primo caso la scarna "spiegazione"prodotta suggerisce la difficoltà nel dar conto di un'intuizione.

Secondo me per i 18 alunni andrebbero 6
pacchetti e 8 per i 24 alunni. Perche' se meno
di 8 sarebbero pochi, di più, Troppi.

In definitiva possiamo concludere che l'attività di risoluzione di problemi ha diverse sfaccettature che condizionano il comportamento dell'alunno e ne decretano il successo o l'insuccesso.

Se i docenti sono consapevoli di tutte queste sfaccettature e hanno pazienza e fiducia nella sua portata formativa possono utilizzarla come una "cura" (e "prevenzione") di grande efficacia.

L'esperienza del Gamerra attesta che tale consapevolezza matura in tempi lunghi. E' quindi necessario convincersi che dedicare tempo non significa perdere tempo, ma investire nel tempo. All'inizio questo tipo di attività era stata ritenuta da alcuni docenti poco incisiva, un diversivo da affiancare alla tradizionale pratica didattica, da altri invece è stata vista troppo "difficile" per cui gli alunni ne avrebbero ricavato solo disorientamento e frustrazione. Percezioni di questo tipo sono state superate nel tempo sia perché il lavoro in team ha fornito rassicurazioni e sostegno reciproci sia perché la decisione di lavorare sul problema ha condotto al cuore della matematica. E' stato così possibile provare una serie di sentimenti positivi quali la curiosità nello sperimentare, il divertimento nell'inventare, la soddisfazione nello scoprire, il piacere di pensare e anche il gusto nel confrontarsi, tutti sentimenti remunerativi che una volta sperimentati dagli insegnanti possono essere indotti negli alunni e soprattutto aiutano a capirli e supportarli nel fare matematica.

L'acquisizione di competenze matematiche nasce da questi presupposti.

RMT: UN'EDIZIONE STRAORDINARIA PER I GENITORI

Angela Mecacci, Francesca Ricci

1. Premessa

Con la finalità di rendere consapevoli le famiglie degli alunni delle metodologie e delle sperimentazioni adottate nella pratica didattica quotidiana, la Direzione Didattica del 1° circolo di Poggibonsi (SI), scuola primaria, ha promosso un'iniziativa rivolta ai genitori dal titolo: "***Scoprire e riscoprire la matematica" - "Rally Matematico Transalpino" non è una corsa ma è solo divertimento***.[42]

Come coordinatrici dell'iniziativa abbiamo pensato di impegnare gli adulti nelle stesse attività di risoluzione di problemi affrontate dai loro figli durante la gara del RMT.

Gli obiettivi che ci proponevamo erano quelli di sperimentare insieme ai genitori un modo di fare matematica completamente diverso da quello che probabilmente loro stessi avevano vissuto qualche decina di anni fa, puntando soprattutto sul saper lavorare in gruppo.

L'attività proposta è stata incentrata sui problemi del "*Laboratorio di risoluzione di problemi con materiale*" da cui abbiamo selezionato i 10 che ci apparivano adatti e stimolanti per gli adulti e di cui riportiamo i testi in allegato.

2. Svolgimento dell'attività

Dopo una breve premessa sul Rally, abbiamo illustrato le regole da adottare in quell'occasione.

Tutti i presenti sono stati invitati a suddividersi in gruppi di 4 o 5 persone, ogni gruppo avrebbe dovuto risolvere tutti e dieci i problemi in 50 minuti disponendo del materiale della valigia.

Ad ogni problema è stato associato un punteggio (da 1 a 4) tenendo conto sia della difficoltà che del numero di soluzioni possibili.

A questo punto abbiamo dato il via alla gara!

[42] Il titolo voleva essere accattivante nei confronti dei genitori ma, come in realtà noi speravamo, essi stessi sono andati molto al di là del "solo divertimento"!

Allo scadere dei 50 minuti tutti hanno protestato per il tempo volato troppo in fretta! In effetti l'esperienza ci ha confermato che, come succede per i bambini, anche gli adulti hanno bisogno di molto più tempo per la riflessione e la comprensione del testo, soprattutto se si lavora in gruppo.

Per non perdere le impressioni a caldo abbiamo subito distribuito un questionario di gradimento preparato dalla scuola ed un foglio in cui si chiedeva di commentare l'esperienza appena fatta.

La discussione vera e propria, però, è avvenuta nel momento della correzione collettiva.

Questa sì che è stata interessante! Mentre noi davamo le soluzioni, i genitori commentavano in modo accalorato le risposte trovate e quelle mancate, le difficoltà incontrate, i metodi risolutivi e l'organizzazione interna da loro adottati.

Da tutta questa discussione è scaturito il punteggio totale ottenuto da ogni gruppo e la conseguente proclamazione dei vincitori e premiazione con medaglia.

3. Analisi

La nostra analisi a priori è consistita nella scelta dei problemi secondo criteri di competenze mobilitate (geometriche, aritmetiche, logiche, …), di difficoltà di risoluzione, di contesto stimolante per gli adulti.

A posteriori riportiamo la valutazione dei problemi proposti in base alla risposta dei genitori.

Quelli aritmetici (*Il bersaglio, La scala delle differenze, Pile di gettoni, Prodotti in riga*) sono stati risolti con una certa facilità perché, nella gran parte degli adulti, c'è la capacità e, quindi la sicurezza di *saper fare i calcoli*.

Quelli geometrici sono risultati molto difficili. *Tela di ragno* è stato da tutti affrontato per ultimo e sbagliato quasi sempre. *Tegole triangolari* ha creato grosse difficoltà ma alla fine gran parte dei gruppi ha trovato la soluzione. *Tetramini* non è stato risolto da nessuno.

Quelli logici non hanno portato a comportamenti comuni. *Griglia di numeri* è stato risolto ma non sono state trovate tutte le soluzioni. *Pecore nere e pecore bianche* ha stimolato un'ampia discussione che ha lasciato, comunque, perplessi diversi genitori. *Il rapimento di Jasmine* è stato risolto da tutti.

4. Commenti

Durante la prova c'è stato molto impegno da parte di tutti: alcuni gruppi hanno scelto di collaborare e risolvere insieme i problemi, altri si sono suddivisi i testi e hanno lavorato individualmente ma sempre con verifica collettiva del risultato.

In alcuni gruppi (maschili) la tensione era palpabile sia per lo spirito competitivo che per l'insicurezza nelle proprie capacità matematiche.

Una delle osservazioni che vale la pena di fare è che i genitori, lasciati liberi di formare i gruppi, si sono suddivisi immediatamente "maschi contro femmine", finché è stato possibile!

Ecco alcuni commenti a caldo dei genitori:

- *Mi sono divertita molto ed ora aspetto con ansia il risultato. Speriamo bene!*
- *È stato molto impegnativo e sono rimasto molto impressionato dalla difficoltà della prova.*
- *Esperienza ottima, ho capito cosa mi racconta mio figlio (insegnante di matematica)*
- *È stato entusiasmante e mi sono trovata, libera da ogni pensiero, piacevolmente immersa nei numeri.*

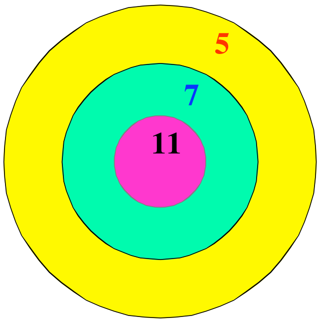
Dal questionario che ha somministrato la scuola ai 34 genitori, 17 uomini e 17 donne con un'età media di 42 anni, è emerso che le motivazioni che li hanno spinti alla partecipazione sono state la curiosità e la voglia di mettersi in gioco, che la totalità dei genitori crede nell'efficacia del lavoro di gruppo e che, per tutti, questa esperienza è servita a comprendere il lavoro svolto dai figli e, quindi, ha dato loro idee per stimolare i figli stessi anche a casa.

Si è così realizzata una bella esperienza di scuola aperta, dove la matematica è divenuta veicolo di divertimento, scambio e cultura.

Noi speriamo di aver contribuito a distruggere qualcuno dei molti luoghi comuni di cui la matematica si è, purtroppo, sempre circondata.

Allegato

2. Il bersaglio — punti 2

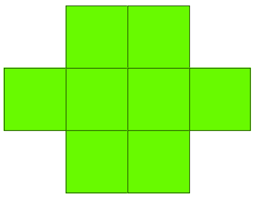


Guglielmo ha messo tutte le sue freccette su questo bersaglio. Conta i suoi punti e dice: 34!
Gianna gioca a sua volta e dice. “Anch’io ho 34 punti, ma ho due freccette in meno di te!”.
Quante freccette ha ciascuno dei due giocatori sul bersaglio? E in quali zone?

---

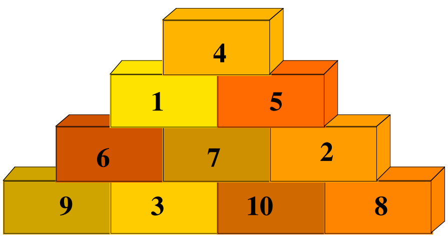
3. Griglia di numeri — punti 4

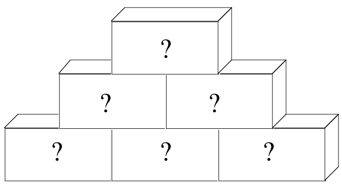
Sistemate gli otto numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in una griglia in modo che due numeri consecutivi siano sempre in caselle che non si toccano, né lungo un lato, né in un vertice.
Cercate di scoprire tutte le soluzioni.



---

6. La scala delle differenze — punti 4





La scala di quattro piani, a sinistra, è costruita così:
Regola 1: ogni mattone ha un numero naturale che è la differenza dei numeri dei due mattoni sul quale poggia.
Regola 2: tutti i numeri della scala sono diversi.
Con le stesse regole, costruite delle scale di tre piani (come quella di destra), utilizzando i numeri da 1 a 6. Quante ne troverete l’una diversa dall’altra?

---

8. Pecore nere e pecore bianche punti 4

Nell'ovile del pastore Bianchi ci sono 200 pecore, tutte bianche.
Nell'ovile del pastore Neri ci sono 100 pecore, tutte nere.
Un brutto giorno 25 pecore bianche del pastore Bianchi saltano gli steccati e vanno a mescolarsi alle pecore del pastore Neri. La sera, quando conta le sue pecore, il pastore Bianchi si accorge che gliene mancano 25.
Decide di andare subito a cercarle.
Quando però arriva davanti all'ovile del pastore Neri, è ormai buio. Tutti sanno che di notte tutti i gatti sono grigi e così le pecore.
Il pastore Bianchi conta al tatto 25 pecore e le porta al suo ovile.
L'indomani, evidentemente, c'è qualche pecora nera fra le 200 pecore del pastore Bianchi e qualche pecora bianca tra le 100 pecore nell'ovile del pastore Neri.
Secondo voi, ci sono più pecore nere nell'ovile del pastore Bianchi o più pecore bianche nell'ovile del pastore Neri?

---

9. Tegole triangolari punti 3

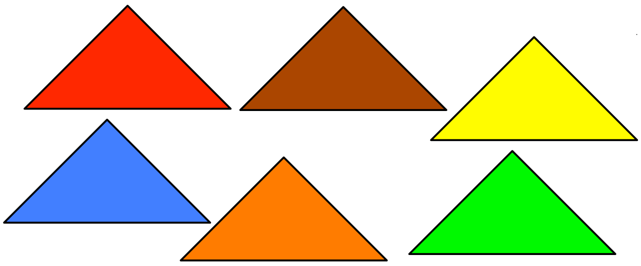


FIGURA 1

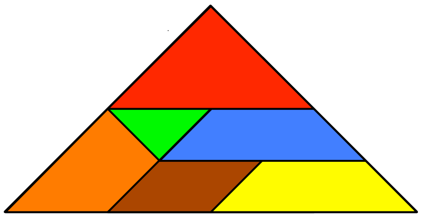
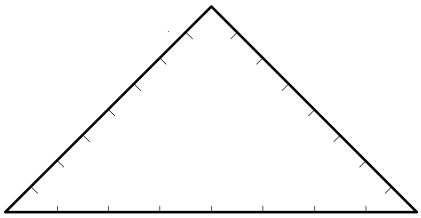


FIGURA 2

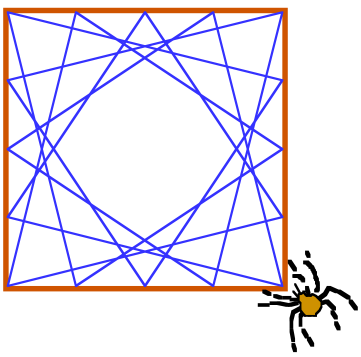
Si pongono una ad una le sei tegole (*figura 1*) sul tetto (*figura 2)*. Ogni tegola ricopre in parte quella che è stata appena messa.
Indicate in quale ordine sono state poste le sei tegole sul tetto, dalla prima all'ultima.



---

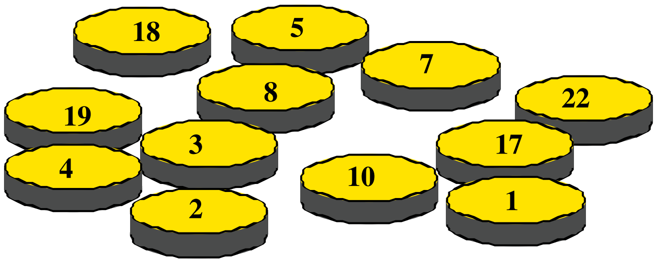
10. Tela di ragno punti 1

Il ragno Tipsi ha appena realizzao un'opera d'arte.
È partito dal vertice in basso a destra del quadro, ha usato un solo filo ed è tornato al punto di partenza (si veda la figura).
Costruite la tela di Tipsi, della stessa forma, sul quadro.



---

13. Pile di gettoni   punti 2

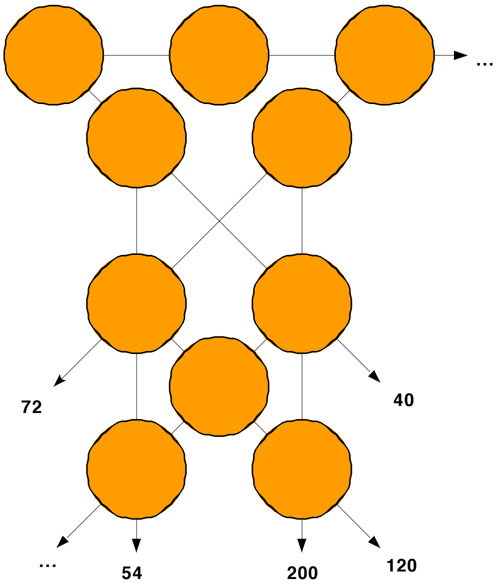


Fate tre pile con questi dodici gettoni, in modo che:
- in ogni pila ci sia lo stesso numero di gettoni;
- in ogni pila, il gettone superiore valga la somma degli altri gettoni della pila.

Quali sono i gettoni che avete messo in cima a ciascuna pila?
In quali di queste pile ci sono maggiori possibilità di trovare il gettone 5?

---

17. Prodotti in riga   punti 4



Disponete i dieci numeri da 1 a 10 nei cerchi di questa figura in modo tale che il prodotto di tre numeri allineati sia il numero indicato alla fine della riga.
Calcolate i due prodotti mancanti.
Quanti sono i modi di disporre questi dieci numeri?

18. Tetramini punti 4

I cinque tetramini

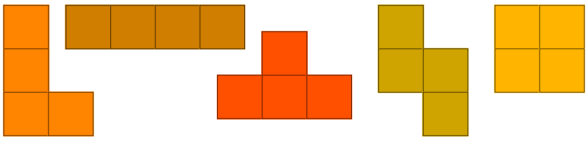


FIGURA DI LUCA

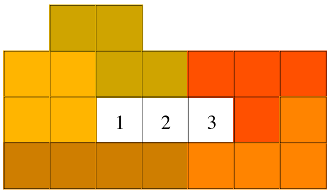
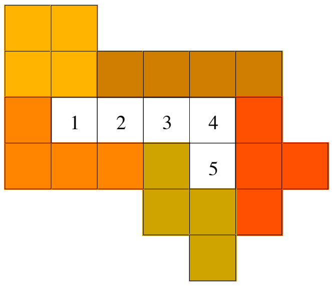


FIGURA DI LINA

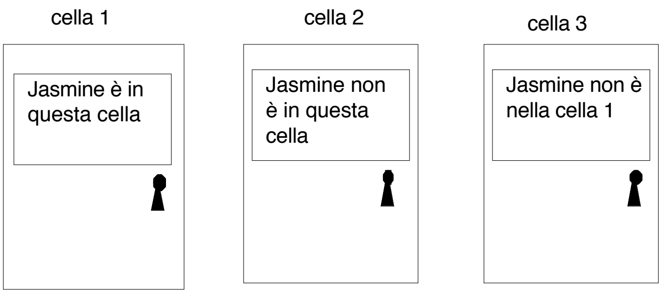


Utilizzando i suoi 5 tetramini (composti ognuno da 4 quadratini) Luca ha racchiuso una figura bianca composta di 3 quadratini
Con gli stessi pezzi, Lina riesce a racchiudere una figura bianca più grande, composta da 5 quadratini.
Provate a sistemare i 5 tetramini in modo da racchiudere una figura bianca composta dal più grande numero possibile di quadratini.
Attenzione: perché la vostra soluzione sia valida bisogna che ogni tetramino tocchi i suoi vicini almeno con il lato di un quadratino.

---

19. Il rapimento di Jasmine punti 3

Il terribile Jafar ha rapito la principessa Jasmine e la tiene prigioniera in una delle tre celle del suo palazzo.
Aladin, accorso per liberare Jasmine, si trova di fronte alle porte delle tre celle, recanti ciascuna una indicazione delle quali sola una è vera.



Aladin sa di poter aprire una sola cella prima che arrivino le guardie
Quale porta dovrà aprire Aladin per trovare Jasmine?