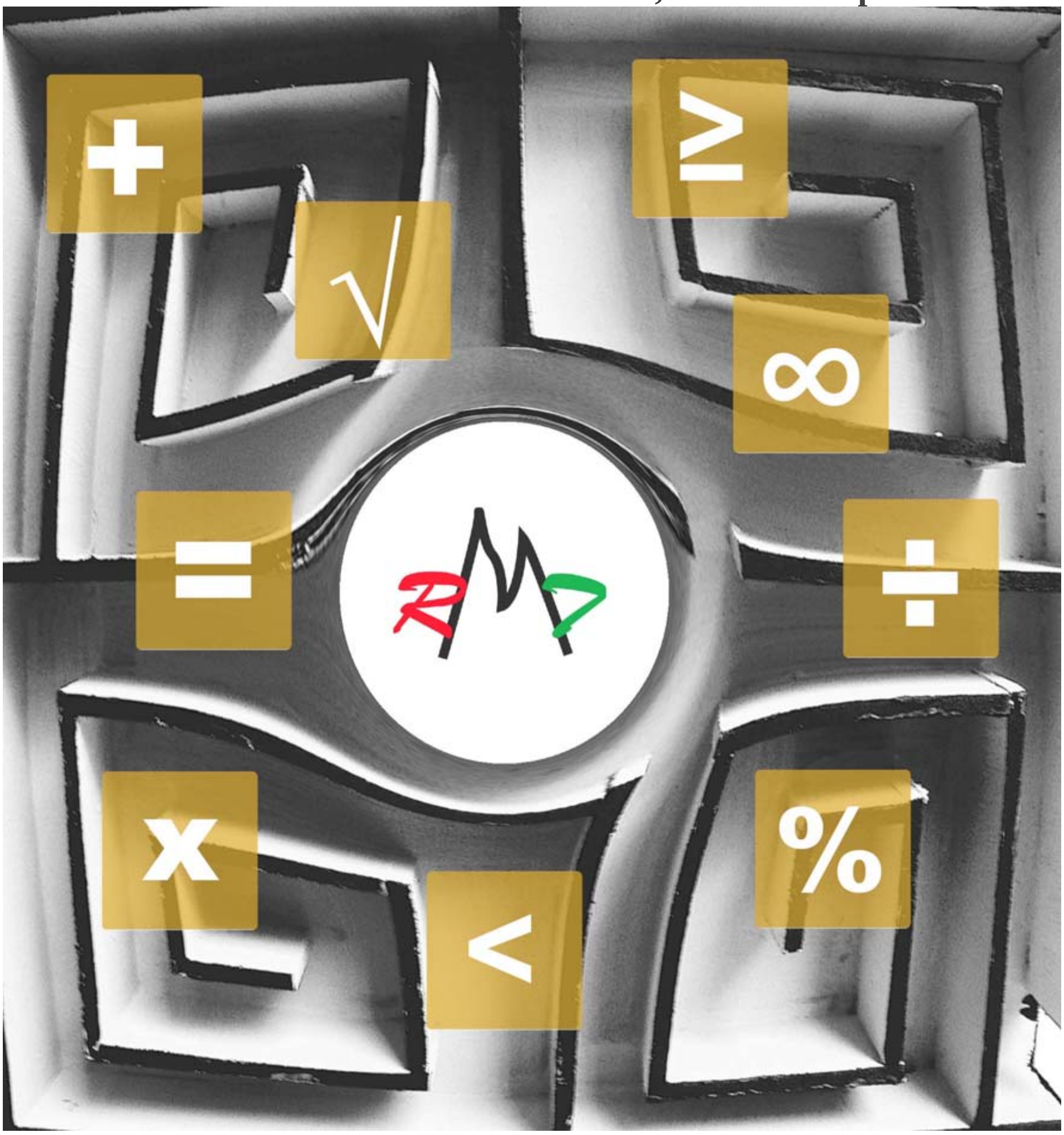
La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 1, settembre/septembre 2011



Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN 2234-9596

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse. siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.armtint.org

ISSN 2234-9596

TABLE DES MATIERES / INDICE

Numéro 1, septembre 2011/ Numero 1, settembre 2011

EDITORIAL

François Jaquet, rédacteur responsable

Des 20 classes de la première édition du rallye mathématique Romand aux 4209 de la 19e édition du RMT il y a une « croissance » évidente, pour utiliser un terme très à la mode en cette période de récession économique. Ce phénomène, qui s'observe aussi pour les autres concours, révèle une évolution significative de l'image des mathématiques, associée de plus en plus souvent à une activité ludique, plaisante, qui franchit les frontières de la classe, qui peut se pratiquer en groupe où les forts en maths ne sont plus les seuls à accéder aux podiums.
Du côté des institutions, les références à la résolution de problèmes sont aussi de plus en plus explicites. Les programmes les reconnaissent maintenant, sous différentes appellations comme « problèmes pour chercher », « situations-problèmes, problèmes ouverts, etc.
Le RMT est actif dans ce regain d'intérêt pour les problèmes. Il va cependant encore plus loin, au-delà de l'activité de résolution ou de recherche des solutions, vers ses exploitations pour les pratiques de classe, au profit des apprentissages mathématiques. Nos analyses approfondies des procédures de résolution et des obstacles rencontrés nous ont permis d'accumuler une quantité impressionnante de données, avec patience et constance, que nous sommes sur le point de regrouper dans notre banque de problèmes.
Nous sommes toujours plus convaincus que le cap déterminé il y a vingt ans est toujours le bon, nous sommes conscients des enjeux et de nos ambitions, mais nous savons que le chemin est encore long et parsemé d'obstacles.
Nous en relevons ici deux, parmi d'autres :
Nous demandions récemment à une enseignante d'Angleterre qui est intéressée par le RMT, pourquoi elle ne le proposerait pas dans son école - et ne nous procurerait pas ainsi une ouverture vers les pays de langue anglaise. La réponse, malheureusement négative, ne s'est pas fait attendre : *nous ne pouvons nous le permettre car nos élèves doivent atteindre un certain seuil de « réussite » pour que notre école reçoive les fonds nécessaires à sa survie.* Nous ne connaissons pas les batteries de tests qui permettent de déterminer ces seuils, mais il est bien clair que les problèmes du RMT n'y sont pas pris en compte.
Il en va ainsi de tous les instruments de « mesure » des performances scolaires, nationales ou internationales qui ne se limitent plus à vérifier l'acquisition de connaissances algorithmiques, mais prétendent, par des discours politiques teintés d'arguments pédagogiques, évaluer des compétences de niveaux plus élevés. Ils proposent des « problèmes », qui ne se sont en fait que des successions de petites questions guidées ; car il faut bien obtenir un total de points assez élevé pour justifier statistiquement les comparaisons entre écoles, régions ou pays. Cette pression institutionnelle est forte. Un maître doit être vraiment convaincu de l'intérêt de « vrais » problèmes pour les préférer à ceux, fictifs, des « évaluations » à grande échelle. Le RMT a fort à faire contre ce type de concurrence.
En feuilletant les « cahiers de vacances » exposés l'été dernier dans un centre commercial, nous avons découvert un dernier-né francophone qui nous concerne de très près[1]. Son introduction annonce triomphalement qu'on peut « apprendre à raisonner et à résoudre des problèmes en CM2, conformément aux nouveaux programmes » et ses chapitres promettent d'atteindre toutes les compétences nécessaires : de « lire et comprendre des données numériques » à « organiser les différentes étapes de la résolution d'un problème ».
On retrouve ici une autre forme de concurrence, de type commercial cette fois-ci, dont l'origine est à rechercher dans les programmes officiels, qui prônent explicitement l'activité de résolution de problèmes, avec les meilleures intentions du monde. Les manuels s'y conforment, les sites Internet sur ce thème fleurissent (Tapez « résolution de problèmes » sur Google et vous aurez un million de résultats), les éditions parascolaires s'en emparent. Leur mot d'ordre commun : résoudre des problèmes, c'est facile ! (avec nous, évidemment). Ils sont tous soumis aux lois du marché, mais sans contrôle de qualité.
Notre patient travail d'analyses des problèmes du RMT nous montre, depuis bientôt 20 ans, que ce n'est pas si simple et qu'il n'y a pas de méthode-miracle. Là encore, il s'agira de convaincre les enseignants que nos données peuvent approfondir leurs réflexions, pour autant qu'ils admettent qu'il reste beaucoup à faire par eux-mêmes et par leurs élèves pour que nos problèmes contribuent à la construction de connaissances mathématiques.
La concurrence est donc bien là, sur le chemin de l'exploitation de nos problèmes. Est-elle loyale ou déloyale ? Tout dépend de l'interprétation des termes « problème » et « résolution » et de la rigueur avec laquelle on traite le sujet.

.

[1] Résoudre des problèmes CM2, Hatier 2010

EDITORIALE

François Jaquet, direttore responsabile

Dalle 20 classi della prima edizione del rally matematico romando alle 4209 delle 19esima edizione del RMT c'è una "crescita" evidente, per utilizzare un termine molto alla moda in questo periodo di recessione economica. Questo fenomeno, che si osserva anche per le altre gare o concorsi, mette in evidenza un'evoluzione significativa dell'immagine della matematica, associata sempre più sovente ad un'attività ludica, piacevole, che supera le frontiere della classe e che può svolgersi con lavoro di gruppo dove i forti in matematica non sono più i soli a salire sul podio.

Da parte delle istituzioni, i riferimenti alla risoluzione di problemi diventano sempre più espliciti. I programmi ora li riconoscono sotto diverse accezioni come "problemi per ricercare", "situazioni problema", "problemi aperti", etc.

Il RMT è attivo in questa ripresa di interesse per i problemi. Si spinge, però, più lontano, al di là dell'attività di risoluzione o di ricerca di soluzioni, verso le utilizzazioni in vista delle pratiche di classe, per l'apprendimento della matematica. Le nostre approfondite analisi delle procedure di risoluzione e degli ostacoli riscontrati ci hanno permesso di accumulare una quantità impressionante di dati, con pazienza e costanza, dati che stiamo per raggruppare nella nostra banca di problemi.

Siamo convinti che la direzione che avevamo preso già vent'anni fa, sia ancora quella buona. Siamo coscienti delle sfide e delle nostre ambizioni, ma sappiamo che il cammino è ancora lungo e disseminato di ostacoli.

Ne rileviamo qui due riscontrati in diversi episodi.

Abbiamo recentemente chiesto ad un'insegnante inglese, interessata al RMT, perché non lo proponesse nella propria scuola - e non ci procurasse così un'apertura nei paesi anglofoni. La risposta, sfortunatamente negativa, non si è fatta attendere: *non possiamo permettercelo in quanto i nostri allievi devono raggiungere un certo grado di "riuscita" perché la nostra scuola riceva i fondi necessari alla sua sopravvivenza*. In effetti, non conosciamo le serie di test che permettono di determinare tale grado di "riuscita", ma è ben chiaro che i problemi del RMT non vi rientrano.

E succede la medesima cosa con tutti gli strumenti di "misura" delle prestazioni scolastiche, nazionali o internazionali che non si limitano più a verificare l'acquisizione di conoscenze algoritmiche, ma pretendono, con discorsi politici farciti di argomenti pedagogici, di valutare le competenze di livello più alto. Vengono proposti "problemi" che non sono altro che successioni di piccole questioni guidate; perché bisogna pure ottenere punteggi piuttosto elevati per giustificare statisticamente i confronti fra scuole, regioni o paesi. Questa pressione istituzionale è forte. Un insegnante deve essere veramente convinto dell'interesse dei "veri" problemi per preferirli a quelli, fittizi, delle "valutazioni" a grande scala. Il RMT deve darsi da fare contro questo tipo di concorrenza.

Sfogliando i "quaderni delle vacanze" proposti da un centro commerciale, abbiamo scoperto un "nuovo nato" francofono che ci riguarda molto da vicino[2]. La presentazione annuncia trionfalmente che si può "imparare a ragionare e a risolvere problemi in quinta primaria (CM2 in Francia), conformemente ai nuovi problemi" e i suoi capitoli promettono di raggiungere tutte le competenze necessarie: da "leggere e comprendere i dati numerici" a "organizzare le diverse tappe della risoluzione di un problema".

Troviamo qui un'altra forma di concorrenza, di tipo commerciale, questa volta, la cui origine è da ricercare nei programmi ufficiali che raccomandano esplicitamente l'attività di risoluzione di problemi, con le migliori intenzioni al mondo. I manuali scolastici si allineano, i siti internet sul tema si moltiplicano (cliccate su "risoluzione di problemi" su Google e otterrete un'enormità di risultati), le edizioni parascolastiche se ne appropriano. La parola d'ordine comune: risolvere problemi, è semplice! (Con noi evidentemente). Sono tutti sottomessi alla legge di mercato, ma senza un controllo di qualità.

Il nostro paziente lavoro di analisi dei problemi del RMT ci mostra, da quasi vent'anni, come non sia così semplice e che non ci sono metodi miracolistici. E qui ancora si tratterà di convincere gli insegnanti del fatto che con i nostri dati possono approfondire le loro riflessioni, laddove ammettano che resta molto da fare sia da parte loro sia da parte dei loro allievi perché i nostri problemi contribuiscano alla costruzione di conoscenze matematiche.

La concorrenza è dunque qui, sul cammino dell'utilizzazione dei nostri problemi. Si tratta di una concorrenza leale o sleale?

Tutto dipende dall'interpretazione dei termini "problema" e "risoluzione" e dal rigore con il quale si tratta l'argomento.

---

[2] Résoudre des problèmes CM2, Hatier 2010

PRESENTAZIONE DEL NUMERO

Questo numero 1 de *La Gazzetta di Transalpino* contiene due articoli e due servizi fotografici, tutti relativi al 14° incontro internazionale dell'ARMT a Besançon, nell'ottobre 2010. I due articoli riportano le comunicazioni riguardanti i risultati dei lavori di due dei sei gruppi di lavoro dell'ARMT, sulla costruzione di concetti e su errori, difficoltà ed ostacoli che gli allievi incontrano a proposito di tali concetti.

- **Bernard Anselmo, Clara Bisso e Lucia Grugnetti**, in ***Il rettangolo…non così evidente***, a nome del gruppo geometria piana, dopo aver presentato alcuni risultati relativi a problematiche connesse al concetto di area, di cui il gruppo si è occupato da tempo, introduce i lettori alla problematica delle difficoltà incontrate dagli allievi impegnati nel RMT, nella costruzione del concetto di rettangolo ed, in particolare, della necessità dell'angolo retto.

- **Annie Henry, Michel Henry e Angela Rizza** propongono una riflessione su ***funzioni per risolvere per problemi?*** Il gruppo funzioni, sulla base di analisi di anni precedenti, ha svolto alcune sperimentazioni nel corso delle quali ha osservato gruppi di allievi alle prese con determinati problemi ed inoltre ha esaminato gli elaborati relativi a problemi del 18° RMT. Il gruppo ha constatato che perlopiù gli allievi, per risolvere i problemi, non utilizzano in maniera esplicita lo strumento funzione almeno fino alla categoria 9. Si è pertanto chiesto, se, invertendo il senso della domanda, titolo dell'articolo, i problemi del RMT potessero avere un impatto (sugli insegnanti, sugli allievi?) sull'apprendimento della nozione di funzione?

- **Annie Henry** presenta un ***reportage*** con fotografie da lei scattate in occasione dell'incontro di Besançon corredate da alcuni commenti in lingua francese.

- **Fabio Brunelli** presenta anch'egli un ***reportage*** fotografico relativo all'incontro di Besançon con i relativi commenti, questa volta in italiano.

Ci saranno nei prossimi numeri altre presentazioni relative ai nostri incontri di Nivelles e Besançon, così come altri rapporti dei nostri gruppi di lavoro.
Vi ritroveremo, poi, reportage, notizie delle sezioni, lettere dei lettori, riflessioni, risultati delle numerose ricerche e analisi che vengono svolte nell'ambito dell'ARMT.

PRESENTATION DU NUMERO

Ce numéro 1 de *La Gazette de Transalpie* contient deux articles et deux reportages photographiques relatifs à la 14^{e} rencontre internationale de l'ARMT à Besançon, en octobre 2010. Les deux articles reprennent et développent les communications sur les résultats de deux de nos six groupes de travail de l'ARMT à propos de la construction de concepts et des obstacles et erreurs que rencontrent les élèves dans cette tâche d'élaboration :

- **Bernard Anselmo, Clara Bisso e Lucia Grugnetti**, dans ***Le rectangle… pas aussi évident***, au nom du groupe géométrie plane. introduisent le lecteur à la problématique des difficultés rencontrées par les élèves sur la construction du concept de rectangle et, en particulier à la nécessité de prendre en compte l'angle droit. Ces observations et réflexions s'inscrivent dans la suite des travaux sur le concept d'aire, conduits depuis plusieurs années à partir des analyses des procédures relevées chez les élèves qui résolvent les problèmes du RMT.

- **Annie Henry, Michel Henry e Angela Rizza** proposent une réflexion sur ***Des fonctions pour résoudre des problèmes ?*** Le groupe fonctions sur la base d'analyses des années précédentes a mené des expérimentations de quelques problèmes en observant des groupes d'élèves et en examinant les copies de sujets proposés lors du 18^{e} RMT. Il a constaté que les élèves n'utilisent presque pas l'outil fonction jusqu'en catégories 9 au moins, de manière explicite pour résoudre des problèmes. Il s'est alors demandé si, en renversant le sens de l'interrogation, les problèmes du RMT peuvent avoir un impact (sur les enseignants, sur les élèves ?) dans l'apprentissage de la notion de fonction ?

- **Annie Henry,** présente un ***reportage*** de la rencontre de Besançon, par des photos commentées en français, prises en différents moments de ces journées.

- **Fabio Brunelli,** présente lui aussi un ***reportage*** photographique de la rencontre de Besançon commenté cette fois-ci en italien.

Il y aura, dans nos prochains numéros, d'autres présentations données lors des rencontres de Nivelles et Besançon, ainsi que les rapports de nos quatre autres groupes de travail.
Puis, on y trouvera tous les reportages, nouvelles des sections, courriers des lecteurs, réflexions, résultats de toutes les nombreuses recherches et analyses qui se développent dans le cadre de l'ARMT.

IL RETTANGOLO…NON COSÌ EVIDENTE!

Bernard ANSELMO, Clara BISSO, Lucia GRUGNETTI

A nome del Gruppo geometria piana[3]

XXIII. Delle figure Quadrilatere,
quella, che ha tutti i lati
uguali, e ciaschedun angolo
retto, si chiama
QUADRATO.
XXIV. Quella poi, che non ha
ciascun lato
eguale, e però è bislunga,
ma ha tutti gli angoli
retti, dicesi
RETTANGOLO.
(Dagli *Elementi*[4])

1. Introduzione

Come buona parte della geometria piana, anche la definizione di rettangolo affonda le sue radici negli *Elementi* di Euclide e qui viene definito come quadrilatero che non ha tutti i lati tutti congruenti (cosa che invece succede nel caso del quadrato), ma ha tutti gli angoli retti, oltre ad essere una figura "bislunga" o come diremmo oggi oblunga, nel senso di più lunga che larga.
E questa caratteristica, se così vogliamo chiamarla, dell'essere una figura più lunga che larga, ha portato a parlare di 'lunghezza' e 'larghezza' o di 'base' e 'altezza', invece che di 'lato maggiore' e di 'lato minore', quasi pensando implicitamente al rettangolo in posizione 'privilegiata' (con una terminologia presa in prestito da L. Lismont, N. Rouche[5]) con la "base orizzontale" e "l'altezza verticale" o viceversa.
Può essere curioso ricordare che nel famoso testo antico cinese *I nove capitoli*, i termini per lunghezza e larghezza di un rettangolo sono *zong* e *guang* che indicano in effetti la direzione nord-sud e la direzione est-ovest
E da sempre, nei libri di testo, il rettangolo è perlopiù presentato in posizione privilegiata, quella che fa riferimento all'orizzontale e alla verticale.
Come sottolineano Lismont e Rouche, la forma rettangolare in posizione privilegiata, tipica di oggetti familiari come ad esempio porte e finestre, è riconosciuta molto presto dai bambini senza il ricorso alle proprietà caratterizzanti il rettangolo.
Che cosa succede, però, quando una forma rettangolare non si trova in tale posizione? Se la "forma" di cui parliamo è un oggetto, nella realtà fisica, o anche un "oggetto mentale", il suo essere rettangolare è ancora riconosciuto senza dover entrare nei particolari delle proprietà che ne fanno precisamente un rettangolo.
E se si tratta di riconoscere o costruire la figura rettangolo in posizione non privilegiata?
I risultati di un problema dato alla finale internazionale svoltasi a Briga nel 2008 (Jaquet, 2009), riguardante per l'appunto questi aspetti, hanno innescato la necessità di cercare di capire le ragioni delle difficoltà mostrate dagli allievi nella sua risoluzione.
In quest'articolo, però, prima di entrare in merito alla problematica delle difficoltà del concetto di rettangolo, il gruppo di lavoro geometria fa un passo indietro, per relazionare, brevemente, su questioni legate al concetto di area di cui, sotto il nome di gruppo ellealquadrato, si è occupato fin dal 2005 (Bisso, Grugnetti, 2006, 2007a, 2007b, 2009).

[3] Bernard Anselmo, Chiara Badiali, Silvana Bisogni, Clara Bisso, Jean-Louis Billody, Fabio Brunelli, Florence Falguères, Lucia Grugnetti, Elisabetta Mari, André Nguyen, Letizia Pucci, Michele Rapuano, Elsa Renna, Samia Mehaddene, M. Francesca Tanda, Agnese Tomasini, Donata Tardio, con la collaborazione di Anna Maria D'Andrea e Francesca Ricci.

[4] Nella versione dovuta a Guido Grandi, 1752.

[5] Forme et Mouvements (2001).

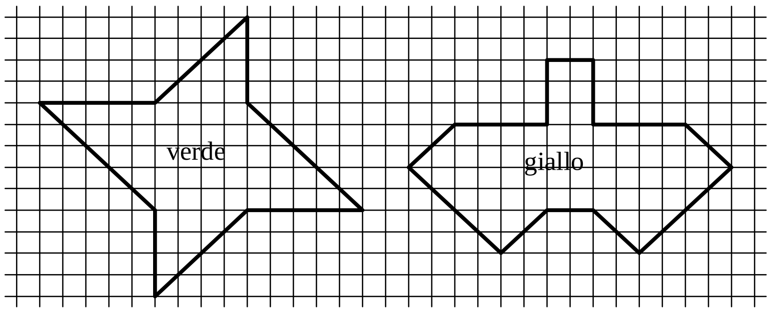
2. Un passo indietro: difficoltà relative al concetto di area

Diversi problemi del RMT sulla determinazione di aree per pavimentazione e conteggio, hanno evidenziato, nel corso della nostra ricerca sulla costruzione del concetto di area e sulle difficoltà ad esso connesse, l'ostacolo legato alla ricerca di un'unità di misura comune a diversi tipi di pavimentazione, ma anche confusioni tra area e perimetro (cfr. anche, fra gli altri, Jaquet, 2000).
La peculiarità del RMT, che propone uno stesso problema a diverse categorie, consente di fare qualche interessante osservazione a partire dai risultati, categoria per categoria, come per esempio verificare se un certo ostacolo permane oppure, via via che l'età degli allievi aumenta, tende a "scomparire".
Questo aspetto può, in qualche modo, consentire di trarre una qualche conclusione sulla dicotomia "ostacolo ontogenetico"/"ostacolo didattico", (come si vedrà più avanti, § 2.3.).
L'altra peculiarità del RMT è la numerosità delle classi coinvolte e quindi l'ampiezza del campione da "analizzare".
Ai risultati delle ricerche di cui agli articoli più sopra ricordati, si è reputato importante poterne aggiungerne altri, a partire ancora da un problema con superfici da misurare per conteggio di unità d'area (una volta scelta l'unità di misura comune). Il gruppo geometria ha pertanto proposto il problema "Cadono le foglie", che è stato in effetti inserito fra quelli della prima prova del 18° RMT.
I risultati, relativi a tale problema, sono di due ordini: quelli relativi alle analisi condotte dai membri del gruppo geometria, sugli elaborati delle classi iscritte alla prova del RMT presso la propria sezione di appartenenza, e quelli relativi alle percentuali dei punteggi attribuiti, categoria per categoria, dalle diverse sezioni dell'ARMT.

2.1. Il problema

CADONO LE FOGLIE (Cat. 3, 4, 5) **I prova 18° RMT**

Per la festa dell'autunno si è deciso di decorare la palestra della scuola con delle foglie di cartoncino verde e delle foglie di cartoncino giallo.
Ecco il modello delle foglie.



Lisa ha ritagliato una foglia verde e Tom ha ritagliato una foglia gialla.
Ci vorrà più cartoncino per la foglia verde o più cartoncino per la foglia gialla?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

2.2. I risultati

La rubrica "attribuzione dei punteggi" relativa al problema in oggetto, è la seguente:

4 Risposta corretta (ci vuole più cartoncino giallo o la figura gialla è quella più grande) con il dettaglio delle strategie utilizzate (calcoli, ritaglio, parti equivalenti messe in evidenza ...)
3 Risposta corretta con spiegazioni incomplete ma dalle quali si evince la procedura corretta
2 Risposta con errori nel conteggio ma che mostri che la procedura è corretta (per esempio con delle difficoltà nella trasformazione dei mezzi quadretti in quadretti)
1 Inizio corretto di ragionamento, ma senza il "calcolo" delle aree
o risposta corretta gialla senza nessuna spiegazione o dettaglio di calcoli
0 Incomprensione del problema o ricorso al perimetro per confrontare le figure o conteggio dei pezzi senza tener conto della loro area

Riportiamo qui di seguito i risultati della categoria 3, relativi a dieci sezioni, fra le quali figurano sezioni francesi, sezioni italiane, la sezione del Lussemburgo, la sezione della Svizzera Romanda e del Canton Ticino.
Non abbiamo preso in considerazione i risultati di sezioni con meno di dieci classi in tale categoria.

La tabella è compilata secondo i punteggi ottenuti da **0** a **4**.

0	**1**	**2**	**3**	**4**	Totale	Media
5	6	2	2	1	16	1.3
18	4	4	2	3	31	1
4	3	0	3	0	10	1.2
10	5	1	2	3	21	1.2
3	1	2	1	3	10	2
39	11	5	4	4	63	0.8
12	6	1	1	4	24	1.1
10	9	2	2	5	28	1.4
18	8	3	7	9	45	1.6
14	0	2	3	1	20	0.9
9	4	4	3	2	22	1.3
142	57	26	30	35	290	1.2
49%	20%	9%	10%	12%		

In merito alle categorie 4 e 5, riportiamo le percentuali, sempre rispetto ai punteggi da **0** a **4**.

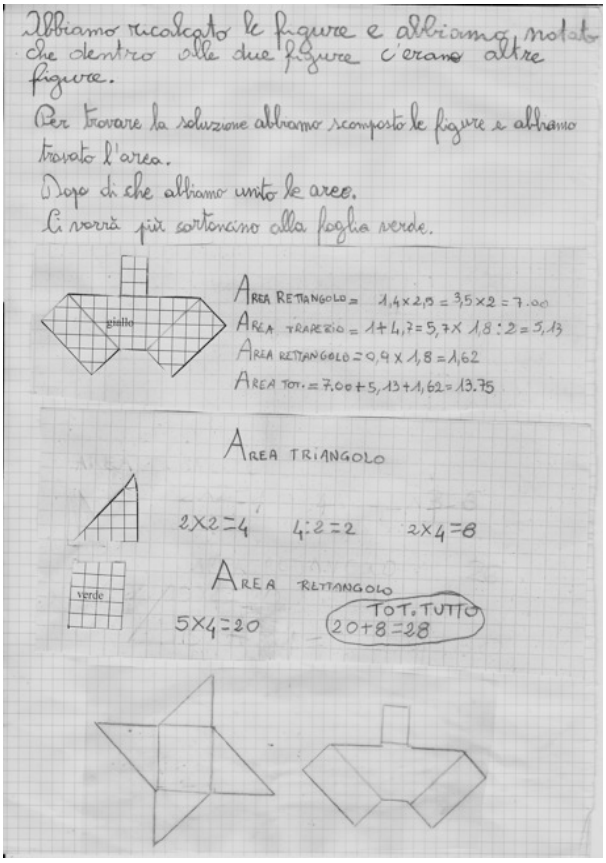
Categoria 4

148	60	57	93	131	489	2.0
30%	12%	12%	19%	27%		

Categoria 5

119	50	74	105	197	545	2.4
22%	9%	14%	19%	36%		

Come si è visto nella rubrica “attribuzione dei punteggi”, il punteggio **0** contempla il ”ricorso al perimetro per confrontare le figure o conteggio dei pezzi senza tener conto della loro area”.
L’analisi svolta dai membri del gruppo geometria, nelle loro sezioni di appartenenza, mostra che in effetti, il punteggio **0** è sempre stato attribuito a causa dei due tipi di difficoltà ricordati e non per incomprensione del problema.
E rispetto a tale punteggio, le percentuali vanno decrescendo nel passare dalla categoria 3 (49%) alla 4 (30%) fino alla 5 (22%).
Questi risultati indicano comunque che ancora in categoria 5 gli allievi incontrano gli ostacoli e le difficoltà che stiamo analizzando.
Relativamente agli errori sull’assenza di consapevolezza della necessità un’unità comune alcuni elaborati, soprattutto di categoria 3, presentano il conteggio dei **70 pezzi** (quadretti e mezzi quadretti) che porta ad una “uguaglianza di aree”.
Peraltro, una risoluzione particolare, di una classe di categoria 5, che può essere ancora ascritta alla modalità errata di risoluzione, che non tiene conto di un’unità di misura comune è, ad esempio, la seguente:



il gruppo di allievi suddivide le foglie in poligoni noti: poi misura con il righello i lati delle varie figure della foglia gialla e calcola le aree.

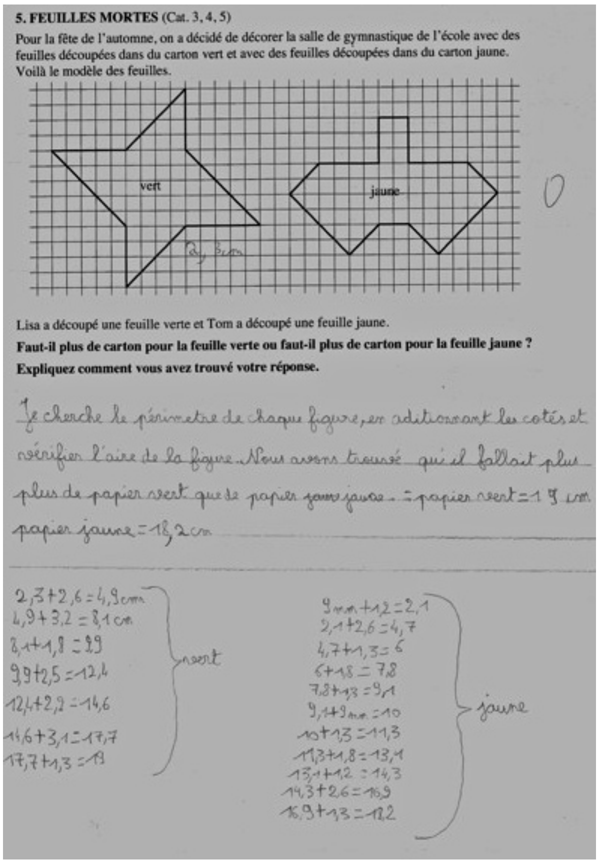
Per quanto riguarda la foglia verde, le misure relative al triangolo paiono prese in maniera approssimativa con il righello, ma per quanto riguarda il rettangolo, vengono contati i quadretti.

L'area totale è ottenuta addizionando aree calcolate **con unità di misura differenti**, cosa che conduce, fra l'altro ad un confronto "impossibile" tra le aree delle due foglie.

E' un esempio interessante di applicazione delle formule per il calcolo delle aree, senza peraltro **aver raggiunto la consapevolezza della necessità di una unità di misura comune**.

La confusione tra area e perimetro si evidenzia in numerosi elaborati soprattutto della categoria 3, ma anche nelle categorie 4 e 5, benché in percentuale minore.

Le strategie passano dal conteggio dei quadretti sul contorno, al perimetro calcolato dopo aver misurato con il righello la lunghezza dei lati (come mostra l'esempio più sotto riportato), o ad altre ancora come, ad esempio, l'associazione di una figura con area più grande ad una figura con maggior "ingombro": "*La forma che occupa più spazio è la foglia verde. Abbiamo trovato la risposta rifacendo le foglie e poi abbiamo contato l'altezza*".


5. FEUILLES MORTES (Cat. 3, 4, 5)

Pour la fête de l'automne, on a décidé de décorer la salle de gymnastique de l'école avec des feuilles découpées dans du carton vert et avec des feuilles découpées dans du carton jaune.
Voilà le modèle des feuilles.

Lisa a découpé une feuille verte et Tom a découpé une feuille jaune.

Faut-il plus de carton pour la feuille verte ou faut-il plus de carton pour la feuille jaune ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Je cherche le périmetre de chaque figure, en aditionnant les cotés et vérifier l'aire de la figure. Nous avons trouvé qu'il fallait plus plus de papier vert que de papier ~~jaune~~ jaune. = papier vert = 19 cm
papier jaune = 18,2 cm

2,3+2,6=4,9cm
4,9+3,2=8,1cm
8,1+1,8=9,9
9,9+2,5=12,4
12,4+2,2=14,6
14,6+3,1=17,7
17,7+1,3=19
vert

9mm+1,2=2,1
2,1+2,6=4,7
4,7+1,3=6
6+1,8=7,8
7,8+1,3=9,1
9,1+9mm=10
10+1,3=11,3
11,3+1,8=13,1
13,1+1,2=14,3
14,3+2,6=16,9
16,9+1,3=18,2
jaune

2.3. Qualche osservazione

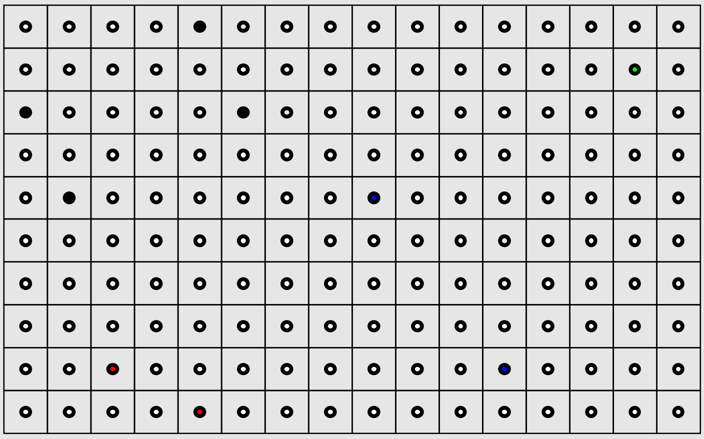
La nostra ampia ricerca sul concetto di area, corroborata anche dai risultati relativi a questo problema, ci porta a pensare che la questione della consapevolezza che sia necessaria un'unità di misura comune e il conflitto perimetro/area costituiscano ostacoli di tipo ontogenetico, ma anche di tipo didattico.
Di tipo ontogenetico perché si può notare, non solo in merito a questo problema, ma anche agli altri analizzati negli anni passati, come i risultati, globalmente, migliorino al variare della categoria (quindi dell'età degli allievi).
Di tipo didattico, perché in certi casi, anche all'aumentare dell'età, l'ostacolo permane e probabilmente non c'è stata la necessaria attenzione didattica ad ostacoli di questo tipo.
Rilevare ostacoli talvolta sottovalutati a livello scolare, può costituire un importante contributo del RMT alla didattica.
E proprio in tal senso, torniamo alle questioni relative al rettangolo.

3. Un problema, come una goccia che evolve

Come detto nell'introduzione, le difficoltà mostrate dagli allievi nella risoluzione di un problema proposto alla finale internazionale di Briga, ha spinto il gruppo geometria a chiedersi quali potrebbero essere le ragioni di tali difficoltà.

3.1. Il problema e la sua analisi a priori

Il tavolo da spostare



Questo disegno rappresenta il pavimento della cucina di Giulia con un cerchietto al centro di ciascuna piastrella quadrata.
Giulia osserva una cosa sorprendente: in certe posizioni, i quattro piedi del tavolo di cucina ricoprono esattamente quattro cerchietti del pavimento.
Per cominciare Giulia sistema il tavolo in una certa posizione, con i quattro piedi che ricoprono esattamente i quattro cerchietti segnati in nero sul disegno (in alto a sinistra).
Poi lo sposta in modo che i quattro piedi del tavolo poggino su altri quattro cerchietti. Due di questi cerchietti sono segnati in rosso sul disegno.
Segnate in rosso gli altri due cerchietti ricoperti dagli altri due piedi del tavolo in questa seconda posizione.
Giulia sposta ancora il tavolo, in una terza posizione in modo che i piedi del tavolo siano ancora su quattro cerchietti. Due di questi sono segnati in blu.
Segnate in blu gli altri due cerchietti ricoperti dagli altri due piedi del tavolo in questa terza posizione.
Si potrebbe spostare ancora il tavolo in modo che i quattro piedi ricoprano ancora quattro cerchietti, uno dei quali è segnato in verde?
Se sì, dite in quanti modi è possibile sistemare il tavolo con un piede sul cerchietto verde e gli altri tre su altri cerchietti e segnate questi cerchietti in verde e con altri colori se c'è più di una possibilità.

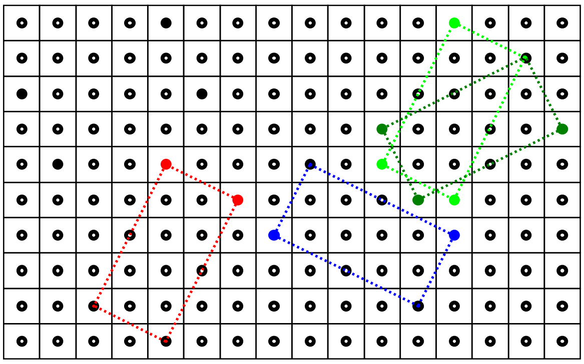
Analisi a priori

Ambito concettuale

- Geometria: riconoscimento del rettangolo a partire dai suoi quattro vertici e dalla conservazione delle sue proprietà negli spostamenti (isometrie)

Analisi del compito

- Capire che i quattro piedi del tavolo formano una figura che conserva le sue proprietà metriche all'atto degli spostamenti (distanza tra i piedi e "angoli" determinati da 3 piedi consecutivi). Si tratta di immaginare la forma «rettangolo» determinata dai suoi quattro vertici senza il disegno dei lati.
- Una volta riconosciuta la forma, passare al disegno del rettangolo i cui vertici sono i quattro cerchietti neri della posizione 1, poi procedere:
  sia con ritaglio e spostamento del pezzo rettangolare
  sia con la costruzione di altri rettangoli con il righello (tramite la misura delle lunghezze dei lati o con il riporto) e uso della squadra per gli angoli retti o ancora sistemando una diagonale, orizzontale o verticale, su 6 cerchietti
  sia visivamente con il conteggio o facendo riferimento ai cerchietti con spostamenti di 1 (o 2) verticalmente e di 2 (o 1 orizzontalmente); o ancora osservando che una diagonale è formata da 6 cerchietti allineati orizzontalmente o verticalmente.
  Le soluzioni: 2 cerchietti rossi, 2 cerchietti blu, 2 gruppi di 3 cerchietti verdi



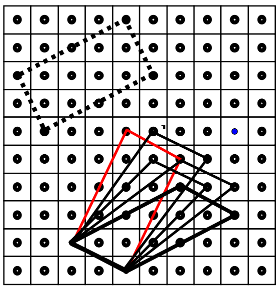
Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta e completa: i due cerchietti (o punti) rossi, 2 blu e 6 (2 x 3) verdi, con individuazione delle quattro posizioni del tavolo, con o senza il disegno dei lati del rettangolo fittizio
3 Una delle quattro posizioni del tavolo non è determinata, ma le altre tre lo sono con la posizione dei piedi oppure le quattro posizioni sono determinate ma con la deformazione di una delle figure
2 Due delle quattro posizioni del tavolo non sono determinate, ma le altre due lo sono con la posizione dei piedi
oppure tre posizioni determinate ma con una deformazione di una delle figure
1 Una sola posizione correttamente determinata
oppure nessuna posizione interamente corretta, ma con delle deformazioni
0 Incomprensione del problema

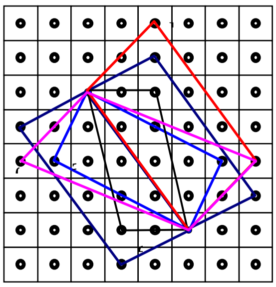
3.2. Una prima fase sperimentale

L'analisi a posteriori degli elaborati delle 12 classi della finale internazionale, a cura di François Jaquet (2009), ha evidenziato come la maggior parte dei disegni o configurazioni proposte dagli allievi fossero dei parallelogrammi:

Tavolo in posizione "rosso": le tipologie di risposta



Tavolo in posizione "blu": le tipologie di risposta



Tavolo in posizione "verde"

Nessuna classe ha trovato le due possibilità corrette.
3 classi hanno trovato uno dei rettangoli corretti.
Ci sono invece 6 rettangoli con i lati paralleli ai bordi del foglio.
Tutti gli altri disegni o configurazioni sono dei parallelogrammi.

La riuscita media piuttosto bassa, di 1,58, di questo problema, ha posto molti interrogativi ai quali ha cominciato ad interessarsi il gruppo permanente "ellealquadrato" che, dalle problematiche connesse alla costruzione del concetto di area, ha "allargato i propri orizzonti", decidendo di occuparsi di ostacoli ed errori nell'ambito più ampio della geometria piana.
Se da un lato le 12 classi finaliste possono essere considerate come classi "selezionate", dall'altro, avevano appena cominciato la classe quinta di scuola primaria. Un'ipotesi evidente è quella relativa ad un problema sovradimensionato per la categoria 5.
In vista del convegno di Nivelles, incentrato su difficoltà, ostacoli ed errori, ai membri del gruppo, diventato "gruppo geometria piana", uno dei compiti da svolgere, prima dell'incontro, è stato quello di somministrare, laddove possibile, in classi di categoria 4 e 5 (a coppie) e in classi di categoria 6, 7, 8 (individualmente), il problema in questione.

Tale problema è stato in effetti somministrato a varie classi della scuola primaria e secondaria di primo grado sia in Italia che in Francia.
L'analisi degli elaborati ha mostrato che non ci sono grandi differenze dei due paesi: errori e conseguenti difficoltà sono stati rilevati anche a livello della categoria 8.
L'errore più frequente è stato, ancora una volta, quello di disegnare parallelogrammi non rettangoli. Si è evidenziata anche una differenza nelle modalità di risoluzione, poiché i bambini della scuola primaria non hanno esitato a manipolare (molti di quelli che hanno trovato la soluzione hanno utilizzato il ritaglio del rettangolo che simboleggiava il tavolo), mentre gli allievi più grandi, in molti casi, non hanno fatto ricorso ad aspetti manipolativi.
Inficiata l'ipotesi della difficoltà dovuta essenzialmente alla giovane età degli allievi, ci si chiede se le cause siano piuttosto "interne" al problema, siano cioè da ricercarsi nell'enunciato del problema, oppure siano piuttosto "esterne" al problema stesso, cioè di tipo concettuale.

3.2.1. Cause interne al problema, ipotesi su aspetti insiti nell'enunciato

Ci si chiede, nell'ambito dei lavori del gruppo, a Nivelles, se, "disegnando" il tavolo, gli allievi lo abbiano visto in prospettiva, cosa che spiegherebbe la costruzione di un parallelogramma che per loro rappresenterebbe un rettangolo.
Questa interpretazione diventa l'oggetto di una prima ipotesi da testare. Mediante un cambiamento dell'enunciato possiamo modificare la variabile didattica "oggetto", per fare in modo che l'oggetto "tavolo", inteso come oggetto tridimensionale, sia sostituito da un oggetto pensabile come bidimensionale, per esempio, un tappeto.
In effetti, il problema de "Il tavolo da spostare", preparato per la finale internazionale di Briga, aveva preso spunto da un problema proposto da M-H. Salin (2008): in una palestra, gli allievi (10-11 anni, per noi cat. 5) devono spostare un tappeto pesante (di circa 1,5 m su 0,9 m) e indicare in anticipo la posizione di tre vertici, essendone fissato uno da parte dell'insegnante. L'attività si sviluppa in uno spazio (mesa-spazio) più grande di quello del foglio di carta (micro-spazio) sul quale si sviluppa la maggior parte dei lavori di geometria a scuola. Gli allievi hanno a disposizione righelli, squadrette e altri strumenti di misura a disposizione. Gli osservatori dell'esperienza qui citata, hanno constatato che pochi allievi sono capaci sia di rispondere correttamente in modo diretto utilizzando una squadretta, sia di interpretare i loro insuccessi constatando che hanno ignorato il vincolo dell'angolo retto per determinare la posizione dei vertici.
Un'altra ipotetica causa interna potrebbe essere quella legata alla "quadrettatura", la quale potrebbe aver imposto dei limiti: gli allievi avrebbero seguito un percorso determinato proprio dai punti in colore e dalla quadrettatura, per cui le proprietà locali del disegno (la ricerca dei punti in colore e la quadrettatura da rispettare) avrebbero fatto perdere di vista il contesto generale di ciò che era richiesto dal problema, ovvero si è perso di vista il rettangolo, peraltro non menzionato esplicitamente nell'enunciato.

3.2.2. Cause esterne, ipotesi su aspetti relativi ai concetti in gioco

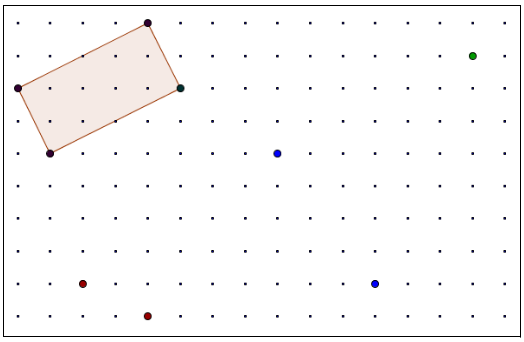
Alcuni allievi non si sono accorti, che, con le loro costruzioni, formavano angoli più ampi di 90° (addirittura di 120°).
Ci si chiede se possa aver influito, sulla costruzione di parallelogrammi non rettangoli, (considerati fedeli al modello rettangolare) un'insufficiente acquisizione del concetto di angolo retto, da un lato, e dall'altro, la non esplicita consapevolezza, per quanto riguarda il rettangolo, dell'invarianza dell'angolo retto. In effetti, i due "invarianti" che si sono evidenziati come i più "intuitivi" per gli allievi sono stati quelli relativi alle lunghezze di due lati opposti e il parallelismo.
Per quanto riguarda il tavolo "in posizione blu", si aggiunge anche la difficoltà nel gestire le diagonali del rettangolo.
Benché il gruppo "geometria piana" si fosse dato anche altri compiti da svolgere in vista delle sessioni di lavoro a Nivelles, si è invece deciso a lavorare sull'acquisizione del concetto di rettangolo e i relativi ostacoli.
Tenendo conto delle ipotesi riportate più sopra, cioè in particolare:
- ruolo degli oggetti in gioco (tavolo o tappeto),
- ruolo del disegno del rettangolo al posto dei soli vertici.
- ruolo della quadrettatura

si decide di elaborare quattro varianti del problema originale "Il tavolo da spostare", cercando di considerare qualche combinazione delle variabili quali tavolo, tappeto, quadrettatura, carta non quadrettata (punteggiata o bianca).

4. Quattro varianti del problema

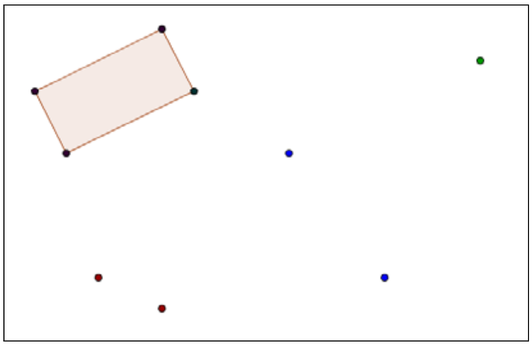
Per ragioni di spazio, non verranno riportate le consegne delle quattro varianti, ma solo la figura e gli aspetti cruciali che le differenziano dalla versione originale.
Indicata con 1) la formulazione originale del problema de "Il tavolo da spostare", le quattro varianti sono le seguenti:

- versione 2)



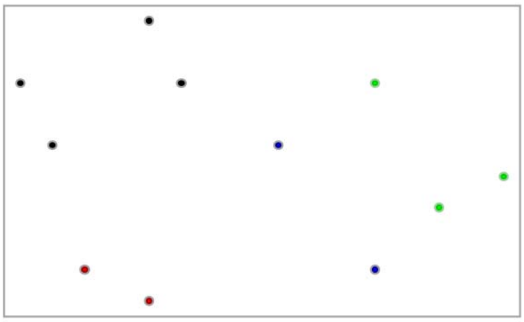
La versione 2) è elaborata a partire dalla versione originale, ma presenta una carta punteggiata invece che una quadrettatura (forse troppo "direttiva" in termini di segmenti). Gli aspetti cruciali che la differenziano dalla 1) sono: **il rettangolo iniziale è disegnato e l'oggetto "tappeto" è assimilabile ad un oggetto in 2D.**

- versione 3)



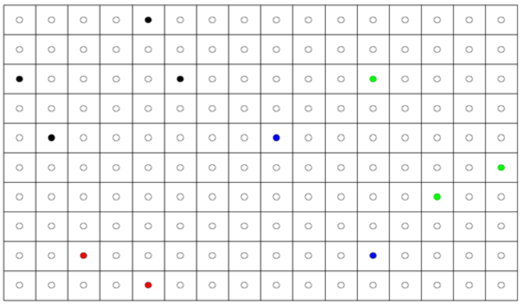
la versione 3) si differenzia dalla 2) per il fatto di essere su foglio bianco.
La nostra attenzione è rivolta, in particolare, al disegno che gli allievi faranno a partire dai punti rossi e a partire dai punti blu.
Il foglio bianco "impone" la necessità di un modello o di una squadretta (o goniometro, a seconda della classe).

- versione 4



la versione 4) è ancora su foglio bianco, ma questa volta senza i lati del rettangolo (è il modello tavolo come la versione originale). Con, però, tre punti verdi dati, per facilitare l'entrata nel problema ed è richiesto agli allievi di cominciare con la sistemazione del quarto punto verde.
Se il quarto vertice verde non è posizionato correttamente si ottiene un quadrilatero che non è neanche un parallelogramma (non rettangolo).
Il foglio bianco "impone" la necessità di un modello o di una squadretta (o goniometro).

- versione 5



la versione 5) è di nuovo con quadrettatura ma discende dalla versione 4).
E’ una variante più facile e “progressiva” con tre punti in verde. In questa situazione la “pregnanza” della quadrettatura dovrebbe permettere, secondo noi, di trovare il quarto punto verde senza controllare la conservazione dell’angolo retto, ma solo il parallelismo e la congruenza dei lati.

4.1. Modalità di somministrazione per la “sperimentazione”

Parliamo qui di sperimentazione, nel senso di testare, con le quattro versioni più sopra presentate, le ipotesi che sono scaturite sia dall’analisi dei risultati effettuata da F. Jaquet relativamente agli elaborati della classi partecipanti alla finale internazionale, sia dalla discussione del gruppo di lavoro a Nivelles.
Nella gran parte delle classi nelle quali insegnano i membri del gruppo geometria, era già stato dato il problema de “Il tavolo da spostare”, con lo scopo, come detto più sopra, di raccogliere dati relativi alla risoluzione di tale problema. Si decide, dunque, di coinvolgere anche altri insegnanti in questa fase sperimentale.
In linea generale si è stabilito di somministrare le versioni 2) o 5) (tappeto o tavolo, cioè solo i quattro punti o il rettangolo), oppure 2) o 3) (tappeto su carta punteggiata o tappeto su carta bianca) a classi di categoria 4 e 5, a coppie di allievi, mentre si è proposto, laddove possibile, di cercare di somministrare le 4 versioni, da 2 a 5, (due per classi, divise in due parti), da risolvere individualmente, in classi di categoria 6, 7, 8. E’ apparso inoltre auspicabile cercare di coinvolgere qualche insegnante di scuola superiore per verificare a quale livello gli allievi superano definitivamente gli ostacoli relativi al “rettangolo”, rendendosi esplicitamente conto dell’imprescindibile controllo degli angoli retti.
Si è proposto, infine, di cercare laddove possibile, di organizzare una sessione di discussione con e tra gli allievi al fine di meglio comprendere le loro procedure e gli eventuali strumenti utilizzati per risolvere il problema.

4.2. Verifica delle ipotesi

I diversi tipi di risposte relative alle nostre sperimentazioni sono state dettagliate a partire dal modello proposto in (Jaquet, 2009) e che va, per ciascuno dei casi “rosso”, “blu” e “verde”, dalla risposta corretta all’assenza di risposta, passando per i vari tipi di parallelogrammi non rettangoli, più o meno “inclinati” o addirittura per figure che non sono neppure parallelogrammi.
Se da un lato è vero che i risultati non sono significativi laddove visti in un’ottica meramente statistica, a causa dei troppi parametri difficili da “misurare” e, in alcuni casi, della non alta numerosità del campione, dall’altro, la loro analisi ci consente comunque di trarre qualche conclusione che consideriamo significativa.
Globalmente i risultati migliori si sono avuti nel caso delle versioni “guidate”, 4) e 5), dove si trattava di individuare dapprima solo uno dei vertici mancanti del “rettangolo verde”. Se si guarda però ai risultati relativi al solo “rettangolo rosso”, nel caso delle categorie 6, 7 e 8, dove sono state proposte individualmente le versioni 3), 4) e 5), su circa 100 elaborati, le percentuali di riuscita variano molto poco e si attestano in tutti e tre i casi intorno al 45 %. Nel caso della versione 1), ancora su un centinaio di allievi ai quali era stato proposto il problema prima dell’incontro di Nivelles, la percentuale di riuscita nel caso del “rettangolo rosso” era stata del 43%.
A livello delle categorie 4 e 5, sono state somministrate per lo più le versioni 2) e 3) e i risultati mostrano, ancora nel caso del “rettangolo rosso”, una percentuale di riuscita similare, che si attesta tra il 45% (versione 2) e il 42% (versione 3).
Ci sembra di poter parlare di scarsa influenza della variabile “oggetto” e del disegno del rettangolo, come pure di quadrettatura o non quadrettatura.
Le cause delle difficoltà sembrano essere quelle di tipo “esterno” più sopra illustrate, legate alla proprietà dell’angolo retto.

5. Per cercare di capire le difficoltà

5.1. Formazione di un concetto

Ancora Lismont e Rouche, fanno osservare come sia necessario tener conto di differenti livelli nella formazione di concetti e riportano l'esempio del rettangolo.
Si va dal pre-concetto, agli oggetti mentali per arrivare ai concetti formali.
"Ad un primo livello, il rettangolo è una forma *piatta* che incontriamo sovente di fronte (una porta, una finestra,…) o che possiamo disporre davanti a noi "ben dritta" (con due lati verticali). Riconosciamo il rettangolo attraverso una percezione globale: ogni rettangolo in posizione privilegiata dà la sensazione di occupare lo spazio nello stesso modo (…) Chi si trova a questo stadio di sviluppo mentale ha dunque familiarità con il rettangolo, ed eventualmente gli dà un nome. Ma non è per nulla capace di parlarne, di spiegare alcune delle sue caratteristiche o fenomeni che gli sono propri."
Si tratta qui del primo livello, quello di pre-concetto.
"Ad un secondo livello, il rettangolo si installa meglio nella *coscienza* e nel *linguaggio*, ed anche nella volontà di conoscere. Non è solamente utilizzato e nominato, ma si può *parlare* dei lati orizzontali e verticali, dell'uguaglianza dei lati, degli angoli retti (…) Questo livello di conoscenza del concetto può essere più o meno sviluppato, secondo l'esperienza della persona, e in particolare secondo il suo percorso scolare. Le conoscenze in questione hanno la loro sorgente nelle esperienze sensorie-motrici presentate al livello precedente. Ma esse indicano un grado di organizzazione mentale più complesso. (…) Seguendo Freudenthal [1983], diciamo *oggetti mentali* i concetti mobilizzati a questo livello dell'attività intellettuale."
"Passiamo ora ad un terzo livello, quello della matematica costituita. Qui il rettangolo non è più, come i rettangoli dell'ambiente intorno a noi, un oggetto che si possa approcciare, di cui ci si possa servire e sul quale si possa riflettere *senza uno studio anteriore*. E' al suo posto nello sviluppo di una teoria, posto che varia a secondo degli assiomi che ci si dà. (…) Il rettangolo appare come un episodio di un'impresa intellettuale esigente e di lungo respiro. (…) abbiamo deciso di utilizzare, per designare questo tipo di concetti, la locuzione *concetti formali*."
E viene allora chiarito che "L'apprendimento della matematica consiste in un certo senso nel passare…dai pre-concetti agli oggetti mentali, poi eventualmente ai concetti formali. (…) Il concetto di rettangolo matematico ha le sue radici nel pre-concetto di rettangolo e nell'oggetto mentale rettangolo. Tutti e tre i livelli dei concetti sono sollecitati nel pensiero creativo. I primi due sono soprattutto sorgente di immagini e intuizioni, l'ultimo fornisce gli strumenti del rigore."
A questo punto, il titolo del nostro rapporto "Il rettangolo…non così evidente!" comincia ad avere una sua ragion d'essere.
Ci sembra che le difficoltà mostrate dagli allievi, dei diversi livelli scolari, quando sono chiamati a trovare due vertici di un rettangolo (non in posizione privilegiata), noti gli altri due, ma anche un solo vertice noti gli altri tre, siano difficoltà insite nell'ostacolo costituito essenzialmente dalla "necessità dell'angolo retto".
In effetti, il rettangolo in posizione privilegiata non fa apparire la necessità di tale proprietà ed inoltre diventa un modello spesso troppo "forte" dal quale è difficile svincolarsi, complicato, in particolare in ambito linguistico italiano dove si parla di base e altezza. Tale vocabolario evoca ovviamente l'orizzontale e la verticale.
Le considerazioni di Lismont e Rouche, sembrano evidenziare la necessità di non passare troppo presto ad aspetti formali laddove non siano stati sviluppati adeguatamente i due livelli precedenti. Ci sembra di poter condividere, nel nostro piccolo, questo punto di vista, che è anche quello di altri filosofi ed epistemologi, da J. Piaget e Vigotski in poi.
E a proposito di Piaget, non può essere dimenticato che i suoi studi sperimentali hanno portato, fra le innumerevoli altre, a considerazioni basilari sulle difficoltà del concetto di angolo, concetto che entra così prepotentemente nel concetto di rettangolo.
In Piaget, Inhelder (1947), è ben chiarito il fatto che certi aspetti connessi al concetto di angolo, non sono acquisiti prima degli 11-12 anni.
Se da un lato dunque, il concetto di angolo è un concetto ontologicamente complicato, non può non esserlo anche quello di rettangolo.
Pensiamo pertanto che nella pratica didattica questi aspetti vadano tenuti in debito conto, non per non trattare il rettangolo prima degli 11-12 anni, evidentemente, ma per non darne troppo presto per scontata l'acquisizione, passando pertanto troppo presto ad aspetti più formali.
Come abbiamo visto, laddove il rettangolo non è in posizione privilegiata, anche allievi più grandi mostrano di avere delle difficoltà, laddove interviene la necessità di tener conto non solo della congruenza fra lati opposti e del loro parallelismo, ma anche e soprattutto della verifica che gli angoli siano retti.

A seguito dell'analisi dei risultati della sperimentazione con il tappeto della palestra, M-H. Salin si pone la seguente domanda *Aver riconosciuto il rettangolo e aver l'intenzione di reperire i suoi vertici non basta agli allievi per risolvere: perché?* La risposta a tale domanda ci sembra particolarmente significativa. Dapprima M-H. Salin chiarisce che la sua risposta, o meglio le sue risposte, più che certezze, sono delle ipotesi e pone l'accento sul fatto, che ci sembra cruciale, secondo il quale "Il problema posto non richiede di tracciare il contorno del tappeto, ma solamente di posizionare i vertici. Gli allievi "non pensano" a disegnare il rettangolo. (…) Qui il compito dell'allievo è molto più complesso di quello che può sembrare a prima vista: egli deve ricostruire mentalmente tutto il modello geometrico: segmenti che congiungono due punti (posizione dei vertici), e controllare la posizione relativa dei segmenti con degli angoli."

Le analisi dei risultati della nostra sperimentazione permettono di evidenziare questa complessità che riguarda anche, secondo noi, come già detto, l'ostacolo "dell'angolo retto". In effetti, M-H. Salin scrive più oltre che, sempre per quanto riguarda il problema del tappeto della palestra, "Nel corso del secondo tentativo, alcuni allievi « scoprono» che bisogna controllare la direzione della squadretta, sia prendendo la mira, sia facendo ricorso al righello. Questo tipo di compito non è preso in conto nell'insegnamento, né a livello di scuola primaria, né a livello di scuola media, e neanche nell'insegnamento professionale."

E' peraltro interessante constatare che nei documenti di applicazione dei programmi francesi del 2002, per la scuola primaria, ad un certo punto, è scritto: "Per il quadrato e il rettangolo, gli allievi sono confrontati ad esercizi di costruzione a partire da un vertice dato o più vertici dati, da un lato o più lati tracciati o a partire dal solo dato delle lunghezze dei lati." Questo commento, però, non è ripreso nei programmi del 2008.

Il nostro problema "Il tavolo da spostare" s'inscrive bene in questo documento, ma tale indicazione è perseguita nei testi scolastici? E in classe?

Pensiamo che questo sia uno dei nodi centrali (tra altri) della didattica del concetto di rettangolo, perché è in particolare in questa ricerca di vertici mancanti di un rettangolo che la necessità dell'angolo retto diventa imprescindibile per non incorrere nell'errore di tanti allievi o gruppi di allievi ai quali è stato proposto il problema de "Il tavolo da spostare", nelle sue varie versioni, che hanno costruito perlopiù dei parallelogrammi non rettangoli, focalizzando la propria attenzione sui lati opposti paralleli e congruenti, "dimenticando" gli angoli retti.

Ci sembra che nei libri di testo e nella pratica scolastica, spesso, il rettangolo venga presentato, da un lato, nella sua posizione privilegiata, e dall'altro, come un "oggetto" già confezionato piuttosto che un "oggetto" di ricerca.

Ci sembra anche che i diversi aspetti di una nozione, per quanto riguarda svariati temi dei programmi, siano abbordati sovente nel corso di una medesima "lezione" e non siano problematizzati. Pensiamo che attività di tipo problematico incentrate sulla costruzione di un rettangolo (e di altre figure piane, naturalmente), potrebbero portare l'allievo ad una migliore consapevolezza della necessità di TUTTE le proprietà necessarie e sufficienti a definire il rettangolo (o un'altra figura piana).

N. Rouche (1995) sottolinea che "La geometria è, innanzitutto, il primo capitolo della fisica. Essa appartiene, poi, alla matematica, della quale idealizza gli oggetti e li coglie attraverso proprietà univoche di forma e di grandezza.

Confrontata con altre branche della matematica, la geometria ha questa particolarità: gli oggetti che essa sottopone alla riflessione non sono immediatamente simbolizzati in modo arbitrario, nel modo in cui l'aritmetica tratta i numeri rappresentandoli con cifre, o l'algebra con cifre e lettere. Gli oggetti del pensiero geometrico sono soprattutto figure. Esse si prestano alla percezione visiva. Le si costruisce."

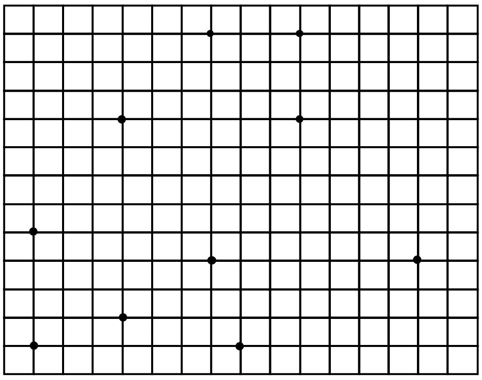
5.2. Nuovi problemi a proposito del rettangolo per le prove del 18° RMT

Al fine di approfondire la ricerca in corso sulle difficoltà e gli ostacoli insiti nel concetto di rettangolo, il "gruppo geometria" ha presentato alcuni problemi che sono stati inseriti nella prova I del 18° RMT.

In quest'articolo ne prendiamo in considerazione uno fra essi, i cui risultati abbiamo ampiamente analizzato. Si tratta di un problema di costruzione di un rettangolo che implica la presa in considerazione degli angoli retti e la loro verifica esplicita.

5.2.1. Il problema "I dieci punti"

I DIECI PUNTI (Cat. 5, 6, 7)
Ci sono dieci punti segnati qui sotto su una griglia quadrettata.
Francesco ne ha trovato quattro che sono i vertici di un rettangolo.

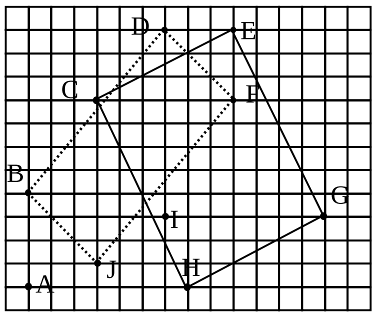


Individuate questi quattro punti, disegnate il rettangolo in rosso e spiegate perché pensate che sia un rettangolo.
Anna dice che può disegnare più di un rettangolo i cui vertici sono quattro dei dieci punti dati.
Che cosa ne pensate?

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Geometria: rettangolo e sue proprietà (parallelismo, angoli retti, isometrie dei lati opposti), …
- *Analisi del compito*
- Osservare la configurazione dei punti e cercare se si trovano diverse coppie di punti che siano le estremità di segmenti paralleli, in una data direzione (per esempio, orizzontalmente, DE, CF, IG, AH). Verificare poi se queste coppie definiscono dei segmenti della stessa lunghezza (nell'esempio precedente IG e AH) per verificare alla fine se possono appartenere allo stesso rettangolo cioè se determinano dei nuovi lati perpendicolari (nell'esempio precedente AHGI è un parallelogramma non rettangolo DIGE è un quadrilatero che ha solamente due angoli retti ...)



- Effettuare la stessa ricerca nelle altre direzioni, verticalmente poi in obliquo. Per esempio si nota che AB e CJ sono paralleli e verticali, ma non sono isometrici; DF e BJ sono paralleli secondo le diagonali della quadrettatura e isometrici, ma determinano solamente un parallelogramma non rettangolo.

  Nel caso precedente nel quale non è possibile determinare visualmente se il parallelogramma BJFD è un rettangolo, le verifiche necessitano la misura degli angoli (o un confronto con l'angolo retto di una squadretta o di un foglio di carta) oppure constatare che i lati BD e JF non passano per le diagonali dei quadratini della griglia come gli altri due lati.
- Proseguire l'esame sistematico delle coppie di punti che determinano coppie di segmenti paralleli e congruenti, poi verificare gli angoli, per scoprire "l'unico" rettangolo di Francesco, i cui quattro vertici figurano fra i dieci punti dati: CHGE.
- Disegnare il rettangolo CHGE, spiegare perché è un rettangolo: quattro angoli retti o due coppie di lati paralleli, della stessa lunghezza e perpendicolari; o due diagonali congruenti che si intersecano nel loro punto medio o due assi di simmetria perpendicolari ai lati («lati opposti congruenti e paralleli» non sono sufficienti per definire un rettangolo, ma solamente un parallelogramma), poi dire che Anna ha torto (perché non ha trovato altri rettangoli).

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta e completa: disegno dell'unico rettangolo possibile, CHGE e risposta "Anna ha torto"; con spiegazione sul perché si è sicuri che si tratti di un rettangolo (i quattro angoli retti o altre condizioni necessarie e sufficienti (si veda più sopra). Non è sufficiente dire che i lati opposti sono paralleli e della stessa "lunghezza".

3 Risposta corretta, ma incompleta: disegno dell'unico rettangolo possibile e dichiarazione che è l'unico, ma senza dire perché si è sicuri che sia un rettangolo
oppure: disegno dell'unico rettangolo possibile, CHGE, con spiegazione del perché si è sicuri che si tratti di un rettangolo, ma senza dichiarazione che dica che non è possibile disegnarne altri

2 Disegno del rettangolo CHGE e la dichiarazione che Anna può disegnarne anche un altro confuso con il parallelogramma BJFD

1 Disegno del rettangolo CHGE con altri parallelogrammi
oppure solo il parallelogramma BJFD

0 Incomprensione del problema

5.3. Analisi a posteriori degli elaborati

I membri del gruppo geometria hanno analizzato gli elaborati delle classi facenti riferimento alle proprie sezioni di appartenenza, tenendo conto delle tracce predisposte per l'analisi a posteriori:

1 Il gruppo geometria piana si interessa, al di là dell'attribuzione dei punteggi, alla confusione tra il rettangolo CHGE e il parallelogramma non rettangolo BJFD che figurano nei criteri dei punteggi « 1 » o « 2 », ma vorrebbe sapere se appaiono altre figure come il parallelogramma non rettangolo AHGI o i quadrilateri AHFC e CIGF (che non sono parallelogrammi ma vi si "avvicinano").

2 Il gruppo si interessa anche alle argomentazioni che gli allievi utilizzano per spiegare che CHGE è un rettangolo (menzionano l'angolo retto?).

3 Il gruppo si interessa anche più particolarmente alle argomentazioni degli allievi che spiegano che la figura BJDF è un rettangolo mentre invece è un parallelogramma non rettangolo (possono per esempio dire che i lati sono uguali due a due, ma possono anche dire che gli angoli sono retti e in quest'ultimo caso vorrebbe dire che sanno che il criterio degli angoli retti è necessario, ma che hanno misurato male o non hanno misurato).

4 Infine, sarebbe interessante sapere se gli allievi menzionano l'uso di una squadretta o di un altro strumento per determinare l'angolo retto.

In merito al punto 1.

Poiché in una parte importante degli elaborati che sono stati analizzati, i gruppi di allievi hanno ottenuto 2 punti avendo individuato correttamente il rettangolo CHGE, ma anche erroneamente, come rettangolo, la figura BJFD, oppure 1 punto, avendo considerato come unico "rettangolo" la figura, BJFD, riportiamo qui le percentuali, su 10 sezioni (di cui abbiamo i punteggi), dei punteggi 1 e 2:

- Cat. 5, su 287 elaborati, punteggio 1: 26%, punteggio 2: 30%
- Cat. 6, su 437 elaborati, punteggio 1: 21,7%, punteggio 2: 37,8%
- Cat. 7, su 329 elaborati, punteggio 1: 16%, punteggio 2: 33%

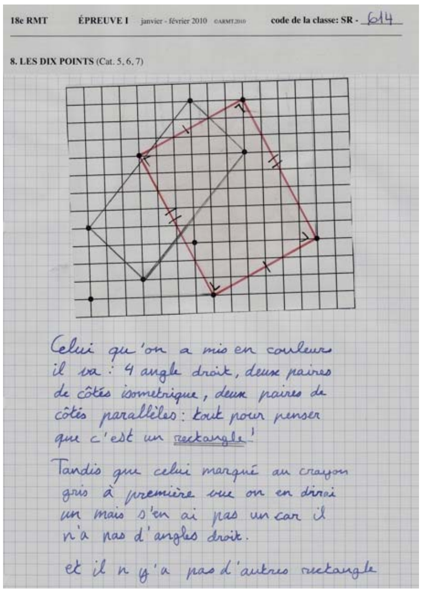
Dunque più del 50% sia in categoria 5, sia in categoria 6 e un po' meno del 50% in categoria 7.

Se si considerano, però, i punteggi delle 10 sezioni separatamente, si nota una certa variazione delle medie in funzione delle sezioni.

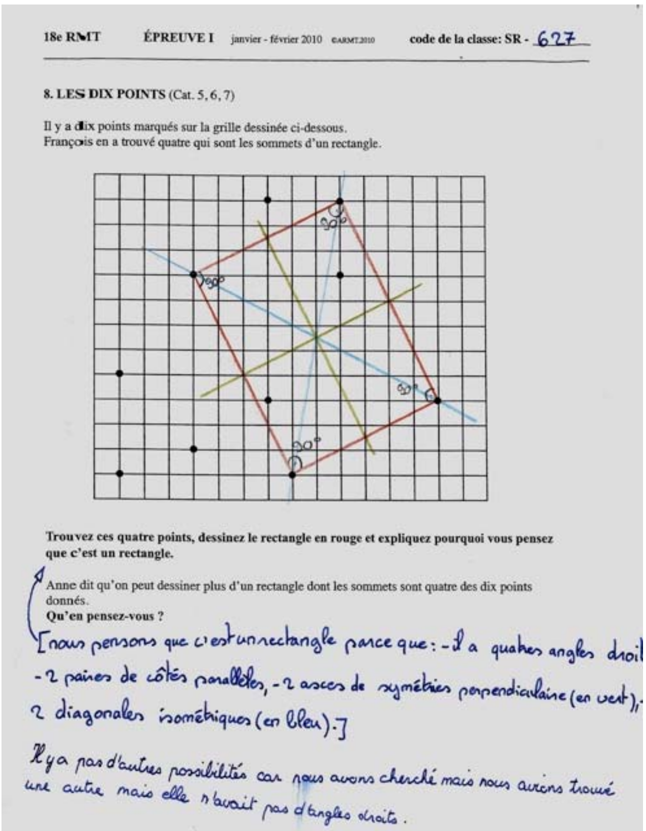
Negli elaborati (pochi) che hanno ottenuto punteggio "0", sono stati considerati come rettangoli, parallelogrammi "qualunque", fra i quali i parallelogrammi CIGF e AHGI, nonché, in un caso JCDI. In un caso (cat. 6) viene disegnata la figura ABIH e la spiegazione del fatto che è "un rettangolo" è: " *parce qu'il y a 2 angles droits*" (*perché ci sono 2 angoli retti*).

In merito al punto 2.

Il riferimento agli angoli retti è presente in particolare nel caso degli elaborati che hanno avuto 4 punti (12% in cat.5, 18,5% in cat. 6 e 25% in cat.7). Riportiamo qui due esempi della Svizzera romanda (cat. 6), particolarmente significativi:



(Trad. *Quello in colore va bene: 4 angoli retti, due coppie di lati isometrici, due coppie di lati paralleli: tutto fa pensare che sia un* <u>*rettangolo*</u>!
Al contrario quello disegnato con matita grigia a prima vista diremmo che lo è, ma invece no, perché non ha angoli retti. Non ci sono altri rettangoli)



(Trad. *Pensiamo che sia un rettangolo perché: ha quattro angoli retti, 2 coppie di lati paralleli, 2 assi di simmetria perpendicolari (in verde), 2 diagonali isometriche (in blu)*
Non ci sono altre possibilità perché abbiamo cercato e ne abbiamo trovato un altro, ma non aveva gli angoli retti.)

In generale, negli elaborati che hanno ottenuto 4 punti, viene detto che Anna ha torto perché la figura BJFD non è un rettangolo in quanto i suoi angoli non sono retti.

Ad esempio: "*On pense que Anne croit qu'elle a raison car de vue elle croit qu'il y a 4 angles droits mais quand on vérifie sa ne marche pas."(Pensiamo che Anna creda di aver ragione perché ad occhio crede che ci siano 4 angoli retti, ma quando si verifica non funziona)*

In alcuni casi si fa riferimento agli angoli retti, anche per la figura BJFD, evidentemente senza sentire la necessità di operare una verifica.

In merito al punto 3.

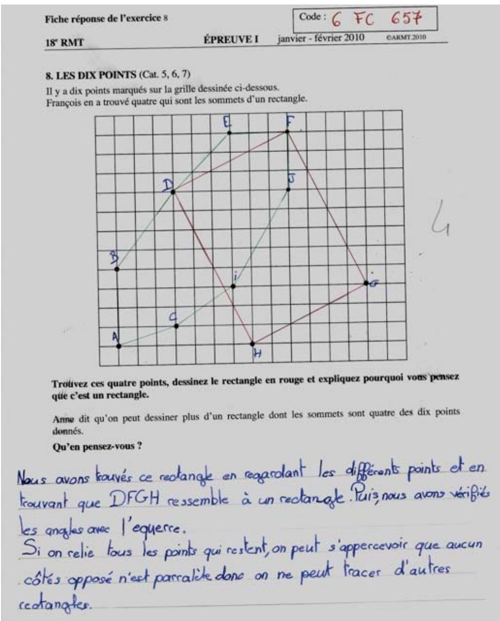
Nella maggior parte degli elaborati che considerano la figura BJFG come rettangolo, viene detto erroneamente che Anna ha ragione, ma senza dire perché si pensa che si tratti di un rettangolo. In un elaborato viene data la seguente motivazione della scelta: "*Parce que a la forme d'un rectangle presque parfait*". (Trad. *Perché ha la forma di un rettangolo quasi perfetto*).

In generale è detto che è un rettangolo perché ha i lati uguali a due a due.

In merito al punto 4.

L'uso della squadretta è nel complesso poco menzionato e lo si trova in particolare in elaborati francesi e svizzeri.

Un esempio interessante (cat. 6):



Fiche réponse de l'exercice 8 | Code : 6 FC 657

18e RMT | ÉPREUVE I | janvier - février 2010 | ©ARMT.2010

8. LES DIX POINTS (Cat. 5, 6, 7)

Il y a dix points marqués sur la grille dessinée ci-dessous.
François en a trouvé quatre qui sont les sommets d'un rectangle.

Trouvez ces quatre points, dessinez le rectangle en rouge et expliquez pourquoi vous pensez que c'est un rectangle.

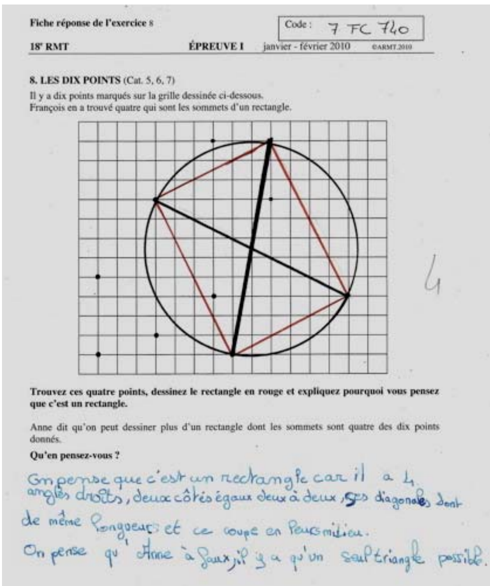
Anne dit qu'on peut dessiner plus d'un rectangle dont les sommets sont quatre des dix points donnés.

Qu'en pensez-vous ?

Nous avons trouvés ce rectangle en regardant les différents points et en trouvant que DFGH ressemble à un rectangle. Puis, nous avons vérifiés les angles avec l'equerre.
Si on relie tous les points qui restent, on peut s'appercevoir que aucun côtés opposé n'est parralèle donc on ne peut tracer d'autres rectangles.

(Trad.: *Abbiamo trovato un rettangolo guardando i diversi punti, trovando che DFGH assomiglia ad un rettangolo. Poi abbiamo verificato gli angoli con la squadretta.*
Se si congiungono tutti i punti che rimangono, possiamo convincerci che non ci sono lati opposti paralleli, dunque non si possono disegnare altri rettangoli.)

Nell'esempio che segue (cat. 7) si potrebbe intravedere una evidenziazione degli angoli retti, con i due triangoli inscritti in una semicirconferenza.



Fiche réponse de l'exercice 8 | Code : 7 FC 740

18e RMT | ÉPREUVE I | janvier - février 2010 | ©ARMT.2010

8. LES DIX POINTS (Cat. 5, 6, 7)

Il y a dix points marqués sur la grille dessinée ci-dessous.
François en a trouvé quatre qui sont les sommets d'un rectangle.

Trouvez ces quatre points, dessinez le rectangle en rouge et expliquez pourquoi vous pensez que c'est un rectangle.

Anne dit qu'on peut dessiner plus d'un rectangle dont les sommets sont quatre des dix points donnés.

Qu'en pensez-vous ?

On pense que c'est un rectangle car il a 4 angles droits, deux côtés égaux deux à deux, ses diagonales sont de même longueurs et se coupe en leurs milieu.
On pense qu'Anne à faux, il y a qu'un seul triangle possible.

(Trad.: *Pensiamo che sia un rettangolo perché ha 4 angoli retti, due lati uguali due a due, le sue diagonali sono della stessa lunghezza e si tagliano nel loro punto medio.*
Pensiamo che Anna sbagli, c'è un solo triangolo [ma ovviamente vogliono dire rettangolo] possibile.)

6. Qualche conclusione

A partire dal 2005, il gruppo *ellealquadrato*, divenuto ora gruppo *geometria piana*, si è occupato di questioni legate concetto di area. Ad un certo punto, però, hanno fatto la loro apparizione problematiche legate al concetto di rettangolo.

Tutto è cominciato a partire da una storia avente come protagonista un tavolo, i cui piedi sono i vertici di un rettangolo immaginario, che devono ricoprire dei posti ben determinati da una quadrettatura, ma ai quali gli allievi accordano delle libertà di posizionamento assolutamente incompatibili con l'invarianza dell'oggetto fisico e ben solido, per arrivare ad alcune varianti e ad un nuovo problema che prendiamo in considerazione per stilare queste nostre conclusioni su tale studio.

Come accade sovente, attraverso le prove del RMT, appaiono errori caratteristici inattesi o che non si era previsto che potessero manifestarsi in maniera tanto evidente a posteriori. Questi errori ricorrenti sono evidentemente rivelatori di costruzioni incompiute, di difficoltà od ostacoli.

Globalmente, il problema "I dieci punti", ha ottenuto un tasso di riuscita più alto rispetto a quello de "Il tavolo (o tappeto) da spostare", benché circa il 50% dei gruppi, delle varie categorie abbia ottenuto 2 punti avendo individuato correttamente il rettangolo CHGE, ma anche erroneamente, come rettangolo, la figura BJFD, oppure 1 punto, avendo considerato come unico "rettangolo" la figura, BJFD.

Bisogna tener conto del fatto che le due situazioni sono concettualmente piuttosto diverse:

* nel caso de "Il tavolo (o tappeto) da spostare" è necessario "immaginare" dapprima e poi "creare" un rettangolo a partire da qualche vertice dato, quindi, non solo mobilizzare in maniera critica le proprie conoscenze sul rettangolo, ma anche fare una vera e propria ricerca,
* nel caso de "I dieci punti" si tratta di "individuare" un rettangolo scegliendo fra punti dati (in potenza ci sono già i vertici) con l'applicazione delle caratteristiche che definiscono un rettangolo.

Il primo è pertanto concettualmente più difficile.

In entrambi i casi, però, i risultati mostrano come una gran parte di allievi non prendano in considerazione una delle caratteristiche del rettangolo, quella di avere gli angoli retti (e la necessità di una verifica con ad esempio il ricorso ad una squadretta). Le altre caratteristiche come il parallelismo e la congruenza dei lati opposti sono riconosciute e prese in considerazione nella grande maggioranza degli elaborati esaminati. L'ostacolo essenziale risiede dunque nella distinzione tra parallelogramma e rettangolo. E corrisponde al "passaggio dallo spazio proiettivo allo spazio euclideo" (secondo i termini di Piaget, 1947). In termini di trasformazioni geometriche, esso è legato alla non conservazione dell'angolo retto nella proiezione di un oggetto dello spazio a tre dimensioni sul piano (la foto di una porta rettangolare è raramente un rettangolo, piuttosto un parallelogramma).

L'ostacolo ha diverse origini, di cui alcune verosimilmente di ordine ontogenetico e legate allo sviluppo dell'allievo, ma i nostri dati mostrano che se da un lato la maggioranza degli allievi di 11, 12 anni, non hanno ancora costruito il concetto, altri presentano carenze notorie in questo ambito parecchi anni dopo.

Possiamo anche pensare ad origini epistemologiche dell'ostacolo, inerenti il sapere in se stesso. Forse abbiamo sottostimato la complessità del concetto e il conflitto con le concezioni spontanee provenienti da conoscenza empiriche, per esempio tra oggetto e sue rappresentazioni con figure geometriche del piano.

Ci sono anche aspetti didattici dell'ostacolo da prendere in considerazione ed è evidente che i membri di un gruppo di lavoro del RMT vi accordino un'attenzione particolare; essi, che si situano all'interfaccia tra ricerca e pratica. Le difficoltà degli allievi messe in evidenza dai nostri problemi sul rettangolo ci hanno sorpresi per la loro importanza e ci coinvolgono direttamente. Ci portano a porci delle domande sulla loro origine e a interrogare la scuola o il sistema nel quale ci troviamo.

Una delle prime ipotesi è che la difficoltà nel prendere in considerazione gli angoli retti sia in correlazione con i programmi scolastici, i libri di testo e il modo di presentare il rettangolo nelle pratiche scolastiche. In effetti abbiamo osservato delle differenze tra i tassi di riuscita secondo le regioni e i paesi.

Per ciò che riguarda l'Italia, sembra che si introducano troppo presto le misure quali il perimetro, l'area (e talvolta i volumi), piuttosto che le figure in quanto tali. Abbiamo esaminato alcuni testi scolastici che confermano quest'impressione. Non siamo però in grado di andare al di là di queste constatazioni, né di illustrarle con dati significativi. Cosa che peraltro non è fra gli scopi del RMT.

Allora, piuttosto che fare delle ipotesi sulle origini dell'ostacolo, facciamole sul modo di potervi porre rimedio, con delle proposte a partire dai dati raccolti, che mostrano un deficit nella padronanza del concetto di angolo retto laddove abbiamo condotto le nostre inchieste.

Questa constatazione non deve avere il sapore di un giudizio, perché in tal caso sarebbe negativo; non è neppure una valutazione “neutra”, cioè condotta da un punto di vista analitico o statico. Bisogna considerarlo come un apprendimento per i membri del gruppo, e per gli insegnanti che prenderanno conoscenza dei risultati di quest’analisi. Grazie a questi dati, sappiamo qualcosa di più sul reale livello di costruzione del concetto di angolo retto da parte degli allievi e, di conseguenza, possiamo intravedere delle prospettive d’azione che, per parte loro, sono positive.

Per esempio, per quanto riguarda “I dieci punti”, siamo pressoché sicuri che l’errore che abbiamo osservato farà la sua apparizione tra alcune risposte corrette. E’ dunque possibile prevedere un confronto collettivo tra allievi nel corso del quale dovranno ben trovare un accordo. E’ forse a questo punto che apparirà la necessità di utilizzare le squadretta per determinare quale o quali delle due figure prese in considerazione siano effettivamente dei rettangoli. Non a partire dall’ingiunzione del genere “prendete la squadretta” dove l’iniziativa del collegare lo strumento alla figura viene dall’esterno, ma a partire da un’idea concepita in seno al gruppo di allievi.

Nel caso de “Il tavolo da spostare”, la certezza di arrivare al conflitto rettangolo/parallelogramma permetterà, anche in questo caso, all’insegnante di organizzare un dibattito nel corso del quale forse a qualche allievo verrà l’idea di disegnare il rettangolo a partire dai quattro vertici dati e di riportarlo, con il ritaglio o la carta ricalco, sulle diverse soluzioni proposte. In tal caso, è verosimile che la conservazione dell’angolo retto, nello spostamento del modello, avrà assunto il senso dovuto per numerosi allievi.

Queste prospettive positive s’inscrivono in un uso didattico dei due problemi e illustrano in maniera dinamica le priorità che bisognerebbe accordare, in un percorso di apprendimento sul rettangolo, alla percezione delle proprietà in esercizi di classificazione o di riconoscimento di forme, alle manipolazioni sulle tecniche di costruzione, alle situazioni inedite, anche “conflittuali”, su problemi di applicazione, piuttosto che ad esercizi sulle aree e i perimetri meramente incentrati sulle misure e sui calcoli.

In effetti, nel lungo percorso di costruzione del concetto, ci si renderà ben conto che “il rettangolo non è così evidente”, come potrebbe sembrare.

7. Bibliografia

Bisso, C., Grugnetti, L. (a cura di): 2006, ‘Approccio al concetto di area con problemi del RMT’, Gruppo di lavoro n° 8, “ellealquadrato”, in R. Battisti, R. Charnay, L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds.), *RMT : des problèmes à la pratique de la classe/RMT: dai problemi alla didattica quotidiana, Actes des journées d’études sur le Rallye mathématique transalpin*, Bourg-en-Bresse 2004, Arco di Trento 2005, ARMT, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en-Bresse, IPRASE Trentino, 268-276.

Bisso, C., Grugnetti, L.: 2007a, ‘Il ruolo dei problemi del RMT nella costruzione del concetto di area’, in L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M. G. Rinaldi, *I problemi del RMT nella didattica quotidiana/ les problèmes du RMT dans la pratique de la classe*, Parma 2006, Sezione ARMT di Parma, ARMT, 25-36.

Bisso, C., Grugnetti, L. (a cura di): 2007b, ‘La costruzione del concetto di area con problemi del RMT’, in IBIDEM, 169-187.

Bisso, C., Grugnetti, L.: 2009, ‘Il concetto di area con i problemi del RMT : un percorso quinquennale’, in L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds.), *Rallye Mathématiques Transalpin et interculturalité/Rally Matematico Transalpino e intercultura*, Brigue 2008, ARMT, SCNAT, 167-182.

Jaquet F.: 2000, Il conflitto area-perimetro, *L'educazione Matematica*, ed. CRSEM (Prima parte: Anno XXI - Serie VI - Vol 2, n. 2, 66-77, seconda parte: n. 3, 126-143).

Jaquet, F.: 2009, ‘La finale internazionale du 16e RMT, problèmes et analyse’, in L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds) *Rally Matematico Transalpino e intercultura*, ARMT, SCNAT, 225-253.

Lismont, L, Rouche, N. (a cura di) : 2001, *Formes et mouvements*, CREM.

Piaget, J, Inhelder, B., 1947, *La représentation de l’espace chez l’enfant*, Presses Universitaire de France.

Rouche, N. (a cura di): 1995, *Le Mathématiques de la maternelle jusqu’à 18 ans. Essai d’élaboration d’un cadre global pour l’enseignement des mathématiques.* CREM.

Edizione italiana: CREM, 1999, *La matematica dalla scuola materna alla maturità. Proposta di un percorso globale per l’insegnamento della matematica.*

edizione italiana a cura di Lucia Grugnetti e Vinicio Villani – traduzione di Silvano Gregori. Pitagora editrice.

Salin, M-H.: 2008, ‘Enseignement et apprentissage de la géométrie à l’école primaire et au début du collège, le facteur temps’, APMEP, n. 478, 647-670.

LE RECTANGLE … PAS SI EVIDENT!

Bernard ANSELMO, Clara BISSO, Lucia GRUGNETTI

Au nom du Groupe géométrie plane[6]

1. Introduction

Comme une bonne partie de la géométrie plane, la définition du rectangle prend aussi ses racines dans les *Éléments* d'Euclide, en tant que quadrilatère dont les côtés ne sont pas tous isométriques (contrairement au cas du carré), mais dont tous les angles sont droits. C'est ainsi une figure « allongée » ou « oblongue » dans l'acception « plus longue que large ».
Et c'est cette caractéristique, si on peut le dire ainsi, qui fait qu'on parle de « longueur » et de « largeur » plutôt que de « du plus grand côté» ou du « plus petit côté » et qu'on pense implicitement à un rectangle en position « privilégiée » (selon une terminologie empruntée à L. Lismont, N. Rouche[7] avec la longueur horizontale et la largeur verticale ou vice versa[8]. Et si, par curiosité, on consulte le fameux ouvrage chinois ancien *Les neuf chapitres*, on s'aperçoit que les mots désignant la longueur et la largeur d'un rectangle sont *zong* et *guang* qui indiquent respectivement les directions nord-sud et est-ouest.
Depuis toujours, dans les manuels, le rectangle est le plus souvent représenté en position privilégiée, en référence à l'horizontale et à la verticale.
Comme le soulignent Lismont et Rouche, la forme rectangulaire en position privilégiée est typique d'objets familiers comme, par exemple, les portes et les fenêtres. Elle est reconnue très tôt par le jeune enfant sans référence aux propriétés caractéristiques du rectangle.
Mais que se passe-t-il quand une forme rectangulaire ne se trouve pas dans cette position ? Si la « forme » dont nous parlons est celle d'un objet de la réalité physique ou encore d'un « objet mental », son essence rectangulaire ou sa « rectangularité » est encore reconnue sans devoir entrer dans les particularités de ses propriétés qui en font précisément un rectangle.
Mais que se passe-t-il s'il s'agit de reconnaître ou de construire la figure rectangle dans une position non privilégiée ?
Les classes participant à la finale internationale de Brigue, en 2008 (Jaquet, 2009), ont eu à chercher un problème sur ce thème. Les résultats obtenus ont mis clairement en évidence certaines difficultés rencontrées par les élèves lors de sa résolution. De là est née la nécessité de chercher les raisons de ces difficultés. Cependant, dans cet article, avant de traiter des difficultés attachées au concept de rectangle, le groupe de travail géométrie fait un pas de côté pour revenir, brièvement, sur les questions liées au concept d'aire dont il s'est occupé depuis 2005 sous le nom de groupe *Ellealquadrato* (Bisso, Grugnetti, 2006, 2007a, 2007b, 2009).

2. Un pas de côté : difficultés relevant du concept d'aire

Dans le cours de notre recherche, concernant la construction du concept d'aire et les difficultés qui y sont associées, plusieurs problèmes du RMT sur la détermination d'aires par pavage et dénombrements ont fait apparaître l'obstacle lié à la recherche d'une unité de mesure commune à différents types de pavages. D'autres ont fait apparaître des confusions entre aire et périmètre (cf. par ex. Jaquet, 2000).
La particularité du RMT, qui propose un même problème à des catégories différentes, permet de faire d'intéressantes observations à partir des résultats, catégorie par catégorie, comme, par exemple, vérifier si un obstacle donné perdure ou bien tend « à disparaître » à mesure que l'âge des élèves augmente. Cette spécificité peut, en quelque sorte, permettre, (comme on le verra au § 2.3.) de tirer quelques conclusions sur la dichotomie « obstacle ontogénique »/« obstacle didactique ».
L'autre particularité de RMT est le nombre des classes impliquées et donc la taille de l'échantillon « à analyser ». Aux résultats des recherches mentionnées dans les articles rappelés plus haut, nous avons estimé important d'en apporter d'autres, à partir encore d'un problème avec des surfaces à mesurer par comptage d'unités d'aire (une fois l'unité de mesure commune choisie). Le groupe géométrie a par conséquent proposé le problème « Les feuilles mortes», qui a été retenu pour faire partie de ceux de la première épreuve du 18° RMT.

---

[6] Bernard Anselmo, Chiara Badiali, Silvana Bisogni, Clara Bisso, Jean-Louis Billody, Fabio Brunelli, Florence Falguères, Lucia Grugnetti, Elisabetta Mari, André Nguyen, Letizia Pucci, Michele Rapuano, Elsa Renna, Samia Mehaddene, M. Francesca Tanda, Agnese Tomasini, Donata Tardio, con la collaborazione di Anna Maria D'Andrea e Francesca Ricci.

[7] Formes et Mouvements (2001).

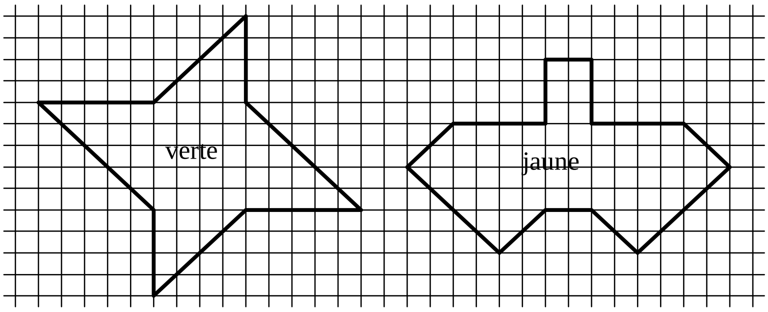
[8] L'image mentale de cette position est encore renforcée en italien où la « largeur » est traduite par « altezza » qui signifie aussi « hauteur ».

Les résultats, concernant ce problème, sont de deux ordres : ceux relatifs aux analyses conduites par des membres du groupe géométrie, sur les productions des classes inscrites dans leur section à l'épreuve de RMT, et ceux relatifs aux pourcentages des scores attribués, catégorie par catégorie, par les différentes sections de l'ARMT.

2.1. Le problème

FEUILLES MORTES (Cat. 3, 4, 5) **épreuve I, 18 RMT**

Pour la fête de l'automne, on a décidé de décorer la salle de gymnastique de l'école avec des feuilles découpées dans du carton vert et avec des feuilles découpées dans du carton jaune.
Voilà le modèle des feuilles.



Lisa a découpé une feuille verte et Tom a découpé une feuille jaune.

Faut-il plus de carton pour la feuille verte ou faut-il plus de carton pour la feuille jaune ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

2.2. Les résultats

La rubrique« attribution des points » relative au problème ci-dessus est la suivante :

4 Réponse correcte (il faut plus de cartons pour la figure jaune que pour la figure verte) avec le détail de la démarche utilisée (calculs, découpages, parties équivalentes mises en évidence ...)

3 Réponse correcte avec des explications incomplètes mais qui témoignent d'une procédure correcte

2 Réponse fausse mais témoignant d'une procédure correcte (par exemple avec erreurs de comptage dues à des difficultés dans les transformations des demi-carreaux en carreaux)

1 Début de raisonnement correct mais n'aboutissant pas aux déterminations des aires
ou réponse correcte (jaune) sans aucune justification ni détail de calcul

0 Incompréhension du problème ou comparaison des figures par détermination de leur périmètre ou comptage des pièces sans tenir compte de leur aire

Nous indiquons ici les résultats de dix sections de la catégorie 3, parmi lesquelles figurent des sections françaises, des sections italiennes, la section du Luxembourg, les sections de la Suisse romande et du Canton du Tessin.

Nous n'avons pas pris en considération les résultats de sections qui présentaient moins de dix classes dans cette catégorie.

Le tableau donne la répartition des effectifs suivant les scores obtenus (de 0 à 4).

0	**1**	**2**	**3**	**4**	Total	moyenne
5	6	2	2	1	16	1.3
18	4	4	2	3	31	1
4	3	0	3	0	10	1.2
10	5	1	2	3	21	1.2
3	1	2	1	3	10	2
39	11	5	4	4	63	0.8
12	6	1	1	4	24	1.1
10	9	2	2	5	28	1.4
18	8	3	7	9	45	1.6
14	0	2	3	1	20	0.9
9	4	4	3	2	22	1.3
142	57	26	30	35	290	1.2
49%	20%	9%	10%	12%		

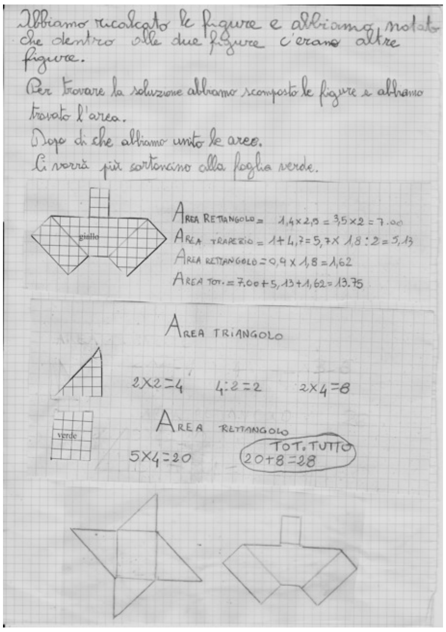
Pour les catégories 4 et 5, nous indiquons les pourcentages, toujours suivant les scores obtenus de 0 à 4.
Catégorie 4

148	60	57	93	131	489	2.0
30%	12%	12%	19%	27%		

Catégorie 5

119	50	74	105	197	545	2.4
22%	9%	14%	19%	36%		

Comme on l'a vu sous la rubrique « attribution des points », le « 0 point » correspond à la comparaison des figures par détermination de leur périmètre ou comptage des pièces sans tenir compte de leur aire.
Les analyses menées par les membres du groupe géométrie, dans leurs sections respectives, montrent qu'en effet, le « 0 point » a été toujours attribué à cause de ces deux types de difficulté et non pour incompréhension du problème.
Et pour ce « 0 point », les pourcentages vont en décroissant de la catégorie 3 (49%) à la 4 (30%) jusqu'à la 5 (22%). Ces résultats indiquent qu'il y a encore en catégorie 5, des élèves qui rencontrent les obstacles et les difficultés que nous avions identifiés.
Pour ce qui concerne les erreurs dues à la non-conscience de la nécessité d'une unité commune, on retrouve dans certaines productions, surtout de catégorie 3, le comptage des 70 pièces (carreaux et demi-carreaux) constituant chacune des deux feuilles, qui conduit à une égalité des aires. De même, on peut ranger dans cette catégorie de solutions erronées parce que n'utilisant pas une unité de mesure commune, une procédure particulière, observée dans une classe de catégorie 5 et reprise ci-dessous :


Abbiamo ricalcato le figure e abbiamo notato che dentro alle due figure c'erano altre figure.
Per trovare la soluzione abbiamo scomposto le figure e abbiamo trovato l'area.
Dopo di che abbiamo unito le aree.
Ci vorrà più cartoncino alla foglia verde.

Le groupe d'élèves subdivise les feuilles en polygones connus : ensuite il mesure, avec la règle, les côtés des diverses figures de la feuille jaune et calcule les aires.

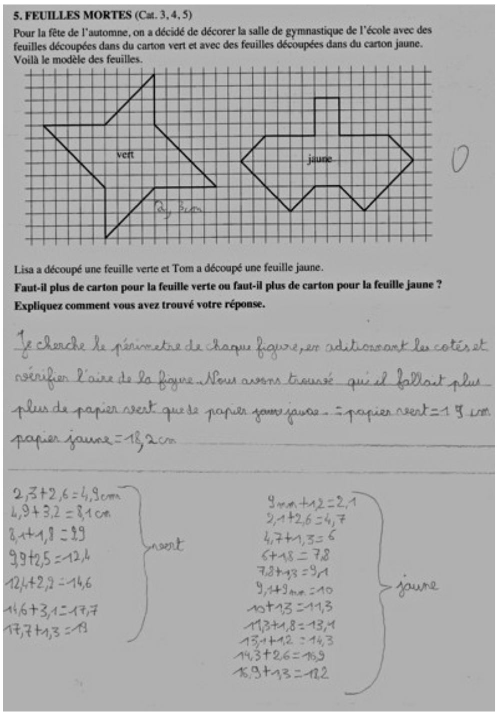
Pour la feuille verte, les mesures du triangle semblent être prises de manière approximative avec la règle, mais pour le rectangle, les élèves ont compté les carreaux.

L'aire totale est obtenue en additionnant des aires calculées **avec des unités de mesure différentes**, ce qui conduit, entre autres, à une comparaison « impossible » des aires des deux feuilles.

C'est un exemple intéressant d'application des formules de calcul des aires, sans prise de conscience de la nécessité d'une unité de mesure commune.

La confusion entre aire et périmètre apparaît dans de nombreuses productions surtout de la catégorie 3, mais aussi dans les catégories 4 et 5, bien que dans des pourcentages moindres.

Les stratégies vont du comptage des carreaux sur le contour, au périmètre calculé après avoir mesuré à la règle la longueur des côtés (comme le montre l'exemple ci-dessous), ou associent figure de plus grande aire et figure de plus grand « encombrement » avec, par exemple, une « intervention » de la largeur : «*La forme qui occupe plus d'espace est la feuille verte. Nous avons trouvé la réponse en refaisant les feuilles et ensuite nous avons compté la largeur »*.


5. FEUILLES MORTES (Cat. 3, 4, 5)

Pour la fête de l'automne, on a décidé de décorer la salle de gymnastique de l'école avec des feuilles découpées dans du carton vert et avec des feuilles découpées dans du carton jaune. Voilà le modèle des feuilles.

Lisa a découpé une feuille verte et Tom a découpé une feuille jaune.

Faut-il plus de carton pour la feuille verte ou faut-il plus de carton pour la feuille jaune ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Je cherche le périmetre de chaque figure, en aditionnant les cotés et vérifier l'aire de la figure. Nous avons trouvé qu'il fallait plus plus de papier vert que de papier ~~jaun~~ jaune. : papier vert = 19 cm papier jaune = 18,2 cm

2.3. Quelques observations

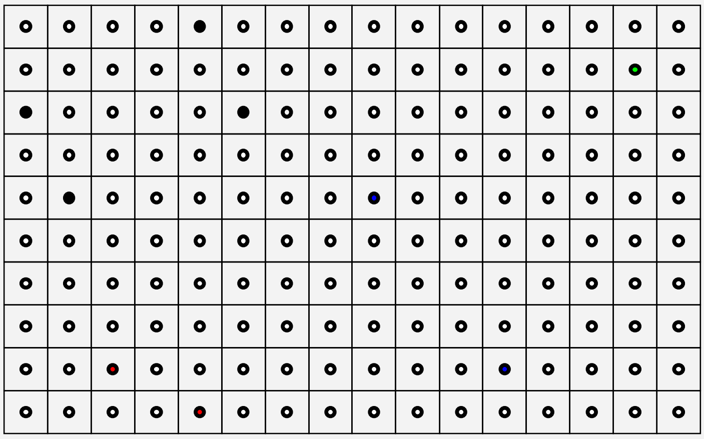
Notre recherche sur le concept d'aire, confortée par les résultats relatifs à ce problème nous porte à penser que la question de la conscience de la nécessité d'une unité de mesure commune et le conflit périmètre/aire constituent des obstacles de type ontogénique, mais aussi de type didactique. De type ontogénique, parce qu'on peut remarquer, pas seulement au sujet de ce problème, mais aussi des autres analysés les années précédentes, comment, globalement, les résultats s'améliorent de catégorie en catégorie (donc avec l'âge des élèves). De type didactique, parce que dans certains cas, même quand l'âge augmente, l'erreur perdure et probablement, la nécessaire attention didactique à porter aux obstacles de ce type a été négligée.
Remarquer des obstacles parfois sous-estimés au niveau scolaire, peut constituer une contribution du RMT à la pratique de classe. Et c'est vraiment dans cet esprit, que nous nous orientons vers les questions relatives au rectangle.

3. Un problème, comme une goutte qui évolue

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, ce sont les difficultés rencontrées par les élèves lors de la résolution d'un problème proposé à la finale internationale de Brigue, qui ont conduit le groupe géométrie à en chercher les causes.

3. 1. Le problème et son analyse a priori

LA TABLE À DÉPLACER



Ce dessin représente le sol de la cuisine de Julie avec des petits cercles au centre de chaque carreau.
Julie a remarqué une chose étonnante : dans certaines positions, les quatre pieds de la table de cuisine recouvrent exactement quatre petits cercles du carrelage.
Julie place tout d'abord la table dans une certaine position, avec les quatre pieds qui recouvrent exactement les quatre cercles marqués en noir sur le dessin (en haut à gauche).
Julie la déplace de manière que les quatre pieds de la table recouvrent exactement quatre autres cercles. Deux de ces cercles sont marqués en rouge sur le dessin.
Marquez en rouge les deux autres cercles recouverts par les deux autres pieds de la table dans cette deuxième position.
Julie déplace encore la table dans une troisième position et pose de nouveau les quatre pieds sur quatre cercles. Deux de ces cercles sont marqués en bleu sur le dessin.
Marquez en bleu les deux autres cercles recouverts par les deux autres pieds de la table dans cette troisième position.
Pourrait-on déplacer la table pour que ses quatre pieds recouvrent encore quatre cercles, dont un est marqué en vert sur le dessin ?
Si oui, dites de combien de manières on peut disposer la table avec un pied sur le cercle vert et les trois autres sur d'autres cercles et marquez ces cercles, en vert et avec d'autres couleurs s'il y a plus d'une possibilité.

ANALYSE A PRIORI
Domaine de connaissances

- Géométrie : reconnaissance du rectangle à partir de ses quatre sommets et de la conservation de ses propriétés lors de déplacements (isométries)

Analyse de la tâche

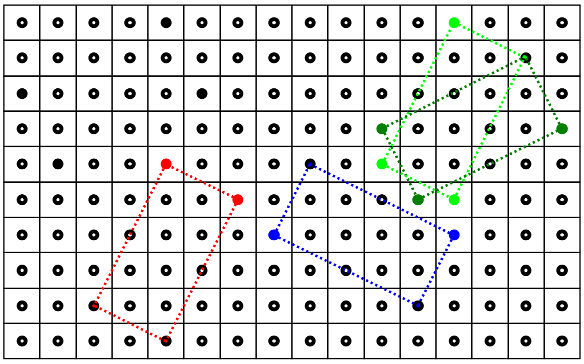
- Comprendre que les quatre pieds de la table forment une figure qui conserve ses propriétés métriques lors de déplacement (distance entre pieds et « angle » déterminé par 3 pieds consécutifs). Il s'agit d'imaginer la forme « rectangle » déterminée par ses quatre sommets sans le dessin des côtés.
- Dès que la forme est reconnue, passer au dessin du rectangle dont les sommets sont les quatre cercles noirs de la position 1, puis procéder

  soit par découpage et déplacement du rectangle,

  soit par construction d'autres rectangles à la règle (avec mesure des longueurs des côtés ou report) et utilisation de l'équerre pour les angles droits, ou encore en plaçant une diagonale horizontalement ou verticalement sur 6 petits cercles,

  soit visuellement en comptant se repérant sur les cercles par des déplacements de 1 (ou 2) verticalement et de 2 (ou 1 horizontalement ou encre en constatant qu'une diagonale est constituée de 6 cercles alignés horizontalement ou verticalement).

  Les solutions : 2 points rouges, 2 points bleus, 2 groupes de 3 points verts :



Attribution des points

4 Réponse correcte et complète : les 2 points rouges, 2 bleus et 6 (2 × 3) verts, déterminant les quatre positions des pieds de la table, avec ou sans le dessin des côtés du rectangle fictif

3 Une des quatre positions de la table n'est pas déterminée, mais les trois autres le sont par leurs autres pieds ou les quatre positions déterminées mais avec une déformation d'une des figures

2 Deux des quatre positions de la table ne sont pas déterminées, mais les deux autres le sont par leurs autres pieds
ou trois positions déterminées mais avec une déformation d'une des figures

1 une seule position correctement déterminée
ou aucune position entièrement correcte, mais avec des déformations

0 incompréhension du problème

3.2. Une première phase expérimentale

L'analyse a posteriori des productions des 12 classes de la finale internationale, conduite par François Jaquet (2009), a mis en évidence que la majeure partie des dessins ou des configurations proposées par les élèves étaient des parallélogrammes.

Table en position « rouge » : typologie des réponses

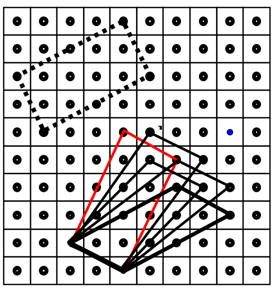


Table en position « bleu » : typologie des réponses

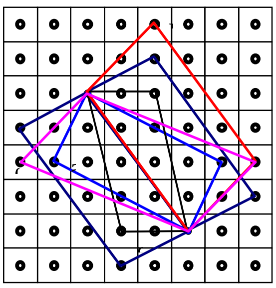


Table en position « verte » :

Aucune classe n'a trouvé les deux possibilités correctes. 3 classes ont trouvé l'un des rectangles corrects. Il y a en revanche 6 rectangles avec les côtés parallèles aux bords de la feuille. Tous les autres dessins ou configurations sont des parallélogrammes.

La réussite moyenne plutôt basse, de 1,58, à ce problème a soulevé beaucoup d'interrogations et suscité l'intérêt du groupe permanent *ellealquadrato*, qui de ce fait, partant de la problématique connue de la construction du concept d'aire, a « élargi son horizon », en décidant de s'occuper des obstacles et erreurs dans le champ plus vaste de la géométrie plane.

En première analyse, il s'est dit que, d'une part les 12 classes finalistes pouvaient être considérées comme des classes «sélectionnées » et que d'autre part, elles avaient à peine commencé leur cinquième année d'école primaire. D'évidence, l'hypothèse d'un problème surdimensionné pour la catégorie 5 pouvait être avancée.
En vue de la rencontre de Nivelles, centrée sur les difficultés, obstacles et erreurs, et suite aux observations de F. Jaquet sur les conceptions erronées au sujet du rectangle, une des tâches confiées aux membres du « groupe géométrie plane », a été de proposer avant la rencontre, là où c'était possible, le problème « la table à déplacer » à des élèves de catégories 4 et 5 (en binômes) et à des élèves de catégories 6, 7, 8 (individuellement).
Le problème a été soumis à différentes classes de l'école primaire et secondaire du premier degré (collège), aussi bien en Italie qu'en France.
L'analyse des productions a montré qu'il n'y avait pas de grandes différences entre les productions des deux pays : des erreurs et des difficultés conséquentes ont été relevées et ceci même au niveau de la catégorie 8.
L'erreur la plus fréquente a été de dessiner des parallélogrammes et non pas des rectangles. Une différence dans les modalités de résolution est aussi nettement ressortie, puisque les enfants de l'école primaire n'ont pas hésité à manipuler (la plupart de ceux qui ont trouvé la solution ont utilisé le découpage du rectangle symbolisant la table), tandis que les élèves plus grands, dans la plupart des cas, n'ont pas recouru à la manipulation.
Ces observations ont conduit à écarter l'hypothèse d'une difficulté essentiellement due à la jeunesse d'âge des élèves, et la question des causes des difficultés s'est à nouveau posée : sont-elles plutôt « internes » au problème, et à rechercher dans l'énoncé du problème, ou sont-elles plutôt «externes » au problème lui-même, et de type conceptuel ?

3.2.1. Causes internes au problème, hypothèses sur différents aspects de l'énoncé

Nous nous sommes demandés, à l'occasion du travail du groupe, à Nivelles, si « en dessinant « la table », les élèves ne l'avaient pas vue en perspective, ce qui pourrait expliquer la construction d'un parallélogramme qui pour eux représenterait un rectangle.
Cette interprétation devient l'objet d'une première hypothèse à tester. Par un changement d'énoncé, on peut modifier la variable didactique « objet », pour faire en sorte qu'à l'objet « table », entendu comme objet tridimensionnel, soit substitué un objet concevable comme étant à deux dimensions, par exemple, un tapis.
De fait, le problème de « la table à déplacer » conçu pour la finale internationale de Brigue est inspiré d'un problème proposé par M-H Salin (2008) : dans une salle de gymnastique, des élèves (10-11 ans, « cat. 5 » pour nous) doivent déplacer un lourd tapis de sol rectangulaire (d'environ 1,5 m sur 0,9 m) et indiquer à l'avance l'emplacement de trois sommets (« coins »), l'un étant déjà fixé par le maître. L'activité se déroule dans un espace (méso-espace) plus grand que celui de la feuille de papier (micro-espace) sur laquelle se déroule en grande partie les travaux de géométrie scolaire. Les élèves ont des règles, équerres et instruments de mesure à disposition. Les observateurs ont constaté que peu d'élèves sont capables, soit de réussir directement en utilisant une équerre, soit d'interpréter leur échec en constatant qu'ils ont ignoré la contrainte de l'angle droit pour déterminer les emplacements des sommets.
Une autre cause « interne » possible pourrait être liée au « quadrillage » : les élèves peuvent avoir cherché à reproduire sur le quadrillage un parcours déterminé pour aller d'un point en couleur donné à un autre et les propriétés locales du dessin (directions à respecter, nombres de carreaux à traverser, nœuds à repérer) leur auraient fait perdre de vue le contexte général requis par le problème, c'est-à-dire, le rectangle, par ailleurs non explicitement mentionnée dans l'énoncé.

3.2.2. Causes externes, hypothèses sur différents aspects des concepts en jeu

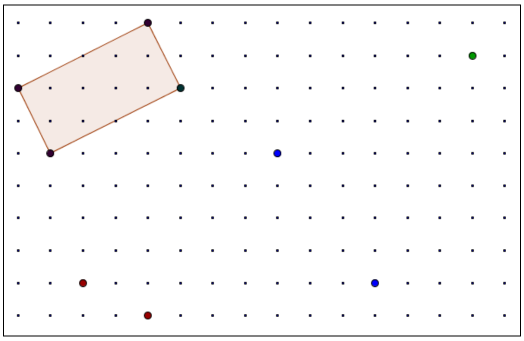
Certains élèves ne se sont pas aperçus, par exemple, qu'ils construisaient, en dessinant, des angles plus grands que 90° (voire même que 120°).
On se demande s'il y a, dans la construction de parallélogrammes non rectangles mais considérés comme fidèles au modèle rectangulaire, une acquisition insuffisante du concept d'angle droit, ou une non conscience de l'invariance de l'angle droit dans le rectangle. De fait, les deux « invariants » qui, dans les productions étudiées, paraissent les plus « intuitifs » chez les élèves sont ceux relatifs aux longueurs des deux côtés opposés et au parallélisme.
Pour la table « en position bleue » s'ajoute encore la difficulté de gérer les diagonales du rectangle.
Le groupe « géométrie plane », bien qu'il se soit fixé d'autres tâches en vue des sessions de travail de Nivelles, décide de travailler autour de l'acquisition du concept de rectangle et sur les obstacles qui lui sont liés.
En considérant les hypothèses rapportées plus haut, c'est-à-dire, en particulier :
- Rôle de l'objet en jeu (table ou tapis),
- Rôle du dessin du rectangle à la place des quatre sommets seulement,
- Rôle du quadrillage,

le groupe élabore quatre variantes du problème original « La table à déplacer », en essayant d'envisager quelques combinaisons des variables telles que table, tapis, quadrillage, papier non quadrillé (pointé ou blanc).

4. Quatre variantes du problème

Pour des raisons de place, nous présentons ici les dessins des quatre variantes sans les consignes qui les accompagnent, mais avec un commentaire signalant les aspects principaux qui les différencient de la version originale.
En nommant 1) la version originale du problème « la table à déplacer », les quatre variantes sont les suivantes :

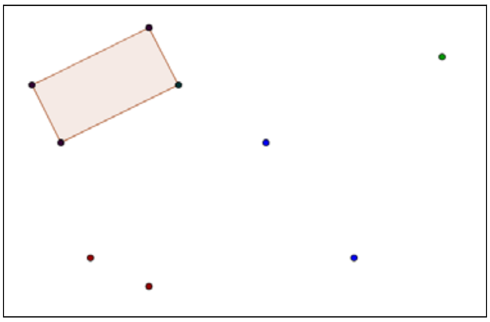
- version 2)



La version 2) est élaborée à partir de la version d'origine mais donnée sur papier pointé au lieu de papier quadrillé où les lignes sont trop prégnantes.
Les principales autres différences sont avec la version initiale sont :
- Les côtés du rectangle initial sont tracés ;

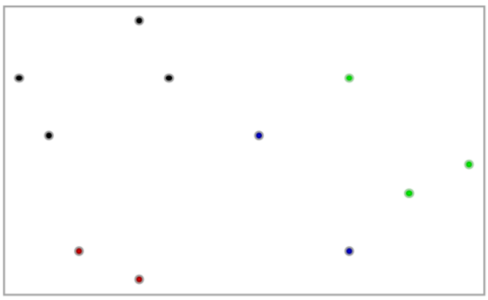
L'objet évoqué (un tapis) renvoie plus facilement à un problème dans le plan qu'une table.

- version 3)



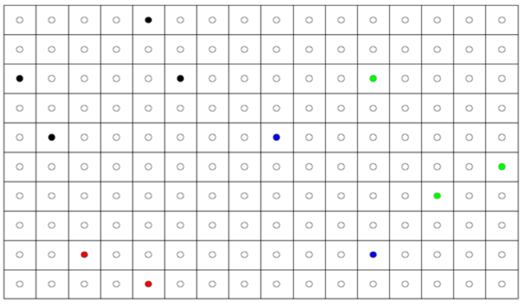
la version 3) se différencie de la version 2) par le fait qu'elle est sur papier blanc.
On s'attachera en particulier aux dessins que les élèves feront à partir des points rouges et à partir des points bleus
La feuille blanche « impose » d'utiliser le modèle comme gabarit ou de recourir à une équerre (éventuellement le rapporteur selon le niveau de classe et le pays) et la règle graduée.

- version 4



La version 4) est encore sur papier blanc, mais cette fois, sans les côtés du rectangle modèle de la version 3, (c'est le modèle table comme la version originale).
Cependant, pour faciliter l'entrée dans le problème, trois points verts sont donnés et il est demandé aux élèves de commencer par placer « marquez en vert l'endroit recouvert par l'autre pied de la table ».
Si ce 4^{e} sommet vert n'est pas mis correctement, on obtient un quadrilatère qui n'est même pas un parallélogramme.

- version 5



La version 5) est à nouveau sur quadrillage, mais découle de la version 4).
C'est une variante plus facile et « progressive » avec trois points verts. Dans cette situation, la « prégnance » du quadrillage devrait permettre, selon le groupe, de trouver le quatrième point vert sans contrôler la conservation de l'angle droit mais seulement le parallélisme et l'isométrie des côtés.

4.1. Modalités de passation pour l'« expérimentation »

Nous parlons ici d'expérimentation, dans le sens de tester, à l'aide des quatre nouvelles versions présentées plus haut, les hypothèses nées, soit de l'analyse des résultats effectuée par F. Jaquet à partir des productions des classes participant à la finale internationale, soit de la discussion du groupe de travail à Nivelles.
Le problème de « la table à déplacer » a déjà été donné dans la plupart des classes où enseignent les membres du « groupe géométrie », dans l'intention, comme il est dit plus haut, de récolter des données relatives à la résolution d'un tel problème. Il s'agit cette fois-ci, d'impliquer aussi d'autres enseignants dans cette phase expérimentale. Comme ligne générale, le groupe a décidé de proposer les versions 2) ou 5) (tapis ou table, c'est-à-dire, les quatre points seulement ou le rectangle), ou bien 2) ou 3) (tapis sur papier pointé ou tapis sur papier blanc) à des classes de catégories 4 et 5, par binômes d'élèves et de proposer les 4 versions, 2 à 5, en résolution individuelle à raison de deux problèmes par classe (la classe étant divisée en deux groupes) pour les catégories 6, 7 et 8.
Il serait souhaitable de chercher à impliquer quelques enseignants de catégories supérieures pour vérifier à quel niveau les élèves dépassent définitivement les obstacles relatifs au « rectangle » en se rendant explicitement compte que contrôler des angles droits est indispensable.
Il est proposé d'organiser, dans la mesure du possible, un moment de discussion avec et entre les élèves afin de connaître leurs procédures et les instruments qu'ils ont utilisés pour les mettre en œuvre.

4.2. Vérification des hypothèses

Les différents types de réponse concernant nos expérimentations ont été détaillés à partir du modèle proposé par (Jaquet, 2009) et vont, pour chacun des cas « rouge », « bleu », et « vert », de la réponse correcte à l'absence de réponse, en passant par les différents types de parallélogrammes, plus ou moins inclinés ou même des figures qui ne sont pas des parallélogrammes.
S'il est vrai que les résultats ne sont pas significatifs quand on les considère d'un point de vue purement statistique, à cause de nombreux paramètres difficiles à « mesurer », et dans chaque cas, de la petitesse de l'échantillon, leur analyse permet tout de même de tirer quelques conclusions que nous considérons significatives.
Globalement les meilleurs résultats ont été obtenus dans les versions « guidées », 4) et 5), où l'on demandait de déterminer d'abord seulement un des sommets manquants du « rectangle vert ». Si on considère cependant les résultats relatifs au seul « rectangle rouge », dans les catégories 6, 7 et 8, où ont été proposées individuellement les versions 3), 4) et 5), sur environ 100 productions, les pourcentages de réussite varient très peu et tournent tous, dans les trois cas, autour du 45 %. Dans le cas de la version 1), sur une centaine d'élèves auxquels le problème avait été à nouveau proposé avant la rencontre de Nivelles, le pourcentage de réussite au « rectangle rouge » était de 43%.
Au niveau des catégories 4 et 5, auxquelles ont été généralement proposées les versions 2) et 3), les résultats montrent, encore dans le cas du « rectangle rouge », un pourcentage de réussite similaire, qui oscille entre 45% (version 2) et 42% (version 3).
Il nous semble qu'on peut dire que l'influence de la variable « objet » dans le dessin du rectangle est négligeable, avec quadrillage ou sans quadrillage.
Les causes des difficultés semblent être de type « extérieur », liées à la propriété de l'angle droit comme mentionné plus haut.

5. Pour chercher à comprendre les difficultés

5.1. Formation d'un concept

Ce sont Lismont et Rouche qui font observer combien il est nécessaire de tenir compte de différents niveaux dans la formation des concepts et reprennent l'exemple du rectangle. Pour eux, un cheminement se fait du préconcept, aux objets mentaux pour aboutir aux concepts formels.
«À un premier niveau, le rectangle est une forme *plate* que l'on rencontre souvent de face (une porte, une fenêtre, …) ou que l'on peut disposer devant soi *bien droit* (avec deux côtés verticaux). On reconnaît les rectangles à travers une perception globale : chaque rectangle en position privilégiée donne la sensation d'occuper l'espace de la même façon (…) Quelqu'un qui se trouve à ce stade de développement mental manie donc familièrement le rectangle et éventuellement le nomme. Mais il n'est guère capable d'en parler, d'expliquer certains de ses caractères ou des phénomènes dont il est le siège. »
Il s'agit ici du premier niveau, celui de préconcept.
«À un deuxième niveau, le rectangle s'installe davantage dans la *conscience* et le *langage*, également dans la volonté de connaître. Il est non seulement utilisé et nommé, mais on peut aussi *parler* de ses cotés horizontaux et verticaux, de l'égalité de ses côtés, de ses angles droits. (…) Ce niveau de connaissance du concept peut être plus ou moins développé, selon l'expérience de la personne, et en particulier selon son parcours scolaire. Les connaissances en question ont leur source dans les expériences sensori-motrices présentes au niveau précèdent. Mais elles manifestent un degré d'organisation mentale plus complexe. (…) En suivant Freudenthal [1983], nous appelons *objets mentaux* les concepts mobilisés à ce niveau de l'activité intellectuelle.
« Passons maintenant à un troisième niveau, celui des mathématiques constituées. Là, le rectangle n'est plus, comme les rectangles de notre environnement familier, un objet que l'on peut aborder, dont on peut se servir et auquel on peut réfléchir *sans préalable*. Il apparaît à sa place dans le déroulement d'une théorie, place variable selon les axiomes que l'on se donne. (…) Le rectangle apparaît comme un épisode d'une entreprise intellectuelle exigeante et de longue haleine. (…) Nous avons décidé d'utiliser, pour désigner ce type de concepts, la locution de *concepts formels*. »
Il apparaît alors clairement que « L'apprentissage des mathématiques consiste en un certain sens à passer…des préconcepts aux objets mentaux, puis éventuellement aux concepts formels. (…) Il n'y a pas de concept formel de rectangle qui n'ait ses racines dans le préconcept de rectangle et dans l'objet mental rectangle. Les trois niveaux des concepts sont sollicités dans la pensée mathématique créative. Les deux premiers sont surtout source d'images et d'intuitions, le dernier fournit les instruments de la rigueur. »
À ce stade, le titre de notre article « le rectangle… pas si évident ! » commence à avoir sa raison d'être.
Il nous semble que les difficultés rencontrées par les élèves, aux différents niveaux de la scolarité, lorsqu'ils sont appelés à retrouver, par exemple, deux sommets d'un rectangle (non disposé en position privilégiée), quand deux autres sont marqués, mais aussi un seul sommet quand les autres trois sont marqués, sont des difficultés inhérentes à l'obstacle constitué essentiellement de la «nécessité de l'angle droit ».
Les considérations de Lismont et Rouche, semblent mettre en évidence la nécessité de ne pas passer trop vite à des aspects formels là où les deux niveaux précédents n'ont pas été développés de façon adéquate. Il nous semble pouvoir partager, à notre échelle, ce point de vue, qui est le même que celui d'autres philosophes et épistémologues, de J. Piaget et Vygotski en particulier.
À propos de Piaget, on ne peut pas oublier que ses études expérimentales ont conduit, parmi d'autres innombrables, à des considérations fondamentales sur les difficultés du concept d'angle, concept qui entre aussi pleinement dans le concept de rectangle.
Dans Piaget, Inhelder (1947), il est clairement établi que certains aspects connexes au concept d'angle, ne sont pas acquis avant l'âge de 11-12 ans.
Si d'un côté donc, le concept d'angle est un concept ontologiquement compliqué, il ne peut pas en être autrement de celui de rectangle. Par conséquent, nous pensons que dans ces aspects doivent être pris en compte l'enseignement, non pas pour ne pas traiter du rectangle avant l'âge de 11-12 ans, évidemment, mais pour ne pas en escompter trop tôt l'acquisition, en passant par exemple trop rapidement aux aspects les plus formels.
Comme nous l'avons vu, quand le rectangle n'est pas en position privilégiée, même les élèves plus âgés montrent qu'ils ont des difficultés là où intervient la nécessité non seulement de tenir compte de l'égalité des côtés opposés et de leur parallélisme, mais aussi et surtout de vérifier que les angles sont droits.
À la suite de l'analyse des résultats de l'expérimentation menée avec le tapis du gymnase (rappelé plus haut, au § 3.2.1.) M-H Salin se pose la question suivante : *« Avoir reconnu le rectangle et avoir l'intention de repérer ses sommets ne suffit pas aux élèves pour réussir : pourquoi ? »*. La réponse à cette question nous semble particulièrement significative. D'abord M-H Salin précise que sa réponse, ou mieux ses réponses sont des hypothèses plus que des certitudes et met l'accent sur le fait, qui nous semble crucial, « que le problème posé ne demande pas de tracer le tour du tapis mais seulement de positionner les pastilles aux sommets. Les élèves ne

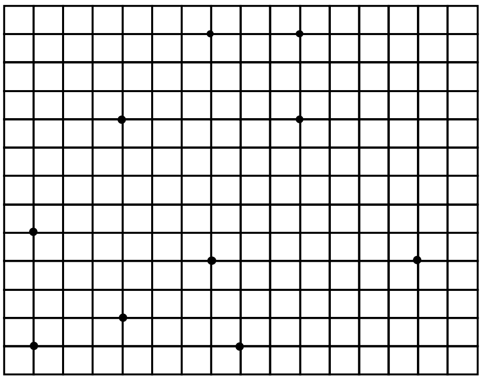
« pensent » pas à tracer le rectangle. (…) Ici la tâche de l'élève est beaucoup plus complexe qu'il n'y paraît à première vue : il doit reconstruire mentalement tout le modèle géométrique : lignes joignant deux points (place des sommets), et contrôler la position relative des lignes avec des angles ».
Les analyses des résultats de notre expérimentation permettent de souligner cette complexité, qui concerne aussi, selon nous et comme nous l'avons déjà dit, l'obstacle de l'angle droit. En effet, M-H Salin écrit plus loin que, toujours concernant le problème du tapis du gymnase, « Au cours du deuxième essai, certains élèves « découvrent » qu'il faut contrôler la direction de l'équerre, soit par visée, soit en ayant recours au support d'une règle. Ce type de tâche n'est pas pris en compte dans l'enseignement, ni en primaire, ni en collège, ni même dans l'enseignement professionnel. »
Il est d'autre part intéressant de constater que dans les programmes français du 2002, pour l'école primaire, il est écrit : « Pour le carré et le rectangle, les élèves sont confrontés à des exercices de construction à partir de la donnée d'un ou plusieurs sommets donnés, d'un ou deux côtés tracés ou à partir de la seule donnée des longueurs de ces côtés. » Cependant ce commentaire n'est pas repris par les programmes 2008.
Notre problème « La table à déplacer » se situe bien dans la direction indiquée par des programmes français, mais cette indication est-elle suivie dans les évaluations ? Et dans les classes ?
Nous pensons qu'il y a ici un des nœuds centraux (parmi d'autres) de l'enseignement du concept de rectangle, parce que c'est, en particulier, dans cette recherche de sommets manquants de rectangle, que la nécessité de l'angle droit devient absolument incontournable pour ne pas tomber dans l'erreur de tant d'élèves ou de groupes d'élèves auxquels a été proposé le problème de « la table à déplacer », dans ses diverses versions. Les élèves ont construit pour la plupart des parallélogrammes non rectangles, en focalisant leur attention sur les côtés opposés parallèles et de même longueur, tout « en oubliant » les angles droits.
Il nous semble que dans certains manuels et pratiques scolaires, le rectangle est présenté, d'une part, dans sa position privilégiée, d'autre part comme un « objet » déjà confectionné plutôt qu'un « objet » de recherche. En outre, les différents aspects d'une notion, pour beaucoup de thèmes au programme, sont abordés souvent au cours d'une même « leçon » et ne sont pas problématisés. Nous pensons que des activités problématiques centrées sur la construction d'un rectangle (et d'autres figures planes), pourraient amener l'élève à une meilleure conscience de la nécessité de prendre en compte TOUTES les propriétés nécessaires et suffisantes pour définir le rectangle (ou une autre figure plane).
N. Rouche (1995) souligne aussi que «La géométrie est d'abord le premier chapitre de la physique. Elle appartient ensuite aux mathématiques dès quelle idéalise les objets et les saisit à travers des propriétés univoques de forme et de grandeur.
Comparée aux autres branches des mathématiques, la géométrie a ceci de particulier : les objets qu'elle propose à la réflexion ne sont pas immédiatement symbolisés de manière arbitraire, à la façon dont l'arithmétique traite les nombres en les représentant par des chiffres, ou l'algèbre par des chiffres et des lettres. Les objets de la pensée géométrique sont d'abord des dessins. Ils s'offrent à la perception visuelle. On les construit.

5.2. Un nouveau problème sur le rectangle pour l'épreuve du 18° RMT

Afin d'approfondir la recherche en cours sur les difficultés et obstacles inhérents au concept de rectangle, le groupe « géométrie plane » a présenté quelques problèmes pour l'épreuve I du 18e RMT.
Nous en présentons un dans cet article, dont les résultats ont été amplement analysés. Il s'agit d'un problème de la reconnaissance d'un rectangle qui implique la prise en considération des angles droits et leur vérification explicite.

5.2.1. Le problème «Les dix points »

LES DIX POINTS (Cat. 5, 6, 7)
Il y a dix points marqués sur la grille dessinés ci-dessous.
François en a trouvé quatre qui sont les sommets d'un rectangle.



Trouvez ces quatre points, dessinez le rectangle en rouge et expliquez pourquoi vous pensez que c'est un rectangle.
Anne dit qu'on peut dessiner plus d'un rectangle dont les sommets sont quatre des dix points donnés.
Qu'en pensez-vous ?

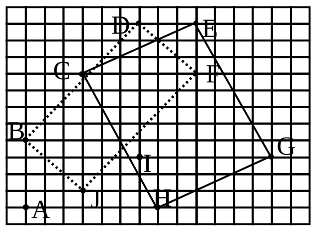
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangle et ses propriétés (parallélisme, angle droit, isométrie des côtés opposés, ...)

Analyse de la tâche

- Observer la configuration des points et chercher si on y trouve plusieurs couples de points qui sont les extrémités de segments parallèles, dans une direction donnée. (Par exemple, horizontalement, DE, CF, IG, AH) puis vérifier si ces couples définissent des segments de même longueur (dans l'exemple précédent IG et AH), pour finalement vérifier s'ils peuvent appartenir à un même rectangle, c'est-à-dire s'ils déterminent deux nouveaux côtés perpendiculaires. (Dans l'exemple précédent, AHGI est un parallélogramme non rectangle, DIGE est un quadrilatère qui n'a que deux angles droits ...)
Effectuer la même recherche dans les autres directions, verticalement puis en oblique. (Par exemple on remarque que AB et CJ sont parallèles mais ne sont pas isométriques). DF et BJ sont parallèles (diagonales du quadrillage) et isométriques. Ils déterminent un parallélogramme BJFD qui n'est pas un rectangle.



- Dans le cas précédent où l'on ne peut pas déterminer visuellement si le parallélogramme BJFD est un rectangle, les vérifications nécessitent les mesures des angles (ou comparaisons avec l'angle droit d'une équerre ou d'une feuille de papier) ou de s'apercevoir que les côtés BD et JF ne suivent pas des diagonales du quadrillage comme les deux autres côtés.
- Poursuivre l'examen systématique des couples de points déterminant des segments parallèles et isométriques, puis vérifier les angles, pour découvrir « le » rectangle de François, dont quatre sommets figurent parmi les dix points donnés : CHGE.
- Dessiner le rectangle CHGE, expliquer pourquoi c'est un rectangle : quatre angles droits ou deux paires de côtés parallèles, de même longueur et perpendiculaires ; ou deux diagonales isométriques se coupant en leur milieu ou deux axes de symétrie perpendiculaires aux côtés (« côtés opposés isométriques et parallèles » ne suffisent pas à définir un rectangle, mais seulement un parallélogramme), puis dire qu'on pense qu'Anne a tort (car on n'a pas trouvé d'autre rectangle).

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (dessin de l'unique rectangle CHGE et « on pense qu'Anne a tort ») avec explication des raisons qui font qu'il s'agit d'un rectangle : les quatre angles droits ou d'autres conditions

nécessaires et suffisantes citées ci-dessus (il ne suffit pas de dire que les côtés sont parallèles ou isométriques deux à deux)

3 Réponse correcte, mais incomplète, le rectangle est trouvé et dessiné en déclarant que c'est le seul, mais sans explication des raisons qui font qu'il s'agit d'un rectangle
ou dessin du rectangle CHGE avec explications des raisons qui font qu'il s'agit d'un rectangle, mais sans dire qu'il n'y en a pas d'autre

2 Dessin du rectangle CHGE en disant qu'Anne peut dessiner un autre rectangle (confondu avec le parallélogramme BJFD)

1 Dessin du rectangle CHGE et d'autres parallélogrammes
ou seulement dessin du parallélogramme BJFD

0 Incompréhension du problème

5.3. Analyse a posteriori des productions

Les membres du groupe géométrie ont analysé les productions des classes de leur propre section, à partir d'un guide élaboré pour l'analyse a posteriori :

1 Le groupe s'intéresse, au-delà de l'attribution des points, à la confusion entre le rectangle CHGE et le parallélogramme BJFD qui figureront sous « 1 » ou « 2 » points, mais il aimerait savoir si d'autre figures apparaissent comme le parallélogramme AHGI ou les quadrilatères AHFC et CIGF (qui ne sont pas des parallélogrammes mais s'en rapprochent).

2 Le groupe s'intéresse aussi aux arguments que les élèves utilisent pour expliquer que CHGE est un rectangle. (Mentionnent-ils l'angle droit ?)

3 Le groupe s'intéresse encore plus particulièrement aux arguments des élèves qui expliquent que la figure BJDF est un rectangle alors qu'elle n'est qu'un parallélogramme. (Ils peuvent dire que les côtés sont égaux deux à deux, mais ils peuvent dire aussi que les angles sont droits et, dans ce dernier cas, cela signifierait qu'ils savent que le critère des angles droits est nécessaire mais qu'ils ont mal mesuré ou n'ont pas contrôlé la présence d'angles droits.

4 Finalement, on aimerait savoir si les élèves mentionnent l'utilisation d'une équerre ou d'un autre instrument pour déterminer l'angle droit.

Au sujet du point 1

Dans une proportion importante des productions analysées, les groupes d'élèves ont obtenu 2 points en ayant identifié correctement le rectangle CHGE, mais aussi de manière erronée, en ayant identifié comme rectangle, la figure BJDF, ou alors 1 point, en ayant considéré comme unique « rectangle« la figure BJDF. Les pourcentages, sur 10 sections (dont nous connaissons les scores), de 1 et 2 points sont les suivants:

- Cat. 5, sur 287 productions, « 1 point » : 26%, 2 points: 30%
- Cat. 6, sur 437 productions, « 1 point » : 21,7%, 2 points : 37,8%
- Cat. 7, sur 329 productions, « 1 point » : 16%, 2 points : 33%

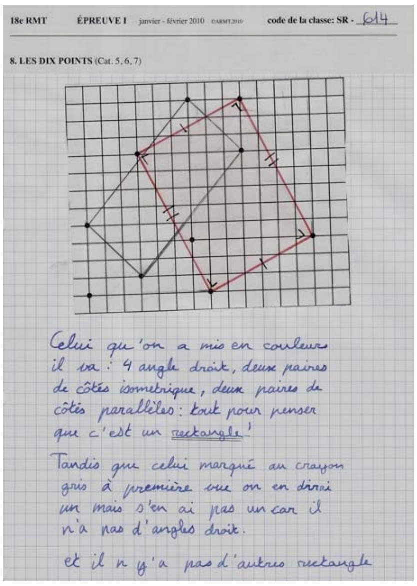
Donc plus de 50% des productions, aussi bien en catégorie 5 qu'en catégorie 6 et un peu moins de 50% en catégorie 7.

Cependant, si on considère, séparément les points obtenus par les dix sections, on remarque une certaine variation des moyennes en fonction des sections.

Les quelques (rares) productions qui ont obtenu « 0 point », ont considéré comme rectangles, des parallélogrammes « quelconques », parmi lesquels les parallélogrammes CIGF et AHGI, et dans un cas, une figure qui n'en est pas un, JCDI. Dans un autre cas (cat.6) la figure ABIH est dessinée et considérée comme étant « un rectangle »: «*parce qu'il y a 2 angles droits* ».

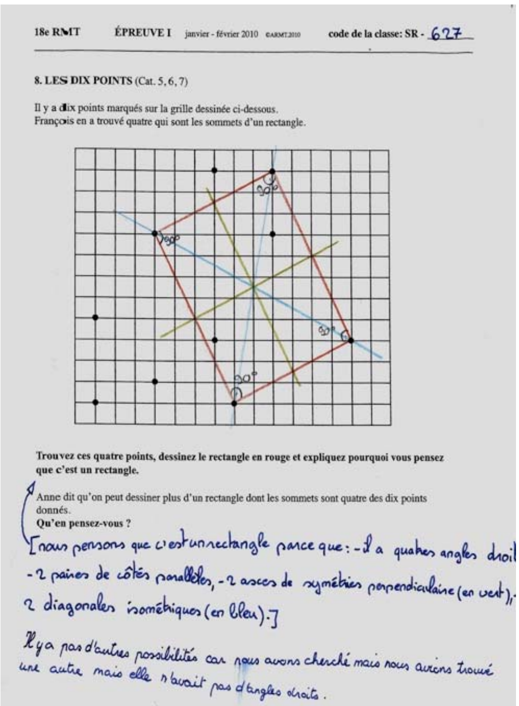
Au sujet du point 2

La référence aux angles droits est présente en particulier dans les productions qui ont obtenu 4 points (12% en cat. 5, 18,5% en cat. 6 et 25% en cat. 7). Nous reproduisons ici deux exemples de Suisse romande (cat. 6), particulièrement significatifs :



Celui qu'on a mis en couleur il va : 4 angles droit, deux paires de côtés isométriques, *deux paires de côtés parallèles : tout pour penser que c'est un* <u>*rectangle*</u> *!*

Tandis que celui marqué en crayon gris à première vue on en dirait un mais c'en est pas un car il n'a pas d'angles droit.
Et il n'y a pas d'autres rectangles



Nous pensons que c'est un rectangle parce que: il y a quatre angles droit – 2 paires de côtés parallèles, - 2 axes de symétries perpendiculaires (en vert); 2 diagonales isométriques (en bleu).
Il y a pas d'autres possibilités car nous avons cherché mais nous avons trouvé une autre mais elle n'avait pas d'angles droits

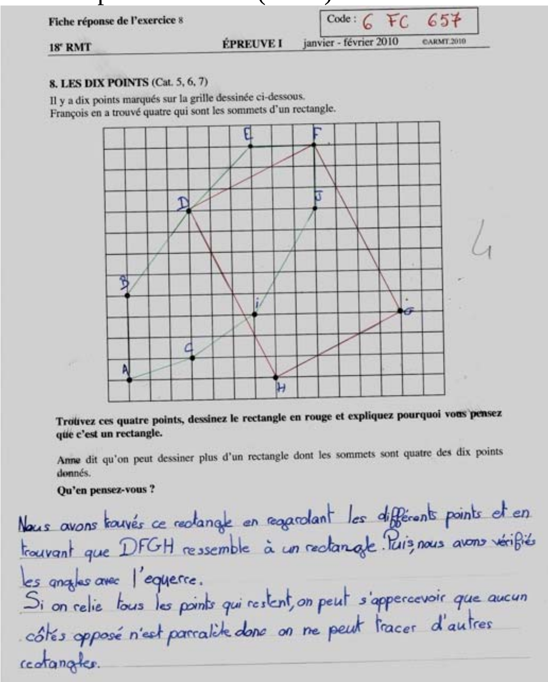
En général, dans des productions qui ont obtenu 4 points, il est dit qu'Anne a tort parce que la figure BJFD n'est pas un rectangle puisque ses angles ne sont pas droits.
Par exemple «*On pense que Anne croit qu'elle a raison car de vue elle croit qu'il y a 4 angles droits mais quand on vérifie sa ne marche pas.*«
Dans quelques cas, il est fait référence aux angles droits, même pour la figure BJFD, d'évidence sans sentir la nécessité d'opérer une vérification.

Au sujet du point 3
Dans la plupart des productions qui considèrent la figure BJFG comme rectangle, il est dit, de façon erronée qu'Anne a raison, mais sans dire pour quelle raison on pense qu'il s'agit d'un rectangle. Dans une production l'explication suivante est donnée comme motivation du choix : «*Parce que ça a la forme d'un rectangle presque parfait*«. En général, il est dit que c'est un rectangle parce qu'il a les côtés égaux à deux à deux.

Au sujet du point 4

L'usage de l'équerre est, dans l'ensemble, rarement mentionné et on le trouve en particulier dans les productions françaises et suisses.

Un exemple intéressant (cat. 6) :


Fiche réponse de l'exercice 8 Code : 6 FC 657

18e RMT ÉPREUVE I janvier - février 2010 ©ARMT.2010

8. LES DIX POINTS (Cat. 5, 6, 7)

Il y a dix points marqués sur la grille dessinée ci-dessous.
François en a trouvé quatre qui sont les sommets d'un rectangle.

Trouvez ces quatre points, dessinez le rectangle en rouge et expliquez pourquoi vous pensez que c'est un rectangle.

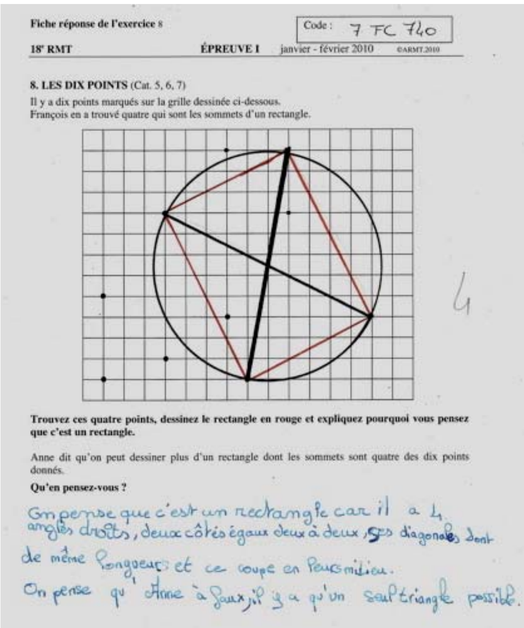
Anne dit qu'on peut dessiner plus d'un rectangle dont les sommets sont quatre des dix points donnés.

Qu'en pensez-vous ?

Nous avons trouvés ce rectangle en regardant les différents points et en trouvant que DFGH ressemble à un rectangle. Puis, nous avons vérifiés les angles avec l'equerre.
Si on relie tous les points qui restent, on peut s'appercevoir que aucun côtés opposé n'est parralèle donc on ne peut tracer d'autres rectangles.

Nous avons trouvé ce rectangle en regardant les différents points et en trouvant que DFGH ressemble à un rectangle. Puis nous avons vérifié les angles avec l'équerre.
Si on relie tous les points qui restent, on peut s'apercevoir qu'aucun côté opposé n'est parallèle donc on ne peut tracer d'autres rectangles.

Dans l'exemple qui suit (cat. 7) on pourrait entrevoir une caractérisation des angles droits, avec les deux triangles inscrits dans une demi-circonférence.


Fiche réponse de l'exercice 8 Code : 7 FC 740

18e RMT ÉPREUVE I janvier - février 2010 ©ARMT.2010

8. LES DIX POINTS (Cat. 5, 6, 7)

Il y a dix points marqués sur la grille dessinée ci-dessous.
François en a trouvé quatre qui sont les sommets d'un rectangle.

Trouvez ces quatre points, dessinez le rectangle en rouge et expliquez pourquoi vous pensez que c'est un rectangle.

Anne dit qu'on peut dessiner plus d'un rectangle dont les sommets sont quatre des dix points donnés.

Qu'en pensez-vous ?

On pense que c'est un rectangle car il a 4 angles droits, deux côtés égaux deux à deux, ses diagonales dont de même longueur et ce coupe en leurs milieu.
On pense qu' Anne à faux, il y a qu'un seul triangle possible.

On pense que c'est un rectangle car il a 4 angles droits, deux côtés égaux deux à deux, ses diagonales sont de même longueur et ce coupe en leurs milieu.
On pense qu'Anne a faux, il y a qu'un seul triangle [rectangle, évidemment] *possible.*

6. Quelques conclusions

Depuis 2005, le groupe *Ellealquadrato*[9], devenu maintenant groupe *géométrie plane*, s'est occupé des questions liées au concept d'aire. Mais, à un certain moment, les problématiques liées au concept de rectangle ont fait leur apparition.

[9] "L" au carré

Tout a commencé par une histoire de table, dont les pieds sont aux sommets d'un rectangle imaginaire, qui vont recouvrir des emplacements bien déterminés d'un quadrillage, mais auxquels les élèves accordent des libertés de déplacement absolument incompatibles avec les invariances de l'objet physique et bien solide, pour aboutir à quelques variantes et à un autre problème, que nous retenons pour les conclusions de cette étude.
Comme souvent, au travers des épreuves du RMT, apparaissent des erreurs caractéristiques inattendues ou dont on n'avait pas prévu qu'elles se manifestent de manière aussi évidentes a posteriori. Ces erreurs récurrentes sont évidemment révélatrices de constructions inachevées, de difficultés ou d'obstacles.
Globalement le problème « Les dix points », a obtenu un meilleur taux de réussite que celui de « La table (ou le tapis) à déplacer », bien qu'environ 50% des groupes, des diverses catégories aient obtenu « 2 points » en ayant identifié correctement le rectangle CHGE, mais estimé par erreur que la figure BJFD était un rectangle ou « 1 point », en ayant considéré comme unique « rectangle » la figure BJFD.
Il faut relever que les deux situations sont conceptuellement de nature différente :
* Dans le cas de « La table (ou du tapis) à déplacer », il faut « imaginer » dans un premier temps puis « créer » (ou construire) un rectangle à partir de quelques sommets donnés, c'est-à-dire ne pas seulement mobiliser ses propres connaissances sur le rectangle de manière critique mais aussi de conduire une vraie recherche~~.~~
* Dans le cas des « Dix points », il s'agit « d'identifier » un rectangle en choisissant parmi les points donnés (déjà potentiellement considérés comme des sommets) et utiliser pour cela des propriétés caractéristiques connues de cette figure.
La première est par conséquent conceptuellement plus difficile.
Dans les deux cas, cependant, les résultats montrent que beaucoup d'élèves négligent une des caractéristiques du rectangle, celle d'avoir des angles droits (qu'il faudra nécessairement vérifier, avec une équerre par exemple). Les autres caractéristiques comme le parallélisme et l'isométrie des côtés opposés sont reconnues et prise en compte dans la très grande majorité des copies examinées. L'obstacle essentiel réside donc dans la distinction entre parallélogramme et rectangle. Il correspond au « passage de l'espace projectif à l'espace euclidien » (selon les termes de Piaget, 1947). En termes de transformations géométriques, il est lié à la non conservation de l'angle droit dans la projection d'un objet de l'espace à trois dimensions sur un plan. (La photo d'une porte rectangulaire est rarement un rectangle, elle est plutôt un parallélogramme.)
L'obstacle a plusieurs origines, dont certaines sont vraisemblablement d'ordre ontogénique et liées au développement de l'élève, mais nos données montrent que si une majorité des jeunes élèves de 11 à 12 ans n'ont pas encore construit le concept, d'autres présentent encore des carences notoires dans ce domaine plusieurs années plus tard.
On peut aussi envisager des origines épistémologiques de l'obstacle, inhérentes au savoir lui-même. Peut être a-t-on sous estimé la complexité du concept et le conflit avec les conceptions spontanées issues de connaissances empiriques, en l'occurrence entre objet et ses représentations par des figures géométriques du plan.
Il y a aussi les aspects didactiques de l'obstacle à envisager et il est bien évident que les membres d'un groupe de travail du RMT y accordent une attention particulière ; eux qui se situent à l'interface entre la recherche et la pratique. Les difficultés des élèves révélées par nos problèmes sur le rectangle nous ont surpris par leur ampleur et nous interpellent directement. Elles nous amènent à nous poser des questions sur leurs origines et d'interroger d'abord l'école ou le système au sein duquel nous nous trouvons.
Une des premières hypothèses est que la difficulté à prendre en compte les angles droits est en corrélation avec les programmes scolaires, les manuels et les manières de présenter les rectangles dans les pratiques scolaires. Nous avons en effet observé des différences entre les taux de réussite selon les régions et pays.
En ce qui concerne l'Italie, il semble qu'on aborde très tôt les mesures comme le périmètre, les aires, (et parfois les volumes), plutôt que les figures en tant que telles. Nous avons examiné quelques manuels italiens qui confirment cette impression. Mais nous ne sommes pas en mesure d'aller au delà de ces constatations, ni de les étayer par des données significatives. Ce n'est d'ailleurs pas le but du RMT.
Alors, plutôt que de faire des hypothèses sur les origines de l'obstacle, faisons-les sur la manière dont on pourrait y remédier, par des propositions, à partir des données recueillies, qui font état d'un déficit de maîtrise du concept d'angle droit partout où nous avons conduit nos enquêtes.
Ce constat ne doit pas être un jugement, qui serait alors négatif ; ce n'est pas non plus une évaluation « neutre », c'est-à-dire conduite d'un point de vue analytique ou statique. Il faut le considérer comme un apprentissage pour les membres du groupe, et pour les enseignants qui prendront connaissance des résultats de cette analyse. On en sait plus, grâce à ces données, sur le niveau réel de construction du concept d'angle droit par les élèves et, par conséquent, on entrevoit des perspectives d'action, qui, elles, sont positives.
Par exemple, en ce qui concerne « Les dix points » on est quasiment sûr que l'erreur que nous avons observée apparaîtra, parmi quelques réponses correctes. On peut alors prévoir une confrontation collective entre élèves au cours de laquelle ils devront bien s'accorder. C'est peut-être à ce moment qu'apparaîtra la nécessité d'utiliser l'équerre pour déterminer laquelle ou lesquelles des deux figures envisageables sont effectivement des

rectangles. Non pas sur une injonction du genre « prenez votre équerre » où l'initiative de relier l'instrument à la figure vient de l'extérieur, mais sur une idée conçue au sein du groupe d'élèves.
Dans « La table à déplacer », la certitude d'aboutir au conflit rectangle/parallélogramme permettra aussi au maître d'organiser un débat au cours duquel surgira peut-être l'idée de dessiner le rectangle de la table et de le reporter, par papier calque ou par découpage, sur les divers emplacements proposés. Dans ce cas, il est vraisemblablement que la conservation de l'angle droit dans les déplacements du modèle aura pris du sens pour de nombreux élèves.
Ces perspectives positives s'inscrivent dans une exploitation didactique des deux problèmes. Elles illustrent de manière vivante les priorités qu'il faudrait accorder, dans un parcours d'apprentissage sur le rectangle, à la perception des propriétés sur les exercices de classement ou de reconnaissances de formes, aux manipulations sur les techniques de construction, aux situations inédites, voire « conflictuelles » sur les problèmes d'application, plutôt qu'aux exercices sur les aires et les périmètres seulement centrés sur les mesures et les calculs.
Finalement, dans la longue construction du concept, on se rendra bien compte que « le rectangle, ce n'est pas aussi évident » qu'il n'y paraît.

7. Bibliographie

Bisso, C., Grugnetti, L., (a cura di) : 2006, 'Approccio al concetto di area con problemi del RMT', Gruppo di lavoro n° 8, «ellealquadrato«, in R. Battisti, R. Charnay, L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds.), *RMT : des problèmes à la pratique de la classe/RMT: dai problemi alla didattica quotidiana, Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, Bourg-en-Bresse 2004, Arco di Trento 2005, ARMT, IUFM de Lyon-Centre de Bourg-en-Bresse, IPRASE Trentino, 268-276.Bisso, C., Grugnetti.L : 2007a, 'Il ruolo dei problemi del RMT nella costruzione del concetto di area', in L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici,. G. Rinaldi (Eds.), *I problemi del RMT nella didattica quotidiana/ les problèmes du RMT dans la pratique de la classe*, Parma 2006, Sezione ARMT di Parma, ARMT, 25-36.
Bisso, C., Grugnetti, L. (a cura di) : 2007b, 'La costruzione del concetto di area con problemi del RMT', in IBIDEM, 169-187.
Bisso, C., Grugnetti, L. : 2009, 'Il concetto di area con i problemi del RMT : un percorso quinquennale', in L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds.), *Rallye Mathématiques Transalpin et interculturalité/Rally Matematico Transalpino e intercultura*, Brigue 2008, ARMT, SCNAT, 167-182.
Jaquet F., 2000, Il conflitto area-perimetro, *L'educazione Matematica,* ed. CRSEM (Prima parte: Anno XXI - Serie VI - Vol 2, n. 2, 66-77, seconda parte: n. 3, 126-143).
Jaquet, F. : 2009, 'La finale internazionale du 16e RMT, problèmes et analyse', in L. Grugnetti, F. Jaquet (Eds) *Rally Matematico Transalpino e intercultura*, ARMT, SCNAT, 225-253.
Lismont, L, Rouche, N. (a cura di) : 2001, *Forme set mouvements*, CREM.
Piaget, J, Inhelder, B. : 1947, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Presses Universitaire de France.
Rouche, N. (a cura di) : 1995, *Le Mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans. Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques.* CREM.
Edizione italiana: CREM, 1999, *La matematica dalla scuola materna alla maturità. Proposta di un percorso globale per l'insegnamento della matematica.*
edizione italiana a cura di Lucia Grugnetti e Vinicio Villani – traduzione di Silvano Gregori. Pitagora editrice.
Salin, M-H. : 2008, 'Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège, le facteur temps', APMEP, n. 478, 647-670.

FUNZIONI PER RISOLVERE PROBLEMI?

Comunicazione del gruppo *Funzioni*[10]

A cura di Annie Henry, Michel Henry e Angela Rizza

I - Introduzione

Gli incontri di Bard (2007, *Idea di funzione*) e di Brigue (2008, *Six questions sur la notion de fonction dans les problèmes du RMT*) ci hanno portato alla conclusione che, sebbene la nozione di funzione sia fondamentale in matematica, la sua acquisizione incontri numerosi ostacoli ed il suo utilizzo esplicito nei problemi inizi effettivamente soltanto a partire dai livelli 9 e 10.

Il nostro gruppo di lavoro si è allora proposto di cercare se nei problemi del RMT si potessero trovare elementi precursori alla nozione di funzione, che spingessero gli allievi ad utilizzare diversi registri rappresentativi: introduzione di variabili, tabelle di valori, formule letterali, grafici cartesiani…

Per il 13° incontro, a Nivelles, analizzando gli elaborati di quattro problemi del 17° RMT, abbiamo studiato più precisamente gli ostacoli che si presentano ad un allievo quando deve passare da una procedura algoritmica ad una procedura che richiede una delle varie rappresentazioni di una funzione.

II – Elementi di analisi a posteriori presentati a Nivelles

Ecco una sintesi di quello che è stato osservato a proposito dei seguenti problemi :

1) Un mazzo di fiori (RMT 17, I, 15, cat. 7, 8, 9, 10)

Sandra è rappresentante di classe.
Gli studenti apprezzano molto la loro professoressa di matematica e decidono di regalarle un mazzo di fiori per le feste di Natale.
Ogni allievo ha versato tante volte 2 centesimi di euro quanti sono gli allievi della classe.
Sandra ha raccolto le quote e conta la cifra ottenuta. Senza considerare la sua quota, ha 22 euro e 44 centesimi.
Quanti allievi ci sono nella classe ?

Breve sintesi delle analisi realizzate a partire dagli elaborati di quattro sezioni :

Cat 7 (225 elaborati)	19% hanno 3 o 4 punti	71% hanno 0 o 1 punto
Cat 8 (171 elaborati)	25% hanno 3 o 4 punti	61% hanno 0 o 1 punto
Cat 9 (62 elaborati)	34% hanno 3 o 4 punti	46% hanno 0 o 1 punto
Cat 10 (48 elaborati)	50% hanno 3 o 4 punti	40% hanno 0 o 1 punto

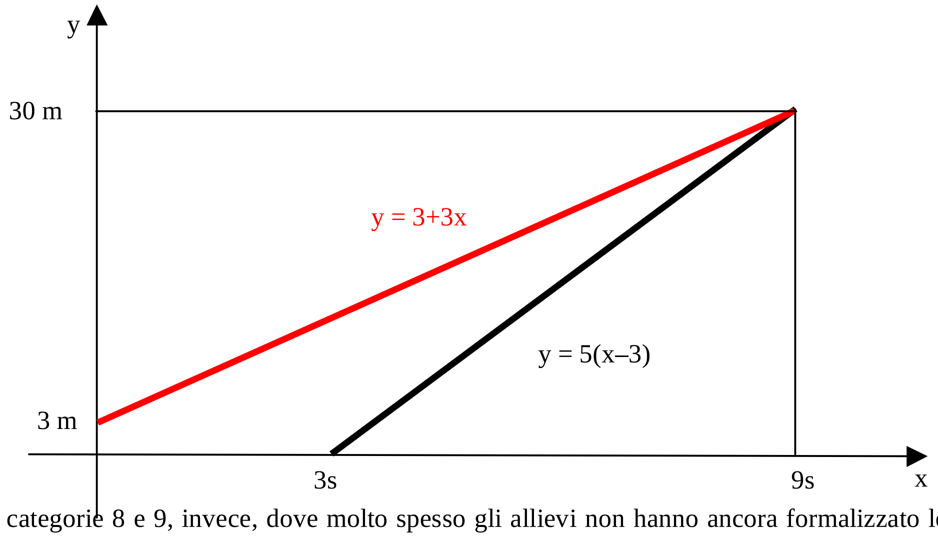
Nessuno dei 32 elaborati di Parma di cat. 9 e solamente 3 su 21 di cat. 10 contengono equazioni. Due protocolli di cat. 9 e due di cat. 10 contengono una formula algebrica.
L'analisi degli elaborati ci ha suggerito le seguenti domande:
- Nel problema del mazzo di fiori, alcune classi hanno pensato alla radice quadrata come operazione inversa del quadrato. Questo potrebbe significare la presenza di un'idea di funzione?
- Nei vecchi manuali scolastici (fino agli anni '50) i capitoli di algebra (polinomi) precedevano l'introduzione della nozione di funzione (funzione polinomiale). L'algebra facilita l'approccio alla nozione di funzione?
- L'utilizzo di incognite può essere interpretato come un approccio alla variabilità?

2) Gara di corsa (RMT 17, I, 19, cat. 8, 9, 10)

Giorgio e Federico fanno una gara di corsa su una distanza di 30 m tra un albero A e un albero B.
Giorgio corre alla velocità di 10,8 km/h, mentre Federico corre alla velocità di 18 km/h.
Federico concede un vantaggio a Giorgio che partirà da un punto C situato tra i due alberi, a 3 metri dall'albero A.
Federico parte dall'albero A esattamente 3 secondi dopo la partenza di Giorgio.
Chi vincerà la corsa? Quanto tempo avrà corso ciascuno?
Spiegate il vostro ragionamento.

[10] G. Bonetto, F. Buini, B. Chaput, M. Front, A. Henry, M. Henry, R. Iaderosa, M. Negri, M. Polo, F. Ricci. A. Rizza

Questo problema è stato proposto dalla sezione di Milano con lo scopo di vedere se agli allievi, soprattutto quelli della cat. 10, viene l'idea di utilizzare le rappresentazioni grafiche delle due leggi del moto, relative a Giorgio e Federico, per determinare la durata delle loro corse e risolvere il problema utilizzando la soluzione grafica del sistema di equazioni.



Per le categorie 8 e 9, invece, dove molto spesso gli allievi non hanno ancora formalizzato le leggi del moto, si vorrebbero studiare le procedure intuitive messe in atto per determinare le velocità e ragionare sulle durate.
A Parma: su 91 elaborati, in uno solo (cat. 9) viene fatto un grafico, 32 utilizzano la definizione di velocità, 7 la proporzionalità.
A Siena: su 115 elaborati, l'idea di funzione accompagnata da un grafico è presente in un solo elaborato di cat. 8. Gli elaborati di cat. 9 e 10 utilizzano la definizione di velocità, mentre quelle di cat. 8 la proporzionalità.
Nella sezione dell'Enseignement Agricole francese, si osserva una buona riuscita a livello 10.
A Cagliari, le percentuali di riuscita sono 0% in cat. 8, 35% in cat. 9, 29% in cat. 10
In Franche-Comté, su 70 elaborati di cat. 8
– Nessuno risolve il problema graficamente
– Nessuno scrive la legge oraria (d = v t o v = d/t)
– 27 elaborati (38%) trovano il risultato utilizzando la proporzionalità.

La sezione di Milano osserva che l'analisi degli elaborati mostra la totale assenza di tentativi di ottenere la soluzione per mezzo dei grafici del moto, anche per allievi di categoria 10 (2 tentativi su più di 200 elaborati analizzati!). Questo stupisce perché nella tradizione didattica italiana in generale si lavora sui grafici lineari a partire dal terzo anno di scuola secondaria. Gli allievi di cat. 8 e 9 hanno mostrato una grande difficoltà nella gestione delle unità di misura. A questo si aggiunge una scarsa padronanza del concetto di velocità come rapporto di due grandezze non omogenee (lunghezza e tempo). Gli allievi hanno gestito con difficoltà i due "svantaggi": in molti casi, è stato considerato solo lo svantaggio relativo al tempo o quello sulla distanza.

3) Alcune conclusioni delineate dal gruppo *Funzioni*

Da queste analisi a posteriori, abbiano ricavato le osservazioni e le questioni seguenti:
- La sezione di Milano aveva proposto il problema della gara di corsa, deliberatamente complicato con i due vantaggi sul tempo e sulla distanza concessi a Giorgio. La necessaria scrittura delle equazioni del moto dei due ragazzi doveva collocare gli studenti nel quadro funzionale, dato che la strategia proporzionale risulta più complicata. La rappresentazione grafica, particolarmente adatta alla situazione, non è invece stata utilizzata spontaneamente dagli allievi.
- Si può trovare un motivo per l'assenza di grafici, nella complessità dell'enunciato con i due svantaggi e i cambiamenti di unità di misura. In un altro problema del RMT (Salita al rifugio, RMT 17, F, 13), si trovano numerose spiegazioni accompagnate da schemi negli elaborati delle cat. 9 e 10.
- In quale contesto ci si possono aspettare risoluzioni grafiche? Bisognerebbe riprendere il problema della gara di corsa con un solo svantaggio e senza il cambiamento di unità di misura (ad esempio corsa di biciclette in km/h).
- Si può proporre un problema del RMT dove sia richiesto di interpretare un grafico ?
Queste osservazioni confermano le conclusioni provvisorie delle riunioni precedenti:

- La nozione di funzione non sembra presente prima dei livelli 9 e 10. Essa non figura nei programmi francesi dei *collèges* (11-15 anni), salvo che per le funzioni lineari o affini. Alcuni problemi dei livelli 7, 8, o 9, però, possono anticiparla facendo appello all'idea di una corrispondenza oggetto-immagine fra variabili.
- Nei problemi che mettono in gioco variabili intere, sono possibili dei tentativi in una procedura algoritmica che può condurre alla nozione di successione. L'introduzione di variabili continue (o forse decimali), soprattutto in geometria, suppone l'utilizzo di formule e calcoli che fanno intervenire la relazione oggetto-immagine.

III – Sperimentazioni nel 2009-2010

Traendo ispirazione da queste osservazioni, il gruppo *Funzioni* si è dato l'obiettivo di condurre una sperimentazione in due fasi durante l'anno scolastico 2009 – 2010:

– Prima fase: osservazione dei comportamenti di allievi organizzati in coppie, impegnati nella risoluzione di due problemi coinvolgenti rappresentazioni grafiche.

– Seconda fase: analisi degli elaborati prodotti da alcune classi sperimentali relativamente a 7 problemi riguardanti più o meno esplicitamente la nozione di funzione.

– Inoltre, nella prova II del 18° RMT sono stati proposti tre problemi centrati sull'utilizzo di funzioni corredati da elementi di analisi a posteriori.

1) Nella prima fase, la sezione di Franche-Comté ha osservato 26 coppie di due classi di cat. 9, poi ha condotto alcune interviste con tre di queste coppie.

Ogni coppia ha ricevuto due problemi da risolvere in 50 minuti: il problema R, *Salita al rifugio* (RMT 17, F, 13 modificato) e il problema C *L'escursione ciclistica*, elaborato a Nivelles dopo aver osservato i comportamenti degli allievi nella *Gara di corsa*.

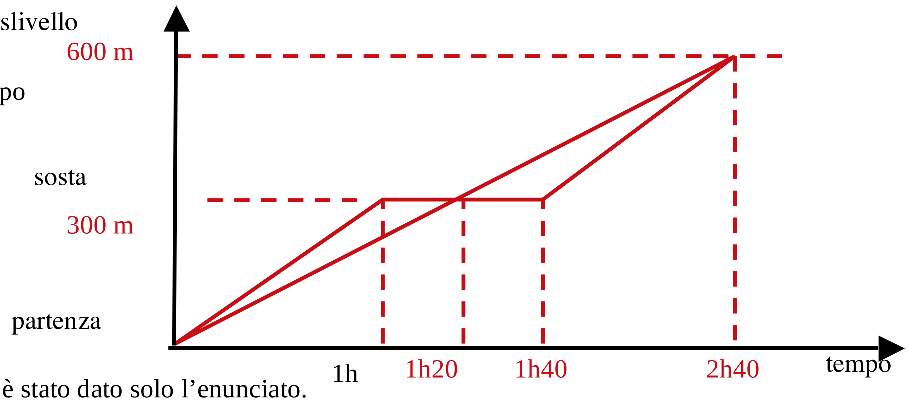
Poiché uno dei cardini del nostro lavoro era quello di analizzare la padronanza da parte degli allievi del registro grafico a proposito del concetto di funzione, abbiamo elaborato due versioni di ciascun problema: con o senza base grafica.

Problema R: la versione R1 proponeva il seguente enunciato:

SALITA AL RIFUGIO (adattato da RMT 17, F, 13, cat. 9)
Marco e Andrea partono insieme per una passeggiata al rifugio dell'Orso. Entrambi camminano con un'andatura costante.
Dopo un'ora Marco, più veloce, è salito di 300 m e si ferma per una sosta.
20 minuti dopo, viene raggiunto da Andrea che, invece, non si ferma e arriva al rifugio esattamente in due ore e 40 minuti dalla partenza.
Quale può essere la durata massima della sosta di Marco se vuole arrivare per primo al rifugio e quale dislivello gli rimane da percorrere?
Spiegate il vostro ragionamento e fate un grafico.

con la base grafica rappresentata in nero (in rosso è invece rappresentata la risposta attesa da parte degli studenti):

Grafico: dislivello
in funzione del tempo



Per la versione R2, è stato dato solo l'enunciato.
L'analisi degli elaborati mostra che:

– Su 12 coppie che hanno ricevuto la base grafica, 2 hanno realizzato un buon grafico, 1 ha fatto un grafico errato e 9 non hanno disegnato nulla.

– Su 14 coppie che hanno ricevuto la versione senza base grafica, vi è un solo accenno di grafico, errato.

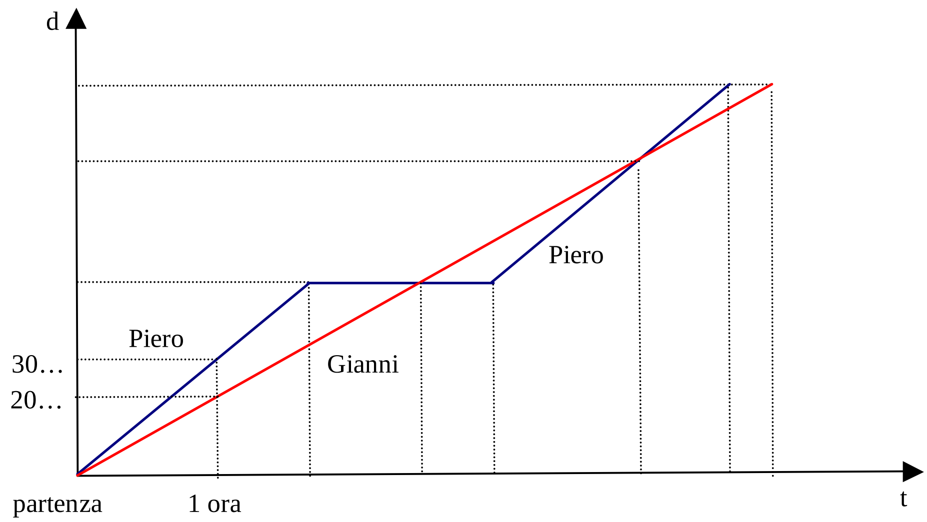
La base grafica non aiuta quindi gli allievi a realizzare il grafico richiesto!

Problema C in due versioni :

L'ESCURSIONE CICLISTICA
Due amici, Gianni e Piero, partono insieme una domenica alle 8 per un'escursione di 100 km. Gianni viaggia a 20 km/h e Piero a 30 km/h. Piero fora al 50-esimo km e deve trovare una gomma da sostituire. In tutto la riparazione dura 1h 20 min. Alla fine dell'escursione, i due amici si ritrovano per fare il punto.
A che ora Gianni supererà Piero che è in vantaggio?
A che ora ciascuno arriverà alla fine dei 100 km?
Piero, dopo la foratura, avrà raggiunto Gianni?
Se sì a che ora?

La versione C1 riportava anche il grafico seguente con la richiesta:

Mostrate i calcoli che avete fatto e completate il grafico indicando le distanze e i tempi mancanti .

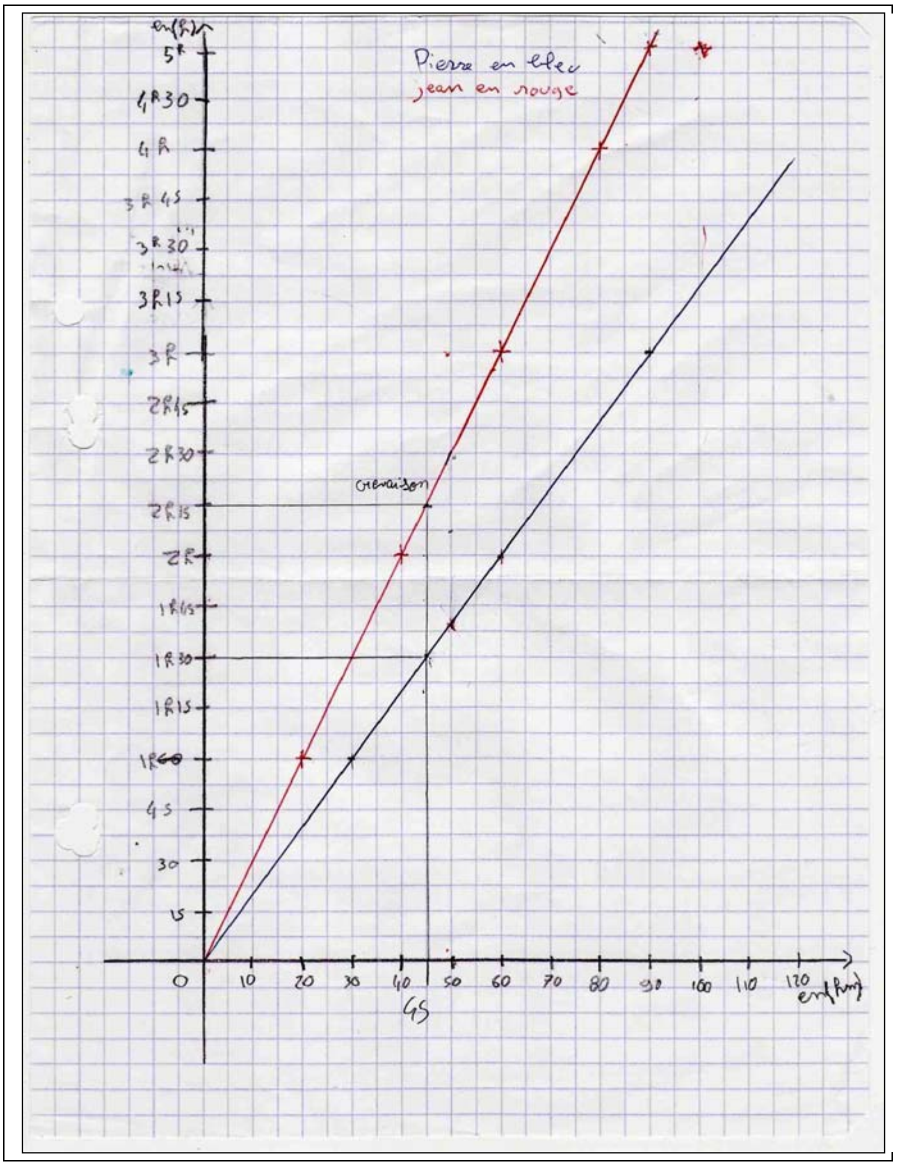


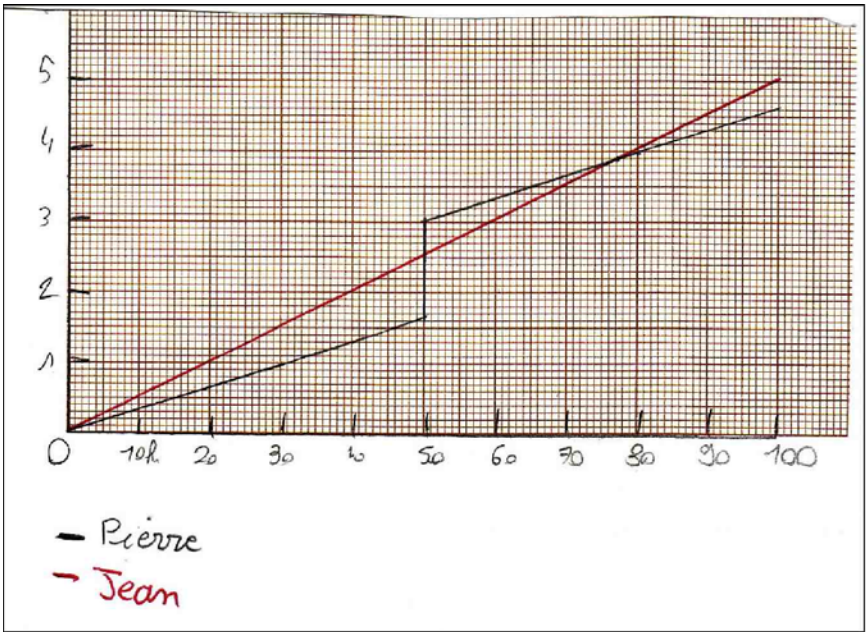
La versione C2, invece, non proponeva un grafico ma solo la richiesta:

Mostrate i calcoli che avete fatto o fate un grafico che permetta di trovare le risposte.

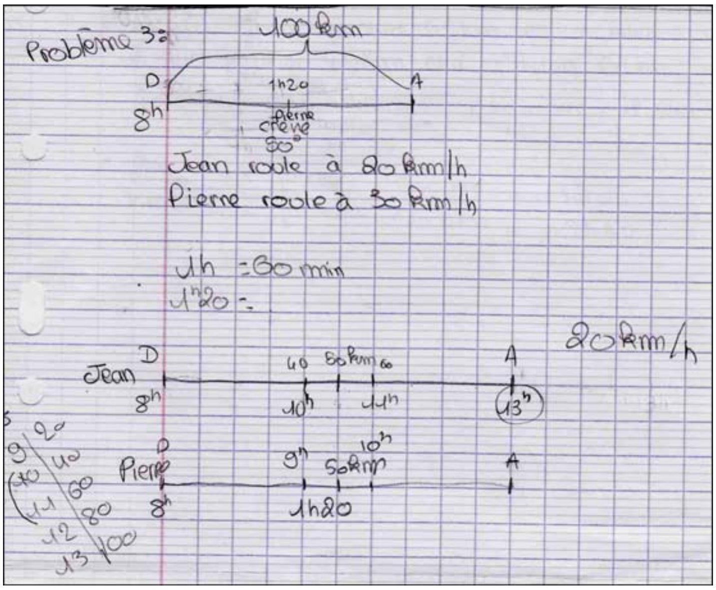
– Su 12 coppie che hanno ricevuto C1 (con grafico), 7 hanno solo messo delle coordinate sul grafico, 10 non lo utilizzano; le 2 coppie che lo utilizzano non rispondono alla quarta domanda, la cui soluzione grafica è molto semplice (a che ora Piero raggiunge Gianni?).

– Su 14 coppie che hanno ricevuto C2 (senza grafico), 11 non hanno fatto un grafico cartesiano, 3 hanno disegnato un grafico cartesiano, uno con i tempi in ascissa con la risposta alla quarta domanda e 2 con le distanze in ascissa, 1 corretto e 1 errato, riprodotti qui sotto:


Pierre en bleu
jean en rouge
Crevaison
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
45



Alcuni allievi propongono schemi di tipo lineare, di cui riportiamo un esempio (abbiamo raccolto tutte le brutte copie):

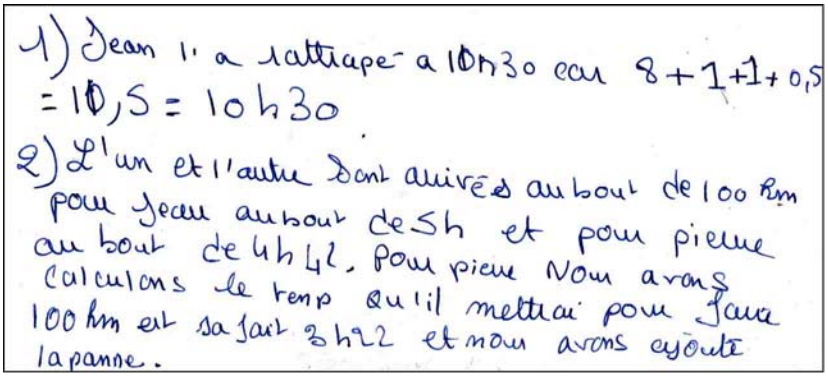


Durante i tre colloqui che abbiamo avuto, gli allievi ci hanno spiegato che è “più complicato” lavorare sui grafici piuttosto che calcolare o che “è più facile spiegare che fare un grafico”. Per gli allievi, l’elaborazione o la lettura del grafico costituisce un compito supplementare. In effetti, essi non “leggono” i dati contenuti nel grafico, ma svolgono calcoli per sistemare successivamente tempi e distanze ottenuti.

Una coppia ci ha detto che il grafico “non è sufficientemente preciso” perché vi si possa trovare un’informazione. Tuttavia, molti studenti non sono bravi nel calcolo!

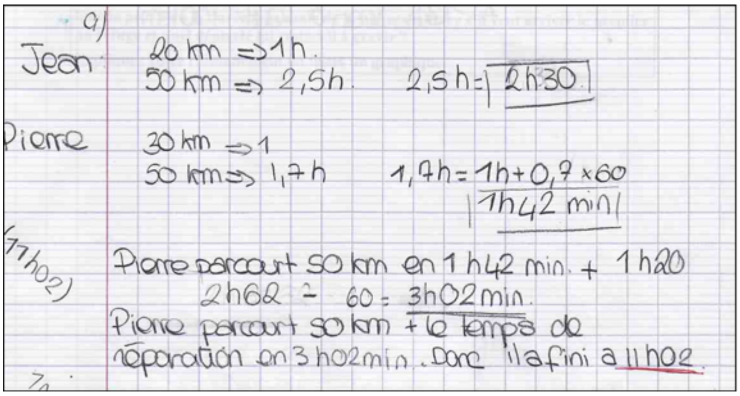
Ecco due esempi.

- una coppia che lavora nel quadro additivo:



1) Jean l'a rattrapé à 10h30 car 8 + 1 + 1 + 0,5
= 10,5 = 10h30
2) L'un et l'autre sont arrivés au bout de 100 km
pour Jean au bout de 5h et pour pierre
au bout de 4h42. Pour pierre nous avons
calculons le temp qu'il mettrai pour faire
100 km et sa fait 3h22 et nous avons ajouté
la panne.

- e questa, in difficoltà con i calcoli di velocità:



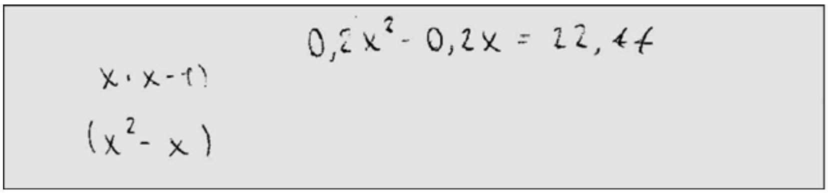
a)
Jean 20 km ⇒ 1h.
50 km ⇒ 2,5h. 2,5h = 2h30
Pierre 30 km ⇒ 1
50 km ⇒ 1,7h 1,7h = 1h + 0,7 × 60
1h42 min
(11h02)
Pierre parcourt 50 km en 1h42 min + 1h20
2h62 − 60 = 3h02 min.
Pierre parcourt 50 km + le temps de réparation en 3h02min. Donc il a fini à 11h02

Molte coppie trovano così minuti “in più” a causa degli arrotondamenti. Aggiungiamo che, nelle due classi, l’argomento della rappresentazione grafica di funzioni lineari era stato trattato.

Il bilancio che abbiamo tratto, da questa prima fase di sperimentazione, è che il grafico cartesiano, a questo livello, non costituisce uno strumento efficace di risoluzione di problemi. È piuttosto una «illustrazione» della situazione, che gli allievi fanno volentieri, per farci piacere, durante l’intervista. Non è neppure certo che permetta agli allievi di comprendere meglio l’enunciato.

2) Nella seconda fase, abbiamo realizzato una simulazione di una situazione di rally con 7 problemi in 8 classi (2 a Parma e 6 in Franche-Comté): una classe di cat. 8, cinque di cat. 9 e due di cat. 10. Analizziamo qui solo quattro dei 7 problemi.

a) Un mazzo di fiori (RMT 17, I, 15, cat. 8, 9, 10, si veda l’enunciato sopra riportato) al quale abbiamo aggiunto questa domanda, con l’obiettivo di spingere gli allievi ad utilizzare un registro algebrico:
“Scrivete i calcoli da fare per trovare il numero di allievi della classe”.
Il problema si “formalizza” con una semplice equazione: $2x^2 - 2x = 2244$.
Sono stati raccolti 16 elaborati: 3 di cat. 8, 8 di cat. 9, e 5 di cat. 10.
- Una classe di cat. 9 scrive un’equazione *quasi* corretta (errore di unità!) senza risolverla (procede per tentativi per trovare la soluzione):



$0{,}2x^2 - 0{,}2x = 22{,}44$
x · x - 1)
$(x^2 - x)$

- 3 gruppi di cat. 10 scrivono “formule algebriche”, ma errate (incomprensione dell’enunciato):

* 22 e 44 → 264 centimes
* x : nb d'élèves
  $(x-1)\times$
* $(x-1)\times 2 = 2x-2$
* $2x-2 = 2264$
* $2x = 266$
* $x = \frac{266}{2} = 133$
* $(x-1)\times(2x-2) = 264$
* $2x^2 - 2x - 2x + 2 = 264$
* $2x^2 - 4x = 262$
* $2xx - 4x \rightarrow 2xx - 2\times 2\times x$
* $2x(x-2) = 262$
* $x(x-2) = 131$

* $x \times 2x = 264$
* $x^2 = \frac{264}{2}$
* $x^2 = 133$
* $x = 11{,}53$
* $(11{,}53-1)\times 2 = 221$

- In 2 elaborati su 16, si trova esplicitamente l'idea di funzione. Ad esempio, in questa di cat. 10, dopo una tabella di valori, gli allievi utilizzano la funzione $2x^2$ seguita dalla corretta equazione che conduce al risultato:

On a essayé avec plusieurs nombres d'élèves :

1 élève → 2c
2 élèves → 8c
3 élèves → 18c
4 élèves → 32c
5 élèves → 50c
6 élèves → 72c
20 élèves → 8,00€
30 élèves → 18,00€
35 élèves → 24,50€
40 élèves → 32€
50 élèves → 50€

La formule pour trouver le nombre d'élèves :
$x \times x \times 2$ ou $2x^2$
x = nombre d'élève

~~22,44~~ = $x \times x \times 2$ = 2244 + $(2x)$

Il y a 34 élèves dans la classe.

la cotisation est de 68 centime

- In questa tabella (l'utilizzo di una tabella con un foglio elettronico sembra abbastanza familiare in questa classe di cat. 9), ma i titoli di due colonne sono errati:

nombre d'élève	Sandra	Argent donné par élève	somme totale
21	0,42	8,82	9,24
22	0,44	9,68	10,12
23	0,46	10,58	11,04
24	0,48	11,52	12
25	0,5	12,5	13
26	0,52	13,52	14,04
27	0,54	14,58	15,12
28	0,56	15,68	16,24
29	0,58	16,82	17,4
30	0,6	18	18,6
31	0,62	19,22	19,84
32	0,64	20,48	21,12
33	0,66	21,78	22,44
34	0,68	23,12	23,8
35	0,7	24,5	25,2
36	0,72	25,92	26,64
37	0,74	27,38	28,12
38	0,76	28,88	29,64
39	0,78	30,42	31,2
40	0,8	32	32,8

- Le procedure si riducono a tentativi, alcuni fatti un po’ a caso, altri più organizzati e ragionevoli come questo:

Il y a 34 élèves dans la classe. (Y compris Sandra).

On nous dit que chaque élève a donné autant de fois 2 centimes d'Euros qu'il y a d'élèves dans la classe.

On a essayé avec une classe de 30 élèves ; et on trouve : 30 × 2 = 60 (Chaque élève donne 30×2 cents)
60 × 30 = 18,00€. (Si ils étaient 30 élèves).

On a essayé avec une classe de 35 élèves ; et on trouve : 35 × 2 = 70 (Chaque élève donne 35×2 cents)
70 × 35 = 24,50€ (Si ils étaient 35 élèves).

On a vu alors que l'on se rapprochait du résultat.

Donc on a essayé avec une classe de 33 élèves : et on trouve : 33 × 2 = 66 (Chaque élève donne 33×2 cents)
66 × 33 = 21,78€. On rajoute alors la contribution de Sandra de 66 cents également.

On trouve alors 21,78€ + 0,66€ = 22,44€
Ils sont donc 34 élèves dans la classe.

b) Erba per una pecora, in due versioni:

P1) Problema della pecora, con dati tali che le soluzioni siano numeri interi (ripreso in un’altra versione in RMT 18, II, 14, cat. 7 e 8)

ERBA PER UNA PECORA

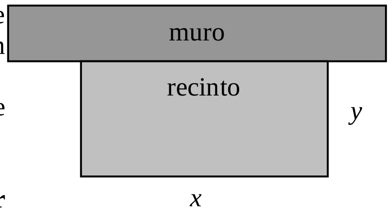
Jean ha adottato una pecora e vuole riservarle una parte del prato che circonda la sua casa. Desidera costruire un recinto rettangolare con un lato lungo un muro che delimita la sua proprietà, come mostra la figura.

Per costruirlo, dispone di una rete di lunghezza $a = 20$ m che deve formare gli altri tre lati del rettangolo.

Ma Jean vorrebbe dare alla sua pecora una superficie d'erba di 42 m^2.

Quali lunghezze x e y dei lati del rettangolo deve scegliere Jean per realizzare questa condizione?

Mostrate i calcoli che avete fatto o spiegate come le avete trovate.



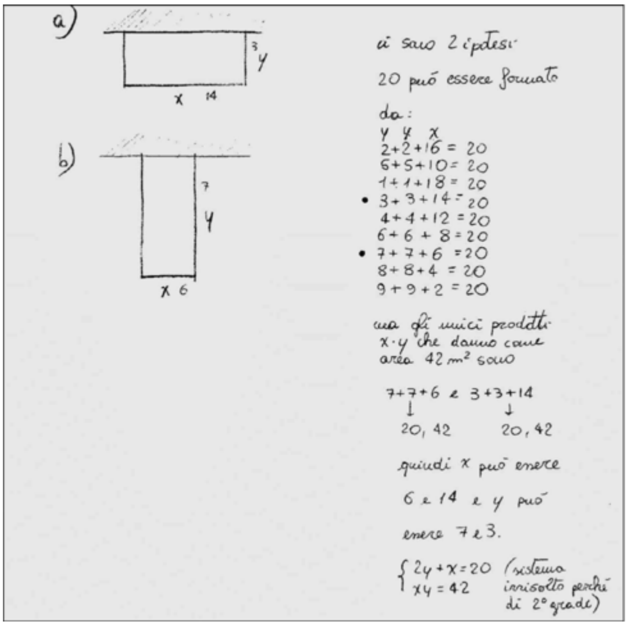
P2) Problema della pecora con dati tali che le soluzioni non siano numeri interi e neppure razionali (ripreso in un'altra versione in RMT 18, II, 19, cat. 9, 10):

"Ma Jean vorrebbe dare alla sua pecora una superficie d'erba di 40 m^2" (invece di 42 m^2).

In questa sperimentazione, abbiamo raccolto 7 copie del problema P1 (soluzioni intere), 2 di cat. 8 e 5 di cat. 9.

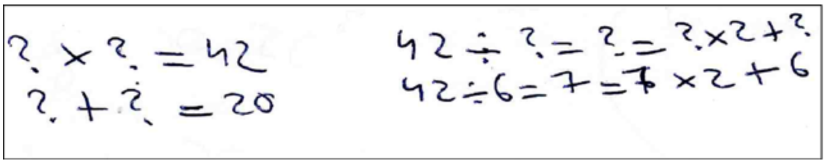
Ecco una sintesi dell'analisi di questi elaborati:

1. In un elaborato di cat. 8 e in uno di cat. 9 appaiono delle variabili, in forma letterale (del tipo $x + 2y$) o in forma retorica, con l'intento di "farle variare" sostituendovi successivamente diversi numeri, come riportato nella seguente tabella:



2. In tre elaborati compaiono delle formule algebriche (come $x + 2y = 20$ e $xy = 42$); ma gli allievi non sanno risolvere il sistema e quindi non proseguono.

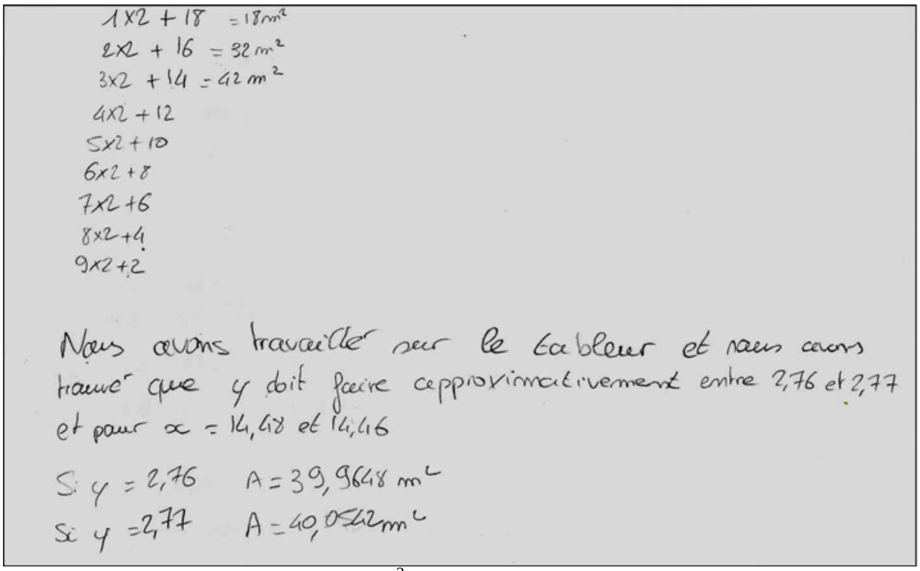
Segnaliamo questa soluzione, di cat. 9:



Abbiamo raccolto 9 copie del problema P2 (soluzioni non intere), 4 di cat. 9 e 5 di cat. 10.

1. In 4 elaborati si trovano le equazioni $x + 2y = 20$ e $xy = 40$; ma in brutta, relegate in un angolo e non sviluppate.

2. In 2 elaborati si trova una tabella numerica che fornisce le corrispondenze fra i valori di una variabile e le loro immagini; ecco un esempio di cat. 9 (del gruppo che aveva prodotto il documento al computer):


1x2 + 18 = 18m²
2x2 + 16 = 32 m²
3x2 + 14 = 42 m²
4x2 + 12
5x2 + 10
6x2 + 8
7x2 +6
8x2 +4
9x2 +2

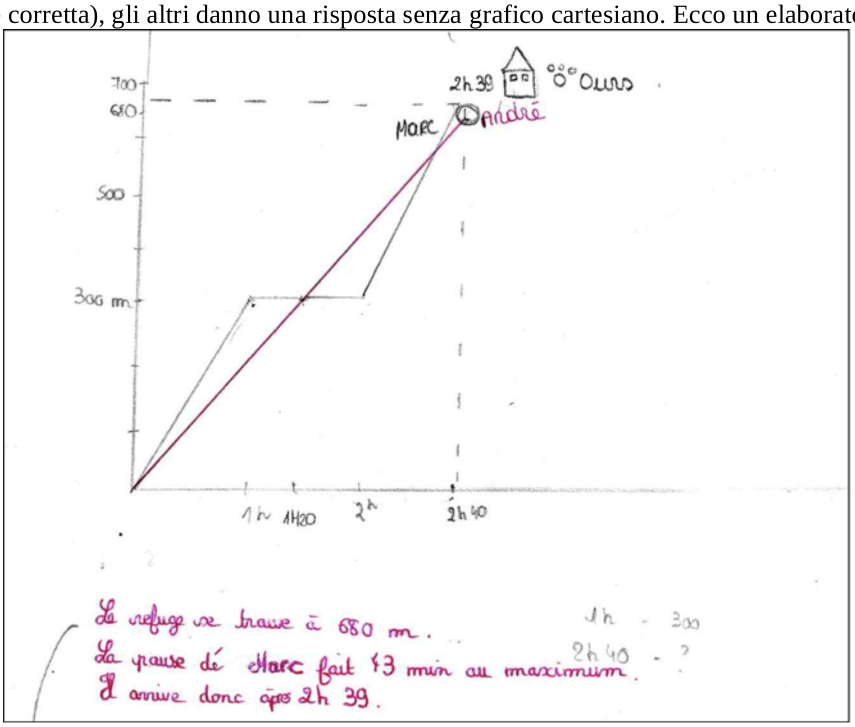
Nous avons travailler sur le tableur et nous avons trouvé que y doit faire approximativement entre 2,76 et 2,77 et pour x = 14,48 et 14,46

Si y = 2,76 A = 39,9648 m²
Si y = 2,77 A = 40,0542 m²

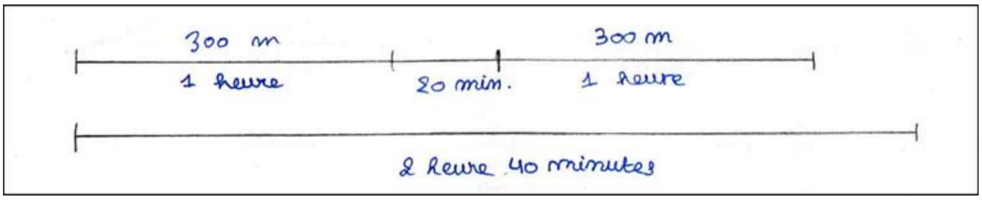
- Un gruppo di cat. 10 scrive l’equazione 20 $y – 2y^2 = 40$, che però poi non risolve.
- Nessun gruppo mostra un accenno di soluzione grafica.

c) Salita al rifugio (si veda l’enunciato sopra riportato, pag. 4, versione R2)

Su 8 gruppi (cat. 9 e 10), un gruppo interpreta male l’enunciato, un altro disegna un grafico errato (rappresenta forse il profilo della montagna???), un solo gruppo disegna un grafico cartesiano (approssimativo, che conduce ad una soluzione corretta), gli altri danno una risposta senza grafico cartesiano. Ecco un elaborato di cat. 10:



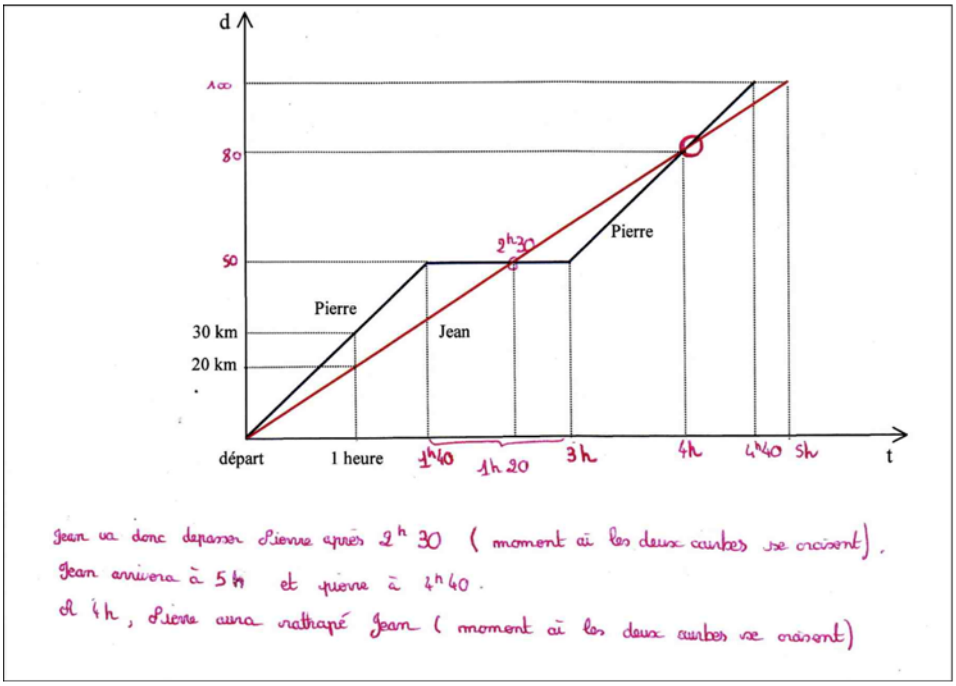
3 gruppi disegnano dei grafici lineari, ad esempio:



d) L'escursione ciclistica, in due versioni (si veda l'enunciato riportato a pag. 5):

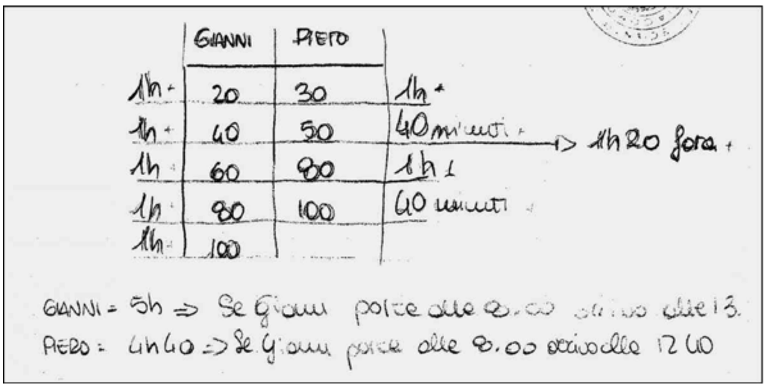
In Franche-Comté, 10 gruppi hanno affrontato il problema nella versione C1 (con grafico), 1 di cat. 8, 4 di cat. 9 e 5 di cat. 10 :

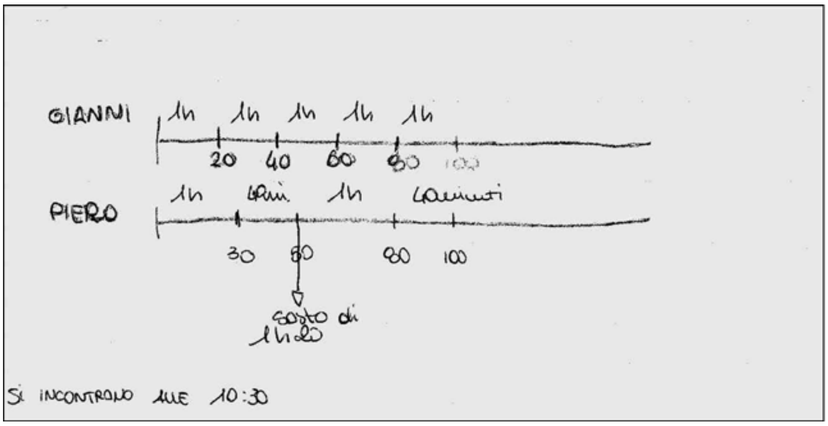
- 6 gruppi hanno completato almeno parzialmente il grafico in modo corretto.
- È difficile capire se i valori richiesti siano stati ottenuti misurando.
- In 4 elaborati non sembra che il grafico faciliti la risoluzione del problema.
- Su quattro elaborati di cat. 10 e due di cat. 9, appare più chiaramente che gli allievi hanno risposto alla domanda: *Piero, dopo la foratura, avrà raggiunto Gianni? Se sì a che ora?* utilizzando il grafico. Ecco un esempio di cat. 10 dove questo è evidente (c'è scritto:*«momento in cui le due curve si incrociano»*):



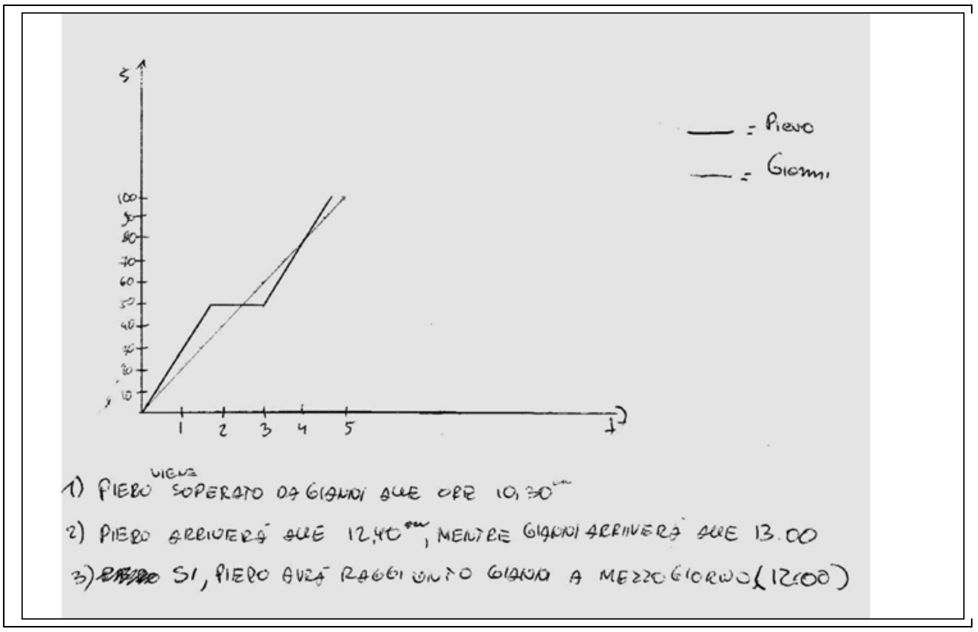
Due classi di Parma di cat. 9 hanno affrontato il problema nella versione C2 (senza grafico).

La classe A ha rappresentato in due modi diversi, una tabella e uno schema lineare, i km percorsi in ogni intervallo di tempo.





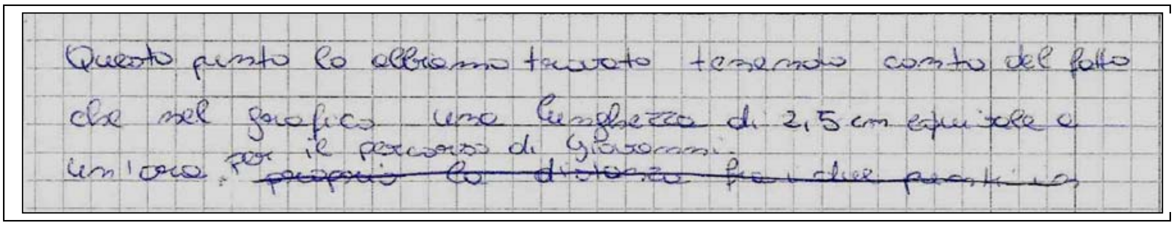
La classe B ha disegnato un classico grafico cartesiano spazio-tempo dal quale, sembra, gli allievi hanno dedotto le risposte. È sicuramente un reinvestimento del corso di fisica (mentre la classe A segue un percorso senza fisica).



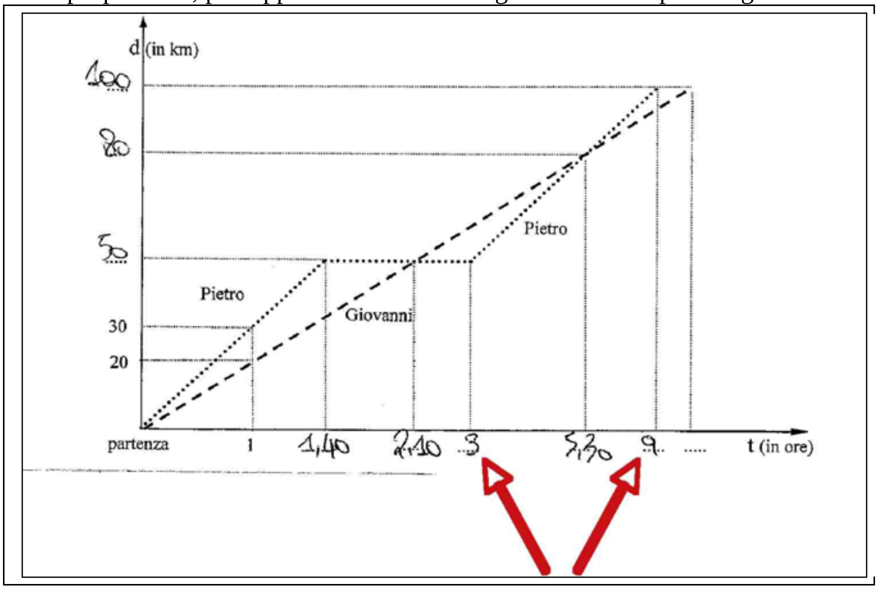
IV – Analisi a posteriori dei problemi 14, 19 e 20 del RMT 18-II

Per confrontare le nostre osservazioni sperimentali con le numerose produzioni di allievi posti in condizioni di RMT, abbiamo proposto per la prova 18-II il problema dell’escursione ciclistica e il problema della pecora con un contesto leggermente diverso e le due formulazioni.

1) L’escursione ciclistica (RMT 18, II, 20, cat. 9, 10)
Per questa prova è stata scelta la versione C1 (con grafico da completare).
A Parma, la media dei punteggi attribuiti a 35 elaborati di cat. 9 è 2,1 (media internazionale: 1,7) e per i 29 elaborati di cat. 10 la media è 2,0 (media internazionale: 1,6).
Si tratta, quindi, di un problema di media difficoltà e non si notano progressi dalla cat. 9 alla cat. 10. Il 54 % degli elaborati di cat. 9 e il 72 % di cat 10 completano il grafico completamente o parzialmente, la coppia generalmente mancante è quella che rappresenta il superamento di Giovanni da parte di Pietro (4 ore, 80 km).
Per l'analisi *a posteriori*, era stata proposta questa domanda:
E’ possibile capire se, tra questi elaborati, ve ne siano alcuni nei quali il completamento dei tempi e dei km percorsi sia stato ottenuto misurando le ascisse o le ordinate a partire dai dati di riferimento noti (0,1) e (0,30), indipendentemente dai calcoli effettuati? E quanti?
Solo in un caso questo è esplicitato:


Questo punto lo abbiamo trovato tenendo conto del fatto che nel grafico una lunghezza di 2,5 cm equivale a un'ora per il percorso di Giovanni. ~~proprio la distanza fra i due paesi~~

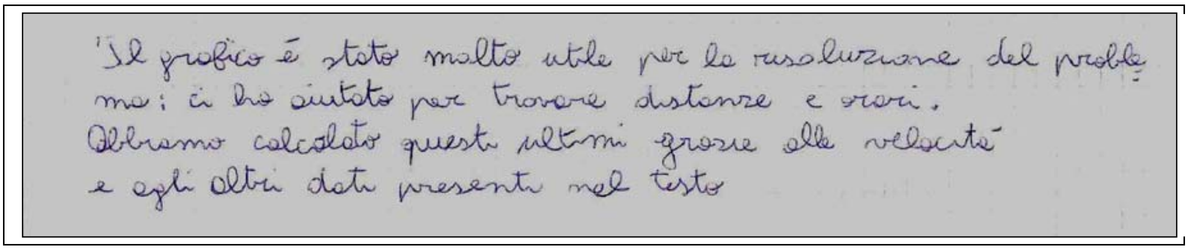
In altri casi la mancanza di motivazioni delle risposte fa pensare che le soluzioni siano state comunque dedotte dal grafico, completato ragionando con proporzioni sui dati presenti. Invece la presenza di grafici errati, con dati che non rispettano le proporzioni, presuppone che sia stato seguito un altro tipo di ragionamento.



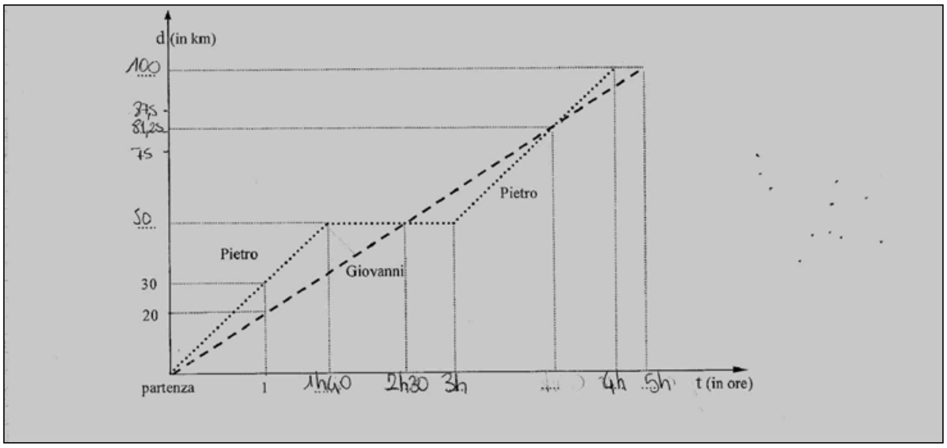
Nell'analisi a posteriori, si chiedeva anche:

Quanti hanno utilizzato il grafico per rispondere alla prima o alla seconda domanda? Quanti hanno utilizzato il grafico per rispondere alle due domande: Pietro, dopo la sua foratura, sorpassa Giovanni? Se sì a che ora?

– In pochi casi viene detto esplicitamente che è stato utilizzato il grafico, come in questo esempio, dove si ritiene che non siano necessarie altre motivazioni.


Il grafico è stato molto utile per la risoluzione del problema; ci ho aiutato per trovare distanze e orari. Abbiamo calcolato questi ultimi grazie alle velocità e agli altri dati presenti nel testo

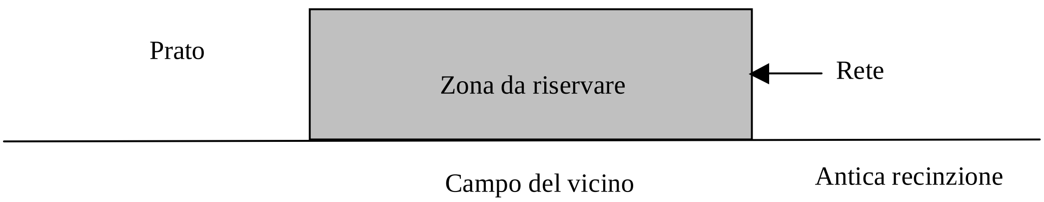
- In molti altri casi di punteggio 4, oltre al grafico, sono presenti motivazioni di tipo aritmetico (calcoli).
- Il grafico pare più utilizzato per rispondere alla terza domanda relativa al sorpasso di Pietro, risposta per la quale sono presenti poche altre motivazioni.
- In questo elaborato si opera sul grafico con successivi dimezzamenti.



Per concludere, si vede che le capacità di completare ed interpretare un grafico migliorano notevolmente dalla cat. 9 alla cat. 10.
Spesso il grafico sostituisce la descrizione a parole del procedimento seguito, viene cioè ritenuto sufficientemente auto-esplicativo. Tale carenza di motivazioni non permette di stabilire chiaramente se e come il grafico favorisca la risoluzione del problema.

2) Il prato di Zio Francesco (I) (RMT 18, II, 14, cat. 7, 8)

Zio Francesco possiede un prato che confina con il campo di un vicino; un'antica recinzione rettilinea separa le due proprietà. Per sperimentare una nuova semina, zio Francesco vuole riservare nel suo prato una zona rettangolare di 42 m^2 confinante con la proprietà del vicino (vedere la figura).



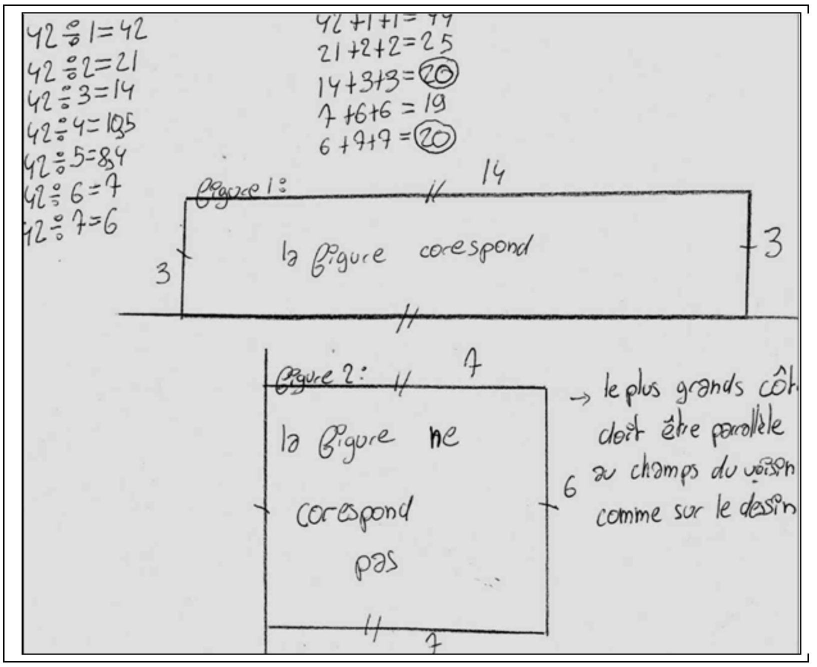
Per evitare che i suoi animali, che si spostano liberamente per il prato, vadano a calpestare la nuova piantagione, vuole sistemare una rete metallica che formi gli altri tre lati della zona rettangolare da riservare. Egli dispone di una rete lunga 20 m che vuole utilizzare tutta (vedere la figura). Per semplificare le misure delle lunghezze, desidera che siano espresse da numeri interi di metri.
Quali saranno le misure dei lati della zona rettangolare da riservare?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Questa versione, con un recinto di 42 m^2, ha due diverse soluzioni, entrambe intere: 14 m × 3 m e 6 m × 7 m. Esse possono essere ottenute per tentativi, tenendo conto della divisibilità. Ecco la tabella dei punteggi attribuiti nelle sezioni di Parma e Franche-Comté :

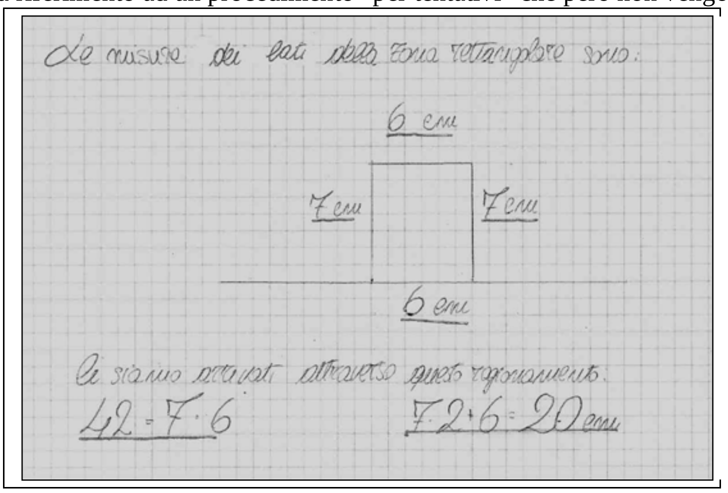
	Cat 7, PR	Cat 7, FC	Cat 8, PR	Cat 8, FC
0	27	24	8	22
1	12	4	1	0
2	41	41	34	44
3	0	3	2	7
4	2	0	2	3
N. elaborati	82	72	47	76
Media	1,2	1,3	1,8	1,6
Media intern	1,2	1,2	1,5	1,5

Si osserva una scarsa percentuale di successo, molti protocolli in bianco ed un'elevata frequenza del punteggio 2 che corrisponde ad una delle soluzioni: quasi sempre si tratta della soluzione 14×3.
Alcune difficoltà non erano state previste dall'analisi *a priori*, relativamente alla non adeguatezza fra la figura data e le soluzioni:

-In molti casi viene assunta un'ipotesi aggiuntiva, che la base sia maggiore dell'altezza. Questo porta a non considerare o esplicitamente a scartare la soluzione 6×7.
- In alcuni casi viene dedotto dalla figura un rapporto fra i lati (esempio 1;3 oppure 1;4)



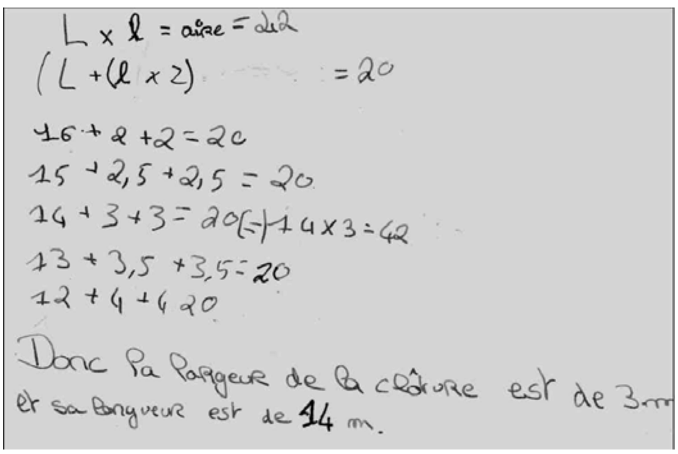
- In molti casi (soprattutto cat. 7) non viene detto come è stata trovata la soluzione: ci si limita ad una "verifica a posteriori" oppure si fa riferimento ad un procedimento "per tentativi" che però non vengono esplicitati.

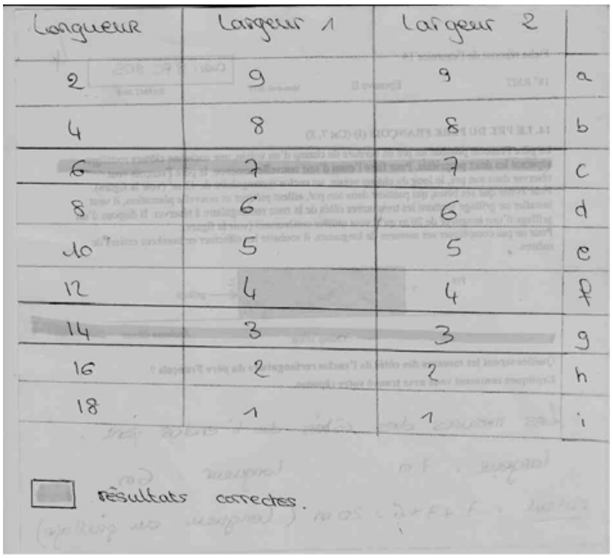


Per l'analisi *a posteriori*, erano state proposte queste domande:

1. *Appaiono variabili, in forma simbolica (tipo a + 2b) o retorica (a parole) e viene esplicitato l'obiettivo di «farle variare» sostituendole successivamente con valori diversi (es. presenza di una tabella…)?*
2. *Si utilizzano formule algebriche (come a + 2b = 20 e ab = 42) per spiegare i calcoli fatti?*

In pochissimi casi (3 su 154 in cat. 7 e 4 su 123 in cat. 8) vengono scritte formule algebriche che, comunque, poi vengono in pratica utilizzate solo per tentativi.

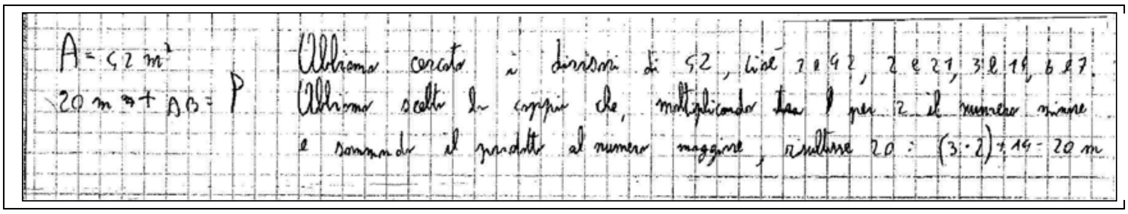




Longueur	Largeur 1	Largeur 2	
2	9	9	a
4	8	8	b
6	7	7	c
8	6	6	d
10	5	5	e
12	4	4	f
14	3	3	g
16	2	2	h
18	1	1	i

résultats correctes.

Più frequente l'uso di tentativi sistematici, solitamente a partire dai divisori di 42, supportati talvolta da una rappresentazione in tabella. Lo strumento "tabella" si rivela utile anche per provare che non esistono altre soluzioni oltre a quelle prodotte.



$A = 42\ m^2$ Abbiamo cercato i divisori di 42, cioè 1 e 42, 2 e 21, 3 e 14, 6 e 7.
20 m = AB = P Abbiamo scelto le coppie che, moltiplicando tra loro per 2 il numero minore e sommando il prodotto al numero maggiore, risultava 20: $(3 \cdot 2) + 14 = 20$ m

Per concludere,

- Questa strategia, pur non facendo esplicitamente riferimento ad una legge funzionale, contiene un'*idea di variabilità*, poiché ad un numero che varia in un insieme ne viene associato un altro.
- In questo caso, in cui non si dispone degli strumenti algebrici necessari (equazione di 2°grado) e in cui l'insieme delle possibili soluzioni è finito e "piccolo", la rappresentazione in tabella o comunque una procedura secondo tentativi organizzati appare la più efficace. Si tratta comunque di una delle possibili rappresentazioni di funzione, attraverso l'elencazione di tutte le coppie oggetto-immagine.

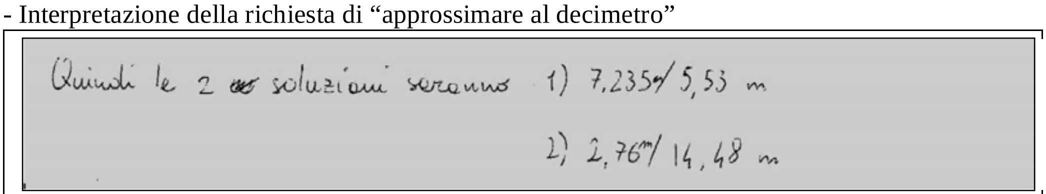
3) Il prato di Zio Francesco (II) (RMT 18, II, 19, cat. 9, 10)

Nello stesso contesto del problema I, il recinto da formare misura 40 m^2 e la domanda posta è:

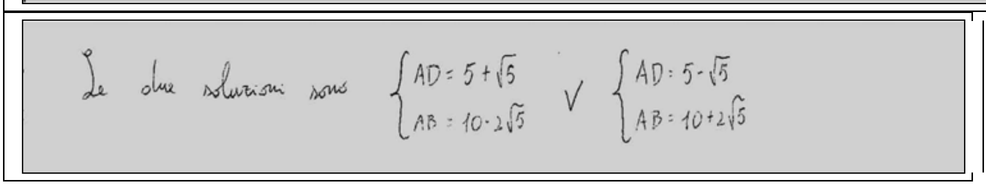
Quali saranno, approssimate al decimetro, le misure dei lati della zona rettangolare da riservare?

I punteggi attribuiti a Parma danno una media di 0,4 su 35 elaborati di cat. 9 (0,4 è la media internazionale) e di 1,2 su 29 elaborati di cat. 10 (media internazionale 1,0).
Si nota quindi una scarsissima percentuale di successo; molti compiti in bianco, soprattutto in cat. 9. Si osservano anche un piccolo progresso e una distribuzione più uniforme dei punteggi dalla cat. 9 alla cat. 10.

Le principali difficoltà sono state:
- Interpretazione della richiesta di "approssimare al decimetro"



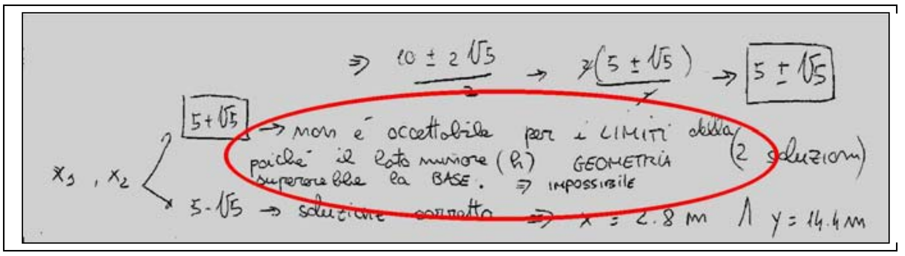
Quindi le 2 ~~as~~ soluzioni saranno 1) 7,235 m / 5,53 m
2) 2,76 m / 14,48 m



Le due soluzioni sono $\begin{cases} AD = 5+\sqrt{5} \\ AB = 10-2\sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} AD = 5-\sqrt{5} \\ AB = 10+2\sqrt{5} \end{cases}$

- Difficoltà di organizzare tentativi con numeri decimali, e conseguente preferenza di tentativi con numeri interi

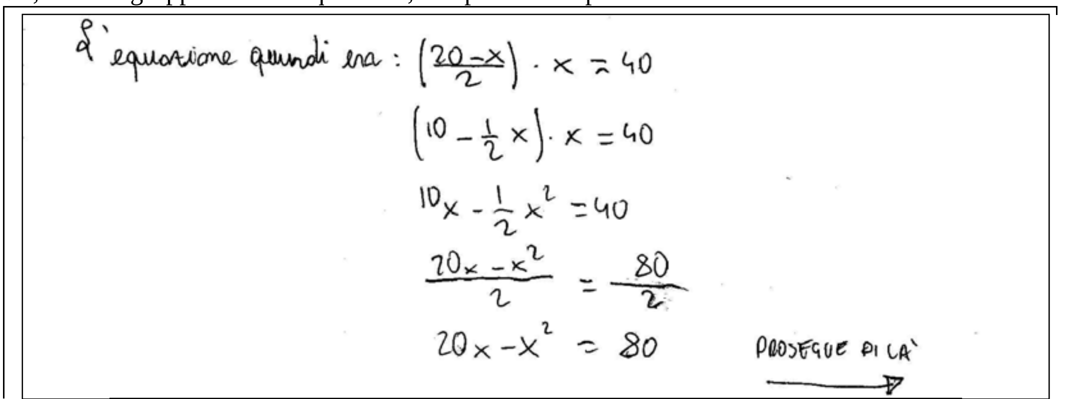
- Difficoltà algebriche (risoluzione dell'equazione di secondo grado) e di motivazione della risposta (senza motivazione né calcoli)
- Interpretazione dei risultati trovati per rispettare il teorema-allievo: *in un rettangolo la "base" deve essere maggiore dell'"altezza".*

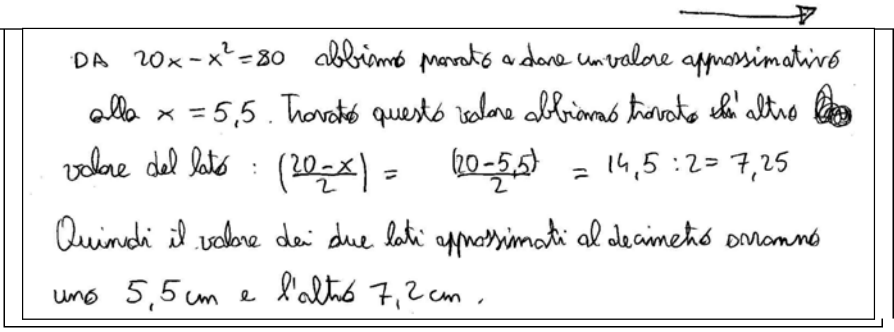


Per l'analisi *a posteriori*, erano state proposte queste domande:
1. In quale proporzione di elaborati si trovano le equazioni ben scritte, con le variabili ben specificate?
2. Nella risoluzione si trovano elaborati, e quanti, contenenti:
- tabelle numeriche in cui vi sia corrispondenza fra i valori della varabile e le sue immagini?
- una soluzione grafica, anche abbozzata?

- Negli elaborati non si trova nessuna soluzione grafica.
- Un solo caso di tabella (cat. 9), ma con numeri interi.

- In cat. 9, un solo gruppo scrive l'equazione, che poi risolve per tentativi





- In cat. 10, 14 elaborati riportano l'equazione (48%): 2 di questi la risolvono per tentativi e 12 con la formula risolutiva.

Per concludere,
- La difficoltà a lavorare con i decimali rende poco efficace il metodo per tentativi.
- L'equazione in cat. 10 è di solito risolta correttamente ma vi sono poi difficoltà nell'interpretazione dei risultati (approssimazione e preconcetti sul rapporto base/altezza nel rettangolo).
- Lo strumento "funzione", e in particolare le sue rappresentazioni tabulare e grafica, non sembra in questo caso utile per la risoluzione del problema.

- Dalla cat. 9 alla cat.10 si nota comunque un utilizzo più consapevole delle variabili.

V – Ritorniamo al tema del nostro incontro : ***uno sguardo costruttivo sugli errori***

Gli errori che si osservano nei protocolli riguardano solo marginalmente lo strumento funzione nel contesto dei problemi del RMT, semplicemente perché gli allievi non lo utilizzano!
Gli errori più frequenti rilevati in questi problemi, in cui noi speravamo di vedere l'applicazione di funzioni, sono invece essenzialmente dovuti a:
- una cattiva interpretazione dell'enunciato: lettura troppo rapida o superficiale, che trascura alcuni dati in frasi lunghe dove invece ogni parola è importante?
- notevoli difficoltà nelle conversioni di unità di misura.
- soprattutto, la mancata padronanza del calcolo algebrico.

La nostra indagine ci conduce all'ostacolo (nel senso tipicamente di Gaston Bachelard, quando una vecchia conoscenza si oppone all'assimilazione di una nuova conoscenza all'interno di una rete concettuale solidamente installata nelle rappresentazioni mentali e la didattica mira a sviluppare strategie d'insegnamento adeguate) che qui riguarda l'utilizzo di altri strumenti piuttosto che una rappresentazione funzionale, nonostante qualche premessa di una relazione oggetto-immagine.

Dunque: funzioni per risolvere problemi?

Abbiamo cercato in questa sperimentazione di proporre problemi i cui enunciati spingessero gli allievi ad utilizzare lo strumento "funzione" in uno qualunque dei diversi registri rappresentativi: grafici, formule algebriche, tabelle… L'invito è stato talvolta esplicito con la proposta di lettura di un grafico cartesiano, altre volte implicito con l'opportunità di passare al registro algebrico per evitare strade complicate con numerosi tentativi, soprattutto quando le soluzioni non sono numeri interi.
Abbiamo cercato, nelle analisi, di catturare indizi che potessero rilevare la presenza implicita o esplicita di una corrispondenza funzionale. La ricerca è stata difficile, poiché una relazione funzionale può essere elaborata in diversi contesti (aritmetico, algebrico, funzionale) senza che questo legame possa essere gestito dall'allievo. Egli sceglierà il contesto per lui più familiare in cui però l'idea di relazione funzionale può operare implicitamente.
In base alla maggioranza degli elaborati analizzati, rispondiamo: no, attualmente almeno fino alla categoria 9, visto che in categoria 10 gli allievi sembrano meglio gestire l'interpretazione di grafici dati, al massimo in qualche raro compito, si trova l'espressione di relazioni funzionali sotto forma di tabella o di grafico.
Osserviamo che in Francia, i programmi fino alla cat. 10 trattano le funzioni affini e le loro rappresentazioni, ma abbiamo visto che per la maggior parte degli allievi, in ogni caso fino alla cat. 9, il grafico sembra rappresentare una difficoltà supplementare, piuttosto che uno strumento per facilitare la risoluzione del problema.

VI – Concludiamo con alcune domande:

- Quale lavoro preparatorio sull'idea di funzione potrebbe favorire l'acquisizione di questa nozione?
- Ci sono situazioni fondamentali (nel senso di Guy Brousseau) per introdurre la nozione di funzione?
- In quali situazioni il quadro funzionale sarebbe inevitabile? È già stato sottolineato l'interesse di passare da variabili discrete a variabili continue.
- Quali sono i fondamenti epistemologici degli ostacoli all'apprendimento della nozione di funzione?
- I problemi del RMT possono avere un impatto (sugli insegnanti, sugli allievi) nell'apprendimento della nozione di funzione?
- Occorre introdurre nei problemi del RMT la nozione di funzione con espressioni più esplicite come "in funzione di"? La funzione si esprime allora nella descrizione verbale di una relazione tra una variabile e le sue immagini nel contesto concreto del problema.

DES FONCTIONS POUR RESOUDRE DES PROBLEMES ?

Communication du groupe *Fonctions*[11]

Par Annie Henry, Michel Henry et Angela Rizza

I - Introduction

La notion de fonction est fondamentale en mathématiques, mais son acquisition se heurte à de nombreux obstacles et son utilisation explicite dans les problèmes ne commence véritablement qu'à partir des niveaux 9 et 10, conclusion à laquelle nous avaient conduits nos rencontres de Bard (2007, *Idea di funzione*), et de Brigue (2008, *Six questions sur la notion de fonction dans les problèmes du RMT*).

Notre groupe de travail s'est alors proposé de chercher si des éléments précurseurs peuvent figurer dans des problèmes de rallyes et s'ils conduisent les élèves à utiliser différents registres de représentation pour les résoudre : introduction de variables, tableaux de valeurs, formules littérales, graphiques cartésiens ...

Pour la 13ème rencontre de Nivelles, nous avions repéré plus précisément dans les copies de quatre problèmes du 17ème RMT les obstacles qui se présentent pour un élève quand il doit passer d'une procédure algorithmique à une procédure mettant en œuvre des représentations d'une fonction.

II – Éléments d'analyse a posteriori présentés à Nivelles

Voici l'essentiel de ce qui avait été alors observé à propos de deux de ces problèmes :

1) Le problème du bouquet (RMT 17.I.15, cat. 7, 8, 9, 10)

> Dans la classe de Sandra, les élèves apprécient beaucoup leur professeur de mathématiques. Ils ont décidé de lui offrir un bouquet de fleurs pour la fête de Noël.
> Chaque élève a donné autant de fois 2 centimes d'Euros qu'il y a d'élèves dans la classe.
> Sandra a réuni les cotisations et fait le compte de ce qu'elle a reçu. Non compris sa propre contribution, elle a 22 euros et 44 centimes.
>
> **Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?**

Brève synthèse des analyses réalisées à partir des copies de quatre sections :

Cat 7 (225 copies)	19% ont 3 ou 4 points	71% ont 0 ou 1 point
Cat 8 (171 copies)	25% ont 3 ou 4 points	61% ont 0 ou 1 point
Cat 9 (62 copies)	34% ont 3 ou 4 points	46% ont 0 ou 1 point
Cat 10 (48 copies)	50% ont 3 ou 4 points	40% ont 0 ou 1 point

Aucune des 32 copies de Parma de niveau 9 ne contient une équation et seulement 3 sur 21 de niveau 10. Deux copies de niveau 9 contiennent une formule algébrique et deux de niveau 10.

L'étude de ces copies nous avait suggéré les questions suivantes :

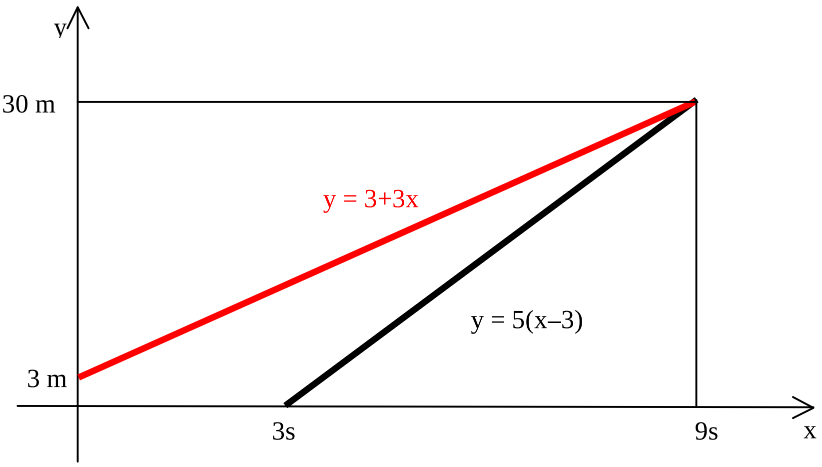
- Dans ce problème du bouquet, certaines copies mentionnent la racine carrée comme opération inverse du carré. Cela signifie-t-il la présence de l'idée de fonction ?
- Dans les manuels scolaires anciens (jusqu'aux années 50) les chapitres d'algèbre (polynômes) précédaient l'introduction à la notion de fonction (fonction polynôme).
  L'algèbre facilite-t-elle l'approche de la notion de fonction ?
- L'utilisation d'inconnues peut-elle être interprétée comme une approche de la variabilité ?

2) Le problème de la course poursuite (RMT 17.I.19, cat. 8, 9, 10)

> Georges et Frédéric font une course-poursuite sur une distance de 30 m, entre un arbre A et un arbre B.
> Georges court à une allure régulière à la vitesse de 10,8 km/h, alors que Frédéric court à la vitesse régulière de 18 km/h.
> Frédéric donne un avantage à Georges qui partira d'un point C situé entre les deux arbres, à 3 mètres de l'arbre A. Frédéric part de l'arbre A exactement 3 secondes après le départ de Georges.
> **Qui va gagner la course ? Pendant combien de temps chacun aura-t-il couru ?**
> **Expliquez votre raisonnement**.

[11] G. Bonetto, F. Buini, B. Chaput, M. Front, A. Henry, M. Henry, R. Iaderosa, M. Negri, M. Polo, F. Ricci, A. Rizza

Ce problème avait été conçu par la section de Milano dans le but de voir si les élèves, surtout ceux de catégorie 10, ont l'idée d'exploiter les représentations graphiques des deux lois du mouvement, relatives à Georges et à Frédéric, en vue de déterminer la durée de leurs courses et de résoudre le problème en utilisant la solution graphique du système d'équations obtenu.



Pour les catégories 8 et 9, où très souvent les élèves n'ont pas encore formalisé les lois du mouvement, on souhaite étudier les procédures intuitives mises en acte pour déterminer les vitesses et raisonner sur les durées.
A Parma : sur 91 copies, une seule (cat 9) présente un graphique, 32 utilisent la définition de la vitesse, 7 la proportionnalité.
A Siena : sur 115 copies, on trouve l'idée de fonction accompagnée d'un graphique seulement dans une copie de cat. 8. Les copies de cat. 9 et 10 emploient la définition de la vitesse, celles de cat. 8 plutôt la proportionnalité.
Dans la section de l'Enseignement Agricole français, on constate une bonne réussite au niveau 10.
A Cagliari, les taux de réussite sont 0% en cat. 8, 35% en cat. 9, 29% en cat. 10
En Franche-Comté, sur 70 copies de cat. 8
– Aucune copie ne résout le problème graphiquement
– Aucune copie n'écrit l'équation du mouvement (d = v t ou v = d/t)
– 27 copies (38%) trouvent le résultat en utilisant la proportionnalité

La section de Milano note que l'analyse des copies a révélé l'absence totale de tentatives d'obtenir la solution au moyen des graphiques du mouvement, même pour des élève de la catégorie 10 (2 essais sur plus de 200 copies analysées !). Cela étonne puisque dans la tradition didactique italienne en général on travaille sur les graphiques linéaires dès la troisième année de l'école secondaire. Les élèves de cat. 8 et 9 ont montré une grande difficulté pour gérer les unités de mesure. À cela on peut ajouter la non-maîtrise, pour beaucoup, du concept de vitesse comme rapport de deux grandeurs non homogènes (longueur et temps). Les élèves ont géré avec difficulté les deux “avantages” : dans beaucoup de copies, seul celui du temps est pris en compte, ou seulement celui de la distance.

3) Quelques conclusions dégagées par le groupe *Fonctions*

De ces analyses a posteriori, nous avions tiré les remarques et les questions suivantes :

- La section de Milano avait proposé ce problème de course à handicap, délibérément compliqué avec les deux avantages de temps et de distance concédés à Georges. L'écriture nécessaire des équations du mouvement de chaque enfant devaient placer les élèves dans le cadre fonctionnel, une stratégie de proportionnalité étant compliquée. Une représentation graphique est bien adaptée à cette situation, mais elle n'est pas utilisée spontanément par les élèves.
- On peut trouver une raison à l'absence de graphiques dans la complexité de l'énoncé avec les deux handicaps et les changements d'unités. Dans un autre problème du RMT (la montée au refuge, pb 13, RMT 17-F), on trouve de nombreuses explications accompagnées de schémas dans des copies de cat. 9 et 10.
- Dans quel contexte peut-on attendre des résolutions graphiques ? Il faudrait reprendre ce problème de la course poursuite avec un seul handicap et sans les changements d'unités (course de vélos en km/h par exemple).
- Peut-on proposer un problème de rallye où il est demandé d'interpréter un graphique ?

Ces analyses confirmaient les conclusions provisoires des réunions précédentes :

- La notion de fonction ne semble pas être présente avant les niveaux 9 et 10. Elle ne figure pas dans les programmes français des collèges (11-15 ans), sauf pour les fonctions linéaires ou affines. Mais certains problèmes des niveaux, 7, 8, ou 9 peuvent anticiper en faisant appel à l'idée d'une correspondance objet-image entre variables.
- Dans les problèmes mettant en jeu des variables entières, des essais sont possibles dans une démarche algorithmique qui peut conduire à la notion de suite. L'introduction de variables continues (ou peut-être décimales), notamment en géométrie, suppose l'utilisation de formules et des calculs faisant apparaître la relation objet-image.

III – Expérimentation en 2009-2010

Fort de ces analyses et armé de ces questions, le groupe *Fonctions* s'est donné pour objectif de mener une expérimentation en deux temps au cours de l'année 2009-2010 :

1er temps : l'observation des comportements d'élèves organisés en binômes placés devant deux problèmes exploitant des représentations graphiques,

2ème temps : l'analyse des copies produites par des classes expérimentales pour 7 problèmes mettant en œuvre de près ou de loin la notion de fonction.

Par ailleurs, 3 problèmes centrés sur l'utilisation de fonctions ont été proposés pour l'épreuve II du 18ème RMT (n° 14, 19 et 20), accompagnés d'éléments d'analyses a posteriori.

1) Dans le premier temps, la section de Franche-Comté a observé 26 binômes de deux classes de cat. 9, puis a conduit des entretiens avec trois de ces binômes.
Chaque binôme recevait deux problèmes à résoudre en 50 minutes : le problème R, *Montée au refuge* (RMT 17.F.13 modifié), et le problème C *La randonnée cycliste*, élaboré à Nivelles après l'analyse des comportements d'élèves dans *la course poursuite.*
L'un des axes de notre travail étant d'analyser la maîtrise par les élèves du registre graphique à propos du concept de fonction, nous avions élaboré deux versions pour chacun de ces problèmes : avec ou sans base graphique.

Problème R : la version $\mathbf{R_1}$ proposait l'énoncé suivant :

MONTÉE AU REFUGE (RMT 17.F.13 modifié, cat. 9)
Marc et André partent ensemble pour une ascension au refuge de l'Ours. Chacun d'eux marche à allure constante. Après une heure Marc, plus rapide qu'André, a gravi 300 m et s'arrête pour une pause. Vingt minutes plus tard, alors qu'il se repose encore, il est rejoint par André qui, lui, ne s'arrête pas et arrive au refuge exactement deux heures et 40 minutes après être parti.

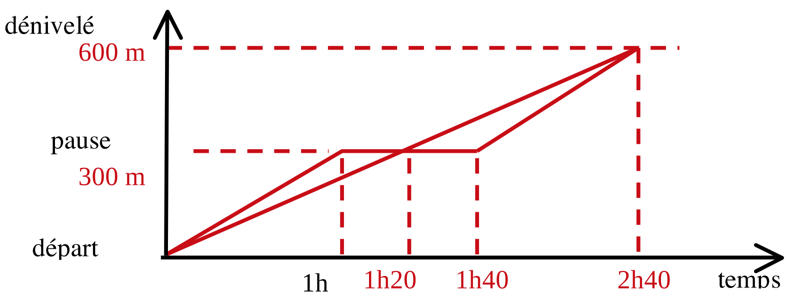
Quelle peut être la durée maximale de la pause de Marc s'il veut arriver le premier au refuge et quel dénivelé lui reste-t-il à gravir ?

Expliquez votre raisonnement et faites un graphique.

avec la donnée en plus de cette base graphique (en noir) :

Graphique : dénivelé en fonction du temps

Réponse attendue (en rouge)



Pour la version $\mathbf{R_2}$, on ne donnait que l'énoncé.
L'analyse des copies montre que :
- Sur les 12 binômes ayant reçu la base graphique, 2 ont réalisé un bon graphique, 1 a fait un graphique faux et 9 n'ont rien dessiné.
- Sur les 14 binômes ayant reçu la version sans base graphique, un seul ébauche un graphique, faux.

La donnée de la base graphique n'a donc pas amené davantage les élèves à réaliser le graphique demandé !

Problème C en deux versions **:**

LA RANDONNÉE CYCLISTE
Deux amis, Jean et Pierre partent ensemble un dimanche à 8 heures pour une randonnée de 100 km. Jean roule à 20 km/h et Pierre à 30 km/h. Pierre crève au 50$^{\text{ème}}$ km et doit trouver un pneu pour réparer. En tout cette réparation lui prend 1 h 20 mn puis il repart. A la fin de la randonnée, les deux amis se retrouvent pour faire le point.

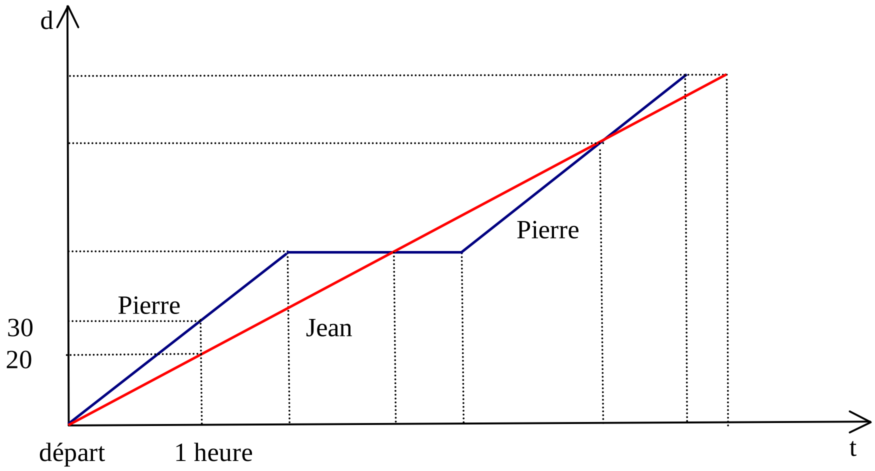
Pierre ayant pris de l'avance, à quelle heure Jean l'a-t-il rattrapé ?

A quelles heures l'un et l'autre sont-ils arrivés au bout des 100 km ?

Pierre, après sa crevaison, a-t-il dépassé Jean ? Si oui à quelle heure ?

La version $\mathbf{C_1}$ comportait en plus ce graphique, avec la question :

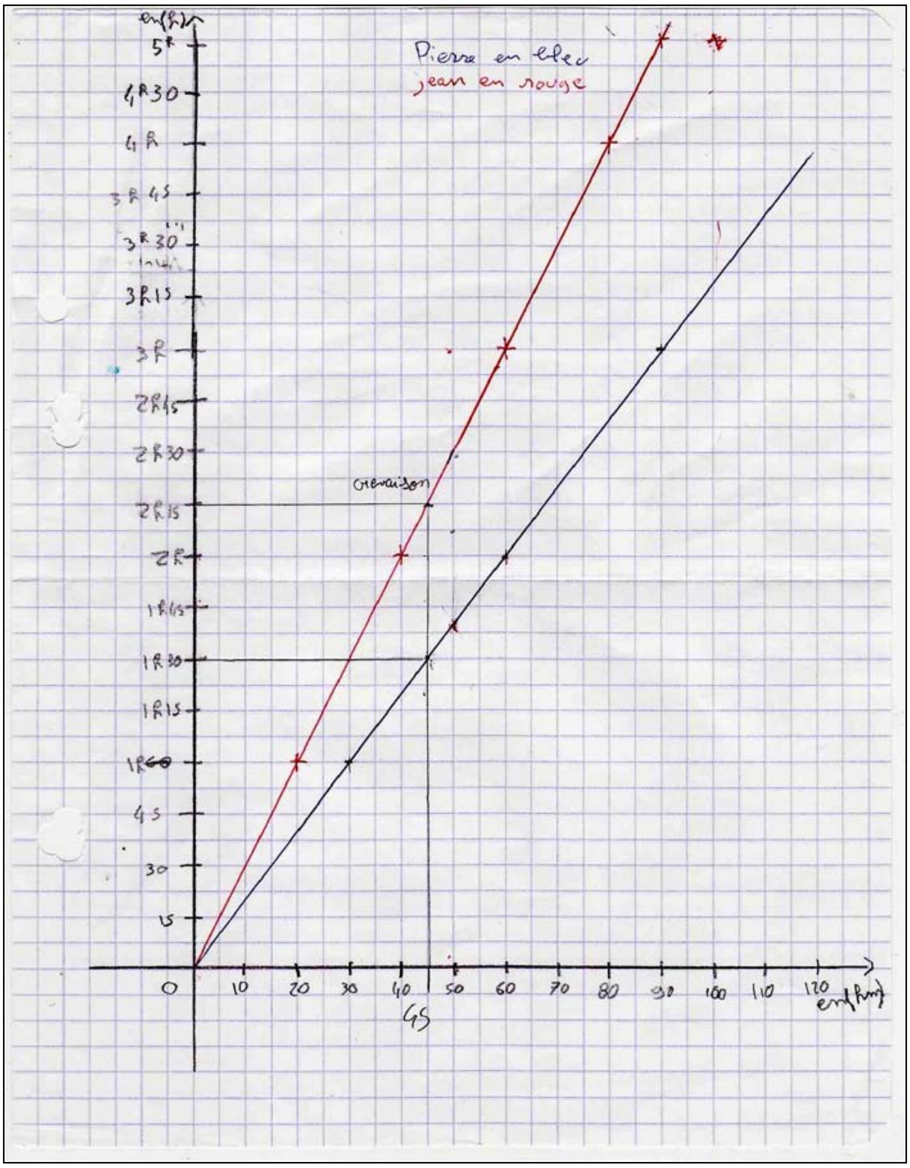
Montrez les calculs que vous avez faits et complétez le graphique en donnant les distances et les heures manquantes.

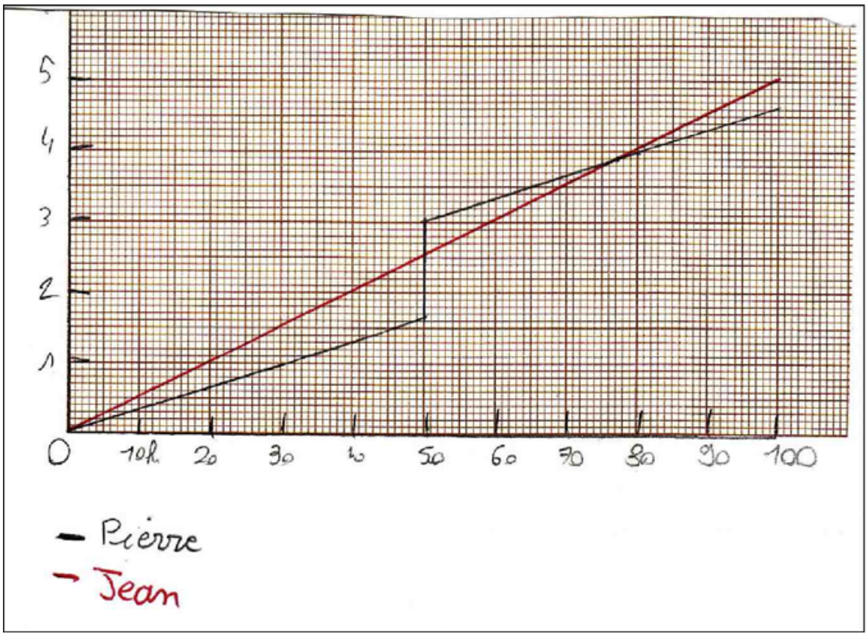


La version $\mathbf{C_2}$ ne donnait pas le graphique, avec la question :

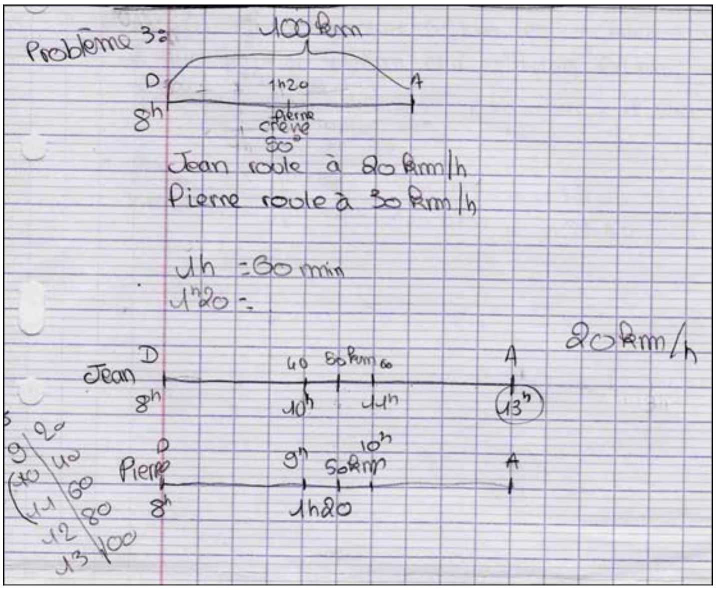
Montrez les calculs que vous avez faits ou faites un graphique qui permette de trouver les réponses.

- Sur les 12 binômes ayant reçu $\mathbf{C_1}$ (avec graphique), 7 ont placé des coordonnées sur le graphique, 10 n'utilisent pas le graphique, les 2 binômes qui l'utilisent n'ont pas répondu à la seule question (la question 4) dont la solution graphique est nettement la plus simple (à quelle heure Pierre dépasse-t-il Jean ?).
- Sur les 14 binômes ayant reçu $\mathbf{C_2}$ (sans graphique), 11 n'ont pas dessiné de graphique cartésien, 3 ont dessiné un graphique cartésien : un avec les temps en abscisse avec la réponse à la question 4 et deux avec les distances en abscisse, un faux et un correct reproduits ci-dessous :


Pierre en bleu
Jean en rouge
crevaison
45

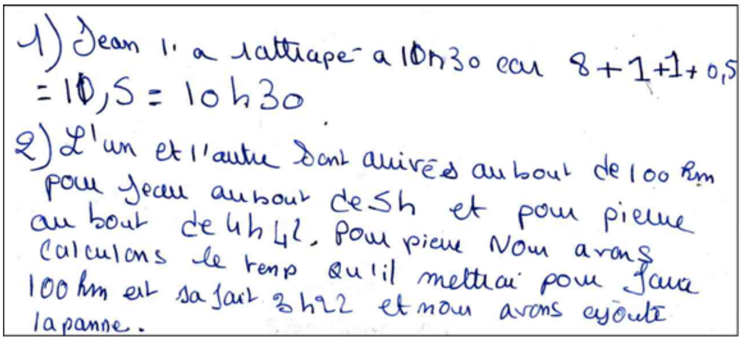


Certains élèves esquissent des schémas linéaires dont voici un exemple (nous avions ramassé tous les brouillons) :



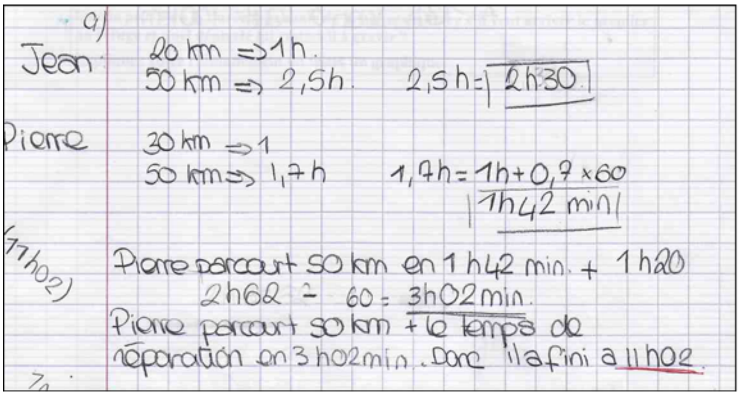
Au cours des trois entretiens que nous avons menés, les élèves nous ont signifié qu'il est « plus compliqué » de travailler sur des graphiques que de calculer ou qu' « il est plus facile d'expliquer que de faire un graphique ». Cela représente une tâche supplémentaire pour eux. En effet, ils ne « lisent » pas les données contenues dans le graphique, mais effectuent des calculs pour placer ensuite les instants et distances ainsi obtenus.
Un binôme nous a dit que le graphique « n'est pas assez précis » pour qu'on puisse y trouver une information. Pourtant, la plupart ne sont pas habiles en calcul !
Voici deux exemples :

- une copie qui travaille dans le cadre additif



1) Jean l'a rattrapé a 10h30 car 8+1+1+0,5 =10,5 = 10h30
2) L'un et l'autre sont arrivés au bout de 100 km pour Jean au bout de 5h et pour pierre au bout de 4h42. Pour pierre Nous avons calculons le temp qu'il mettrai pour faire 100 km est sa fait 3h22 et nous avons ajouté la panne.

- et celle-ci, malhabile dans les calculs de vitesse :



a)
Jean 20 km ⇒ 1h
50 km ⇒ 2,5h   2,5h = | 2h30 |

Pierre 30 km ⇒ 1
50 km ⇒ 1,7h   1,7h = 1h + 0,7 × 60
| 1h42 min |

(11h02) Pierre parcourt 50 km en 1h42 min + 1h20
2h62 − 60 = 3h02 min.
Pierre parcourt 50 km + le temps de réparation en 3h02min. Donc il a fini à 11h02.

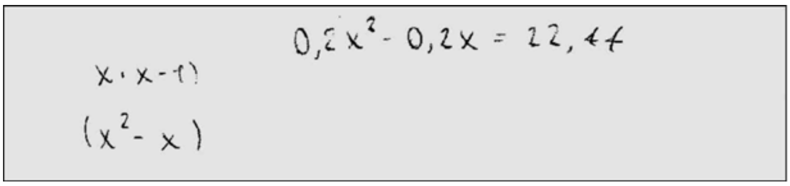
Plusieurs binômes trouvent ainsi des minutes « en trop » à cause des arrondis. Ajoutons que dans les deux classes, le cours sur la représentation graphique des fonctions linéaires avait été traité.
Le bilan que nous avons tiré de cette première phase de l'expérimentation est qu'un graphique cartésien, à ce niveau, n'est pas du tout un outil de résolution de problèmes. Il est au mieux une « illustration » de la situation, que les élèves veulent bien exécuter, pour nous faire plaisir, en entretien. Il n'est même pas certain qu'il permette aux élèves de mieux comprendre l'énoncé.

2) Dans le deuxième temps, nous avons effectué une simulation d'une situation de rallye avec 7 problèmes dans 8 classes (2 à Parma et 6 en Franche-Comté) : une classe de cat. 8, cinq de cat. 9 et deux de cat. 10. Nous n'analyserons ici que quatre des 7 problèmes.

a) Le bouquet (RMT 17.1.15, cat 8, 9, 10, voir l'énoncé ci-dessus) auquel nous avions rajouté cette question, avec l'objectif d'inciter les élèves à se placer au moins dans un registre algébrique :
« Écrivez les calculs à faire pour trouver le nombre des élèves de la classe ».

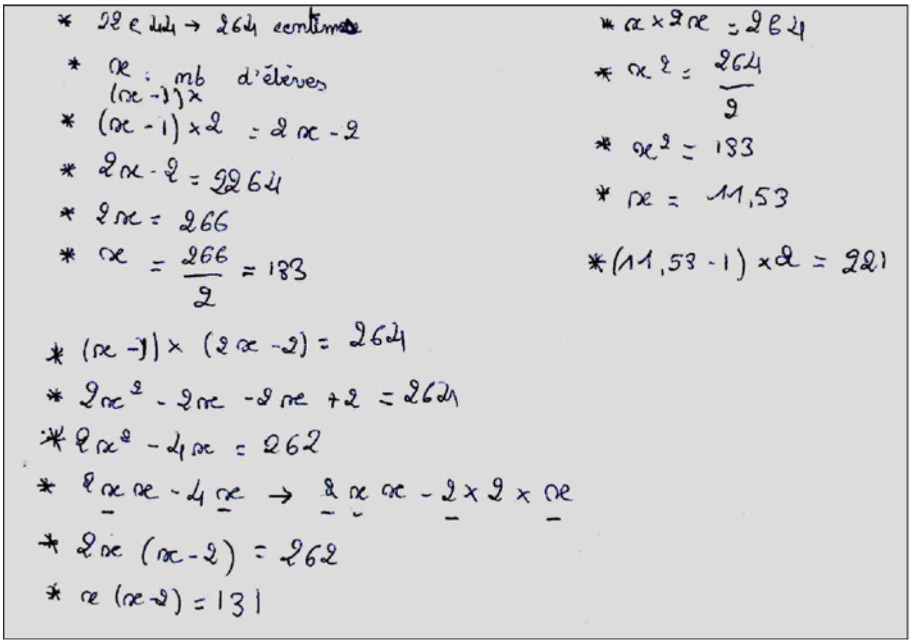
Ce problème se « formalise » par une équation simple : $2x^2 - 2x = 2244$.
16 copies ont été recueillies : 3 copies de cat. 8, 8 de cat. 9, et 5 de cat. 10.

- Un groupe de cat. 9 écrit presque la bonne équation (erreur d'unité !) sans la résoudre (il procède par essais pour trouver la solution) :



$0{,}2x^2 - 0{,}2x = 22{,}44$
$x \cdot x - 1)$
$(x^2 - x)$

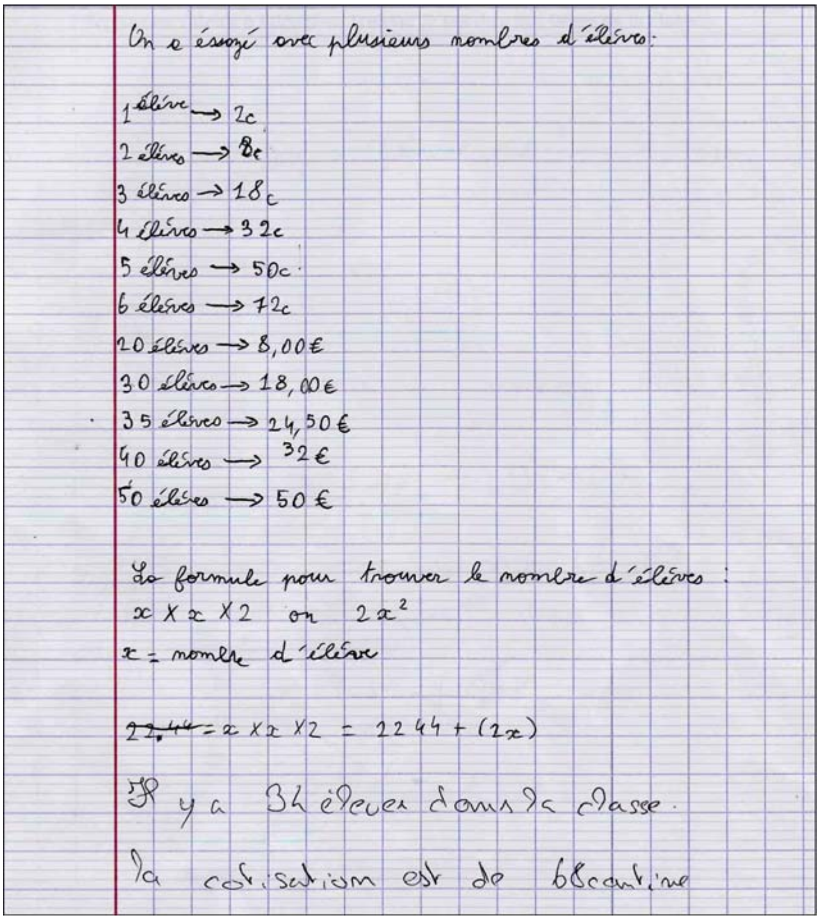
- 3 copies de cat. 10 présentent des « formules algébriques » mais elles sont fausses (non compréhension de l'énoncé) :



* 22 € 244 → 264 centimes
* x : nb d'élèves
(x − 1) × x
* (x − 1) × 2 = 2x − 2
* 2x − 2 = 2264
* 2x = 266
* x = 266/2 = 133
* (x − 1) × (2x − 2) = 264
* 2x² − 2x − 2x + 2 = 264
* 2x² − 4x = 262
* 2xx − 4x → 2xx − 2 × 2 × x
* 2x (x − 2) = 262
* x (x − 2) = 131

* x × 2x = 264
* x² = 264/2
* x² = 133
* x = 11,53
* (11,53 − 1) × 2 = 221

- Dans 2 copies sur les 16, on trouve explicitement l'idée de fonction. Par exemple, dans celle-ci de cat. 10, après un tableau de valeurs, les élèves utilisent la fonction $2x^2$ suivie de la bonne équation conduisant au résultat :



On a essayé avec plusieurs nombres d'élèves :

1 élève → 2c
2 élèves → 8c
3 élèves → 18c
4 élèves → 32c
5 élèves → 50c
6 élèves → 72c
20 élèves → 8,00€
30 élèves → 18,00€
35 élèves → 24,50€
40 élèves → 32€
50 élèves → 50 €

La formule pour trouver le nombre d'élèves :
x × x × 2 ou 2x²
x = nombre d'élève

~~22,44~~ = x × x × 2 = 2244 + (2x)

Il y a 34 élèves dans la classe.

La cotisation est de 68 centime

- Dans celle-ci (l'utilisation d'un tableur de l'ordinateur semblait assez familière, dans cette classe de cat. 9), les titres de deux colonnes sont erronés :

nombre d'élève	Sandra	Argent donné par élève	somme totale
21	0,42	8,82	9,24
22	0,44	9,68	10,12
23	0,46	10,58	11,04
24	0,48	11,52	12
25	0,5	12,5	13
26	0,52	13,52	14,04
27	0,54	14,58	15,12
28	0,56	15,68	16,24
29	0,58	16,82	17,4
30	0,6	18	18,6
31	0,62	19,22	19,84
32	0,64	20,48	21,12
33	0,66	21,78	22,44
34	0,68	23,12	23,8
35	0,7	24,5	25,2
36	0,72	25,92	26,64
37	0,74	27,38	28,12
38	0,76	28,88	29,64
39	0,78	30,42	31,2
40	0,8	32	32,8

- Les procédures se réduisent à des essais, soit en vrac au petit bonheur, soit un peu organisés et raisonnables comme ici :

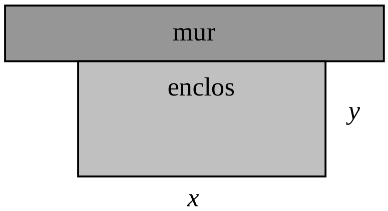
Il y a 34 élèves dans la classe. (Y compris Sandra).
On nous dit que chaque élève a donné autant de fois 2 centimes d'Euros qu'il y a d'élèves dans la classe.
On a essayé avec une classe de 30 élèves ; et on trouve : 30 × 2 = 60 (Chaque élève donne 30 × 2 cents)
60 × 30 = 18,00€. (Si ils étaient 30 élèves).
On a essayé avec une classe de 35 élèves ; et on trouve : 35 × 2 = 70 (Chaque élève donne 35 × 2 cents)
70 × 35 = 24,50€ (Si ils étaient 35 élèves).
On a vu alors que l'on se rapprochait du résultat.
Donc on a essayé avec une classe de 33 élèves ; et on trouve : 33 × 2 = 66 (Chaque élève donne 33 × 2 cents)
66 × 33 = 21,78€. On rajoute alors la contribution de Sandra de 66 cents également.
On trouve alors 21,78€ + 0,66€ = 22,44€
Ils sont donc 34 élèves dans la classe.

b) De l'herbe pour un mouton, sous deux versions :

M$_1$) Le problème du mouton, avec des données telles que les solutions soient des nombres entiers (repris sous un autre habillage dans RMT 18.II.14, cat. 7 et 8)

DE L'HERBE POUR UN MOUTON

Jean a adopté un mouton et veut lui réserver une partie du pré situé à côté de sa maison. Il souhaite délimiter un enclos rectangulaire dont un des côté est constitué par un mur qui borde sa propriété, comme le montre la figure.
Pour faire la clôture, il dispose d'un grillage de longueur a = 20 m qui doit former les trois autres côtés du rectangle.



Mais Jean souhaite donner à son mouton une surface d'herbe de 42 m^2.

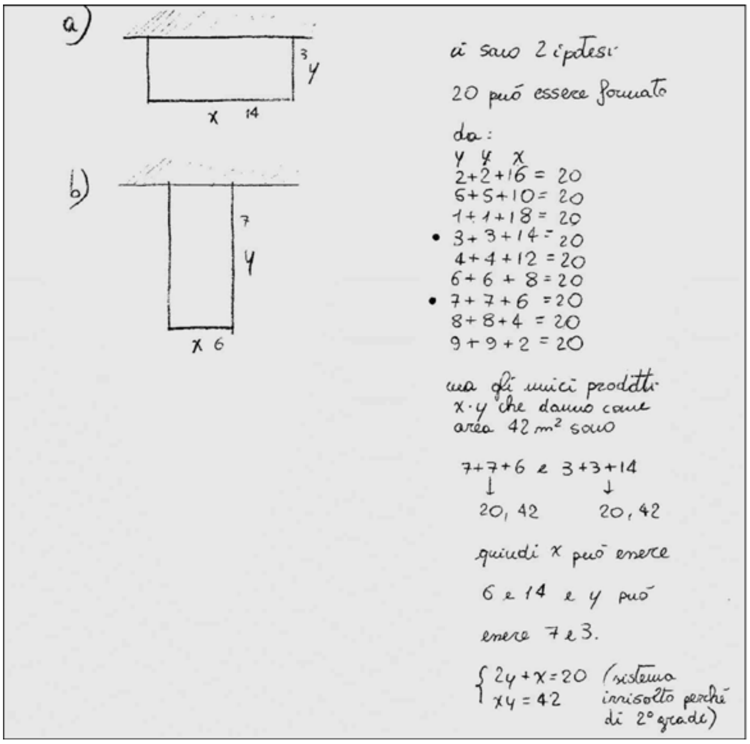
Quelles longueurs x et y des côtés du rectangle Jean doit-il choisir pour réaliser cette condition ?

Montrez les calculs que vous avez faits ou expliquez comment vous avez trouvé.

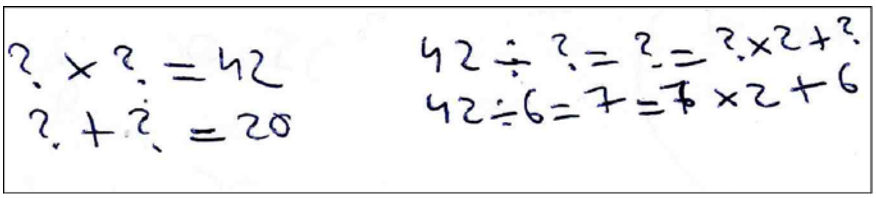
M$_2$) Le problème du mouton avec des données telles que les solutions ne soient pas des nombres entiers ni même rationnels (repris sous un autre habillage dans RMT 18.II.19, cat 9, 10) :
"Jean souhaite donner une surface d'herbe **de 40 m^2**" (au lieu de 42 m^2).

Dans cette expérimentation, nous avons recueilli 7 copies du problème **M$_1$** (solutions entières), 2 de niveau 8 et 5 de niveau 9. Voici un résumé de l'analyse de ces copies :

1. Dans une copie de niveau 8 et une de niveau 9, apparaissent une ou des variables, sous forme littérale (du type x + 2y) ou sous forme rhétorique, avec le projet de « les faire varier » en les remplaçant successivement par différentes valeurs avec la présence d'un tableau :

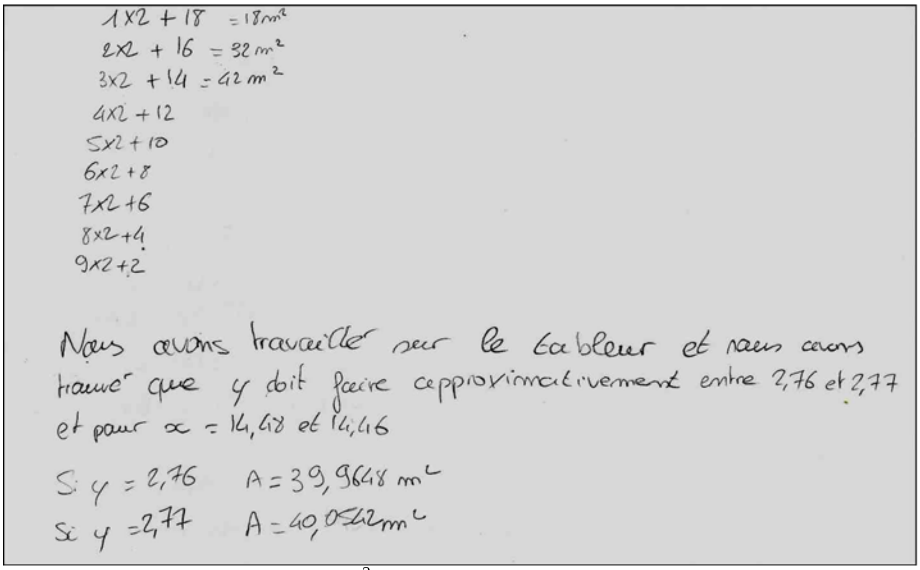


2. Dans trois copies, mais qui n'en font rien ensuite, des formules algébriques (comme x + 2y = 40 et xy = 42) apparaissent. Mais les élèves ne savent pas résoudre ce système. Signalons cette copie de niveau 9 :



Nous avons recueilli 9 copies du problème $\mathbf{M_2}$ (solutions non entières), 4 de cat. 9 et 5 de cat. 10.

1. Dans 4 copies, on trouve les deux équations $x + 2y = 20$ et $xy = 40$. Mais au brouillon, griffonnées dans un coin et non exploitées.
2. Dans 2 copies, on trouve un tableau numérique donnant les correspondances entre des valeurs de la variable et leurs images, voici un exemple de cat. 9 (du groupe qui avait produit le document sorti au tableur de l'ordinateur) :


1×2 + 18 = 18 m²
2×2 + 16 = 32 m²
3×2 + 14 = 42 m²
4×2 + 12
5×2 + 10
6×2 + 8
7×2 + 6
8×2 + 4
9×2 + 2

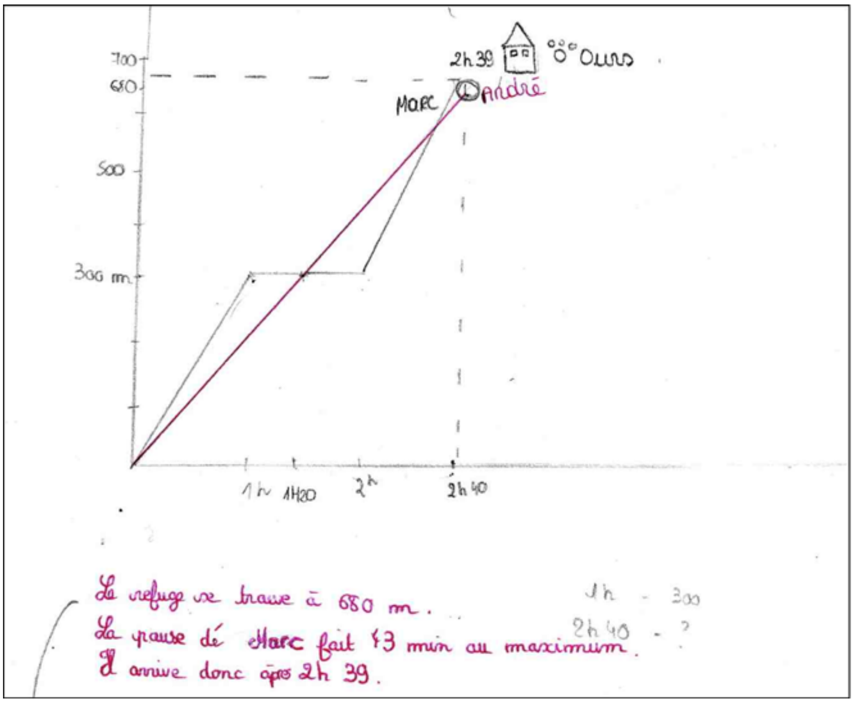
Nous avons travaillé sur le tableur et nous avons trouvé que y doit faire approximativement entre 2,76 et 2,77 et pour x = 14,48 et 14,46

Si y = 2,76 A = 39,9648 m²
Si y = 2,77 A = 40,0542 m²

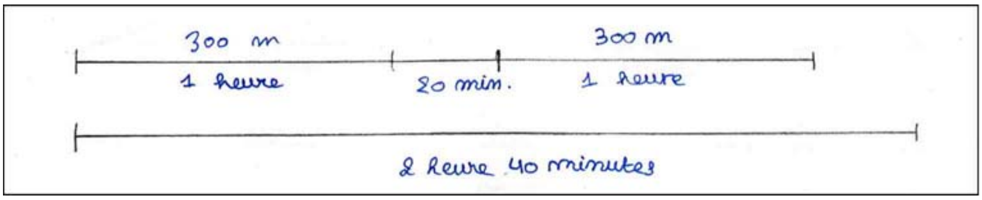
- Une copie de cat. 10 écrit l'équation $20\,y - 2y^2 = 40$, qui n'est pas résolue
- Aucune copie ne montre l'ébauche d'une solution graphique.

c) La montée au refuge (voir l'énoncé ci-dessus page 64, version $\mathbf{R_2}$)

Sur 8 groupes (cat. 9 et 10), un groupe interprète mal l'énoncé, un autre dessine un graphique erroné (représente-t-il le profil de la montagne ???), un seul groupe dessine un graphique cartésien (approximatif, qui entraîne une réponse approximative), les autres donnent une bonne réponse sans graphique cartésien. Voici une copie de cat. 10 :



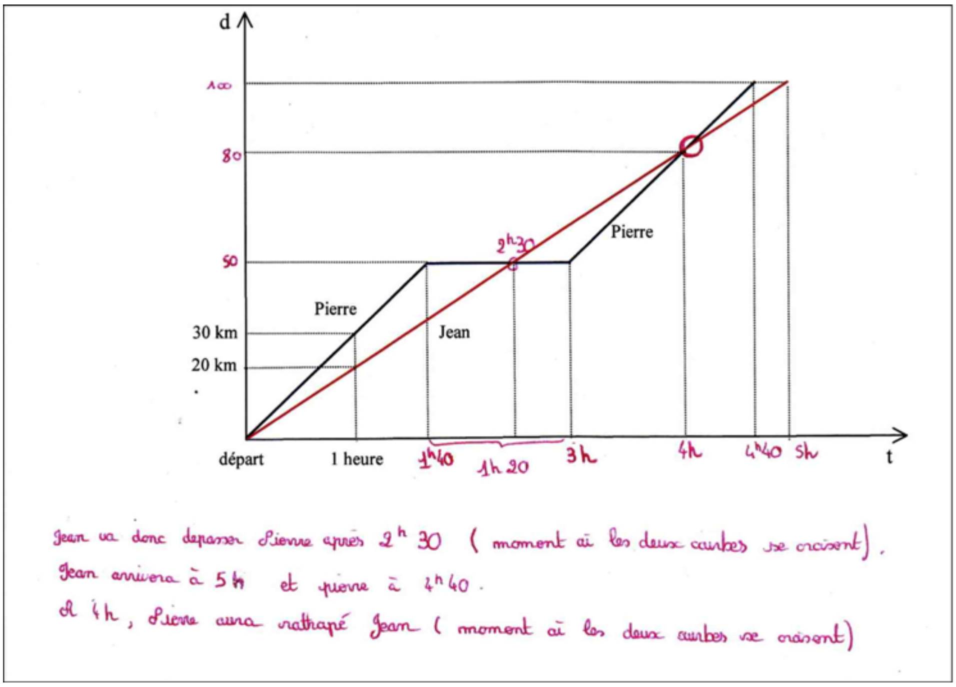
3 copies esquissent des schémas linéaires, par exemple :



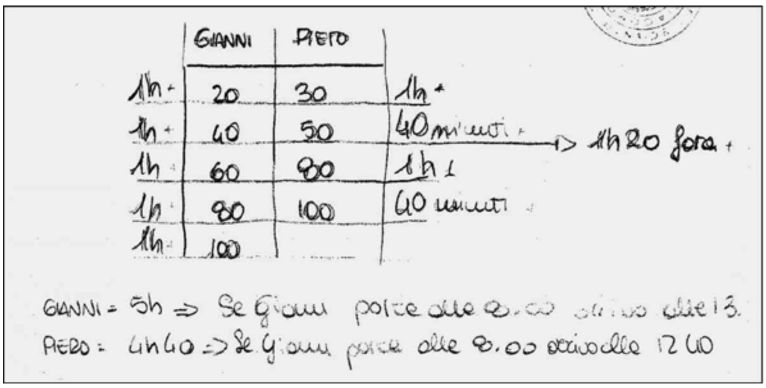
d) La randonnée cycliste, sous les deux versions (voir l'énoncé ci-dessus page 65) **:**

En Franche-Comté, 10 groupes ont traité ce problème dans sa version **C₁** (avec graphique), 1 de niveau 8, 4 de niveau 9 et 5 de niveau 10 :

- 6 groupes ont complété au moins partiellement le graphique correctement.
- Il est difficile de déceler si les valeurs demandées ont été obtenues en mesurant.
- Dans 4 copies, il ne semble pas que le graphique facilite la résolution du problème.
- Sur quatre copies de cat. 10 et deux de cat. 9, il semble bien que les élèves ont répondu à la question : *Pierre, après sa crevaison, a-t-il dépassé Jean ? Si oui à quelle heure ?* en utilisant le graphique. Voici une copie de cat. 10 où c'est clair (il est écrit :« *moment où les deux courbes se croisent* ») :

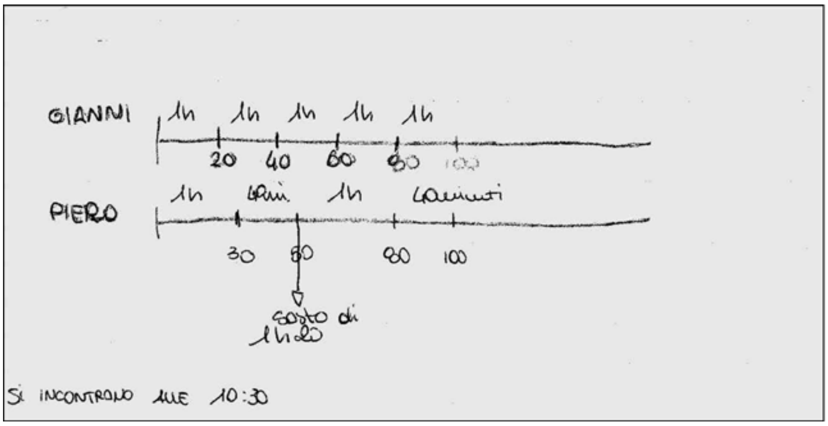


Deux classes de Parma de cat. 9 ont traité ce problème dans la version **C₂** (sans graphique).
La classe A représente sous deux forme différentes, dans un tableau et dans un schéma linéaire, les km parcourus après chaque intervalle de temps.

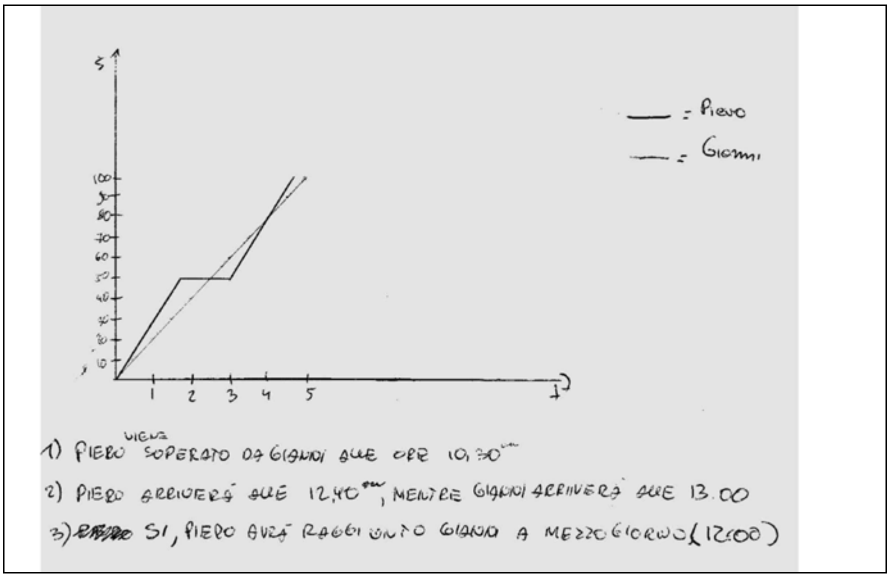


	GIANNI	PIERO	
1h +	20	30	1h +
1h +	40	50	40 minuti + → 1h20 fora +
1h +	60	80	1h +
1h +	80	100	40 minuti +
1h +	100		

GIANNI = 5h ⇒ Se Gianni parte alle 8.00 arriva alle 13.
PIERO : 4h40 ⇒ Se Gianni parte alle 8.00 arriva alle 12 40



La classe B dessine un graphique classique cartésien espace-temps sur lequel les élèves ont lu, semble t-il les réponses. C'est probablement un réinvestissement du cours de physique qui leur est dispensé (alors que la classe A n'en bénéficie pas).



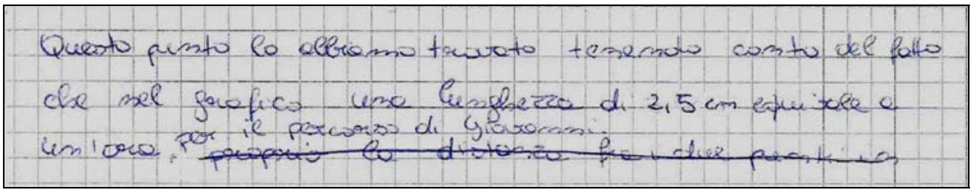
IV – Analyse a posteriori des problèmes 14, 19 et 20 du RMT 18.II

Pour confronter nos observations expérimentales avec de nombreuses productions d'élèves placés dans les conditions du RMT, nous avions proposé pour l'épreuve 18.II le problème de la randonnée cycliste et le problème du mouton avec un autre habillage sous ses deux formulations.

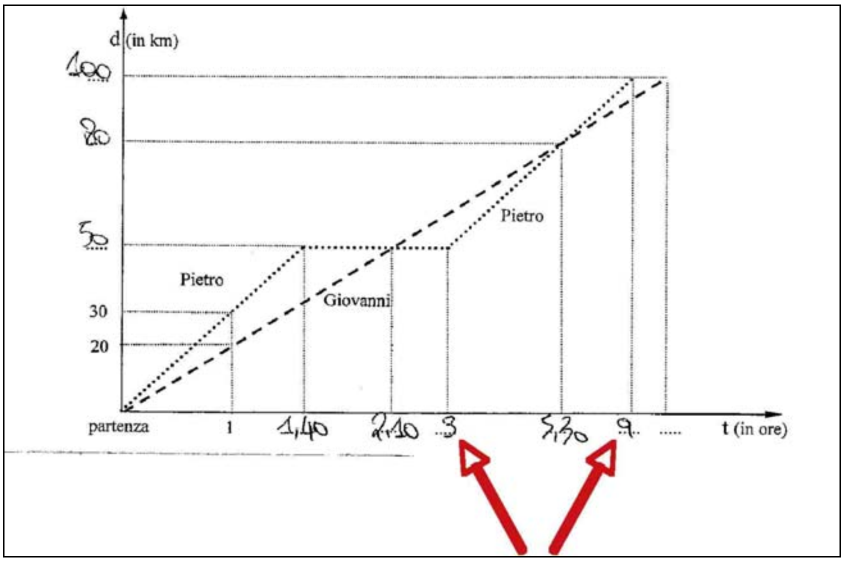
1) La randonnée cycliste (18.II.20, cat. 9, 10)
La version $\mathbf{C_1}$ (avec graphique à compléter) avait été choisie pour cette épreuve.
A Parma, l'attribution des points à 35 copies de cat. 9 donne une moyenne de 2,1 (moyenne internationale : 1,7) et à 29 copies de cat. 10 donne une moyenne de 2,0 (moyenne internationale : 1,6).
C'est donc un problème de difficulté moyenne, on ne remarque pas de progrès de la cat. 9 à la cat. 10. 54 % des copies de cat. 9 et 72 % de cat. 10 complètent le graphique totalement ou partiellement, le couple le plus souvent manquant est celui qui représente le dépassement de Jean par pierre : (4 h, 80 km).
Pour l'analyse *a posteriori*, la question suivante avait été posée :

> *Peut-on déceler si, parmi ces copies, on en trouve dans lesquelles certaines graduations en heures ou en km ont été obtenues en mesurant les abscisses ou les ordonnées à partir des repères connus (0,1) et (0,30), indépendamment des calculs réalisés. Et combien ?*

Dans une seule copie, c’est explicite :


Questo punto lo abbiamo trovato tenendo conto del fatto che nel grafico una lunghezza di 2,5 cm equivale a un'ora, per il percorso di Giovanni. ~~proprio la distanza fra due puntini~~

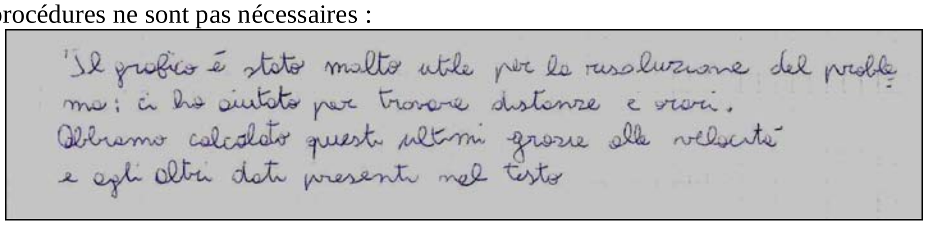
Dans d’autres, le manque d’explication des procédures fait penser que des solutions ont été déduites du graphique, complété en respectant les graduations.
La présence de graphiques erronés avec des coordonnées qui ne respectent pas les graduations révèle au contraire, comme dans la copie qui suit, un autre type de raisonnement.



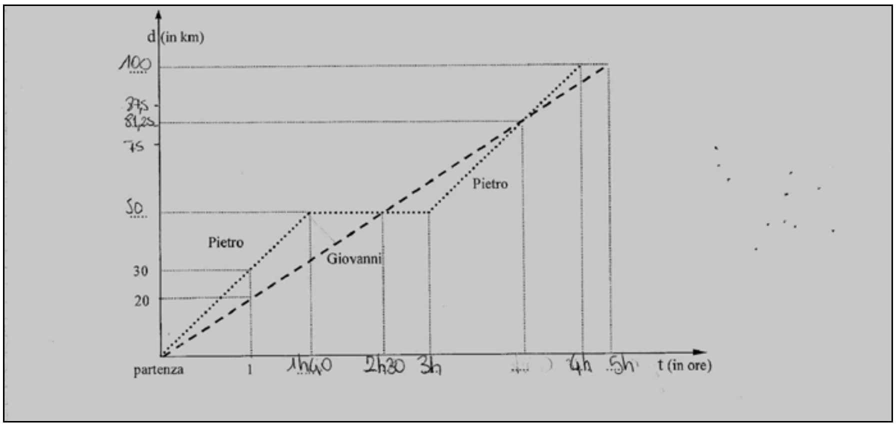
Dans l’analyse a posteriori, on demandait aussi :

Combien ont utilisé le graphique pour répondre à la première ou à la deuxième question ? Combien ont utilisé le graphique pour répondre aux deux questions : Pierre après sa crevaison a-t-il dépassé Jean ? Si oui, à quelle heure ?

- Dans peu de copies il est dit explicitement qu’on utilise le graphique, comme dans celle-ci où l’on estime que d’autres procédures ne sont pas nécessaires :


Il grafico è stato molto utile per la risoluzione del problema: ci ha aiutato per trovare distanze e orari. Abbiamo calcolato questi ultimi grazie alle velocità e agli altri dati presenti nel testo

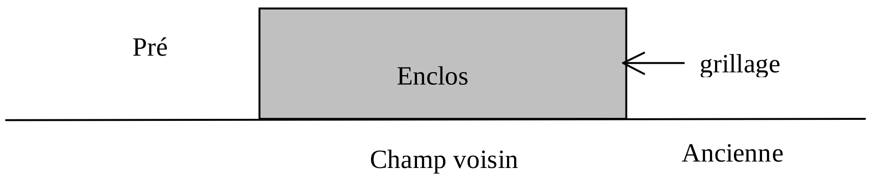
- Dans beaucoup d'autres copies qui ont 4 points, outre le graphique, on trouve des procédures de type arithmétique (calculs).
- Le graphique semble plus utilisé pour répondre à la troisième question relative au dépassement de Jean par Pierre, question pour laquelle peu d’autres procédures sont envisageables.
- Dans la copie suivante, on travaille sur le graphique en plaçant les graduations comme milieux successifs d’intervalles.



Pour conclure, l'analyse de ces copies montre que les capacités à compléter et interpréter un graphique s'améliorent de la cat. 9 à la cat. 10.
Souvent le graphique se substitue à la description écrite de la procédure utilisée, il se suffit à lui-même. Cette absence d'explications ne permet pas d'établir clairement si le graphique facilite la résolution du problème.

2) Le pré du père François (I) (18.II.14, cat. 7, 8)

Le père François possède un pré en bordure du champ d'un voisin, une ancienne clôture rectiligne séparant les deux propriétés. Pour faire l'essai d'une nouvelle semence, le père François veut réserver dans son pré, le long du champ voisin, un enclos rectangulaire de 42 m^2 (voir la figure).
Pour éviter que ses bêtes, qui paissent dans son pré, aillent piétiner sa nouvelle plantation, il veut installer un grillage formant les trois autres côtés de la zone rectangulaire à réserver. Il dispose d'un grillage d'une longueur de 20 m qu'il veut utiliser entièrement (voir la figure).
Pour ne pas compliquer ses mesures de longueurs, il souhaite les effectuer en nombres entiers de mètres.

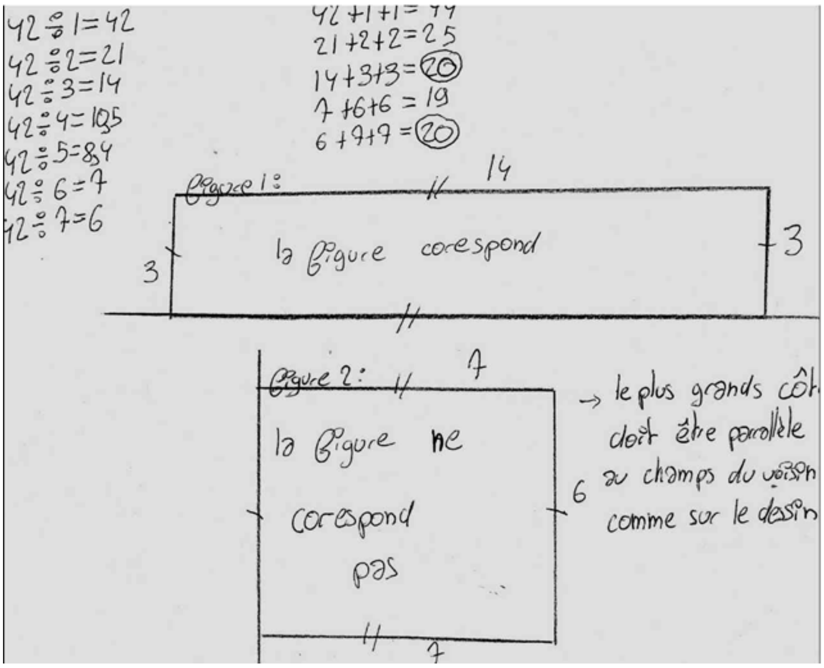


Quelles seront les mesures des côtés de l'enclos rectangulaire du père François ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

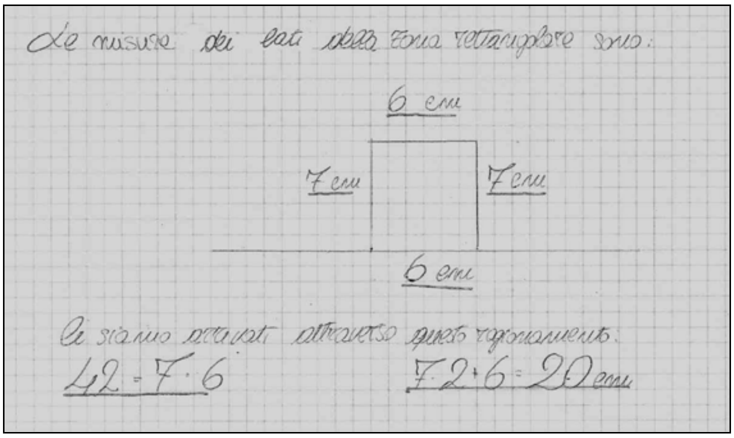
Cette version avec un enclos de 42 m^2 donne des solutions entières : 14 m x 3 m et 6 m x 7 m. Celles-ci peuvent donc être obtenues par quelques essais, en tenant compte de la divisibilité. Voici le tableau des points attribués par les sections de Parma et de Franche-Comté :

	Cat 7, PR	Cat 7, FC	Cat 8, PR	Cat 8, FC
0	27	24	8	22
1	12	4	1	0
2	41	41	34	44
3	0	3	2	7
4	2	0	2	3
Nb copies	82	72	47	76
moyenne	1,2	1,3	1,8	1,6
moy intern	1,2	1,2	1,5	1,5

On constate un faible pourcentage de réussite, beaucoup de copies blanches et une fréquence élevée de "2 points" accordés pour une des deux solutions, il s'agit presque toujours de la solution 14 x 3.
Des difficultés n'avaient pas été prévues dans l'analyse a priori, relative à la non adéquation entre la figure donnée et les solutions :
- Dans beaucoup de copies les élèves font l'hypothèse que la « base » du rectangle est plus grande que la « hauteur ». Ce qui les entraîne à ne pas considérer ou à écarter explicitement la solution 6 x 7.



- Dans quelques copies, les élèves déduisent de la figure un rapport entre les côtés du rectangle (1/3 ou bien 1/4).
- Dans beaucoup de copies (surtout de cat. 7) il n'est pas dit comment a été trouvée la solution : les élèves se contentent de « vérifier *a posteriori* » ou bien disent procéder « par essais» qu'ils ne montrent pas :

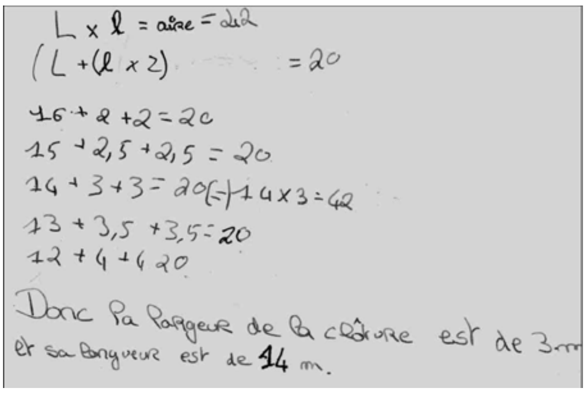


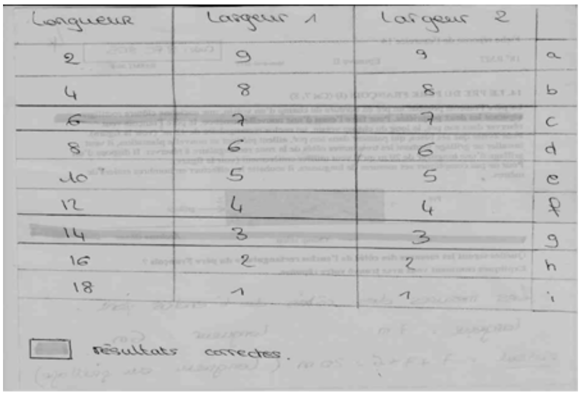
Dans l'analyse a posteriori, on demandait :

1 *Est-ce que dans les copies, apparaissent effectivement une ou des variables, sous forme littérale (du type a + 2b) ou sous forme rhétorique, avec le projet de « les faire varier » en les remplaçant successivement par différentes valeurs (présence d'un tableau) ?*

2 *Est-ce que des formules algébriques (comme a + 2b = 20 et ab = 42) apparaissent pour expliquer les calculs faits ?*

Dans très peu de copies (3 sur 154 en cat. 7 et 4 sur 123 en cat. 8) on trouve des formules algébriques qui, de toute façon, ne sont utilisées ensuite que pour des essais.



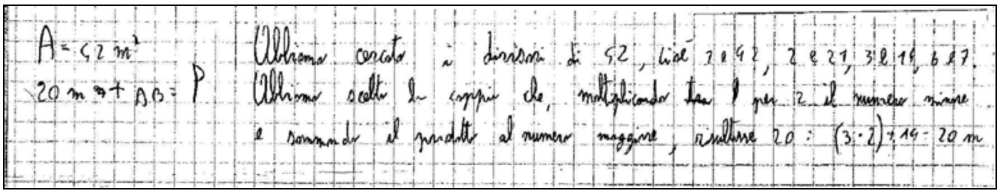


Longueur	Largeur 1	Largeur 2	
2	9	9	a
4	8	8	b
6	7	7	c
8	6	6	d
10	5	5	e
12	4	4	f
14	3	3	g
16	2	2	h
18	1	1	i

résultats corrects.

Le procédé par essais est le plus fréquent, généralement à partir des diviseurs de 42, accompagnés parfois d'une représentation en tableau.

L'outil « tableau » se révèle utile aussi pour prouver qu'il n'existe pas d'autres solutions que celles produites.



$A = 42\ m^2$
$20\ m = + AB : P$
Abbiamo cercato i divisori di 42, cioè 1 e 42, 2 e 21, 3 e 14, 6 e 7.
Abbiamo scelto le coppie che, moltiplicando tra loro per 2 il numero minore e sommando il prodotto al numero maggiore, risultano 20 : $(3 \cdot 2) + 14 = 20$ m

Pour conclure :

- Ces procédures, même si elles ne font pas explicitement référence à une loi fonctionnelle, contiennent *une idée de variabilité,* puisqu'à un nombre qui varie dans un ensemble il en est associé un autre.
- Dans ce problème, où l'on ne dispose pas des outils algébriques nécessaires (équation du 2° degré) et dans lequel l'ensemble des solutions possibles est fini et « petit », la représentation sous forme de tableau ou toute procédure par essais organisés apparaît la plus efficace.
  Il s'agit, de toute façon, d'une des représentations possibles de la fonction, avec la liste de tous les couples objet-image.

3) Le pré du père François (II) (18.II.19, cat. 9, 10)

Dans le même contexte que pour le problème I, l'enclos à former mesure 40 m^2 et la question posée est :

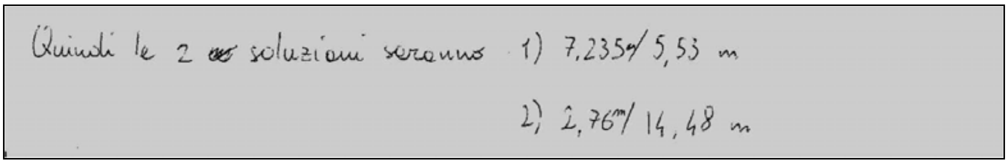
Quelles seront, au décimètre près, les mesures des côtés de l'enclos rectangulaire du Père François ?

Les scores attribués à Parma donnent une moyenne de 0,4 pour 35 copies en cat. 9 (0,4 pour la moyenne internationale) et 1,2 pour 29 copies en cat. 10 (1,0 pour la moyenne internationale).

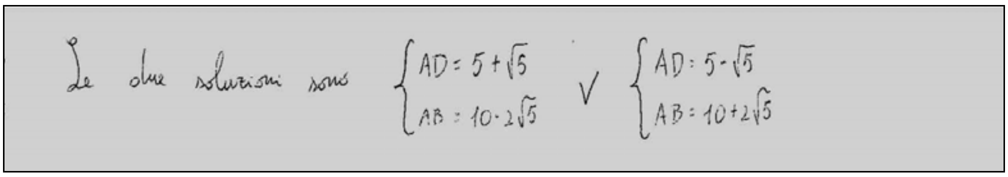
On observe donc un très faible pourcentage de réussite ; beaucoup de copies blanches, surtout en cat. 9, et un petit progrès avec une distribution plus uniforme des scores en cat. 10.

Les principales difficultés ont été :

- L'interprétation de la demande d'une "approximation au décimètre près" :

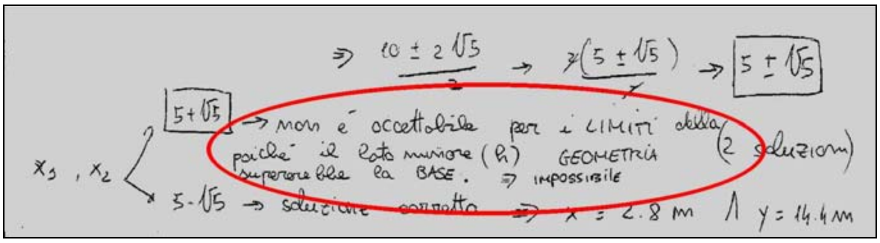


Quindi le 2 ~~os~~ soluzioni saranno 1) 7,235 m / 5,53 m
2) 2,76 m / 14,48 m



Le due soluzioni sono $\begin{cases} AD = 5+\sqrt{5} \\ AB = 10-2\sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} AD = 5-\sqrt{5} \\ AB = 10+2\sqrt{5} \end{cases}$

- Des difficultés d'organiser des essais avec des nombres décimaux, ce qui entraîne des essais avec des nombres entiers.
- Des difficultés en calcul algébrique (résolution de l'équation du second degré) et pour justifier les réponses (ni explications ni calculs).
- Une interprétation des résultats trouvés pour respecter ce théorème-élève : *dans un rectangle, la « base » doit être plus grande que la « hauteur ».*



$\Rightarrow \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{2} \rightarrow \frac{2(5 \pm \sqrt{5})}{2} \rightarrow \boxed{5 \pm \sqrt{5}}$

x_1, x_2

$\boxed{5+\sqrt{5}}$ → non e' accettabile per i LIMITI della GEOMETRIA poiche' il lato minore (h) superava la BASE. ⇒ IMPOSSIBILE (2 soluzioni)

$5-\sqrt{5}$ → soluzione corretta ⇒ $x = 2.8$ m $\wedge$ $y = 14.4$ m

Dans l'analyse a posteriori, on demandait :

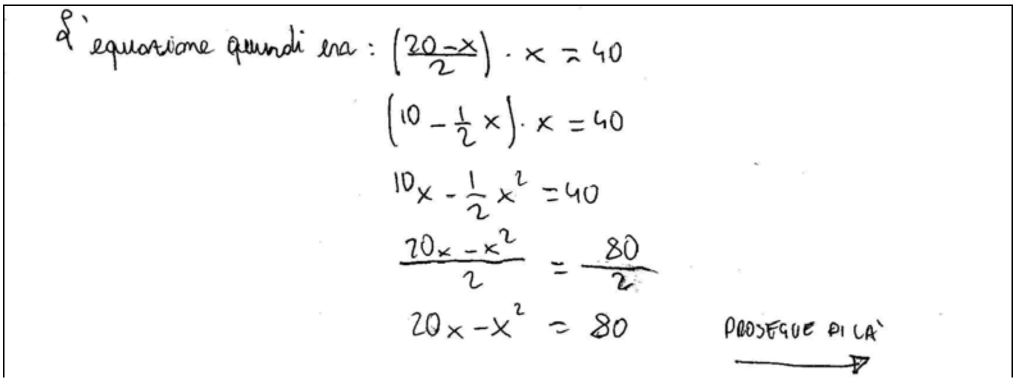
1. *Dans quel pourcentage de copies trouve-t-on des équations bien écrites, les variables étant bien spécifiées ?*
2. *Trouve-t-on dans des copies, et dans combien :*
   - Des tableaux numériques donnant la correspondance entre valeurs de la variables et leurs images ?
   - Une solution graphique même ébauchée ?

- Dans les copies on ne trouve aucune solution graphique.
- Un seul tableau, en cat 9, ne contenant que des nombres entiers.

IMPOSSIBILE

40 = 6·8 X
8·5 X
40·1 X
1·40 X
10·4 X
4·10 X
2·20 X
20·2 X

- En cat 9, une seule copie écrit l'équation, résolue ensuite par essais :



L'equazione quindi era : $\left(\frac{20-x}{2}\right) \cdot x = 40$

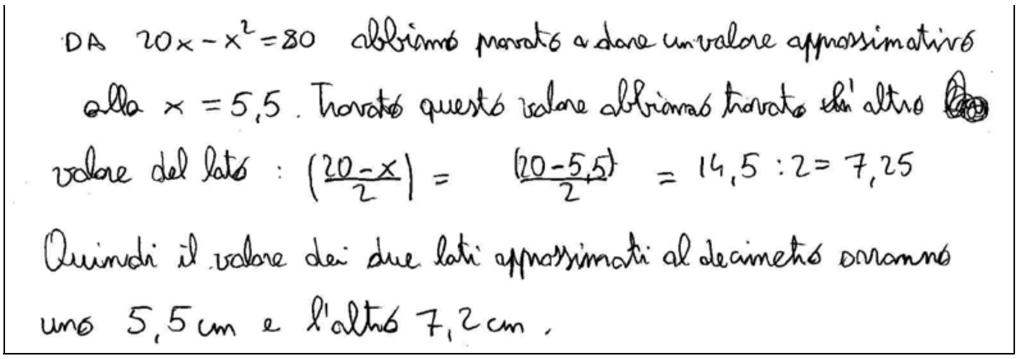
$\left(10 - \frac{1}{2}x\right) \cdot x = 40$

$10x - \frac{1}{2}x^2 = 40$

$\frac{20x - x^2}{2} = \frac{80}{2}$

$20x - x^2 = 80$

PROSEGUE DI LA'



DA $20x - x^2 = 80$ abbiamo provato a dare un valore approssimativo alla $x = 5,5$. Trovato questo valore abbiamo trovato l'altro valore del lato : $\left(\frac{20-x}{2}\right) = \frac{(20-5,5)}{2} = 14,5 : 2 = 7,25$

Quindi il valore dei due lati approssimati al decimetro saranno uno 5,5 cm e l'altro 7,2 cm.

- En cat. 10, 14 copies (48%) écrivent l'équation dont 2 résolvent par essais et 12 en utilisant la formule donnant les solutions.

Pour conclure,

- La difficulté de travailler avec des nombres décimaux rend peu efficace la méthode par essais.
- En cat. 10 l'équation est généralement résolue correctement, mais il y a ensuite une difficulté dans l'interprétation des résultats (approximation, et préjugés sur le rapport "base"/"hauteur" dans un rectangle dessiné).

- L'outil « fonction », et en particulier ses représentations sous forme de tableaux et de graphiques, ne semble pas être utile ici pour la résolution du problème.
- De la cat. 9 à la cat. 10, on remarque une utilisation plus consciente des variables.

V - Revenons au thème de notre rencontre : *un regard constructif sur les erreurs*

Les erreurs que l'on peut observer dans les copies ne concernent que peu l'outil fonction lui-même dans le cadre limité des problèmes de rallye, puisque les élèves ne l'utilisent pratiquement pas !
Les erreurs les plus fréquentes relevées dans ces problèmes où nous espérions voir utiliser des fonctions sont essentiellement dues à :

- une mauvaise interprétation de l'énoncé : lecture trop rapide ou superficielle qui oublie des données dans des phrases longues où chaque mot compte ?
- des difficultés de conversion d'unités.
- et surtout la non maîtrise des calculs algébriques.

Notre questionnement porte sur l'obstacle (typiquement au sens de Gaston Bachelard, quand une connaissance ancienne vient s'opposer à l'assimilation d'une connaissance nouvelle au sein d'un réseau conceptuel solidement installé dans les représentations mentales, la didactique ayant pour objet de développer des stratégies d'enseignement adaptées) que constitue l'utilisation d'autres outils plutôt qu'une représentation fonctionnelle, ne serait-ce qu'avec des prémices d'une relation objet-image.

Alors : des fonctions pour résoudre des problèmes ?

Nous avons essayé dans cette expérimentation de proposer des problèmes dont les énoncés inciteraient les élèves à utiliser l'outil « fonction » dans l'un ou l'autre des différents registres de représentations : graphiques, formules algébriques, tableaux … Incitation soit explicite (lecture d'un graphique cartésien), soit par la nécessité de passer au registre algébrique pour éviter des démarches fastidieuses avec de nombreux essais, surtout quand les solutions ne sont pas entières.
Nous avons tenté, dans les analyses, de noter les indices qui peuvent révéler la présence implicite ou explicite d'une correspondance fonctionnelle. Tenté, car une relation fonctionnelle peut être mise en œuvre dans divers cadres (arithmétique, algébrique, fonctionnel) sans que ce lien puisse être formulé par l'élève. Il choisira le cadre le plus familier pour lui où l'idée de relation fonctionnelle peut opérer implicitement.
Au vu de la grande majorité des copies analysées, on répond : « non, actuellement jusqu'à la catégorie 9 au moins, alors qu'en catégorie 10 les élèves semblent mieux maîtriser l'interprétation de graphiques quand ils sont donnés, de plus dans quelques rares copies, on trouve l'expression de relations fonctionnelles sous forme de tableaux, ou de graphiques.
Remarquons qu'en France, les programmes jusqu'à la cat. 10 ne mentionnent que les fonctions affines et leurs représentations graphiques, mais nous avons vu que pour la plupart des élèves, en tout cas jusqu'à la cat. 9, le graphique semble apporter une difficulté supplémentaire, plutôt qu'un outil pour faciliter la résolution des problèmes.

VI - Nous conclurons avec des questions :

- Quel travail préparatoire sur l'idée de fonction peut-il favoriser l'acquisition de la notion ?
- Y a-t-il des situations fondamentales (au sens de Guy Brousseau) pour introduire la notion de fonction ?
- Dans quelles situations le cadre fonctionnel sera-t-il incontournable ? On a déjà pointé l'intérêt de passer des variables discrètes à des variables continues.
- Quels sont les fondements épistémologiques des obstacles à l'apprentissage de la notion de fonction ?
- Les problèmes du RMT peuvent-ils avoir un impact (sur les enseignants, sur les élèves ?) dans l'apprentissage de la notion de fonction ?
- Faut-il introduire dans les problèmes du RMT la notion de fonction par des locutions plus explicites comme « en fonction de » ? La fonction s'exprime alors dans une description verbale d'une relation entre une variable et ses images dans le contexte concret du problème.

14e RENCONTRE INTERNATIONALE DE L'ARMT

EN PHOTOS

Annie Henry


Retrouvailles


Et voilà, la rencontre est ouverte.


Une interprète de choc


Une partie de l'assistance


La Gazette est née !.


au hameau du fromage ...

... de quoi parlent-ils donc ?

La réception au palais Granvelle

Elle aurait quand même pu apprendre l'italien !

Applaudissements pour tous !

14° INCONTRO INTERNAZIONALE DELL'ARMT

IN FOTOGRAFIA

Fabio Brunelli

Un gruppo di toscani in partenza dalla Stazione di Santa Maria Novella (Firenze). L'euforia è dovuta al fatto che ancora non conoscevamo le anguste cuccette che ci avrebbero portato oltre frontiera!

Alle prime luci dell'alba un volto rassicurante: Francesca Ricci ci accoglie alla stazione di Besançon.

Un bus ci ha portato dalla stazione direttamente alla cittadella universitaria: subito al lavoro… con tipico stakanovismo centro-europeo!

La gioia di ritrovarci dopo un anno fa dimenticare la stanchezza del viaggio.

Il coffee break ci offre anche i sapori locali.

Il caffé scorre a fiumi, ma alla fine dei tre giorni anche le noci erano finite.

Non è facile mettere in posa tutti i partecipanti al convegno: 80 da 6 differenti paesi.

All'ora del pranzo ci trasferiamo alla mensa universitaria, attraversando il parco.

Purtroppo non avevamo pittori tra noi, ma solo fotografi a immortalare i colori dell'autunno.

Le discussioni matematiche e organizzative continuano anche a tavola.

Tra gli interventi del primo giorno quello di Michèle Artigue, docente dell'Università Paris Diderot.

Le relazioni si susseguono a ritmo incalzante mentre un occhio superiore implacabile sovrintende agli spazi, ai tempi…

La pausa caffé è sempre affollata: si rievoca il passato e si progetta l’avvenire.

Chi ha detto che i matematici orientali sono freddi e distaccati!

La prima sera si è conclusa con la cena sociale dell’associazione in un ristorante tipico.

Protagonisti assoluti della cena i formaggi francesi. Diversi intrepidi italiani sono riusciti a comprarne alcune forme e portarsele a casa in valigia.

Il secondo giorno ha visto l’inizio dei lavori di gruppo.

Visita alla mostra “10 expériences mathématiques”

In giro per la città: i professori di matematica sono turisti particolari; in questo caso l'attenzione è per un'antica unità di misura.

Qui non si è capito bene se l'interesse era da ricondurre alla biologia marina o alla gastronomia.

Se non ricordo male lo spumante offerto in serata dalle autorità cittadine era un rosato Crémant du Jura - Fruitière vinicole d'Arbois.

Molti hanno esordito con frasi: "A quest'ora non bevo!" Alla fine, tuttavia, si notava un'euforia generale…

Questi rallysti sono incredibili: non hanno ancora finito il 14° convegno, che già mettono le zampe sul 15°!

Il terzo giorno si concludono i lavori di gruppo. Mai visto allievi così euforici, dopo essersi assegnati dei tremendi compiti per casa!

I giovani matematici attirano sempre l’attenzione delle ragazze!

Non siamo ancora partiti e già sentiamo nostalgia per questa città, veramente “Besançon terribile”!