La Gazette de Transalpie
La Gazzetta di Transalpino

N° 0, octobre 2010

Revue de l'Association Rallye Mathématique Transalpin
Rivista dell'Associazione Rally Matematico Transalpino

ISSN

Éditeur responsable / Editore responsabile

Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT)
association au sens des articles 60 et suivants du code civil suisse. siège: Neuchâtel (CH)
Associazione Rally Matematico Transalpino (ARMT)
associazione ai sensi degli articoli 60 e seguenti del codice civile svizzero, sede: Neuchâtel (CH)

Site Internet : www.math-armt.org
Dès 2011 / Dal 2011 : www.armtint.org

ISSN ...

TABLE DES MATIERES / INDICE

Numéro 0, octobre 2010 / Numero 0, ottobre 2010

L'ARMT a le plaisir d'annoncer la naissance de « Gazette », le jour de la 14^{e} Assemblée générale de l'association, à Besançon, le 29 octobre 2010.
Les parents et l'enfant se portent bien, la petite fait 65 pages et 9,8 MB.

EDITORIAL

François Jaquet, rédacteur responsable

Le projet était dans l'air depuis plus d'une année, on y avait fait allusion lors de nos rencontres, notre Comité de gestion en a parlé à plusieurs reprises. L'idée était de mettre à disposition de toutes les personnes engagées dans le Rallye mathématique transalpin un lieu d'échanges et d'information, mais aussi de nous présenter auprès d'un public plus élargi pour communiquer notre intérêt pour la résolution de problèmes par classes et pour publier les résultats de nos travaux.

Pour une association comme l'ARMT, aux moyens financiers limités, il n'était pas question de se lancer dans une revue sur papier ; *La Gazette de Transalpie* se trouvera donc sur la toile, accessible à chacun par l'intermédiaire de notre site Internet.

Trois conditions sont nécessaires pour l'édition d'une revue virtuelle : il faut des contenus, des textes rédigés et des lecteurs, en étroite relation entre les uns et les autres. Si l'on n'a rien ou peu de choses à dire, si l'on n'a personne pour l'écrire ni pour le lire, il est préférable de ne pas s'engager dans cette publication.

L'ARMT a, en soi, une vie associative, des productions et des résultats qui constituent une matière méritant d'être diffusée. La condition des contenus est donc satisfaite.
Nos problèmes et leurs analyses a priori sont déjà écrits, les milliers de copies d'élèves reçues après chaque épreuve le sont aussi, comme certains travaux issus de nos groupes de travail. Il reste cependant encore beaucoup d'autres choses à rassembler et à rédiger : des expériences vécues, des analyses a posteriori, des réflexions, les actes de nos rencontres ... Nous allons certainement trouver des gens disposés à en faire des articles pour *La Gazette de Transalpie.* La condition sur la production de textes est donc déjà satisfaite pour une partie et l'on peut raisonnablement espérer qu'elle le soit aussi pour ce qui reste à élaborer.
Les animateurs de nos sections, les milliers de maîtres dont les classes participent au RMT, d'autres enseignants encore qui apprécient nos problèmes, les collègues qui organisent d'autres concours ou confrontations de mathématiques, des formateurs, des didacticiens, voire des parents d'élèves sont des lecteurs potentiels. La dernière condition est satisfaite à son tour : il y a un public cible pour notre revue.

Il suffit maintenant de savoir si toutes les potentialités évoquées peuvent donner vie à *La Gazette de Transalpie*, dans laquelle des auteurs écrivent des choses qui intéressent les lecteurs, au travers de laquelle ces derniers montrent qu'ils ne sont pas seulement consommateurs, mais aussi interlocuteurs, et initiateurs de nouveaux récits, de nouvelles réflexions, d'échanges. Nous avons bien prévu un Comité de rédaction et un Comité de lecture, composés de personnes qui acceptent de s'engager dans certaines tâches, mais c'est l'ensemble des animateurs du RMT et des enseignants participants qui donneront le souffle et la dynamique de la revue.

Ce numéro 0 est un premier avant-goût de ce que pourrait être *La Gazette de Transalpie.* Son contenu est esquissé dans la présentation qui suit. Ses articles reflètent quelques instants de vie du RMT, variés mais non exhaustifs. S'ils sont lus et appréciés, s'ils sont suivis de réactions, de demandes ou de propositions pour de nouveaux sujets de réflexion, il y aura un numéro 1, puis un numéro 2 et beaucoup d'autres encore. La balle est dans le camp ... des lecteurs ? des auteurs d'articles ? du Comité de rédaction ? Non, ni de l'un, ni de l'autre exclusivement. Elle est dans le camp de tous les *citoyens de Transalpie* puisqu'il s'agit de leur revue.

L'ARMT ha il piacere di annunciare la nascita di «Gazzetta», nel giorno della 14a Assemblea generale della nostra associazione, a Besançon, il 29 ottobre 2010.
I genitori e il bebé godono di ottima salute e la piccola misura 65 pagine e pesa 9,8 MB.

EDITORIALE

François Jaquet, direttore responsabile

Il progetto era nell'aria da più di un anno, ne avevamo fatto allusione in alcuni nostri incontri, il nostro Comitato di gestione ne ha parlato a diverse riprese. L'idea era di mettere a disposizione di tutte le persone impegnate nel Rally matematico transalpino, un luogo di scambi e d'informazione, ma anche di di presentarci ad un pubblico più vasto per comunicare il nostro interesse per la risoluzione di problemi per classi e per pubblicare i risultati dei nostri lavori.

Per un'associazione come l'ARMT, che ha finanziamenti limitati, era esclusa l'opzione di una rivista cartacea: *La Gazzetta di Transalpino* si troverà dunque in rete, accessibile a tutti tramite il nostro sito Internet.

Per l'edizione di una rivista virtuale sono necessarie tre condizioni: ci vogliono contenuti, testi redatti e lettori, in relazione stretta fra di loro. Se non si ha nulla o poche cose da comunicare, se non c'è chi scrive, né chi legge, è meglio non impegnarsi in questa pubblicazione.

L'ARMT ha, al suo interno, una vita associativa, produzioni e risultati che costituiscono materiali che meritano di essere diffusi. La condizione dei contenuto è pertanto soddisfatta.
I nostri problemi con le relative analisi a priori sono già scritti, abbiamo migliaia di elaborati degli allievi, ricevuti dopo ogni prova ed abbiamo anche il materiale dei nostri gruppi di lavoro. Ci sono, comunque, ancora molte altre cose da riunire, riordinare e mettere per iscritto: esperienze vissute, analisi a posteriori, riflessioni, atti dei nostri incontri ... Certamente troveremo persone disposte a farne degli articoli per *La Gazzetta di Transalpino.* La condizione relativa alla produzione di testi è pertanto in parte già soddisfacente e possiamo ragionevolmente sperare che lo sia anche per ciò che rimane da elaborare.
Gli animatori delle nostre sezioni, le migliaia di insegnanti le cui classi partecipano al RMT, altri insegnanti che apprezzano i nostri problemi, i colleghi che organizzano altre gare matematiche, formatori, didattici, ma anche genitori, sono lettori potenziali. L'ultima condizione è anch'essa soddisfatta: esiste un pubblico adatto per la nostra rivista.

Rimane ora da sapere se tutte le potenzialità evocate possono dare vita a *La Gazzetta di Transalpino*, nella quale gli autori scrivano cose che interessino i lettori e attraverso la quale questi ultimi mostrino che non ne sono solo dei consumatori, ma anche interlocutori e iniziatori di nuovi scritti, nuove riflessioni, scambi. Abbiamo ovviamente previsto un Comitato di redazione ed un Comitato di lettura, composto da persone che accettano di impegnarsi nello svolgimento di certi compiti, ma è l'insieme degli animatori del RMT e l'insieme degli insegnanti che si iscrivono alla gara, che faranno vivere dinamicamente la rivista.

Questo numero 0 è un primo assaggio di ciò che potrebbe essere *La Gazzetta di Transalpino.* Il suo contenuto è abbozzato nella presentazione che segue. I suoi articoli riflettono qualche momento della vita del RMT, in modo variegato ma non esaustivo. Se saranno letti e apprezzati, se saranno seguiti da reazioni, da domande o da proposte di nuovi argomenti di riflessione, ci sarà un numero 1, poi un numero 2 e molti altri ancora. La palla ora passa nel campo ... dei lettori? Degli autori di articoli? Del Comitato di redazione? No, né degli uni né degli altri, in modo esclusivo. E' nel campo di tutti gli «abitanti di Transalpino», poiché si tratta della loro rivista.

PRESENTAZIONE DEL NUMERO

Questo numero 0 de *La Gazzetta di Transalpino* contiene sette articoli che costituiscono un campione dei contenuti potenziali della rivista, sia nella varietà dei temi che nello stile.

- ***Il ruolo dell'insegnante la cui classe partecipa al RMT*** è importante ma molto delicato. **Graziella Telatin** propone qualche riflessione sul modo con il quale l'insegnante può favorire la presa di responsabilità degli allievi nella formazione dei gruppi e può utilizzare i problemi dopo la prova. Le sue osservazioni illustrano in maniera costruttiva il documento ufficiale, *Obblighi degli insegnanti che desiderano partecipare al RMT*, che definisce le regole di somministrazione delle nostre prove e che figura in allegato a questo articolo.

- **Lucia Grugnetti**, in ***Evoluzione dei legami fra RMT e ricerca nel corso degli incontri internazionali del RMT***, ripercorre la storia della nostra associazione attraverso gli atti dei nostri incontri, nei quali appare, in maniera esplicita, la trama dei legami fra la didattica della matematica e l'azione del RMT fin dalle sue origini.

- **Maria Francesca Tanda** racconta la sua esperienza di animatrice con ***I problemi del Rally, momenti di gioco per le vittime del terremoto d'Abruzzo***. Si tratta di un reportage attraverso il quale si scopre, con sorpresa, che i nostri problemi possono essere utilizzati nelle situazioni più inattese.

- **Clara Bisso** riporta uno scambio epistolare a proposito di ***Un genitore giardiniere e il RMT.*** Non risolvono i problemi solo gli allievi, ma talvolta anche i loro genitori e ciò offre aperture della nostra azione al di là della scuola.

- L'articolo, ***Errori, ostacoli, schemi e concetti*** è estratto da un corso di didattica di **Michel Henry.** Il suo contenuto à particolarmente opportuno in questo momento in cui l'ARMT è molto impegnata nella problematica dello statuto dell'errore e la sua analisi didattica, nei vari tipi di ostacoli: epistemologici, didattici, psicologici, ontogenetici, e ancora nei concetti, schemi e campi concettuali.

- ***Il nastro di Noé*** è un vecchio problema del RMT, che è oggetto di un *Point de départ*[1] nella rivista *Grand N* (85, 2010). **François Jaquet** situa il problema nella futura «Banca di problemi del RMT» e sviluppa le sue *Potentialités pour la classe*, secondo le riflessioni attuali intorno ai problemi del RMT.

- ***Gli errori degli allievi e la loro gestione didattica: a che punto siamo oggi?*** E' la domanda che si pone **Michèle Artigue,** nella sua conferenza di apertura del 14° incontro internazionale, ripreso qui. L'autrice sottolinea la normalità dell'errore in matematica e il suo carattere sovente produttivo, ricorda i differenti approcci ai quali si ispirano i nostri attuali lavori del RMT. Allarga poi la sua riflessione ad altri approcci cognitivi o antropologici.

Ci sono altri articoli in preparazione per i numeri successivi de *La Gazzetta di Transalpino*, in particolare la storia di un problema dalla sua nascita alla sua versione definitiva in una delle nostre prove, (la cui pubblicazione aspetta la somministrazione della prima prova del 19^0 RMT per evitare le "fughe di notizie").
Ci saranno anche, nei prossimi numeri, le presentazioni relative ai nostri incontri di Nivelles e Besançon, così come i rapporti dei nostri gruppi di lavoro.
Vi ritroveremo, poi, reportage, notizie delle sezioni, lettere dei lettori, riflessioni, risultati delle numerose ricerche e analisi che vengono svolte nell'ambito dell'ARMT.

[1] L'articolo è in francese. Se i lettori lo richiedono, potrà essere tradotto in italiano, purché si possa trovare una persona disposta a farlo.

PRESENTATION DU NUMERO

Ce numéro 0 de *La Gazette de Transalpie* contient sept articles qui constituent un échantillon des contenus potentiels de la revue, dans des styles et sur des thèmes variés :

- ***Le rôle de l'enseignant dont la classe participe au RMT*** est important mais aussi très délicat. **Graziella Telatin** propose quelques réflexions sur la manière dont l'enseignant peut favoriser la prise de responsabilité des élèves dans la formation des groupes et peut exploiter les problèmes après l'épreuve. Ses propos illustrent de manière constructive le document officiel, *Obligations des maîtres qui désirent participer au RMT*, qui définit les règles de passation de nos épreuves et qui figure en annexe de cet article.

- **Lucia Grugnetti**, dans ***l'Évolution des liens entre RMT et recherche au fil des rencontres internationales du RMT***[2], trace l'histoire de notre association au travers des actes de ses rencontres, où apparaît, de manière très explicite la trame des liens entre la didactique des mathématiques et l'action du RMT depuis son origine.

- **Maria Francesca Tanda** témoigne de son expérience d'animatrice avec ***les problèmes du Rallye, moments de jeu chez les victimes du tremblement de terre des Abruzzes***[3]**.** Il s'agit d'un reportage au travers duquel on découvre, avec étonnement, que nos problèmes peuvent être exploités dans des situations pour le moins inattendues.

- **Clara Bisso** rend compte d'un échange de correspondance à propos d'***Un père jardinier et le RMT***[4]. Il n'y a pas que les élèves qui résolvent nos problèmes, mais aussi leurs parents parfois, ce qui offre des ouvertures intéressantes de notre action au-delà de l'école.

- L'article : ***Erreurs, obstacles, schèmes et concepts***, est constitué d'extraits d'un cours de didactique de **Michel Henry**. Son contenu est particulièrement opportun puisque l'ARMT s'occupe actuellement du statut de l'erreur et de son analyse didactique, des différents types d'obstacles: épistémologiques, didactiques, psychologiques, ontogéniques et aussi de schèmes, concepts et champs conceptuels.

- ***Le ruban de Noé*** est un ancien problème du RMT, qui fait l'objet d'un *Point de départ* de la revue *Grand N* (85, 2010). **François Jaquet** situe le problème dans la future « Banque de problèmes du RMT » et développe ses *Potentialités pour la classe*, dans le courant des réflexions actuelles autour des problèmes du RMT.

- ***Les erreurs des élèves et leur gestion didactique : où en sommes-nous aujourd'hui ?*** est la question que se pose **Michèle Artigue,** dans sa conférence d'ouverture de la 14e rencontre internationale, reprise ici. Elle souligne la normalité de l'erreur en mathématique et son caractère souvent productif, rappelle les différentes approches dont s'inspirent nos travaux actuels du RMT ; puis elle élargit sa réflexion à d'autres approches cognitive ou anthropologique.

Il y a d'autres articles encore en préparation pour les numéros suivants de *La Gazette de Transalpie*, en particulier l'histoire d'un problème de sa naissance à sa version définitive pour l'une de nos épreuves, (dont la publication doit attendre la passation de l'épreuve I du 19^{e} RMT pour éviter les fuites).
Il y aura aussi, dans nos prochains numéros, les présentations données lors des rencontres de Nivelles et Besançon, ainsi que les rapports de nos groupes de travail.
Puis, on y trouvera tous les reportages, nouvelles des sections, courriers des lecteurs, réflexions, résultats de toutes les nombreuses recherches et analyses qui se développent dans le cadre de l'ARMT.

---

[2] L'article est en italien seulement. Si des lecteurs le demandent, il pourra être traduit en français, pour autant qu'on trouve une personne disposée à le faire.
[3] ibidem.
[4] ibidem.

IL RUOLO DELL'INSEGNANTE DELLA CLASSE CHE PARTECIPA AL RMT

Graziella Telatin

Sezione della Valle d'Aosta e membro del Comitato di gestione dell'ARMT

Alcune osservazioni sul documento[5] "Obblighi"

Nel delineare le regole che sia gli insegnanti, sia gli alunni devono rispettare per poter partecipare al RMT, ci si è preoccupati non solo di porre gli alunni in un contesto nel quale sia possibile fare della matematica, ma si è dato molta importanza alle abilità sociali che questa prova può contribuire a favorire. Queste brevi osservazioni vogliono sottolinearne l'importanza.

La capacità di lavorare in gruppo non è una cosa definitivamente acquisita a nessun livello di scuola; si va dal dover tutto costruire, o quasi, dei primi anni della scuola primaria, all'affinamento delle abilità sociali, molto complesse quali l'assunzione di responsabilità in quanto classe. L'insegnante, consapevole che lavorare in gruppo favorisca le abilità sociali come l'ascolto degli altri, la capacità di esprimere le proprie idee e sostenerle, la capacità di gestire i momenti di tensione, l'aiuto e il sostegno ai compagni più deboli, l'assunzione di responsabilità nei confronti della riuscita o dell'errore, tutti elementi importanti o essenziali per la formazione della persona, promuoverà tanti percorsi formativi che contribuiranno a costruire e rinforzare tali competenze.
Il RMT, mettendo gli alunni nella condizione di **aver bisogno** di lavorare in gruppo offre una forte motivazione a questa pratica e può diventare uno strumento esemplare di come agire per costruire queste abilità sociali.

Formazione dei gruppi

Il documento "Obblighi degli insegnanti..." precisa che "La formazione dei gruppi, se avviene prima della prova, è esclusivamente a carico degli allievi.", ma questa direttiva non è sempre ben capita e rispettata. Certi insegnanti pensano di aiutare la loro classe stabilendo la formazione dei gruppi, la distribuzione dei problemi o proponendo anticipatamente altre forme di organizzazione che tolgono agli alunni la responsabilità della prova. I motivi per cui gli insegnanti si sentono in dovere di intervenire sono di diverso tipo: ottimizzazione del tempo, efficacia, paura che gli alunni non siano in grado di gestirsi da soli.
Ma il perdere tempo, non riuscire a svolgere il compito assegnato e non sapersi gestire, sono modalità assolutamente normali all'inizio. Bisogna che l'insegnante abbia pazienza e lasci fare ai bambini.
È assai probabile che i gruppi stabiliti dagli allievi non siano quelli che avrebbe formato l'insegnante: i bambini si mettono insieme per simpatia o tutti i più bravi formano un gruppo, lasciando che gli altri si arrangino. Perdono tempo a discutere oppure si occupano tutti di alcuni, pochi, problemi e ne tralasciano degli altri. Questi sono però dei percorsi "obbligati" attraverso i quali i bambini devono passare, per prendere coscienza di come ci si deve organizzare per poter essere efficaci a livello di classe. Per questo motivo una prova di allenamento, gestita con le stesse modalità del concorso, è richiesta a tutte le classi. In questo contesto, oltre e trovarsi a confronto con problemi interessanti e stimolanti, gli alunni si trovano a mettere in discussione le modalità di organizzazione della prova stessa.
Dopo la prova, è indispensabile che si discuta non solo dei problemi e della loro risoluzione, ma altresì di come la classe ha lavorato e delle difficoltà incontrate. Confrontarsi serenamente, fa prendere coscienza di come hanno funzionato i vari gruppi, porta ad una constatazione sull'efficacia di alcune aggregazioni, alla messa in discussione delle motivazioni che hanno spinto ad aggregarsi in quel modo e sovente alla presa di coscienza che un buon funzionamento del gruppo non passa necessariamente dal "volersi bene". Durante questa discussione si parla anche di quale ruolo ogni partecipante al gruppo ha sostenuto all'interno di esso e ci si confronta su cosa si sarebbe potuto fare per far funzionare in modo ottimale il gruppo stesso. Un'organizzazione preliminare dei gruppi o la distribuzione dei problemi è auspicabile, utile, persino necessaria, ma deve essere decisa e gestita dagli alunni. L'insegnante può, evidentemente, dopo la prova di allenamento o dopo le altre, stimolare la discussione o fare le sue osservazioni per l'organizzazione della prossima prova, ma non deve decidere al posto degli alunni. Se infrange questa

[5] Questo documento, regolarmente diffuso con i rapporti di attività dell'ARMT, figura nell'allegato 1, pag 13.

regola, ostacola sicuramente la sua classe, togliendole questo compito essenziale per il dinamismo della soluzione, degli scambi, dei confronti e delle validazioni.
E così, mentre gli alunni prendono coscienza di cosa è necessario fare per poter essere efficaci nell'affrontare la prova, gli insegnanti, attraverso l'osservazione attenta delle dinamiche all'interno dei gruppi e dei gruppi all'interno della classe, possono verificare se questa presa di coscienza si traduce in un saper fare, seguendo la maturazione e l'appropriazione di abilità sociali sempre più raffinate.
Può succedere per esempio di osservare, all'interno dei gruppi, un'iniziale incapacità di collaborare e poi vedere che evolve in una distribuzione dei compiti e in un'assunzione di responsabilità. Questo però non esclude ancora un comportamento di disinteresse nei confronti del risultato della classe: gruppi di alunni che pensano di aver trovato la soluzione del problema da loro scelto aspettano tranquillamente la fine dei cinquanta minuti, del tutto inattivi nei confronti dei compiti degli altri gruppi, anche se i risultati di questi sono stati appesi alla lavagna in attesa di essere controllati o discussi. Questo è sovente dovuto al fatto che nelle classi non esiste lo spirito di classe, ma esistono dei gruppi spesso in competizione tra loro.
È evidente che l'assunzione di responsabilità nei confronti della classe è un altro passo avanti, più difficile e più complesso di quello di lavorare in gruppo. Formare lo spirito di classe, un unico organismo che agisce per un'unica causa, non è banale ed è uno dei risultati che una buona pratica del RMT può raggiungere.
Il momento migliore per fare capire ai bambini che non si è finito di assolvere il proprio compito se si è lavorato in gruppo, ma che è importante aver lavorato per la classe è la riflessione che si fa, dopo la prova, sui risultati raggiunti. Queste riflessioni possono costruire piano piano questo senso di appartenenza. Superando il semplice lavoro di gruppo, si può arrivare ad una cooperazione più completa tra alunni di abilità diverse, ad una maggiore tolleranza nei confronti di chi non riesce, ad una responsabilizzazione di tutti nel confronto del compito, sentimenti che sono sempre più indispensabili e sempre meno presenti nella vita di tutti i giorni.
Il senso di appartenenza permette di superare l'individualità per sentire di "far parte" di un organismo sociale più ampio del quale si è tutti responsabili. Questa abilità è in continuo divenire, legata com'è alle dinamiche all'interno della classe, per cui può succedere che ci siano dei momenti di progresso, ma anche di regressione. Non bisogna quindi stupirsi dei momenti in cui la classe non esprime tutte le sue potenzialità, ma favorire la riflessione per permettere agli alunni di migliorare continuamente.

Comportamento del sorvegliante

Il comportamento del sorvegliante non deve essere scostante. Se non deve dare informazioni o rispondere alle domande degli alunni, può però sempre spiegare in modo sereno e amichevole che la sua presenza serve solo a far sì che la classe non sia sola e che pertanto non può rispondere a nessuna domanda. Un sorriso non suggerisce nulla, ma serve a creare un'atmosfera serena e rilassata.
Normalmente i bambini però non fanno domande, anzi sono molto contenti di poter fare insieme qualcosa senza l'intervento degli adulti. Poter dire "Facciamo da soli" li riempie di senso di responsabilità e li fa sentire grandi.

Utilizzazione delle prove

Quando l'insegnante decide di utilizzare le prove per dei fini didattici, può procedere in diversi modi.
Intanto non è detto che si debba lavorare su tutti i problemi con la stessa intensità. È importante invece che l'insegnante veda la possibilità che questi problemi, o alcuni di essi, entrino a pieno diritto nella propria programmazione didattica. A questi problemi, scelti perché "necessari" o quanto meno utili per la propria attività, dedicherà maggiore impegno e tempo.
Alcuni problemi possono essere semplicemente corretti. Sono i problemi tipo i casse-tête o i sudoku che non hanno un grande contenuto da un punto di vista matematico.
Di solito i gruppi di lavoro in classe hanno lavorato su uno o al massimo due problemi. Può succedere allora che il gruppo che ha riflettuto su un problema racconti ai compagni come ha proceduto: diventa un po' una lezione frontale durante la quale c'è il massimo coinvolgimento dei bambini del gruppo, ma quello degli altri rimane scarso.
Oppure si rilegge il problema tutti insieme e lo si risolve in un'attività a livello di classe, in cui tutti possono intervenire e l'insegnante guida la discussione orientando con domande o con richiami a quanto si è fatto in precedenza.
Oppure, se l'insegnante vede la possibilità di utilizzare un problema più avanti nel tempo, ma giudica che in quel momento è troppo lontano da quello che i bambini hanno affrontato finora in classe e non rientra

per niente nelle attività che ha programmato per quel periodo, lo mette in aspettativa e lo riprende nel momento in cui ha intenzione di trattare quel determinato concetto. Anche qui non bisogna aver paura di aspettare. Meglio non "bruciare" ottimi problemi con delle spiegazioni affrettate solo perché sono arrivati nel momento sbagliato per la propria classe.
Oppure ancora, se l'insegnante ritiene il problema importante, lo assegna a tutta la classe, eccetto al gruppo che l'ha già svolto che sarà impegnato in un'attività diversa, con le stesse modalità seguite durante la prova, di modo che nel momento della discussione tutti i bambini siano stati coinvolti nello stesso modo e sappiano di cosa si sta parlando.
La modalità più fruttuosa da un punto di vista didattico per l'utilizzo di un problema del RMT è, come per tutti i problemi, la risoluzione senza l'intervento dell'insegnante, seguita da una fase di validazione collettiva. La messa in evidenza di soluzioni diverse permette sia di vedere che un problema può essere risolto con procedimenti diversi, tutti giusti, e questo aiuta a costruire la consapevolezza che nessuno è proprietario della verità e ad essere tolleranti nei confronti di chi esprime opinioni diverse dalle proprie; sia, nel caso di soluzioni sbagliate, ad andare a vedere cosa c'è dietro l'errore. Questo è importante per gli alunni che possono mettere in discussione false credenze, misconcetti o prendere atto, banalmente, di errori di calcolo, sia per gli insegnanti che ascoltando le argomentazioni dei vari gruppi possono farsi un'idea di come gli alunni si siano appropriati dei concetti finora affrontati o di quale idea abbiano su argomenti nuovi, o anche di quale maturazione sia necessaria per affrontare con successo determinati concetti.
Inoltre emerge un'altra abilità sociale che è quella del controllo del risultato. Anche per questa non ci si deve aspettare da subito che gli alunni se ne facciano carico. Avviene quasi sempre che un gruppo, che ha funzionato anche molto bene, si ritrovi a ranghi ridotti nel momento dell'elaborazione della risposta: si domanda a uno o due membri l'elaborazione dei disegni, dei calcoli e della risposta, considerando finito il proprio compito nel momento in cui il problema smette di essere tale perché si è trovato il modo di risolverlo. Non si pretende certo che tutti i membri del gruppo risolvano il problema per conto loro, non sarebbe più un lavoro di gruppo, ma che si mettano in atto strumenti di controllo che permettano di avere dei risultati all'altezza del lavoro svolto. Questo significa trovare un'organizzazione, individuando capacità e responsabilità e suddivisione dei compiti, all'interno del gruppo, in modo che ognuno faccia la propria parte.
Per esempio, il problema 18.1.13 *I numeri del Signor Trapezio* richiede la scoperta di regolarità nella successione dei numeri 2 ; 7 ; 14 ; 23 ; 34 ; 47 ; ... che bisogna condurre fino al 30° termine. L'osservazione degli elaborati mette in evidenza che molti gruppi hanno trovato la regolarità e l'hanno espressa correttamente, ma che la cooperazione degli alunni è cessata nel momento di scrivere la successione: 2 + 5 = 7 ; 7 + 7 = 14 ; 14 + 9 = 23 ; 23 + 11= 34 ; 34 + 13 = 47 ; ... Quando « ormai non si tratta che di » effettuare una sequenza di addizioni elementari, in generale con l'aiuto di una calcolatrice, più della metà di questi elaborati presenta uno o due errori (di riporto, di disattenzione, di dimenticanza di un termine, di identificazione del 30° termine, ...). Se alcuni membri del gruppo avessero effettuato simultaneamente questi semplici calcoli, avrebbero scovato e corretto gli errori a mano a mano che apparivano.
La costatazione che il buon risultato che si sarebbe potuto raggiungere è stato inficiato da dimenticanze o da errori di calcolo, mette in evidenza che è necessario metterci un impegno fino all'ultimo e che si è responsabili del lavoro di gruppo non solo nel momento " intellettuale", ma anche in quello di trascrizione dei risultati. È nel corso della discussione di classe o con i membri dei singoli gruppi, a proposito degli errori commessi che gli alunni potranno "misurare " il livello della loro cooperazione in una risoluzione collettiva che, per essere migliorata esige delle validazioni, dei controlli e l'impegno da parte di ciascuno.

LE ROLE DE L'ENSEIGNANT DONT LA CLASSE PARTICIPE AU RMT

Graziella Telatin,

section du Val d'Aoste, membre du Comité de gestion de l'ARMT

Traduction : F. Jaquet

Quelques observations sur le document[6] « Obligations des enseignants »

Pour déterminer les règles que les enseignants aussi bien que les élèves doivent respecter pour participer aux épreuves du RMT- nous nous sommes non seulement préoccupés de placer les élèves dans un contexte où ils pourraient réellement faire des mathématiques, mais nous nous sommes attachés à valoriser les aptitudes sociales que cette épreuve favorise. Les quelques observations qui suivent tendent à souligner l'importance de ces aptitudes.
La capacité de travailler en groupe ne s'acquiert pas définitivement, à quelque niveau scolaire que ce soit. On passe du tout à construire, ou presque, des premières années d'école primaire, à l'affinement des aptitudes sociales, très complexes, comme la prise de responsabilités en tant que classe. L'enseignant qui retient que les aptitudes sociales favorisées par le travail de groupe (écoute des autres, capacité d'exprimer ses idées et les soutenir, capacité de gérer les moments de tension, aide et soutien apportés aux camarades plus faibles, prise de responsabilités par rapport à la réussite ou à l'erreur…) sont importantes ou essentielles pour la formation de la personne. Le RMT, en mettant les élèves dans une situation où ils **ont besoin** de travailler en groupe, stimule fortement ces pratiques et constitue en soi un exemple de modèle pour construire ces aptitudes sociales.

Formation des groupes

Le document « obligations des maîtres ... » précise que « La formation des groupes, si elle a lieu avant l'épreuve est exclusivement à la charge des élèves. », mais cette directive n'est pas toujours bien comprise, ni respectée. Certains enseignants pensent aider la classe en déterminant les groupes à l'avance, en proposant la répartition des problèmes ou en proposant encore d'autres formes d'organisation préalable, qui réduisent la responsabilité des élèves. Les arguments évoqués le sont en termes de gain de temps ou d'efficacité ou encore par crainte que les élèves n'arrivent pas à s'organiser seuls.
Mais perdre du temps, ne pas réussir à accomplir toute la tâche assignée et ne pas savoir la gérer sont des éventualités tout à fait normales dans un premier temps. Il faut que l'enseignant fasse preuve de patience et laisse faire les enfants.
Il est fort probable que, lors des premières épreuves surtout, les élèves ne déterminent pas les groupes comme l'aurait fait l'enseignant. Ils peuvent se regrouper par affinité ou les meilleurs peuvent se mettre ensemble laissant les autres se débrouiller. Ils perdront du temps à discuter ou ne s'occuperont que de quelques problèmes seulement et négligeront les autres. Ces étapes sont cependant des parcours « obligés » que doivent suivre les enfants pour prendre conscience de la manière dont ils doivent s'organiser afin d'être efficaces au niveau de classe. C'est pour cette raison qu'une épreuve d'entraînement, gérée avec les mêmes modalités que le concours, est proposée à toutes les classes. Dans ce contexte, au-delà de la confrontation à des problèmes intéressants et stimulants, les élèves sont en mesure de discuter des modalités d'organisation de leur classe pour l'épreuve même.
Après l'épreuve, il est indispensable de parler non seulement des problèmes et de leur résolution, mais aussi de la manière dont a travaillé la classe et des difficultés rencontrées. Une confrontation sereine fait prendre conscience du fonctionnement des différents groupes. On aboutit ainsi à des constatations sur l'efficacité de quelques regroupements, sur les raisons qui ont conduit ces élèves à s'associer et, souvent, sur la prise de conscience qu'un bon fonctionnement du groupe ne passe pas nécessairement par le sentiment de sympathie mutuelle « on s'aime bien ».
Au cours de cette discussion, on peut aussi parler du rôle que chaque participant a joué au sein de son groupe et de ce qui pourrait être fait pour en améliorer le fonctionnement. Une organisation préalable des groupes ou de la répartition des problèmes est souhaitable, utile, voire nécessaire, mais elle doit être conçue et gérée par les élèves. L'enseignant peut évidemment, après l'épreuve d'essai ou après les autres

[6] La version française de ce document figure en annexe II pp 15.

épreuves, susciter des débats ou émettre des suggestions pour l'organisation de la prochaine épreuve, mais la décision appartient aux élèves. S'il enfreint cette règle, il va à coup sûr défavoriser sa classe en lui retirant cette tâche essentielle pour le dynamisme de la résolution, pour les échanges, les confrontations et les validations.
C'est ainsi que, pendant que les élèves prennent conscience de ce qui est nécessaire de faire pour être efficace lors de l'épreuve, les enseignants peuvent, par une observation attentive des dynamiques au sein des groupes et entre les groupes au sein de la classe, vérifier si cette prise de conscience se traduit en savoir faire. Ils peuvent aussi suivre la maturation et l'appropriation d'aptitudes sociales de plus en plus affinées.
Il peut arriver, par exemple, qu'on observe au sein des groupes une incapacité initiale de collaborer et que l'on constate ensuite une évolution vers une répartition des tâches et une prise de responsabilités. Mais ceci peut se faire sans que pour autant les groupes se sentent concernés par l'ensemble des productions que rendra la classe : des groupes d'élèves pensent avoir trouvé la solution de leur problème et attendent tranquillement la fin des cinquante minutes, sans s'inquiéter de ce qu'ont fait les autres groupes, même si ces résultats sont affichés et attendent d'être contrôlés ou discutés. Ceci est souvent dû au fait que le groupe classe n'existe pas et qu'il n'y a que des groupes au sein de la classe, souvent en compétition entre eux.
Il est évident que la prise de conscience que l'on a des responsabilités vis-à-vis de la classe est un autre pas en avant, plus difficile et plus complexe qu'au sein du groupe. Il n'est pas aisé de créer un esprit de classe, et de considérer celle-ci comme une collectivité propre qui agit dans un même but. C'est un des objectifs qu'une bonne pratique du RMT peut permettre d'atteindre.
La discussion qui suit l'épreuve est le meilleur moment pour faire comprendre aux élèves qu'il ne suffit pas d'avoir rempli sa tâche au sein du groupe, mais qu'il faut encore travailler pour la classe. C'est alors, en réfléchissant sur les phases de contrôle des résultats, qu'on peut construire, progressivement, ce sens d'appartenance à la classe. Au-delà du travail au sein du groupe, on peut arriver à une meilleure coopération entre enfants dont les compétences sont différentes, à une plus grande tolérance vis-à-vis de ceux qui ne réussissent pas, à une responsabilisation de tous dans la tâche commune, à des attitudes et comportements qui sont aujourd'hui indispensables, bien que toujours moins présents dans la société actuelle.
Le sentiment d'appartenance permet de dépasser l'individualité pour avoir l'impression de «faire partie » d'une communauté dont on se sent tous responsables. C'est une aptitude difficile à acquérir et en devenir permanent, liée aux dynamiques à l'intérieur de la classe, dans laquelle il peut y avoir des progrès mais aussi des régressions. On ne doit donc pas s'étonner que la classe n'exprime pas toujours toutes ses potentialités, mais nous nous devons de favoriser la réflexion pour lui permettre de progresser.

Comportement du surveillant

Le surveillant ne doit pas être froid ou distant. S'il ne doit pas donner d'information ou répondre aux demandes des élèves, il peut cependant expliquer de manière amicale et sereine qu'il est là parce que la classe ne peut être laissée sans la présence d'un adulte mais qu'il ne peut répondre à aucune question. Un sourire ne suggère rien, mais peut servir à créer une atmosphère sereine et détendue.
Normalement, les enfants ne posent pas de questions, mais sont plutôt contents de pouvoir travailler ensemble, sans intervention de l'adulte. Pouvoir dire « nous nous débrouillons seuls » les flatte, entraîne leur sens des responsabilités et leur permet de se sentir grands.

L'exploitation des épreuves

Quand l'enseignant décide de faire la correction de l'épreuve, il peut procéder de plusieurs manières.
Tout d'abord, il n'est pas dit qu'il faille travailler sur tous les problèmes, ni avec la même intensité. Il faut au contraire que l'enseignant choisisse ceux qui entrent de plein droit dans son cheminement didactique. C'est à ces problèmes, « nécessaires » ou du moins utiles au programme de la classe qu'il consacrera du temps.
La donnée de la réponse à certains problèmes peut suffire. Ce sont les problèmes du genre casse-tête ou sudoku qui n'ont pas un contenu de grand intérêt du point de vue mathématique.
D'habitude, les groupes n'ont résolu qu'un seul problème, ou deux au maximum, durant l'épreuve. On peut imaginer qu'un groupe raconte aux autres élèves de la classe comment il a procédé dans la résolution

de son problème. On se trouve alors dans une situation frontale où l'engagement des enfants du groupe est maximum, mais celui des autres élèves est faible.
Une autre manière de procéder est de proposer le problème sous forme d'activité au niveau de la classe entière, suivie d'une mise en commun au cours de laquelle chacun peut intervenir. L'enseignant guide alors la discussion et l'oriente par des demandes ou des rappels de ce qui a été fait précédemment.
Ou, si l'enseignant juge que le problème est important, il le propose à toute la classe à l'exception du groupe qui l'a déjà résolu, qui sera occupé à une autre activité, selon des modalités proches de celle d'une épreuve du rallye. Au moment de la validation collective, tous les enfants se retrouveront dans les mêmes conditions et pourront participer à cette mise en commun
Ou encore, il peut arriver qu'un problème, potentiellement intéressant mais encore trop éloigné du programme en cours ou de ce que les élèves ont déjà étudié, soit mis en réserve et repris au moment voulu, lorsqu'il s'insérera naturellement dans l'étude d'un futur thème. Il ne faut pas craindre d'attendre cette opportunité. Il est préférable de ne pas « gaspiller » d'excellents problèmes par des exploitations hâtives ou superficielles, pour la simple raison qu'ils n'arrivent pas au bon moment dans le programme de classe.
La modalité d'exploitation d'un problème du RMT la plus fructueuse d'un point de vue didactique est comme pour tous les problèmes, la résolution sans intervention de l'enseignant suivie d'une phase de validation collective. La mise en évidence de solutions différentes permet soit de voir qu'un problème peut être résolu par diverses procédures toutes correctes – ce qui aide à comprendre que sa propre voie vers la solution n'est pas unique mais qu'il peut y en avoir d'autres – soit, en cas de solutions incorrectes, d'aller voir ce qu'il y a derrière les erreurs. C'est important pour les élèves de mettre en discussion des fausses croyances, des méprises ou, plus simplement, de découvrir des erreurs de calcul. De leur côté, les enseignants, à l'écoute des argumentations des groupes, peuvent évaluer la manière dont les élèves se sont appropriés des notions déjà abordées ou les idées qu'ils se font à propos de notions nouvelles et du chemin qu'il leur reste à faire pour pouvoir mettre en oeuvre efficacement les concepts en construction.
Une autre aptitude sociale apparaît à cette occasion : celle du contrôle des résultats. Là encore, il ne faut pas s'attendre à ce que les élèves la maîtrisent rapidement. Il arrive presque toujours qu'un groupe qui a bien fonctionné jusque là se retrouve réduit à un ou deux de ses membres au moment de la rédaction de la solution : pour les dessins, les calculs, la présentation des résultats et les explications. Dans ce cas, le problème n'en est plus un dès qu'on a trouvé une manière de le résoudre et certains membres du groupe considèrent alors que leur tâche est terminée. On ne peut prétendre que chacun résolve le problème pour son compte - ce qui ne serait plus un travail de groupe - mais on doit attendre une mise en place d'instruments de contrôle qui assurent que les résultats correspondent au problème. Ceci signifie qu'il faut trouver une organisation déterminant les capacités, responsabilités et les tâches au sein du groupe, où chacun apporte sa propre contribution.
Par exemple, le problème 18.I.13 *Monsieur Trapèze* demande la découverte de régularités dans la suite des nombres 2 ; 7 ; 14 ; 23 ; 34 ; 47 ; ... qu'il faut conduire jusqu'au 30^{e} terme. L'observation des copies montre que de nombreux groupes ont trouvé la régularité et l'ont exprimée correctement, mais que la coopération entre élèves a cessé au moment d'écrire la suite : 2 + 5 = 7 ; 7 + 7 = 14 ; 14 + 9 = 23 ; 23 + 11= 34 ; 34 + 13 = 47 ; ... Alors qu'il ne « s'agit plus que » d'effectuer une suite d'additions élémentaires, en général à l'aide d'une calculatrice, plus de la moitié de ces copies présente une ou deux erreurs, (de report, d'inattention, d'oubli d'un terme, de dénombrement des 30 termes, ...). Si plusieurs membres du groupe avaient effectué simultanément ces calculs simples, ils auraient décelé et corrigé les erreurs au fur et à mesure de leur apparition.
Le constat que le « bon résultat » qui aurait dû être obtenu a été gâché par des erreurs de calcul ou des oublis montre qu'il est nécessaire de s'engager jusqu'à la fin dans le travail de groupe, que la responsabilité partagée va au-delà du « travail intellectuel », qu'elle concerne également la transcription des résultats. C'est au cours de discussions en classe ou avec chacun des groupes, à propos des erreurs commises que, peu à peu, les élèves pourront « mesurer » le niveau de leur coopération dans une résolution collective qui, pour être améliorée exige des validations, des contrôles et un engagement de chacun.

ALLEGATO I

Obblighi degli insegnanti che desiderano partecipare all'RMT

Il RMT non è una gara

Per partecipare, bisogna condividere la concezione di apprendimento che è alla base del lavoro del RMT

Niente obbliga a partecipare al RMT

1. Adesione agli scopi e obiettivi del RMT

L'iscrizione al RMT deve essere fatta sulla base di un'informazione chiara, diffusa dalle sezioni, riguardante gli obiettivi ricordati precedentemente, molto esplicita per gli insegnanti.
Questa informazione deve essere ripetuta di anno in anno, e rinnovata, per evitare le iscrizioni di "massa" sulla base di informazioni parziali o di routine.
Si tratta, innanzi tutto, di evitare le ambiguità dovute al fatto che il RMT può essere considerato esclusivamente sotto l'aspetto di una "gara" (per quelli che non cercano che la classificazione della loro classe o la propria posizione rispetto a quella del collega) o sotto l'aspetto "divertimento" (per quelli che cercano solo occasioni per rompere la monotonia delle loro lezioni di matematica).
Ogni insegnante dovrà, quindi, essere consapevole che il proprio compito non si limiterà ad organizzare lo svolgimento e ad inviare le copie, ma che dovrà dedicare del tempo, dopo ogni prova, alla discussione con gli allievi e all'utilizzo dei problemi nell'ambito del proprio insegnamento.

2. La prova d'allenamento

La prova d'allenamento è obbligatoria per tutti, insegnanti e allievi, anche se la classe ha già partecipato alle edizioni precedenti del RMT. Questa prova deve essere seguita da una discussione sul suo andamento, in modo da prendere una decisione circa la partecipazione della classe.

3. L'iscrizione

Sono l'insegnante e gli allievi che, di comune accordo, decidono se partecipare o no al RMT. L'iscrizione è considerata un impegno a fare le prime due prove (senza abbandonare in caso di risultati poco incoraggianti alla prima prova).
L'iscrizione significa che l'insegnante e gli allievi s'impegnano a rispettare le regole di svolgimento delle prove.
L'insegnante deve, in particolare, assicurarsi di trovare una persona neutrale per la sorveglianza nelle due prove, che si svolgeranno nelle date previste dalla sezione.
Si consigliano le sezioni di far accompagnare il modulo d'iscrizione da domande del genere: ha preso conoscenza delle regole di svolgimento delle prove e le accetta? Chi ne sorveglierà lo svolgimento? È disposto a partecipare alle correzioni?

4. Lo svolgimento della prova e l'invio delle copie

Prima della prova, l'insegnante ricorda le consegne di svolgimento ai suoi allievi e si preoccupa che abbiano a disposizione il materiale necessario (carta, matite, forbici, colla, calcolatrice, strumenti elementari di disegno geometrico).
Non si ha il diritto di guardare i problemi prima dello svolgimento né di comunicarli ai propri allievi né ad alcun altra persona.
La formazione dei gruppi, se avviene prima della prova, è esclusivamente a carico degli allievi.
L'insegnante è obbligatoriamente assente durante la prova.
Il suo sostituto o il sorvegliante si deve astenere da qualunque commento durante la prova: non deve rispondere alle domande degli allievi, che conoscono le consegne, non suggerisce agli allievi che hanno "finito" di aiutare i gruppi ancora al lavoro, non disturba la riflessione dei gruppi con gesti o un'attenzione troppo sostenuta al loro lavoro, non incoraggia né scoraggia nessuno ... Rimane neutrale e passivo. Il suo ruolo si limita ad essere presente per garantire l'incolumità degli allievi e degli arredi, a consegnare tutti gli enunciati alla classe, a raccogliere un foglio-risposta per problema dopo 50 minuti. Può ricordare lo scadere del tempo da 5 a 10 minuti prima della fine della prova.

Gli allievi si dividono i problemi, si aiutano fra loro se lo reputano necessario, redigono le soluzioni e ne scelgono una per problema, per la classe.
L'insegnante, o il sorvegliante, invia i fogli-risposta degli allievi per la correzione, dopo averli fotocopiati, in previsione della discussione che seguirà la prova.
È evidente, ma va segnalato, visto l'alto numero d'infrazioni rilevate qua e là, che l'insegnante non sceglie la copia migliore da inviare nel caso in cui ce ne fossero diverse, (se arrivano due copie, per sbaglio, ai correttori, viene scelta quella che ottiene il punteggio più basso), non fa alcun ritocco né chiede ai propri allievi di fare correzioni, né redige lui stesso parti della risposta.

5. Dopo la prova

L'insegnante riprende un ruolo attivo dopo la prova secondo le modalità da lui scelte. Per esempio:

- Discussione collettiva sullo svolgimento, la collaborazione all'interno dei gruppi, la collaborazione fra gruppi, le fasi di validazione "collettiva".
  A proposito della validazione “collettiva”, si nota sistematicamente, durante la finale, che questa validazione non c'è stata o è stata fatta molto male: quando un gruppo ha fornito la propria soluzione e i suoi membri hanno la sensazione di aver compiuto il proprio dovere, si disinteressano del lavoro degli altri gruppi, come se non fossero affatto responsabili. Una soluzione chiaramente sbagliata può essere lasciata sul banco per una quindicina di minuti, alla vista di tutti, senza che nessuno degli allievi disoccupati se ne interessi e la rimetta in dubbio. Questa necessità di una validazione "collettiva" non può nascere spontaneamente, soprattutto se è l'insegnante che ha formato i gruppi e affidato a ciascuno di loro la risoluzione di un problema. Questa necessità non può che emergere da una discussione critica animata dall'insegnante.
- Risoluzione di certi problemi da parte di altri allievi, discussione delle soluzioni e delle strategie.
- Utilizzazione dei problemi nel percorso didattico della classe per valutazioni, per lavori individuali ...

6. Informazioni di ritorno

Il Comitato di gestione suggerisce alle sezioni di far riempire agli insegnanti delle classi partecipanti un questionario (delle esperienze ci sono state e hanno dato informazioni interessanti: vedi F. Jaquet, *L'évolution de l'utilisation en classe des problèmes du Rallye / L'evoluzione dell'utilizzazione in classe dei problemi del Rally* Atti Parma 2001 e Torre delle Stelle 2002, pp. 35 - 52) sullo svolgimento delle prove nella loro classe, precisando il giorno e l'ora dello svolgimento, il nome del sorvegliante, le modalità di formazione dei gruppi, le analisi collettive dopo la prova, i livelli d'esplorazione dei problemi in classe, il giudizio sui problemi dal punto di vista del loro interesse didattico. Questi resoconti, senza essere inquisitori, sono mezzi per saperne di più sull'accoglienza e sugli effetti delle nostre prove nelle classi e nell'insegnamento della matematica in generale. Servono anche a ricordare le regole del RMT e sollecitano a rispettarle. Infine, sono un veicolo supplementare di comunicazione fra gli animatori e gli insegnanti e allievi.

7. Partecipazione alle attività della sezione

Gli insegnanti devono essere sollecitati a partecipare alle correzioni delle prove, all'elaborazione dei problemi, alle analisi dei risultati e alle altre attività organizzate dalla sezione.
L'elenco precedente fa capire che il RMT non è organizzato per tutti gli insegnanti ma soltanto per alcuni di loro. Per iscriversi, bisogna condividere i principi didattici che sottendono al Rally sull'importanza dei problemi nell'apprendimento, sulle capacità degli allievi a organizzarsi in maniera autonoma, sulle attese riposte nella fase di validazione delle soluzioni, in gruppo o fra gruppi d'allievi. Bisogna accettare di impegnarsi in un progetto collettivo, portandovi il proprio contributo personale in cambio di apporti ricevuti dagli altri.

ANNEXE II

Obligations des maîtres qui désirent participer au RMT

Le RMT n'est pas une compétition
Pour participer, il faut partager les conceptions de l'apprentissage qui sous-tendent le travail du RMT
Nul n'est obligé de participer au RMT

I. Adhésion aux buts et objectifs du RMT

L'inscription au RMT doit se faire sur la base d'une information très claire, diffusée par les sections, concernant les objectifs rappelés précédemment, très explicites pour les maîtres.
Cette information doit être répétée d'année en année, et renouvelée, pour éviter les inscriptions de « masse » sur la base de renseignements partiels ou de routine.
Il s'agit avant tout d'éviter les ambiguïtés dues au fait que le RMT peut être considéré sous l'aspect exclusif d'une « compétition » (pour ceux qui ne recherchent que le classement de leur classe ou sa position par rapport à celle de leur collègue) ou sous l'aspect « divertissement » (pour ceux qui ne recherchent que des occasions de rompre la monotonie de leur enseignement des mathématiques).
Chaque maître devra donc être conscient que sa tâche ne se limitera pas à organiser la passation et à renvoyer les copies, mais qu'il devra consacrer du temps après chaque épreuve à un débat avec les élèves et à une exploitation des problèmes dans le cadre de son enseignement.

2. L'épreuve d'essai

L'épreuve d'essai est obligatoire pour tous, maîtres et élèves, même si la classe a déjà participé aux éditions précédentes du RMT. Elle doit être suivie d'une discussion sur son déroulement, permettant de prendre une décision à propos de la participation de la classe.

3. L'inscription

Ce sont le maître et les élèves qui, d'un commun accord, décident de participer ou non au RMT. Une inscription est considérée comme un engagement à faire les deux premières épreuves (sans abandonner en cas de résultats peu encourageants à la première épreuve).
L'inscription signifie que le maître et les élève s'engagent à respecter les règles de déroulement des épreuves.
Le maître doit en particulier s'être assuré qu'il trouvera une personne neutre pour surveiller les deux épreuves, qu'elles pourront se dérouler aux dates prévues par la section.
Il est conseillé aux sections de faire accompagner le formulaire d'inscription de quelques questions du genre : avez-vous pris connaissance des règles de passation des épreuves et les acceptez-vous ? Quelle personne surveillera la passation ? Êtes-vous disposé à participer aux corrections ?

4. La passation de l'épreuve et le renvoi des copies

Avant l'épreuve, le maître rappelle les consignes de passation à ses élèves et veille à ce qu'ils disposent du matériel nécessaire (papier, crayons, ciseaux, colle, calculatrice, instruments élémentaires de dessin géométrique…)
Il n'a pas le droit de prendre connaissance des problèmes avant la passation ni de les communiquer à ses élèves ni à d'autres personnes.
La formation des groupes, si elle a lieu avant l'épreuve est exclusivement à la charge des élèves.
Le maître est obligatoirement absent durant l'épreuve.
Son remplaçant ou le surveillant doit s'abstenir de tout commentaire durant l'épreuve : il ne répond pas aux questions des élèves, qui connaissent les consignes, il ne propose pas aux élèves qui ont « fini » d'aider les groupes encore au travail, il ne perturbe pas la réflexion des groupes par des mimiques ou une attention trop soutenue à leur travail, il n'encourage ni ne décourage personne ... Il reste neutre et passif.
Son rôle se limite à être présent pour garantir la sécurité de chacun et du mobilier, donner l'ensemble des énoncés à la classe, ramasser une feuille réponse par problème après 50 minutes. Il peut rappeler l'heure 5 à 10 minutes avant la fin de l'épreuve.

Les élèves se répartissent les problèmes, s'entraident s'ils l'estiment nécessaire, rédigent les solutions et en choisissent une par problème, pour la classe.
Le maître, ou le surveillant, renvoie les feuilles réponses des élèves pour la correction, après les avoir photocopiées en vue de la poursuite du travail dans la classe, qui suivra l'épreuve.
Il est évident, mais on doit le signaler vu le nombre élevé d'infractions relevées ci et là, que le maître ne choisit pas la meilleure copie à renvoyer au cas où il y en aurait plusieurs, (si deux copies parviennent, par accident, aux correcteurs, c'est celle qui obtient le moins de points qui sera choisie). Le maître ne fait aucune retouche ni ne demande à ses élèves d'effectuer des rectifications, ne rédige pas lui-même des parties réponses.

5. Après l'épreuve

Le maître reprend un rôle actif après l'épreuve selon les modalités de son choix. Par exemple :

- Débat collectif sur le déroulement, la coopération au sein des groupes, la coopération entre groupes, les phases de validation « collective ».
  Par exemple, on constate systématiquement, lors des finales, que cette validation ne s'effectue pas ou très mal : lorsqu'un groupe a rendu sa solution et que ses membres ont le sentiment d'avoir accompli leur devoir, ils se désintéressent du travail des autres groupes, comme s'ils se sentent nullement responsables du travail des autres. Une solution manifestement erronée peut être déposée sur le pupitre après une quinzaine de minutes à la vue de tous sans qu'aucun des élèves désoeuvrés ne s'y intéresse et ne la remette en doute. Cette nécessité d'une validation « collective » ne peut pas naître spontanément, surtout si c'est le maître qui a formé les groupes et confié à chacun d'eux la résolution d'un problème. Elle ne peut émerger que d'un débat critique animé par l'enseignant.
- Résolution de certains problèmes par d'autres élèves, discussion des solutions et des stratégies.
- Exploitation des problèmes dans le cheminement didactique de la classe, pour des évaluations, pour des travaux individuels ...

6. Informations en retour

Le Comité de gestion suggère aux sections de faire remplir aux maîtres des classes participantes un questionnaire (des expériences ont donné des informations intéressantes : (voir F. Jaquet, L'évolution de l'utilisation en classe des problèmes du Rallye / L'evoluzione dell'utilizzazione in classe dei problemi del Rallye Actes Parma 2001 et Torre delle Stelle 2002, pp. 35 - 52) sur le déroulement des épreuves dans leur classe, précisant le jour et l'heure de passation, le nom du surveillant, les modalités de formation des groupes, les mises en commun après l'épreuve, l'exploitation des problèmes en classe, des jugements sur les problèmes du point de vue de leur intérêt didactique. Ces compte-rendus, sans être inquisitoires, sont des moyens d'en savoir plus sur l'accueil et sur les effets de nos épreuves dans les classes et dans l'enseignement des mathématiques en général. Ils rappellent aussi les règles du RMT et incitent à les respecter. Ils sont finalement un vecteur supplémentaire de communication entre les animateurs, les maîtres et élèves.

7. Participation aux activités de la section

Les maîtres doivent être incités à participer aux corrections des épreuves, à l'élaboration des problèmes, aux analyses des résultats et aux autres activités organisées par la section.
L'inventaire précédent montre que le RMT n'est pas organisé pour l'ensemble des maîtres mais pour certains d'entre eux seulement. Pour s'y inscrire, il faut partager les conceptions didactiques qui sous-tendent le Rallye sur l'importance des problèmes dans l'apprentissage, sur les capacités de élèves à s'organiser de manière autonome, sur les espoirs placés dans les phases de validation des solutions, en groupe ou entre groupes d'élèves. Il faut accepter de s'engager dans une entreprise collective en y apportant sa contribution personnelle en échange des apports reçus des autres.

EVOLUZIONE DEI LEGAMI FRA RMT E RICERCA NEL CORSO DEGLI INCONTRI INTERNAZIONALI DEL RMT[7]

Lucia Grugnetti[8]

coordinatrice internazionale dell'ARMT

Résumé

Le but de cette article est de revisiter le chemin parcouru à partir de la première rencontre internationale du RMT qui s'est déroulée à Brigue (Suisse) en automne 1997 sur le thème des apports du RMT à la didactique des mathématiques et il propose une analyse des liens entre le RMT et la recherche en didactique des mathématiques ; liens qui ont toujours été la trame (de manière explicite parfois) de l'action du RMT depuis son origine.

Sunto

L'articolo ha lo scopo di ripercorrere il cammino svolto a partire dal primo incontro internazionale del RMT, svoltosi a Brigue (Svizzera) nell'autunno del 1997, sul tema degli apporti del RMT alla didattica della matematica e propone un'analisi dei possibili nessi fra il RMT e la ricerca in didattica. Nessi che peraltro sono sempre stati i presupposti (talvolta anche esplicitati) dell'attività del Rally Matematico Transalpino.

1. Introduzione

Sin dall'inizio, il Rally matematico, all'origine romando e poi divenuto transalpino, non era stato concepito per rivestire soltanto come una gara. Già a partire dalla sua prima edizione, due importanti caratteristiche lo hanno distinto da altre gare basate sulla risoluzione di problemi. L'una si trova negli enunciati stessi dei problemi che richiedono sempre un'esplicitazione delle procedure seguite per risolverli, e l'altra in quella parte, denominata "analisi a priori", che accompagna ogni problema con l'intento di evidenziare sia i contenuti matematici sia le possibili procedure degli allievi, contemplando altresì gli eventuali ostacoli cognitivi, le rappresentazioni e le concezioni che esse sottintendono.
Questi aspetti, che costituiscono già un primo legame tra il RMT e la ricerca in didattica, si sono evoluti nel tempo, in diverse direzioni, le analisi sintetiche delle quali sono l'oggetto del presente articolo. Gli atti degli incontri internazionali annuali del RMT costituiscono la testimonianza di questo cammino multiforme.

2. I primi passi con e verso la ricerca

Vol. I (Incontri di Brigue, 1998 /1999) *Il Rally matematico transalpino: quali apporti per la didattica?*

In questo volume degli atti, l'interesse è dapprima centrato sulle opportunità che offre la gara e, in particolare, sulla condivisione da parte di allievi e insegnanti degli obiettivi che il RMT si prefigge.
Si tratta di aspetti che potremmo considerare di tipo metacognitivo: motivazione a risolvere problemi, imparare a lavorare in gruppo... . *Credo che il lavoro di gruppo nello svolgimento di problemi matematici si possa considerare per la nostra scuola una novità assoluta proposta dal Rally. Il lavoro in ambito matematico, infatti, è stato da sempre presentato agli alunni come un'attività da svolgere esclusivamente a livello individuale.*
Occorre anche sottolineare che si tratta di un ***vero*** *lavoro di gruppo, cosa che non sempre si può dire di altre attività, che vengono definite nello stesso modo, ma che spesso sono semplicemente dei "collages" che si limitano ad unire parti di lavoro svolte individualmente da vari alunni.* (C. Mazzoni)

---

[7] Quest'articolo completa e attualizza l'articolo pubblicato in ATTI DELLE GIORNATE DI STUDIO SUL RMT (Vol. 7, 11° incontro). *RMT fra pratica e ricerca in didattica della matematica / RMT entre pratique et recherche en didactique des mathématiques*, Bard (Valle D'Aosta) 2007, L. Grugnetti, F. Jaquet, G. Bellò, R. Fassy, G. Telatin (Eds.), Centro risorse per la Didattica della Matematica, Sezione ARMT della Valle d'Aosta, ARMT, 77-89.

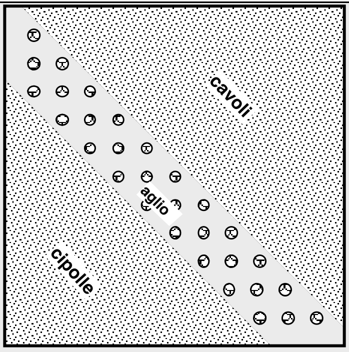
[8] lucia.grugnetti@unipr.it

Nella seconda parte del volume, l'interesse si sposta su aspetti di tipo cognitivo, a partire dall'analisi a posteriori di alcuni problemi con riferimento alle strategie di risoluzione dei gruppi di allievi, nonché alle difficoltà e agli errori più frequenti, con riferimento alla ricerca in didattica della matematica sugli argomenti in oggetto.
Tali analisi potrebbero fornire dati utili alla ricerca in didattica, in particolare, per la possibilità di mettere a confronto **numerosi elaborati** di classi **di livelli scolari diversi** che risolvono **il medesimo problema**. Ne è un chiaro esempio il lavoro di F. Jaquet, dal titolo *Entre arithmétique et géométrie.*

Si tratta dell'analisi del problema "L'orto di nonna papera" (Le potager de grand-mère) :

L'orto di Nonna Papera (6° RMT, I prova, problema n. 2, per le categorie 3, 4)
Questo è l'orto di forma quadrata che Nonna Papera ha dietro casa. Ha già piantato 30 piantine di aglio e vuole coltivare cavoli e cipolle nelle zone vicine.
Lei è sempre molto ordinata e precisa: le piantine del suo orto devono essere allineate e disposte in modo regolare.

Quante piantine di cavolo e quante di cipolla dovrà piantare?
Spiegate il vostro ragionamento.



L'analisi di 83 elaborati di classi italiane e svizzere, ha consentito di raggruppare le risposte in sei categorie (indicate con le lettere da A ad F), che vanno dalla non risposta, alla risposta basata su considerazioni numeriche, in generale senza disegno, ai tentativi di disposizioni regolari, al ricorso a procedure moltiplicative, a disegni basati su strutture geometriche instabili e, infine, alla coordinazione efficace tra la struttura geometrica e le operazioni aritmetiche.
Un'analisi fine degli elaborati, suddivisi nelle sei categorie di risposta, consente all'autore di dire che:
Si constata l'evoluzione importante che si produce tra la terza e la quarta elementare sul piano dei concetti di allineamento (retta), di rette parallele e di equidistanza. Anche se non abbiamo condotto uno studio statistico delle categorie di risoluzione, è possibile constatare una riuscita più elevata in quarta che in terza (Cat. F. riuscita completa: 18 classi di quarta su 55 cioè il 33 % contro 6 classi di terza su 28, cioè il 21% - Cat A e B, incomprensione del problema: il 20 % in quarta contro il 39 % in terza).

3. l'intreccio con la ricerca si evolve

Vol. II (Incontri di Siena e Neuchâtel, 1999/2000) *Evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici*

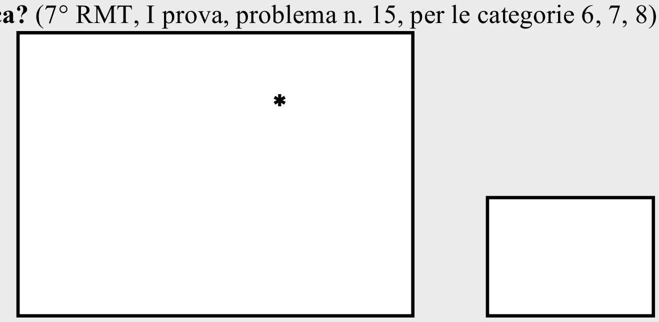
In questi atti si trova un primo tentativo di analizzare i possibili rapporti del RMT con la teoria delle situazioni didattiche. Tale tematica è affrontata da C. Tièche Christinat che interpreta il RMT come una sorta di situazione a-didattica, che si sviluppa in due tempi.
Nel caso del rally matematico, e per ogni situazione problema, possiamo considerare due tempi distinti. In un primo tempo, il problema è interamente devoluto agli allievi che non possono solo far ricorso a conoscenze precedenti, ma devono adattarle al problema. Devono far un lavoro cognitivo importante che permetta loro sia di attribuire al "milieu" certe caratteristiche che li autorizzano ad applicare uno schema o un teorema in atto (Vergnaud, 1996)[9]*, ma che allo stesso tempo il "milieu" per retroazione resiste ad un'applicazione analogica ed esige per la risoluzione una trasformazione, una ricostruzione, delle strategie e delle procedure che resistono. Inoltre, la situazione d'interazione nella quale si trovano gli allievi necessita di una mediazione delle loro conoscenze, così come di una loro messa in gioco nel gruppo al fine di scegliere la soluzione che permette di ottenere, agli occhi della classe, più punti possibile. Quanto all'insegnante, egli non può permettersi nessuna retroazione - solo il "milieu" e il gruppo di allievi possono giocare tale ruolo -; peraltro non può fornire nessuna regolamentazione favorevole all'emergere dell'incontro con l'oggetto matematico, cosa che differisce in maniera considerevole da una situazione d'insegnamento.*

[9] 'La théorie des champs conceptuels', In Brun, J. (sous la dir. De), *Didactique des mathématiques* (pp. 197-242), Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris.

In un secondo tempo, cronologicamente separato, l'insegnante riprende la situazione problema in classe e utilizza le procedure degli allievi per integrarle negli obiettivi matematici come, ad esempio, il procedimento scientifico o in obiettivi matematici in relazione con altre situazioni problema. Ora, nella teoria delle situazioni matematiche, la situazione a-didattica è pensabile solo nell'ambito di una situazione didattica, in essa inclusa e che intrattiene con questa un rapporto dialettico.
Nel caso del rally, questa dialettica si attua in maniera diversa in una successione temporale più ampia, che include luoghi didattici differenti.

Gli atti evidenziano anche l'interesse per alcune questioni basilari relative all'apprendimento della matematica come quelle che riguardano l'introduzione dell'idea di funzione (con riferimento ad alcuni problemi del RMT) e di dimostrazione (con riferimento, in particolare al problema *L'eredità*) e, infine, a considerazioni più strettamente connesse a procedure risolutive di due problemi quali *Il rapimento di Jasmine* e *Il mercante di seta*.
La seconda parte degli atti riporta inoltre i risultati di lavori di gruppo imperniati sull'analisi di problemi e dei relativi elaborati degli allievi di diversi paesi che hanno partecipato alla settima e all'ottava edizione del RMT, nell'ottica del cercare di definire meglio i tipi di saperi messi in gioco dai problemi del RMT.
Le analisi a posteriori, condotte dai gruppi di lavoro, possono "offrire" alla ricerca in didattica risultati ricchi dal punto di vista della numerosità e della provenienza da paesi differenti caratterizzati da sistemi scolari differenti.
Un esempio in questo senso viene dal gruppo coordinato da L. Doretti, M. Dorsaz, A. Peix, M. G. Rinaldi e che riporta le analisi delle strategie usate nella risoluzione di un problema sulla similitudine.
Il problema in oggetto ha per titolo *Dove si posa la mosca?*

Dove si posa la mosca? (7° RMT, I prova, problema n. 15, per le categorie 6, 7, 8)



Il rettangolo di destra è la fotografia del grande rettangolo di sinistra.
Nel momento in cui la fotografia è stata scattata, una mosca si è posata sul rettangolo grande.
Il fotografo però quando ha stampato la fotografia l'ha cancellata.
Rimettete la mosca al posto giusto sulla foto.
Spiegate come avete proceduto.

L'analisi di 234 elaborati della Svizzera romanda e di alcune sezioni italiane conduce alle seguenti considerazioni:
Ai livelli 7 e 8 si sente l'influenza del contratto didattico che impone l'uso di strumenti matematici conosciuti e sembra perdere importanza il ruolo dell'intuizione... Dal confronto fra gli elaborati svizzeri e quelli italiani... si evidenzia un'attenzione maggiore per le costruzioni geometriche con riga, squadra e compasso (riporto di angoli, disegno di rette parallele, costruzione di segmenti proporzionali) nei protocolli svizzeri rispetto a quelli italiani nei quali si privilegia, invece, nettamente la via aritmetica.
Va sottolineato che le strategie di risoluzione del problema, evidenziate dall'analisi a posteriori, sono state particolarmente numerose e interessanti anche per la ricerca:

- procedure numeriche che consistono nell'uso del coefficiente di proporzionalità, nella determinazione del coefficiente calcolato su una sola dimensione, del coefficiente calcolato su lunghezza e larghezza, del coefficiente calcolato sulle aree ed applicato alle lunghezze, sull'idea intuitiva di un coefficiente valutato approssimativamente ed applicato alle lunghezze, sull'uso delle proporzioni, sull'uso di un rapporto di linearità;
- procedura mista aritmetica e geometrica, in cui il procedimento è descritto per via aritmetica, dopo aver eseguito le opportune misurazioni;

- procedure prettamente geometriche che riguardano la conservazione degli angoli, il riporto di angoli o conservazione per parallelismo dei lati, l'idea intuitiva di conservazione degli angoli attraverso la conservazione di un'inclinazione, l'uso dell'omotetia e del teorema di Talete;
- procedure per approssimazioni successive che vengono effettuate con triangolazioni, con quadrettatura, con suddivisioni sempre più raffinate;
- procedure che fanno ricorso alla manipolazione nelle quali il rettangolo piccolo viene considerato come porzione del grande e si effettuano delle sovrapposizioni o dei ricoprimenti.

A tali procedure va aggiunta quella dell'individuazione della posizione della mosca "ad occhio".

4. Si va verso l'apprendimento passando anche per la formazione

Vol. III (Incontri di Parma e Torre delle Stelle, 2001/2002) RMT: potenzialità per la classe e per la formazione

In questi atti vengono evidenziate le luci e qualche ombra dell'uso del RMT in classe e nella formazione. Ci si potrebbe porre la domanda "I problemi del RMT in classe e/o nella formazione sono una **«medicina per tutti i mali»**?" e cercare poi di rispondere sulla base delle ricerche svolte in tale ambito.

Per quanto riguarda la formazione, un aspetto in particolare sembra emergere: l'importanza del RMT per l'innovazione, in linea con le indicazioni di organismi ufficiali italiani e francesi.

In particolare, N. Iesu, nell'analizzare il ruolo del RMT nella programmazione didattica della scuola primaria, sottolinea che *Il RMT può avere il ruolo di "iniziazione" ad una pratica didattica innovativa,* all'unisono con A. Rizza e V. Vannucci (nella loro veste di collaboratori della SSIS di Parma) secondo le quali *in un percorso formativo, i problemi del RMT possono svolgere un ruolo importante soprattutto per promuovere l'innovazione didattica.*

Per quel che riguarda la Francia, G. Combier scrive che *insegnanti e ispettori di scuola elementare hanno esposto il loro desiderio di avere un corso avente come obiettivo quello di sfruttare la dinamica indotta dalla partecipazione al RMT per sviluppare pratiche d'insegnamento che accordino alla risoluzione di problemi il posto centrale che dovrebbe competerle nella costruzione del sapere, come indicano le Istruzioni Ufficiali. E' nata da questo tale proposta di formazione.*

Per quanto riguarda l'insegnamento, C. Crociani, L. Doretti, L. Salomone, evidenziano che il Rally è stato per gli insegnanti un'occasione per riflettere sulla matematica, sul suo insegnamento e sull'allievo, con particolare attenzione a contenuti, metodi, obiettivi e criteri di valutazione. *Ha influito sui contenuti ed è stata avvertita l'esigenza di:*

- *dare più spazio ad argomenti non trattati o affrontati in modo poco approfondito come combinatoria e trasformazioni geometriche;*
- *sollecitare, nell'attività di risoluzione di problemi, l'uso di vari tipi di rappresentazione come tabelle, grafi ad albero e disegni;*
- *stimolare con situazioni problematiche significative le capacità logico-deduttive degli allievi.*

G. Telatin, da parte sua, in un articolo dal titolo emblematico, *Uso dei problemi del Rally in classe: punti forti e punti deboli*, dopo aver analizzato l'uso che ha fatto di problemi del RMT in classe, dice: *(...) Non ho certo abbandonato i problemi del rally, ma non li ho più visti come la medicina che avrebbe dovuto risolvere tutti i mali; quando li ho utilizzati, ogni problema è stato scelto, legandolo alle attività della classe.*

I problemi sono degli strumenti molto potenti e vanno somministrati come e quando la situazione lo richiede.

Questo articolo, critico ma costruttivo al contempo, evidenzia peraltro l'importanza di una ricerca condotta quotidianamente dagli insegnanti, da soli o in piccoli gruppi, che cercano di agire sull'apprendimento dei loro allievi.

Come i ricercatori "istituzionali", tali insegnanti osservano e mettono in evidenza fenomeni di insegnamento e di apprendimento, **ma da un punto di vista che dipende in particolare dai vincoli della gestione della classe, in un'ottica di ricerca-azione.**

In questo terzo volume degli atti, si riaffaccia anche l'aspetto del legame del RMT con le situazioni didattiche.

L. Grugnetti e M. G. Rinaldi si chiedono se sia sempre possibile il passaggio dai problemi del RMT alle situazioni didattiche, sottolineando l'esigenza di individuare, per ogni problema del RMT quale sia **il suo possibile ruolo** nella pratica della classe.

Tale ruolo dipenderà da diversi fattori dal contratto didattico instaurato (implicitamente o meno), dalle potenzialità intrinseche del problema in gioco connesse ai suoi contenuti matematici e alla scelta delle variabili didattiche, dalle sue potenzialità estrinseche connesse al livello della classe e alla sua gestione e così via.
In virtù delle regole della gara, l'insegnante, assente dalla classe, non può intervenire. In un secondo tempo, cronologicamente separato, l'insegnante può riprendere la situazione-problema in classe… I problemi del RMT diventano così parte integrante del sistema didattico messo in opera nelle sequenze d'insegnamento, questo se l'insegnante decide di riprendere in tal senso i problemi del RMT.
Pensiamo pertanto che alcuni problemi del RMT possano giocare il ruolo di situazioni adidattiche volte all'acquisizione di determinate conoscenze, nell'ambito di una situazione didattica più generale che le contenga. L'allievo può così costruire il proprio sapere, non a partire da un "sapere sapiente" che viene in qualche modo imposto dalla catena programmi scolastici - libri di testo - insegnante, ma a partire da situazioni-problema che implicitamente richiedono il concetto che si vuole far emergere.
Altri possono, in maniera "più modesta", essere ripresi in classe, al di là del Rally, per analizzare "le conoscenze che mobilizzano" (Julo, 1995)[10].
Al fine di costruire nuove conoscenze ci sembrano più facilmente utilizzabili in tal senso i problemi del RMT di tipo geometrico in quanto le eventuali procedure per tentativi o tramite misurazioni non sono "certe", bisogna andare oltre, mentre in problemi di tipo aritmetico o ad essi assimilabili, le procedure per tentativi "possono" dare un risultato "certamente corretto". Ciò non toglie che alcuni di essi consentano, se utilizzati opportunamente, di costruire nuove conoscenze.
Un discorso particolare meritano i problemi di tipo logico che costituiscono una classe di situazioni atte a sviluppare la capacità di ragionamento.
Fra gli altri, viene analizzato nell'ottica appena esposta, il problema più sopra riportato "Dove si posa la mosca" e viene precisato che *sembra particolarmente interessante, nel caso di questo problema, la fase di discussione in classe sulle diverse procedure messe in atto dagli allievi della classe, ma anche sulle procedure usate dalle classi impegnate nel rally.*
Un'attività in classe sviluppata a partire dal confronto di diverse strategie risolutive: dalle strategie che portano a trovare "più o meno dove si trova la mosca" ("più o meno" dovuto in generale a misurazioni empiriche), a quelle che consentono di trovare effettivamente "dove si trova la mosca", può costituire un terreno fertile per avviare la costruzione di una nuova conoscenza (omotetia, ad esempio) che permette di risolvere in maniera "ottimale" il problema.

5. Sulla valutazione

Vol. IV (Incontro di Mondorf-Les Bains, 2003) *RMT e valutazione*

Per quanto riguarda questo volume degli atti, si potrebbe pensare ad una sorta di percorso **dalla Ricerca al RMT** e **ritorno**.
È ben noto che, quando si parla di valutazione, si pensa in prima istanza alla valutazione degli allievi, che si tratti di valutazione sommativa, formativa o predittiva. Ma le prove del RMT si indirizzano a classi intere, classi che per la maggior parte si organizzano in gruppi e che i risultati sono analizzati solo sulla base degli elaborati. Non è dunque possibile pensare di valutare, tramite gli elaborati ricevuti, competenze o conoscenze individuali.
Per contro, gli elaborati forniscono informazioni molto ricche sui problemi proposti, sugli ostacoli incontrati e sulle modalità di risoluzione a seconda delle età degli allievi e dei contesti regionali o nazionali, ...
Inoltre, le persone "neutrali" che controllano le classi durante lo svolgimento della prova, e gli insegnanti in un secondo tempo, nella fase di utilizzo dei problemi in classe, possono raccogliere informazioni complementari sulla maniera in cui gli allievi si organizzano, sulle interazioni in seno alla classe e su molti altri aspetti del lavoro di gruppo.
Questa massa di osservazioni accumulate nel corso degli anni costituisce una sorgente di dati da utilizzare nei diversi ambiti della valutazione.
È tenendo conto di tali osservazioni che i partecipanti al convegno si sono confrontati sulla traccia di alcuni sottotemi qui dettagliati:

---

[10] p. 6 Résoudre un problème c'est d'abord mobiliser des connaissances. (Julo, J.: 1995, *Représentation des probèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*, PUR.)

1) Valutazione dei problemi: saperi matematici richiesti per la loro risoluzione, caratteristiche dei loro enunciati, potenzialità di valutazione delle procedure di risoluzione, ostacoli, variabili didattiche, ...
2) Valutazione delle strategie di risoluzione: grado di efficacia, registro delle rappresentazioni, ...
3) Valutazione formativa: competenze nella mobilizzazione delle conoscenze, identificazione di lacune, analisi degli errori, ...
4) Valutazione delle giustificazioni o delle validazioni per l'attribuzione dei punteggi.
5) Valutazione delle capacità di dibattito scientifico in seno ai gruppi o tra gruppi.
6) Valutazione delle capacità di organizzazione della classe.
7) Valutazione del contributo delle prove del RMT allo sviluppo delle competenze matematiche richieste attualmente da progetti nazionali e internazionali.
8) Valutazione delle ricadute didattiche e pedagogiche del RMT sia sugli allievi che sugli insegnanti.

R. Charnay, nel suo articolo dal titolo significativo *L'évaluation et ses pièges (La valutazione e i suoi tranelli)* sottolinea l'importanza, nel parlare di valutazione, dell'intendersi sulla questione delle competenze, di cui ricorda, **a partire dalla ricerca in didattica**, tre diverse definizioni per passare poi a proporre una corrispondenza tra le tre definizioni e tre compiti propri del RMT. Arriva a concludere che *Il rally non ha evidentemente la vocazione di consentire una valutazione delle competenze degli allievi. Esso costituisce comunque una sorgente importante di informazioni sul comportamento, le conoscenze e le competenze degli allievi, in un contesto particolare. L'attribuzione dei punteggi che è effettuata in funzione di criteri determinati e che possono evidentemente essere messi in discussione, la classifica che viene stilata sulla base delle prove di selezione rafforzano questo orientamento valutativo del rally, nella direzione di una valutazione che è molto diversa da quella che è presentata qui. Questo intervento aveva un solo obiettivo: renderci prudenti riguardo alla questione della caratterizzazione e della valutazione delle competenze degli allievi.*

Sull'asse della **ricerca-azione**, si muove invece il lavoro di C. Dupuis che si interessa alla valutazione formativa attraverso problemi del RMT e precisa che *osservare e valutare i propri allievi permette all'insegnante di valutare in permanenza il proprio insegnamento, di rimettersi in discussione, di adattarsi e di progredire. L'interesse di integrare nel mio piano di lavoro dei problemi del rally viene dal fatto che si tratta di problemi aperti, che è possibile adattare sia per allievi che hanno maggiore facilità che per coloro che sono in difficoltà… Inoltre, permettono sovente di utilizzare procedure diverse e contribuiscono così a rendere la messa in comune appassionante.*

In questi atti sulla valutazione, viene anche affrontata la difficile problematica indotta dal "contratto" del RMT, **delle spiegazioni, giustificazioni, argomentazioni**.

La sezione di Parma, in particolare, per voce di D. Medici, C. Marchini, C. Mazzoni, M. G. Rinaldi, A. Rizza e V. Vannucci, si occupa delle difficoltà che riscontrano "i correttori" nel "valutare" le spiegazioni degli allievi delle classi che partecipano al RMT. La ricerca prende l'avvio dall'ipotesi secondo la quale *osservando il lavoro dei correttori nel corso degli anni, è stato possibile rilevare difficoltà ricorrenti, soprattutto riguardo ai seguenti aspetti:*

- *saper distinguere tra dimostrazione (da intendersi come giustificazione del procedimento) e verifica della soluzione trovata*
- *riconoscere la completezza di un ragionamento*
- *riconoscere un buon inizio di ragionamento.*

Ci pare di poter individuare una radice comune di tali difficoltà nella concezione di dimostrazione che ogni insegnante si è costruita nel corso dei suoi studi e, più in generale, nell'idea che gli insegnanti hanno della matematica e dei suoi metodi di ragionamento (Speranza, 1992)[11].

Inoltre, non sempre la griglia è di immediata interpretazione per i correttori, con conseguenti difficoltà ed errori nell'attribuzione del punteggio, soprattutto per due motivi: a volte ci si trova di fronte ad elaborati che non rientrano nelle tipologie previste (Vannucci et al., in questi atti), altre volte sono i correttori che non riescono ad "inquadrare" l'elaborato in esame in uno dei tipi considerati dalla griglia.

La nostra ricerca è rivolta alla messa a fuoco delle difficoltà di valutazione in quest'ultimo caso.

[11] Speranza F.: 1992, 'La geometria nelle scuole superiori: dimostrazioni o progetto di razionalità', in F. Furinghetti (Ed) *Atti del II internuclei scuola secondaria superiore*, Genova 1991, *Progetto strategico del C.N.R.*, quaderno n° 13, 135 – 141.

6. Ancora argomentazione e giustificazione

Vol. V (Incontri di Bourg-en-Bresse e Arco di Trento, 2004/2005) RMT: *dai problemi alla didattica quotidiana*

La problematica relativa a spiegazioni, argomentazioni, giustificazioni viene ripresa da R. Charnay in un articolo dal titolo *Apprendre à argumenter et argumenter pour apprendre* e con un ampio riferimento alla letteratura in **ricerca didattica**. *La questione della prova è centrale in matematica ed è affrontata con gli allievi ben prima dell'iniziazione alla dimostrazione, ogni volta che viene loro richiesto di giustificare una risposta o di dibattere la validità di una proposta. Questo contributo analizza le forme che l'argomentazione può assumere con i giovani allievi e si interessa in modo particolare alle due domande seguenti:*

- *Quali competenze possono essere raggiunte nell'ambito dell'argomentazione in matematica con l'obiettivo di sviluppare un pensiero razionale degli allievi?*
- *In quali condizioni gli scambi argomentativi possono essere utilizzati come aiuto all'appropriazione delle conoscenze?*

In un articolo di L. Grugnetti con C. Bisso, M. Pretto, N. Iesu, M. Polo e F. Tanda, vengono analizzati alcuni problemi del RMT alla luce della problematica relativa alla spiegazione richiesta agli allievi, nelle sue varie tipologie, in vista di un possibile approccio all'argomentazione facendo in particolare riferimento alla *narration de recherche* (IREM di Montpellier).

L'approfondimento di tali problematiche richiede in maniera sempre più massiccia un'intersezione stretta fra RMT e ricerca.

Intersezione che si evidenzia anche in altri aspetti presenti in questi atti, in particolare quello dell'analisi della questione "Che cos'è un buon problema per il RMT?" e quello della costruzione di concetti con l'ausilio di problemi del RMT.

Quest'ultimo aspetto viene ampiamente ripreso nel sesto volume degli atti, che saranno presentati nel paragrafo successivo.

Per quanto riguarda la questione di "buon problema", gli interventi sono molteplici e sono alla base delle preoccupazioni delle diverse sezioni dell'ARMT.

Si affaccia anche la questione della possibilità di concepire problemi di probabilità e di questa delicata problematica si occupa M. Henry che dice, fra l'altro, *La nozione di probabilità è pressoché assente nei problemi dei primi dodici anni del RMT, a parte qualche esercizio di combinatoria semplice sotto le vesti di calcolo di «possibilità». Bisogna integrare degli effettivi problemi di probabilità nelle prove del RMT, facendo appello all'intuizione probabilista dei bambini? Questa domanda merita un dibattito e questo contributo all'incontro dell'ARMT di Bourg-en-Bresse si è modestamente limitato ad un piccolo sguardo storico sulla nascita difficile del concetto di probabilità nel XVII secolo e a qualche proposta di elaborazione di problemi adatti al RMT e della loro sperimentazione.*

Due osservazioni preliminari per situare questa proposta:

- *Nella maggior parte dei paesi impegnati nel RMT, al livello scolare in cui si svolge, gli allievi, in generale, non posseggono ancora delle conoscenze di probabilità astratte o formali già insegnate. Il concetto di probabilità non è ancora presente, ma certi ragionamenti logici sono già familiari così come semplici attività di classificazione e di conteggio.*
- *Gli allievi vivono quotidianamente con l'aleatorio. Ma per molti di essi, alla loro età, il puro caso è tale che non si possa dire nulla sull'esito possibile di un processo aleatorio. Un giudizio opposto è rivelatore del salto concettuale necessario a superare un tale ostacolo psicologico ed epistemologico. Il dibattito sul determinismo, ancora vivace, ne mostra la difficoltà.*

Questa difficoltà appare chiaramente quando si guardi all'elaborazione storica del concetto di probabilità. Ci sono voluti più di 150 anni di lavoro, di controversie e paradossi, prima di pervenire alla formula detta di Laplace, partendo dal principio secondo cui la misura della probabilità di un evento «è il rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento e quello di tutti i casi possibili», quando sia possibile ridurre la situazione aleatoria ad un sistema di casi considerati «d'uguale possibilità».

Il pensiero probabilistico, però, non può limitarsi a tali calcoli a priori. Esso raggiunge la propria autonomia in rapporto alla combinatoria solo riuscendo a fare la connessione tra l'osservazione concreta della frequenza stabilizzata di un evento e la sua probabilità, cioè nel concepire la legge dei grandi numeri con tutte le sue conseguenze. Il pensiero statistico, gli strumenti moderni di simulazione, apportano un'altra dimensione epistemologica alle nozioni probabilistiche finora contenute nell'insegnamento in piccoli problemi artificiali di combinatoria semplice.

I problemi posti nell'ambito del RMT potrebbero tener conto di questa dimensione? Sono da evitare alcuni ostacoli: calcolo a priori senza una qualche ipotesi di equiprobabilità, complessità dei calcoli della combinatoria, ambiguità dei modelli per descrivere una situazione aleatoria, situazioni "contro-intuitive", aspetti psicologici ...
La nozione di speranza matematica è accessibile ai giovani allievi in termini di scommesse eque, la relazione frequenza-probabilità fa appello all'intuizione, le situazioni aleatorie in ambito geometrico, come per esempio il gioco del Franc-carreau, sono risorse possibili.

7. La ricerca entra nel RMT dalla porta principale

Vol. VI (Incontro di Parma, 2006) *I problemi come supporto per l'apprendimento: il ruolo del RMT*

Viene ancora ripresa la problematica della spiegazione, giustificazione, verifica…, in questo caso, da parte di P. Skilbecq e P. Stegen, i quali precisano che *I verbi spiegare e giustificare sono utilizzati nelle consegne*[12] *dei problemi, nelle analisi a priori, nei criteri di attribuzione dei punteggi, così come a livello delle analisi a posteriori nell'ambito delle pubblicazioni, ad esempio.*
Questi verbi, però, sono essenziali, in particolare per l'insegnamento, nell'ambito della valutazione a posteriori dei lavori degli allievi e dell'utilizzazione dei problemi in classe. Da questa prima analisi si evidenziano tre aspetti. L'uno riguarda l'uso di questi verbi negli enunciati e nelle analisi a priori. Si tratta in particolare della loro comprensione a livello delle sezioni dell'ARMT che creano e analizzano criticamente i problemi. Un altro aspetto riguarda la loro comprensione da parte degli insegnanti per un'utilizzazione dei problemi in classe. Il terzo aspetto è quello della comprensione di questi termini da parte degli allievi.
In questo articolo, per occuparci in particolare della comprensione a livello delle sezioni, segnaliamo la presenza di frasi contenenti questi verbi negli enunciati e tentiamo di capire che senso abbiano tali verbi per coloro che inventano o mettono a punto i problemi. A partire da queste prime constatazioni, faremo alcune proposte per un eventuale «regolamento» per la messa a punto dei problemi del RMT.
Per quanto riguarda la tematica del convegno sul ruolo che giocano i problemi del RMT come supporto per l'apprendimento, in questi atti figurano le "testimonianze" di due insegnanti N. Raviele e A. Speroni sulle loro esperienze rispettive in classi di scuola secondaria di primo grado, di insegnamento-apprendimento con problemi del RMT.
Diventa poi sempre più importante l'attività di ricerca dei gruppi di lavoro per la costruzione di concetti matematici con problemi del RMT. I concetti, la costruzione dei quali si avvale di problemi del RMT, sono, per ora, quelli di proporzionalità, del binomio cifra-numero, di area, di equazione e sistema, di funzione, di avvio alla geometria solida.
Tali ricerche si avvalgono della letteratura in ricerca didattica e a questa possono cominciare a fornire dati interessanti. Inoltre, in questo spirito "costruttivo", la **ricerca** "teorica" e la **ricerca-azione** si intrecciano costantemente.

8. Lo stato dell'arte sulla problematica RMT-ricerca

Vol. VII (Incontro di Bard, 2007) *RMT fra pratica e ricerca in didattica della matematica*

La **ricerca-azione**, nell'ambito del RMT, viene analizzata e discussa da Graziella Telatin che precisa, fra l'altro, che *l'attività del RMT, con modalità simili a quelle di una ricerca-azione è un punto di partenza e può diventare un punto d'arrivo.*
È sicuramente un punto di partenza nel momento in cui offre una vasta gamma di problemi da provare, discutere, analizzare per insegnare la matematica, partendo da situazioni coinvolgenti e motivanti. Le modalità che bisogna rispettare, se si vuole partecipare in maniera corretta a questa competizione, possono contribuire a cambiare o a migliorare la metodologia dell'insegnante. Sicuramente il materiale proposto offre la possibilità di adeguare la propria didattica alla necessità che ha il bambino di ricercare, di scoprire e di costruirsi il proprio sapere.
L'insegnante, dopo aver assimilato le modalità proposte dal Rally, diventa parte attiva e, forte del lavoro sperimentato in classe, collabora con le sue competenze, con la sua disponibilità a mettersi in discussione, con il suo desiderio di confrontarsi e di apprendere, elabora problemi, che possono toccare

[12] Usiamo qui il termine *consegna* per designare la richiesta di spiegazione o di giustificazione dopo la domanda propriamente detta, nei problemi del RMT.

concetti difficili da assimilare, per la ricerca di un insegnamento sempre migliore. È l'insegnante che all'interno della classe può accorgersi delle difficoltà che gli alunni incontrano nell'affrontare i vari problemi. Il RMT è quindi risorsa che si arricchisce di tutti i contributi che i suoi stessi membri gli apportano.

A quest'incontro prendono parte anche Rosetta Zan e Cécile Ouvrier-Buffet, le quali incentrano la loro attenzione, rispettivamente, su *Ricerca e RMT insieme per definire che cos'è un buon problema* e *Situations-recherche pour la classe (SiRC), analogies et différences avec les problèmes du RMT : apports pour une réflexion croisée.*

Nella sua conferenza, Rosetta Zan sviluppa quattro punti importanti che sono le risposte a quattro domande:

1) Tra i concetti e le problematiche messe in evidenza dalla ricerca in didattica, quali sono utili al RMT?

2) Come utilizzare tali concetti nel fare evolvere le attività che sviluppano gli aspetti didattici del RMT?

3) Quali aspetti del RMT connessi in qualche modo alla ricerca in didattica (analisi di procedure, interpretazione dei nostri articoli, etc.) sono accessibili agli insegnanti non direttamente coinvolti nell'animazione del RMT?

4) Quali contributi il RMT può dare alla ricerca in didattica?

Anche Cécile Ouvrier-Buffet sviluppa il suo intervento intorno alle risposte ad un altro gruppo di domande:

- *Come definiamo le SiRC e i problemi del RMT?*
- *Esistono similitudini nella caratterizzazione di "buone" SiRC e di "buoni" problemi?*
- *Gli strumenti della didattica "classica" sono sufficienti a mettere in evidenza e ad analizzare procedure effettivamente messe in opera dai partecipanti o bisogna costruirne altri?*
- *Quali sono gli apporti dell'uso di queste situazioni e di questi problemi in classe?*

In quest'incontro, un altro aspetto della ricerca didattica viene preso in considerazione ed è quello di *milieu,* analizzato da Thierry Diaz, per quanto concerne i suoi legami con il Rally matematico transalpino. Il quadro di ricerca s'inscrive nello studio della dimensione sperimentale della matematica nella quale si esplora in particolare il ruolo e la natura degli oggetti in seno ad un *milieu* specifico di tipo sperimentale.

Altro aspetto nodale: in che modo la ricerca didattica può essere utile all'elaborazione di problemi?

Quest'importante questione è affrontata da François Jaquet con l'apporto dell'analisi critica di alcuni problemi del RMT. Viene evidenziato che *l'elaborazione di questi problemi si situa in una progressione strutturata che si ispira largamente ai risultati della ricerca in didattica della matematica e che, a propria volta, produce saperi sulla concezione dei problemi.*

Come già ricordato più sopra, gli incontri internazionali dell'ARMT danno molto spazio ai lavori dei gruppi sulla costruzione di alcuni concetti matematici.

Inevitabilmente, nei lavori di tali gruppi, l'intreccio tra ricerca didattica e problemi del RMT trova una sua "naturale" ragion d'essere, che si esprime, ad esempio, nelle analisi delle procedure di risoluzione di alcuni problemi, nella modifica delle variabili didattiche, nell'analisi di registri rappresentativi coinvolti in certi concetti, nelle ipotesi di uso didattico di problemi, nelle attività sperimentali ed altro ancora.

9. Quali i legami fra ricerca, intercultura e RMT?

Vol. VIII (Incontro di Brigue, 2008) *Rally matematico transalpino e intercultura*

L'incontro internazionale di Brigue, che è peraltro, almeno geograficamente, un ritorno alle origini, visto che i primi due incontri si erano svolti in questa ridente cittadina delle Alpi svizzere, ha un sapore del tutto particolare. L'incontro, infatti, ruota intorno alla prima finale internazionale "reale", che vede la partecipazione di circa 250 bambini di dodici classi, vincitrici in sede locale della quindicesima edizione del RMT per la categoria 4.

Alle relazioni tra ricerca e RMT, evidenziate negli incontri precedenti, si aggiunge qui una terza componente che è quella della interculturalità[13] (ma anche della multiculturalità[14]), peraltro già insita implicitamente nel "DNA" del Rally matematico transalpino che, come è ormai ben noto, si svolge in

[13] *L'Interculturalità, in effetti, presuppone l'esistenza di una relazione tra le persone che appartengono a gruppi culturali differenti, è un concetto più ampio del semplice fatto «pluriculturale». Tuttavia, parlare di relazioni interculturali è una ridondanza: l'**inter**culturalità implica, per definizione, **inter**azione.* (Rodrigo Alsina, 1999).

[14] *La multiculturalità è un dato di fatto, il concetto descrive la fattuale compresenza di culture diverse entro una società.* (Alessandro Bosi, 1998).

L'interculturalità descrive invece uno specifico "progetto" di interazione entro le società multiculturali. (Demetrio, 1997).

diversi paesi con contesti socio-culturali diversi, con contesti linguistici diversi, con programmi scolastici diversi. L'interculturalità si esprime appieno come interazione progettata, che si esplica in particolare nella preparazione delle prove e nella costruzione di concetti matematici.
In questo contesto si inseriscono anche aspetti della ricerca didattica, che si ritrovano, in particolare, nelle analisi a posteriori condotte su elaborati delle classi dei vari paesi e che mettono in evidenza alcune differenze sulle procedure di risoluzione, riconducibili in generale a programmi scolastici o ad abitudini didattiche differenti, ma sottolineano anche reazioni similari nel caso di ben noti conflitti cognitivi e di errori ed ostacoli.
L'analisi approfondita svolta da François Jaquet sugli elaborati delle classi della finale internazionale di Brigue, si inserisce in questo filone di ricerca che ha poi portato alla scelta di un tema importante e delicato per i due incontri internazionali successivi.

Gli incontri dell'ARMT, qui sinteticamente analizzati per il tramite dei suoi Atti, mettono in evidenza il cammino evolutivo, che potrebbe evocare un andamento a spirale, del RMT nei suoi rapporti con la ricerca in didattica, con la quale, per certi aspetti, si confonde.

Spira mirabilis

Riferimenti bibliografici

ATTI DELLE GIORNATE DI STUDIO SUL RMT (Vol. 1, 1° e 2° incontro). *Il Rally matematico transalpino. Quali apporti per la didattica? / Le Rallye mathématique transalpin. Quels apports pour la didactique ?* Brigue 1997-98, L. Grugnetti & F. Jaquet (Eds) Dipartimento di Matematica, Università di Parma & Institut de recherche et de documentation pédagogique, Neuchâtel, 1999.

ATTI DELLE GIORNATE DI STUDIO SUL RMT (Vol. 2, 3° e 4° incontro). *RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici / RMT : évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques.* Siena 1999, Neuchâtel 2000, Grugnetti, F. Jaquet, C. Crociani, L. Doretti, L. Salomone (Eds) Dipartimento di Matematica, Università di Siena & Institut de recherche et de documentation pédagogique, Neuchâtel, 2001.

ATTI DELLE GIORNATE DI STUDIO SUL RMT (Vol. 3, 5° e 6° incontro). *RMT, Potenzialità per la classe e la formazione / RMT, Potentialités pour la classe et la formation*, Parma 2001, Torre delle Stelle 2002, L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M. G. Rinaldi, M. Polo. (Eds) Dipartimento di Matematica, Università di Parma & Dipartimento di Matematica, Università di Cagliari, 2003.

ATTI DELLE GIORNATE DI STUDIO SUL RMT (Vol. 4, 7° incontro). *RMT e valutazione / RMT et évaluation*, Mondorf-les-Bains/Lussemburgo 2003, L. Grugnetti, F. Jaquet, J.-P. Schmit (Eds) ARMT & Education nationale Luxembourg, 2004.

ATTI DELLE GIORNATE DI STUDIO SUL RMT (Vol. 5, 8° e 9° incontro). *RMT: dai problemi alla pratica quotidiana / RMT, Des problèmes à la pratique de la classe*, Bourg-en-Bresse 2004, Arco di Trento 2005, R. Battisti, R. Charnay, L. Grugnetti, F. Jaquet, (Eds). ARMT, IPRASE Trentino, IUFM de Lyon – Centre de Bourg-en-Bresse, 2006.

ATTI DELLE GIORNATE DI STUDIO SUL RMT (Vol. 6, 10° incontro). *I problemi come supporto per l'apprendimento: il ruolo del RMT / Les problèmes au service de l'apprentissage: le rôle du RMT*, Parma 2006, L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M.G. Rinaldi (Eds.). Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Sezione di Parma dell'ARMT, ARMT, 2007.

ATTI DELLE GIORNATE DI STUDIO SUL RMT (Vol. 7, 11° incontro). *RMT fra pratica e ricerca in didattica della matematica / RMT entre pratique et recherche en didactique des mathematiques*, Bard (Valle D'Aosta) 2007, L. Grugnetti, F. Jaquet, G. Bellò, R. Fassy, G. Telatin (Eds.), Centro risorse per la Didattica della Matematica, Sezione ARMT della Valle d'Aosta, ARMT.

ATTI DELLE GIORNATE DI STUDIO SUL RMT (Vol. 8, 12° incontro). *Rally Matematico Transalpino e intercultura / Ralle mathématique transalpin et interculturalité*, Brigue (Svizzera) 2008, L. Grugnetti et F. Jaquet (Eds.), ARMT, SCNAT.

Sito dell'ARMT: http://www.armtint.org/

I PROBLEMI DEL RALLY:
MOMENTI DI GIOCO TRA I TERREMOTATI D'ABRUZZO

Maria Francesca Tanda, coordinatrice Sezione di Perugia

Il 6 aprile 2009 un gravissimo terremoto ha colpito e devastato una bella città italiana: L'Aquila. Alto il numero dei senzatetto e, purtroppo, dei morti. La popolazione è stata immediatamente soccorsa dalla Protezione Civile, dalla Croce Rossa Italiana, dai Volontari del Soccorso e da altre organizzazioni oltre che dalle forze militari locali. Buona parte degli sfollati è stata ospitata nelle tendopoli allestite con molta celerità. Molti altri hanno trovato rifugio sul litorale Adriatico negli alberghi che avevano offerto la propria disponibilità, altri ancora in altre strutture. Le tendopoli sorte intorno alla città, nelle colline circostanti e comuni limitrofi erano numerosissime. Alcune potevano ospitare centinaia di persone altre poche decine.

Le più grandi erano dotate di cucine da campo arrivate via terra nell'arco di 24 ore e fornivano i pasti a quelle non dotate di cucina.

La tendopoli di Centicolella è stata allestita ad ovest della città utilizzando le strutture di un centro sportivo universitario. Ampi spazi a disposizione, strutture in muratura, bagni. In quanto a dimensioni era la seconda in ordine di grandezza ed ospitava circa 400 sfollati, un centinaio di volontari e un buon numero di appartenenti al Corpo Militare CRI. C'era l'ambulatorio medico ed anche quello veterinario, le tende-ambulatorio per i medici di base del territorio, l'ufficio postale mobile, la mensa che serviva tre pasti al giorno: abbondante colazione con molti prodotti di pasticceria e, a pranzo e cena, la scelta fra due primi, due secondi e due contorni, frutta mista e, spesso, anche il dolce. Gli anziani erano serviti nelle tende dove i Volontari incaricati si recavano con i vassoi. La popolazione è stata assistita nel migliore dei modi.

In quella settimana le condizioni meteorologiche molto inclementi non favorivano la vita sociale né l'organizzazione di attività per i ragazzi per i quali, comunque, era stata allestita una tenda-ludoteca ed i pionieri CRI si adoperavano per organizzare svariate attività.

La ricerca di una forma di normalità che aiutasse bambini ed adolescenti a ritrovare una certa serenità era sembrata una scelta prioritaria ed era stata identificata nell'attivazione di un tempo- scuola.

In questo contesto, data la mia qualifica di insegnante, appena giunta al Campo come volontaria Croce Rossa sono stata incaricata, insieme ad una collega, di dare inizio ad un'attività didattica rivolta ai bambini ed ai ragazzi in età compresa tra i 6 e i 16 anni presenti nella tendopoli.

L'adesione all'iniziativa è stata totale ed immediata soprattutto da parte degli allievi più piccoli. I bambini si presentavano la mattina accompagnati da genitori e/o nonni come se la tenda fosse effettivamente la "loro" scuola. In realtà in quel momento era proprio così.

I più grandi avevano storto il naso: dopotutto si sentivano un po' in vacanza e non avevano molta voglia di impegnarsi e, fuori dalla tenda-scuola, al di là della tristissima realtà che li aveva portati al Campo, avrebbero potuto spendere il proprio tempo in molte altre attività di certo in quel momento più gradevoli:

giocare a pallone, seppure in mezzo al fango, recarsi nella tenda-ludoteca dove avrebbero trovato un gran numero di giocattoli ed altri mezzi e modi per trascorrere la giornata, play station compresa.
Per coinvolgerli si rendeva, dunque, necessario ricorrere ad un' attività molto coinvolgente e non solo.
Dovendo interessare ed impegnare allievi di età diversa era necessario che mi orientassi su un genere che mi permettesse di coinvolgerli tutti, ne catturasse l'attenzione, fosse gradevole e piacevole ma che, al tempo stesso, fosse produttiva e lasciasse il segno.

Nelle mie intenzioni doveva essere qualcosa che rimanesse impressa nel ricordo degli allievi come "peculiarità" di quei giorni, con funzione quasi catartica, almeno per una parte della giornata.
Per questi motivi ho scelto i problemi del Rally: mi avrebbero consentito di proporre un'attività nuova per loro, gradevole ed anche duttile, giocosa e non noiosa, apparentemente facile.
Mi sono, dunque, rivolta alla segreteria del Campo che mi ha permesso di accedere alla mia posta elettronica, scaricare i file e stamparli.
Per la scuola primaria composta da allievi di tutte le classi tranne la prima, dato che era presente una sola allieva e per giunta non italiana, ho optato per problemi per i quali la manipolazione fosse un mezzo necessario ed invitante. Tra i diversi proposti, tutti tratti dalla prima prova del 16° RMT, quelli molto graditi sono risultati: "Andiamo a lavorar"; "I bicchieri di Alberto"; "Romeo e Giulietta"; "Scar tabellando". Per gli allievi della secondaria di primo e secondo grado avevo proposto: "Uno strano numero"; "I triangoli II" e qualcun altro[15].
Nel dare il via all'attività ho parlato di "problemi " e in molti hanno storto il naso. Li ho rassicurati subito dicendo che si trattava, in fin dei conti, soltanto di giochi proposti sottoforma di problema e li ho invitati a dare una lettura ai testi. Ho atteso che i vari foglietti circolassero e la prima domanda è sorta quasi all'unisono: ma che razza di problemi sono? Oppure: qui non ci sono numeri per fare le operazioni. Un altro (1ª secondaria di primo grado): no, io non ci sono portato!
Ho continuato spiegando e mostrando loro con esempi come fosse formulato il testo dei problemi e, per ciascuno di essi, li ho invitati a cercare i vincoli motivando la richiesta col fatto che dato che in pratica si trattava di giochi ed ogni gioco ha le proprie regole, bisognava accertarsi di quelle presenti in ogni situazione.
Mi rendevo conto che si trattava di un modo di lavorare per loro assolutamente nuovo e la cosa faceva indubbiamente il mio gioco.
L'interesse era scattato. Ho proposto a tutti di lavorare in coppia e di scegliere il testo che maggiormente li incuriosiva.
La preferenze immediate dei piccoli sono state per "I nanetti" e "I bicchieri" ed i più grandi per "Lo strano numero".
Una delle coppie era formata da due fratellini di cui il minore frequentava la seconda elementare. Non si è perso d'animo e con una grandissima voglia di fare si è fatto aiutare dal fratello, allievo di terza, nella lettura del testo.
Altre coppie hanno cominciato con "I bicchieri". I più grandi si sono subito divertiti a cercare le possibilità per "Lo strano numero".
Ho dapprima aspettato che ognuno organizzasse il proprio lavoro secondo la propria iniziativa e competenza.
Le coppie alle prese con "I nanetti" hanno cominciato scrivendo il nome dei nani e procedendo poi agli spostamenti attraverso cancellature e riposizionamenti. Qualcuno ha, invece, disegnato i nani con una notevole perdita di tempo e successiva stanchezza. Per evitare che l'interesse scemasse sono intervenuta proponendo di scrivere il nomi dei nani su dei foglietti che avrebbero reso più facili gli spostamenti. La proposta è stata accolta con sgranamento d'occhi!

---
[15] Questi problemi sono nell'allegato 1 pp 33 e 34

Risolvere un problema con pezzetti di carta era, indubbiamente, una cosa nuova. E' così risorto l'interesse che si stava affievolendo e la voglia di scoprire la soluzione. Nella foto (sopra a destra) si può vedere la coppia formata dai due fratellini alle prese con la fila dei nanetti.

Quando, secondo loro, la soluzione era sul tavolo li ho invitati alla verifica. Ho spiegato loro che era necessario rileggere la soluzione e confrontarla con i vincoli, chiamati per semplicità regole della situazione, per essere certi che la soluzione trovata corrispondesse alle richieste. In pratica ho spiegato loro che finché non avessero potuto rispondere "sì " ad ogni richiesta, la soluzione non sarebbe stata quella giusta. Così facendo è stata rilevata una discordanza che, con diversi tentativi, è stata eliminata. Mi riferisco in particolare alle ultime due richieste del problema: Pisolo non è al centro - Brontolo è dietro a Cucciolo. Soddisfatti e con lo sguardo luminoso quando, con una immediata intuizione, hanno effettuato gli spostamenti.
Reazioni simili si sono verificate anche nelle altre coppie.
Per quanto riguarda la sistemazione dei bicchieri negli scaffali sono stati fatti dei primi tentativi attraverso il disegno e in un caso con una divisione scritta. Ho agito nel medesimo modo ed ho proposto la preparazione di foglietti che simulassero i bicchieri dato che sarebbe stato troppo dispendioso utilizzare proprio bicchieri di carta, cosa che mi sarebbe piaciuta di più. Attraverso la divisione hanno cercato una quantità che rappresentasse un punto di partenza ed attraverso spostamenti successivi sono arrivati a rendere reale il vincolo del testo.
Meno favori hanno incontrato "Romeo e Giulietta" e "Scar tabellando" nonostante in un primo momento fossero sembrati accattivanti.
Ho pensato, però, che data l'impossibilità, per carenza di tempo, di attuare un mio progetto e cioè trasformare il problema in un gioco da tavolo sul quale delle pedine si potessero agevolmente spostare, il dover agire soltanto tracciando percorsi con la matita con successive cancellature li abbia annoiati un poco. Per quanto riguarda il primo, soltanto un allievo in fase finale ha fatto notare che il tratto-diagonale risultava più lungo del tratto-lato.
I ragazzi più grandi, invece, si sono subito lanciati in una sfida tra loro per la ricerca del numero strano e, dopo un inizio in coppia, qualcuno ha scelto il lavoro individuale. Attraverso vari tentativi, attuati solo attraverso prove scritte, quasi tutti sono arrivati a trovare la maggior parte delle possibilità. Anche in questo caso avevo proposto di scrivere i numeri su pezzi di carta, ma hanno risposto che per loro non era necessario. Il problema è stato risolto abbastanza celermente e, prima di fornire la soluzione, li ho invitati ad una prima verifica confrontando le soluzioni trovate da ciascuno.

Diversa la sorte per "I triangoli II". Forse appariva abbastanza facile, ma dopo l'individuazione dei triangoli maggiormente evidenti c'è stato l'abbandono. Soltanto una ragazza, allieva di 1ª secondaria di secondo grado, utilizzando il colore ha continuato la ricerca con ostinazione e come sfida personale, fino all'individuazione dei 40 triangoli presenti nel disegno. Un urlo di soddisfazione ha segnato l'individuazione del 40° triangolo.
Nella foto si vede la ragazza alle prese con il lavoro.

Il tempo scuola era così organizzato: ogni mattina due ore con la primaria e le successive con la secondaria. L'altra collega proponeva attività di tipo linguistico e ci alternavamo.
L' attività che si è protratta per sette giorni, è stata molto gradita e seguita con entusiasmo da parte dei ragazzi che, quando mi incontravano per il campo nelle altre ore della giornata mentre ero occupata negli altri servizi che quotidianamente venivano affidati ai Volontari, mi domandavano se il giorno successivo avremmo fatto le stesse cose, cioè lo stesso tipo di lavoro.
Avevo colto nel segno, raggiunto il mio obiettivo e compiuto un'esperienza dagli inattesi risvolti ed incredibili valenze.
Dopo di noi altre Volontarie hanno preso il nostro posto, ma i problemi del Rally sono stati un'esperienza unica e resteranno un bel ricordo in quei ragazzi che, non molto tempo dopo, sono tornati alle loro scuole di appartenenza, alcune allestite in ambienti messi a disposizione da altre strutture.
La tendopoli di Centicolella, denominata Campo Enrico Mariani I, è stata completamente smantellata circa sette mesi dopo il sisma.

ALLEGATO I

I sei problemi scelti tra quelli della Prova I del 16° RMT (2008)

"Andiamo a lavorar…" (Cat. 3)

Dopo aver salutato Biancaneve, i sette nani si recano al lavoro cantando. Essi camminano, come al solito, tutti in fila, uno dietro l'altro:

- l'ultimo della fila è Dotto
- Mammolo si trova tra Eolo e Pisolo
- Gongolo è ad una delle estremità della fila
- tra Gongolo e Cucciolo ci sono tre nani
- Pisolo non è al centro
- Brontolo è dietro a Cucciolo

Scrivete il nome di tutti i nani, dal primo all'ultimo, secondo l'ordine in cui compaiono nella fila.
Spiegate come avete fatto a dare la vostra risposta.

I bicchieri di Alberto (Cat. 3, 4)

Alberto ha ricevuto una cassa con 42 bicchieri di cristallo, che vuole sistemare nella vetrina del suo negozio.
Dispone tutti i bicchieri su 7 ripiani e su ognuno di essi mette un bicchiere in meno rispetto al ripiano precedente.
Quanti bicchieri ci sono su ogni ripiano?
Spiegate il vostro ragionamento.

Scar…tabellando (Cat. 3, 4)

Nel cortile della scuola, i bambini hanno disegnato una grande griglia quadrata sulla quale giocano; in ogni casella hanno scritto un numero.

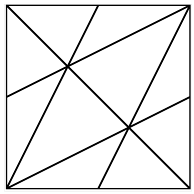
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

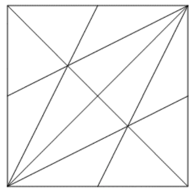
Regole di spostamento nella griglia:
sempre da una casella a quella vicina
seguendo le linee o le colonne
così: →, o ←, o ↑, o ↓,
ma mai così : ↗, né ↖, né ↙, né ↘

Regole del gioco
Tre giocatori partono da tre caselle diverse sul bordo della griglia.
Un compagno, all'esterno della griglia, batte su un tamburo. A ogni colpo di tamburo, i tre giocatori fanno ognuno un passo, nello stesso tempo, secondo le regole di spostamento. Quando due giocatori raggiungono la stessa casella, vincono la partita e il terzo giocatore è eliminato.
Tre amiche: Anna, Bice e Carla decidono di giocare una partita.
Anna parte dalla casella 5, Bice dalla 6 e Carla dalla 23. Con tre colpi di tamburo fanno un primo, un secondo e un terzo passo ciascuna. A questo punto due di loro sono nella stessa casella e vincono. La terza è eliminata e la partita è finita.
Chi sono le due bambine che hanno vinto e quale bambina è stata eliminata?
Su quali caselle le due vincitrici si sono potute incontrare? Indicatele tutte.

I triangoli: (I. cat. 3, 4, 5 e II cat. 6, 7, 8, 9, 10)

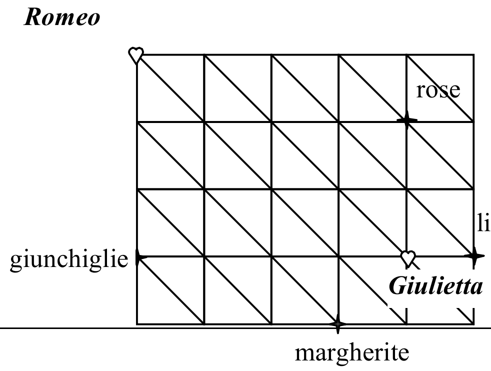
In questa figura ci sono tanti triangoli.
Pietro ne ha contati 15 (32 nella versione II) ma non sa se li ha trovati tutti.
Quanti triangoli si possono vedere in questa figura?
Spiegate come li avete contati.


I


II

Romeo e Giulietta (Cat. 4, 5)

Romeo cammina seguendo le strade disegnate su questa piantina.
Vuole raggiungere Giulietta e vuole anche, però, assolutamente portarle un mazzo di fiori.
Romeo può scegliere tra un mazzo di lillà o un mazzo di rose, o un mazzo di giunchiglie oppure un mazzo di margherite.
Quale mazzo di fiori deve scegliere Romeo per percorrere la strada più corta possibile?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.



Uno strano numero (Cat. 5, 6)

Il numero di targa della macchina di Miss Math è particolare: 23651.
- È formato da 5 cifre, tutte differenti;
- La terza cifra è il prodotto delle prime due cifre (6 = 2 x 3);
- La terza cifra è anche la somma delle ultime due cifre (6 = 5 + 1).

Miss Math si chiede quanti sono i numeri di 5 cifre che hanno le stesse caratteristiche di quello della targa della sua macchina.
Aiutatela a trovare la risposta al problema e prendete nota di tutti i dettagli della vostra ricerca.

UN GENITORE GIARDINIERE E IL RMT

Clara Bisso, coordinatrice Sezione di Genova

Tutto è cominciato così dopo la I prova del 18°RMT:
"Gent.mo Maestro Roberto,
Le scrivo per farLe una domanda.
Francesca mi ha posto un problema, uno di quelli del rally matematico, dove 58 rose dovevano essere trapiantate in vasi che ne contenevano o 4 o 3 usando il minor numero di vasi possibile, ma riempiendo sempre i vasi, per cui inizialmente l'ho risolto nel modo più semplice che mi venisse in mente, cioè provando a trovare il n° minimo di vasi più piccoli utilizzabili che lasciasse un numero di rose tale da riempire vasi da 4. In questo caso naturalmente la soluzione è 2 vasi da 3 rose e 13 da 4, poi però Francesca mi ha chiesto di farle dei problemi simili e così facendo ho visto che utilizzando le stesse variabili, rimaneva costante il n° minimo di insiemi da 3 (cioè sempre 2), per cui ho dedotto la seguente regola:
Dato un numero pari non divisibile per 4, per creare il n° minore di insiemi da 3 e da 4, il numero di insiemi da 3 rimane costantemente pari a 2, mentre varia il numero di insiemi da 4, questa regola vale per numeri interi > 6"
La domanda è: esiste questa regola?
Grazie molte per tutto il suo lavoro con i nostri "ragazzi".
Cordiali saluti
Marco Rismondo (papà Francesca Rismondo[16])"

Di seguito riporto il problema che ha suscitato la partecipazione e l'interesse del papà di Francesca:

6. IL GIARDINIERE (CAT. 4, 5)

Un giardiniere pianta 58 piante di rose in due tipi di vasi:
- vasi rotondi che contengono tre piante ciascuno
- vasi quadrati che contengono quattro piante ciascuno.

Il giardiniere vuole utilizzare il minor numero possibile di vasi per piantare tutte le sue piante di rose.
Vuole anche che tutti i vasi siano completi e che contengano quindi o tre piante o quattro piante.

Quanti vasi di ogni tipo deve scegliere?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Analisi a priori

Ambito concettuale

- Aritmetica: addizione, moltiplicazione e divisione e loro proprietà, multipli.

Analisi del compito

- Comprendere che le 58 piante di rose devono essere distribuite nei vasi e che il numero totale dei vasi deve essere il minimo.
- Capire subito che occorre utilizzare il maggior numero possibile di vasi da quattro, così da usare il minor numero totale di vasi; in seguito dividere il numero delle rose totali per 4; (58:4=14 resto 2) e procedere per aggiustamenti. Per esempio; dato che 2 rose non vanno bene per un vaso rotondo, togliere un vaso quadrato e sommare le 4 rose che vi sarebbero state contenute a quelle rimaste dopo la prima divisione per ottenere 6 rose rimaste che possono essere piantate in due vasi rotondi: 6 : 3 = 2
- Esprimere allora la soluzione: 13 vasi quadrati e 2 vasi rotondi.

Oppure: constatare che 58 non è né multiplo di 3, né multiplo di 4 e che saranno necessari due tipi di vasi se si desidera che siano tutti pieni. Bisognerà allora cercare le scomposizioni di 58 in somme di

[16] Alunna di una classe V della Scuola XXV Aprile di Genova

multipli di 3 e di multipli di 4: ce ne sono cinque soltanto, dopo eliminazioni successive 58 = 6 + 52 = 18 + 40 = 30 + 28 = 42 + 16 = 54 + 4

- Per ogni scomposizione calcolare il numero di vasi utilizzato e constatare che il numero minimo di vasi è dato dalla prima scomposizione.

  (Le ricerche delle scomposizioni in multipli di 3 e 4 possono evidentemente essere organizzate in modo molto diverso da un gruppo all'altro, da lunghi inventari o schemi complicati a liste economiche).
- Redigere la soluzione e le spiegazioni: la scelta più economica consiste in 15 vasi che permettono di contenere le 58 piante di rose ($13 \times 4 + 2 \times 3 = 58$ e $13 + 2 = 15$).

Livello: *4, 5*

Origine: Puglia

L'insegnante destinatario della lettera si è rivolto a me e mi è parso che la curiosità del simpatico signore esigesse una risposta…
"La regola vale perché, avendo un numero pari non divisibile per 4, per esempio il 58 del problema, quando si toglie 6 (2 vasi da 3) si ottiene un numero divisibile per 4, in questo caso 52. La regola funziona per tutti i numeri pari non divisibili per 4.
Infatti, togliere ad un numero siffatto il 6, porta ad un numero divisibile per 4. Quindi basta considerare 2 vasi da 3 e il gioco è fatto."

Ovviamente, come dice il Signor Marco, *il numero deve essere maggiore di 6 (per avere vasi da 3 e da 4), altrimenti si avrebbe 6-6=0, cioè solo 2 vasi da 3.*

…ed anche un rilancio:
"E se le piante di rose fossero 107 da sistemare in vasi da 5 e da 7?"
Il "rilancio" c'è stato effettivamente e a seguito di questo il signor Marco ha risposto:
Numero minore di vasi: 11 da 7 rose e 6 da 5 rose.
P.S. Stavolta ci ho messo un po' di più!"

Questa seconda missiva conteneva un "post post scriptum" nel quale il papà di Francesca commentava: *Mi verrà così facile perchè sono giardiniere?*
A questo proposito mi raccontava di aver presentato un giardino didattico ad Euroflora 2006, una manifestazione internazionale di floricoltura che si tiene a Genova con scansione quinquennale. Tale giardino, studiato insieme ai docenti dell'istituto committente, il dirigente scolastico e alcuni insegnanti della scuola frequentata dalla figlia, è stato realizzato insieme ad altri giardinieri italiani; era finalizzato allo studio interdisciplinare e prevedeva la possibilità di attuare giochi anche per l'apprendimento concreto della matematica. Il signor Marco sottolineava inoltre l'attenzione riservata, durante la creazione del giardino, alla possibilità di fruizione da parte di tutti gli alunni, compresi i diversamente abili motori, visivi e uditivi.
Sono rimasta piacevolmente sorpresa dal coinvolgimento mostrato dal collaborativo signore (che è sicuramente dotato di una particolare sensibilità), sia perchè è oggi molto confortante che un genitore partecipi in questo modo alla vita scolastica dei figli, sia perchè è interessante constatare come, anche problemi pensati per bambini, possano suscitare un interesse matematico in adulti "non addetti ai lavori". Evidentemente non solo quelli come noi sono convinti che la matematica sia un mondo stupefacente nel quale comprendere, approfondire ma anche divertirsi e del quale, soprattutto, non avere paura!

ERREURS, OBSTACLES, SCHÈMES ET CONCEPTS

Extraits du cours de didactique de Michel Henry

[Note de la rédaction] *Cet article reprend les annexes III et IV du rapport du groupe de travail « Fonctions » après la rencontre de Nivelles (octobre 2009). Comme les erreurs, obstacles, schèmes et concepts sont au coeur des réflexions actuelles des travaux de nos groupes sur les concepts et de nos rencontres internationales, il nous a paru opportun de publier ces deux textes. Nous remercions l'auteur de nous avoir autorisé à les reprendre.*

1. Statut de l'erreur

À la suite des travaux de Gaston BACHELARD et de Jean PIAGET, la conception **constructiviste** de l'apprentissage s'est développée. Nous allons voir que pour cette conception, l'erreur joue un rôle fondamentalement différent. Du "droit à l'erreur" concédé aux élèves, on passe progressivement à la recherche de situations où les erreurs seraient révélatrices d'un savoir en voie de constitution, nécessaires à l'apprentissage. En d'autres termes, les erreurs des élèves "nous intéressent", autant qu'elles leur sont profitables. Le contrat didactique est alors profondément modifié. Citons Herbert Ginsburg (dans "Children's Arithmetic", New York, D. Van Nostrand Co.,1977) : *"Cela n'aide en rien d'expliquer les erreurs en termes d'un manque d'intelligence ou d'aptitude en mathématiques. De telles conceptions obscurcissent le fait que les erreurs sont le résultat de stratégies systématiques d'origine sensée".*

2. Analyse didactique de l'erreur

En didactique des mathématiques, l'analyse de l'erreur repose sur la notion d'obstacle développée par Gaston BACHELARD et sur la théorie de l'équilibration de Jean PIAGET. Elle est éclairée par les travaux sur la conceptualisation (Britt-Mari BARTH, Gérard VERGNAUD) et modélisée par la classification des obstacles proposée par Guy BROUSSEAU.
Avant de préciser ce que nous entendons par obstacles, citons BACHELARD (*La formation de l'esprit scientifique*, ed. J. Vrin,1938): "
... c'est dans l'acte même de connaître intimement qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle des lenteurs et des troubles ... La compréhension s'acquiert contre une connaissance antérieure en détruisant des connaissances « mal faites » … « Quand il se présente à la culture scientifique, l'esprit n'est jamais jeune. Il est même très vieux car il a l'âge de ses préjugés ... »

Guy BROUSSEAU dégage alors une théorie didactique des erreurs (*Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 4 n°2, 1983), il écrit :
Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes. De plus ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une « connaissance » ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions.
Ainsi l'erreur serait l'expression ou la manifestation explicites d'un ensemble de conceptions spontanées ou préconstruites, intégrées dans un réseau cohérent de représentations cognitives, qui se dressent en obstacles à l'acquisition et à la maîtrise de nouveaux concepts. Le franchissement de ces obstacles devient alors le projet de l'acte d'enseignement, et l'erreur son passage obligé.

3. Notion d'obstacle

En didactique, nous dégageons les 5 caractéristiques suivantes pour un obstacle :
1. C'est une connaissance (et non une absence de connaissance !).
2. Celle-ci permet de produire des réponses adaptées à certains problèmes ou classes de problèmes.
3. Elle conduit à des réponses erronées dans d'autres types de problèmes.
4. Elle présente une résistance à toute modification ou transformation et se manifeste de manière récurrente. C'est-à-dire qu'elle redevient prédominante dans certaines situations, même après avoir été remplacée en apparence par une nouvelle connaissance.
5. Le rejet de cette connaissance aboutira à une connaissance nouvelle.

4. Différents types d'obstacles

A - Obstacles épistémologiques

C'est le type d'obstacles mis en évidence par BACHELARD et auquel se rapportent particulièrement les considérations qui précèdent.
Ces obstacles sont inhérents au savoir lui-même. La complexité des concepts, et de leurs relations dans des champs conceptuels que les élèves maîtrisent peu, se heurte aux conceptions spontanées qui tendent à opposer des connaissances empiriques au savoir savant.
Les obstacles épistémologiques sont repérables par les difficultés rencontrées par les mathématiciens eux-mêmes pour les surmonter dans l'histoire. La compréhension de ces obstacles se nourrit des recherches en épistémologie et histoire des mathématiques.

B - Obstacles didactiques

Ce sont les obstacles créés par le choix de telle ou telle stratégie d'enseignement, laissant se former, lors de l'apprentissage, des connaissances erronées ou incomplètes qui se révéleront ultérieurement comme des obstacles au développement de la conceptualisation.
Les obstacles didactiques sont inévitables, inhérents à la nécessité de la transposition didactique : on ne peut pas supprimer les étapes, les approximations, les analogies plus ou moins pertinentes lors de l'apprentissage.
Reconnaître un obstacle didactique permet à l'enseignant de revenir sur la présentation primitive du concept en question, pour mieux expliciter la difficulté vécue par l'élève. Les recherches en didactique ont précisément pour applications de présenter aux enseignants les obstacles didactiques qu'elles ont pu mettre en évidence.

C - Obstacles psychologiques:

Ce sont les obstacles qui se présentent lorsque l'apprentissage vient en contradiction avec des représentations profondément ancrées chez le sujet, ou lorsqu'il induit une déstabilisation inacceptable.
Beaucoup de facteurs peuvent être à l'origine d'obstacles psychologiques. Ils peuvent être extérieurs à la relation didactique (ce qui ne veut pas dire que l'enseignant n'a pas à s'y intéresser) ou provoqués par elle.

D - Obstacles ontogéniques

Ce sont les obstacles qui s'expriment lorsque l'apprentissage demandé est trop en décalage par rapport à la maturité conceptuelle du sujet. Quelle que soit l'explication, l'élève ne comprend pas ce qu'on lui demande, le développement de sa pensée restant étranger au terrain conceptuel sur lequel on veut l'emmener.

D'autres types d'obstacles ont été évoqués, par exemple des **obstacles culturels** lorsque les connaissances introduites s'insèrent dans un réseau de concepts qui prennent un sens dans une culture donnée, mais n'en ont pas dans la culture d'un élève particulier.
Les obstacles techniques se présentent également comme source d'erreurs, lorsque la complexité de la tâche dépasse les capacités d'attention de l'élève; essayez donc de faire une grande multiplication en chiffres romains!

5. Schèmes et concepts

Pour Piaget, un **schème** est supporté par une structure logique qui s'est développée dans le cerveau du jeune enfant, au gré de ses rapports avec son environnement et sur la base de son patrimoine génétique. C'est un instrument d'action et de généralisation.

Lorsqu'ils coordonnent plusieurs actions, les schèmes se fixent sur les propriétés communes à ces actions de manière à en dégager ce que l'on appelle les invariants. Il y a là une amorce d'abstraction.

Par exemple, l'observation quotidienne fera découvrir au bébé que les choses tombent quand on les lâche. Cette observation généralisée à toutes les choses sera créative du schème « les objets tombent », qui par équilibration se complexifiera progressivement : il y a des choses qui ne tombent pas, d'autres flottent, ...

Lorsque l'enfant disposera du langage, il pourra caractériser ces invariants par un mot : il construira alors en même temps le concept et le vocabulaire associé.

Par exemple il dira « cette chose va tomber » ou « cet objet est plus lourd que celui-ci ». Le concept de pesanteur s'établira ainsi, jusqu'à s'insérer dans un réseau de relations entre les comportements des objets, puis à s'élargir dans celui d'attraction, puis à recevoir ultérieurement un statut abstrait, formalisé au sein d'un modèle mécanique.

Les philosophes proposent comme définition d'un **concept** :

Un concept est une idée abstraite et générale qui permet de caractériser des données sensibles et des données construites.

Cette définition est reprise par les théoriciens des Sciences de l'Éducation. On pourra consulter avec grand intérêt le livre de Britt-Mari BARTH : *L'apprentissage de l'abstraction,* (éditions Retz, col. actualités des Sciences Humaines), largement inspiré des travaux de BRUNER.

L'approche de Gérard VERGNAUD, à peu près semblable, tente de rendre opératoire cette définition. Un concept est caractérisé par un triplet : (S, I, s).

S est l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept. Chaque élément de S est une concrétisation du concept, un de ses représentants.

I est l'ensemble des invariants opératoires du concept, l'ensemble des propriétés qui sont communes aux éléments de S et qui font qu'on les range tous dans la même catégorie conceptuelle.

s est un ensemble de termes, de dénominations ou de symboles qui désignent le concept.

Par exemple, le concept de fonction en mathématiques comprend l'ensemble des fonctions que le sujet, à son niveau, saura caractériser comme telles, les qualités qui font qu'une relation entre ensembles est une fonction (définition, univocité), les mots et symboles qui représentent habituellement une fonction, comme les termes d'application, opérateur, f(), $x \to y$, etc.

Nous utiliserons par la suite ce terme précis de concept, plutôt que celui, vague, de notion qui est cependant pratique pour s'exprimer en général.

En fait un concept n'aura d'existence que par rapport à d'autres concepts et s'il est susceptible de s'appliquer à l'explication et à la prévision. C'est-à-dire qu'il devra s'insérer dans un modèle du réel progressivement construit et complexifié.

Par exemple, le concept de fonction ne sera opératoire que s'il permet de reconnaître des objets mathématiques qui ne sont pas des fonctions, et s'il permet de considérer une fonction comme un des objets représentatifs de ce concept. L'accès à ce niveau conceptuel est long et parcouru d'obstacles, épistémologiques et didactiques. Il s'avère que les étudiants entrant à l'université ne l'ont pas en général complètement dégagé.

Ces dernières remarques ont amené Gérard VERGNAUD à développer la notion de **champs conceptuels**, dont la construction aux différents niveaux de la scolarité est le véritable enjeu de l'apprentissage.

Un concept ne recevra son statut abstrait que s'il est effectivement dégagé du contexte concret dans lequel il a été présenté. Il faut donc proposer plusieurs exemples mettant en jeu les mêmes concepts, dans des situations différentes, et si possibles dans des champs conceptuels différents.

ERRORI, OSTACOLI, SCHEMI E CONCETTI

Estratti del corso di didattica di Michel Henry

Traduzione: Carlo Marchini

[Nota della redazione] *Quest'articolo riprende gli allegati III e IV del rapporto del gruppo di lavoro «Funzioni» a seguito dell'incontro di Nivelles (ottobre 2009). Poiché gli errori, gli ostacoli, gli schemi e i concetti sono centrali nelle riflessioni attuali dei nostri gruppi di lavoro sui concetti e nei nostri incontri internazionali, ci è sembrato opportuno pubblicare questi due allegati. Ringraziamo l'autore per averci autorizzato a riprenderli.*

1. Statuto dell'errore

A seguito dei lavori di Gaston BACHELARD e di Jean PIAGET, si è sviluppata la concezione **costruttivista** dell'apprendimento. Vedremo che secondo questa concezione, l'errore svolge un ruolo fondamentalmente diverso. Dal "diritto all'errore" concesso agli allievi, si passa gradualmente alla ricerca di situazioni in cui gli errori sarebbero rivelatori di una conoscenza in via di costituzione, necessari all'apprendimento. In altri termini, gli errori degli allievi "ci interessano" in quanto essi sono vantaggiosi per loro. Il contratto didattico è allora profondamente modificato. Citiamo Herbert Ginsburg (in "Children's Arithmetic", New York, D. Van Nostrand Co., 1977): "*Non aiuta affatto spiegare gli errori in termini di una mancanza d'intelligenza o d'attitudine in matematica. Tali concezioni offuscano il fatto che gli errori sono il risultato di strategie sistematiche d'origine sensata*".

2. Analisi didattica dell'errore

In didattica della matematica, l'analisi dell'errore si basa sulla nozione d'ostacolo sviluppata da Gaston BACHELARD e sulla teoria del "riequilibrio" di Jean PIAGET. È chiarita dai lavori sulla concettualizzazione (Britt-Mari BARTH, Gérard VERGNAUD) e modellata dalla classificazione degli ostacoli proposta da Guy BROUSSEAU.
Prima di precisare ciò che intendiamo per ostacoli, citiamo BACHELARD (*La formation de l'esprit scientifique*, ed. J. Vrin 1938, in Italiano *La formazione dello spirito scientifico,* Milano, Cortina 1985): "*… è nell'atto stesso del conoscere intimamente che appaiono per una sorta di necessità funzionale, lentezze e disordini… la comprensione si acquisisce contro una conoscenza precedente distruggendo conoscenze male fatte"… "Quando si presenta alla cultura scientifica, lo spirito non è mai giovane. È anche molto vecchio poiché ha l'età dei suoi pregiudizi…".*

Guy BROUSSEAU individua allora una teoria didattica degli errori. In (Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, volume 4 n°2, 1983), scrive:
"*Un ostacolo si manifesta dunque con errori, ma questi errori non sono dovuti al caso. Fugaci, irregolari, sono riproducibili, persistenti. Inoltre, questi errori, per uno stesso soggetto in apprendimento, sono legati tra loro da una fonte comune: un modo di conoscere, una concezione caratteristica, coerente se non corretta,* "*una conoscenza" vecchia e che è riuscita in tutto un settore di azioni.*"
Così, l'errore sarebbe l'espressione o la manifestazione esplicita di un insieme di concezioni spontanee o precostituite, integrate in una rete coerente di rappresentazioni conoscitive, che si ergono in ostacoli all'acquisizione ed al controllo di nuovi concetti. Il superamento di questi ostacoli diventa allora il progetto dell'atto d'insegnamento, e l'errore il suo passaggio obbligato.

3. Nozione d'ostacolo

In didattica, individuiamo le 5 caratteristiche seguenti per un ostacolo:
1. È una conoscenza (e non un'assenza di conoscenza!).
2. Esso permette di produrre risposte adeguate ad alcuni problemi o classi di problemi.
3. Esso conduce a risposte erronee in altri tipi di problemi.

4. Presenta una resistenza a qualsiasi modifica o trasformazione, e si manifesta in modo ricorrente. Cioè ridiventa predominante in alcune situazioni, anche dopo essere stata sostituita apparentemente da una nuova conoscenza.
5. Il rifiuto di questa conoscenza avrà come risultato una conoscenza nuova.

4. Vari tipi di ostacoli

A - Ostacoli epistemologici

È il tipo di ostacoli messi in evidenza da BACHELARD ed al quale si riferiscono particolarmente le considerazioni che precedono.
Questi ostacoli sono inerenti al sapere stesso. La complessità dei concetti, e delle loro relazioni nei campi concettuali che gli allievi controllano poco, si trova in conflitto con le concezioni spontanee che tendono ad opporre conoscenze empiriche al sapere sapiente.
Gli ostacoli epistemologici sono individuabili nella storia per il tramite delle difficoltà incontrate dai matematici stessi per superarli. La comprensione di questi ostacoli si nutre delle ricerche in epistemologia e storia della matematica.

B - Ostacoli didattici

Sono gli ostacoli creati dalla scelta di questa o quella strategia d'insegnamento, che lascia formarsi, in occasione dell'apprendimento, conoscenze erronee o incomplete che si riveleranno in seguito come ostacoli allo sviluppo della concettalizzazione.
Gli ostacoli didattici sono inevitabili, inerenti alla necessità della trasposizione didattica: non si possono eliminare le tappe, le approssimazioni, le analogie più o meno pertinenti nell'apprendimento.
Riconoscere un ostacolo didattico permette all'insegnante di ritornare sulla presentazione primitiva del concetto in questione, per meglio rendere esplicita la difficoltà vissuta dall'allievo. Le ricerche in didattica hanno precisamente come applicazioni quelle di presentare agli insegnanti gli ostacoli didattici che le ricerche hanno potuto mettere in evidenza.

C - Ostacoli psicologici

Sono gli ostacoli che si presentano quando l'apprendimento si pone in contraddizione con rappresentazioni profondamente ancorate nell'allievo, o quando induce una destabilizzazione inaccettabile.
Molti fattori possono essere all'origine di ostacoli psicologici. Possono essere esterni alla relazione didattica (e questo non vuole dire che l'insegnante non se ne deve interessare) o causati da essa.

D - Ostacoli ontogenetici

Sono gli ostacoli che si esprimono quando l'apprendimento richiesto è troppo elevato, al di fuori della portata della maturità concettuale dell'allievo. Indipendentemente dalla spiegazione, l'allievo non comprende ciò che gli si chiede, lo sviluppo del suo pensiero resta estraneo al terreno concettuale sul quale si vuole condurlo.

Altri tipi di ostacoli sono stati evocati, ad esempio gli **ostacoli culturali** quando le conoscenze introdotte si inseriscono in una rete di concetti che prendono un senso in una cultura data, ma ne non hanno nella cultura di un allievo particolare.
Anche gli **ostacoli tecnici** si presentano come fonte di errori, quando la complessità del compito supera le capacità d'attenzione dell'allievo; provate dunque a fare una moltiplicazione grande nella numerazione romana!

5. Schemi e concetti

Per Piaget, uno **schema** è retto da una struttura logica che si è sviluppata nel cervello del bambino, in rapporto con l'ambiente e sulla base del patrimonio genetico. È uno strumento di azione e di generalizzazione.

Quando coordinano numerose azioni, gli schemi si fissano su proprietà comuni a queste azioni, in modo da individuare quelli che si dicono gli invarianti. Si ha, in questo caso, un inizio di generalizzazione.

Per esempio, l'osservazione quotidiana farà scoprire al bambino che le cose cadono quando le si lascia andare. Questa osservazione, generalizzata a tutte le cose creerà lo schema "gli oggetti cadono", che, per accomodamento, si completerà progressivamente: ci sono cose che non cadono, altre fluttuano,…

Quando il bambino avrà a sua disposizione il linguaggio, potrà caratterizzare questi invarianti mediante la parola: costruirà allora, contemporaneamente, il concetto e il vocabolario associato.

Per esempio, dirà "questa cosa sta cadendo" o "questo oggetto è più pesante di quello". Il concetto di pesantezza si stabilirà in questo modo, fino ad inserirsi in una rete di relazioni tra i comportamenti degli oggetti per allargarsi al concetto di attrazione, poi a ricevere in seguito uno statuto astratto, formalizzato nell'ambito di un modello meccanico.

I filosofi propongono come definizione di un **concetto**:

Un concetto è un'idea astratta e generale che permette di caratterizzare dati sensibili e dati costruiti.

Questa definizione è ripresa dai teorici delle Scienze dell'Educazione. Si potrà consultare con grande interesse il libro di Britt-Mari BARTH: "*L'apprentissage de l'abstraction*" (edizioni Retz, collana. actualités des Sciences Humaines, in Italiano *L'apprendimento dell'astrazione*, Brescia: Editrice La Scuola, 1990), in gran parte ispirato ai lavori di BRUNER.

L'approccio di Gérard VERGNAUD, quasi simile, tenta di rendere operativa questa definizione. Un **concetto** è caratterizzato da una terna ordinata: (S, I, s).

S è l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto. Ogni elemento di S è una concretizzazione del concetto, uno dei suoi rappresentanti.

I è l'insieme degli invarianti operativi del concetto, l'insieme delle proprietà che sono comuni agli elementi di S e che permettono di collocarli tutti nella stessa categoria concettuale.

s è un insieme di termini, di denominazioni o di simboli che designano il concetto.

Ad esempio, il concetto di funzione in matematica comprende tutte le funzioni che l'allievo, al suo livello, saprà caratterizzare come tali, le qualità che fanno di una relazione tra insiemi una funzione (definizione, univocità), le parole e simboli che rappresentano di solito una funzione, come i termini: applicazione, operatore, $f()$, $x \to y$ ….

Utilizzeremo nel seguito questo termine preciso di concetto, piuttosto che quello, vago, di nozione che è tuttavia pratico per esprimersi in generale.

In realtà un concetto avrà un'esistenza soltanto rispetto ad altri concetti e se è suscettibile di applicarsi alla spiegazione ed alla previsione. Cioè, dovrà inserirsi in un modello della realtà gradualmente costruito e diventato più complesso.

Ad esempio, il concetto di funzione sarà operativo soltanto se permette di riconoscere oggetti matematici che non sono funzioni, e se permette di considerare una funzione come uno degli oggetti rappresentativi di questo concetto. L'accesso a questo livello concettuale è lungo e irto di ostacoli, epistemologici e didattici. Succede, peraltro, che gli studenti che entrano all'università in generale non lo hanno completamente colto.

Queste ultime osservazioni hanno indotto Gérard VERGNAUD a sviluppare la nozione di **campi concettuali**, la cui costruzione ai vari livelli della scolarità è la vera sfida dell'apprendimento.

Un concetto riceverà il suo statuto astratto soltanto se è effettivamente reso indipendente del contesto concreto nel quale è stato presentato. Occorre dunque proporre molti esempi che mettano in gioco gli stessi concetti, in situazioni diverse, e, se possibile, in campi concettuali diversi.

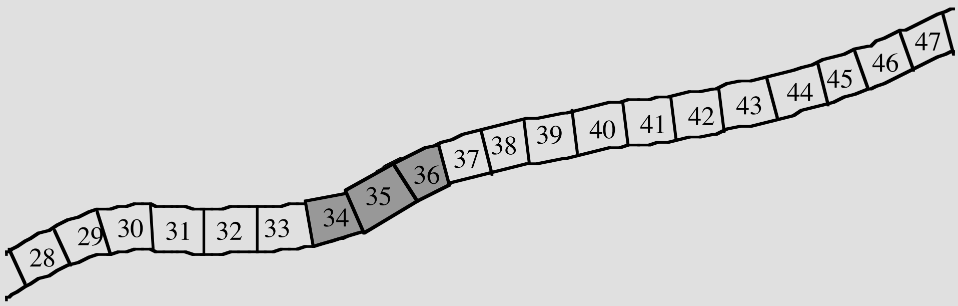
LE RUBAN DE NOE

F. Jaquet, responsable du « Groupe permanent des problèmes » de l'ARMT

Introduction

La revue *Grand N* publie régulièrement un ou deux *Points de départ* dans ses premières pages. Il s'agit de problèmes aux énoncés courts, que des enseignants peuvent proposer à leurs élèves, à l'école primaire (CE et CM). Pour son numéro 85 (2010), la revue a choisi deux problèmes de la finale du 11^{e} RMT, *Le Ruban de Noé* et *La boîte*, avec quelques commentaires sur les savoirs mathématiques mis en jeu dans ces points de départ et quelques éléments de nos analyses a posteriori. Les lecteurs intéressés peuvent se rendre sur le site de l'ARMT pour en savoir plus sur ces problèmes et, en particulier, sur leur exploitation en classe.
Nous publions ici cette analyse complémentaire pour le problème *Le ruban de Noé* : rappel de l'énoncé, approfondissement de l'analyse a priori et en particulier de la description de la tâche de l'élève et des procédures de résolution, quelques mots sur la famille à laquelle appartient le problème comme élément de la future « Banque de problèmes du RMT », quelques données obtenues lors de l'attribution des points aux copies examinées. Dans une dernière partie, intitulée *Potentialités du problème pour la classe*, nous nous engageons dans le courant des réflexions actuelles autour des problèmes du RMT : si les savoirs mathématiques en jeu sont bien explicités et reconnus pertinents dans le cadre du programme d'une classe, on peut se permettre d'imaginer comment l'enseignant peut exploiter le problème après que ses élèves l'ont résolu, puis esquisser quelques pistes pour aller au-delà de ce « point de départ ».

LE RUBAN DE NOÉ (Cat. 5, 6)
Noé a un ruban avec les nombres naturels de 1 à 100. Il colorie la partie du ruban avec les trois nombres consécutifs 34, 35 et 36.



Il additionne ces trois nombres et trouve la somme de 105, qui est justement son âge !
Pourrait-il aussi obtenir 105 en additionnant d'autres nombres consécutifs du ruban ?
Écrivez toutes vos solutions et les calculs que vous avez faits.

1. Savoirs mathématiques

- Arithmétique : les quatre opérations (sur les nombres naturels) et leurs propriétés
- Logique : initiation aux raisonnements « pré-algébriques» (où l'on s'intéresse aux propriétés caractéristiques et généralisables) à partir de raisonnements ou chaque cas est étudié successivement

2. Tâche de l'élève et procédures de résolution

2.1. Interprétation de l'énoncé

La figure, bien que partielle, facilite la lecture de l'expression « ruban des nombres naturels de 1 à 100 ».
La tâche essentielle de l'interprétation se situe dans la compréhension de « nombres consécutifs » qui l'élève doit traduire dans son langage par « nombres qui se suivent sur le ruban » ou « nombres qui sont les uns à côté des autres ». Le coloriage des cases 34, 35 et 36 donne un exemple de nombres consécutifs, pour le cas particulier de trois nombres ; mais dans la question, l'expression « autres nombres consécutifs » devra être comprise dans le cas général où il pourra y avoir deux, quatre, cinq ... nombres. De ce point de vue, l'exemple donné avec 3 nombres peut être perturbateur.

Une dernière tâche d'interprétation de l'énoncé est la vérification de l'affirmation 34 + 35 + 36 = 105 et la compréhension que Noé est vraiment très âgé !

2. 2 Appropriation du problème

C'est au moment où l'élève est convaincu qu'il y a d'autres suites de nombres consécutifs dont la somme est aussi 105 qu'il peut commencer à les rechercher.

2.3 La phase de résolution

Il faut déjà se convaincre qu'il n'y a pas d'autres suites de trois nombres consécutifs dont la somme est 105. Pour cela, il faut faire appel aux propriétés de l'addition et de l'égalité (par exemple, si l'on prenait 35, 36 et 37, on est certain de ne pas obtenir 105 et l'on peut même savoir, sans effectuer l'addition, que la somme sera 108, car chacun des nouveaux nombres vaut 1 de plus que les nombres d'origine). Le même raisonnement peut être tenu avec des nombres plus petits.
On peut alors penser à une suite de deux nombres chacun proche de la moitié de 105, puis vérifier que la suite 52 ; 53 convient et, par un raisonnement du même type que dans le cas de trois nombres, s'assurer que c'est la seule de deux nombres.
Pour le cas de quatre nombres, on peut imaginer une division par 4, ou essayer de prendre des nombres proches de la moitié de 52 et 53 (nombres de la suite précédente), ou partir de 25 si l'on a retenu que ce nombre est le quart de 100 ou encore travailler par essais successifs. Il faut alors se rendre compte que la suite 25 ; 26 ; 27 ; 28 ne convient pas car la somme de ses termes est 106 et que, en « reculant d'une case », la suite 24 ; 25 ; 26 ; 27 donne une somme trop petite, 102.
Ainsi de suite, par essais successifs, en partant d'un nombre quelconque ou de nombres proches des quotients de 105 par 5, par 6, par 7 ... on trouve encore cinq suites :
- de cinq nombres consécutifs : 19 ; 20 ; 21 ; 22 ; 23,
- de six nombres consécutifs : 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20,
- de sept nombres consécutifs : 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18,
- de dix nombres consécutifs : 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15,
- de quatorze nombres consécutifs : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12, 13 ; 14.

La recherche ne se limite pas à la détermination des sept suites mentionnées précédemment, de 2, 3, 5, 6, 7, 10 et 14 termes, mais doit aussi aboutir à l'élimination des suites de 4, 8, 9, 11, 12, 13 nombres consécutifs, et au-delà.

3. La famille du *Ruban de Noé* parmi les problèmes du RMT

Dans la « banque de problèmes » du RMT en préparation, une « famille » (désignée ici par « NN I ») regroupe actuellement les problèmes qui font appel aux opérations sur des suites de nombres naturels consécutifs et à leurs propriétés.
En voici une description succincte, qui permettra, lorsque le dispositif de la « banque » sera opérationnel, d'accéder rapidement à leurs énoncés, analyses et commentaires.

NN.I.1 (11.F.02). *Le ruban de Marie* (Cat 3, 4)
Trouver les suites de nombres naturels consécutifs dont la somme est 45

NN.I.2 (11.F.08). *Le ruban de Noé* (Cat 5, 6)
Trouver les suites de nombres naturels consécutifs dont la somme est 105

NN.I.3 (08.F 07). *Les maillots du RMT* (Cat. 4, 5, 6)
Retirer quatre nombres de la suite des nombres de 1 à 11, pour laisser deux groupes de nombres consécutifs de même somme.

NN.I.4 (10.F.04) *En sautant* (Cat. 3, 4, 5)
Déterminer, sur une « piste » des premiers naturels, le neuvième multiple commun de 3, 6 et 4.

NN.I.5 (17.I.01) *Le jeu des cinq dés* (Cat 3)
Dans un contexte de déplacement sur la piste des premiers nombres naturels, rechercher des combinaisons des résultats de lancers de cinq dés permettant d'arriver à la case 17 en partant de la case 0.

4. Analyses a posteriori

4.1. Données statistiques

Les résultats connus pour le problème *Le ruban de Noé* (Cat 5, 6) ont été obtenus dans les conditions de passation des épreuves du RMT (le maître est absent, remplacé par un « surveillant » neutre, la tâche de résolution est entièrement dévolue à la classe qui doit s'organiser, par groupes, pour résoudre sept problèmes en 50 minutes, et rédiger pour chacun d'eux un compte-rendu avec toutes les explications sur la procédure utilisée).
Le problème était proposé à 72 classes bien « aguerries » pour ce type d'épreuve puisqu'il s'agissait des finalistes de chaque section.

Critères d'attribution des points :

4 Les sept solutions ou les six nouvelles (34 à 36, puis 52 ; 53 ; 19 à 23 ; 15 à 20 ; 12 à 18 ; 6 à 15 ; 1 à 14), avec les calculs correspondants
3 Les sept solutions (ou les six nouvelles) sans calculs ou quatre à cinq nouvelles solutions avec calculs
2 Quatre à cinq nouvelles solutions sans calculs ou deux à trois nouvelles avec calculs
1 Une solution nouvelle avec calculs, ou deux à trois solutions sans calculs, ou solutions avec erreurs de calcul
0 Incompréhension du problème.

Résultats obtenus, sur les copies rendues par les 72 classes :

Points	4	3	2	1	0	N	m
Cat 5	5	5	13	6	10	39	1,72
Cat 6	9	8	6	2	8	33	2,24
total	14	13	19	8	18	72	1,96

4.2. Commentaires

De la catégorie 5 (vers 11 ans, en fin d'école primaire) à la catégorie 6 (vers 12 ans), la moyenne des points augmente légèrement (de 1,72 à 2,24). Globalement, 20% des classes donnent une réponse optimale, 20% trouvent de 4 à 5 nouvelles suites, 25 % trouvent la moitié des solutions, 10% n'en trouvent qu'une seule et 25% « n'entrent pas dans le problème ».
Le même problème (NN.I.1 *Le ruban de Marie*) a été proposé à des élèves plus jeunes, de catégories 3 et 4 avec une somme des nombres consécutifs plus petite : 45 (au lieu de 105). Il n'y avait que cinq suites : de deux termes (22 ; 23), de trois termes (14 ; 15 ; 16, donnée en exemple), de cinq termes (7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11), de six termes (5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10) et de neuf termes (1 ; 2 ; 3 ; ... ; 9). Le problème s'est révélé un peu plus difficile que le précédent avec des moyennes de points de 1,47 en catégorie 3 (8-9 ans) et 1,94 en catégorie 4 (9-10 ans) sur 72 classes également.

5. Potentialités du problème pour la classe

Le problème *Le ruban de Noé* peut évidemment être aussi proposé en classe, par petits groupes, voire individuellement, avec une aide éventuelle sous forme d'une mise en commun ou de relance donnée par l'enseignant pour être sûr que chacun a pu s'engager dans la recherche. Les élèves feront alors beaucoup d'essais et de vérifications et dès la découverte d'une ou deux suites, les procédures deviendront vraisemblablement routinières. Mais ce n'est qu'un « point de départ » qui permet d'aller bien au-delà de la découverte des sept suites pour le cas particulier d'une somme de 105.

5.1. Savoirs mathématiques

L'exploitation du *Ruban de Noé* permet de consolider des connaissances, souvent implicites ou même ignorées tant elles paraissent évidentes ou élémentaires.
<u>Un premier savoir</u> se rapporte à *la construction de suites de l'ensemble des nombres naturels* : 0, 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ... , par addition de 1 pour passer d'un terme au suivant et, par conséquent, à la soustraction de 1 pour revenir au terme précédent : ce qui se traduit, dans le cas général du terme n par la suite ... ; $n - 1$; n ; $n + 1$; $n + 2$; ... donnée ici en écriture algébrique, mais qui peut être exprimée aussi sous forme rhétorique par des expressions du genre « si on ajoute 1 à n'importe quel nombre de la suite on trouve le suivant, si on ajoute 2 on trouve celui qui vient juste après, ... et si on enlève 1 on trouve le précédent ... (pour autant qu'on ne « recule pas » au-delà de 0). Dans le *Ruban de Noé*, par exemple, ce savoir peut

intervenir pour trouver directement le premier des deux nombres consécutifs, sans faire d'essais : le second vaut « un de plus que le premier », la somme des deux vaut le premier et « un de plus que le premier » et, par conséquent, « deux fois le premier plus un » ; ce qui permet d'être certain que le double du premier est 104 et que le premier est la moitié de 104, c'est-à-dire 52.
L'exemple précédent illustre déjà une deuxième catégorie de savoirs, qui concerne les *propriétés de l'addition : l'associativité, la commutativité et l'existence d'un élément neutre (0)*. Ces propriétés sont mises en œuvre « naturellement » par les élèves, sans qu'ils en soient conscients, et sont souvent occultées, dans les pratiques scolaires, par les techniques et algorithmes. Ce n'est que plus tard, au moment d'aborder les autres opérations, puis le calcul littéral, qu'on se rendra compte de l'importance d'une réflexion explicite à ce propos.
Il faut examiner par le détail les opérations successives qui peuvent apparaître dans le contexte du *Ruban de Noé* pour découvrir que les propriétés de l'addition interviennent de manière permanente dès qu'on va au-delà des calculs « mécaniques » pour chercher à expliquer, simplifier, généraliser les opérations effectuées.
Par exemple, pour trouver la décomposition de 105 en somme de cinq nombres consécutifs à partir de l'hypothèse - légitime - que le premier est proche de 20, il faudra additionner 20, 21, 22, 23 et 24. On peut par exemple le faire ainsi :
$20 + 21 + 22 + 23 + 24 = 20 + (20 + 1) + (20 + 2) + (20 + 3) + (20 + 4) =$
$= (20 + 20 + 20 + 20 + 20) + (1 + 2 + 3 + 4) = 100 + 10 = 110.$
L'examen de cette suite d'expressions additives fait apparaître, de la première à la deuxième, une décomposition ou « dissociation » des termes 21, 22, 23 et 24 ; puis un regroupement ou « réassociation », ce qui a nécessité de nombreuses interversions d'ordre ou « commutations », pour arriver à la troisième expression, puis les additions au sein de chacun des deux regroupements pour obtenir les deux dernière expressions 100 + 10 et 110. Il s'agit ici d'une mise en œuvre intensive de l'associativité et de la commutativité de l'addition.
De même, un usage explicite de ces propriétés permet de se convaincre que 105 est la somme de six nombres consécutifs (ici sous forme algébrique qui n'est pas envisageable avec de jeunes élèves, en désignant le premier terme par n) :
$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) = (n + n + n + n + n + n) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) =$
$= 6 \times n + 15 = 105 \quad \Rightarrow \quad 6 \times n = 90 \quad \Rightarrow \quad n = 15.$
Dans cet exemple, outre l'associativité et la commutativité, il y a encore la définition de la multiplication de nombres naturels, comme substitution d'une somme de termes égaux[17].
On arrive ainsi à une troisième catégorie de savoirs dans l'exploitation du *Ruban de Noé* qui concernent la *multiplication de nombres naturels* : passage d'écriture additives à des écritures multiplicatives, multiples et diviseurs, voire décomposition d'un nombre en facteurs.
On peut par exemple observer que 105 est un multiple de 3, conclure qu'il sera la somme de trois nombres consécutifs dont celui du « milieu » sera le tiers de 105, soit 105 : 3 = 35. De même, puisque 105 est multiple de 5, il est décomposable en une somme de cinq termes consécutifs dont celui du milieu est 105 : 5 = 21. On trouve ainsi de la même manière le terme central d'une suite de sept nombres consécutifs : 105 = 7 = 15.
Pour les recherches allant au-delà du point de départ donné, pour des degrés scolaires plus élevés, la décomposition d'un nombre en facteurs impairs permettra de savoir à l'avance s'il est possible de l'écrire sous forme de somme de nombres consécutifs.[18]

5.2. L'intervention de l'enseignant

Lors des épreuves du RMT, le maître n'intervient pas puisqu'il n'est pas en classe, selon le règlement du rallye. On peut aussi imaginer que, pour ce « point de départ » utilisé en classe, la tâche de résolution soit entièrement dévolue aux élèves, même si la situation est inconfortable pour le maître qui a envie de « bien faire », « d'aider » les élèves, de signaler des erreurs, ou d'interférer d'une manière ou d'une autre dans le déroulement des recherches des groupes. Dans les lignes qui suivent, nous supposons que l'intervention du maître débute par l'organisation d'une mise en commun des solutions rédigées ou d'un débat collectif, après que le problème a été résolu individuellement ou par groupes.

---

[17] À ce propos on rappellera que ceux qui pensent que la distinction entre « multiplicateur » et « multiplicande » est utile utiliseront soit l'expression « 6 x *n* » signifiant une répétition de six « fois » le terme « *n* » soit l'expression « *n* x 6 » traduite par « *n* multiplié par 6 ».
[18] Des explications complémentaires seront données en rapport avec la dernière question en fin d'article,

L'énoncé du *Ruban de Noé* se termine par la demande : *Écrivez toutes vos solutions et les calculs que vous avez faits*. Les écritures les plus fréquentes qu'on voit apparaître alors sont des additions en colonne ou des suites d'additions.
Par exemple, pour vérifier que la somme des cinq nombres consécutifs de 19, 20, 21, 22 et 23 est 105 :

(fig. 1)

$$\begin{array}{r} 19\\ 20\\ 21\\ 22\\ \underline{+\ 23}\\ 105 \end{array}$$

ou : *(fig. 2)*

$$\begin{array}{l} 19 + 20 = 39\\ 39 + 21 = 60\\ 60 + 22 = 82\\ 82 + 23 = 105 \end{array}$$

ou encore : *(fig. 3)*

$$19 + 20 = 39 + 21 = 60 + 22 = 82 + 23 = 105\ !$$

Ce type d'écriture est évidemment hérité des pratiques algorithmiques où les nombres en jeu sont traités dans un ordre immuable, de haut en bas ou de gauche à droite et le « résultat » apparaît à la fin. Le signe « = », ou la barre horizontale tracée sous le dernier nombre, signifie « ça fait » ou « j'obtiens », comme sur la calculatrice. La relation d'égalité n'est donc pas encore symétrique, comme chez le mathématicien, ce qui ne dérange absolument pas les auteurs de la troisième écriture, jugée incorrecte au niveau mathématique mais efficace pour l'élève *(fig. 3)*.
On peut alors faire apparaître la somme cherchée, non comme un « résultat » mais comme un « nouveau nombre » qu'on écrit « 19 + 20 + 21 + 22 + 23 », montrant les cinq nombres en jeu et les quatre opérations. Cette écriture du nombre cherché est provisoire car elle est bien complexe ; on va chercher à la modifier progressivement pour arriver à une écriture plus simple, qui, on le verra plus tard, sera « 105 ».
Il faut remarquer que les élèves ne vont pas proposer spontanément l'écriture précédente, c'est au maître de la présenter, comme la manière habituelle d'écrire une somme de cinq termes. Elle va servir de base à l'explicitation des phases de calcul où vont intervenir les propriétés de l'addition (il n'est pas nécessaire de raconter tout ceci à l'élève, mais simplement de l'habituer à travailler avec des écritures de « nombres » plutôt qu'avec des traces de calculs).
Le maître a ensuite une responsabilité délicate : valoriser les suggestions des élèves pour simplifier progressivement la somme initiale et aboutir à des opérations qu'on peut effectuer mentalement. On aborde ici cette problématique du calcul mental qui s'appuie consciemment ou non sur les propriétés des opérations et qu'on désigne parfois par « calcul réfléchi » ou par « calcul raisonné », par opposition au « calcul mémorisé ». Paradoxalement, ces procédures mentales de calcul ne peuvent pas se justifier ou parfois même être développées, sans un support écrit permettant de les expliciter.
Dans l'exemple choisi, supposons qu'un élève suggère d'additionner 19 et 21 car « on voit que ça fait 40 ». Une justification écrite détaillée pourrait prendre la forme de la suite d'égalités :
$19 + 21 = 10 + 9 + 20 + 1 = 10 + (9 + 1) + 20 = 10 + 10 + 20 = 40$
dans laquelle apparaît la décomposition de 19 et de 21 (associativité) puis le passage du terme 1 devant le terme 20 (commutativité, puis l'association des termes 9 et 1 avant d'obtenir 40.
On pourrait avoir aussi $19 + 21 = 19 + 1 + 20 = 20 + 20 = 40$ ou encore $19 + 20 + 1 = 39 + 1$ (utilisant l'associativité), ce qui souligne qu'un calcul mental peut toujours être réalisé de différentes manières et que chacun peut choisir celle qui convient le mieux à sa "vision des nombres" et à ses ressources en calcul.
Si de telles justifications paraissent superflues, on peut avancer plus rapidement en partant de l'écriture de départ pour arriver à une somme de trois nombres :
$19 + 20 + 21 + 22 + 23 = 20 + (19 + 21) + 22 + 23 = 20 + 40 + 22 + 23 = (20 + 40) + 22 + 23 = 60 + 22 + 23$
où interviennent les mêmes propriétés que précédemment.
Au cours de ces simplifications d'écriture on aura peut-être l'occasion de faire remarquer aux élèves que si l'on peut modifier l'ordre des termes, ou les regrouper de différentes manières, dans une addition, ça ne marche pas pour les soustractions.
Par exemple si l'on passe par $(20 - 1) + 20 + (20 + 1) + 22 + 23$, on ne pourra pas associer les trois premiers termes ainsi : $20 - (1 + 20)$.
Il n'est pas possible de donner de scénario plus précis pour le déroulement du débat collectif suivant la résolution du problème *Le ruban de Noé*. Il dépend des nombreuses variables de la classe, des élèves, de l'enseignant, du temps, du parcours didactique ... On ne peut que relever ici l'importance du rôle du maître et de ses interventions et souligner qu'une explicitation des propriétés des opérations n'est vraisemblablement pas inutile avec des élèves de 10 à 11 ans, ce qui ne signifie pas que les termes savants comme associativité… doivent être utilisés.

Cette dernière remarque est justifiée par une analyse récente de plusieurs centaines de feuilles-réponses au problème *Les nombres de M. Trapèze,* proposé en catégories 6 à 10 (élèves de 11 à 16 ans) lors du 18^{e} RMT. Dans leur grande majorité, les élèves ont reconnu dans la situation proposée une progression arithmétique, de raison 2, de 25 à 30 termes (selon le moment où la suite a été identifiée). Ils ont aussi vu que la réponse au problème exige le calcul de la somme des termes de cette suite. Cependant ils échouent dans cette dernière étape ; presque tous en catégories 6 et 7, et encore majoritairement en catégories 8 et 9 en raison d'une incapacité à organiser leurs opérations. Celles-ci sont en effet présentées en colonne ou par des suites d'additions successives (comme dans les figures 1 à 3 précédentes), conduisant à des procédures fastidieuses sujettes aux erreurs et inattentions.
Si cette majorité d'élèves avait rencontré plus souvent des écritures de « nombres » sous forme additive que des traces de calculs algorithmiques, si elle avait été sensibilisée au fait qu'on ne doit pas obligatoirement additionner plusieurs termes de gauche à droite mais qu'on peut les permuter pour se simplifier la tâche, qu'on peut remplacer des sommes de nombres égaux par des multiplications ... peut-être qu'elle pourrait organiser de « longues » combinaisons d'opérations plus efficacement.
Lors du débat collectif, le maître s'attachera également à mettre en évidence les différentes stratégies utilisées par les élèves : essais au hasard, essais plus systématiques tenant compte des premiers résultats utilisés, essais raisonnés (division par 5 pour trouver 5 nombres consécutifs, par exemple). Il s'attachera également à mettre en évidence le travail de preuve nécessaire pour s'assurer de l'unicité des réponses : si on a trouvé une réponse avec 5 nombres consécutifs, toute augmentation ou diminution des nombres de la suite entraîne une augmentation ou une diminution de la somme.

3. Quelques pistes pour aller plus loin

Selon ce qui précède, le *Ruban de Noé*, est un point de départ pour un travail sur les propriétés de l'addition et sur des stratégies plus ou moins organisées et raisonnées qui peut facilement être poursuivi dans le même contexte.

A. Une variante du problème déjà mentionnée, *Le ruban de Marie*, où le 105 est remplacé par 45 fait intervenir des nombres un peu plus petits et n'a que cinq solutions (au lieu de sept). On peut ainsi modifier les valeurs de la variable didactique « nombre somme » en conservant le même énoncé.

B. Une autre exploitation est de chercher tous les nombres qui sont la somme de deux, trois, quatre ... nombres naturels consécutifs. On obtient ainsi des résultats généraux intéressants que les élèves peuvent justifier :

   Tous les nombres impairs, à partir de 3, sont la somme de deux nombres naturels consécutifs. (Une explication possible : un nombre impair vaut 1 de plus que le nombre qui le précède, qui est pair et donc divisible par 2, ce qui permet de trouver le premier des deux nombres par une soustraction de 1 et une division par 2).

   Tous les multiples de 3 (à partir de 6) sont la somme de trois nombres naturels consécutifs. (Explication possible : par exemple, puisque $105 = 3 \times 35$, le nombre du « milieu » sera 35, le premier qui vaut un de moins sera 34 et le troisième qui vaut un de plus sera 36.)

   Les nombres qui sont la somme de quatre nombres naturels consécutifs sont 10, 14, 18, 22, ...

C. Une belle surprise enfin : Quels sont les nombres qui ne sont jamais la somme de nombres naturels consécutifs ?

   La réponse arrivera dans le prochain numéro !

LES ERREURS DES ELEVES ET LEUR GESTION DIDACTIQUE :

OU EN SOMMES-NOUS AUJOURD'HUI ?

Michèle Artigue, Université Paris Diderot – Paris 7, LDAR

1. Introduction

Depuis son origine, la recherche en didactique des mathématiques s'est interrogée sur les erreurs des élèves, cherchant à les identifier et les classer, à en comprendre les origines et à trouver des moyens d'y remédier voire de les prévenir, s'interrogeant sur leur rôle dans l'apprentissage, sur leur gestion didactique et sur les effets de cette gestion. On peut donc légitimement se demander où nous en sommes aujourd'hui, quelles connaissances ont été élaborées et comment, à la lumière de ces connaissances, peut être pensée une gestion didactique productive des erreurs, mais aussi quels sont les sujets de débats éventuels, les questions qui restent ouvertes.

C'est l'état actuel de ma réflexion sur ces questions que j'aimerais partager avec vous aujourd'hui. Je préciserai tout d'abord que ce n'est pas du tout en tant que didacticienne, spécialiste de ces questions que je m'adresse à vous. Je pense au contraire que j'ai beaucoup à apprendre des travaux que vous menez depuis plusieurs années dans ce domaine, de tout le travail que vous avez réalisé pour cette rencontre, mais Michel Henry a su me convaincre qu'en apportant un éclairage extérieur à votre groupe, je pourrais peut-être vous aider à relever les défis que vous vous êtes donnés et qui consistent, si j'ai bien compris, à partir de l'analyse des expérimentations menées de problèmes du rallye :

« à valider ou réfuter certaines hypothèses relatives aux obstacles sous-jacents aux erreurs observées dans des copies d'élèves, afin de voir si les problèmes du RMT peuvent contribuer dans les conditions spécifiques du rallye et dans leurs réinvestissements en classe à faciliter l'acquisition de nouveaux savoirs fondamentaux».

Comme le précise aussi le document de présentation de cette rencontre, dans vos travaux sur la compréhension et l'interprétation des erreurs des élèves, de leurs stratégies de résolutions et de leurs « blocages », vous vous êtes inspirés de différentes approches présentes dans le champ didactique : l'épistémologie piagétienne et l'accent mis par elle sur le rôle des déséquilibres et conflits cognitifs dans l'apprentissage, l'épistémologie Bachelardienne et l'accent mis par elle également sur les ruptures que nécessite l'accès à la connaissance scientifique, cette fois à travers la notion d'obstacle épistémologique, la théorie des champs conceptuels et les moyens qu'elle nous fournit pour approcher les processus de conceptualisation à travers les notions de conception, de schème et de théorème en acte notamment, la théorie des situations didactiques enfin qui distingue différentes sortes d'obstacles : ontologiques, didactiques, épistémologiques, et porte, du fait de sa forte sensibilité épistémologique, une attention toute particulière à ces derniers.

Dans ma réflexion, je vais revenir sur ces différentes approches, le regard qu'elles nous amènent à porter sur l'erreur, sur son rôle dans les apprentissages, et sur les décisions didactiques qui peuvent en résulter mais j'aimerais aussi, pour penser la gestion didactique de l'erreur, élargir le regard à d'autres approches, en prenant en compte ce que peuvent apporter d'une part des approches cognitives moins centrées sur l'idée de discontinuité et d'obstacle, d'autre part des approches qui, comme l'approche anthropologique, voient dans les erreurs des élèves en premier lieu le moyen d'approcher les fonctionnement et dysfonctionnement des systèmes didactiques auxquels ces élèves sont assujettis. Mais auparavant, je souhaiterais souligner la normalité de l'erreur en mathématique et son caractère souvent productif.

2. L'erreur en mathématique : un phénomène normal et productif

L'erreur, qu'elle soit individuelle ou collective, est un phénomène banal en mathématiques, contrairement à la vision de cette discipline, exemple de rigueur et d'exactitude, portée par la culture commune. Et, comme le montre bien l'histoire des mathématiques, elle peut être aussi étonnamment productive. Une pratique mathématique assujettie aux canons de rigueur de la discipline, même lorsqu'il s'agit d'une pratique experte, ne met pas à l'abri de l'erreur. C'est ce que soulignait le professeur Solomon Marcus dans une conférence à l'université Paris 7 la semaine dernière, en distinguant trois types d'erreurs : des erreurs syntaxiques, sémantiques et pragmatiques[19] et en soutenant la thèse que de nombreux si ce n'est la plupart des travaux pionniers en mathématiques contiennent des erreurs qui ont eu un rôle très stimulant.

> "The concept of 'uniform convergence' is born from a syntactic-semantic mistake made by Cauchy. The concept of an ideal in a ring was invented by Ernst Kummer trying, but failing to solve Fermat's Last Theorem. Henri Lebesgue's syntactic mistake in his famous "Sur les fonctions représentables analytiquement" (1905) became the starting moment of a new branch in General Topology: "Theory of analytic and projective sets" (Suslin, Lusin). Chaos theory was initiated by Poincaré by trying to bridge the gap in his famous work related to the three-body problem." (Extrait du texte de présentation de la conférence)

J'aime personnellement citer l'exemple, décrit par Lebesgue dans son ouvrage : *La mesure des grandeurs* (1935), de l'erreur qui a consisté à penser que l'on pouvait définir l'aire d'une surface de l'espace par passage à la limite à partir de triangulations de cette surface, en faisant tendre la taille des triangles vers 0. Cette définition généralisait en fait la définition de longueur d'une courbe plane comme limite des longueurs des lignes brisées inscrites dans cette courbe lorsque le pas de subdivision tend vers 0. Il raconte la stupeur qu'a créé le contre-exemple produit indépendamment par Peano et Schwarz montrant que cette procédure, pour une surface aussi régulière qu'un cylindre, pouvait conduire, selon le procédé de triangulation choisi, à obtenir comme limite n'importe quel nombre réel supérieur à l'aire du cylindre et même l'infini.

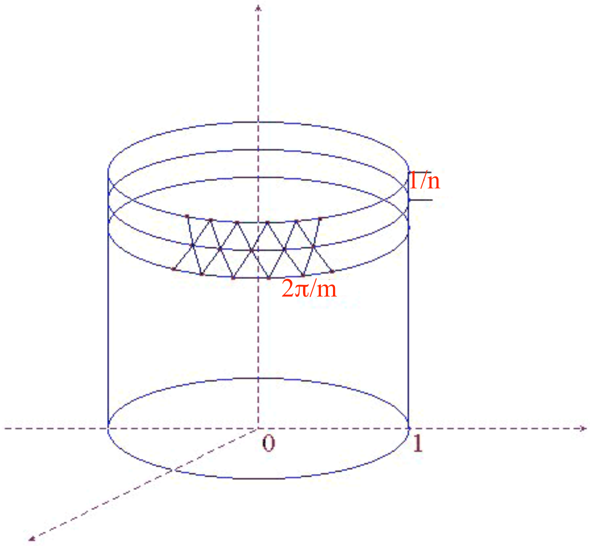


Figure 1 : Le contre-exemple de Peano

La résolution de ce paradoxe a joué un rôle moteur pour éclaircir la notion et d'aire d'une surface et comprendre ses rapports avec celle de longueur d'une courbe (voir par exemple (Gandon et Perrin, 2009) dont est extraite la figure 1. J'aime citer cet exemple parce qu'il aide aussi à éclairer des situations paradoxales bien connues des enseignants, comme la suivante (cf. figure 2) où un segment [A B] de longueur unité étant donné, suivant la façon dont on fait tendre simultanément n et m vers l'infini on peut obtenir comme limite de la longueur de la ligne brisée n'importe quel nombre réel entre 1 et l'infini, voire l'infini, et les conditions auxquelles ce type de situation paradoxale est soumis.

Figure 2 : Une situation paradoxale analogue en dimension 2

19 Pour faire comprendre la distinction entre ces trois types d'erreurs, il recherche des opposés à l'idée d'erroné. Ainsi l'opposé syntaxique d'erroné serait « correct », son opposé sémantique serait « vrai », son opposé pragmatique serait « adéquat », « approprié ».

L'erreur est banale en mathématique et elle peut être aussi singulièrement productive. Ce qui est vrai pour les mathématiciens l'est aussi pour les élèves et les étudiants, et puisque j'ai introduit une distinction entre syntaxe et sémantique, je voudrais d'abord insister sur les limites d'un contrôle syntaxique de l'erreur, bien mise en évidence par des recherches didactiques comme celles menées par exemple à Lyon autour de Gilbert Arsac et Viviane Durand Guerrier (2003, 2005). Ce que montrent en effet ces recherches, c'est que le premier signal d'erreur est sémantique, c'est en général le fait que ce qui est obtenu va à l'encontre de ce qui est connu pour vrai par ailleurs ou est suffisamment contraire aux anticipations possibles pour justifier un doute. La palette des exemples et contre-exemples disponibles, les connexions que l'on est capable de faire avec des résultats du même domaine ou d'autres domaines sont ici essentielles. Il est normal qu'un élève de lycée pense que si une fonction continue f a un minimum en a, il existe un intervalle centré en a telle que f soit décroissante à gauche de a et croissante à droite de a sur cet intervalle. Rien dans les exemples de fonctions qu'il a rencontrées ne peut le conduire à mettre en doute une telle conjecture. Mais je dois avouer que, chaque année, mes étudiants de CAPES en étaient tout autant persuadés, comme ils étaient persuadés du fait que si une fonction dérivable a une limite finie en l'infini, sa dérivée, elle, tend nécessairement vers 0. Mais l'existence de ces convictions erronées et très fortes se révélait ensuite avec eux très productive pour retravailler ces notions familières mais toujours largement inconnues que sont les fonctions d'une variable réelle.

Qu'en est-il cependant de l'erreur pour le monde scolaire ? Pour les enseignants, l'erreur a d'abord valeur de symptôme, elle est le signe que quelque chose n'a pas été compris, que l'apprentissage visé n'a pas encore abouti. Elle est souvent attendue mais parfois surprenante ; elle est souvent aussi désespérément récurrente, provoquant un sentiment d'impuissance. Elle n'était pas, quand j'ai commencé à enseigner, perçue comme un objet sur lequel on pouvait travailler et construire, mais quelque chose qu'il fallait éradiquer au plus vite, en remplaçant l'erroné par le correct, voire essayer de prévenir. La recherche didactique a fortement contribué à changer cette vision. Elle l'a fait d'abord en cohérence avec une vision cognitive mettant l'accent sur les discontinuités nécessaires de l'apprentissage.

3. Une vision de l'erreur pilotée par discontinuités et obstacles

Cette vision s'est exprimée de façons diverses suivant les approches didactiques mais les termes de misconception, de conflit cognitif, d'obstacle cognitif, d'obstacle épistémologique en sont emblématiques. Deux positions m'en semblent caractéristiques :

- La première, c'est la conviction que, pour comprendre les erreurs, pour agir sur elles efficacement, il faut rechercher les cohérences qui leur sont sous-jacentes : conceptions, connaissances, car il y a en général et en particulier dans le cas d'erreurs partagées ou résistantes, une cohérence sous-jacente.
- La seconde, c'est la conviction que les conceptions spontanées des élèves sont le plus souvent (voire même nécessairement dans certains cas) en conflit avec celles que l'enseignement essaie d'installer. Apprendre c'est résoudre des conflits cognitifs, c'est surmonter des obstacles épistémologiques en rejetant des formes de connaissances inadaptées. L'erreur est indispensable à l'apprentissage.

Cette vision, en termes de discontinuités et de conflits, est au cœur de l'épistémologie Piagétienne avec les notions d'accommodation, de déséquilibre et de rééquilibration majorante. Elle est particulièrement radicale dans l'épistémologie Bachelardienne qui considère que l'accès à la connaissance scientifique passe par le rejet des formes antérieures de connaissance. Ce qu'exprime clairement la citation de Bachelard en partie rappelée dans la présentation de cette rencontre :

> « ...c'est dans l'acte même de connaître intimement qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle des lenteurs et des troubles... La compréhension s'acquiert contre une connaissance antérieure en détruisant des connaissances mal faites. »

Et c'est cette vision Bachelardienne qui a notamment nourri la réflexion de Guy Brousseau sur l'erreur, même si Bachelard exclut quant à lui les mathématiques de son propos (Bachelard, 1938). Ceci l'a conduit dès 1976 à opérer une conversion didactique de cette notion, une conversion qui a profondément modifié le regard porté sur les erreurs des élèves, du moins celles qui n'apparaissent pas fugace, erratiques, mais au contraire reproductibles et persistantes :

> « Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes. De plus ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une "connaissance" ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions ». (Brousseau, 1983, p. 173-174).

Non seulement ces approches ont permis de donner un autre statut à l'erreur, mais elles ont conduit également à penser autrement sa gestion didactique. Car, comme l'explique Brousseau, si l'obstacle est connaissance, avec ce que cela comporte d'objets, de relations, de méthodes d'appréhension, de prévision, d'évidences, de ramifications, cette connaissance va résister au rejet, elle tentera de s'adapter localement. Il s'ensuit que :

> « Le franchissement d'un obstacle exige un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance, c'est-à-dire des interactions répétées, dialectiques de l'élève avec l'objet de sa connaissance. » (ibidem, p. 175)

Je me bornerai à évoquer deux domaines dans lesquels cette approche en termes d'obstacles épistémologiques s'est révélée particulièrement pertinente et qui, j'en suis sûre, vous parlent sans qu'il me soit nécessaire d'entrer dans plus de détails : l'extension du champ des nombres et des opérations au-delà des entiers vers les rationnels et décimaux à l'école élémentaire d'une part, la conceptualisation de la notion de limite qui joue un rôle essentiel dans l'entrée dans le champ de l'analyse d'autre part. Les travaux menés dans ces domaines ont en effet particulièrement bien montré comment des connaissances anciennes, issues de pratiques sociales, voire d'apprentissages scolaires antérieurs, qui avaient fait la preuve de leur efficacité, pouvaient faire obstacle aux apprentissages visés. Ils ont aussi nourri des ingénieries didactiques visant à confronter les élèves à ces connaissances obstacles productrices d'erreurs résistantes à travers des situations permettant de les mettre en défaut mais aussi de soutenir la construction de nouvelles connaissances et cohérences, par les interactions permises avec des milieux adidactiques appropriés. Dans le cadre de l'extension du champ des nombres et des opérations, la situation bien connue du puzzle de Brousseau a été ainsi construite pour mettre en défaut le modèle additif comme modèle de situations mathématiques d'agrandissement et permettre la mise en place du modèle linéaire à la base de l'extension de la multiplication (Brousseau N. & Brousseau G., 1987).
Mais, comme je le soulignais déjà dans (Artigue, 1990), cet accent mis sur les ruptures et les obstacles a aussi contribué au développement un peu caricatural d'une vision de l'apprentissage comme un parcours d'obstacles qu'il s'agirait successivement d'affronter et franchir, chaque franchissement conduisant à substituer à des conceptions anciennes inadéquates, erronées, de nouvelles conceptions. C'est une telle vision que contestent par exemple Nuñez, Edwards et Matos, dans un article sur la continuité publié en 1999, en s'appuyant sur les travaux du courant dit de « l'Embodied cognition» et notamment l'ouvrage de Lakoff et Nuñez (2000) qui met la pensée métaphorique au cœur de l'élaboration mathématique. Selon eux, la conception visant à voir une fonction continue comme une fonction dont on peut tracer la représentation graphique sans lever le crayon a été longtemps perçue dans la recherche en éducation mathématique comme une conception obstacle, une misconception à laquelle il s'agissait de substituer, le plus rapidement possible, une conception correcte : la conception moderne. Pour eux, il y a là une vision de l'apprentissage qui, mettant exagérément l'accent sur les discontinuités et les ruptures, ne reflète pas ce qu'est le fonctionnement réel des mathématiciens.
Comme je l'ai expliqué dans (Artigue, 2008) :

> « Partant de la conception de la continuité déjà évoquée ci-dessus - qu'ils qualifient de naturelle - comme caractérisant un processus sans sauts et la contrastant avec la conception mathématique actuelle, ils mettent l'accent sur le fait que ces deux conceptions se fondent sur des métaphores conceptuelles fondamentalement différentes. Ils qualifient la première de «métaphore du mouvement fictif » qu'ils résument de la façon suivante : « Une courbe est le mouvement du voyageur qui la trace». Il s'agit là d'une vision cinématique et, selon cette vision, la courbe n'est pas un ensemble de points mais des points peuvent y être placés dessus comme des bornes kilométriques le long d'une route, et les points peuvent se déplacer comme des voyageurs le long d'une route. Les auteurs montrent que le langage des étudiants mais aussi des mathématiciens est rempli de références à cette vision cinématique. Des métaphores sous-tendent aussi les notions Weierstrassienne de continu et de continuité mais elles sont radicalement différentes : une courbe y est un ensemble de points ; le continu y est associé à l'absence de trou et la continuité à la préservation de la proximité. Les points sont donc maintenant constitutifs de la droite et le caractère continu de cette dernière ne va plus de soi. Une fonction continue préserve en fait l'absence de trou qui caractérise le continu.
>
> Prenant appui sur ces distinctions, les auteurs critiquent sévèrement un enseignement qui, selon eux, établit une stricte hiérarchie entre ces deux conceptions du point de vue de la connaissance et présente la définition actuelle comme celle qui capturerait l'essence d'une idée mathématique en fait multiforme. Ils rejettent une vision de l'apprentissage qui concevrait la conception naturelle et cinématique de la continuité comme un obstacle épistémologique ou une conception erronée à dépasser. Ils plaident pour un enseignement qui, tout en montrant ce qu'apporte la formalisation

> moderne du continu et de la continuité, ne cherche pas à la couper de ses enracinements physiques mais cherche plutôt à organiser la complémentarité des visions que les deux métaphores induisent. » (p.163-164)

On notera que ces travaux rejoignent en un sens ceux de didacticiens de la physique qui, tels Laurence Viennot, ont bien montré que l'on retrouve chez les experts les modes de raisonnements communs qui, tel le raisonnement linéaire causal, sont sources classiques d'erreur chez les élèves, mais qu'il y a chez ces experts une meilleure aptitude à en contrôler le fonctionnement (Viennot, 1996).

Il n'y a pas de doute non plus que les évolutions des cadres théoriques en didactique des mathématiques, et notamment le développement des approches socio-culturelles, l'attention croissante portée à la dimension sémiotique au sens large de l'activité mathématique, amènent à repenser les rapports entre processus d'adaptation et processus d'acculturation dans l'apprentissage, à repenser aussi le rôle de l'enseignant en fonction de cette vision. Comme le soutient Anna Sfard dans son approche de l'apprentissage en termes de « commognition » (Sfard, 2008), la métaphore d'acquisition même si elle imprègne nos cultures n'est qu'une des métaphores possibles pour penser l'apprentissage. Comme toute métaphore elle a ses limites, et nous avons aujourd'hui à gagner de la combinaison de cette métaphore avec d'autres et notamment celle de participation qui sous-tend un certain nombre de travaux récents. Ces évolutions ne sont pas sans rejaillir sur la façon dont nous voyons les erreurs des élèves et les moyens de les faire progresser. Mais avant d'y revenir indirectement à travers l'approche anthropologique, je souhaiterais revenir sur la théorie des situations et sur son regard sur les erreurs et leur gestion.

4. Au-delà du seul regard cognitif, une prise en charge par la théorie des situations

En effet, la théorie des situations offre, elle-même, les moyens de développer un regard beaucoup plus sophistiqué sur l'erreur comme le montre par exemple un texte publié par Guy Brousseau en 2000. Il y opère d'abord une distinction entre erreur dans un système adidactique et erreur dans un système didactique. Dans le premier cas, ce qui est en jeu c'est l'interaction d'un actant (vu comme sujet épistémique générique) avec un milieu et on peut dire qu'il y a erreur pour cet actant si les effets des décisions prises ne sont pas ceux que son système de connaissances lui permettait d'anticiper ou plus généralement si les effets qu'il perçoit de ses décisions ne sont pas ceux visés. La correction de l'erreur passera alors pour l'actant par un apprentissage. Dans le second cas, la situation est plus complexe, car à côté du système élève, il y a un système enseignant, et l'erreur n'est plus à rechercher simplement dans un écart par rapport aux attentes dans une modélisation adidactique, mais aussi dans un écart par rapport aux attentes de l'enseignant. Les décisions peuvent en effet être pertinentes pour l'actant dans son interaction avec le milieu mais non conformes aux attentes de l'enseignant voire erronées pour ce dernier. Il y a de plus, dans ce cas, une distinction à faire suivant que les connaissances nécessaires à la décision ou aux décisions attendues ont déjà fait ou non l'objet d'un enseignement car c'est une variable cruciale pour le système enseignant qui distingue selon Brousseau l'erreur de la faute.

Brousseau s'appuie dans cet article sur la théorie des situations pour élaborer différentes typologies des erreurs et de leur gestion possible, questionner aussi leur gestion didactique usuelle. Il introduit ainsi des typologies suivant le type d'interaction avec le savoir (action, formulation, validation) reflétant les trois dialectiques fondamentales de la théorie des situations (TDS), suivant les formes d'inadaptation des décisions (en distinguant entre décisions inconsistante, consistante mais non pertinente, pertinente mais non adéquate au projet de l'action, adéquate mais non satisfaisante, et enfin pertinente, adéquate au problème adidactique, satisfaisante pour l'élève mais non pour l'enseignant), suivant les connaissances en jeu, suivant l'importance des conséquences de l'erreur telle que perçue par l'élève, puis en prenant en compte le système enseignant, suivant les possibilités d'utilisation de l'erreur dans le processus didactique, suivant le nombre d'élèves concernés…

Le panorama qui en résulte nous montre, s'il en était besoin, à quel point s'attaquer didactiquement à la question des erreurs des élèves et de leur gestion didactique est une entreprise complexe, source d'une multiplicité de questions et d'approches, comment la même erreur observée peut suivant l'élève et son système de connaissances, suivant le contexte situationnel de sa production, avoir des significations différentes. Comment interpréter par exemple l'erreur si banale qui consiste à transformer $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ en $a - b$, il écrit par exemple :

> « L'élève l'a-t-il commise parce qu'il croit réellement que $(a - b)^2 = a^2 - b^2$, ou alors parce que, bien que sachant que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, la difficulté de la substitution par $\sqrt{a}$ le lui a fait oublier, ou parce que cela fournit un résultat simple comme ceux que le professeur semble attendre d'habitude ? » (Brousseau, 2000, p. 12)

Ceci n'épuise pas le champ des interprétations possibles. Si les erreurs se prêtent suivant les contextes situationnels et les caractéristiques de leurs auteurs à des interprétations multiples, elles nécessitent aussi des actions didactiques différentes, voire sont simplement à ignorer. C'est le cas par exemple, pour Brousseau, si elles sont non pertinentes, sans rapport avec la connaissance en construction car, dans ce cas, leur correction non seulement n'apporterait rien mais détournerait du processus en jeu. Car, comme il le pointe à juste titre :

> « La didactique ne s'intéresse qu'à celle des erreurs qui auront une conséquence sur l'apprentissage en situation didactique. Le professeur ne peut tenir compte d'une erreur d'un élève que sous certaines conditions ; il faut :
>
> a) que la production de cette erreur soit suffisamment fréquente chez cet élève, ou suffisamment répandue sur un ensemble d'élèves,
> b) que cette erreur ait des conséquences importantes sur d'autres acquisitions ou sur le déroulement ordinaire de l'enseignement,
> c) et surtout que l'on puisse lui rattacher des décisions didactiques, relativement à la gestion ou à l'organisation de l'enseignement. » (ibidem, p. 17)

Mais il souligne également les difficultés posées par ces prises de décision didactiques et les limites de celles qui comme l'illustration, l'analogie, la re-formulation ou la répétition, ont selon lui la faveur des pédagogues. Dans le contexte de cet exposé, il m'est difficile d'entrer dans plus de détail car je voudrais envisager maintenant un autre regard sur l'erreur, lorsque celle-ci est vue comme symptôme d'un dysfonctionnement systémique.

5. L'erreur de l'élève comme symptôme de dysfonctionnement d'un système

Très tôt, en didactique, l'erreur en effet est mise en relation, non simplement avec le développement cognitif de l'élève mais au-delà avec le fonctionnement plus global d'un système. Et il est clair que, par sa perspective systémique, la TDS elle-même nous y engage, en nous invitant à étudier l'économie de l'erreur dans le système didactique. Pourquoi par exemple travailler à surmonter des erreurs que le système sanctionne à peine. Analysant les connaissances locales des élèves de l'école élémentaire sur la sériation des décimaux, François Léonard et Catherine Sackur (1990) identifient ainsi deux règles erronées permettant de comparer des nombres décimaux ayant même partie entière : comparer les parties décimales comme si c'était des entiers (règle 1), comparer le nombre de décimales, le décimal le plus petit étant, dans ce cas, celui qui a le plus de décimales (règle 2). Mais ils soulignent également que si les problèmes de sériation des décimaux étaient construits au hasard, la règle 1 pour des couples de décimaux de 1 à 3 décimales donne un résultat correct dans 91% des cas, et la règle 2 pour des couples de décimaux n'ayant pas le même nombre de décimales dans 51% des cas. Ces auteurs constatent par ailleurs en examinant les manuels de l'époque que, dans les exercices proposés, les questions qui permettent de distinguer l'application d'une de ces règles erronées d'un raisonnement correct sont encore moindre. Pourquoi dans ces conditions renoncer à cette généralisation de la comparaison familière des entiers que constitue la règle 1 ? La situation a bien sûr changé aujourd'hui mais c'est une des conséquences justement de la diffusion des résultats de la recherche didactique dans ce domaine. S'interrogeant sur cette économie didactique, la recherche a aussi montré comment les choix effectués pouvaient conduire à ce que les obstacles épistémologiques deviennent aussi des obstacles didactiques, par exemple lorsque les décimaux y étaient présentés comme des entiers à un changement d'unité près, comment ces choix donc contribuaient eux-mêmes aux pratiques erronées et à leur résistance.

Un autre apport de la théorie des situations à la mise en relation des erreurs des élèves avec les caractéristiques du fonctionnement des systèmes didactiques et leurs dysfonctionnements est le fait de la théorie du contrat didactique. Le rôle joué par des règles implicites du contrat didactique dans la production d'erreurs ont été mises en évidence de façon particulièrement choquante avec les fameux problèmes dits de «l'âge du capitaine » initialement travaillés à l'IREM de Grenoble (1980) puis fortement médiatisés et popularisés par Stella Baruk (1985). Des travaux plus récents menés autour de Leiven Verschafell, Brian Greer et Erik de Corte (2000) éclairent ce type d'erreur d'un jour nouveau. Ils montrent bien en effet que ce qui est en anglais dénommé « word problems » joue un rôle fondamental dans les apprentissages de l'école élémentaire, mais y est assujetti à deux types de contrats didactiques distincts correspondant à deux fonctionnalités différentes remplies par ces problèmes. Une des fonctionnalités est de contribuer au sens des opérations en permettant d'associer un ensemble de situations prototypiques à chacune d'elles. Le contexte joue ici à un niveau métaphorique et la règle implicite du contrat est que l'élève fasse les associations requises sans trop s'interroger sur le réalisme de

la situation, ni de la solution proposée. Une autre fonctionnalité est de permettre aux mathématiques de l'école élémentaire de devenir utiles pour chercher à résoudre des problèmes non scolaires via leur modélisation mathématique. Dans ce cas, contrairement au précédent, le contexte n'est en rien un habillage, il doit être pris au sérieux à la fois en ce qui concerne les choix de modélisation et l'examen des solutions obtenues. Les chercheurs mettent l'accent sur les injonctions paradoxales qui en résultent et les tensions au niveau du contrat didactique, des tensions qui restent au niveau des implicites de ce dernier. On voit donc ainsi une interprétation qui met clairement l'erreur en rapport avec un dysfonctionnement des systèmes didactiques.
La théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992) renforce fortement cette perspective. Elle ne s'appuie pas sur une théorie de l'apprentissage mais fait émerger le sujet d'un ensemble d'assujettissements. Les erreurs des élèves et plus généralement les difficultés qu'ils rencontrent sont perçues avant tout comme des révélateurs de dysfonctionnements didactiques. Le postulat est posé que leurs comportements nous permettent de voir ce que l'institution leur permet ou non d'apprendre. Ce point de vue est particulièrement bien développé dans un article de Bosch, Fonseca et Gascon (2004) portant sur la notion de limite à la transition lycée-université . Les auteurs montrent que les praxéologies mathématiques mises en place au lycée sont ponctuelles, rigides, incomplètes, isolées et centrées sur leur bloc pratique tandis qu'à l'inverse celles mises en place à l'université sont d'emblée régionales et centrées sur leur bloc technologico-théorique. Les auteurs construisent un test qu'ils soumettent à des étudiants de début d'université, mais ce qu'ils visent à travers ce test et l'analyse des réponses des étudiants, c'est principalement à tester les conjectures qu'ils ont faites sur les organisations mathématiques enseignées pour comprendre les difficultés posées par la transition dans ce domaine. La thèse que Ridha Najar vient d'achever (Najar, à paraître), dans le domaine des fonctions cette fois et en ce qui concerne la transition lycée – classes préparatoires en Tunisie, reprend cette perspective anthropologique mais l'utilise pour mettre en relation une analyse des praxéologies institutionnelles et une analyse très fine de productions d'étudiants tout au long de leur première année d'université. Les résultats sont concordants mais s'y ajoute la sous-estimation des besoins du travail technique à l'université et également de ce que Corine Castela (2008) dénomme la composante pratique de la technologie, celle qui fait partie de ces exercices qu'on nomme parfois « folklore mathématique » et permet de faire de techniques mobilisables des techniques disponibles selon la terminologie introduite par Aline Robert. Ces travaux, c'est sûr, se situent à des niveaux d'enseignement qui ne sont pas ceux qui sont en jeu dans le RMT, mais il me semble qu'il est important de prendre aussi en compte les perspectives qu'ils développent, les résultats auxquels ils aboutissent, pour interroger un objet comme le RMT et penser les enseignements didactiques que l'on peut tirer des erreurs, des non-réponses, et plus largement des stratégies développées par les élèves et de la façon dont ces stratégies s'expriment dans leurs réponses.

Pour conclure

Je reviendrai dans cette conclusion au RMT. Les corpus de tâches et de réponses d'élèves qui ont été constitués, les données issues des différentes expériences complémentaires menées, constituent sans aucun doute une base de données d'une incroyable richesse pour mener un travail sur les erreurs des élèves. Les travaux existant en didactique des mathématiques nous encouragent me semble-t-il à conjuguer dans l'analyse de cette base de données une diversité d'approches, en cherchant à y repérer des régularités, des dépendances, des trajectoires cognitives sans aucun doute mais en cherchant aussi à y identifier la marque de caractéristiques du fonctionnement des systèmes éducatifs et didactiques considérés, et à mettre les uns et les autres en rapport. Le caractère international de ce rallye ouvre de ce point de vue des perspectives particulièrement intéressantes. Enfin, il me semble que les formes de réponses qui sont demandées aux élèves, la dimension collaborative du travail mené, devraient permettre aussi de mettre cette base de données au-delà de l'analyse des erreurs au service d'études sémiotiques et discursives et d'explorer ce qu'une telle entreprise peut apporter quand l'accent est mis sur la dimension participative et communicative de l'apprentissage avec des outils théoriques appropriés. Je compte en tout cas apprendre beaucoup moi-même en participant à ces journées et en y travaillant avec vous tous.

Besançon, le 29 octobre 2010

Références

Artigue M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* vol. 10/2.3., 241-286.

Artigue M. (2008). Continu, Discontinu en mathématiques : quelles perceptions en ont les élèves et les étudiants ? In, L. Viennot (Ed.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences. Penser l'enseignement*, pp. 151-173. Paris : PUF.

Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Librairie J. Vrin. Paris.

Baruk S. (1985). *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*. Editions du Seuil.

Bosch M., Fonseca C., Gascón J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 24/2.3, 205-250.

Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. *4*(2), 164-198.

Brousseau G. (2000). Les erreurs des élèves en mathématiques. *Petit x*, N° 57, 5-30.

Brousseau, G. & Brousseau, N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux.

Castela C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol. 28-2, 135-182.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12/1, 77-111.

Durand-Guerrier V., Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 23/3, 295-342.

Gandon S., Perrin Y. (2009). Le problème de la définition de l'aire d'une surface gauche : Peano et Lebesgue. *Archive for History of Exact Sciences*. Vol. 63, N° 6, 665-704.

IREM de Grenoble (1980). Quel est l'âge du capitaine ? *Bulletin de l'APMEP* N° 323, 235-243.

Lakoff G., Nuñez R. (2000). *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings the mathematics into being*. New York: Basic Books. Cambridge: University Press.

Lebesgue H. (1935). *La mesure des grandeurs.* Monographies de L'Enseignement Mathématique n° 1 Genève. Rééd. A. Blanchard, Paris 1975.

Leonard F., Sackur C. (1990). Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 10/2.3., 205-240.

Najar R. (à paraître). *Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants : cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition secondaire/supérieur.* Thèse de doctorat. Université Paris Diderot – Paris 7.

Nuñez, R., Edwards, L.D., & Matos, J.P. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *39*, 45-65.

Sfard A. (2008). *Thinking as Communicating. Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge University Press.

Verschaffel, L., Greer, B., de Corte, E., (2000). *Making Sense of Word Problems*. Lisse : Swets & Zeitlinger.

Viennot L. (1996). *Raisonner en physique : la part du sens commun*. De Boeck Editions. Bruxelles.

GLI ERRORI DEGLI ALLIEVI E LA LORO GESTIONE DIDATTICA: A CHE PUNTO SIAMO OGGI?

Michèle Artigue, Université Paris Diderot – Paris 7, LDAR

Traduzione: Lucia Grugnetti

1. Introduzione

Dalle sue origini, la ricerca in didattica della matematica si è interrogata sugli errori degli allievi ed ha cercato di identificarli e di classificarli, di capirne l'origine e di trovare il modo di porvi rimedio o di prevenirli, interrogandosi sul loro ruolo nell'apprendimento, sulla loro gestione didattica e sugli effetti di tale gestione. Possiamo pertanto domandarci legittimamente a che punto ci troviamo oggi, quali conoscenze siano state elaborate e come possa essere pensata, alla luce di tali conoscenze, una gestione produttiva degli errori, ma anche quali siano le tematiche degli eventuali dibattiti e quali le questioni ancora aperte. Vorrei condividere con voi oggi lo stato attuale delle mie riflessioni su tali questioni.

Tengo prima di tutto a precisare che non è come ricercatrice in didattica, specialista di tali questioni, che mi rivolgo a voi. Penso, al contrario di avere molto da imparare dai lavori che portate avanti da diversi anni in questo campo, da tutto il lavoro che avete realizzato per quest'incontro, ma Michel Henry ha saputo convincermi circa il fatto che nell'apportare un chiarimento esterno al vostro gruppo, potrei forse aiutarvi a raccogliere la sfida che vi siete "autolanciati" e che consiste, se ho capito bene, a partire dall'analisi delle sperimentazioni con problemi del rally:

> «a validare o inficiare certe ipotesi relative agli ostacoli soggiacenti agli errori osservati negli elaborati degli allievi, al fine di vedere se i problemi del RMT possono contribuire, nelle condizioni specifiche del rally e nei loro reinvestimenti in classe, a facilitare l'acquisizione di nuovi saperi fondamentali».

Come è anche precisato nel documento di presentazione di quest'incontro, nei vostri lavori sulla comprensione e l'interpretazione degli errori degli allievi, delle loro strategie di risoluzione e i loro «blocchi», vi siete ispirati a diversi approcci presenti in ambito didattico: l'epistemologia di Piaget e l'accento messo da questa sul ruolo dei disequilibri e del conflitto cognitivo nell'apprendimento, l'epistemologia di Bachelard e il conseguente accento sulle rotture di cui necessita l'accesso alla conoscenza scientifica, questa volta tramite la nozione di ostacolo epistemologico, la teoria dei campi concettuali e i mezzi che essa fornisce per approcciare i processi di concettualizzazione attraverso le nozioni di concezione, di schema e di teorema in atto in particolare, la teoria delle situazioni didattiche, infine, che distingue differenti tipi di ostacoli: ontologici, didattici, epistemologici, e pone, per la sua forte sensibilità epistemologica, un'attenzione particolare a questi ultimi.

Nella mia riflessione, ritornerò su questi diversi approcci, lo sguardo che ci offrono sull'errore, sul suo ruolo nell'apprendimento e sulle decisioni didattiche che possono esserne il risultato, ma vorrei anche, per pensare alla gestione didattica dell'errore, allargare lo sguardo verso altri approcci, tenendo conto di ciò che possono apportare, da un lato, approcci cognitivi meno centrati sull'idea di discontinuità e di ostacolo, e dall'altro lato, approcci che, come l'approccio antropologico, vedono negli errori degli allievi in primo luogo il modo di approcciare il funzionamento e il disfunzionamento dei sistemi didattici ai quali tali allievi sono assoggettati. Dapprima però, vorrei sottolineare la normalità dell'errore in matematica e il suo carattere spesso produttivo.

2. L'errore in matematica: un fenomeno normale e produttivo

L'errore, che sia individuale o collettivo, è un fenomeno ordinario in matematica, contrariamente alla visione di questa disciplina, esempio di rigore e di esattezza, come è intesa nella cultura comune. E, come mostra bene la storia della matematica, esso può essere sorprendentemente produttivo. Una pratica matematica assoggettata ai canoni di rigore della disciplina, anche quando si tratta di una pratica esperta, non mette al riparo dell'errore. E' ciò che il professor Solomon Marcus sottolineava in una conferenza all'università Paris 7 la settimana scorsa, distinguendo tre tipi di errori: errori sintattici, semantici e pragmatici[20], e sostenendo la tesi secondo la quale numerosi, se non la maggior parte dei lavori pionieristici in matematica contengono errori che hanno giocato un ruolo molto stimolante.

> "Il concetto di 'uniforma convergenza' è nato da errore sintattico-semantico fatto da Cauchy. The concept of an ideal in a ring was invented by Ernst Kummer trying, but failing to solve Fermat's Last Theorem. Henri Lebesgue's syntactic mistake in his famous "Sur les fonctions représentables analytiquement" (1905) became the starting moment of a new branch in General Topology: "Theory of analytic and projective sets" (Suslin, Lusin). Chaos theory was initiated by Poincaré by trying to bridge the gap in his famous work related to the three-body problem." (Estratto del testo della presentazione della conferenza).

Personalmente amo citare quest'esempio descritto da Lebesgue nella sua opera: *La mesure des grandeurs* (1935), dell'errore che è consistito nel pensare che si potesse definire l'area di una superficie dello spazio con il passaggio al limite a partire da triangolazioni di tale superficie, facendo tendere la misura dei triangoli a 0. Questa definizione generalizzava in effetti la definizione di lunghezza di una curva piana come limite delle lunghezze della successione dei segmenti inscritti in questa curva quando il passo di suddivisione tende a 0. Egli parla dello stupore creato dal controesempio dato da Peano e Schwartz, che mostra come tale procedura, per una superficie regolare come un cilindro, poteva condurre, secondo la procedura della triangolazione scelta, ad ottenere come limite un qualunque numero reale superiore all'area del cilindro, finanche infinito.

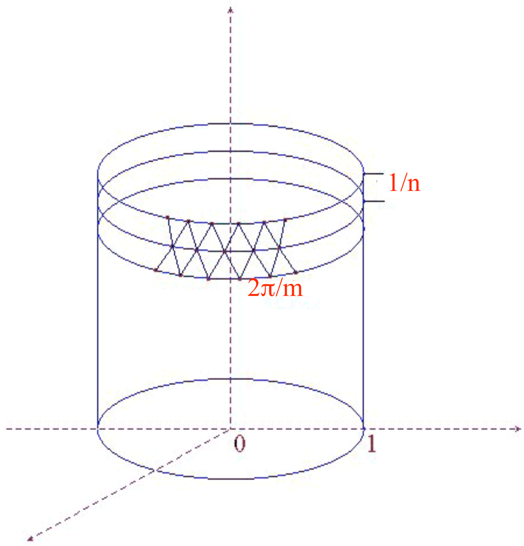


Figure 1: il controesempio di Peano

La risoluzione di questo paradosso ha giocato un ruolo fondamentale per chiarire la nozione di area di una superficie e capire i suoi rapporti con quella di lunghezza di una curva (si veda ad esempio Gandon et Perrin, 2009) da cui la figura qui sopra è presa. Mi piace citare quest'esempio perché esso aiuta anche a chiarire situazioni paradossali ben note agli insegnanti, come la seguente (cfr. figura 2), riguardo al segmento [A B] di lunghezza unità, secondo il modo in cui si fa tendere simultaneamente n e m verso l'infinito si può ottenere come limite della lunghezza della linea rotta qualsiasi numero reale tra 1 e l'infinito, ed anche l'infinito.

Figura 2: una situazione paradossale analoga in dimensione 2

[20] Per far capire la distinzione tra questi tre tipi di errori, cerca degli opposti all'idea di erroneo. Così l'opposto sintattico di erroneo sarebbe «corretto», il suo opposto semantico sarebbe «vero», il suo opposto pragmatico sarebbe «adeguato», «appropriato».

L'errore è un fatto ordinario in matematica, e può essere particolarmente produttivo. Quello che è vero per i matematici lo è anche per gli allievi e gli studenti, e poiché ho introdotto una distinzione tra sintassi e semantica, vorrei dapprima insistere sui limiti di un controllo sintattico dell'errore, ben messo in evidenza nelle ricerche didattiche come quelle svolte, per esempio a Lyon, da e con Gilbert Arsac e Viviane Durand Guerrier (2003, 2005). Ciò che in effetti mostrano tali ricerche è che il primo segnale di errore è semantico; è in generale il fatto che ciò che è ottenuto va contro ciò che è conosciuto come vero altrove o è sufficientemente contrario alle anticipazioni possibili e controesempi possibili per giustificare il dubbio. L'insieme di esempi e controesempi disponibili, le connessioni che si è capaci di fare con risultati dello stesso ambito o di altri ambiti sono qui essenziali. E' normale che un allievo di liceo pensi che se una funzione continua f ha un minimo in a, esiste un intervallo centrato in a tale che f sia decrescente a sinistra di a e crescente a destra di a su tale intervallo. Nulla negli esempi di funzioni che ha incontrato, può portarlo a mettere in dubbio tale congettura. Devo però confessare che quest'anno i miei studenti di CAPES (diploma di abilitazione all'insegnamento nelle scuole secondarie) ne erano del tutto persuasi, così come erano persuasi del fatto che se una funzione derivabile ha un limite finito all'infinito, la sua derivata tende necessariamente a 0. L'esistenza, però, di tali convinzioni erronee, ma molto forti, si sono rivelate nel loro caso, essere molto produttive per rielaborare queste nozioni familiari, ma sempre largamente sconosciute, quali sono le funzioni di variabile reale.

Che ne è comunque dell'errore nel mondo della scuola? Per gli insegnanti, l'errore ha dapprima il valore di sintomo, è il segno che qualcosa non è stato capito, che l'apprendimento in gioco non è ancora stato acquisito. E' spesso atteso, ma talvolta è sorprendente; esso è spesso così disperatamente ricorrente che provoca un sentimento di impotenza. Non era, quando ho cominciato ad insegnare, percepito come un oggetto sul quale si potesse lavorare e costruire, ma qualcosa che bisognava sradicare il più rapidamente possibile, sostituendo l'errore con la risposta corretta, ed anche cercare di prevenirlo. La ricerca didattica ha contribuito fortemente a cambiare tale visione. Lo ha dapprima fatto coerentemente con una visione cognitiva mettendo l'accento sulle discontinuità necessarie dell'apprendimento.

3. Una visione dell'errore pilotato da discontinuità e ostacoli

Questa visione si è espressa in maniere differenti a seconda degli approcci didattici, ma i termini di misconcetti, di conflitto cognitivo, di ostacolo cognitivo, di ostacolo epistemologico ne sono emblematici. Due delle diverse posizioni mi sembrano caratteristiche:

- La prima è la convinzione che, per capire gli errori, per agire efficacemente su di essi, bisogna cercare le coerenze che gli sono soggiacenti: concezioni, conoscenze, poiché ve ne sono in generale e in particolare nel caso di errori condivisi o resistenti, una coerenza soggiacente.
- La seconda è la convinzione che le concezioni spontanee degli allievi sono molto spesso (in certi casi necessariamente) in conflitto con quelle che l'insegnamento cerca di installare. Imparare è risolvere conflitti cognitivi, è superare ostacoli epistemologici e rigettare forme di conoscenze inadeguate. L'errore è indispensabile all'apprendimento.

Questa visione, in termini di discontinuità e di conflitti, è al centro dell'epistemologia piagettiana con le nozioni di accomodamento, di disequilibrio e di riequilibrio maggiorante. E' particolarmente radicale nell'epistemologia di Bachelard che considera che l'accesso alla conoscenza scientifica passa per il rigetto delle forme anteriori di conoscenza. Cosa che esprime chiaramente la citazione di Bachelard in parte ricordata nella presentazione di questo incontro:

> « ...è nell'atto stesso del conoscere intimamente che appaiono per una sorta di necessità funzionale, lentezze e turbamenti…La comprensione si acquisisce contro una conoscenza anteriore nel distruggere conoscenze mal fatte.»

Ed è in questa visione di Bachelard che si è nutrita in particolare la riflessione di Guy Brousseau sull'errore, anche se Bachelard esclude, da parte sua, la matematica dal suo discorso (Bachelard, 1938). Questo lo ha condotto a partire dal 1976 ad operare una conversione didattica di tale nozione, una conversione che ha profondamente modificato lo sguardo sugli errori degli allievi, almeno di quelli che non appaiono fugaci, erratici, ma al contrario riproducibili e persistenti:

> «Un ostacolo si manifesta dunque con errori, ma questi errori non sono dovuti al caso. Fugaci, erratici, essi sono riproducibili, persistenti. Questi errori, inoltre, nel caso di un medesimo soggetto, sono legati tra di loro da un'origine comune: una maniera di conoscere, una concezione caratteristica, coerente se non corretta, una "conoscenza" vecchia e che è andata bene in tutto un ambito di azioni». (Brousseau, 1983, p. 173-174).

Non solamente questi approcci hanno permesso di dare un altro statuto all'errore, ma hanno anche portato a ripensarne la gestione didattica. Poiché, come spiega Brousseau, se l'ostacolo è la conoscenza, con ciò che questa comporta in oggetti, relazioni, metodi di apprendimento, di previsione, di evidenza, di ramificazione, questa conoscenza resiste al rigetto, essa tenterà di adattarsi localmente. Ne segue che:
«Il superamento di un ostacolo esige un lavoro della stessa natura dell'elaborazione di una conoscenza, cioè di interazioni ripetute, dialettiche dell'allievo con l'oggetto della conoscenza». (ibidem, p. 175).
Mi limiterò ad evocare due ambiti nei quali questo approccio in termini di ostacoli epistemologici si è rivelato particolarmente pertinente e che, ne sono sicura, vi sarà chiaro senza che sia necessario entrare in maggiori dettagli: l'estensione del campo dei numeri e delle operazioni al di là degli interi verso i razionali e i decimali alla scuola primaria da un lato, la concettualizzazione del concetto di limite che gioca un ruolo essenziale nel campo dell'analisi, dall'altro. I lavori condotti in questi ambiti hanno in effetti mostrato particolarmente bene come conoscenze pregresse, provenienti da pratiche sociali, o da apprendimenti scolastici anteriori, che avevano dato prova della loro efficacia, potessero essere un ostacolo per gli apprendimenti richiesti. Hanno anche alimentato ingegnerie didattiche aventi lo scopo di mettere gli allievi di fronte alle proprie conoscenze, ostacoli produttrici di errori resistenti attraverso situazioni che permettano di metterli in crisi, ma anche di sostenere la costruzione di nuove conoscenze e coerenze, tramite interazioni con dei *milieux* adidattici appropriati. Nell'ambito dell'estensione del campo dei numeri e delle operazioni, la situazione ben nota del puzzle di Brousseau è stata così costruita per mettere in crisi il modello delle situazioni matematiche dell'ingrandimento e permettere l'elaborazione del modello lineare alla base dell'estensione della moltiplicazione (Brousseau N. & Brousseau G., 1987).
Come ho sottolineato già (Artigue 1990), però, questo accento messo sulle rotture e gli ostacoli ha anche contribuito allo sviluppo un po' caricaturale di una visione dell'apprendimento come un percorso ad ostacoli che si tratterebbe poi di affrontare e superare, dove ogni superamento di un ostacolo porterebbe a sostituire a concezioni pregresse inadeguate, erronee, nuove concezioni. E' proprio una tale visione che alcuni contestano, ad esempio Nuñez, Edwards e Matos, nei loro lavori sulla continuità pubblicati nel 1999, appoggiandosi sui lavori della corrente detta «l'Embodied cognition» e in particolare l'opera di Lakoff e Nuñez (2000) che mette il pensiero metaforico al centro dell'elaborazione matematica. Secondo tali ricercatori, la concezione che cerca di vedere una funzione continua come una funzione della quale si può tracciare la rappresentazione grafica senza staccare la matita è stata percepita per lungo tempo nella ricerca in educazione matematica come una concezione ostacolo, un misconcetto al quale si trattava di sostituire, il più rapidamente possibile, una concezione corretta: la concezione moderna. Secondo loro, questa è una visione dell'apprendimento che, nel mettere in maniera esagerata l'accento sulla discontinuità e sulle rotture, non riflette quello che è il funzionamento reale dei matematici.
Come ho spiegato in (Artigue, 2008) :

> «Partendo dalla concezione della continuità già evocata più sopra, che essi qualificano come naturale, come caratterizzante un processo senza salti e mettendola in contrasto con la concezione matematica attuale, essi pongono l'accento sul fatto che queste due concezioni si fondano su metafore concettuali fondamentalmente differenti. Qualificano la prima come «metafora di movimento fittizio» che riassumono nel modo seguente: «Una curva è il movimento del viaggiatore che la traccia». Si tratta qui di una visione cinematica e, secondo questa visione, la curva non è un insieme di punti, bensì dei punti possono venirvi posti sopra come pietre miliari di una strada e i punti possono spostarsi come i viaggiatori lungo una strada. Gli autori mostrano che il linguaggio degli studenti, ma anche dei matematici, è pieno di riferimenti a questa visione cinematica. Le metafore sottintendono anche le nozioni di Weierstrass del continuo e della continuità, ma esse sono radicalmente differenti: una curva è un insieme di punti; il continuo è qui associato all'assenza di buchi e la continuità alla preservazione della prossimità. I punti sono quindi costitutivi della retta e il carattere continuo di quest'ultima non ne viene di conseguenza. Una funzione continua preserva in effetti l'assenza di buchi che caratterizza il continuo.
>
> Appoggiandosi su queste distinzioni, gli autori criticano severamente un insegnamento che, secondo loro, stabilisce una stretta gerarchia tra queste due concezioni dal punto di vista della conoscenza e presenta la definizione attuale come quella che catturerebbe l'essenza di un'idea matematica in effetti multiforme. Essi respingono una visione dell'apprendimento che concepirebbe la concezione naturale e cinematica della continuità come un ostacolo epistemologico o una concezione erronea da superare. Essi difendono un insegnamento che, nel mostrare ciò che apporta la formalizzazione moderna del continuo e della continuità, non cerca di tagliarne le radici fisiche, ma cerca piuttosto di organizzare la complementarità delle visioni che le due metafore inducono.» (p.163-164).

Si noterà che questi due lavori si avvicinano in un certo senso a quelli di didattici della fisica che, come Laurence Viennot, hanno ben mostrato che si ritrovano negli esperti i modi di ragionamenti comuni che, come il ragionamento lineare casuale, sono sorgenti classiche di errori degli allievi, ma che nel caso degli esperti c'è un'attitudine migliore a controllarne il funzionamento (Viennot, 1996).
E' inoltre indubbio che le evoluzioni dei quadri teorici in didattica della matematica, e in particolare lo sviluppo degli approcci socio-culturali, oltre all'attenzione crescente posta sulla dimensione semiotica in senso ampio dell'attività matematica, portino a ripensare i rapporti tra processo di adattamento e processo di acculturazione nell'apprendimento, a ripensare anche il ruolo dell'insegnante in funzione di questa visione. Come sostiene Anna Sfard nel suo approccio dell'apprendimento in termini di « commognition » (Sfard, 2008), la metafora di acquisizione anche se impregna le nostre culture non è che una delle metafore possibili per considerare l'apprendimento. Come ogni metafora, questa ha dei limiti, e oggi abbiamo tutto da guadagnare dalla combinazione di questa metafora con altre, in particolare con quella della partecipazione, che sottintende un certo numero di lavori recenti. Queste evoluzioni riappaiono nel modo in cui guardiamo agli errori degli allievi e alle maniere per farli progredire. Prima di ritornarci indirettamente, però, attraverso l'approccio antropologico, vorrei ritornare sulla teoria delle situazioni e sul suo sguardo sugli errori e la loro gestione.

4. Al di là del solo sguardo cognitivo, una spiegazione con la teoria delle situazioni

In effetti, la teoria delle situazioni offre, essa stessa, i mezzi per sviluppare uno sguardo molto più sofisticato sull'errore, come lo mostra un testo pubblicato da Guy Brousseau nel 2000. Egli opera dapprima una distinzione tra l'errore in un sistema adidattico e l'errore in un sistema didattico. Nel primo caso, ciò che è in gioco è l'interazione di un soggetto che agisce (visto come soggetto epistemico generico) con un *milieu* e possiamo dire che c'è errore per questo soggetto se gli effetti delle decisioni prese non sono quelle che il suo sistema di conoscenze gli avrebbero permesso di anticipare o più generalmente se gli effetti che percepisce dalle sue decisioni non sono quelle richieste. La correzione dell'errore passerà allora per il soggetto attraverso un apprendimento. Nel secondo caso, la situazione è più complessa, in quanto, accanto al sistema allievo, c'è un sistema insegnante, e l'errore non è più da ricercare semplicemente in uno scarto in rapporto alle attese in una modellizzazione adidattica, ma anche in uno scarto in rapporto alle attese dell'insegnante. Le decisioni possono in effetti essere pertinenti per il soggetto che agisce, nella sua interazione con il *milieu*, ma non conformi alle attese dell'insegnante, quindi errate per quest'ultimo. Inoltre, in questo caso, vi è una distinzione da fare a seconda che le conoscenze necessarie alla decisione o a decisioni attese abbia già fatto o no l'oggetto di un insegnamento perché questa è una variabile cruciale per il sistema insegnante che differenzia secondo Brousseau l'errore dallo sbaglio.
Brousseau si appoggia in quest'articolo sulla teoria delle situazioni per elaborare differenti tipologie di errori e della loro possibile gestione e porre questioni anche sulla loro gestione didattica usuale. Egli introduce così delle tipologie secondo il tipo di interazione con il sapere (azione, formulazione, validazione) che riflettono le tre dialettiche fondamentali della Teoria Delle Situazioni, secondo le forme di inadattabilità delle decisioni (distinguendo tra decisioni inconsistenti, consistenti ma non pertinenti, pertinenti ma non adeguate al progetto dell'azione, adeguate ma non soddisfacenti, ed infine pertinenti, adeguate al problema adidattico, soddisfacenti per l'allievo ma non per l'insegnante), secondo le conoscenze in gioco, secondo l'importanza delle conseguenze dell'errore come percepito dall'allievo, poi tenendo conto del sistema insegnante, secondo le possibilità di utilizzazione dell'errore nel processo didattico, secondo il numero degli allievi implicati…
Il panorama che ne risulta, ci mostra, se ce ne fosse bisogno, a che punto l'occuparsi didatticamente della questione degli errori degli allievi e della loro gestione didattica sia un'impresa complessa, sorgente di una molteplicità di domande e di approcci, come lo stesso errore osservato possa secondo l'allievo e il suo sistema di conoscenze, secondo il contesto "situazionale" della sua produzione, avere significati differenti. Come interpretare per esempio l'errore così banale che consiste nel trasformare $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ in $a - b$, scrive Brousseau:

> «L'allievo lo ha commesso perché egli crede veramente che $(a - b)^2 = a^2 - b^2$, o invece perché, benché sappia che $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, la difficoltà della sostituzione con $\sqrt{a}$ glielo ha fatto dimenticare, o perché questo fornisce un risultato semplice come quello che il professore sembra aspettarsi d'abitudine?»

Con questo non si esauriscono le interpretazioni possibili. Se gli errori si prestano, secondo i contesti situazionali e le caratteristiche dei loro autori ad interpretazioni multiple, essi necessitano anche di azioni didattiche differenti, oppure sono semplicemente da ignorare. E' così per esempio per Brousseau, quando essi non sono pertinenti o senza rapporto con la conoscenza in costruzione perché in tal caso la loro correzione non solamente non apporterebbe nulla, ma l'allontanerebbe dal processo in gioco. In quanto, come lo sottolinea a giusto titolo:

> «La didattica si interessa solo a quegli errori che avranno conseguenze sull'apprendimento in situazione didattica. Il professore può tener conto di un errore di un allievo solo a certe condizioni; bisogna:
> a) Che la produzione di tale errore sia sufficientemente frequente in quest'allievo, o sufficientemente distribuito su un insieme di allievi,
> b) Che quest'errore abbia conseguenze importanti su altre acquisizioni o sullo sviluppo ordinario dell'insegnamento,
> c) E soprattutto che si possa collegare ad esso decisioni didattiche, relativamente alla gestione o all'organizzazione dell'insegnamento. »

Egli, però, sottolinea anche le difficoltà poste da queste decisioni didattiche e i limiti di quelle che, come l'illustrazione, l'analogia, la riformulazione o la ripetizione, hanno, secondo lui, il favore da parte dei pedagoghi. Nel contesto di questa presentazione, mi è difficile entrare in maggiori dettagli perché vorrei gettare ora un altro sguardo sull'errore, quando questi è visto come sintomo di un disfunzionamento sistematico.

5. L'errore dell'allievo come sintomo di disfunzionamento di un sistema

Molto presto, in didattica, l'errore è in effetti messo in relazione, non solo con lo sviluppo cognitivo dell'allievo, ma anche con il funzionamento più globale di un sistema. Ed è chiaro che, con la sua prospettiva sistemica, la TDS stessa ci impegna in tal senso, invitandoci a studiare l'economia dell'errore nel sistema didattico. Perché per esempio lavorare per superare errori che il sistema sanziona appena? Analizzando le conoscenze locali degli allievi della scuola primaria sulla seriazione dei decimali François Leonard e Catherine Sackur (1990) identificano così due regole erronee che permettono di confrontare due numeri decimali aventi una stessa parte intera: confrontare le parti decimali come se fossero degli interi (regola 1), confrontare il numero di cifre decimali, essendo, in tal caso, il decimale più piccolo quello che ha più cifre decimali (regola 2). Sottolineano però anche che se i problemi di seriazione dei decimali fossero costruiti a caso, la regola 1 per coppie di decimali da 1 a 3 decimali darebbe un risultato corretto nel 91% dei casi, e la regola 2 per coppie di decimali non aventi lo stesso numero di cifre decimali nel 51% dei casi. Questi autori constatano peraltro, esaminando i manuali scolastici dell'epoca, che negli esercizi proposti le domande che permettono di distinguere l'applicazione di una di queste regole erronee da un ragionamento corretto sono ancora in percentuale minore. Perché in queste condizioni rinunciare a questa generalizzazione del confronto familiare degli interi che costituisce la regola 1? La situazione è certamente cambiata oggigiorno, ma è una delle conseguenze proprio della diffusione dei risultati della ricerca didattica in questo ambito. Interrogandosi su tale economia didattica, la ricerca ha anche mostrato come le scelte effettuate potessero condurre a far sì che gli ostacoli epistemologici diventassero anche ostacoli didattici, per esempio quando i decimali venivano presentati come interi a meno di un cambiamento di unità, come contribuissero essi stessi a pratiche erronee e alla loro resistenza.

Un altro apporto della teoria delle situazioni alla messa in relazione degli errori degli allievi con le caratteristiche del funzionamento dei sistemi didattici e il loro disfunzionamento è la teoria del contratto didattico. Il ruolo giocato da regole implicite del contratto didattico nella produzione di errori è stato messo in evidenza in maniera particolarmente "scioccante" con i famosi problemi detti de «l'âge du capitaine» inizialmente analizzati all'IREM di Grenoble (1980), poi fortemente mediatizzati da Stella Baruk (1985). Lavori più recenti condotti dal gruppo di Leiven Vershafell , Brian Greer et Erik de Corte (2000) chiariscono questo tipo d'errore da un nuovo punto di vista. Mostrano bene, in effetti, che ciò che in inglese è detto « word problems » gioca un ruolo fondamentale negli apprendimenti alla scuola primaria, ma è anche assoggettato a due tipi distinti di contratto didattico corrispondenti a due funzionalità differenti da parte di tali problemi. Una delle funzionalità è quella di dare un contributo al senso delle operazioni nel permettere di associare un insieme di situazioni prototipo a ciascuna di esse. Il contesto gioca qui un ruolo a livello metaforico e la regola implicita del contratto è che l'allievo faccia le associazioni richieste senza interrogarsi troppo sul realismo della situazione, né della soluzione proposta. Un'altra funzionalità è quella di permettere alla matematica della scuola primaria di diventare utile per cercare di risolvere problemi non scolastici per il tramite della loro modellizzazione matematica. In questo caso, contrariamente al precedente, il contesto non è un semplice "abito", ma deve essere preso sul

serio sia per ciò che riguarda le scelte di modellizzazione, sia per l'esame delle soluzioni ottenute. I ricercatori mettono l'accento sulle "intimazioni" paradossali che ne risultano e le tensioni a livello del contratto didattico, tensioni che permangono a livello di impliciti nel contratto stesso. Vediamo dunque così un'interpretazione che mette chiaramente l'errore in rapporto con un disfunzionamento dei sistemi didattici.
La teoria antropologica della didattica (Chevallard, 1992) rafforza fortemente questa prospettiva. Essa non si appoggia su una teoria dell'apprendimento, ma fa emergere il soggetto da un insieme di assoggettamenti. Gli errori degli allievi e più in generale le difficoltà che essi incontrano sono percepiti prima di tutto come rivelatori di disfunzionamenti didattici. Il postulato è quello secondo cui i loro comportamenti ci permettono di vedere ciò che l'intuizione permette o non permette loro di apprendere. Questo punto di vista è particolarmente sviluppato in uno studio di Bosch, Fonseca e Gascon (2004) sulla nozione di limite nel passaggio liceo-università. Gli autori mostrano che le prasseologie matematiche utilizzate al liceo sono puntuali, rigide, incomplete, isolate e centrate sul loro blocco pratico, mentre, al contrario, quelle utilizzate all'università sono di colpo regionali e centrate sul loro blocco tecnologico-teorico. Gli autori costruiscono un test che propongono a delle matricole, e tramite il test e l'analisi delle risposte degli studenti vogliono testare in particolare le congetture fatte sulle organizzazioni matematiche insegnate per capire le difficoltà poste dalla transizione in questo ambito. La tesi che Ridha Najar ha appena finito, nell'ambito delle funzioni questa volta e che riguarda la transizione liceo-classi preparatorie[21] in Tunisia, riprende questa prospettiva, ma l'utilizza per mettere in relazione un'analisi sulle prasseologie istituzionali e un'analisi molto fine di produzioni di studenti nel corso del loro primo anno di università. I risultati sono concordanti ma vi si aggiunge la sottostima dei bisogni del lavoro tecnico all'università ed anche ciò che Corine Castella (2008) chiama la componente pratica della tecnologia, quella che fa parte di ciò che è detto talvolta «folclore matematico» e permette di fare di tecniche mobilizzabili delle tecniche disponibili secondo la terminologia di Aline Robert. Questi lavori, è sicuro, si situano a livelli di insegnamenti che non sono quelli messi in gioco nel RMT, ma mi sembra importante tener conto anche delle prospettive che essi sviluppano, dei risultati ai quali arrivano, per interrogare un soggetto come il RMT e pensare gli insegnamenti didattici che si possono dedurre dagli errori , dalle non-risposte, e in senso più ampio, dalle strategie sviluppate dagli allievi e dalla maniera in cui tali strategie sono illustrate nelle loro risposte.

6. Per concludere

In questa conclusione ritorno al RMT. L'insieme dei compiti e delle risposte degli allievi che è stato elaborato, i dati scaturiti dalle diverse esperienze complementari sviluppate, costituiscono, senza alcun dubbio, una base di dati di un'incredibile ricchezza per sviluppare un lavoro sugli errori degli allievi. I lavori esistenti in didattica della matematica ci incoraggiano, mi sembra, a coniugare nell'analisi di questa base di dati, una diversità di approcci, nel cercare di reperire regolarità, dipendenze, traiettorie cognitive, senza alcun dubbio, ma nel cercare anche di identificare le caratteristiche del funzionamento dei sistemi educativi e didattici considerati, e a mettere in rapporto gli uni con gli altri. Il carattere internazionale di questo rally apre da questo punto di vista prospettive particolarmente interessanti. Infine, mi sembra che le forme di risposte richieste agli allievi, la dimensione collaborativa del lavoro condotto, dovrebbero permettere anche di utilizzare questa base di dati, al di là dell'analisi degli errori, al servizio di studi semiotici e discorsivi e di esplorare quello che una tale impresa può apportare quando l'accento è posto sulla dimensione partecipativa e comunicativa dell'apprendimento con mezzi teorici appropriati. In ogni modo, conto di imparare molto come partecipante a queste giornate e nel lavorare con voi.

Besançon, 29 ottobre 2010

Riferimenti bibliografici

Si veda p. 58

[21] [N.D.T.] Corso di due anni dopo il liceo per entrare nelle "Grandes Écoles", cioè in università tipo la Scuola Normale di Pisa.