Gli errori nella risoluzione dei problemi del RMT che ricchezza!

Lucia Grugnetti & François Jaquet

ARMT, Nivelles 2009

Gli incontri di Nivelles e di Besançon

- **Un passo in più nell’uso dei nostri problemi**:
- dopo la loro elaborazione e la loro analisi a priori che si affinano sempre di più,
- dopo l’osservazione e il reperimento di procedure caratteristiche (non occasionali),
- dopo la costituzione di famiglie di problemi relativi ad un concetto ben identificato,
- vorremmo andare verso l’identificazione degli ostacoli, la loro discussione e, eventualmente, l’elaborazione di indicazioni metodologiche per porvi rimedio.

Due esempi

- A) A partire da *La macchia*

  Uno sguardo agli ostacoli rilevati nel problema del conteggio di oggetti in disposizioni geometriche regolari

- B) A partire da *Il tavolo da spostare*

  Difficoltà nel riconoscimento di rettangoli

Attraverso questi esempi cercheremo di mettere in evidenza **alcune condizioni** che permettono di **progredire nelle ricerche del RMT**

Quali procedure analizzare alla ricerca di errori?

- quelle che si ritrovano in numerosi elaborati,
- quelle che mettono in evidenza errori, ostacoli o conoscenze inadeguati,
- quelle a proposito delle quali possiamo pensare di fare un lavoro didattico.

Dagli errori alle ragioni degli errori

- Dopo **l’identificazione delle procedure inadeguate o erronee**,

- si possono fare alcune **ipotesi** sulle **ragioni** che hanno condotto gli allievi ad adottarle.

RMT e costruttivismo

- Il RMT situa la propria azione in una concezione costruttivista nella quale:
- **l’errore ha diritto di cittadinanza** ed è da prendere in considerazione con la più grande attenzione, poiché sovente esso **testimonia la presenza di ostacoli o di insufficienze nella costruzione di un concetto.**

Primo esempio

Un ostacolo: gli allineamenti

dal secondo al diciassettesimo RMT

attraverso una *famiglia* di problemi

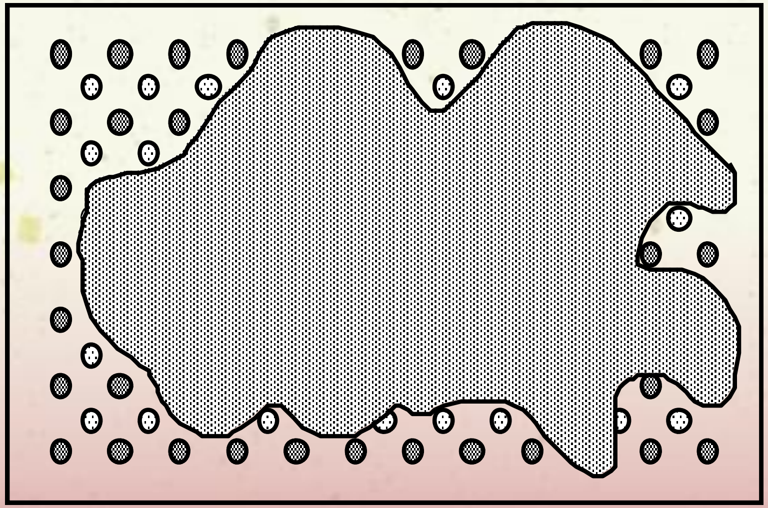
Terzo RMT, 1995

- **La macchia** (3.II.4, Cat. 3, 4, 5)

  Toto ha rovesciato il vasetto della marmellata sulla bella tovaglia a pois della cucina.

  Quanti pois sono completamente ricoperti dalla marmellata?

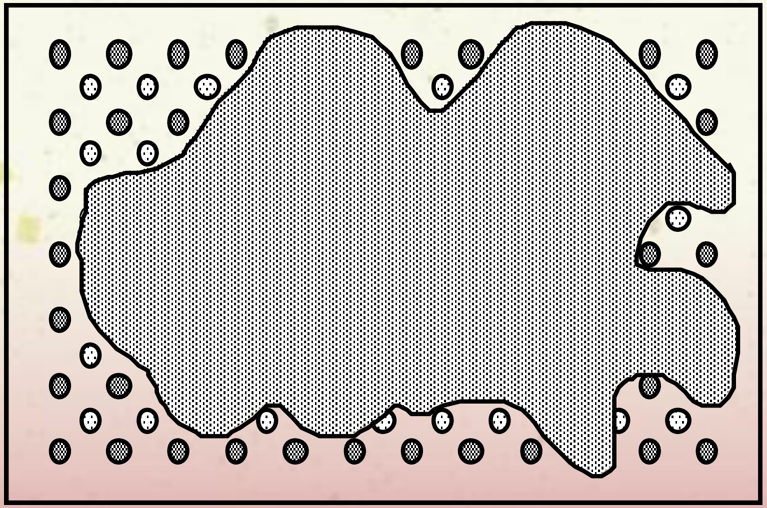
  Indicate come avete trovato la vostra soluzione.



Gli errori più frequenti

Conteggi errati

Abbiamo disegnato i pois che mancavano. Ricoperti dalla macchia, secondo l'ordine di quelli che non erano ricoperti e abbiamo trovato 101



la moltiplicazione 13 x 23

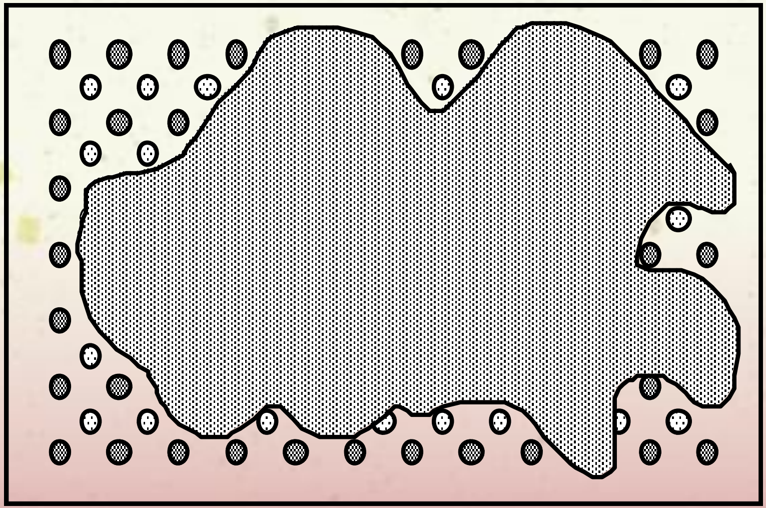
Gli errori più frequenti

- (7 x 12) - 48 = 36

  errore più frequente in assoluto: 20% delle classi

  non previsto nell'analisi a priori

  gli allievi **non tengono conto** dei pois bianchi nella moltiplicazione (sui bordi del rettangolo), ma solamente nella sottrazione.



Ipotesi: non è una dimenticanza!

- **sembra che ci sia in questo caso un ostacolo didattico da superare,**
- **creato dall'abitudine o dal teorema in atto consistente nel moltiplicare i numeri di oggetti situati sulla lunghezza e la larghezza del bordo in tutte le configurazioni rettangolari,** con ragionamento del tipo: *Ci sono 12 pois in lunghezza e 7 pois in larghezza (12 x 7 = 84) e 48 pois senza marmellata (84 - 48 = 36)*
- oppure: *si contano i due bordi e si fa 7 x 12 = 84, ...*

Un altro ostacolo già visto

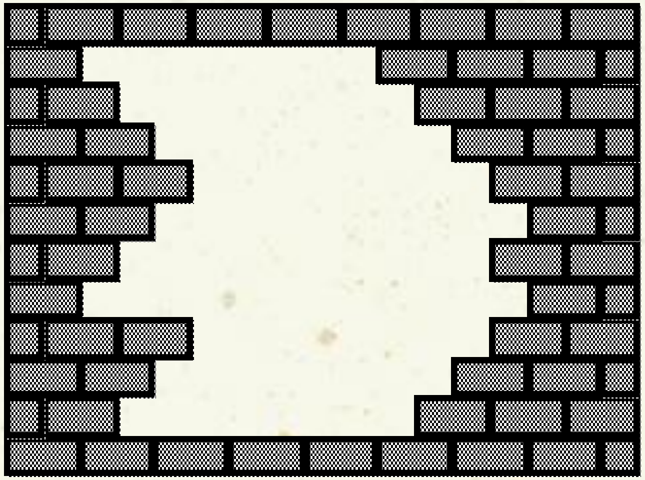
E’ quello che conduce ad errori di conteggio dovuti ad un disegno impreciso quando gli allievi decidono di disegnare tutti i pois nascosti dalla macchia, senza effettuare operazioni aritmetiche.

In un problema di un’edizione precedente tale ostacolo era già stato rilevato:

Un problema precedente del RMR 1994

Il buco (2.II.5, Cat. 3, 4, 5)

Quanti mattoni mancano in questo muro?



Commento: anche in questo caso, alcuni allievi avevano calcolato il numero totale di mattoni e tolto il numero di mattoni visibili e altri avevano semplicemente tentato di ricostituire il muro con i mattoni mancanti.

Qualche anno più tardi

- **L'ORTO DI NONNA PAPERA**

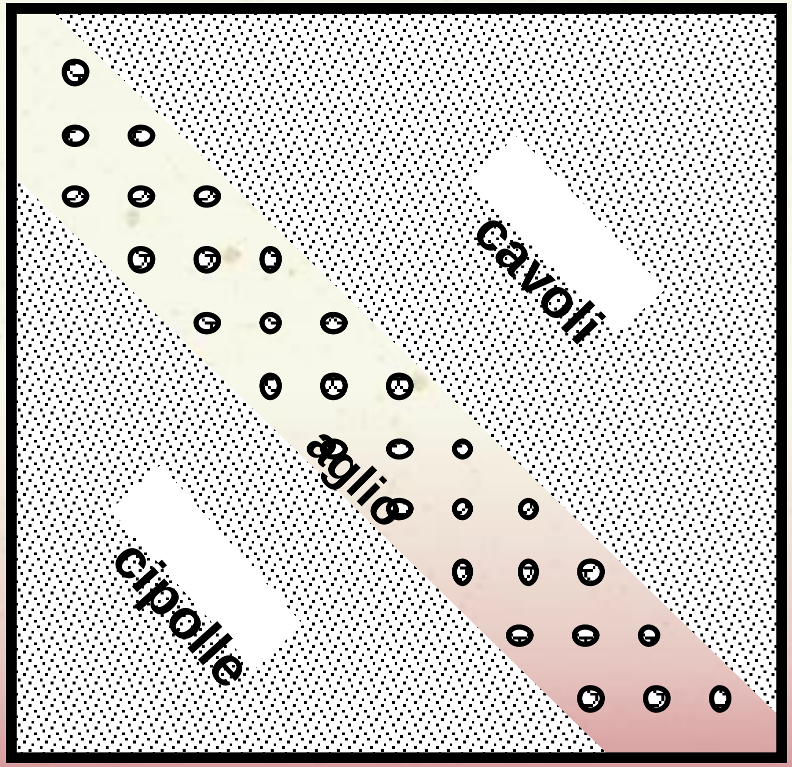
  (06.I.02. Cat. 3, 4, 5)

  Questo è l'orto di forma quadrata che Nonna Papera ha dietro casa. Ha già piantato 30 piantine di aglio e vuole coltivare cavoli e cipolle nelle zone vicine.

  Lei è sempre molto ordinata e precisa: le piantine del suo orto devono essere allineate e disposte in modo regolare.

  Quante piantine di cavolo e quante di cipolla dovrà piantare?

  Spiegate il vostro ragionamento.

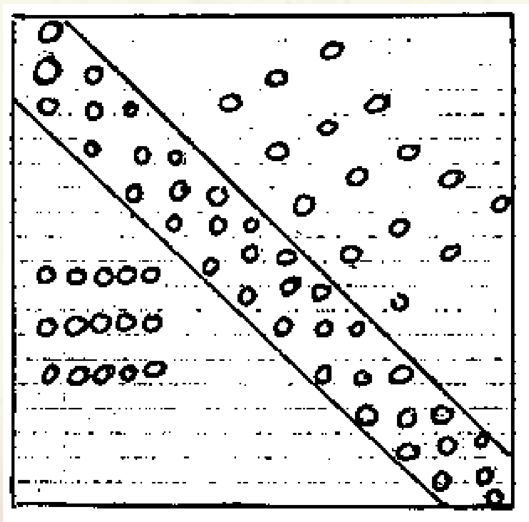


Da un’analisi dettagliata di questo problema (Jaquet 1998)

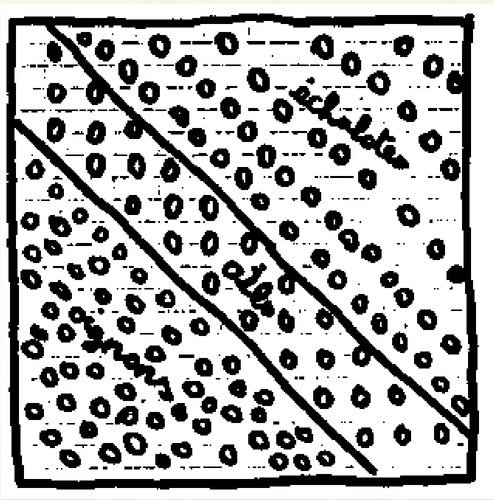
- Gli ostacoli sono legati alla ricostruzione degli allineamenti.

- In questo caso c’è conflitto tra le righe “oblique”, favorito dal disegno dell’enunciato, e le verticali e orizzontali delle presentazioni scolastiche tradizionali.

Che cosa fanno i bambini

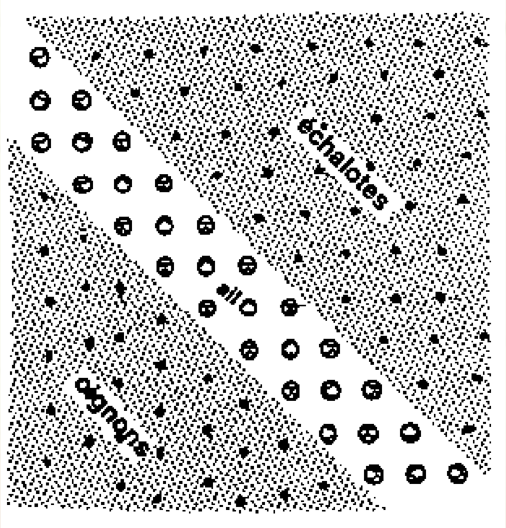


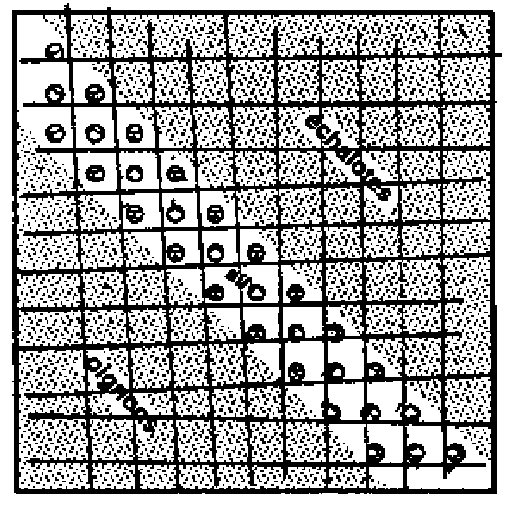
Non c’è regolarità



Una sola direzione è presa in considerazione

Che cosa fanno i bambini

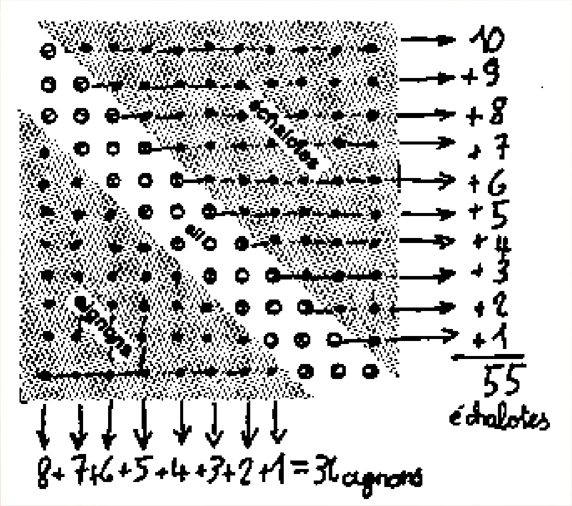


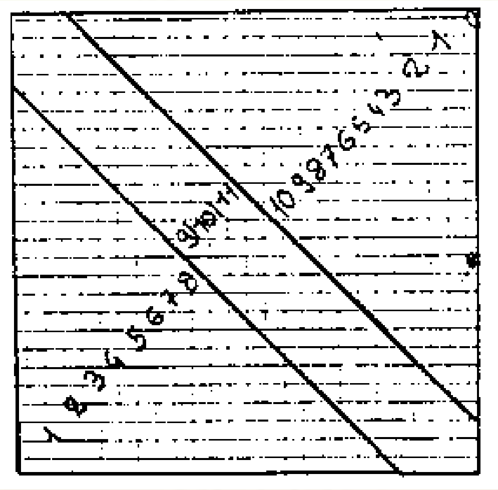


Regolarità in prossimità delle piantine già disegnate

Quadrettatura

Che cosa fanno i bambini





Dall'ambito geometrico

a quello aritmetico

Abbandono del supporto geometrico

Problemi della stessa famiglia

- 12.F.02. *Il pavimento* (Cat. 3, 4)
  - Pavimentazione con poligoni di 5 lati, non convessi (che formano, due a due, 42 rettangoli) dove mancano circa 30 mattonelle
- 14.F.01. *Cioccolatini troppo buoni* (Cat. 3)

  Allineamenti regolari di due tipi di oggetti, presenti in maniera incompleta in un rettangolo e disposti su 8 righe e 9 colonne.
- 15.II.3 *L'orto del Nonno* (Cat. 3, 4)
  - Allineamenti regolari di due tipi di oggetti in un trapezio, le cui due prime righe (le più corte), e la prima colonna sono già disegnate.
- 17.II.1. *I cuori di cioccolato* (Cat. 3, 4)
  - Allineamenti regolari di oggetti, da completare, disposti su 7 righe e 8 colonne in un rettangolo.

Secondo esempio

Ostacolo: il rettangolo

Dalla finale internazionale del 2008
e ritorno indietro verso
molte edizioni del RMT

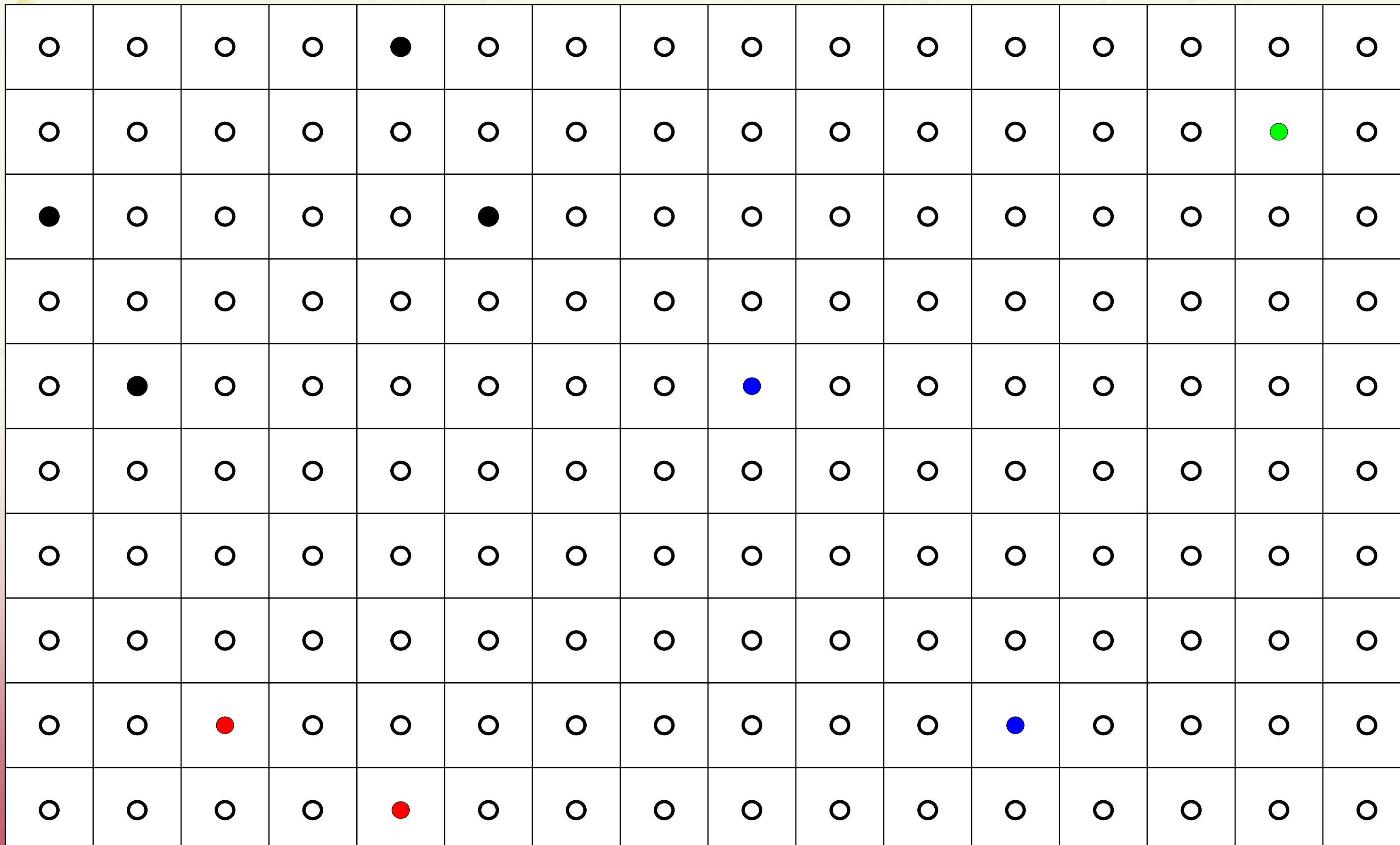
Un problema della finale internazionale

- Obiettivo del problema:

per gli autori, l’obiettivo era quello di proporre una situazione di geometria sul riconoscimento del rettangolo, a partire dai suoi 4 vertici, e sulla conservazione delle sue proprietà (metriche) negli spostamenti (isometrie)

Il tavolo da spostare

Questo disegno rappresenta il pavimento della cucina di Giulia con un cerchietto al centro di ciascuna piastrella quadrata.



Il tavolo da spostare

Giulia osserva una cosa sorprendente: in certe posizioni, i quattro piedi del tavolo di cucina ricoprono esattamente quattro cerchietti del pavimento.

Per cominciare Giulia sistema il tavolo in una certa posizione, con i quattro piedi che ricoprono esattamente i quattro cerchietti segnati in nero sul disegno (in alto a sinistra).

Poi lo sposta in modo che i quattro piedi del tavolo poggino su altri quattro cerchietti. Due di questi cerchietti sono segnati in rosso sul disegno.

Segnate in rosso gli altri due cerchietti ricoperti dagli altri due piedi del tavolo in questa seconda posizione.

Giulia sposta ancora il tavolo, in una terza posizione in modo che i piedi del tavolo siano ancora su quattro cerchietti. Due di questi sono segnati in blu.

Segnate in blu gli altri due cerchietti ricoperti dagli altri due piedi del tavolo in questa terza posizione.

…

Analisi del compito

Capire che i quattro piedi del tavolo formano una figura che conserva le sue proprietà metriche all’atto degli spostamenti (distanza tra i piedi e “angoli” determinati da 3 piedi consecutivi). Si tratta di immaginare la forma «rettangolo» determinata dai suoi quattro vertici senza il disegno dei lati.

Una volta riconosciuta la forma, passare al disegno del rettangolo i cui vertici sono i quattro cerchietti neri della posizione 1, poi procedere:

- sia con ritaglio e spostamento del pezzo rettangolare

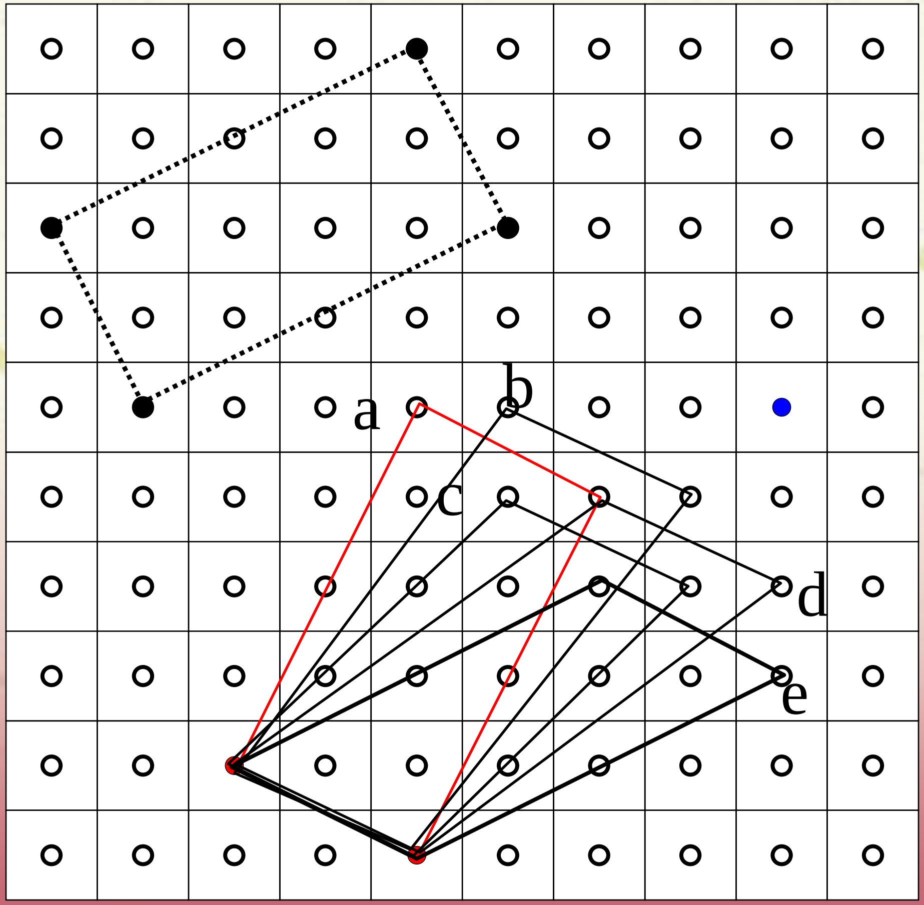
- sia con la costruzione di altri rettangoli con il righello (tramite la misura delle lunghezze dei lati o con il riporto) e uso della squadra per gli angoli retti o ancora sistemando una diagonale, orizzontale o verticale, su 6 cerchietti

- sia visivamente con il conteggio o facendo riferimento ai cerchietti con spostamenti di 1 (o 2) verticalmente e di 2 (o 1 orizzontalmente); o ancora osservando che una diagonale è formata da 6 cerchietti allineati orizzontalmente o verticalmente.

Le risposte degli allievi

tavolo in posizione «rosso» (su12 classi:)

a) 3 «risposte corrette» con il disegno del rettangolo (d.r)
b) 1 risposta «un po' deformata» (d.r)
c) 2 risposte «a 45 gradi» (1 s.r; 1 d.r)
d) 2 risposte «molto deformate» (1 s.r; 1 d.r)
e) 4 risposte «parallele al tavolo nero» (s.r)



Una prima osservazione

- I lettori della prova avevano giudicato il problema relativamente facile in quanto avevano immaginato che la maggior parte dei gruppi avrebbero ritagliato un rettangolo di dimensioni di quello determinato dai quattro punti.
- Le risposte degli allievi hanno mostrato che l'analisi a priori precedente era ben lontana dalla realtà: su dodici classi, 3 disegni corretti, gli altri 9 sono parallelogrammi non rettangoli.

Perché questa ecatombe?

- **Difficoltà di lettura dell’enunciato?**

  la risposta è negativa: malgrado un testo piuttosto lungo, in base ai commenti degli allievi, il compito è stato ben percepito, come mostra per esempio il seguente:

  Si può spostare 4 volte il tavolo. Abbiamo misurato i punti neri. Quindi abbiamo preso gli altri con i «pesi» dei punti neri. Perché c’è sempre lo stesso tavolo, non può diventare più grande ne più piccolo! L’altezza è 2,2 cm, la lunghezza è 4,5 cm e di traverso in alto c’è 5 cm.

Perché questa ecatombe ?

- **Inadeguatezza della richiesta rispetto all’età degli allievi o insufficienza del campione?**

  La risposta è ancora negativa, in attesa comunque di altre sperimentazioni.

  Abbiamo dato lo stesso problema ad altre classi di categoria 5, 6, 7 e 8, da risolvere individualmente o a gruppi di due, in condizioni confrontabili con quelle della finale.

Errori “caratteristici”

I risultati evidenziano errori “caratteristici” su 86 elaborati esaminati in merito alla prima questione, la più semplice (rosso); le altre questioni (blu e verde) danno tassi di riuscita inferiori.

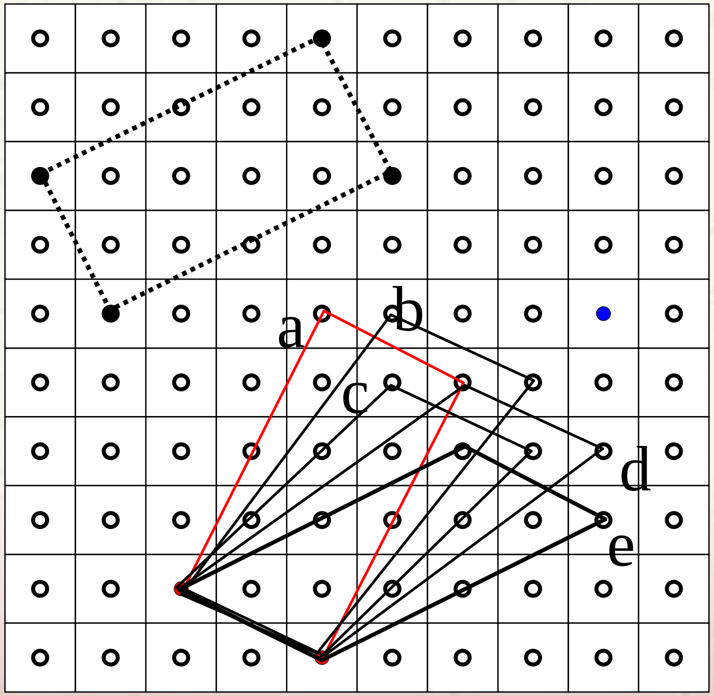
35 (41%) rettangolo corretti

32 (37%) parallelogrammi i cui lati collegano quattro punti successivi secondo le diagonali dei quadrati (posizione c) (in 28 casi) o 3 punti successivi (4 casi)

11 (13%) parallelogrammi i cui lati sono ottenuto per traslazione dei lati del rettangolo dato (posizione e)

5 altri parallelogrammi

3 risposte confuse che testimoniano una incomprensione del compito.



Seconda osservazione

- Nel caso di questa prima questione, la riuscita migliore è quella di una classe di categoria 5 (50%) e di una classe di categoria 7 (78%) nella quale gli allievi hanno lavorato individualmente, ma nella quale la maggioranza ha ritagliato il rettangolo per riportarlo, dopo aver osservato alcuni compagni che agivano in questo modo.

- La riuscita più debole (16%) è quella di una classe di categoria 8 nella quale gli allievi hanno lavorato individualmente.

Osservazione “en passant”

- Quando un errore è identificato in qualche elaborato, è necessario condurre sperimentazioni a grande scala per confermare o infirmare le prime osservazioni.

- Nel nostro caso, non solo è stata confermata la confusione tra rettangolo e parallelogramma, ma ha anche consentito di far apparire, tra le risposte errate, una maggioranza di parallelogrammi con i lati paralleli alle diagonali della quadrettatura.

Il rettangolo nei problemi del RMT

- Su circa 900 problemi del RMT, 47 contengono il termine "rettangolo".
- In 35 casi, il rettangolo è disegnato in una posizione tradizionale (lati paralleli ai bordi del foglio).
- In 7 casi non c'è disegno, ma il testo descrive un oggetto familiare rettangolare (campo sportivo, fogli di carta, coperchio di una scatola...)
- In 2 casi, il rettangolo è rappresentato da un'altra figura (parallelogramma in una scatola disegnata in prospettiva, o una bandiera che sventola)
- In 5 casi, bisogna formare il rettangolo con pezzi dati (puzzle) o ritagliare una figura a forma di rettangolo (torta rettangolare o quadrato da dividere).
- In 3 casi, il(i) rettangolo(i) da disegnare sarà (saranno) in posizione non convenzionale (casa, puzzle).

Il quadrato: un rettangolo particolare

- Nel caso del quadrato, la ricerca porta a risultati similari: i disegni sono quasi sempre in posizione tradizionale, talvolta «*sulla punta*» con le diagonali verticali e orizzontali, con l’eccezione di puzzle o di ritagli, è raramente da disegnare.

- Non ci sono, fin’ora su problemi del RMT, ricerche relative a rettangoli i cui vertici siano punti di una trama quadrettata (c’è però un progetto in tal senso).

- Al contrario, ce ne sono tre di questo tipo, su quadrati.

05.F.5. I quadrati (Cat. 3, 4)

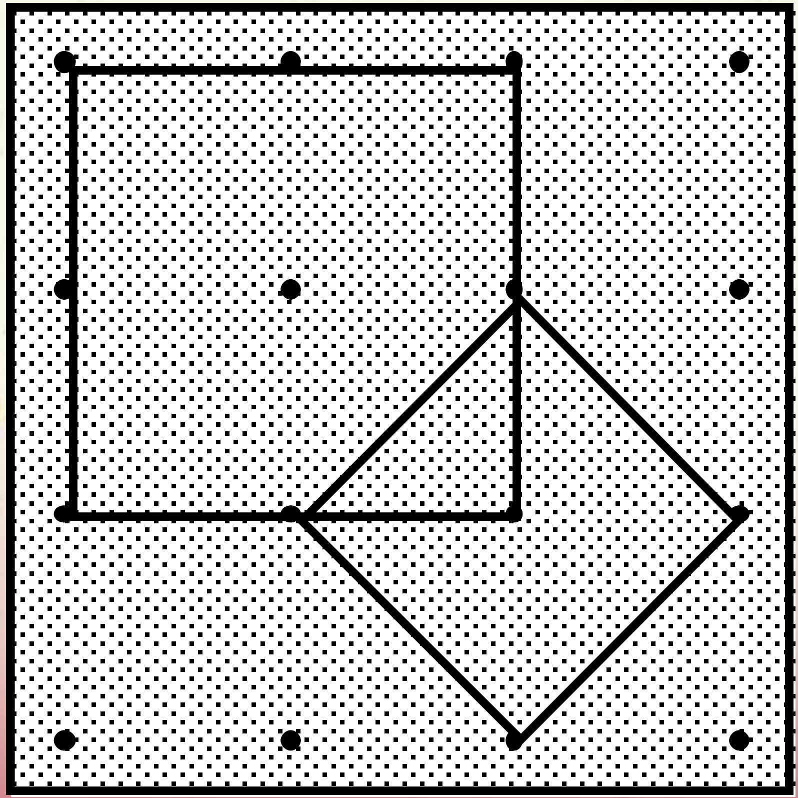
In questo riquadro sono segnati 16 punti.

Sono già stati costruiti due quadrati ognuno dei quali ha per vertici quattro di questi punti.

Si potrebbe costruirne molti altri.

Quanti quadrati aventi per vertici quattro dei 16 punti dati è possibile costruire?

Spiegate come li avete trovati.



- I due quadrati che sono stati ignorati da quasi tutti i gruppi di allievi sono stati evidentemente quelli **i cui lati non sono paralleli ai lati del foglio o alle diagonali dei quadrati della trama les côtés.**
- Anche gli altri due problemi hanno messo in evidenza una grande diversità nel riconoscimento di quadrati, secondo la loro posizione.
- 10.F.05 e 10.F.18. *Quadrati nascosti* (Cat. 3, 4, 5 e 6, 7, 8). Ricerca di quadrati i cui vertici figurano tra 43 intersezioni di una quadrettatura.
- 14.I.12. *Una moneta ben meritata* (Cat. 6, 7, 8, 9, 10).

  Ricerca di quadrati che racchiudono una moneta da un euro sistemata al centro di una trama da 6 x 6 e i cui quattro vertici sono punti della trama.

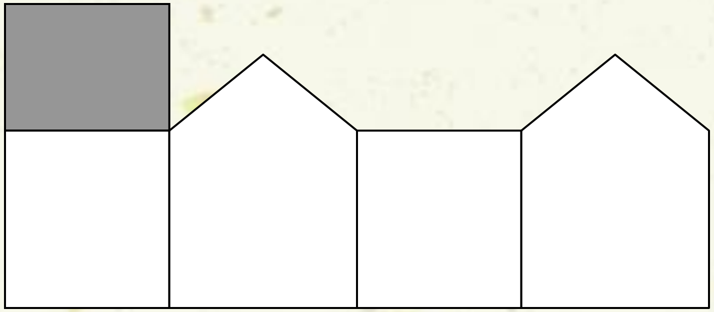
- Sapevamo dunque, come sanno tutti, che è facile riconoscere rettangoli (o quadrati) con lati orizzontali, un po’ meno facile con i lati obliqui (a 45 gradi) e molto più difficile in una posizione diversa.
- Ma c’è ancora una differenza fra
- **«riconoscere»** figure già disegnate e
- **«costruirle».**

- Abbiamo numerosi problemi con quadrati, triangoli o rettangoli del tipo: *Quanti rettangoli è possibile vedere in questa figura?*
- Ma anche qui si tratta solo di **riconoscere** dei rettangoli in posizione classica.
- Un problema (nella prossima diapositiva) ci ha mostrato che quando si tratta di costruire dei rettangoli in posizione non classica, ci sono delle difficoltà (media dei punteggi 1,2 in categoria 3 fino a 1,8 in categoria 5).

16.F.5. LA CASA (Cat. 3, 4, 5)

Giulio vuole costruire una casa piegando e tagliando un foglio di cartoncino.

Ha già disegnato le quattro facciate e una parte di tetto, come rappresentato qui sotto:



- Deve ancora disegnare l’altra parte del tetto, che sarà un rettangolo della stessa grandezza di quello che ha già disegnato in grigio.
- Giulio scopre che può attaccare il rettangolo in più modi sui lati già disegnati.
- **In quanti modi diversi Giulio può aggiungere l’altro rettangolo grigio, sul modello già disegnato?**
- **Per ciascun modo trovato, fate un disegno completo della casa con il nuovo rettangolo grigio (potete ricopiare, tagliare, incollare…).**

Saperne di più

- E’ a questo punto che abbiamo voluto saperne di più, ispirati da un’esperienza riportata da M-H. Salin (2008): in una palestra, gli allievi (10/11 anni, cat. 5) devono spostare un materassino rettangolare pesante (di circa 1,5 m su 0,9 m) e indicare prima di spostarlo la posizione di tre vertici, essendo già fissata dall’insegnante la posizione di uno dei vertici.
- L’attività si svolge in uno spazio (meso-spazio) più grande di quello del foglio di carta (micro-spazio) sul quale si svolge la gran parte dei lavori di geometria scolastica. Gli allievi hanno righelli, squadrette e altri strumenti di misura a disposizione.
- Gli osservatori hanno constatato che pochi allievi sono capaci di rispondere direttamente in modo corretto utilizzando la squadretta, oppure di interpretare il loro errore constatando che hanno ignorato il vincolo dell’angolo retto per determinare gli spostamenti dei vertici.

Osservazione en passant

- Gli errori che identifichiamo hanno talvolta una lunga storia in seno al RMT.
- Non li rileviamo, li dimentichiamo, li ritroviamo, li conserviamo nella memoria e non ce ne preoccupiamo, poi, di colpo, essi si impongono come “interessanti”. L’approccio scientifico è in tal caso molto aleatorio e il suo sviluppo è incerto.
- Abbiamo i nostri vincoli, i nostri limiti, le nostre occupazioni...

Verso l’avvenire

- Prima di andare oltre, bisogna controllare se altri ricercatori si sono già occupati di questa concezione insufficiente di rettangolo e vedere se per esempio non si debba leggere o rileggere Piaget (1948) poiché si scoprono delle somiglianze evidenti tra i nostri allievi incapaci di distinguere un rettangolo da un parallelogramma e i piccoli ginevrini, interrogati più di sessant’anni fa, che percepivano le proprietà topologiche delle figure ben prima delle proprietà proiettive, poi euclidee…
- Potremmo rileggere anche testi di Speranza (es. 1998) nei quali egli riflette sulle forme e i loro nomi.
- Bisognerà poi, tramite nuovi problemi, saperne di più sulle capacità degli allievi di riconoscere rettangoli in situazioni non tradizionali, ma **soprattutto di utilizzare le loro proprietà metriche per costruirli.**

L’avvenire è già qui

Uno di tali problemi è già stato proposto per la prova I del 18° RMT

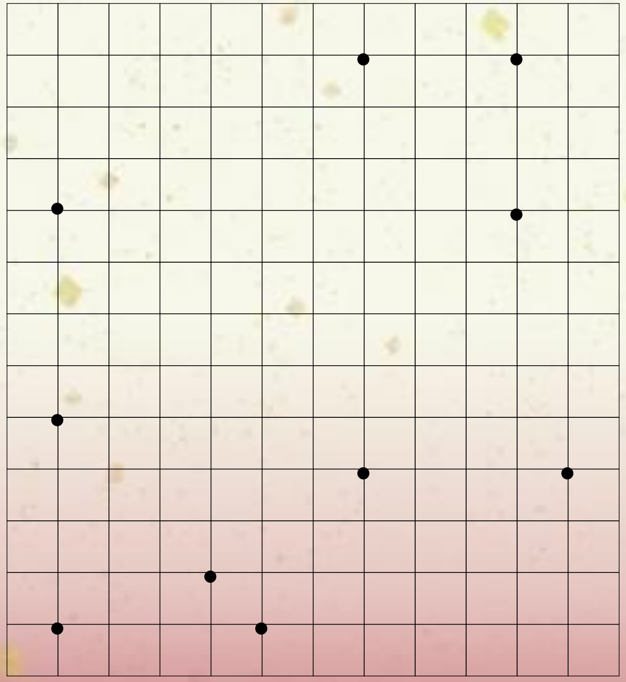
I dieci punti

Francesco è sicuro che fra i dieci punti segnati qui a fianco su una griglia quadrata, ce ne siano quattro che sono i vertici di un rettangolo.

Individuate i quattro punti e disegnate il rettangolo: spiegate anche perché è giusto quello che dice Francesco.

Anna dice che può disegnare più di un rettangolo i cui vertici sono quattro dei dieci punti dati.

Che cosa ne pensate?



Altre questioni

Il termine rettangolo non figurava nell'enunciato de *Il tavolo da spostare*, così come non figurava alcuna allusione ad una figura geometrica.

Anche gli allievi hanno molto raramente (quasi mai) evocato questa figura esplicitamente benché l'abbiano in qualche caso disegnata.

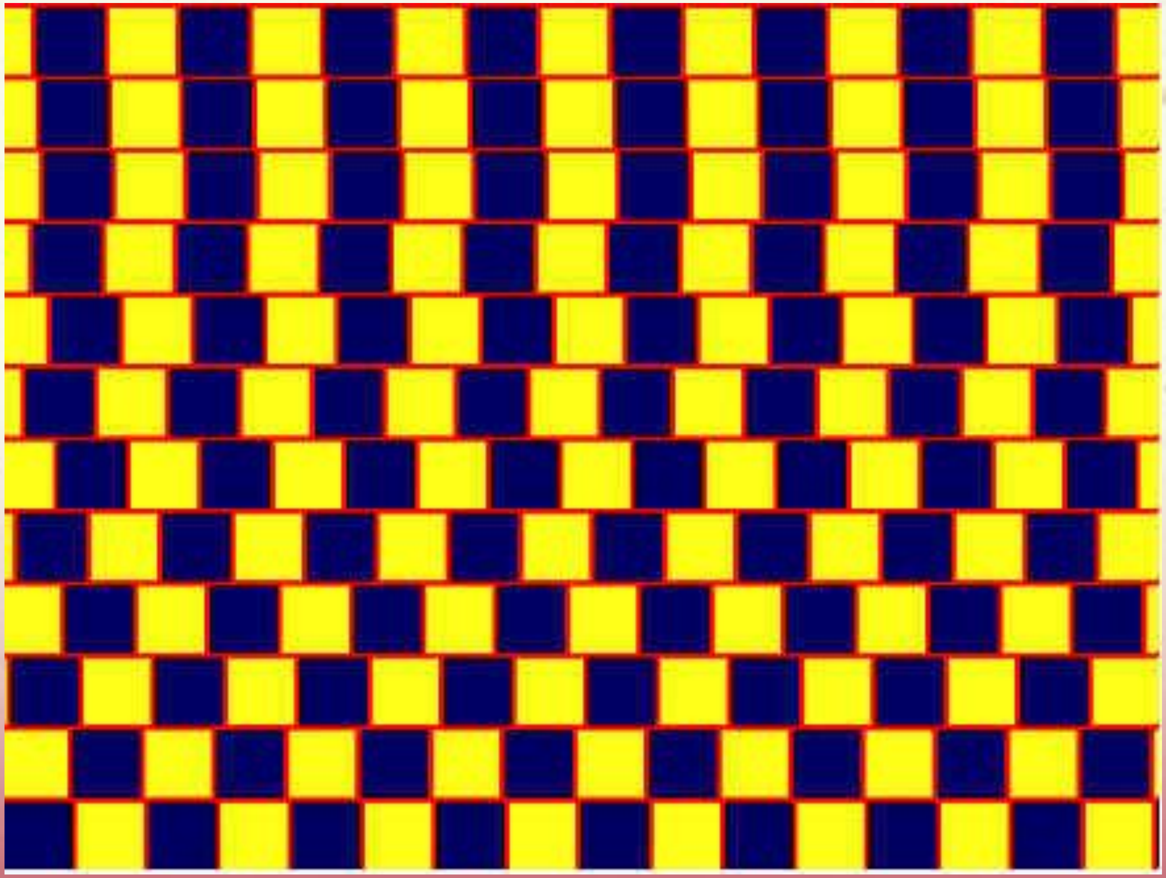
- **L'ostacolo sarebbe differente se quel termine fosse stato pronunciato?**

Quasi tutti i quadrilateri errati sono parallelogrammi non rettangoli.

Pertanto sono conservate due proprietà: il parallelismo e le distanze dei lati opposti.

- **L'ostacolo è quello legato alla conservazione dell'angolo retto?**
- …

Al gruppo “geometria piana” l’ardua sentenza!



…le righe rosse orizzontali sono parallele?

Bibliografia

- Bachelard, Gaston [1938] (1e édition, chapitre 1er) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris, Librairie philosophique Vrin, 1999
- Brousseau, G. [1976] Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques in *Actes de la XXVIIIe rencontre de la CIEAEM*. W et J. Wanhamme éditeurs. Repris avec « Conclusions et commentaires 1983 » dans *Recherche en didactique des mathématiques, Vol IV-2*, Ed La Pensée sauvage. 1983
- Brousseau, G. [1997] *La théorie des situations didactiques* Cours donné à l'Université de Montréal http://pagesperso-orange.fr/daest/Pages%20perso/Brousseau.htm
- Charnay, R. & Mante, M. [1992]. De l'analyse d'erreurs aux dispositifs de re-médiation : quelques pistes… Repères IREM. Pont à Mousson : Topiques éditions. Vol. 7, 5-33.
- Grugnetti, L et al. [1995] Rally matematico, In *L'educazione Matematica,* n. 3, 113-123.
- Jaquet, F. [1998] Entre arithmétique et géométrie. In *Math-Ecole* 184. p. 10-19. Aussi in *ACTES DES JOURNEES D'ETUDES SUR LE RMT* (Vol. 1, 1e et 2e rencontres). *RMT: Quels apports pour la didactique des mathématiques*. Brigue 1997-98, (1999). L. Grugnetti & F. Jaquet (Eds) Dipartimento di Matematica, Università di Parma & Institut de recherche et de documentation pédagogique, Neuchâtel.
- Piaget, J. [1948] (avec B. Inhelder). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris: Presses univ. de France
- Speranza, F. [1998] Intervista a Beatrice: forme e loro nomi / Entretiens avec Béatrice: les formes et leurs noms, *L'educazione Matematica*, n. 2, 67-80.