

29° Rally Matematico Transalpino, prova II

I problemi del RMT sono protetti da diritti di autore.

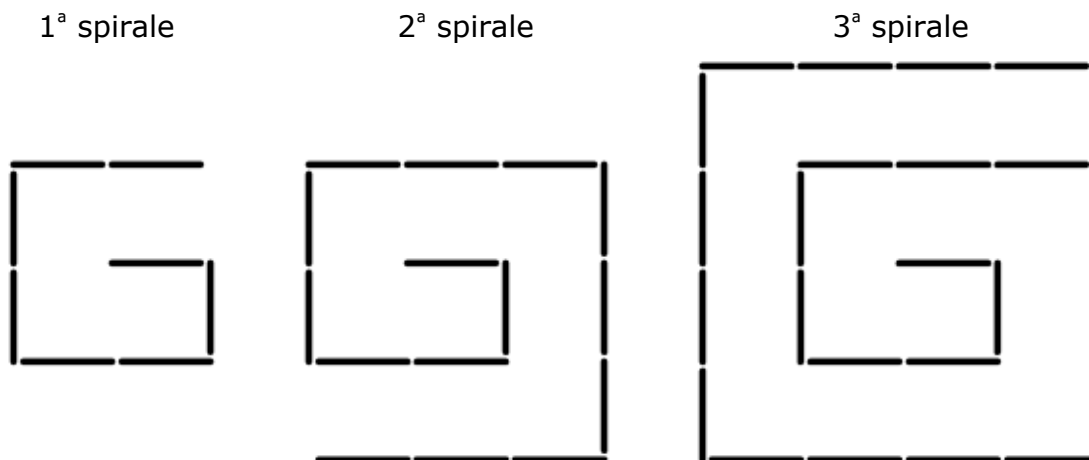
Per un'utilizzazione in classe deve essere indicata la provenienza del problema inserendo la dicitura "©ARMT".

Per un'utilizzazione commerciale, ci si può mettere in contatto con i coordinatori internazionali attraverso il sito Internet dell'associazione del Rally Matematico Transalpino (<http://www.armtint.org>).

	<i>Titolo</i>	<i>Livello</i>	<i>Origine</i>	<i>Ambito</i>
1	Le spirali di stuzzicadenti (I)	3 4	LU	Numero dei termini della successione 8, 15, 24 la cui somma è 130
2	Le aiuole della scuola	3 4	RZ	Confrontare i perimetri di quattro figure equivalenti su una quadrettatura
3	Percorsi di numeri	3 4 5	UD	Successioni aritmetiche da completare: addizioni lacunari
4	I numeri nascosti	3 4 5	RV	Completare un prodotto (80) di tre fattori di cui uno è noto (5)
5	Bambini ... sotto sale!	3 4 5	RMG	Trovare un numero tale che la sua metà sia 3×4 o $3 \times 4 + 1$ o $3 \times 4 + 2$
6	Foglie di carta	4 5 6	UD	Pavimentazione con poligoni a dodici lati da completare su una quadrettatura
7	Scenetta al cioccolato	5 6	LY	Scambi: Trovare n e m tali che $n - 1 = m + 1$ e $n + 1 = 2(m - 1)$
8	Il vestito per la bambola	5 6	PR	Scomposizione additiva di 66 in 4 termini, con relazioni tra loro
9	Macchinine	5 6 7	GTCP	Scomporre 96 in quattro numeri proporzionali a 1, 2, 3 e 6.
10	Il tangram del falegname (I)	6 7	GTGP	Misura del lato di un tangram in funzione di quello del piccolo quadrato interno (6)
11	Che gambe lunghe che hai ... (I)	6 7 8	MI	Confronto delle durate per un determinato percorso a due diverse velocità
12	Uguaglianza da completare	6 7 8	RV	Coppie di numeri positivi il cui prodotto con 90 è 1620
13	La miglior pasticciera	7 8	GTAL	Equazione in N: $a = c + 2 = 2b$ e $a + 4 = 2c$
14	La festa della “castagna”	7 8 9 10	SI	Logica: ricostruzione di personaggi, giorni e quantità
15	Una cura di vitamine	7 8 9 10	PU	Ripartizione di 35 proporzionalmente a 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ ($\frac{3}{4}$) e $\frac{1}{2}$ ($\frac{2}{3}$) ($\frac{3}{4}$)
16	In tre è meglio	8 9 10	RV	Durata di un lavoro fatto da 3 soggetti insieme, conoscendo il tempo che ciascuno di essi impiega per fare il lavoro da solo
17	Il tangram del falegname (II)	8 9 10	GTGP	Misura del lato di un tangram in funzione di quello del piccolo quadrato interno (u)
18	Che gambe lunghe che hai ... (II)	9 10	MI	Confronto delle durate per un determinato percorso a due velocità diverse, con calcolo frazionario del percorso da completare
19	La spirale di stuzzicadenti (II)	9 10	LU	Termine di livello 50 della successione 3, 8, 15, 24, 35 ...
20	Molti zeri	9 10	PR	Minimo prodotto con fattori tutti diversi scelti fra i numeri naturali da 1 a 30, che termini con il massimo numero di zeri possibile

1. LE SPIRALI DI STUZZICADENTI (Cat. 3, 4)

Giacomo si è divertito a costruire spirali sempre più grandi usando degli stuzzicadenti. Nell'immagine vedete le sue prime tre spirali.



Continuando allo stesso modo è riuscito a costruire cinque spirali complete.

Quanti stuzzicadenti ha usato per costruire tutte le cinque spirali?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare la somma dei primi cinque termini di una successione di cui sono noti i primi tre numeri 8, 15, 24 (determinati dal conteggio di elementi disposti a spirale).

Analisi del compito

- Osservare le tre spirali date e le loro regole di costruzione (per esempio, sono inscritte in quadrati di 2×2 , 3×3 , 4×4 ; all'inizio di ogni spirale ci sono due stuzzicadenti posizionati il primo "orizzontalmente" e il secondo "verticalmente", si prosegue aumentando di 1 il numero di stuzzicadenti, ...) e capire che si dovranno costruire la 4ª e la 5ª spirale mantenendo le stesse regole.
- Costruire la 4ª spirale in cui i segmenti, partendo dal primo, devono essere lunghi 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 e poi 5 (uno in più rispetto all'ultimo lato della 3ª spirale), 5 e 5. Poi costruire la 5ª spirale secondo le stesse regole di costruzione delle precedenti.
- Contare gli stuzzicadenti utilizzati per costruire le cinque spirali, eventualmente contando gli stuzzicadenti delle tre spirali date (8, 15, 24) e poi delle due costruite (35, 48).
- Sommare il numero degli stuzzicadenti: $8 + 15 + 24 + 35 + 48 = 130$.

Oppure

Scoprire la regolarità della successione dei numeri degli stuzzicadenti (8, 15, 24, 35, 48) in cui le differenze tra due termini consecutivi sono numeri dispari successivi a partire da 7 (7, 9, 11, 13).

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (130 stuzzicadenti) con spirali correttamente costruite e/o dettaglio dei conteggi e dei calcoli
- 3 Risposta corretta con disegni poco chiari o calcoli e conteggi incompleti
oppure risposta errata dovuta a un errore nel disegno di una sola spirale con conseguente errore nel numero degli stuzzicadenti, con una risposta coerente e con dettaglio dei calcoli
oppure dettaglio dei calcoli e disegni completi, ma dimenticata la risposta
- 2 Risposta errata dovuta a due errori nel disegno delle spirali con conseguente errore nel numero degli stuzzicadenti, con risposta coerente e con dettaglio dei calcoli
oppure disegno corretto delle due spirali mancanti senza fornire la risposta
oppure risposta corretta senza spiegazioni
oppure risposta "83 stuzzicadenti" perché non si considerano quelli delle tre spirali già disegnate con disegno delle spirali e/o dettaglio dei calcoli
- 1 Inizio di ricerca coerente (per esempio il disegno della quarta spirale)

oppure risposta sbagliata per più di due errori di conteggio o di calcolo

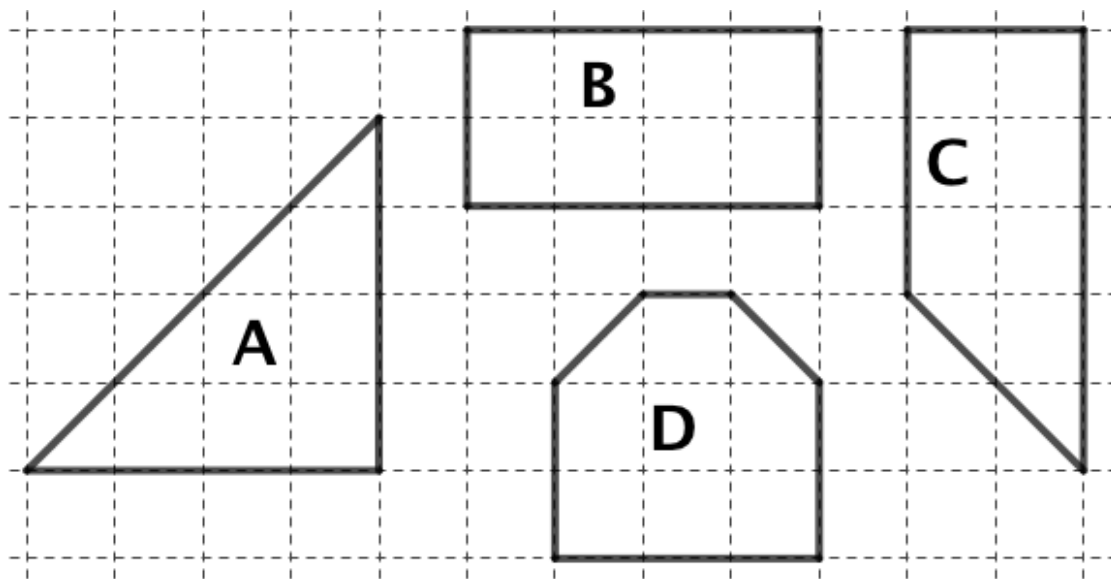
0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4

Origine: Luxembourg

2. LE AIUOLE DELLA SCUOLA (Cat. 3, 4)

Le figure che vedete nel disegno rappresentano le quattro aiuole fiorite che si trovano nel giardino di una scuola.



Il giardiniere vuole recintarle con una rete metallica perché i bambini non calpestino i fiori.

Quale aiuola avrà la rete metallica più lunga? Quale la più corta?

Mostrate come avete trovato le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Confrontare i perimetri di quattro poligoni equivalenti, disegnati su una griglia, i cui lati sono formati dai lati o dalle diagonali dei quadretti della griglia.

Analisi del compito

- Comprendere che la rete metallica viene messa lungo i bordi che corrispondono al perimetro dei quattro poligoni.
 - Rendersi conto che i lati dei quadretti e le diagonali dei quadretti hanno lunghezza diversa.
 - Costatare che la lunghezza delle diagonali dei quadretti è maggiore rispetto alla lunghezza dei lati dei quadretti.
 - Contare i segmenti che formano il contorno di ogni figura:
 A: 4 diagonali + 8 lati B: 12 lati C: 2 diagonali + 10 lati D: 2 diagonali + 8 lati
 - Confrontare a due a due i perimetri scomponendoli in numero di lati e di diagonali e poi determinare le differenze togliendo ciò che è comune ai due perimetri
 A > B perché dopo aver tolto 8 lati, restano da confrontare 4 diagonali con 4 lati
 A > C perché dopo aver tolto 8 lati e 2 diagonali, restano da confrontare 2 diagonali con 2 lati
 A > D perché dopo aver tolto 8 lati e 2 diagonali, restano 2 diagonali in più per A
 D < B perché dopo aver tolto 8 lati, restano da confrontare 2 diagonali con 4 lati
 (Questo confronto è meno evidente dei precedenti, si possono però confrontare due segmenti, uno di 4 lati e uno di 2 diagonali, per esempio come quelli della figura C)
 D < C perché dopo aver tolto 8 lati e 2 diagonali, restano 2 lati in più per C.
- Questi confronti permettono di affermare che la rete più lunga è quella di A e la più corta è quella di D.

Oppure

misurare con il righello i segmenti che formano il perimetro dei poligoni e aggiungere le misure ottenute per arrivare alle stesse conclusioni (questo metodo richiede precisione nel misurare – scarti di 1 o 2 mm – e addizioni con i numeri decimali).

Oppure

per ogni figura seguire i contorni per esempio con uno spago, una striscia di carta o altro materiale (magari mettendo delle tacche nel passaggio da un lato all'altro). Successivamente confrontare le lunghezze dei pezzi di spago ottenuti e notare che il più lungo è quello della figura A e il più corto è quello della figura D.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposte corrette e complete (A ha la rete più lunga e D la più corta) con descrizione chiara dei confronti a due a due (vedi analisi) o delle misure o del materiale concreto utilizzato
- 3 Risposte corrette con spiegazione poco chiara o incompleta del procedimento seguito o con qualche imprecisione o errore di calcolo nelle misure
- 2 Risposte corrette, ma con solo uno o due confronti
oppure risposta errata dovuta a errori di calcolo nelle misure ma con procedura corretta
oppure una sola risposta corretta con tutti i confronti necessari
oppure risposte corrette senza spiegazione
- 1 Inizio corretto di ricerca
oppure una sola risposta corretta senza spiegazioni
- 0 Confusione sistematica tra le lunghezze dei lati e delle diagonali (sono considerati uguali o in rapporto 1/2)
oppure incomprensione del problema

Livello: 3, 4**Origine:** Rozzano

3. PERCORSI DI NUMERI (Cat. 3, 4, 5)

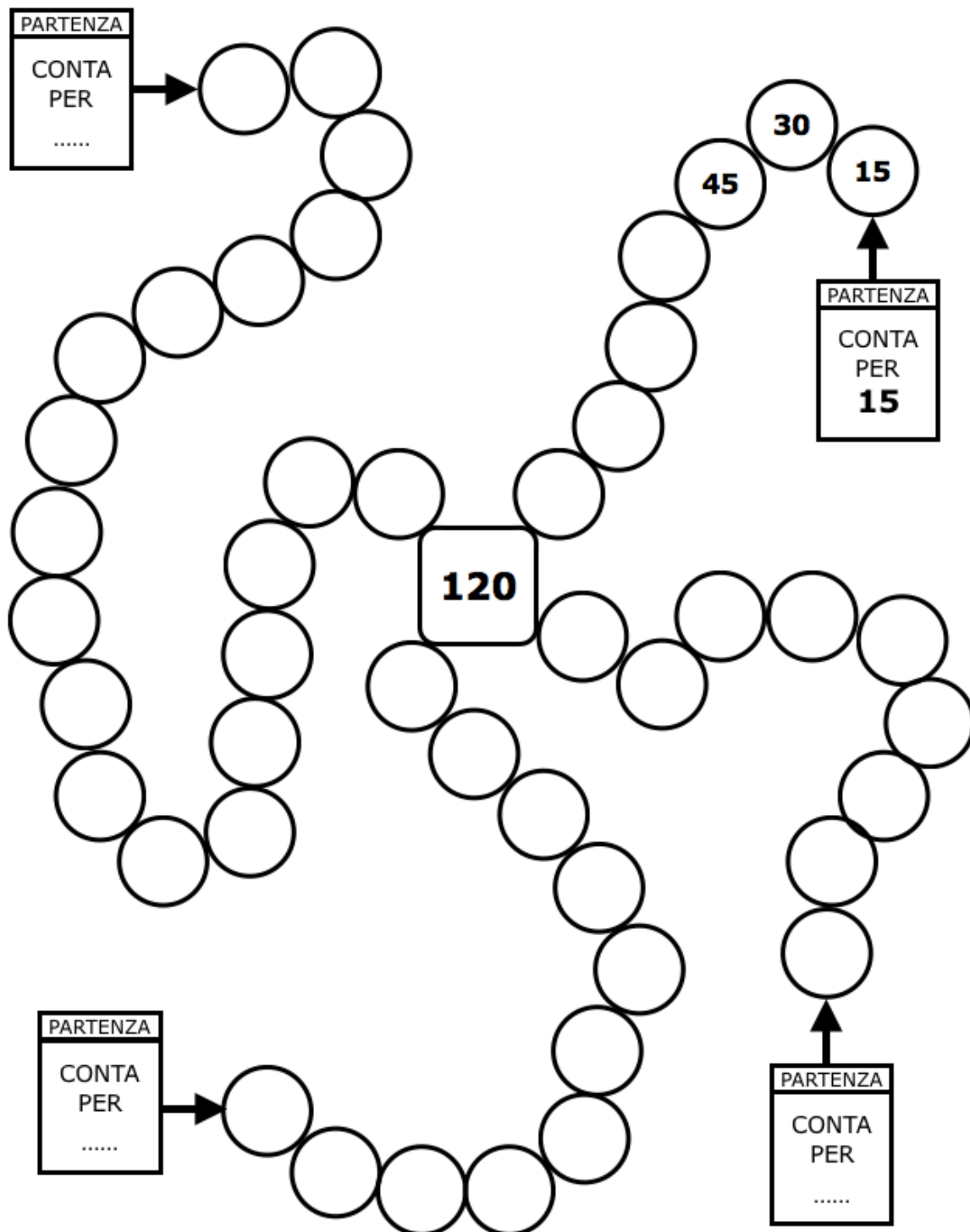
Federico deve completare i quattro percorsi disegnati qui sotto.

Ogni percorso inizia dal cerchietto indicato dalla freccia e arriva al numero 120.

Per completare ciascun percorso correttamente è necessario che il numero nel cerchietto indicato dalla freccia sia uguale al numero scritto sul cartellino che indica la partenza.

Poi bisogna contare per quel numero e scrivere nei cerchietti i numeri trovati, fino ad arrivare al 120.

Federico ha iniziato a scrivere i numeri partendo dal percorso in cui deve contare per 15.



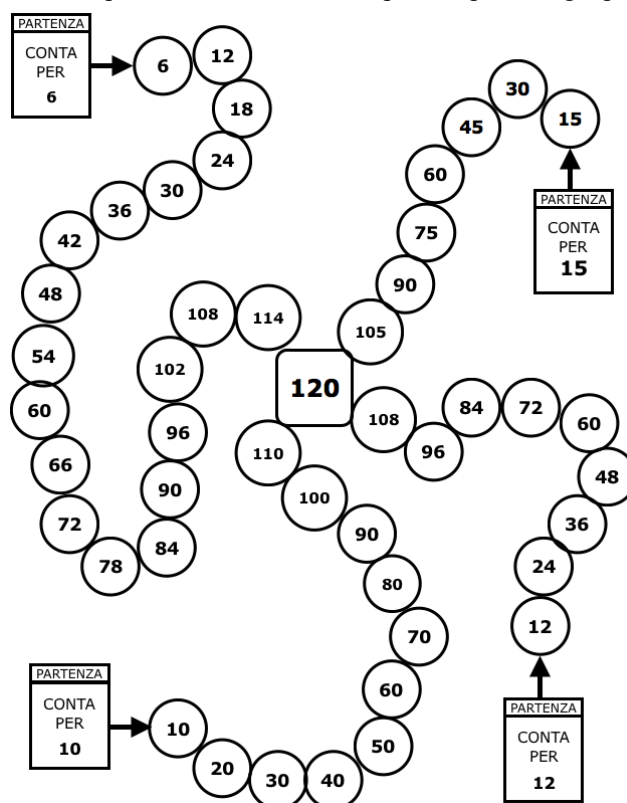
Completate tutti i percorsi inserendo i numeri corretti sia nei cartellini di partenza sia all'interno dei cerchietti.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Completare quattro successioni aritmetiche (di multipli), per tre delle quali sono noti solo il numero dei termini e l'ultimo termine (120).

Analisi del compito

- Appropriarsi della situazione: i quattro percorsi rappresentati nell'immagine devono essere completati con la sequenza ordinata dei multipli dei numeri indicati nei cartellini posti all'inizio di ciascun percorso fino ad arrivare al numero 120; il percorso dei multipli di 15 è già iniziato e deve essere completato; per completare gli altri percorsi è necessario trovare prima la regola che determina ogni successione.
- Completare il percorso dei multipli di 15 scrivendo i numeri mancanti.
- Per individuare la regola che determina ogni percorso non ancora definito:
 - si può procedere per tentativi scrivendo i multipli del numero ipotizzato per scoprire se al termine del percorso si arriva esattamente al numero 120. Per procedere più velocemente si potrebbe osservare che, se il numero di cerchi aumenta, allora diminuisce il numero cercato;
 - si possono contare i "posti" (i cerchietti), senza dimenticare quello del 120, per scoprire quanti sono i multipli da inserire in un percorso; dividere in seguito il 120 per il numero dei multipli per trovare il numero che determina la regola ($120 \div 20 = 6$; $120 \div 12 = 10$; $120 \div 10 = 12$).
- Scrivere i numeri sia nei cartellini di partenza sia nei cerchietti per completare ogni percorso.

**Attribuzione dei punteggi**

- 4 Risposta corretta: i numeri dei quattro percorsi corretti e completi
- 3 Risposta con tre percorsi corretti e completi
oppure risposta con quattro percorsi, ma uno o due errori o cerchietti non completati, in uno solo percorso
- 2 Risposta con due percorsi corretti e completi
oppure risposta con quattro percorsi, ma da tre a cinque errori o dimenticanze, in uno o due percorsi
- 1 Risposta con un solo percorso corretto e completo
oppure risposta con quattro percorsi, ma con più di cinque errori o dimenticanze
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4, 5

Origine: Udine

4. I NUMERI NASCOSTI (Cat. 3, 4, 5)

Sul quaderno aperto di Arianna si sono posate due farfalle che hanno nascosto due numeri.

 $\times$ 5 $\times$  = 80

Ora sul quaderno si vedono solo i numeri 5 e 80, due segni $\times$ e un segno $=$.

I due numeri nascosti sono entrambi numeri interi e possono essere uguali oppure diversi tra loro.

Quali possono essere i due numeri nascosti?

Indicate tutte le possibilità e mostrate come avete fatto a trovarle.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Completare un prodotto (80) di tre fattori di cui uno è noto (5) e trovare tutte le soluzioni possibili con i numeri naturali.

Analisi del compito

- Esaminare l'operazione data, comprendere che è formata da quattro numeri di cui due nascosti e che si tratta di un'uguaglianza tra 80 (a destra) e due moltiplicazioni successive (a sinistra) in cui manca il primo fattore, si conosce il secondo e manca il terzo.
- Capire che si tratterà di scegliere un primo numero, moltiplicarlo per 5, calcolare il prodotto e moltiplicare quest'ultimo per un secondo numero da trovare, per ottenere 80.
- È possibile procedere in due modi
 - 1 per tentativi
 - inserendo 1 nel primo spazio, si ottiene 5 come primo prodotto (5×1); inserendo 2 (ma potrebbero anche partire da 1) come terzo fattore si ottiene $1 \times 5 \times 2 = 10$, inserendo 3 si ottiene $1 \times 5 \times 3 = 15$, ... fino a trovare la coppia (1, 16). Oppure dopo aver trovato il primo prodotto (5×1), si esegue l'operazione inversa della moltiplicazione ($80 \div 5$) si ottiene 16 che sarà il terzo fattore;
 - proseguendo allo stesso modo: con il 2 come primo fattore, si ottiene la coppia (2, 8); con il 3 non si ottiene un numero intero come terzo fattore; con il 4 si ottiene la coppia (4, 4), ... La ricerca si conclude quando si arriva a 16 come primo fattore.
 - 2 Comprendere che dividendo 80 per 5, si troverà il prodotto degli altri due numeri cercati: 16.
Cercare tutti i divisori di 16 formando correttamente le coppie di fattori per ottenerlo: (1; 16); (2; 8), (4; 4).

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta, le tre possibilità (1, 16); (2, 8); (4, 4) ed eventualmente anche (8, 2); (16, 1) con descrizione completa della procedura usata (i calcoli necessari o i tentativi fatti)
- 3 Risposta corretta con descrizione incompleta della procedura usata (mancanza di qualche calcolo o elenco parziale dei tentativi)
oppure due coppie correttamente individuate, con descrizione chiara
- 2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure due coppie correttamente individuate, con descrizione poco chiara
oppure una sola coppia correttamente individuata, con descrizione chiara
oppure elenco corretto dei possibili numeri (1, 2, 4, 8, 16), ma senza l'abbinamento delle coppie
- 1 Inizio di ragionamento corretto, ma trovate coppie di numeri errate per errori di calcolo
oppure una o due coppie correttamente individuate senza spiegazione
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4, 5

Origine: Riva del Garda

5. BAMBINI ... SOTTO SALE! (Cat. 3, 4, 5)

I bambini e i due insegnanti della classe 3B si recano in visita alle Saline di Cervia.

All'ingresso vengono divisi in due gruppi, ognuno formato dallo stesso numero di bambini e guidato da un insegnante.

Il primo gruppo va a visitare il Museo delle Saline.

Il secondo gruppo procede nella visita del parco su un trenino. Ogni vagone contiene un massimo di quattro persone. Bambini e insegnante occupano interamente tre vagoni e parte di un quarto.

Da quanti alunni può essere formata la classe 3B?

Trovate tutte le possibili soluzioni e mostrate come avete fatto a trovarle.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Trovare un numero tale che la sua metà sia 3×4 o $3 \times 4 + 1$ o $3 \times 4 + 2$.

Analisi del compito

- Comprendere la situazione: la classe si divide a metà; in ognuno dei due gruppi c'è un insegnante; ci sono tre vagoni da quattro persone completamente occupati e un quarto vagone in cui ci possono essere 1 o 2 o 3 persone una delle quali può essere un insegnante.
- Il gruppo del treno può essere formato da 12 persone (3×4) nei vagoni completi; con 1, 2 o 3 persone in più sarà formato da 13, 14 o 15 persone da cui si deve togliere l'insegnante e cioè 12, 13 o 14 alunni.
- Moltiplicare questi tre numeri per 2 per determinare il numero degli alunni dell'intera classe: 24, 26 o 28 alunni.

Oppure

Partire dalle tre possibilità sul numero delle persone (13, 14, 15), moltiplicare per 2 e sottrarre le due insegnanti.

Attribuzione dei punteggi

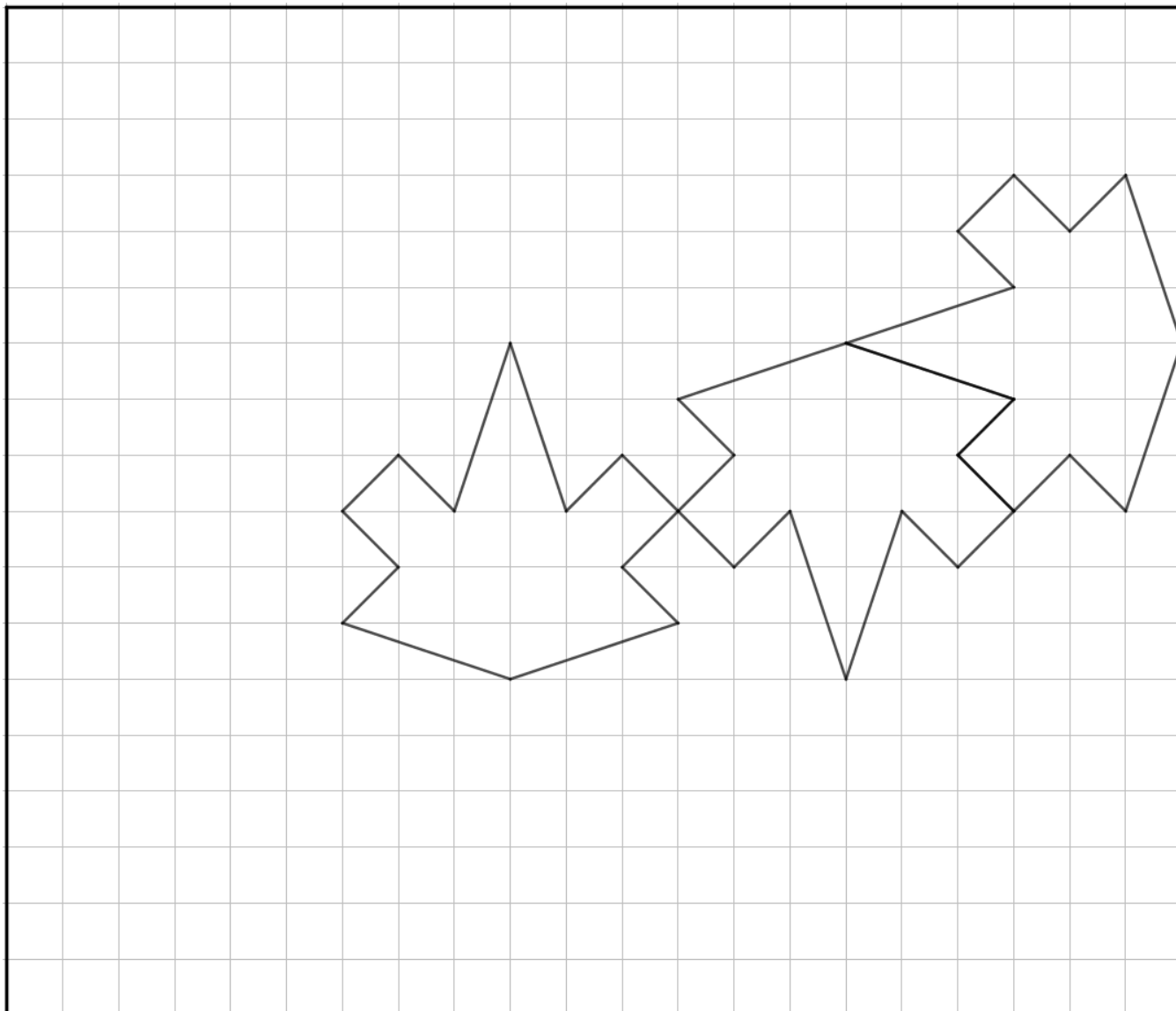
- 4 Le tre soluzioni (24, 26 e 28) con descrizione chiara e completa del procedimento (riconoscimento dei numeri 13, 14, 15 e poi di 12, 13, 14 e moltiplicazione per 2, ...)
- 3 Le tre soluzioni con descrizione poco chiara o incompleta
- 2 Le tre soluzioni senza descrizione
oppure due soluzioni con descrizione del procedimento seguito
oppure risposte 26, 28 e 30 perché non si è sottratto il numero delle maestre con descrizione chiara e completa
oppure risposta 12, 13, 14 perché dimenticata la moltiplicazione per 2, con descrizione chiara e completa
- 1 Inizio di ricerca, per esempio sono mostrati dei tentativi, ma non si arriva ad alcuna soluzione
oppure una o due soluzioni senza alcuna descrizione
oppure risposta 13, 14, 15
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4, 5

Origine: Romagna

6. FOGLIE DI CARTA (Cat. 4, 5, 6)

Bruno ha disegnato tre foglie sul cartoncino quadrettato che vedete qui sotto.



Ora vuole continuare a disegnare sul cartoncino il maggior numero possibile di foglie, tutte intere e identiche alle tre già disegnate.

Bruno vuole poi colorare di verde o di rosso tutte le foglie intere che sarà riuscito a disegnare, in modo che due foglie che hanno uno o più lati in comune, non siano dello stesso colore.

Disegnate voi sul cartoncino di Bruno il numero più grande possibile di foglie intere e coloratele come vuole lui.

ANALISI A PRIORI

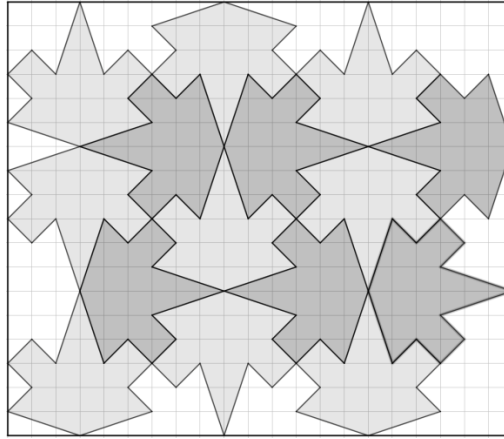
Compito matematico

Completare la pavimentazione di una griglia quadrettata con poligoni interi che hanno dodici lati e un asse di simmetria; colorare tutte le figure intere di due colori, in modo tale che due figure che hanno almeno un lato in comune siano di diverso colore.

Analisi del compito

- Capire che si tratta di ricoprire la griglia con il numero più grande possibile di foglie identiche a quelle già disegnate.
- Comprendere dalle foglie già disegnate che, per riempire tutti gli spazi senza sovrapporre le figure, le foglie devono essere spostate (con una traslazione, una rotazione o una simmetria assiale).

- Per disegnare le nuove foglie si può procedere semplicemente ritagliando una o più foglie che possono poi essere posizionate come pezzi di puzzle, vicino a quelle già disegnate: per esempio la foglia più a destra può essere inserita tra le altre due dopo una traslazione di 6 diagonali dei quadretti verso il basso a sinistra; la simmetrica della foglia centrale può essere inserita tra la parte alta del cartoncino e la foglia di sinistra, ...
- Disegnare le foglie (o ritagliare più modelli e poi incollarli) in modo che tra loro non ci siano spazi vuoti e che non si sovrappongano, per riuscire a ottenere il maggior numero di foglie intere possibile (15).
- Colorare le foglie intere in rosso o in verde in modo che le foglie che hanno uno o più lati in comune siano di colore diverso.

**Attribuzione dei punteggi**

- 4 Risposta corretta e completa: le 15 foglie disegnate e colorate correttamente (o comunque indicato chiaramente il colore).
- 3 Risposta incompleta con 14 foglie disegnate e colorate correttamente
oppure risposta con 15 foglie ma con un errore di colorazione (due foglie con uno o più lati in comune hanno lo stesso colore oppure usati colori diversi da quelli indicati).
oppure le 15 foglie intere colorate correttamente, ma anche le foglie non intere sono colorate rispettando la consegna dei colori diversi su due foglie vicine
- 2 Risposta incompleta: da 9 a 13 foglie disegnate e colorate correttamente
oppure disegno di 14 o 15 foglie identiche ai modelli dati, ma con errori nella colorazione
- 1 Disegno corretto con meno di 9 foglie senza sovrapposizioni o errori nel disegno di qualcuna
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 4, 5, 6**Origine:** Udine

7. SCENETTA AL CIOCCOLATO (Cat. 5, 6)

In una cioccolateria, Zoe sceglie una scatola di cioccolatini, poi si rivolge al venditore.

Zoe: "Buongiorno signore, in questa scatola ci sono tanti cioccolatini neri quanti cioccolatini bianchi?"

Il venditore: "No, ma se vuoi posso sostituire un cioccolatino nero con un cioccolatino bianco in modo che il numero di cioccolatini neri sia uguale a quello dei cioccolatini bianchi."

Zoe: "Oh no! Al contrario! Non tolga cioccolatini neri, sono i miei preferiti."

Il venditore: "Va bene, allora se vuoi posso sostituire un cioccolatino bianco con un cioccolatino nero. In questo modo, i cioccolatini neri saranno il doppio dei cioccolatini bianchi."

Quanti cioccolatini di ogni colore ci sono nella scatola?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare due numeri tali che, se si diminuisce il primo di una unità e si aumentasse il secondo di una unità, sarebbero uguali e se si diminuisce il secondo di una unità e si aumentasse il primo di una unità, quest'ultimo sarebbe il doppio del secondo.

Analisi del compito

- Leggere il testo e capire che sono i numeri di cioccolatini di ogni tipo che devono essere determinati dai due scambi proposti, in particolare: "Sostituisci un nero con un bianco" significa "togliere un nero e mettere un bianco al suo posto", o "togliere un nero e aggiungere un bianco" o "diminuire di 1 il numero di neri e aumentare di 1 il numero di bianchi". Allo stesso tempo, capire che ci sono più neri che bianchi. (simile a "sostituire un bianco con un nero").
- Accorgersi eventualmente, dopo il primo scambio in cui i cioccolatini neri e bianchi sono diventati uguali, che inizialmente (togliendo un nero e mettendo un bianco) i cioccolatini neri erano due più dei bianchi.
- Dalla seconda relazione prima e dopo gli scambi, capire che il numero di neri aumentato di 1 è il doppio del numero di bianchi diminuito di 1.
- Per la risoluzione bastano alcuni tentativi, a partire dallo scarto di 2, per vedere che tra le coppie (3; 1), (4; 2), ... è necessario arrivare a (7; 5) e trovare così quella che corrisponde alla seconda relazione: perché $8 (7 - 1)$ è il doppio di $4 (5 - 1)$.

Oppure

- A partire dal doppio, sono necessari solo pochi tentativi per trovare che tra le coppie (2; 1), (4; 2), (6; 3), (8; 4), (10; 5), ..., la coppia corretta è (8; 4), perché $7 (8 - 1)$ vale 2 più di $5 (4 - 1)$.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (5 bianchi e 7 neri) con una descrizione del ragionamento seguito o una verifica del tipo "se si sostituisce un nero con un bianco ci saranno 6 neri e 6 bianchi, e se si sostituisce un bianco con un nero avremo 8 neri che è doppio di 4 bianchi" o elenco completo dei tentativi
- 3 Risposta corretta con descrizione incompleta o verifica parziale (per esempio dichiarazione di aver fatto i tentativi, ma con elenco parziale o assente degli stessi)
- 2 Risposta errata a causa di un errore di calcolo, ma ragionamento chiaro e completo sui due vincoli (uguaglianza e doppio) oppure risposta corretta senza alcuna spiegazione oppure risposta «12 cioccolatini in tutto» con descrizione chiara e completa
- 1 Inizio di ricerca coerente (ad esempio alcuni tentativi coerenti senza giungere alla risposta o rappresentazione coerente del problema con disegni o espressioni matematiche) oppure risposta «12 cioccolatini in tutto»
- 0 Incomprensione del problema

Livelli: 5, 6

Origine: Lyon

8. IL VESTITO PER LA BAMBOLA (Cat. 5, 6)

Paola vuole cucire un nastro lungo il bordo del vestito della sua bambola.

Tra i suoi avanzi trova quattro pezzi di nastro di colore diverso: rosso, giallo, verde, blu e li cuce insieme per ottenere un unico nastro lungo 66 cm.

In questo nastro:

- nessuna delle parti colorate misura meno di 10 cm e più di 20 cm;
- la parte verde è la più corta di tutte mentre quella blu è la più lunga;
- tutte le parti colorate misurano un numero intero di centimetri;
- le parti di nastro rossa e gialla insieme hanno la stessa misura di quelle verde e blu insieme;
- la parte rossa è un centimetro più corta di quella gialla.

Quali potrebbero essere le misure di ciascuna delle parti colorate del nastro?

Scrivete tutte le possibili soluzioni e mostrate come avete fatto a trovarle.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Trovare quattro numeri interi sapendo che la loro somma è 66, che la somma di due di essi è uguale alla somma degli altri due, che nessuno di essi è minore di 10 né maggiore di 20 e che tra due di essi c'è una differenza di 1 cm.

Analisi del compito

- Comprendere la situazione: un nastro lungo 66 cm è formato da quattro pezzi colorati di cui non si conoscono le misure, ma per i quali vengono fornite indicazioni utili a trovarle.
- Comprendere l'informazione data dalla quarta condizione: il nastro può essere diviso in due parti uguali, una formata da $R + G$, l'altra da $V + B$ ciascuna delle quali sarà, perciò lunga 33 cm ($66 \div 2$).
- Ricavare dalla terza e dalla quinta condizione la lunghezza dei nastri rosso e giallo: se fossero uguali misurerebbero 16,5 cm, ma le misure devono essere numeri interi e $R = G - 1$ e quindi $R = 16$ cm e $G = 17$ cm.
- Ottenere dalla prima e dalla seconda condizione le possibili misure del nastro blu 18, 19 o 20 cm, e quella del nastro verde $33 - 18 = 15$ o $33 - 19 = 14$ o $33 - 20 = 13$.
- Si trovano così le soluzioni
 - per il R e il G c'è una sola possibilità: $R = 16$ e $G = 17$;
 - per V e B ci sono tre possibilità: $V = 13$ se $B = 20$ oppure $V = 14$ se $B = 19$ oppure $V = 15$ se $B = 18$.

Oppure

- Procedere per tentativi assegnando un valore a R, aggiungere 1 e trovare la misura di G, sommare i due numeri per trovare la misura della parte $R + G$ che è uguale a quella $V + B$ e rendersi conto che la somma delle due parti (o il doppio di una di esse) deve essere 66. Se così non è, ricalcolare a partire da un altro numero o capire che la parte $R + G$ è la metà di 66.

Oppure

- dopo aver capito che $R + G = V + B$ e quindi che $R + G$ è 66: 2 cioè 33, utilizzare una rappresentazione grafica o una scrittura simbolica per esprimere $R + G$ come $R + R + 1$ e quindi $R + R = 33 - 1$ da cui $R = 16$ e $G = 17$.
- Una volta individuate le misure R e G, capire che, essendo B il più lungo, può assumere tre valori: 20, 19, 18 e per ognuno di essi trovare poi le possibili misure di V.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta ($R = 16$; $G = 17$; $V = 13$ o 14 o 15 ; $B = 20$ o 19 o 18) con indicate le tre possibili combinazioni per le coppie V e B e con descrizione chiara del procedimento seguito accompagnata dai calcoli necessari
- 3 Risposta corretta con descrizione parziale o poco chiara del procedimento seguito
oppure solo le misure dei singoli pezzi (con tutte le possibilità per V e B) senza specificare le relazioni tra V e B (per esempio $R = 16$; $G = 17$; $V = 13$ o 14 o 15 ; $B = 18$ o 19 o 20), ma con descrizione chiara del procedimento seguito
- 2 Risposta corretta senza descrizione né calcoli
oppure misure corrette per il R e il G, trovate solo due coppie di valori per il V e il B (mancanza di quella in cui una misura è 20 per aver male interpretato la condizione "...non più di 20") con descrizione completa e calcoli
oppure presenza di un solo errore di calcolo, ma con descrizione chiara del procedimento seguito

- 1 Risposta incompleta: misure corrette per il R e il G, trovata una sola possibilità per la coppia V e B
oppure risposta che non tiene conto di tutte le condizioni
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6

Origine: Parma

9. MACCHININE (Cat. 5, 6, 7)

Jean vuole riporre le sue 96 macchinine in 3 scatole, una piccola, una media e una grande.

- Il numero delle macchinine che mette nella scatola media è il triplo del numero delle macchinine che mette nella scatola piccola.
- Il numero delle macchinine che mette nella scatola grande è il doppio del numero delle macchinine che mette nella scatola media.

Dopo aver riempito le tre scatole, gli restano delle macchinine. Il loro numero è uguale a un terzo del numero di quelle che Jean ha messo nella scatola grande.

Quante macchinine ha messo Jean in ciascuna scatola?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Dividere 96 in quattro numeri proporzionali a 1, 2, 3 e 6.

Analisi del compito

- Comprendere che ci sono quattro numeri da trovare, quelli delle macchinine contenute nelle tre scatole e quello delle macchinine che restano, la cui somma è 96, siccome nessuno dei numeri è noto, sarà necessario ricorrere alle relazioni “doppio”, “triplo” e “terzo”.
- Accorgersi che queste relazioni permettono di esprimere ciascun numero in funzione di quello della scatola piccola e tradurli in uno “piccolo”, uno “medio” che è il triplo del “piccolo” e uno “grande” che è il doppio del “medio”, cioè sei volte il “piccolo” e un resto che è un terzo del “grande”, cioè due volte il “piccolo”.
- Procedendo per tentativi e aggiustamenti progressivi si può partire dal numero della scatola piccola, scrivere le quaterne possibili: 1, 3, 6, 2 (totale 12), poi 2, 6, 12, 4 (totale 24), ... e rendersi conto che è necessario arrivare fino a 8, 24, 48, 16 per soddisfare la condizione imposta dalla somma che deve essere 96.
- Procedendo in modo più sintetico (o pre-algebrico) si può lasciare provvisoriamente indeterminato uno dei numeri (per esempio il più piccolo) e calcolare che la somma di 1 “piccolo”, 3 “piccoli”, 6 “piccoli”, 2 “piccoli” rappresentano 12 “piccoli” corrispondenti a 96. Non resta, allora, che dividere 96 per 12 ($96 \div 12 = 8$) per determinare il numero di macchinine della scatola piccola e poi trovare i numeri delle macchinine delle altre scatole.

(Per via algebrica: impostare e risolvere l'equazione in cui l'incognita x è il numero di macchinine nella casella piccola: $x + 3x + 6x + 2x = 96$ la cui soluzione è 8).

Attribuzione dei punti

- 4 Risposta corretta (scatola piccola 8 macchinine, scatola media 24 macchinine, scatola grande 48 macchinine) con spiegazione completa e chiara, ad esempio tentativi organizzati, o la menzione di un totale di 12 scatole piccole o un diagramma mostrando chiaramente l'unità comune.
- 3 Risposta corretta con spiegazioni incomplete o poco chiare (ad esempio, divisione $96 \div 12$ senza spiegare a cosa corrisponde 8 o tentativi non organizzati)
- 2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure ragionamento corretto con un errore di calcolo nella risoluzione
- 1 Inizio di ricerca coerente con qualche tentativo che non porta alla soluzione
oppure identificato solo il numero delle macchinine che restano
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6, 7

Origine: Gruppo Calcolo e Proporzionalità, variante di *Le prugne*, 25.II.11 e *Le Castagne di Carlo* 22.II.09

10. IL TANGRAM DEL FALEGNAME I (Cat. 6, 7)

Un falegname costruisce Tangram in legno*.

Un giorno, un cliente gli ordina un Tangram che abbia il quadrato piccolo di lato 6 cm.

Quanto misurerà il lato del Tangram quando il falegname avrà finito di costruirlo?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta e descrivete in dettaglio la procedura che avete seguito.

** Il Tangram (vedi foto) è un puzzle molto comune, originario della Cina antica. È un quadrato grande costituito da sette pezzi, tra cui un quadrato piccolo, che permette di realizzare numerose figure.*



ANALISI A PRIORI

Compito matematico

A partire da una foto di un Tangram e dei suoi sette pezzi, trovare la misura del lato del Tangram conoscendo la misura del lato del quadrato piccolo (6 cm).

Analisi del compito

- Osservare la foto del Tangram e “vedere” che si tratta di un puzzle di sette pezzi: constatare che ci sono cinque pezzi a forma di triangolo, che un pezzo è un quadrato (riportato anche nell’enunciato) e che l’ultimo è un parallelogramma.
- Passare dalla foto del Tangram alla figura che lo rappresenta.
 - Analizzare i rapporti tra i lati dei pezzi (ci sono lati uguali? lati uno doppio dell’altro?) a partire dal solo dato numerico che è quello della misura del lato del quadrato piccolo (6 cm) e capire che la domanda riguarda il lato del Tangram. Oppure interessarsi alle aree dei pezzi (Ci sono superfici l’una doppia dell’altra? Pezzi la cui area è il doppio di quella di un altro?)

Ci sono diversi modi di procedere:

- a. riprodurre il disegno in grandezza reale a partire dal quadrato di lato 6 cm, di cui si prolungano due lati perpendicolari (che diventeranno le diagonali del Tangram), ... Questa procedura permette di arrivare alla risposta 17 cm, approssimata ad 1 mm;
- b. osservare la figura, dedurre che la diagonale del quadratino piccolo rappresenta la metà del lato del Tangram da costruire. Alcuni in cat.7 potrebbero aver già conosciuto il teorema di Pitagora, calcolare così la misura della diagonale e raddoppiarla (con arrotondamento);
- c. ritagliare i pezzi e proseguire con spostamenti e sovrapposizioni (traslazioni, rotazioni, ...);
- d. ricorrere, in un ambito geometrico, a deduzioni a partire dalle proprietà elementari delle figure.

Per esempio, ecco alcune di queste deduzioni (il pezzo quadrato è rappresentato dalla figura geometrica quadrato):

- dalla posizione di questo quadrato, i due triangoli grandi e i due triangoli piccoli, vicini, sono rettangoli;
- poiché i due triangoli grandi sono rettangoli, il loro lato comune è sulla diagonale del Tangram che ha un estremo sul vertice inferiore sinistro e separa il triangolo medio in due triangoli rettangoli;
- la diagonale “verticale” del quadrato piccolo lo scompone in due triangoli rettangoli, spostando di 6 cm il semi-quadrato di sinistra lungo la diagonale del Tangram, esso si sovrappone esattamente sul piccolo triangolo del Tangram in alto a destra, questo triangolo piccolo è un semi-quadrato, i suoi cateti misurano 6 cm e la sua ipotenusa (che indichiamo qui provvisoriamente «d» può essere stimata misurando la diagonale di un quadrato di lato 6 cm) $\approx 8,5$ cm. Le semi-diagonali del Tangram o i cateti dei triangoli grandi misurano 12 cm.

Si arriva così alle quattro lunghezze possibili dei lati dei sette pezzi: 6 o 12 o «d» o $2 \times \text{«d»}$ (in cm); in particolare i lati dei grandi triangoli rettangoli misurano 12, 12, e $2 \times \text{«d»}$ (in cm) di cui l’ultimo darebbe la risposta al problema se si fosse capaci di calcolarla. Altrimenti gli allievi possono eventualmente disegnare un triangolo rettangolo isoscele rettangolo con i lati uguali di 12 cm e misurare l’altro lato, quello indicato provvisoriamente con «d».

Oppure

- Considerare le aree dei pezzi a partire dalle deduzioni precedenti: in cm^2 quella del quadrato è 36, quella di un triangolo piccolo 18, quella del triangolo medio e del parallelogramma 36, quella di ciascuno dei triangoli grandi 72, e infine quella

del Tangram 288 (con il triangolo piccolo come unità di misura si trova $16 \times 18 = 288$). Si può anche considerare che il triangolo medio è la metà di un quadrato, il quarto del Tangram in basso a destra, la cui area è 72 (in cm^2).

In un caso come nell'altro, bisogna cercare il lato di un quadrato di cui si conosca l'area. Per 288 è il numero che moltiplicato per se stesso dà 288, indicato con $\sqrt{288}$ ma dato da una delle sue approssimazioni ≈ 17 o 16,97 ... Per il lato del quadrato di area 72 $\approx 8,5$ o 8,48... che bisognerà moltiplicare per 2 per arrivare alla risposta.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta: la misura del lato del Tangram è, in cm, $\sqrt{288}$, oppure un valore numerico da 16,8 a 17,1 cm nel caso di determinazione con il disegno, (con presentazione del disegno), oppure ≈ 17 o 16,97 ... con la calcolatrice o ancora $12\sqrt{2}$, per coloro che conoscono la formula $c\sqrt{2}$, con il dettaglio di tutte le misure intermedie trovate – di area o di lunghezza – e qualche parola per descrivere la procedura come, ad esempio: i triangoli piccoli sono la metà del quadrato piccolo, oppure il lato del tangram è il doppio della diagonale del quadratino interno con una giustificazione
- 3 Risposta corretta con il dettaglio di qualche misura intermedia trovata e descrizione poco chiara
- 2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione né dettagli della procedura
oppure risposta “non corretta” (per esempio con errori di calcolo), ma con il dettaglio di qualche misura intermedia trovata e descrizione chiara
- 1 Risposta con ricerca corretta che si ferma all'area del Tangram (288 cm^2)
oppure misura prossima a 17 (inferiore a 16,8 e maggiore di 17,1) senza alcuna presentazione di un disegno sul quale tale misura è stata presa
oppure inizio corretto di ricerca con qualche misura o relazione trovata tra le aree o tra i lati delle figure
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7

Origine: Gruppo geometria Piana (GTGP)

11. CHE GAMBE LUNGHE CHE HAI ... (I) (Cat. 6, 7, 8)

Il Lupo e Cappuccetto Rosso si incontrano nel bosco, si salutano ed entrambi si avviano verso la casa della nonna di Cappuccetto Rosso.

Il Lupo ride soddisfatto:

"Ah! Ah! Ah! Ah! Mentre Cappuccetto Rosso fa due passi io faccio un salto lungo come tre dei suoi passi, arriverò sicuramente prima di lei!"

Anche Cappuccetto Rosso sembra molto soddisfatta:

"Questa volta il vecchio imbroglione non riuscirà ad arrivare prima di me, perché io conosco una scorciatoia."

Cappuccetto Rosso percorre la scorciatoia con 92 passi, invece il percorso del Lupo è lungo come 141 passi di Cappuccetto Rosso.

Chi arriverà per primo a casa della nonna, il Lupo o Cappuccetto Rosso? Con quanti passi di vantaggio?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Confrontare il tempo necessario per percorrere una distanza di 141 passi ad una velocità di tre passi per ogni unità di tempo, con il tempo necessario per percorrere una distanza di 92 passi a una velocità di due passi per ogni unità di tempo.

Analisi del compito

- Comprendere le informazioni date dal testo aiutandosi eventualmente con uno schema:
 - la lunghezza di un salto è uguale a tre passi;
 - Cappuccetto Rosso percorre una distanza di due passi mentre il Lupo fa un salto.
- Procedere per tentativi per mettere in corrispondenza la distanza in passi percorsa dal Lupo e quella percorsa da Cappuccetto Rosso, prendendo come unità di misura il tempo e organizzare questi tentativi (la tabella seguente evidenzia l'insieme dei tentativi):

Unità di tempo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	41	42	43	44	45	46
Cappuccetto Rosso	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	40	60	80	82	84	86	88	90	92
Lupo	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	60	90	120	123	126	129	132	135	138

- Costatare che Cappuccetto Rosso percorre i 92 passi della scorciatoia mentre i salti che fa il Lupo nello stesso tempo corrispondono a 138 passi e che Cappuccetto Rosso arriva dunque per prima. Inoltre poiché il percorso del Lupo corrisponde a 141 passi, il Lupo avrà ancora tre passi (o un salto) da fare.

Oppure

- Dividere i 141 passi di Cappuccetto per 3 per determinare quanti salti occorrono al Lupo per percorrere il sentiero scelto, $141 \div 3 = 47$ e dividere per 2 i 92 passi necessari a Cappuccetto per la scorciatoia, $92 \div 2 = 46$, perché intanto che il lupo fa un salto Cappuccetto fa due passi, quindi mentre Cappuccetto fa 46 coppie di passi, il Lupo fa 46 salti. Concludere che Cappuccetto arriva prima, con un salto del Lupo di vantaggio cioè 3 passi di Cappuccetto.

Oppure

- Ragionare con la proporzionalità (intuitiva) con il rapporto (2 su 3) in passi di Cappuccetto Rosso, che può essere trasformato mentalmente con moltiplicazioni e addizioni in (20 su 30), (80 su 120), (10 su 15), (90 su 135) e infine (92 su 138) che permette di dire che quando Cappuccetto Rosso ha fatto i suoi 92 passi, il lupo ne ha fatti 138 solamente e non 141.

Attribuzione dei punteggi

- Risposte corrette "Cappuccetto Rosso arriva per prima a casa della nonna con tre passi di vantaggio sul Lupo", con descrizione chiara del procedimento seguito: indicazione delle corrispondenze tra le distanze percorse da Lupo e da Cappuccetto Rosso o i dettagli dei calcoli
- Risposte corrette con descrizione parziale o poco chiara
- Risposte corrette senza descrizione
oppure ragionamento corretto, ma errori di calcolo

oppure risposta incompleta “Cappuccetto Rosso arriva per prima”, manca il numero dei passi in più, ma con descrizione della procedura seguita o dettaglio dei calcoli o ci sono sia il 138 sia il 141

- 1 Inizio di ricerca coerente (per esempio schema o inizio dell’elenco delle corrispondenze tra le distanze percorse da Lupo e da Cappuccetto Rosso).

oppure risposta incompleta (Cappuccetto Rosso arriva per prima), senza descrizione del procedimento

- 0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7, 8

Origine: Milano

12. UGUAGLIANZA DA COMPLETARE (Cat. 6, 7, 8)

Oggi l'insegnante ha proposto ai suoi studenti questa uguaglianza da completare:

$$\dots \times 90 \times \dots = 1620$$

e ha fornito queste indicazioni.

Uno dei due numeri da inserire al posto dei puntini:

- si scrive utilizzando due cifre;
- è compreso tra 0 e 10;
- ha 5 come ultima cifra.

Anche l'altro numero si scrive con due cifre.

Scrivete tutte le coppie di numeri che possono essere inserite al posto dei puntini affinché l'uguaglianza sia corretta.

Spiegate come avete fatto a trovarle.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Trovare tutte le coppie di numeri positivi il cui prodotto moltiplicato per 90 sia 1 620, in modo che uno dei due numeri sia compreso tra 0 e 10 e si scriva con due cifre di cui l'ultima è 5.

Analisi del compito

- Comprendere che la parte sinistra dell'uguaglianza è un prodotto di tre fattori di cui uno solo è conosciuto (90); cioè che ci sono due moltiplicazioni da fare: una prima moltiplicazione tra un numero e 90, una seconda moltiplicazione tra il risultato ottenuto e un secondo numero, per ottenere come prodotto 1620.
- Sapere che la moltiplicazione è commutativa e che, in caso di prodotto tra tre numeri, l'operazione è associativa. Per esempio in questa espressione si può cambiare l'ordine dei primi due numeri e associare in seguito gli altri due (ancora incogniti) per trasformare l'espressione dell'enunciato in $90 \times (_ \times _) = 1620$ o $90 \times \dots = 1620$ e che il prodotto ancora indeterminato si calcola con l'operazione $1620 \div 90 = 18$.
- Comprendere che se uno dei due fattori si scrive utilizzando due cifre, termina con la cifra 5 e deve essere compreso tra 0 e 10, deve obbligatoriamente avere la forma ...,5 e quindi deve essere scelto tra: 0,5 o 1,5 o 2,5 o ... 9,5. La ricerca consiste nel trovare i quozienti di una divisione tra 18 e uno dei numeri precedenti che si scrivono con due sole cifre.
- Si troveranno così le coppie di numeri richiesti: (0,5 - 36); (1,5 - 12); (2,5 - 7,2); (7,5 - 2,4). Tutte le altre coppie sono da escludere in base alle informazioni date.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta: le quattro possibilità o, eventualmente, le otto coppie ordinate (per esempio 0,5; 36 e 36; 0,5, ...) con descrizione corretta e completa della procedura usata (tutti i calcoli necessari o i tentativi fatti)
- 3 Risposta corretta con descrizione incompleta della procedura usata (mancanza di qualche calcolo o elenco incompleto dei tentativi)
- 2 Individuazione di 2 o 3 coppie di numeri corretti con descrizione corretta della procedura usata oppure le quattro possibilità con descrizione corretta e completa della procedura usata ma con l'aggiunta di una coppia che non tiene conto delle condizioni richieste (per esempio la coppia 4,5 e 4) oppure trovati i numeri da inserire nei due spazi (0,5; 1,5; 2,4; 2,5; 7,2; 7,5; 12; 36) senza l'abbinamento delle coppie oppure procedura corretta, ma risposta sbagliata per errori di calcolo oppure risposta corretta senza spiegazione
- 1 Inizio di ragionamento corretto con individuazione di una coppia di numeri corretti
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7, 8

Origine: Riva del Garda

13. LA MIGLIORE PASTICCIERA (Cat. 7, 8)

Anna, Bice e Carla partecipano ad una gara di cucina.

Devono preparare il maggior numero di budini al cioccolato in un tempo stabilito.

Anna è brava e veloce e ne prepara due in più di Carla ed esattamente il doppio di quelli di Bice. Mentre aspetta il verdetto dei giudici Anna pensa: *“Con altri 4 ne avrei fatti il doppio di quelli di Carla!”*.

Quanti budini ha preparato Bice?

Mostrate come avete fatto a trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Determinare tre numeri naturali sapendo che il primo è doppio del secondo, supera di 2 il terzo e aggiungendogli 4 è uguale al doppio del terzo.

Analisi del compito

- Constatere che è richiesto il numero di budini di B (Bice) ma che occorre trovare il numero di budini di ciascuna ragazza: A (Anna), B, C (Carla) e che i tre numeri sono sottoposti a tre condizioni, che si riferiscono tutte ad A:
 - A supera C di 2;
 - A è il doppio di B;
 - aumentando A di 4 si ottiene il doppio di C.
- Procedere quindi per tentativi scegliendo un numero di budini per Anna: capire che deve essere un multiplo di due e deve essere maggiore di due. Se Anna ha fatto 4 budini, Bice ne ha fatti 2 e anche Carla ne ha fatti 2 ($4 - 2$), ma la condizione c) non risulta verificata, perché $4 + 4 = 8$, che non è il numero di budini di Carla. Procedere con i successivi numeri pari fino a trovare che se Anna ha fatto 8 budini la terza condizione è verificata, perché i budini di Carla sarebbero 6 e quindi $8 + 4 = 12 = 6 \times 2$. Concludere che Bice ha fatto 4 budini.
- È possibile procedere per tentativi anche a partire dal numero dei budini di Carla e trovando quelli di Anna per poi dimezzarli per trovare quanti budini ha preparato Bice o ancora a partire dal numero dei budini di Bice.
(In tutti questi casi, i tentativi possono essere organizzati in schemi o tabelle).

Oppure

- comprendere che se Anna avesse fatto 6 ($2 + 4$) budini in più di Carla avrebbe fatto il doppio dei budini di Carla, quindi 6 è il numero di budini di Carla, 8 ($6 + 2$) è quello di Anna e quindi 4 è quello di Bice.

Oppure

- Procedere con un ragionamento logico-deduttivo (aritmetico o algebrico) tradurre in scrittura simbolica (o mediante la rappresentazione grafica):

$$A = C + 2$$

$$A = 2B$$

$$A + 4 = 2C$$

Poi eseguire una sostituzione, per esempio sostituire A con $C + 2$ e dedurre che $C + 6 = 2C$, da cui si ricava $C = 6$ e successivamente $A = 8$ e $B = 4$.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (Bice ha preparato 4 budini), con descrizione della procedura seguita (tentativi esplicitati, procedura di tipo aritmetico o algebrico ben spiegate con il dettaglio dei calcoli)
- 3 Risposta corretta con descrizione non chiara o incompleta della procedura
oppure risposta corretta con solo verifica della soluzione
- 2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure risposta errata a causa di un errore di calcolo
- 1 Inizio di ricerca corretto
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8

Origine: Gruppo Algebra (GTAL)

14. LA FESTA DELLA “CASTAGNA” (Cat. 7, 8, 9, 10)

La Festa della “Castagna” si è svolta in una settimana di ottobre, da mercoledì a domenica. Alba, Giulia, Mario, Nicola e Rosa si sono offerti volontari, ciascuno per un solo giorno, per stare al banco della vendita delle castagne: nel giorno del proprio turno, uno di loro ha venduto 18 kg di castagne, un altro 20 kg, un altro 21 kg, un altro 23 kg e un altro ancora 26 kg.

Si sa che:

- Nicola è stato al banco il mercoledì;
- chi è stato al banco il sabato ha venduto 2 kg in meno di Rosa, ma 3 kg in più di chi c'è stato il giovedì;
- Giulia è stata al banco un giorno diverso dal sabato;
- chi è stato al banco il venerdì ha venduto più di tutti;
- Alba è stata al banco il giorno prima di Giulia.

**In quale giorno Mario è stato al banco e quanti chili di castagne ha venduto?
Spiegate come avete trovato le vostre risposte.**

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Ricostruire una ripartizione di cinque persone, in cinque diversi giorni della settimana, in base alla quantità di merce venduta, partendo da alcune affermazioni riguardanti giorni, personaggi e relazioni tra quantità di merce venduta.

Analisi del compito

- Comprendere dalla lettura del testo che ci sono cinque personaggi, cinque differenti giorni della settimana e cinque diverse quantità di castagne vendute ciascuna in un determinato giorno.
- Leggere le informazioni indicate nel testo una ad una e rendersi conto che a volte è necessario combinarne più di una per poter determinare progressivamente le associazioni tra personaggio, giorno della settimana e quantità di castagne vendute in quel giorno.
- Procedere, annotandosi via via su uno schema o su una tabella ciò che si ricava da una singola informazione o si deduce da una combinazione di più informazioni tra quelle riportate nel testo, considerate nell'ordine dato o in un ordine diverso. Si può procedere in più modi.

Per esempio,

- tenendo presente i chilogrammi di castagne venduti, ricavare dalla seconda indicazione che l'unica quantità compatibile con i dati in essa riportati è 21 kg ($21 = 18 + 3 = 23 - 2$) che è quindi la quantità di castagne venduta sabato, da cui segue che Rosa ha venduto 23 kg e che giovedì sono stati venduti 18 kg.
- La quarta indicazione permette di affermare che venerdì sono stati venduti 26 kg.
- Dalla prima indicazione si ha che Nicola è stato al banco mercoledì e quindi è lui che ha venduto 20 kg di castagne (è l'unica quantità ancora da attribuire visto che Rosa ha venduto 23 kg), di conseguenza si deduce che Rosa ha venduto 23 kg di castagne la domenica.
- Per la terza indicazione, Giulia potrebbe essere stata al banco giovedì o venerdì, ma combinando questa informazione con la quinta, si ricava che è Alba ad essere presente al banco il giovedì e quindi Giulia è presente il venerdì. L'unico nominativo che rimane ancora da associare è Mario che quindi è stato al banco il sabato ed ha venduto 21 kg di castagne.

Oppure:

Utilizzare una procedura mista per deduzioni e tentativi, verificando ogni volta la compatibilità con le condizioni date, fino a trovare le combinazioni corrette.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (Mario è stato al banco il sabato e ha venduto 21 kg) con una spiegazione che illustri la configurazione completa di tutte le associazioni e le progressive deduzioni che hanno permesso di ottenerla o una configurazione parziale perché “20 kg – Nicola” non è necessaria
- 3 Risposta corretta con la presenza della configurazione completa, con descrizione poco chiara o incompleta del ragionamento fatto (per esempio è esplicitata solo qualche deduzione) o con solo verifica dell'adeguatezza tra la configurazione trovata e i vincoli dell'enunciato

- 2 Risposta corretta senza spiegazione
- 1 Inizio di ragionamento corretto o risposta errata ma trovate correttamente alcune associazioni oppure risposta parziale “Mario è stato al banco il sabato” oppure “Mario ha venduto 21 kg”
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8, 9, 10

Origine: Siena

15. UNA CURA DI VITAMINE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Francesca deve assumere per quattro settimane vitamina C in pastiglie da 180 mg ciascuna. Complessivamente deve assumere 6 300 mg di vitamina C.

Il dosaggio settimanale varierà nel seguente modo:

- la seconda settimana $\frac{3}{4}$ del dosaggio della prima settimana;
- la terza settimana $\frac{2}{3}$ del dosaggio della seconda settimana;
- la quarta settimana $\frac{1}{2}$ del dosaggio della terza settimana.

Francesca per ogni singola settimana assume ogni giorno la stessa quantità di pastiglie.

Quante pastiglie o frazione di pastiglia Francesca assumerà ogni giorno di ogni singola settimana di cura?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Determinare una partizione (di 35) in quattro parti proporzionalmente a 1; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$ (dopo aver calcolato queste parti come frazioni delle precedenti e trasformato 6 300 in 35 pastiglie da 180).

Analisi del compito

- Comprendere che la cura dura quattro settimane, che il dosaggio cambia da settimana a settimana e che si conosce la quantità totale da assumere (6 300 mg o 35 pastiglie da 180 mg) e che si conoscono i rapporti tra le quantità per ogni settimana.
- Procedere per tentativi e aggiustamenti progressivi a partire dal totale, 6300: per esempio supporre che la quantità della prima settimana sia di 1 000 mg, calcolare $\frac{3}{4}$ di 1 000 (750), $\frac{2}{3}$ di 750 (500), $\frac{1}{2}$ di 750 (375) e constatare che $1\,000 + 750 + 500 + 250 = 2\,500$ mg è nettamente inferiore a 6 300. Gli aggiustamenti successivi possono andare fino a 2 520 mg per la prima settimana: $2\,520 + 1\,890 + 1\,260 + 630 = 6\,300$.
Poi calcolare la quantità in compresse dividendo per 180: 6 300 mg corrispondono a 35; 2 520 mg a 14; poi 1 890 a 10,5; 1 260 a 7; infine la quarta settimana 630 a 3,5; poi dividendo per 7 (i giorni della settimana), arrivare a 2; 1,5; 1; 0,5 compresse, rispettivamente dalla 1^a alla 4^a settimana.

Questa procedura è lunga, i tentativi si organizzano più facilmente se si parte da 35 pastiglie per le quattro settimane.

Oppure

- Cercare di esprimere le parti partendo da 1 per quella della 1^a settimana, poi $\frac{3}{4}$ per la 2^a settimana, poi $(\frac{2}{3})(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$ per la 3^a settimana e $(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ per la 4^a settimana e rendersi conto che si deve ripartire la dose totale (6 300 mg o 35 pastiglie) in quattro parti proporzionali a 1; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ o $\frac{4}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$, o ancora 4; 3; 2 e 1 cioè $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ “quarti”. Una rappresentazione grafica con l’uso dei segmenti può aiutare a comprendere questa ripartizione.
- Le 10 “piccole parti” o “quarti” della ripartizione si calcolano allora facilmente $6\,300 \div 10 = 630$ o $35 \div 10 = 3,5$ e si trovano i risultati precedenti.
- Ci può essere una grande varietà di ragionamenti simili, per esempio, dopo aver trasformato tutte le frazioni in dodicesimi che porta a $\frac{10}{12}$ per il totale delle quattro parti, ...

Oppure

- Per via algebrica, con x come dose della prima settimana, risolvere l’equazione $x + \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}(\frac{3}{4}x) = 6\,300$ o $x + \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}(\frac{3}{4}x) + \frac{1}{2}(\frac{2}{3})(\frac{3}{4}x) = 35$ le cui rispettive soluzioni sono 2 520 o 14.
È necessario segnalare che, qualsiasi sia la procedura, la difficoltà del problema consiste nel passaggio tra i milligrammi e le pastiglie, poi tra le pastiglie e i giorni della settimana, con la comparsa dei numeri decimali o delle mezze pastiglie.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (2 pillole ogni giorno nella prima settimana, 1 pillola e mezza nella seconda, una pillola nella terza settimana e metà nella quarta) con spiegazioni chiare e complete (la strategia per tentativi deve presentare i calcoli che evidenziano la comprensione delle diverse relazioni; nella strategia aritmetica deve essere specificato il significato della frazione della parte o dell’intero considerato; la strategia grafica deve mostrare con precisione la rappresentazione dei dati relazionali, nella strategia algebrica deve essere indicato il significato dell’incognita)
- 3 Risposta corretta con spiegazioni poco chiare o incomplete (per esempio nei tentativi indicati solo i totali trovati, oppure disegnati in modo impreciso i segmenti nella rappresentazione grafica)

oppure calcolo corretto del numero totale di pillole di ogni settimana con procedimento corretto, senza il calcolo del dosaggio giornaliero

2 Risposta corretta senza spiegazione né giustificazione

oppure risposta errata per un errore di calcolo, ma procedura corretta con spiegazione chiara e completa

oppure calcolo corretto del dosaggio in milligrammi di ogni settimana con procedimento corretto, senza il calcolo del dosaggio giornaliero né in milligrammi né in pillole

1 Inizio di ricerca corretto (ad esempio: compresi i dati relazionali e rappresentati correttamente; impostata equazione ma non risolta; procedura per tentativi ben compresa senza giungere alla risposta corretta)

0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8, 9, 10

Origine: Puglia

16. IN TRE È MEGLIO (Cat. 8, 9, 10)

Il signor Martino ha un piccolo prato che circonda la sua villa.

Quando l'erba è alta 10 cm, deve essere tagliata.

Il signor Martino non ha un tosaerba, ma ha una capra, Bianchina, una pecora, Nerina e una mucca, Rosetta.

Se pascola Bianchina da sola, impiega 6 ore per completare la rasatura del prato.

Nerina è più veloce e, da sola, impiega 4 ore.

Rosetta, da sola, riesce a mangiare tutta l'erba in 3 ore.

Un giorno in cui l'erba deve essere tagliata il signor Martino mette tutti tre gli animali a pascolare insieme nel suo prato.

Quanto tempo impiegheranno insieme Bianchina, Nerina e Rosetta per mangiare tutta l'erba del prato?

Spiegate come avete trovato la risposta e mostrate tutti i calcoli che avete fatto.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Calcolare la durata di un'attività effettuata da tre soggetti insieme, conoscendo il tempo che ciascuno di essi impiega per fare l'attività da solo (3 h, 4 h, 6 h).

Analisi del compito

- Comprendere che il tempo diminuisce se i tre animali brucano l'erba insieme e che ogni animale bruca una parte del prato allo stesso ritmo (velocità) di quando è da solo. Per poter confrontare questi ritmi è necessario pensare ad un'unità di tempo comune. Per esempio pensare che se Bianchina impiega 6 ore, in un'ora mangia un sesto del prato e che analogamente in un'ora Nerina bruca un quarto del prato e Rosetta un terzo. Quindi ricorrere all'addizione per determinare il ritmo dei tre animali insieme.
- Passare alla scrittura e poi alle operazioni:
per brucare l'erba in un'ora, le tre velocità sono $1/6$, $1/4$ e $1/3$ la cui somma è $1/6 + 1/4 + 1/3 = 9/12 = 3/4$ e per trovare il tempo necessario a brucare tutta l'erba del prato ad una velocità di $3/4$ di prato all'ora, è necessario eseguire la divisione $1 \div 3/4 = 4/3$ in "ore";
per coloro che non padroneggiano l'addizione di frazioni o che non individuano la divisione, una rappresentazione grafica o verbale può aiutare a comprendere che, se in un'ora vengono eseguite tre parti dell'attività ($3/4$) e manca ancora una parte ($1/4$), ci vorrà solo un terzo di un'ora per eseguire la parte rimanente.
Algebricamente, scegliendo il tempo necessario (x in ore) come incognita, l'equazione corrispondente è $x/6 + x/4 + x/3 = 1$, la cui soluzione è $x = 12/9 = 4/3$ o $1 + 1/3$ o 1 h e 20 min.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (1 ora e 20 minuti o 80 minuti o $4/3$ di ora) con spiegazione chiara e dettagliata del percorso seguito e i calcoli corrispondenti
- 3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara o calcoli incompleti
- 2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure risposta parzialmente corretta (ad esempio circa 80 minuti o imprecisioni nel passaggio tra frazioni e ore e minuti) con descrizione del percorso seguito
- 1 Inizio di ragionamento corretto con stima e percezione della somma delle "velocità" all'ora
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: Riva del Garda

17. IL TANGRAM DEL FALEGNAME (II) (Cat. 8, 9, 10)

Un falegname costruisce un Tangram in legno *.

Un giorno sfida il fratello matematico e gli chiede di dirgli quanto misurerebbe il lato del Tangram se il lato del quadrato piccolo avesse come misura u .

Trovate anche voi quanto misura il lato del Tangram se il lato del quadrato piccolo misura u .

Spiegate nei dettagli la procedura che avete seguito.

* Il Tangram (vedi foto) è un puzzle molto comune, originario della Cina antica. È un quadrato grande costituito da sette pezzi, tra cui un quadrato piccolo, che permette di realizzare molte figure.



ANALISI A PRIORI

Compito matematico

A partire dalla foto di un Tangram e dei suoi sette pezzi, trovare la misura del lato del Tangram sapendo che il lato del quadrato piccolo misura u .

Analisi del compito

- Osservare e analizzare i sette pezzi in merito alla loro forma, alle loro superfici, ai loro lati e ai rapporti fra le superfici e ai lati (ci sono superfici uguali? Lati uguali? Superfici l'una doppia dell'altra? Lati uno doppio dell'altro? ...).
- Ricorso a qualche "piccola" deduzione: osservando, ad esempio che gli angoli in cui la diagonale del quadrato grande li divide in due, misurano 45° e che quindi il triangolo piccolo in alto a sinistra è un triangolo rettangolo isoscele, così come è isoscele l'altro triangolo piccolo. Visto che il quadrato piccolo ha il lato di u e quindi area u^2 , i due triangoli piccoli hanno due lati lunghi u e un'area di $1/2 u^2$, l'ipotenusa di un triangolo piccolo è uguale alla diagonale del quadrato piccolo ($u\sqrt{2}$), il parallelogramma ha due lati uguali all'ipotenusa del triangolo piccolo e due lati uguali al lato del quadrato, il triangolo medio ha l'ipotenusa di $2u$ (2 volte il lato del quadrato) ed è diviso in due triangoli rettangoli isosceli dalla diagonali e hanno pertanto due lati di lunghezza u e si ritrova un triangolo piccolo.
- Dedurre la misura del lato del Tangram: $2\sqrt{2}u$.

Oppure

Con il ricorso ad altre "piccole" deduzioni, mostrare che la metà del lato del Tangram è uguale alla misura della diagonale del quadrato piccolo. Infatti, se si considera l'asse di simmetria (passante ovviamente per il centro) del quadrato grande parallelo al lato orizzontale del Tangram, la metà di questo asse di simmetria coincide con la diagonale del quadrato piccolo che ha due suoi lati sulle due diagonali. Poiché la diagonale del quadrato piccolo è uguale a $u\sqrt{2}$ la misura del lato del Tangram sarà $2\sqrt{2}u$.

Oppure

Capire che è possibile trovare il lato del Tangram a partire dalla sua area per trovare la quale è necessario trovare le misure delle aree dei suoi pezzi (si veda più sopra): quadrato piccolo u^2 , triangoli piccoli $1/2 u^2$ ciascuno, il triangolo medio è anch'esso rettangolo isoscele ed è diviso in due triangoli uguali dalla diagonale del quadrato grande che sono come i due piccoli precedenti, quindi ciascuno di area $1/2 u^2$; se si divide in due il parallelogramma, per le considerazioni precedenti, dà luogo ancora a due triangoli piccoli come i precedenti. La sua area è dunque u^2 . L'area della metà del quadrato è pertanto: $u^2 + u^2 + u^2 + 1/2 u^2 + 1/2 u^2 = 4u^2$.

L'area totale misura dunque $8u^2$.

Oppure

Tener conto delle "deduzioni" precedenti e capire che il quadrato grande è composto da 16 triangoli piccoli che danno un'area totale di $1/2 u^2 \times 16 = 8u^2$. La misura del lato è allora $2\sqrt{2}u$.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (la misura del lato del Tangram è $2,83u$ o $\sqrt{8}u$ o $2\sqrt{2}u$) con spiegazione dettagliata della procedura (qualche relazione tra i lati dei pezzi, osservare che i triangoli sono isosceli rettangoli o altre "piccole" deduzioni come quelle inserire nell'analisi del compito)
- 3 Risposta corretta con spiegazione non del tutto dettagliata della procedura, ma con una spiegazione che mostra certe relazioni tra i lati e l'area dei pezzi
- 2 Risposta corretta senza dettagli della procedura

oppure risposta a partire da un valore particolare di u , ma con tutti i dettagli corretti e coerenti che mostri certe relazioni tra i lati e l'area dei pezzi

- 1 Risposta con ricerca corretta che si ferma all'area del Tangram ($8 u^2$) senza dettagli
oppure risposta a partire da un valore particolare di u , ma con pochi dettagli
oppure inizio corretto di ricerca con alcune considerazioni sui pezzi del Tangram

- 0 Incomprensione del problema
oppure risposta con misure errate dei lati e delle aree prese sulla figura del Tangram

Livello: 8, 9, 10

Origine: Gruppo Geometria Piana (GTGP)

18. CHE GAMBE LUNGHE CHE HAI ... (II) (Cat. 9, 10)

Il Lupo e Cappuccetto Rosso si incontrano nel bosco, si salutano ed entrambi si avviano verso la casa della nonna di Cappuccetto Rosso.

Il Lupo ride soddisfatto:

"Ah! Ah! Ah! Ah! Mentre Cappuccetto Rosso fa due passi, io faccio un salto lungo come 3 dei suoi passi, arriverò sicuramente prima di lei!"

Anche Cappuccetto Rosso sembra molto soddisfatta:

"Questa volta il vecchio imbroglione non riuscirà ad arrivare prima di me, perché io conosco una scorciatoia mentre il percorso scelto dal Lupo è molto più lungo."

È vero che il percorso scelto dal Lupo è più lungo, infatti misura tanto quanto la scorciatoia più i suoi due terzi.

Quando il primo è arrivato a casa della nonna, quale frazione del suo sentiero resterà ancora da percorrere a chi arriva per secondo?

Mostrate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Confrontare il tempo necessario per percorrere una distanza misurata in passi ad una velocità di due passi per unità di tempo, con il tempo necessario per percorrere, a una velocità di tre passi per unità di tempo, una lunghezza corrispondente alla prima distanza aumentata dei suoi due terzi, poi calcolare la frazione del cammino rimasto per percorrere una di queste distanze quando l'altra è stata interamente percorsa.

Analisi del compito

- Comprendere le informazioni date dal testo aiutandosi eventualmente con uno schema:
 - la lunghezza di un salto è uguale a tre passi;
 - Cappuccetto Rosso percorre una distanza di due passi mentre il Lupo fa un salto;
 - la lunghezza del percorso intrapreso da Lupo è cinque terzi della scorciatoia.
- Effettuare alcuni tentativi assegnando dei valori alla lunghezza della scorciatoia:
 - per esempio supporre che la scorciatoia misuri 300 passi di Cappuccetto: calcolare la durata in coppie di passi fatti da Cappuccetto Rosso per coprire tutto il percorso ($300 \div 2 = 150$ coppie di passi), quindi la distanza in passi percorsa nello stesso tempo dal lupo ($150 \times 3 = 450$ passi) per confrontarla con la lunghezza totale del suo percorso ($300 + 2/3 \times 300 = 500$ passi) e accorgersi che deve ancora percorrere un decimo della lunghezza totale (50 passi/500 passi). Riprovare con altri valori senza riuscire a dimostrarlo nel caso generale.
 - Oppure calcolare la lunghezza del cammino del lupo in passi: $300 + 2/3 \times 300 = 500$ passi. Il lupo impiega $500 \div 3 = 166$ (con resto 2), quindi 166 salti con l'avanzo di 2 passi per percorrerlo, nel tempo che Cappuccetto Rosso percorre 150 coppie di passi, quindi arriva prima. Al Lupo mancano da percorrere 16 salti, cioè 48 passi più i 2 passi, in totale 50 passi che corrispondono a $1/10$ del suo cammino.
 - Oppure assegnando prima i valori alla lunghezza del percorso del lupo (ad esempio 600 passi). Dedurre la lunghezza della scorciatoia rilevando (ad esempio con uno schema) che la sua lunghezza corrisponde a $3/5$ della lunghezza totale del percorso (360 passi). Calcolare la durata in numero di salti necessari per completare questi percorsi (200 salti per il percorso, 180 per la scorciatoia) per concludere che Cappuccetto Rosso arriverà per primo e che al lupo rimarrà da effettuare un decimo del percorso ($600 - 3 \times 180 / 600 = 60/600$). Riprovare con altri valori senza riuscire a dimostrarlo nel caso generale.

Oppure

- Fare un ragionamento di tipo deduttivo: accorgersi che su una stessa durata il lupo percorre mezzo passo in più rispetto a Cappuccetto Rosso e quindi avrà percorso una volta e mezzo la lunghezza della scorciatoia mentre Cappuccetto Rosso la percorre interamente. Dedurre che, siccome $2/3$ è maggiore di $1/2$, Cappuccetto Rosso arriverà per prima.
- Poi dedurre che al lupo resterà da percorrere ($2/3 - 1/2 = 1/6$ della lunghezza della scorciatoia da coprire. Quindi calcolare il rapporto tra questa frazione di scorciatoia e la lunghezza totale del percorso intrapreso dal lupo ($1/6 \div 5/3 = 3/30$) per concludere che al lupo resterà da percorrere ancora un decimo del suo cammino.

Oppure

- Dopo essersi accorti (per esempio utilizzando uno schema) che la lunghezza della scorciatoia corrisponde a $\frac{3}{5}$ della lunghezza totale del percorso del lupo, calcolare la parte di questo cammino percorso dal lupo (una volta e mezza i $\frac{3}{5}$ della strada ($\frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$)) e dedurre che gli resta $\frac{1}{10}$ di cammino da percorrere.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (Il lupo ha ancora $\frac{1}{10}$ di strada da percorrere), con spiegazioni chiare del procedimento seguito che dimostri che la soluzione trovata è generale
- 3 Risposta corretta, con spiegazioni parziali o almeno due tentativi di calcolo dai quali la risposta ha potuto essere ipotizzata e verificata
- 2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure risposta errata dovuta a un errore di calcolo, ma con spiegazioni chiare del procedimento
- 1 Inizio di ricerca coerente (per esempio ragionamento corretto che dimostra che Cappuccetto Rosso arriverà per prima)
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10**Origine:** Milano

19. LE SPIRALI DI STUZZICADENTI (II) (Cat. 9, 10)

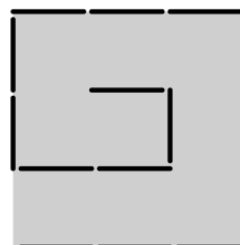
Con gli stuzzicadenti, Giacomo costruisce su uno stesso modello spirali che si inscrivono dentro quadrati sempre più grandi.

Le sue prime quattro spirali sono rappresentate qui sotto.

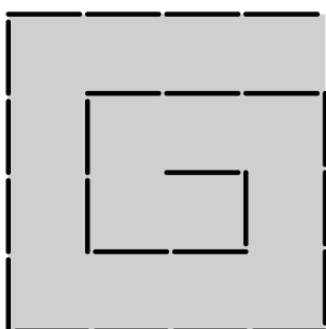
Lunghezza del lato del quadrato:
2 stuzzicadenti



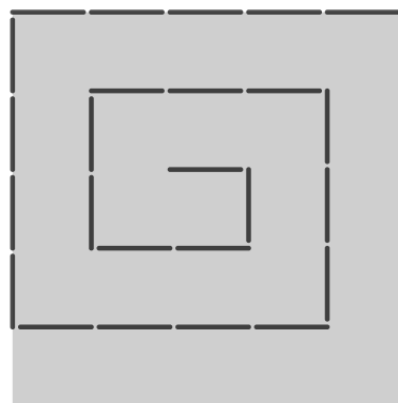
Lunghezza del lato del quadrato:
3 stuzzicadenti



Lunghezza del lato del quadrato:
4 stuzzicadenti



Lunghezza del lato del quadrato:
5 stuzzicadenti



Di quanti stuzzicadenti ha bisogno Giacomo per formare, sullo stesso modello, una spirale che si iscriva in un quadrato di lato 50 stuzzicadenti?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare il quarantanovesimo termine di una successione di numeri 8, 15, 24, 35, ... (da determinare a partire dal conteggio di elementi organizzati in spirali successive).

Analisi del compito

- Analizzare i disegni delle spirali per identificare il modello sul quale sono costruite: sono inserite in quadrati di lato crescente, ogni spirale si ottiene completando la spirale precedente, (3 lati per il quadrato n , 2 lati per il quadrato $n - 1$, 2 lati per il quadrato $n - 2$, ..., 2 lati per il quadrato 1) o, inversamente, partendo dal centro.
- Sommare gli stuzzicadenti di ogni spirale dell'immagine, costruirne eventualmente qualcun'altra per trovare i primi termini della successione e organizzarle progressivamente (vedere gli esempi delle due prime righe della tabella seguente):

Dimensione della spirale (n)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	50
Stuzzicadenti (N)	8	15	24	35	48	63	80	99	120	...	2600
Differenza tra due termini	7	9	11	13	15	17	19	21	23	...	
Prodotto $n \times (n + 2)$	2×4	3×5	4×6	5×7	6×8	7×9	8×10	9×11	10×12	...	50×52
Uno in meno del quadrato	$9 - 1$	$16 - 1$	$25 - 1$	$36 - 1$	$49 - 1$	$64 - 1$	$81 - 1$	$100 - 1$	$121 - 1$	...	$2601 - 1$

- Passare alla modalità numerica e comprendere la logica che permette di completare la tabella senza disegnare le spirali:
 - sia osservando che si può passare da un numero al successivo aggiungendo i numeri dispari successivi a partire da 7 (3ª riga). Questo metodo prevede una cinquantina di addizioni successive;

- sia accorgendosi che il numero di stuzzicadenti (N) è il prodotto di due numeri che hanno differenza 2 (n e $n + 2$). Questa è la funzione che permette di passare direttamente dalle dimensioni della spirale al numero di stuzzicadenti;
- sia identificando i quadrati dalla dimensione delle spirali aumentate di 1 ($n - 1$), 9, 16, 25, 36, 49 e scoprendo che il numero degli stuzzicadenti vale 1 in meno di questi quadrati. Questa funzione permette di passare direttamente dalle dimensioni della spirale al numero degli stuzzicadenti $N = (n + 1)^2 - 1$;
- ...

(Le formule $(n + 1)^2 - 1 = n(n + 2)$ possono essere ottenute a partire dall'analisi della spirale di lato n ricordata precedentemente, dalla conoscenza della formula che permette di trovare la somma dei $n - 1$ primi numeri naturali e dalle conoscenze algebriche sul calcolo letterale).

Attribuzione del punteggio

- 4 Risposta corretta (2 600 stuzzicadenti) con spiegazioni chiare che comprovino il ragionamento seguito per mostrare che la soluzione trovata è generale o trovata a partire da una congettura basata sullo studio di almeno 5 spirali
- 3 Risposta corretta con spiegazioni parziali o non sufficientemente motivate
- 2 Risposta errata a causa di un errore di calcolo, ma con identificazione di una regola che permetta di calcolare i termini della successione
oppure risposta corretta senza spiegazioni
- 1 Inizio di ricerca coerente (per esempio il disegno della quinta spirale)
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: Luxembourg

20. MOLTI ZERI (Cat. 9, 10)

Georges, Federico e Anselmo hanno inventato un gioco: ogni giocatore deve scegliere tra i numeri naturali da 1 a 30 alcuni numeri diversi fra loro e calcolarne poi il prodotto.

Vince chi ottiene il numero che termina con il più grande numero di zeri.

Nel caso che più giocatori ottengano un prodotto con lo stesso numero di zeri, il vincitore è colui che ha ottenuto il prodotto minore.

Per esempio:

- Georges sceglie 24; 10; 15 e ottiene $24 \times 10 \times 15 = 3\,600$
- Federico sceglie 28; 5; 10; 15 e ottiene $28 \times 5 \times 10 \times 15 = 21\,000$
- Anselmo sceglie 3; 8; 20; 25 e ottiene $3 \times 8 \times 20 \times 25 = 12\,000$

Il vincitore sarà Anselmo perché il suo prodotto, 12 000, termina con tre zeri come quello di Federico, ma è minore di 21 000. Georges invece, ha ottenuto il prodotto minore, ma anche quello con il minor numero di zeri.

Quali sono i numeri che si devono scegliere per essere sicuri di vincere?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Trovare il più piccolo prodotto composto da fattori diversi scelti tra i numeri naturali da 1 a 30 la cui scrittura termina con il massimo di zeri.

Analisi del compito

- Ricordarsi che cos'è il prodotto di più numeri (analizzando gli esempi dell'enunciato) e rendersi conto che c'è un grande numero di prodotti composti da fattori scelti tra i numeri da 1 a 30; prodotti di due fattori, di tre fattori, ... fino ad arrivare a 30 fattori. Tra tutti questi prodotti sarà necessario soffermarsi solo su quelli che terminano per zero.
- Identificare i prodotti che terminano con uno zero, due zeri, tre zeri, ... (per esempio $10 \times 20 \times 30 = 6\,000$) e chiedersi a partire dagli esempi, se si può ottenere prodotti con più zeri (per esempio moltiplicando 6 000 per 5, si trova $6\,000 \times 5 = 30\,000$ che ha uno zero in più).
- Proseguire con i tentativi nella ricerca dei prodotti con il più grande numero di zeri (per esempio moltiplicando 30 000 per 15 si ottiene $30\,000 \times 15 = 450\,000$ che ha sempre quattro zeri, ma moltiplicando quest'ultimo per un numero pari come il 12, si trova $450\,000 \times 12 = 5\,400\,000$ che ha cinque zeri).
- Continuando allo stesso modo, fare altri tentativi e convincersi a poco a poco che è necessario utilizzare i multipli di 5 a disposizione (5, 10, 15, 20, 25 e 30) con qualche multiplo di 2, per ottenere il prodotto più piccolo. Tra i multipli di 5, accorgersi che 25 moltiplicato per un multiplo di 4 è un multiplo di 100, che procura due zeri in più. Concludere che ci sono sette multipli di 5 tra i numeri da 1 a 30 e che quindi non sarà possibile trovare prodotti che terminano con più di sette zeri.
- Moltiplicando il prodotto $5 \times 10 \times 15 \times 20 \times 25 \times 30 = 11\,250\,000$ per 2, si ottiene 22 500 000, se si moltiplica per 4 si ottiene 45 000 000 e per 8 si ottiene 90 000 000. Si devono quindi scegliere i sei multipli di 5 con 2 e 4 o soltanto 8 per ottenere 90 000 000 che termina con sette zeri.

Oppure

- Ripensando alle proprietà della moltiplicazione (associatività e commutatività) e poi alla scomposizione di un numero in fattori primi considerare che per ottenere uno zero alla fine di un prodotto occorre che un fattore sia 10 o che ci sia un fattore 5 e uno 2. Rendersi conto che prendendo come fattori tutti i multipli di 5 tra 1 e 30, nella scomposizione in fattori primi del loro prodotto, si potrà ottenere un 5^7 poiché il 5 compare con esponente 1 in 5, 10, 15, 20, 30 e con esponente 2 in 25. Al massimo, quindi, moltiplicando numeri tra 1 e 30 potremo ottenere un numero con sette zeri finali a patto di avere anche, nella scomposizione in fattori primi del prodotto 2^7 . Considerare allora $5 \times 10 \times 15 \times 20 \times 25 \times 30$, osservare che 2 compare con esponente 4 e concludere che, per ottenere sette zeri finali, occorre ancora moltiplicare per 8 o per 2 e per 4. Concludere che il prodotto vincente è
 $90\,000\,000 = 5 \times 10 \times 15 \times 20 \times 25 \times 30 \times 8 = 5 \times 10 \times 15 \times 20 \times 25 \times 30 \times 2 \times 4$.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Una delle soluzioni 2; 4; 5; 10; 15; 20; 25; 30 oppure 5; 8; 10; 15; 20; 25; 30, con la verifica 90 000 000 e una descrizione chiara del ragionamento, sia per passi successivi, sia con riflessioni sulla fattorizzazione dei numeri che contengono i fattori 2 e 5 nella scomposizione
- 3 Una delle due soluzioni con spiegazioni poco chiare o incomplete che conducano però alla determinazione dei sette zeri oppure un'altra soluzione con sette zeri, ben argomentata, ma diversa da quelle richieste (per esempio 360 000 000)
- 2 Risposta corretta con sette fattori e 90 000 000, ma senza spiegazione oppure un numero con sei zeri finali, giustificata dalla presenza di tentativi anche se poco chiari e poco strutturati
- 1 Inizio di ricerca corretta attraverso alcuni tentativi, che mostrino il riconoscimento dei fattori 2 e 5 per ottenere gli zeri finali e che portino ad un prodotto con almeno tre zeri
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10**Origine:** Parma