

## **28° Rally Matematico Transalpino, prima prova**

I problemi del RMT sono protetti da diritti di autore.

Per un'utilizzazione in classe deve essere indicata la provenienza del problema inserendo la dicitura "©ARMT".

Per un'utilizzazione commerciale, ci si può mettere in contatto con i coordinatori internazionali attraverso il sito Internet dell'associazione del Rally Matematico Transalpino (<http://www.armtint.org>).

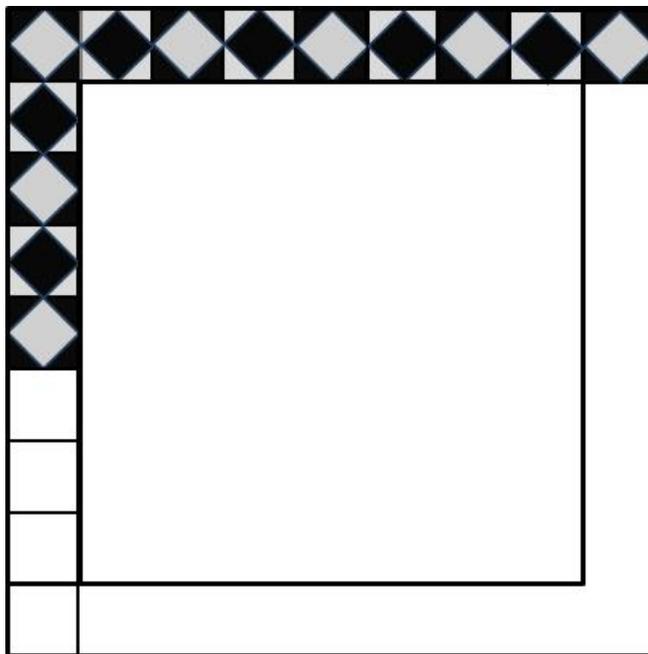
	<b>Titolo</b>	<b>Categorie</b>	<b>Origine</b>	<b>Ambito</b>
1	La cornice di Lisa	3 4	LU	Geometria: contare pezzi di diverse forme necessari per pavimentare una figura
2	Cesto di frutta (I)	3 4	SI	Operazioni in N: cercare 3 numeri conoscendo la loro somma e le relazioni tra essi
3	Cinque amici in pizzeria	3 4 5	RZ	Logica: esaminare dei vincoli ed effettuare deduzioni
4	Lancio di freccette	3 4 5	RV	Operazioni in N: scomposizioni additive di un numero mediante numeri assegnati
5	La tartaruga di Isotta	3 4 5	RMG	Operazioni in N: cercare 3 numeri conoscendo la loro somma e le relazioni tra essi
6	Triangoli in un poligono (I)	4 5 6	LY	Geometria: cercare un numero assegnato di suddivisioni di un ettagono in quattro triangoli
7	Puzzle di triangoli (I)	5 6	PR	Geometria e misura: cercare un accostamento di triangoli avente il perimetro più grande possibile
8	I salti di Mirka	5 6 7	SR	Lunghezza: ricerca di percorsi con vincoli sul numero e la lunghezza delle tappe
9	Cesto di frutta (II)	5 6 7	SI	Operazioni in N: cercare due numeri conoscendo le relazioni tra essi e un'informazione sulla loro somma
10	Tre amici e le loro case	6 7	SI	Numerazione e aritmetica: determinare tre numeri a partire da informazioni su essi
11	I prezzi delle penne	6 7 8	BB	Operazioni in Q: ricerca di un numero a partire da informazioni sulle scomposizioni additive e moltiplicative del numero
12	Catena di poligoni	6 7 8 9 10	SI	Successione numerica: determinare la posizione di un termine
13	Puzzle di triangoli (II)	7 8	PR	Geometria e misura: cercare un accostamento di triangoli avente il più grande perimetro possibile
14	Triangoli in un poligono (II)	7 8	LY	Geometria: cercare un numero assegnato di suddivisioni di un ettagono in quattro triangoli
15	Il giardino degli animali	8 9 10	PU	Area e ingrandimenti: cercare l'area di un ingrandimento a partire da alcune dimensioni date
16	Pannello decorativo	8 9 10	G0A0	Successione geometrica decrescente: ricerca del 1° termine inferiore a 1
17	Decimali colorati	8 9 10	G0A0	Operazioni in Q: quoziente decimale esatto o approssimato di due interi
18	Prima azione in borsa	9 10	GTCP	Percentuali: ricerca di un prezzo iniziale conoscendo lo scarto tra questo prezzo e il prezzo finale dopo due diminuzioni di prezzo e un successivo aumento
19	Un'apprendista geometra	9 10	GTGP	Geometria: determinazione della misura di un angolo
20	Lotterie	9 10	SI	Algebra: risoluzione in N di un sistema di 2 equazioni in 3 incognite

## 1. LA CORNICE DI LISA (cat. 3, 4)

Lisa vuole regalare alla mamma una cornice di forma quadrata.

Decide di decorare il bordo della cornice con triangoli e quadrati di colore nero e di colore grigio.

Ecco i triangoli e i quadrati che Lisa ha già disegnato e colorato.



**Quando Lisa avrà terminato, quanti triangoli neri ci saranno sul bordo della cornice?**

**E quanti quadrati grigi?**

**Mostrate come avete trovato le vostre risposte.**

### ANALISI A PRIORI

#### Compito matematico

Determinare il numero di due tipi di forme geometriche di colore diverso, tra quelle necessarie per ricoprire in modo regolare il bordo di un quadrato, a partire da una parte di bordo già disegnato e colorato.

#### Analisi del compito

- Appropriarsi della situazione: la cornice è quadrata, il disegno sul bordo è regolare (formato sempre da un quadrato circondato da quattro triangoli), le figure che hanno un lato in comune devono avere colori diversi.
- Completare il decoro della cornice, colorare seguendo la regola e contare tutti i quadrati e i triangoli come richiesto. Oppure vedere che intorno ad un quadrato grigio si trovano quattro triangoli neri, contare i quadrati grigi e moltiplicare il numero per 4 per trovare i triangoli neri.

Oppure

- Osservando la regolarità del motivo, si possono individuare molteplici strategie di conteggio, per esempio: notare che su ciascun lato della cornice la decorazione sarà uguale a quella sul lato già completato in figura, determinare quindi il numero di quadrati grigi e di triangoli neri che ci sono su questo lato (5 quadrati grigi, 20 triangoli neri) e moltiplicare i numeri ottenuti per 4 (i quattro lati).
- Rendersi conto che, così facendo, ogni motivo collocato in un angolo della cornice viene contato due volte e quindi togliere quattro volte 1 quadrato grigio e 4 triangoli neri. Si ottengono così 16 quadrati grigi e 64 triangoli neri.

Oppure

- Considerare che il bordo del quadrato è costituito da quattro rettangoli  $1 \times 8$ .
- Contare i triangoli neri e i quadrati grigi su uno di questi rettangoli (4 quadrati grigi, 16 triangoli neri) e moltiplicare per 4.

#### Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (16 quadrati grigi, 64 triangoli neri) con descrizione chiara e completa della procedura o disegno completo della cornice
- 3 Risposta corretta con descrizione parziale o poco chiara della procedura o disegno incompleto o molto impreciso oppure risposta 16 quadrati grigi, 64 triangoli grigi o 16 quadrati neri, 64 triangoli neri, con descrizione chiara e completa della procedura o disegno completo della cornice
- 2 Risposta errata dovuta a un errore di calcolo o di conteggio, ma la procedura è corretta (è chiaro che i motivi negli angoli sono stati contati una sola volta)  
oppure risposta 16 quadrati grigi, 64 triangoli grigi o 16 quadrati neri, 64 triangoli neri, con una descrizione incompleta o non chiara della procedura o disegno incompleto o molto impreciso  
oppure risposta incompleta dovuta alla dimenticanza di alcuni pezzi  
oppure sono stati contati solo i pezzi che mancano per completare la cornice (9 quadrati grigi e 36 triangoli neri)  
oppure risposta corretta senza alcuna spiegazione né disegno
- 1 Inizio di ricerca corretto ma i motivi negli angoli sono stati contati due volte (20 quadrati grigi, 80 triangoli neri)
- 0 Incomprensione del problema

**Livello:** 3, 4

**Origine:** Luxembourg

**2. CESTO DI FRUTTA I** (Cat. 3, 4)

La mamma ha comprato arance, mele e banane.

Tommaso conta i frutti: in tutto sono 29.

Il numero delle mele è il doppio di quello delle arance e le arance sono 3 di più delle banane.

**Quante arance, quante mele e quante banane ci sono?**

**Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.**

---

**ANALISI A PRIORI****Compito matematico**

Trovare tre numeri sapendo che la somma è 29, il più grande è il doppio del secondo il quale, a sua volta, supera di 3 il minore.

**Analisi del compito**

- Capire che ci sono solo tre varietà di frutti e che i frutti sono in tutto 29.
- Interpretare le relazioni “il doppio di” e “3 di più”.
- Dedurre dalla lettura che ci sono più mele che arance (il doppio) e che il numero di arance supera di 3 il numero delle banane (3 di più).
- Capire che occorre cercare tre numeri che rispettino le relazioni indicate e che abbiano come somma 29.
- Procedere per tentativi fissando, ad esempio, il numero di frutti di una varietà e determinare il numero di frutti delle altre due. La procedura più semplice è fissare il numero delle banane, calcolare poi il numero delle arance e infine quello delle mele. Calcolare la somma dei tre numeri e confrontarla con 29.
- I tentativi possono essere organizzati (confrontare il numero totale dei frutti con 29 e, a seconda che questo numero sia minore o maggiore di 29, aumentare o diminuire il numero dei frutti della categoria scelta) fino a trovare la soluzione (5 banane, 8 arance e 16 mele).

Oppure

Tentativi non organizzati (i nuovi tentativi sono fatti senza tener conto dei risultati dei precedenti tentativi).

**Attribuzione dei punteggi**

- 4 Risposta corretta (8 arance, 16 mele e 5 banane) con una descrizione chiara del procedimento.
- 3 Risposta corretta con descrizione poco chiara della procedura
- 2 Risposta corretta senza descrizione né verifica  
oppure risposta errata (i tre numeri sono esatti, ma confusione sui tipi di frutti nella risposta, per esempio 5 mele, 16 arance e 8 banane)  
oppure le relazioni tra i tipi di frutta sono corrette, ma errori nel calcolo con risposta coerente ai calcoli effettuati  
oppure assenza di risposta, ma presenza di tentativi che provino la comprensione delle tre condizioni (relazioni tra i numeri e la somma 29) senza errori di calcolo
- 1 Inizio di ricerca corretto (una delle due relazioni tra le categorie dei frutti: “è il doppio di” e “3 di più di” è correttamente interpretata e rispettata)
- 0 Incomprensione del problema

**Livello:** 3, 4

**Origine:** Siena

### 3. CINQUE AMICI IN PIZZERIA (Cat. 3, 4, 5)

Alice, Bruno, Camilla, Dino ed Elsa vanno in pizzeria per mangiare una pizza ciascuno. Ordinano quattro tipi diversi di pizza: napoletana, margherita, capricciosa, ai funghi.

- A Dino e ad Alice non piacciono i funghi.
- Bruno ed Elsa hanno ordinato lo stesso tipo di pizza.
- Camilla ha ordinato una capricciosa.
- Dino non ha ordinato una margherita.

**Quale tipo di pizza hanno ordinato Alice, Bruno, Dino ed Elsa?**

**Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.**

---

#### ANALISI A PRIORI

##### Compito matematico

Associare un tipo di pizza scelto tra quattro a ciascuna delle cinque persone di un gruppo, assegnate quattro condizioni, di cui due espresse con una negazione.

##### Analisi del compito

- Rendersi conto che il numero degli amici è diverso da quello dei tipi di pizza.
- Comprendere che, se le pizze sono di quattro tipi e gli amici sono cinque, nessun altro ha scelto lo stesso tipo di pizza di Bruno ed Elsa e che gli altri tre amici hanno scelto ciascuno un tipo di pizza diverso.
- La terza informazione permette di assegnare la capricciosa a Camilla, quindi rimangono tre tipi di pizze, ai funghi, napoletana e margherita da assegnare a quattro persone. Poiché la prima informazione esclude quella ai funghi per Dino e Alice significa che la pizza ai funghi viene ordinata da Bruno ed Elsa
- Rimangono così da assegnare le pizze napoletana e margherita e l'ultima informazione porta a concludere che Dino ha ordinato la napoletana e Alice la margherita.

Oppure

- Partire dall'ultima informazione e dedurre che Dino, poiché non ha ordinato una margherita, né una pizza ai funghi (prima informazione), né una capricciosa (terza informazione), ha ordinato una pizza napoletana.
- Alice non ha ordinato la pizza ai funghi, non ha ordinato la capricciosa, né la napoletana, quindi ha ordinato la margherita.
- Se ne deduce che Bruno ed Elsa hanno ordinato entrambi la pizza ai funghi.

##### Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (Alice ha ordinato una pizza margherita, Bruno ed Elsa quella ai funghi, Dino una napoletana) con esplicitazione delle deduzioni effettuate per arrivare alla risposta (a parole, mediante uno schema o una tabella che associ ad ognuno le possibili pizze motivando successivamente le associazioni da scartare, ..)
- 3 Risposta corretta con descrizione poco chiara della procedura  
oppure risposta corretta con soltanto la verifica
- 2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione  
oppure risposta corretta per Bruno ed Elsa, ma scambio delle pizze di Dino e Alice
- 1 Risposta mancante, ma attribuzione corretta ad uno o due degli amici, oltre a Camilla  
oppure una deduzione corretta a partire dalle informazioni dell'enunciato (per esempio Bruno ed Elsa non hanno ordinato una capricciosa perché...)
- 0 Incomprensione del problema  
oppure attribuzione corretta solo per Camilla

**Livello:** 3, 4, 5

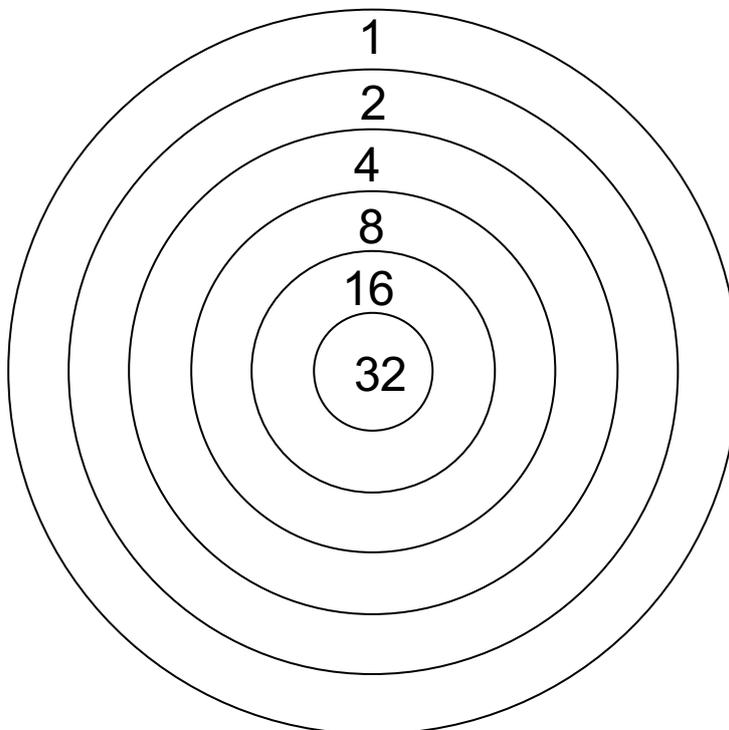
**Origine:** Rozzano

#### 4. LANCIO DI FRECCETTE (Cat. 3, 4, 5)

Questo gioco consiste nel lancio di cinque freccette, una sola volta ciascuna, su un bersaglio come quello disegnato sotto.

Se un giocatore totalizza esattamente 51 punti, vince un grosso orso di peluche.

Una freccetta che manca il bersaglio non dà punti.



**Quali sono tutti i modi per ottenere 51 punti lanciando cinque freccette?  
Mostrate come avete trovato le vostre risposte e i calcoli che avete fatto.**

#### ANALISI A PRIORI

##### Compito matematico

Trovare tutte le scomposizioni di 51 nella somma di cinque termini scelti tra 0; 1; 2; 4; 8; 16 e 32.

##### Analisi del compito

- Capire che si dispone di cinque freccette da lanciare su un bersaglio, che alcune di esse potrebbero non colpirlo e che su una stessa zona del bersaglio potrebbero arrivare due o più freccette.
- Capire che quando una freccetta colpisce una zona del bersaglio, il numero di punti ottenuto è quello indicato nella zona colpita e che quando la freccetta manca il bersaglio si ottengono zero punti.
- Capire che per vincere il grosso orso occorre totalizzare esattamente 51 punti, dedurre quindi che per risolvere il problema occorre ottenere 51 addizionando cinque numeri scelti tra 0; 1; 2; 4; 8; 16; 32 e che uno stesso numero può essere presente più volte nell'addizione.
- La difficoltà consiste nel tenere conto delle condizioni: l'addizione deve avere cinque addendi, non necessariamente tutti diversi fra loro, e alcuni di essi possono essere zero.
- Effettuare tentativi non organizzati: scegliere cinque numeri, addizionarli e confrontare la somma con 51. Questa strategia non offre molte probabilità di ottenere tutte le soluzioni, ma potrebbe essere una strategia iniziale che permette di capire che almeno uno dei due numeri, 32 e 16, deve essere presente nell'addizione.
- Effettuare tentativi organizzati, per esempio cercando le soluzioni che contengono il numero 32.  
Occorre aggiungere 19 punti e quindi bisogna cercare come ottenere 19 con quattro numeri presi tra 0; 1; 2; 4; 8; 16. Con 16, si trova  $16 + 2 + 1 + 0 = 19$  e  $16 + 1 + 1 + 1 = 19$ . Senza il 16, troviamo solo  $8 + 8 + 2 + 1$ . La scomposizione  $8 + 8 + 1 + 1 + 1 + 1$  non va bene perché sarebbero utilizzati sei numeri per ottenere 51.  
Proseguire cercando le soluzioni che non contengono 32. Con 16, troviamo  $16 + 16 + 16 + 2 + 1$ .  
Cercare le soluzioni che non contengono né 32 né 16. Addizionando cinque volte 8 si ottiene 40 che è inferiore a 51. Non ci sono dunque altre soluzioni.

- Osservazione: poiché, tranne 1, tutti i numeri sono pari, gli allievi possono notare che la loro somma è pari e che quindi 1 deve essere obbligatoriamente presente.

**Attribuzione dei punteggi**

- 4 Risposta corretta: le quattro possibilità (32, 16, 2, 1, 0 / 32, 16, 1, 1, 1 / 32, 8, 8, 2, 1 / 16, 16, 16, 2, 1 oppure una freccetta nella zona 32, una freccetta nella zona 16, una freccetta nella zona 2, una freccetta nella zona 1e una freccetta che non colpisce il bersaglio e analogamente per gli altri tre casi), con esplicitate le addizioni e la loro somma (l'addizione deve avere cinque termini o quattro termini se il quinto è lo 0)
- 3 Risposta con solamente la presenza delle quattro addizioni di cinque termini o quattro termini se il quinto è lo 0 oppure solamente le quattro possibilità senza che siano scritte in forma di addizioni oppure tre possibilità con le corrispondenti addizioni, senza addizioni o possibilità errate
- 2 Le quattro possibilità o solamente le quattro addizioni con al più un'altra possibilità errata oppure tre possibilità o solamente le tre addizioni, senza altre addizioni o possibilità errate
- 1 Tre o due possibilità o solamente le addizioni con al massimo un'altra addizione o possibilità errata oppure una possibilità o solamente una addizione corretta, senza altre addizioni o possibilità errate
- 0 Incomprensione del problema

**Livello:** 3, 4, 5

**Origine:** Riva del Garda

**5. LA TARTARUGA DI ISOTTA** (Cat. 3, 4, 5)

Isotta ha una tartaruga che durante la settimana nutre nel modo seguente:

- il lunedì, il mercoledì e il venerdì le dà la stessa quantità di cibo;
- il martedì, il giovedì e il sabato gliene dà il doppio degli altri giorni;
- la domenica non le dà da mangiare.

In tutta la settimana Isotta dà alla sua tartaruga 54 g di mangime.

**Calcolate la quantità di cibo che la tartaruga di Isotta mangia in ciascun giorno della settimana.**

**Mostrate come avete trovato la vostra risposta.**

---

**ANALISI A PRIORI****Compito matematico**

Trovare un numero che moltiplicato per 3 e sommato al triplo del proprio doppio dia come risultato 54.

**Analisi del compito**

- Capire che Isotta dà alla tartaruga una stessa quantità di cibo per tre giorni alla settimana e per altri tre giorni gliene dà il doppio.
- Rappresentare la situazione sotto forma grafica, per esempio con un disegno in cui, a fronte di ogni giorno della settimana, corrispondono uno o due simboli. Sommare i simboli usati: sono 9.
- Dividere 54 per 9 o fare tentativi moltiplicativi ( $9 \times \dots = 54$ ) per ottenere la quantità di mangime nei giorni dispari (6 grammi).
- Moltiplicare per 2 il valore ottenuto per avere la quantità di mangime nei giorni pari (12 grammi).

Oppure

Procedere per tentativi, progressivamente organizzati, ad esempio da 4 grammi per lunedì, arrivare a 36 grammi per la settimana e constatare che occorre aumentare la quantità.

**Attribuzione dei punteggi**

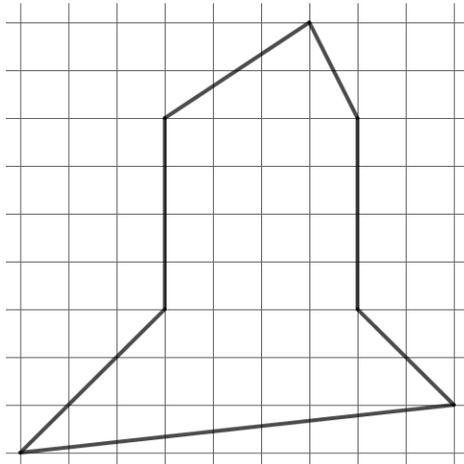
- 4 Risposta corretta (6 grammi il lunedì, mercoledì e venerdì e 12 grammi il martedì, giovedì e sabato) con descrizione chiara dei passaggi seguiti per determinarla, eventualmente anche per mezzo di tabella o disegni (accettabile anche se si aggiunge 0 grammi per la domenica)  
oppure risposta corretta per tentativi più o meno organizzati, ma con riferimento alle relazioni in gioco
- 3 Risposta corretta con descrizione poco chiara dei passaggi (per esempio si divide 54 per 9 o per 3 senza esplicitare da dove provengano questi numeri)
- 2 Risposta corretta senza alcuna descrizione della procedura  
oppure risposta: lunedì 6 g e, per esempio, martedì 12 g tralasciando gli altri giorni della settimana  
oppure risposta sbagliata per errori di calcolo, ma con procedura corretta
- 1 Inizio di ricerca corretto, per esempio vengono fatti dei tentativi coerenti, ma non si arriva alla soluzione
- 0 Incomprensione del problema

**Livello:** 3, 4, 5,

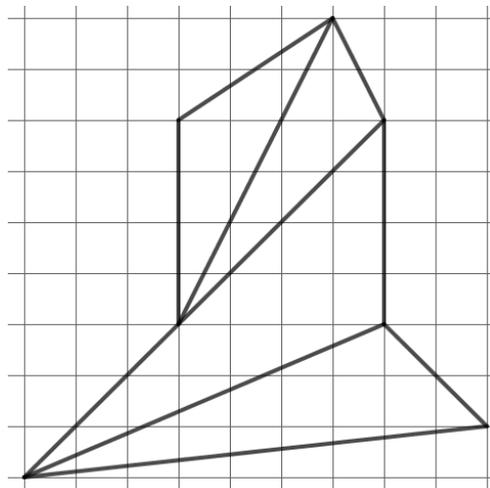
**Origine:** Romagna

## 6. TRIANGOLI IN UN POLIGONO (I)(Cat. 4, 5, 6)

Tania è riuscita a suddividere questa figura in quattro triangoli.



Tania ha trovato molti modi differenti per suddividere in quattro triangoli la figura. Ecco la prima suddivisione che ha trovato.



**Trovate altri cinque modi di suddividere la figura in quattro triangoli  
Disegnateli sulle figure del foglio allegato.**

### ANALISI A PRIORI

#### Compito matematico

Dato un ettagono concavo disegnato su una griglia quadrettata, trovare cinque diverse scomposizioni in quattro triangoli.

#### Analisi del compito

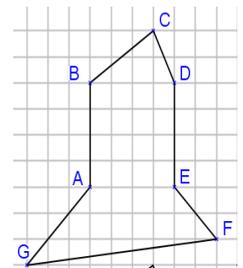
- Capire che per far apparire i triangoli, è necessario collegare i vertici dell'ettagono o prolungare dei lati scelti tra  $[GA]$ ,  $[EF]$ ,  $[DE]$  o  $[BA]$ .
- Osservare che G, A e D sono allineati come pure B, E e F, dunque prolungando  $[GA]$  e prolungando  $[EF]$  si ottengono scomposizioni analoghe a quelle che si ottengono tracciando rispettivamente  $[AD]$  e  $[BE]$

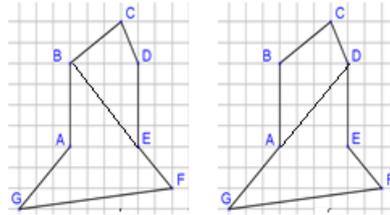
Ricerca per tentativi non organizzati e aggiustamenti:

- Tracciare dei segmenti collegando dei vertici o prolungando dei lati dell'ettagono e scegliere quelli che permettono di ottenere quattro triangoli interni alla figura.
- Fatti più tentativi, confrontarli ed eliminare i doppi.

Ricerca organizzata:

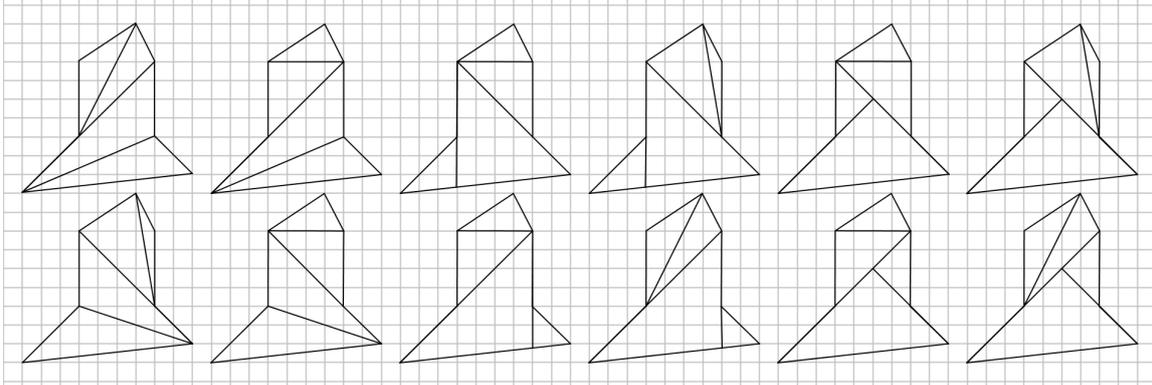
- Intuire che è più semplice suddividere un quadrilatero in triangoli, piuttosto che suddividere direttamente la figura data.
- Cercare tutti i modi di suddividere la figura in quadrilateri (ce ne sono due).





- Per ognuno dei due casi :
  - suddividere ogni quadrilatero in due triangoli
  - cercare cinque suddivisioni differenti della figura data.

Nella figura qui sotto sono mostrate tutte le dodici suddivisioni possibili del poligono.



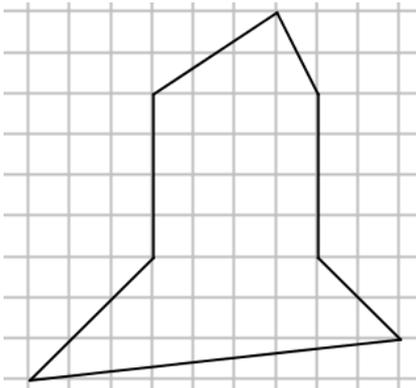
#### Attribuzione dei punteggi

- 4 5 suddivisioni corrette diverse fra loro e diverse da quella data
- 3 4 suddivisioni corrette diverse fra loro e diverse da quella data, con eventualmente un doppione o una suddivisione errata
- 2 3 suddivisioni corrette diverse fra loro e diverse da quella data, con eventualmente dopponi o suddivisioni errate
- 1 1 o 2 suddivisioni corrette diverse fra loro e diverse da quella data, con eventualmente dopponi o suddivisioni errate
- 0 Incomprensione del problema: nessuna suddivisione corretta

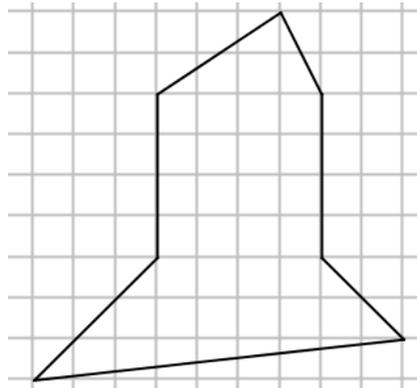
**Livello:** 4, 5, 6

**Origine:** Lyon

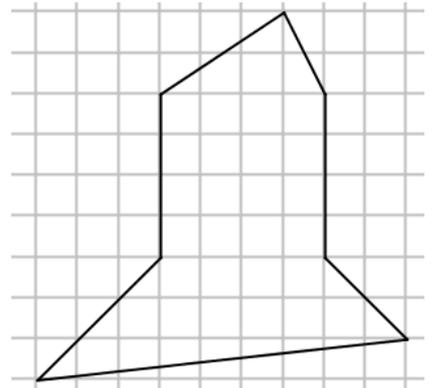
**Problema 6 - Foglio risposte**



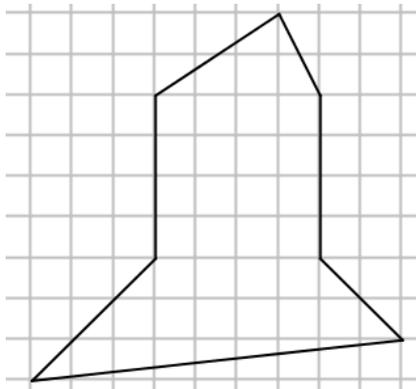
Suddivisione 1



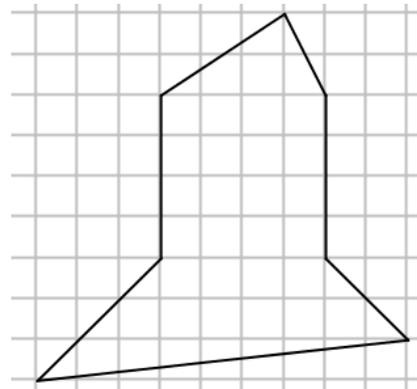
Suddivisione 2



Suddivisione 3



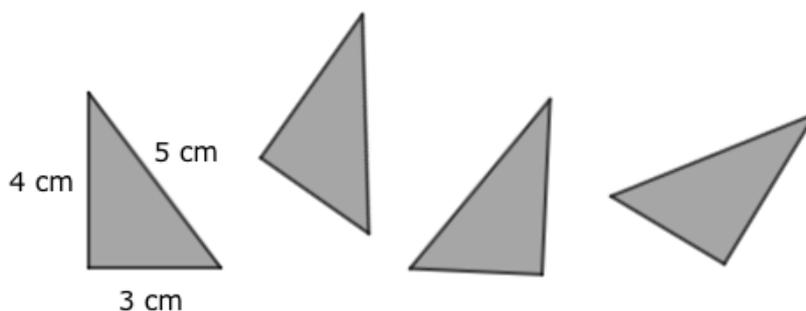
Suddivisione 4



Suddivisione 5

**7. PUZZLE DI TRIANGOLI (I)** (Cat. 5, 6)

Andrea ha ritagliato quattro triangoli rettangoli uguali i cui lati misurano 3 cm, 4 cm e 5 cm.



Accostando i quattro triangoli, Andrea forma delle figure e vuole che:

- i triangoli non si sovrappongano;
- i triangoli siano uniti lungo lati della stessa lunghezza;
- nessuna figura abbia un buco.

Ecco alcuni dei tentativi di Andrea:

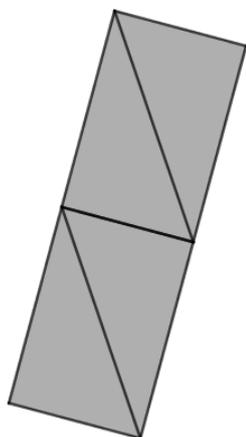


Figura 1

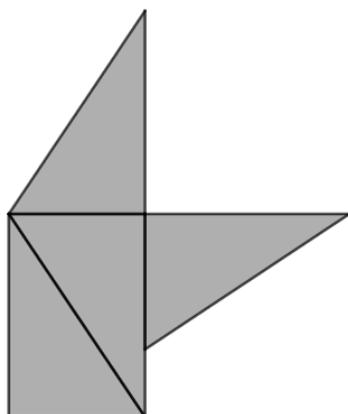


Figura 2

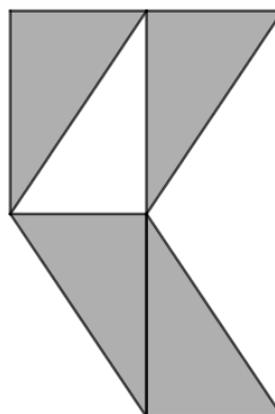


Figura 3

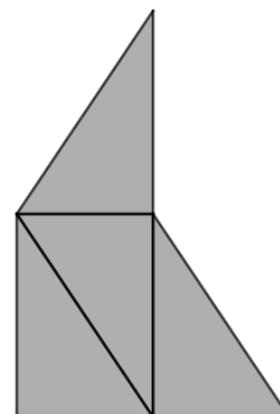


Figura 4

Le figure 1 e 4 sono corrette, la figura 2 non è corretta perché ci sono due triangoli che si toccano su due lati che non hanno la stessa lunghezza, la figura 3 non è corretta perché ha un buco.

**Accostando i quattro triangoli seguendo le regole che ha fissato, Andrea vuole formare una figura che abbia il perimetro più lungo possibile.**

**Scoprite come può essere questa figura e disegnatela.**

**Scrivete quanto misura il suo perimetro e mostrate i calcoli che avete fatto.**

**ANALISI A PRIORI****Compito matematico**

Cercare fra i poligoni ottenuti accostando lungo lati della stessa lunghezza quattro triangoli rettangoli uguali (con i lati di misura 3; 4; 5 in cm), un poligono il cui perimetro sia massimo.

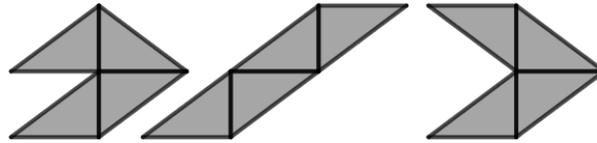
**Analisi del compito**

- Osservare gli esempi per appropriarsi delle regole di costruzione delle figure.
- Procedere per tentativi: dopo aver costruito una figura e calcolato il suo perimetro, cercare di costruirne una che abbia il perimetro maggiore e continuare così cercando poligoni con il perimetro sempre più grande.

Oppure

- Rendersi conto che per avere il perimetro massimo è necessario avere sul contorno il maggior numero possibile di lati dei triangoli e capire che il perimetro sarà massimo se questi sono i lati più lunghi dei triangoli.
- Unire due triangoli lungo il lato più corto (o lungo il lato intermedio). Collegare a questo primo assemblaggio gli altri due triangoli lungo il lato intermedio (o il lato più corto ) assicurandosi che i due triangoli abbiano in comune soltanto un lato. Calcolare il perimetro.
- Ricominciare con un nuovo assemblaggio. Constatare che il perimetro maggiore si ottiene unendo inizialmente due triangoli lungo il lato intermedio e successivamente gli altri due.

Esempi di assemblaggi per i quali il perimetro è massimo:  $4 \times 5 \text{ cm} + 2 \times 4 \text{ cm} = 28 \text{ cm}$



#### Attribuzione dei punteggi

- 4 Disegno corretto di una figura di perimetro 28 cm, con indicazione e calcolo del perimetro
- 3 Disegno corretto di una figura di perimetro 28 cm, con indicazione del perimetro, ma senza il calcolo oppure disegno corretto di una figura di perimetro 26 cm, con indicazione e calcolo del perimetro
- 2 Disegno corretto di una figura di perimetro 28 cm, senza indicazione né calcolo del perimetro oppure disegno corretto di una figura di perimetro 28 cm, ma con un errore di calcolo nel perimetro oppure disegno corretto di una figura di perimetro 26 cm, con indicazione del perimetro, ma senza il calcolo oppure disegno corretto di una figura di perimetro 24 cm, con indicazione e calcolo del perimetro
- 1 Disegno corretto di una figura di 24 cm, con indicazione del perimetro, ma senza il calcolo oppure disegno corretto di una figura di perimetro 22 cm diverso da quello della figura 1 oppure inizio di ricerca coerente (disegno di più figure rispettando le condizioni, ma senza concludere)
- 0 Incomprensione del problema (disegni di figure che non rispettano le regole) oppure disegno corretto di una figura con perimetro di 20 cm.

**Livello:** 5, 6

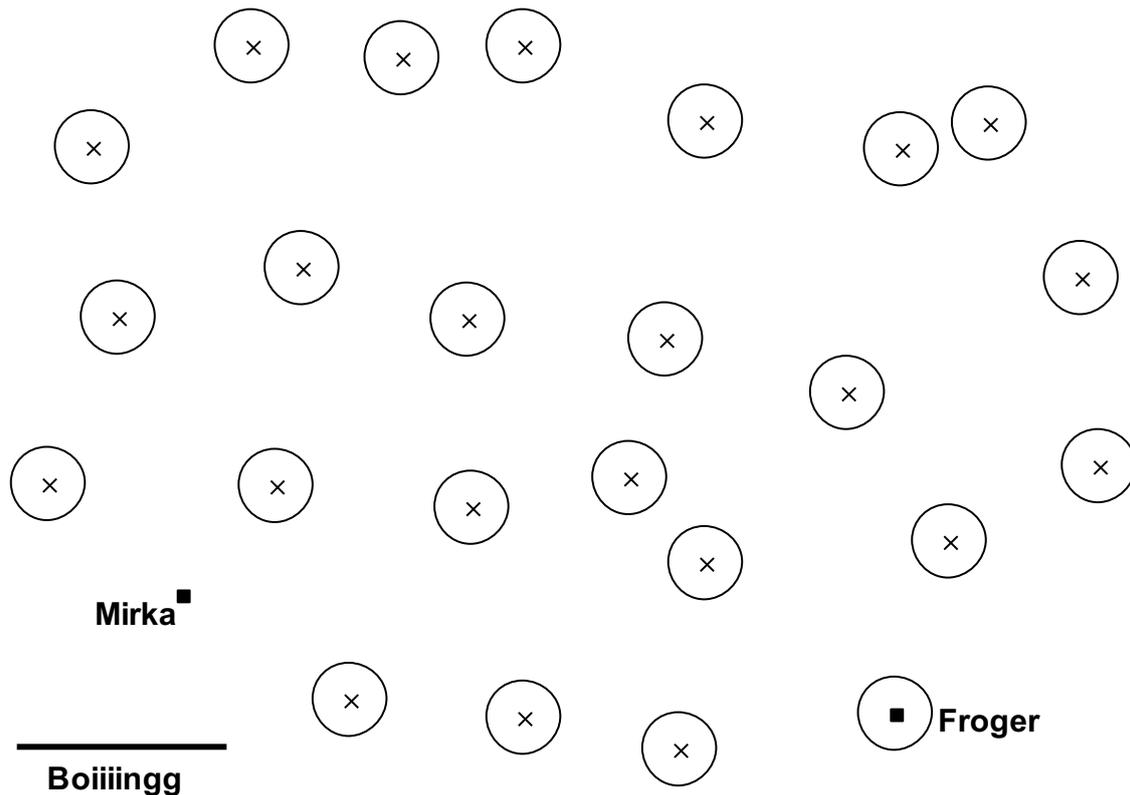
**Origine:** Parma

### 8. I SALTI DI MIRKA (Cat. 5, 6, 7)

La rana Mirka si trova sopra un sasso sul bordo di uno stagno. Vuole raggiungere il suo amato Froger che schiaccia un sonnellino su una ninfea. Nello stagno vi sono anche altre ninfee, che permettono a Mirka di spostarsi saltando da una all'altra.

Mirka deve raggiungere esattamente il centro di ogni ninfea, indicato da una croce, per non cadere in acqua. A Mirka manca l'allenamento: non può fare salti più lunghi di un «boiiiingg», né più di 12 salti. Inoltre non vuole passare più volte sulla stessa ninfea.

La lunghezza di un «boiiiingg» è quella del segmento tracciato sotto la mappa dello stagno qui disegnata.



**Quanti percorsi diversi consentono a Mirka di raggiungere Froger?**

**Disegnate tutti i possibili percorsi utilizzando le mappe dei fogli allegati.**

---

#### ANALISI A PRIORI

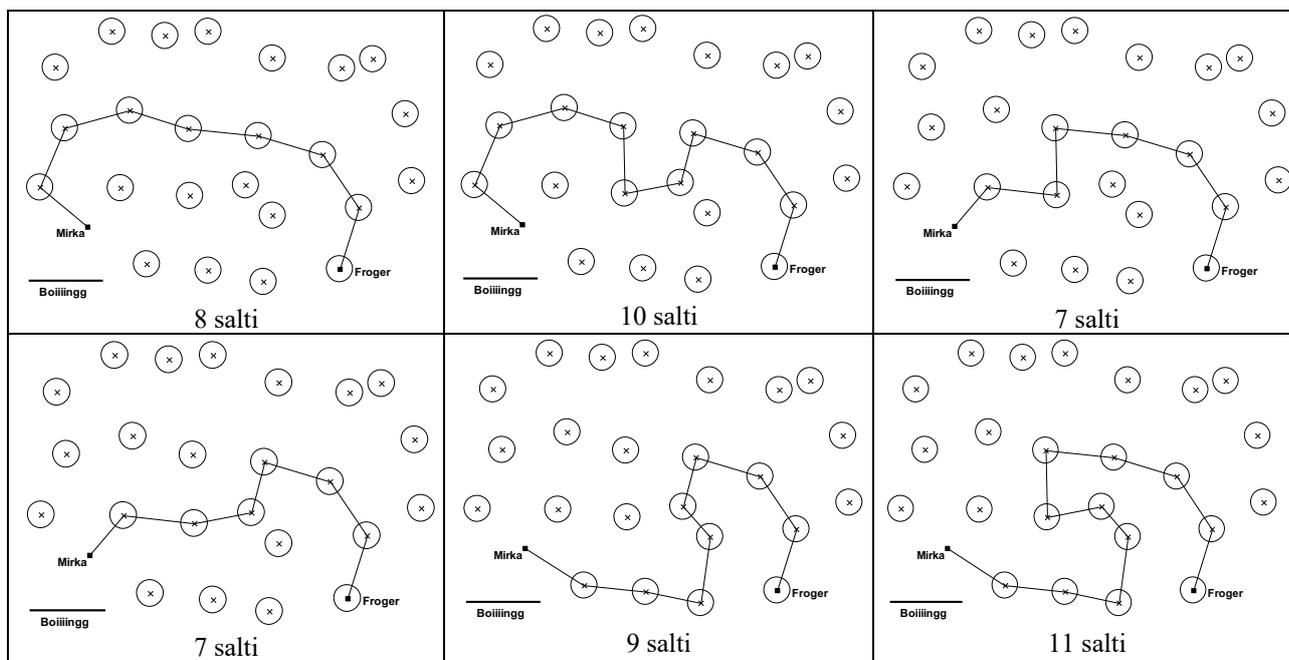
##### Compito matematico

Identificare le diverse linee spezzate costruite congiungendo dei punti e formate al più da 12 segmenti di lunghezza inferiore o uguale a quella di un segmento assegnato.

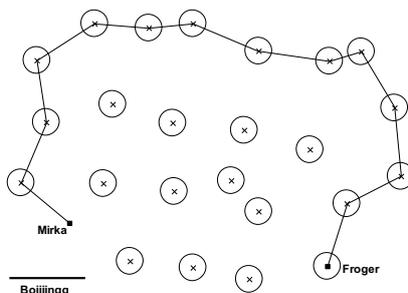
##### Analisi del compito

- Capire che la distanza tra due punti consecutivi di un percorso non deve superare un valore assegnato e capire quindi che la rana può fare dei salti di una lunghezza inferiore o uguale a questa lunghezza fissata.
- Capire che ogni percorso che la rana può intraprendere deve essere composto al massimo da 12 salti.
- Cercare tra quali ninfee può saltare la rana. Per fare ciò, misurare le distanze che separano due punti vicini o prendere l'apertura del compasso tra due punti vicini, confrontarle con la lunghezza massima di un salto.
- A partire dalla posizione di Mirka (o di Froger) cercare quali sono le linee spezzate, costituite da segmenti di lunghezza inferiore o uguale a quella di un "boiiiingg", che possono essere tracciate per raggiungere la posizione di Froger (o di Mirka). Eliminare i percorsi che comportano più di 12 segmenti.
- Disegnare i percorsi sulle mappe fornite.

Le sei soluzioni sono:



Ci sono altri percorsi che rispettano la condizione sulla lunghezza di ogni salto, ma non quella sul numero di salti, come per esempio quello qui in basso che necessita di 13 salti:



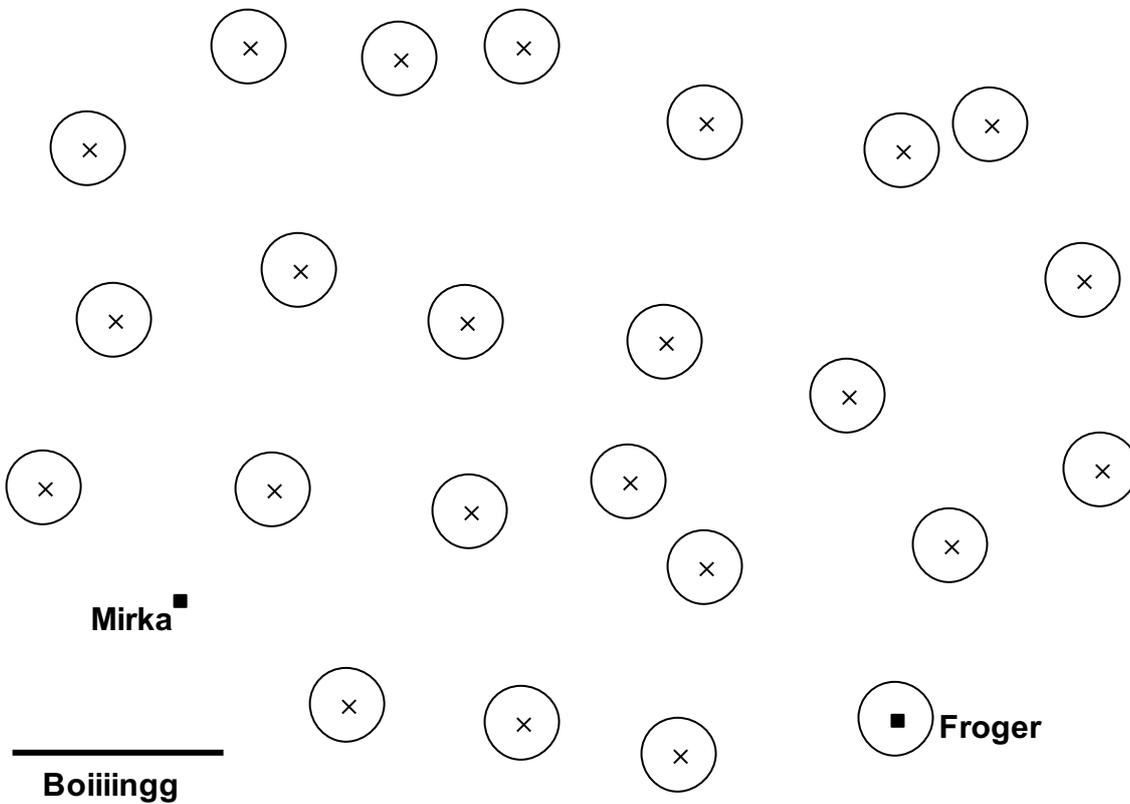
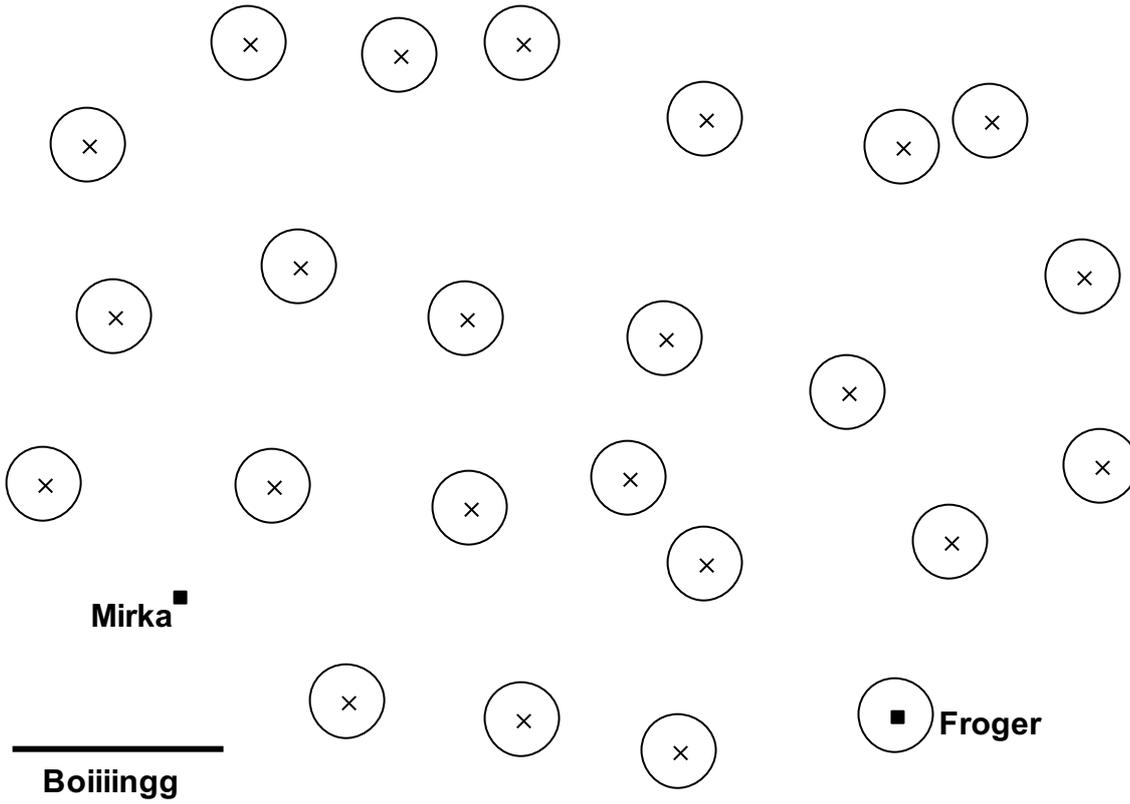
#### Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (i 6 percorsi tracciati chiaramente), senza altri percorsi sbagliati
- 3 Da 4 a 5 percorsi corretti, senza altri percorsi sbagliati  
oppure i 6 percorsi, con disegni corretti, ma con la presenza di un percorso sbagliato
- 2 2 o 3 percorsi, con disegni corretti, senza altri percorsi sbagliati  
oppure da 4 a 5 percorsi con disegni corretti, ma con la presenza di uno o due altri percorsi sbagliati  
oppure 6 percorsi, con disegni corretti, ma con presenza di due o tre altri percorsi sbagliati
- 1 Almeno un percorso, con disegno corretto, con o senza altri percorsi sbagliati.
- 0 Incomprensione del problema

**Livello:** 5, 6, 7

**Origine:** Svizzera Romanda

*Predisporre 5 fogli come questo*



**9. CESTO DI FRUTTA (II)** (Cat. 5, 6, 7)

Tommaso ha messo in un cesto le pere e le mele che ha raccolto nel suo frutteto.

Il numero delle mele è doppio del numero delle pere.

Tommaso dà la metà delle mele a Sofia e la metà delle pere ad Adele.

Nel cesto gli restano così 36 frutti.

**Quante pere e quante mele ha raccolto Tommaso?**

**Mostrate come avete trovato la vostra risposta.**

---

**ANALISI A PRIORI****Compito matematico**

Trovare due numeri naturali, uno doppio dell'altro, tali che la somma delle loro metà sia 36.

**Analisi del compito**

- Comprendere che è nota la relazione tra i numeri di pere e di mele, ma non si conosce la loro somma.
- Capire che se Tommaso regala la metà delle sue mele e delle sue pere, regala la metà dei suoi frutti e quindi il numero dei frutti restanti (36) corrisponde alla metà del numero dei frutti raccolti. Dedurre che ha raccolto 72 frutti. Dedurre dall'enunciato che i due numeri devono essere pari per poter prendere la metà di ciascuna quantità. Il problema consiste allora nella ricerca di due numeri pari, di cui uno sia doppio dell'altro e la cui somma sia 72.

Oppure

Capire che se Tommaso regala la metà delle sue mele e delle sue pere, nel cesto resta la metà del numero delle mele e la metà del numero delle pere raccolte. Capire che la relazione tra il numero delle mele e quello delle pere è la stessa che c'è tra le loro metà. Il problema consiste allora nel cercare due numeri, uno doppio dell'altro, la cui somma sia 36 e raddoppiare poi i due numeri trovati.

Ci sono più procedure possibili

Procedere per tentativi: scegliere un numero di pere o di mele (in questo caso deve essere un numero pari), determinare il numero di mele (doppio) o di pere (metà) e fare la somma di questi numeri, confrontare il risultato con 72 o 36. I tentativi possono essere organizzati oppure no e possono essere fatti ricorrendo ad una rappresentazione, per esempio attraverso segmenti o rettangoli.

Oppure

- Dedurre dal fatto che il numero delle mele è il doppio del numero delle pere, che il numero delle pere rappresenta la terza parte del numero totale dei frutti. Determinare prima il numero delle pere dividendo per 3 il 72 o il 36, poi il numero delle mele.
- Concludere che ci sono 24 pere e 48 mele.

**Attribuzione dei punteggi**

- 4 Risposta corretta (48 mele e 24 pere), con spiegazioni chiare (viene esplicitato sotto forma di testo o per mezzo di uno schema che il numero totale dei frutti è 72 o che la somma della metà del numero delle mele e della metà del numero delle pere è 36; per esempio è scritto: «abbiamo fatto dei tentativi» con presenza di calcoli per la doppia soluzione o indicazione che il numero delle pere è la terza parte del numero totale e relativo calcolo).
- 3 Risposta corretta ma spiegazione parziale (manca uno dei punti indicati nel punteggio 4)
- 2 Risposta corretta senza spiegazioni né calcoli o soltanto la verifica  
oppure risposta errata (procedura corretta ma errore di calcolo con risposta coerente ai calcoli effettuati o scambiati i due tipi di frutta)
- 1 Inizio di ricerca corretta (presenza di calcoli che attestano la comprensione delle condizioni: relazioni tra il numero delle mele e delle pere e somma dei due numeri uguale a 36 o 72)
- 0 Incomprensione del problema

**Livello:** 5, 6, 7

**Origine:** Siena

**10. TRE AMICI E LE LORO CASE** (Cat. 6, 7)

Andrea, Bruno e Carlo sono tre amici che abitano nella stessa via: i primi due sullo stesso lato della strada, Carlo sull'altro lato.

- Su un lato della strada si trovano le case con i numeri pari, su quello opposto le case con i numeri dispari.
- La casa di Andrea ha il numero più alto: è maggiore di 50 e minore di 100.
- Il numero della casa di Andrea è il doppio del numero della casa di uno degli altri due amici ed è il triplo del numero della casa dell'altro.
- Tutte le cifre utilizzate per scrivere i tre numeri delle case sono diverse una dall'altra.

**Quali potrebbero essere i numeri delle case di Andrea, Bruno e Carlo?**

**Per ciascuno dei tre amici, scrivete il numero della casa in cui potrebbe abitare.**

**Mostrate come avete fatto a trovare la vostra risposta.**

**ANALISI A PRIORI****Compito matematico**

Trovare tre numeri proporzionali a 1, 2, 3, di cui il maggiore è compreso fra 50 e 100, due sono della stessa parità e tutte le cifre che li compongono sono diverse.

**Analisi del compito**

- Comprendere che, se si conosce il numero dell'abitazione di Andrea, si trovano i numeri delle abitazioni degli altri due amici dividendo questo numero una volta per 2 e una volta per 3.
- Cominciare con dei tentativi, scegliendo per l'abitazione di Andrea un numero compreso tra 50 e 100 e provare a dividerlo per 2 e per 3; rendersi conto che il numero di Andrea deve essere pari, cioè multiplo di 2, ma anche multiplo di 3 e quindi multiplo di 6.
- Capire che occorre procedere in modo sistematico a partire dai possibili numeri della casa di Andrea. Per esempio, scrivere nell'ordine tutti i numeri pari compresi tra 50 e 100, conservare poi solo quelli che sono anche multipli di 3 e per ciascuno di questi numeri scriverne la metà e la terza parte; oppure considerare subito i multipli di 6 e procedere come sopra. Ottenere così le terne seguenti:  
54 - 27 - 18; 60 - 30 - 20; 66 - 33 - 22; 72 - 36 - 24; 78 - 39 - 26; 84 - 42 - 28; 90 - 45 - 30; 96 - 48 - 32
- Tenere conto delle condizioni indicate nel testo ed eliminare così le terne che non vanno bene perché formate da tre numeri pari e/o che hanno almeno una cifra ripetuta. Constatare che rimangono solo due terne, 54-27-18 e 78-39-26 che soddisfano tutte le condizioni.
- Attribuire i numeri alle case dei tre amici in base alle due possibilità trovate, rispettando le condizioni indicate nel testo: n° 54 Andrea, n° 27 Carlo e n° 18 Bruno, oppure n° 78 Andrea, n° 39 Carlo e n° 26 Bruno.

**Attribuzione dei punteggi**

- 4 Risposta corretta: n°54 Andrea, n°27 Carlo, n°18 Bruno, oppure n°78 Andrea, n°39 Carlo, n°26 Bruno (o anche: Andrea può abitare al 54 o al 78; Carlo al 27 o al 39; Bruno al 18 o al 26) con descrizione corretta e completa della procedura (indicate le terne di numeri a partire dai numeri possibili per Andrea e motivate le eliminazioni che portano a selezionare le due terne finali)
- 3 Risposta corretta con descrizione incompleta della procedura o con sola verifica  
oppure individuate correttamente le due terne con descrizione chiara della procedura, ma scambiate tra loro le abitazioni di Carlo e Bruno oppure non indicati i nomi di Carlo e Bruno, ma solo i numeri civici accettabili  
oppure risposta corretta con descrizione corretta e completa della procedura, ma senza indicazione di chi abita in quale casa
- 2 Risposta corretta senza descrizione del procedimento o con sola verifica  
oppure indicate oltre alle due terne corrette anche una o due terne errate perché non è stata vista una cifra ripetuta o perché nella terna tutti i numeri sono pari (e quindi non si è tenuto conto della diversa parità dei numeri delle case sui due lati opposti della strada), ma con descrizione, pur incompleta, del procedimento seguito  
oppure una sola terna corretta, senza errori, con descrizione completa o incompleta della procedura
- 1 Inizio di ricerca corretto (per esempio, fatti dei tentativi che portano a trovare terne dividendo per 2 e per 3 il numero scelto per Andrea, ma non concluso il procedimento)  
oppure una sola terna indicata accompagnata o meno da una terna errata, senza descrizione della procedura

0 Incomprensione del problema

**Livello:** 6, 7

**Origine:** Siena

## 11. I PREZZI DELLE PENNE (Cat. 6, 7, 8)

Andrea compra una penna e paga con una moneta da 2 euro. La cassiera gli dà come resto due monete diverse fra loro.

Beatrice compra tre penne allo stesso prezzo di quella di Andrea e paga con una banconota da 5 euro. La cassiera le dà come resto due monete diverse fra loro e diverse da quelle che ha reso ad Andrea.

**Qual è il prezzo di una penna e quali monete hanno ricevuto come resto Andrea e Beatrice?**

**Mostrate come avete trovato la vostra risposta.**

### ANALISI A PRIORI

#### Compito matematico

Determinare il prezzo di un oggetto sapendo che, pagandolo con una moneta da 2 euro, il resto è costituito da due monete diverse fra loro e che, pagando con una banconota da 5 euro tre oggetti del medesimo prezzo, il resto è costituito da due monete diverse fra loro e diverse da quelle del resto precedente.

#### Analisi del compito

- Capire che il prezzo di una penna è minore di 2 euro e che il suo triplo deve essere minore di 5 euro.
- Capire che sia Andrea che Beatrice ricevono come resto del rispettivo pagamento due monete diverse fra loro e che le monete ricevute da Beatrice sono diverse da quelle ricevute da Andrea.
- Fare l'inventario dei valori delle monete: 2 €, 1 €, 50 c, 20 c, 10 c, 5 c, 2 c, 1 c.

Ci sono diversi modi per restringere l'intervallo dei valori possibili per il prezzo di una penna.

- Ad esempio, capire che il prezzo massimo che può avere la penna è 1,66 euro ( $1,66 \times 3 = 4,98$  mentre  $1,67 \times 3 = 5,01$ ), ma scartare questo valore poiché Andrea avrebbe come resto più di due monete. Capire che neppure 1,65, 1,64, 1,63, 1,62, 1,61 vanno bene per lo stesso motivo, mentre 1,60 non va bene perché Andrea avrebbe come resto due monete uguali (20 centesimi). Esaminare così tutti i possibili prezzi di una penna (quasi tutti vengono scartati subito senza considerarne il triplo poiché hanno come resto più di due monete) fino ad arrivare ad 1,30 euro che ha come resto una moneta da 20 centesimi e una da 50 centesimi e il cui triplo (3,90) ha come resto una moneta da 10 centesimi e una da 1 euro.
- Concludere che 1,30 euro (oppure 130 centesimi) è il prezzo di una penna.

Oppure

Procedere per tentativi più o meno organizzati scartando tutti i prezzi che danno come primo resto più di due monete o determinando i possibili prezzi sulla base di due monete scelte per il resto di Andrea.

Oppure

- Partire dai possibili resti e trovare le possibilità di Andrea:

Monete di resto	Costo della penna	Monete di resto	Costo della penna
1 € e 50 c	0,50 € (2 – 1,50)	<b>50 c e 20 c</b>	<b>1,30 € (2 – 0,70)</b>
1 € e 20 c	0,80 € (2 – 1,20)	50 c e 10 c	1,40 € (2 – 0,60)
1 € e 10 c	0,90 € (2 – 1,10)	20 c e 10 c	1,70 € (2 – 0,30)

- Ripetere il procedimento per Beatrice e scoprire che l'unica possibilità che permette la divisione per tre è avere come resto **1 € e 10 c** che corrispondono al prezzo per ogni penna di 1,30 €:  $(5 - 1,10) \div 3 = 1,30$ . Prezzo che corrisponde a 50 c e 20 c di resto per Andrea. Verificare quindi che le monete di resto di Beatrice siano diverse da quelle di Andrea e concludere che il prezzo di ogni penna può essere solo 1,30 € o 130 centesimi.

#### Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (1,30 euro o 130 centesimi) precisando le monete ottenute come resto da Andrea e Beatrice (20c e 50c per il prezzo di una penna; 1 € e 10 c per il prezzo di tre penne) con spiegazione chiara e completa della procedura seguita (tentativi organizzati, con verifica delle condizioni o esplicitati tutti i possibili prezzi o tutti i possibili resti di Andrea, oppure tentativi non organizzati esplicitati e con motivazione delle scelte effettuate)
- 3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara o incompleta (dimenticanza da uno a cinque casi in una procedura organizzata oppure esplicitati solo dei tentativi non organizzati senza motivazione delle scelte effettuate) oppure risposta corretta con la sola verifica delle condizioni
- 2 Risposta corretta accompagnata dalla seguente spiegazione "ho verificato tutti i casi possibili" oppure risposta corretta senza spiegazione né nessuna verifica delle condizioni oppure risposta errata a causa di un errore di calcolo, ma con almeno cinque tentativi effettuati
- 1 Inizio di ragionamento corretto: tentativi con verifica delle condizioni senza arrivare ad esplicitare alcuna risposta

0 Incomprensione del problema

**Livello:** 6, 7, 8

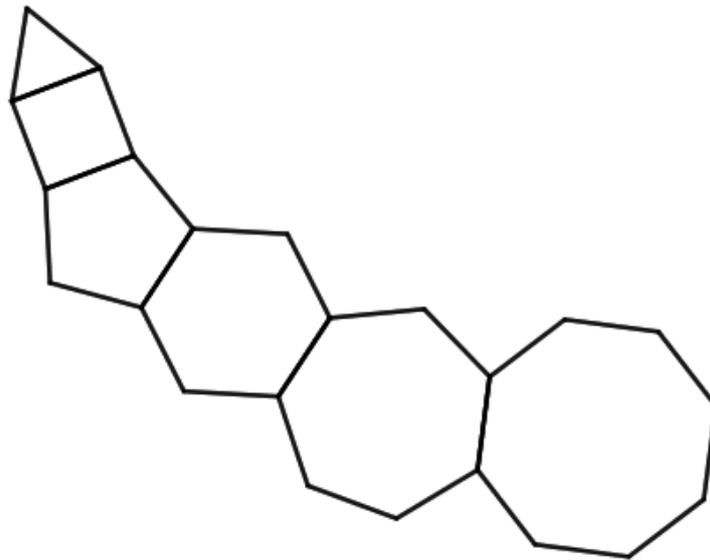
**Origine:** Bourg en Bresse

**12. CATENA DI POLIGONI** (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Una "catena" di poligoni regolari è costruita in questo modo:

- si disegnano tre segmenti che formano un triangolo equilatero;
- a partire da un lato del triangolo si disegnano i segmenti mancanti per formare un quadrato;
- a partire da un lato del quadrato si disegnano i segmenti mancanti per formare un pentagono regolare;
- si continua così allo stesso modo, disegnando ogni volta i segmenti mancanti per formare un poligono regolare con un lato in più del precedente.

La figura mostra i primi elementi della catena: si vedono un triangolo equilatero, un quadrato, un pentagono, un esagono, un ettagono ed un ottagono, ma la catena continua.



**Quanti lati avrà il poligono al quale appartiene il 2020-esimo segmento disegnato in questa catena di poligoni?**

**Mostrate come avete trovato la vostra risposta.**

**ANALISI A PRIORI****Compito matematico**

Trovare il numero successivo dell'ultimo termine della successione dei primi numeri naturali la cui somma non supera 2020, nel contesto di una catena di poligoni di 3, 4, 5, 6 .... lati.

**Analisi del compito**

- Comprendere come si costruisce la catena e le caratteristiche dei poligoni che la compongono: ognuno ha un lato in più rispetto al precedente a partire da 3; 4; 5; 6; ...
- Un primo modo di appropriarsi del problema è contare tutti i segmenti che ci sono nella figura: in tutto sono 28.
- Osservare che costruendo il settimo poligono, con 9 lati, si aggiungono ai 28 altri 8 segmenti ( $28 + 8 = 36$ ) e così via si aggiunge ogni volta il numero successivo di quello appena aggiunto che corrisponde al poligono che ha un lato in più del numero aggiunto:  $36 + 9 = 45$  (poligono con 10 lati),  $45 + 10 = 55$  (poligono con 11 lati) e così via fino ad arrivare a  $1891 + 62 = 1953$  (poligono con 63 lati),  $1953 + 63 = 2016$  (poligono con 64 lati) e rendersi conto che i quattro segmenti mancanti al 2020 appartengono al poligono con 65 lati.  
(Questa procedura sembra lunga e noiosa, occorrono una sessantina di addizioni e un controllo rigoroso che tuttavia richiede solo pochi minuti con una calcolatrice.)

Oppure

Organizzare i dati precedenti in una tabella, ad esempio:

n° lati poligono	3	4	5	6	...	n
n° nuovi. segmenti		3	4	5	...	n - 1
n° tot. segmenti $S_n$	3	3+3	3+3+4	3+3+4+5	...	3+3+...+(n - 1)

Osservare che se a 3 si sostituisce  $1+2$ , la somma che si deve calcolare è:  $1+2+3+4+5+\dots+(n-1)$ .

Se è nota la formula che dà la somma dei primi  $n$  numeri naturali:  $S_n = [n(n+1)]/2$  la procedura è più veloce della precedente, infatti alcuni tentativi sui valori di  $n$  consentono di scoprire che per  $n = 64$  (poligono con 64 lati) la somma  $1+2+3+\dots+63$  è 2016 ( $= 63 \times 64/2$ ). Dedurre quindi che il 2020° segmento appartiene al poligono di 65 lati.

#### Attribuzione dei punteggi

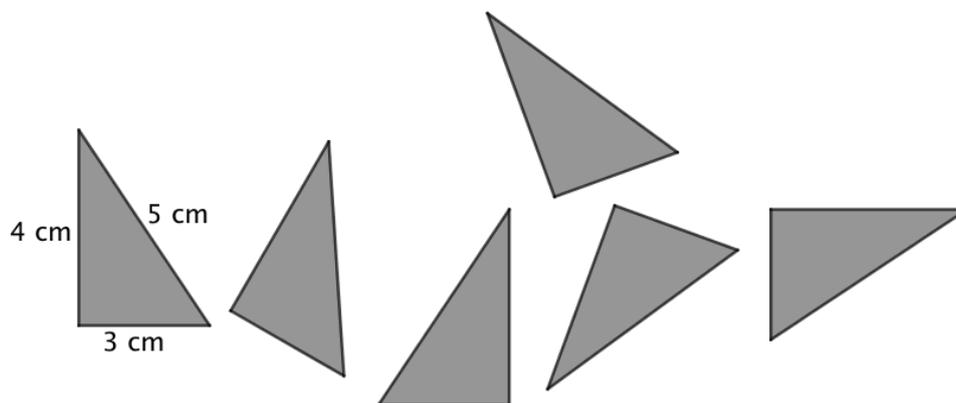
- 4 Risposta corretta (65 lati) con spiegazione chiara e completa del procedimento (formulazione corretta delle relazioni tra il numero dei lati della figura, la somma dei numeri dei segmenti ed esplicitazione dei calcoli)
- 3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara o incompleta (es. somma o calcoli non ben esplicitati)  
oppure procedura corretta e ben spiegata, ma un errore di calcolo o non considerati i tre segmenti del triangolo  
oppure ricerca passo a passo, corretti i primi (dai dieci ai quindici) elementi, ma con un errore che porta alla risposta 64 o 66
- 2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione  
oppure risposta errata o non data, ma descritte correttamente le relazioni tra il numero dei lati della figura e il numero totale dei segmenti
- 1 Inizio di ragionamento corretto con calcolo della somma di almeno i primi venti o trenta poligoni
- 0 Incomprensione del problema

**Livello:** 6, 7, 8, 9, 10

**Origine:** Siena

**13. PUZZLE DI TRIANGOLI (II)** (Cat. 7, 8)

Andrea ha a disposizione questi sei triangoli uguali, i cui lati misurano 3 cm, 4 cm e 5 cm.



Accostando i sei triangoli, Andrea forma delle figure e vuole che:

- i triangoli non si sovrappongano;
- i triangoli siano uniti lungo lati della stessa lunghezza;
- nessuna figura abbia un buco.

Ecco alcuni dei tentativi di Andrea:

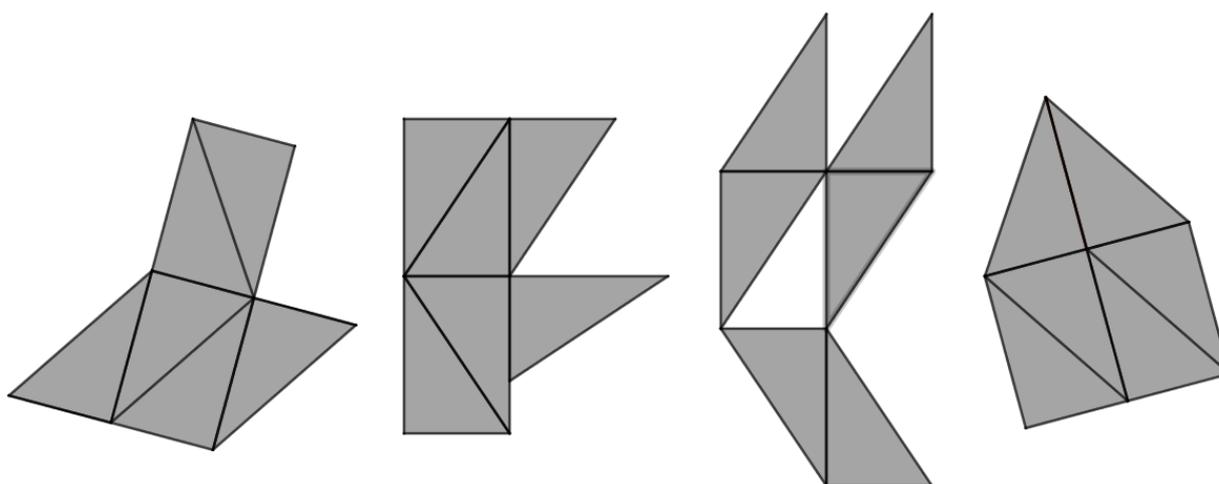


Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

Le figure 1 e 4 sono corrette, la figura 2 non è corretta perché ci sono due triangoli che si toccano su due lati che non hanno la stessa lunghezza, la figura 3 non è corretta perché ha un buco.

**Fra tutte le figure che Andrea può costruire con questi sei triangoli seguendo le regole che ha fissato, disegnatene una il cui perimetro sia il più lungo possibile.**

**Scrivete quanto misura il suo perimetro e mostrate i calcoli che avete fatto.**

**ANALISI A PRIORI****Compito matematico**

Cercare fra i poligoni ottenuti accostando lungo lati della stessa lunghezza sei triangoli rettangoli uguali (con i lati di misura 3; 4; 5 in cm), un poligono il cui perimetro sia massimo.

**Analisi del compito**

- Osservare gli esempi per appropriarsi delle regole di costruzione dei poligoni.
- Procedere per tentativi: dopo aver costruito un poligono e calcolato il suo perimetro, cercare di costruirne uno che abbia il perimetro maggiore e continuare così cercando poligoni con il perimetro sempre più grande.

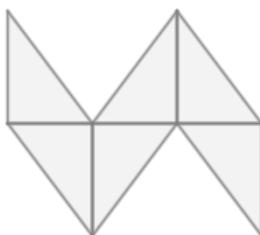
Oppure

- Rendersi conto che per avere il perimetro massimo occorre avere sul contorno il maggior numero possibile di lati dei triangoli e capire che il perimetro sarà maggiore se questi sono i lati più lunghi dei triangoli.
- Qualunque figura si formi i lati in comune sono sempre cinque e dunque, poiché i lati dei triangoli sono in tutto 18 e cinque i lati in comune, rimane un contorno formato da  $18 - (2 \times 5) = 8$  lati, di cui sei possono essere ipotenuse e due i cateti maggiori, dunque il perimetro più grande è  $6 \times 5 + 2 \times 4 = 38$  cm.
- Cercare poi di disegnare un poligono con questo perimetro.

Oppure

Ragionare fin da subito sul perimetro, la somma dei perimetri di tutti triangoli è  $12 \times 6 = 72$ , se si uniscono due triangoli fra loro, i due lati coincidenti non fanno parte del contorno e quindi le loro misure non concorrono nel calcolo del perimetro. Se si uniscono i triangoli a due a due, il primo e l'ultimo possono avere sul contorno l'ipotenusa e il cateto maggiore, quindi due cateti minori in comune con i triangoli adiacenti, mentre gli altri due triangoli hanno necessariamente in comune con i precedenti il cateto maggiore e fra loro quello minore. In definitiva il perimetro massimo è  $72 - (2 \times 2 \times 3 + 2 \times 2 \times 4 + 2 \times 3) = 38$ . Cercare poi di disegnare un poligono con tale perimetro.

Ecco un esempio:



#### Attribuzione dei punteggi

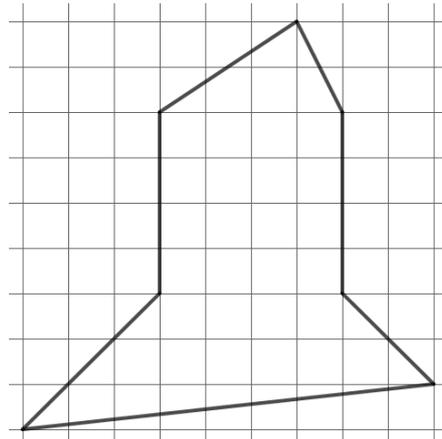
- 4 Disegno corretto di una figura di 38 cm di perimetro con indicazione e calcolo del perimetro
- 3 Disegno corretto di una figura di 38 cm di perimetro con indicazione del perimetro, ma senza calcolo oppure disegno corretto di una figura di 36 cm di perimetro con indicazione e calcolo del perimetro
- 2 Disegno corretto di una figura di 38 cm di perimetro senza indicazione né calcolo del perimetro oppure disegno corretto di una figura di 38 cm di perimetro ma con errore di calcolo nel perimetro oppure disegno corretto di una figura di 36 cm di perimetro con indicazione del perimetro, ma senza calcolo oppure disegno corretto di una figura di 34 cm di perimetro con indicazione e calcolo del perimetro
- 1 Disegno corretto di una figura di 34 cm di perimetro con indicazione del perimetro, ma senza calcolo oppure inizio di ricerca coerente (disegno di più figure che rispettano le condizioni, ma senza concludere)
- 0 Incomprensione del problema (disegno di poligoni che non rispettano le condizioni)

**Livello:** 7, 8

**Origine:** Parma

**14. TRIANGOLI IN UN POLIGONO (II)** (Cat. 7, 8)

Ci sono molti modi diversi di suddividere questa figura in quattro triangoli.



**Trovate otto modi diversi di suddividere la figura in quattro triangoli. Disegnateli sulle figure del foglio allegato.**

**ANALISI A PRIORI****Compito matematico**

Trovare, in un ettangolo concavo disegnato su una griglia quadrettata, otto diverse scomposizioni in quattro triangoli.

**Analisi del compito**

- Capire che per far apparire i triangoli, è necessario collegare i vertici dell'ettangolo o prolungare dei lati a scelta fra [GA], [EF], [DE] o [BA].
- Osservare che G, A e D sono allineati come pure B, E e F, dunque prolungando [GA] e prolungando [EF] si ottengono suddivisioni analoghe a quelle che si ottengono tracciando rispettivamente [AD] e [BE]

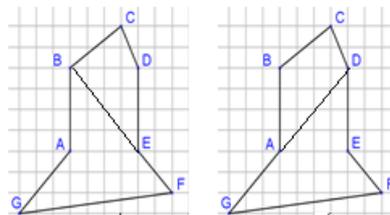
Ricerca per tentativi non organizzati e aggiustamenti:

- Tracciare dei segmenti collegando dei vertici o prolungando dei lati dell'ettangolo e scegliere quelli che permettono di ottenere quattro triangoli interni alla figura.
- Fatti più tentativi, confrontarli ed eliminare i doppi.

Oppure

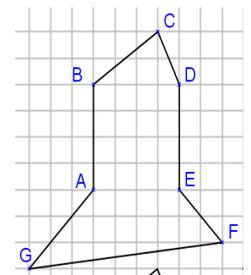
Ricerca organizzata:

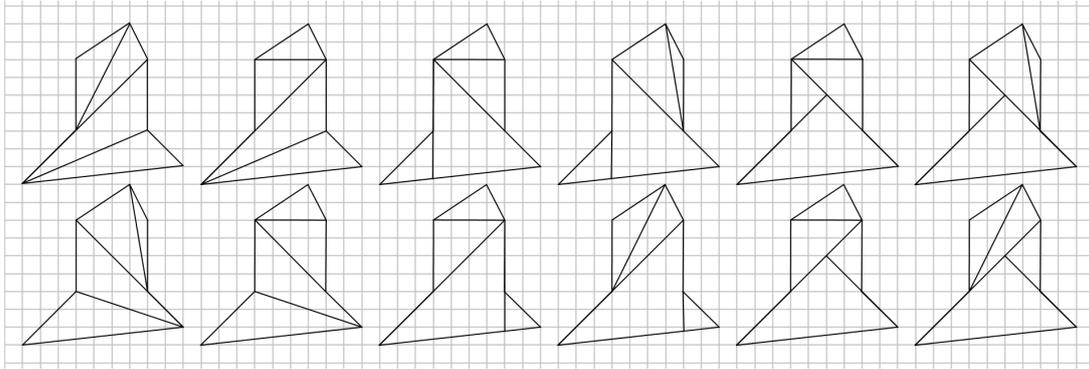
- Intuire che è più semplice suddividere un quadrilatero in triangoli, piuttosto che suddividere direttamente la figura data.
- Cercare tutti i modi di suddividere la figura in quadrilateri (ce ne sono due)



- Per ognuno dei due casi:
  - suddividere ogni quadrilatero in due triangoli
  - cercare diverse combinazioni di suddivisione dei due quadrilateri per ottenere otto suddivisioni della figura data.

Nella figura qui sotto sono mostrate tutte le dodici suddivisioni possibili del poligono.

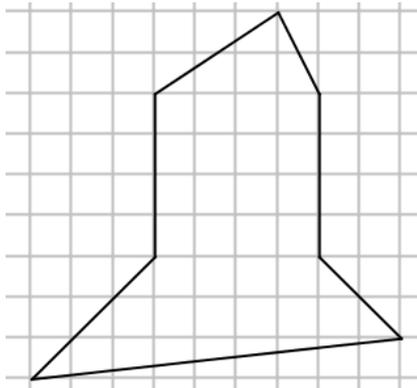


**Attribuzione dei punteggi**

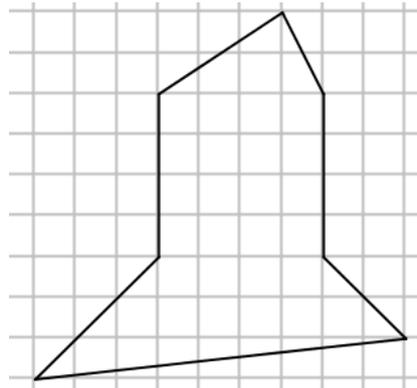
- 4 8 suddivisioni corrette diverse fra loro
- 3 7 suddivisioni corrette diverse fra loro con eventualmente un doppione o una suddivisione errata oppure 6 suddivisioni corrette diverse fra loro con eventualmente doppioni, ma senza errore
- 2 6 suddivisioni corrette diverse fra loro con un o due errori ed eventualmente un doppione oppure 5 o 4 suddivisioni corrette diverse fra loro con al più un errore ed eventualmente doppioni
- 1 5 o 4 suddivisioni corrette diverse fra loro con due o più errori ed eventualmente doppioni oppure da 1 a 3 suddivisioni corrette diverse fra loro con eventualmente doppioni o errori
- 0 Incomprensione del problema: nessuna suddivisione corretta

**Livello:** 7, 8**Origine:** Lyon

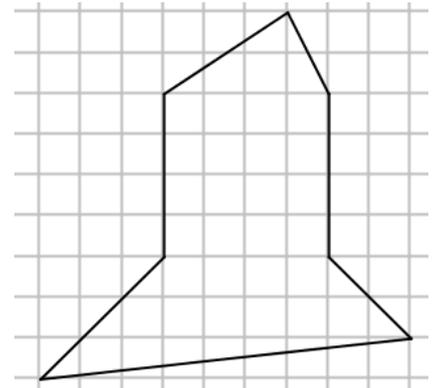
**Problema 14 - Foglio risposte**



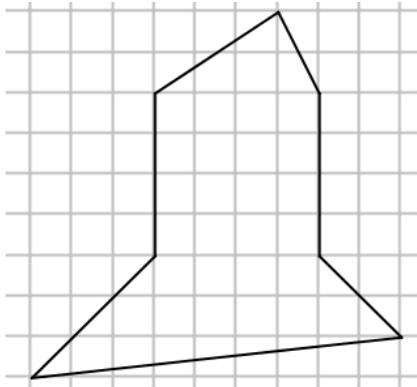
Suddivisione 1



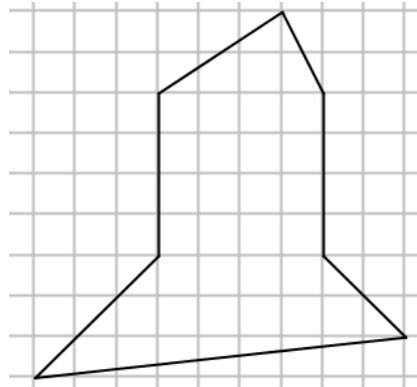
Suddivisione 2



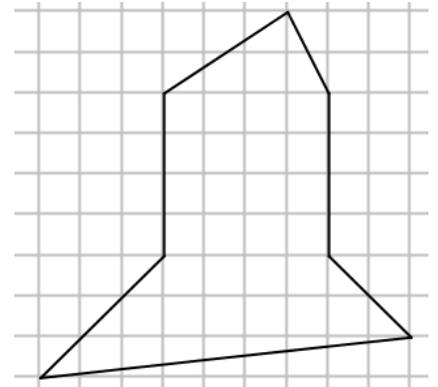
Suddivisione 3



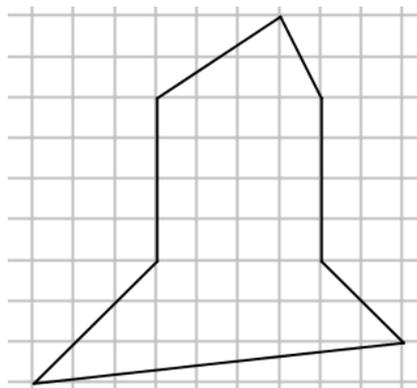
Suddivisione 4



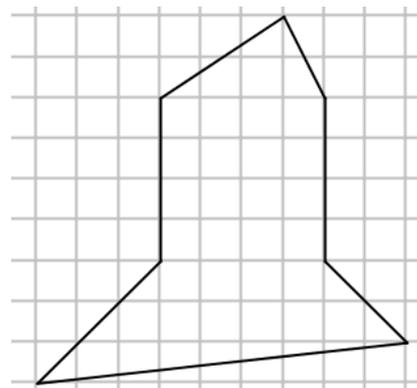
Suddivisione 5



Suddivisione 6



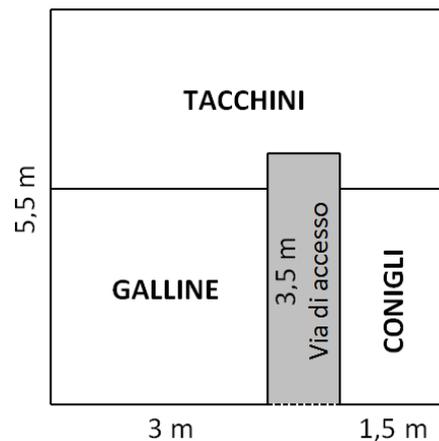
Suddivisione 7



Suddivisione 8

## 15. IL GIARDINO DEGLI ANIMALI (Cat. 8, 9, 10)

Carlo ha costruito per i suoi animali un recinto di forma quadrata come mostrato in figura.



Ha diviso la superficie interna del recinto in quattro zone:

- una zona di forma quadrata per le galline;
- una zona di forma rettangolare per i conigli;
- una zona per i tacchini;
- una via di accesso alle tre zone che ha una lunghezza di 3,5 m.

Carlo si rende conto che la via di accesso è un po' stretta e decide quindi di ingrandire tutto il recinto. Nel nuovo recinto la via di accesso misura 1,80 m di larghezza e le dimensioni di ciascuna zona sono state aumentate secondo le medesime proporzioni.

**Qual è l'area della nuova zona a disposizione dei tacchini?**

**Spiegate come avete trovato la vostra risposta.**

### ANALISI A PRIORI

#### Compito matematico

Trovare l'area di una figura ingrandita a partire dalle dimensioni indicate sulla figura d'origine, considerando che il rapporto d'ingrandimento viene determinato dalla modifica di una delle dimensioni dell'ingrandimento.

#### Analisi del compito

- Comprendere che il nuovo recinto è un ingrandimento di quello rappresentato sul disegno: il recinto e ciascuna zona avranno la stessa forma ma non le stesse dimensioni.
- Comprendere che le uniche informazioni numeriche disponibili sull'ingrandimento sono la nuova larghezza del percorso di accesso (1,80 m) e la sua larghezza iniziale che può essere determinata a partire dagli altri dati.
- Saper interpretare la frase "le dimensioni di ciascuna zona sono state aumentate secondo le medesime proporzioni": il rapporto tra le dimensioni corrispondenti è costante o tutte le dimensioni vengono moltiplicate per lo stesso numero.
- Determinare il coefficiente di ingrandimento o il rapporto costante (1,8) a partire dalla larghezza iniziale e dalla nuova larghezza della zona di accesso. (È anche possibile osservare che ogni dimensione deve essere aumentata dell'80%).
- Comprendere che tutte le dimensioni iniziali delle quattro zone possono essere determinate dalle informazioni mostrate sul disegno.
- Considerare l'area riservata ai tacchini come unione di un rettangolo grande e due rettangoli piccoli o come un rettangolo al quale è stato tolto un rettangolo piccolo. Determinare le dimensioni iniziali di questa figura ( $2\text{ m} \times 5,5\text{ m} + 0,5\text{ m} \times 3\text{ m} + 0,5\text{ m} \times 1,5\text{ m}$  oppure  $2,5\text{ m} \times 5,5\text{ m} - 1\text{ m} \times 0,5\text{ m}$ ). Utilizzare le proporzioni o il coefficiente d'ingrandimento per calcolare le dimensioni della figura ingrandita ( $3,6\text{ m} \times 9,9\text{ m} + 0,9\text{ m} \times 5,4\text{ m} + 0,9\text{ m} \times 2,7\text{ m}$  oppure  $4,5\text{ m} \times 9,9\text{ m} - 1,8\text{ m} \times 0,9\text{ m}$ ). Calcolare la misura dell'area della figura ingrandita:  $42,93\text{ m}^2$  ( $35,64\text{ m}^2 + 4,86\text{ m}^2 + 2,43\text{ m}^2$  oppure  $44,55\text{ m}^2 - 1,62\text{ m}^2$ ).

Oppure

Considerare l'area della zona riservata ai tacchini come la differenza tra l'area del recinto e la somma delle aree delle altre tre zone che sono un quadrato e due rettangoli. Determinare la larghezza iniziale dell'accesso, essendo note le altre dimensioni. Calcolare le dimensioni del recinto e di queste zone ingrandite ( $9,9\text{ m} \times 9,9\text{ m}$ ;  $5,4\text{ m} \times 5,4\text{ m}$ ;  $1,8\text{ m} \times 6,3\text{ m}$ ;

2,7 m × 5,4 m) e le loro aree (98,01 m<sup>2</sup>, 29,16 m<sup>2</sup>, 11,34 m<sup>2</sup>, 14,58 m<sup>2</sup>). Dedurre l'area della zona riservata ai tacchini 42,93 m<sup>2</sup> [98,01 m<sup>2</sup> - (29,16 m<sup>2</sup> + 11,34 m<sup>2</sup> + 14,58 m<sup>2</sup>)].

Oppure

Dopo aver determinato l'area della zona riservata ai tacchini nel recinto iniziale: 13,25 m<sup>2</sup> [11 m<sup>2</sup> + 1,5 m<sup>2</sup> + 0,75 m<sup>2</sup> o 13,75 m<sup>2</sup> - 0,5 m<sup>2</sup> o 30,25 m<sup>2</sup> - (9 m<sup>2</sup> + 3,5 m<sup>2</sup> + 4,5 m<sup>2</sup>)], applicare la proprietà "in un ingrandimento, se le dimensioni vengono moltiplicate per  $k$ , le aree vengono moltiplicate per  $k^2$ ". L'area della zona riservata ai tacchini nel recinto ingrandito è di 42,93 m<sup>2</sup> (13,25 m<sup>2</sup> × 1,8<sup>2</sup>).

#### Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (42,93 m<sup>2</sup>) con determinazione delle dimensioni, calcolo delle aree ed esplicitazione della proporzionalità delle dimensioni o della proprietà relativa al rapporto delle aree in un ingrandimento
- 3 Risposta corretta con spiegazioni parziali o poco chiare (quali la presenza di calcoli, ma proprietà dell'ingrandimento utilizzata e non esplicitata o proprietà esplicitata, ma assenza di alcuni calcoli)
- 2 Risposta corretta senza spiegazione o giustificazione  
oppure calcoli corretti di tutte le dimensioni utili per il calcolo dell'area riservata ai tacchini nel recinto ingrandito (con presenza o assenza di calcoli di aree, esatti o errati)  
oppure risposta errata conseguente a uno o più errori di calcolo, ma ragionamento corretto e ben spiegato
- 1 Inizio di una ricerca coerente (ad esempio: uso della proporzionalità per determinare almeno tre delle dimensioni sull'ingrandimento)
- 0 Incomprensione del problema

**Livello:** 8, 9, 10

**Origine:** Puglia

## 16. PANNELLO DECORATIVO (Cat. 8, 9, 10)

Aurora ha trovato degli scampoli di carta da parati di forma rettangolare che le piacciono e che hanno misure particolari: 3 m e 1 m per il più grande; poi 1,5 m e 1 m; poi 1,5 m e 0,5 m; poi 0,75 m e 0,5 m; ... e così via con la stessa regolarità.

Decide di usarli per ricoprire un pannello rettangolare di lati 3 m e 2 m da sistemare su una parete del suo ristorante.

Aurora utilizza un solo pezzo per ogni tipo di misura. Incolla gli scampoli sul pannello senza sovrapporli e senza lasciare spazi vuoti.

**Quanti pezzi Aurora avrà incollato sul pannello rettangolare quando le resterà meno di 1 cm<sup>2</sup> da ricoprire?**

**Spiegate come avete trovato la vostra risposta.**

### ANALISI A PRIORI

#### Compito matematico

In una progressione geometrica di ragione  $1/2$  a partire da 60 000, determinare il primo dei termini minore di 1, in un contesto geometrico relativo a una successione di rettangoli per i quali l'area di ognuno di essi è la metà di quella del precedente.

#### Analisi del compito

- Capire con quale regolarità si susseguono le dimensioni degli scampoli (rettangoli) da sistemare sul pannello rettangolare: da un rettangolo al successivo, alternativamente, una dimensione è inalterata mentre l'altra è metà della precedente (a partire dal primo scampolo la cui lunghezza è uguale a quella del pannello e la larghezza è la metà di quella del pannello).
- Eventualmente si può rappresentare la situazione mentalmente e/o con un disegno, sistemando i primi scampoli sul pannello:



- Capire che il primo scampolo ricopre una metà del pannello, e passando alla rappresentazione in frazione, è  $\frac{1}{2}$  del pannello, come la parte ancora da ricoprire. Capire poi che il secondo scampolo è la metà del primo e così via
- Capire che ogni scampolo aggiunto è metà del precedente e che è uguale alla parte ancora da ricoprire. Capire che il ricoprimento si ferma quando la parte rimanente da ricoprire avrà un'area minore di 1 cm<sup>2</sup>
- Capire che per effettuare i calcoli, è opportuno dapprima trasformare i 6 m<sup>2</sup> della superficie del pannello in cm<sup>2</sup>, trovando 60 000 cm<sup>2</sup>
- Ragionare sulle parti da ricoprire: a partire da 30 000 (che corrisponde al primo scampolo), dimezzare progressivamente fino ad arrivare a un numero inferiore a 1, che corrisponde al sedicesimo scampolo.

Oppure

Ragionare sulla parte già ricoperta e sommare con la calcolatrice le aree degli scampoli progressivamente aggiunti, a partire dal primo, di area 30000 cm<sup>2</sup>: 30000 + 15000 + 7500 + 3750 + 1875 + 937,5 + 468,75, ...; capire che mancherà meno di 1 cm<sup>2</sup> quando la somma supererà il valore 59999 e che il numero di scampoli è il numero di addendi della somma. Con il sedicesimo termine (0,915527344) si ha :

$$30000 + 15000 + 7500 + 3750 + 1875 + 937,5 + 468,75 + \dots + 1,831054688 + 0,915527344 = 59999,08447$$

Quindi Aurora ha bisogno di 16 scampoli per avere meno di 1 cm<sup>2</sup> da ricoprire.

#### Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (Aurora ha bisogno di 16 scampoli) con spiegazione chiara e completa (per esempio con applicazione della procedura di dimezzamento successivo: 60 000, 30 000, 15 000 fino a 0,915 ... o per somme successive di aree come nell'esempio sopra)
- 3 Risposta corretta con spiegazione lacunosa (senza il dettaglio delle aree successive approssimate a 1 o a 60 000), ma dalla quale si capisca il ragionamento  
oppure risposta "Aurora ha bisogno di 15 o 17 scampoli" dovuta ad un errore di conteggio degli scampoli, ma con spiegazione chiara
- 2 Risposta corretta senza spiegazione  
oppure ragionamento ben spiegato a partire da un disegno o da una successione di calcoli, ma che non porta ad una risposta

o risposta coerente ma errata dovuta ad esempio a un errore nella trasformazione da  $m^2$  a  $cm^2$

- 1 Inizio di ricerca corretto (per esempio, bozza di un disegno oppure alcuni termini della progressione o almeno quattro valori trovati con la calcolatrice ...)
- 0 Incomprensione del problema

**Livello:** 8, 9, 10

**Origine:** Gruppo di lavoro “Zero alla Zero” (G0A0)

**17. DECIMALI COLORATI** (Cat. 8, 9, 10)

Ogni volta che deve effettuare una divisione a Nicola viene l'orticaria.

Decide allora di costruire, con un programma del suo calcolatore, una tabella in cui, in ogni casella, viene messo il quoziente fra il numero scritto in alto nella relativa colonna (nelle caselle grigie) e il numero scritto a sinistra nella relativa riga (nelle caselle grigie).

Poi, poiché alcuni numeri che verrebbero scritti nelle caselle sarebbero troppo lunghi e occuperebbero troppo posto, Nicola chiede al programma di scrivere solo le prime due cifre decimali di ciascun quoziente, sapendo che alcuni di essi sono esatti e altri sono delle approssimazioni.

Ecco cosa ottiene per le prime 26 righe e le prime 12 colonne della sua tabella:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,0	11,00	12,00
2	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00
3	0,33	0,67	1,00	1,33	1,67	2,00	2,33	2,67	3,00	3,33	3,67	4,00
4	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
5	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20	2,40
6	0,17	0,33	0,50	0,67	0,83	1,00	1,17	1,33	1,50	1,67	1,83	2,00
7	0,14	0,29	0,43	0,57	0,71	0,86	1,00	1,14	1,29	1,43	1,57	1,71
8	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,13	1,25	1,38	1,50
9	0,11	0,22	0,33	0,44	0,56	0,67	0,78	0,89	1,00	1,11	1,22	1,33
10	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
11	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	0,55	0,64	0,73	0,82	0,91	1,00	1,09
12	0,08	0,17	0,25	0,33	0,42	0,50	0,58	0,67	0,75	0,83	0,92	1,00
13	0,08	0,15	0,23	0,31	0,38	0,46	0,54	0,62	0,69	0,77	0,85	0,92
14	0,07	0,14	0,21	0,29	0,36	0,43	0,50	0,57	0,64	0,71	0,79	0,86
15	0,07	0,13	0,20	0,27	0,33	0,40	0,47	0,53	0,60	0,67	0,73	0,80
16	0,06	0,13	0,19	0,25	0,31	0,38	0,44	0,50	0,56	0,63	0,69	0,75
17	0,06	0,12	0,18	0,24	0,29	0,35	0,41	0,47	0,53	0,59	0,65	0,71
18	0,06	0,11	0,17	0,22	0,28	0,33	0,39	0,44	0,50	0,56	0,61	0,67
19	0,05	0,11	0,16	0,21	0,26	0,32	0,37	0,42	0,47	0,53	0,58	0,63
20	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
21	0,05	0,10	0,14	0,19	0,24	0,29	0,33	0,38	0,43	0,48	0,52	0,57
22	0,05	0,09	0,14	0,18	0,23	0,27	0,32	0,36	0,41	0,45	0,50	0,55
23	0,04	0,09	0,13	0,17	0,22	0,26	0,30	0,35	0,39	0,43	0,48	0,52
24	0,04	0,08	0,13	0,17	0,21	0,25	0,29	0,33	0,38	0,42	0,46	0,50
25	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40	0,44	0,48
26	0,04	0,08	0,12	0,15	0,19	0,23	0,27	0,31	0,35	0,38	0,42	0,46

Per distinguere i quozienti esatti da quelli approssimati, Nicola decide di colorare le caselle:

- in rosso tutti i quozienti esatti scritti con due cifre dopo la virgola (per esempio la settima casella della quinta riga poiché il quoziente di  $7:5 = 1,40$  è esatto)
- in blu tutti gli altri quozienti che sarebbero esatti se avesse chiesto al suo programma di scriverli con tre cifre dopo la virgola, (per esempio la sesta casella della sedicesima riga poiché il quoziente  $6:16 = 0,375$  è esatto mentre  $0,38$  è solo un'approssimazione)

- in verde tutti gli altri quozienti che sarebbero esatti se avesse chiesto al suo programma di scriverli con più di tre cifre dopo la virgola
- in giallo tutti gli altri quozienti che il programma non potrebbe mai scrivere in quanto avrebbero un'infinità di cifre dopo la virgola.

Colorando la sua tabella Nicola osserva molte regolarità.

**Quante caselle di ciascun colore ci saranno nella tabella qui disegnata quando Nicola avrà colorato tutte le sue caselle?**

#### ANALISI A PRIORI

##### Compito matematico

Nella tabella di divisione  $N \times N$ , dove i quozienti sono scritti con due cifre decimali, riconoscere i quozienti esatti, quelli che sarebbero esatti se fossero scritti con tre cifre decimali, quelli che sarebbero esatti se fossero scritti con più di tre cifre decimali e quelli che non sono numeri decimali limitati.

##### Analisi del compito

- Osservare la tabella e il modo uniforme con il quale il programma indica i risultati delle divisioni (sempre con due cifre dopo la virgola, anche se non è necessario) e constatare che il compito consiste nel distinguere i quozienti esatti da quelli approssimati.
- Scoprire le numerose regolarità e metterle in relazione con l'operazione di divisione. Per esempio i quozienti della prima riga sono i risultati di divisioni per 1, dunque numeri naturali, quelli della seconda riga sono alternativamente naturali o terminano con 5 come prima cifra dopo la virgola, quelli della terza riga sono numeri naturali ( $3/3$ ,  $6/3$ ,  $9/3$ ,  $12/3$ ) o numeri con infinite cifre decimali (periodici) ..., quelli della sedicesima riga sono numeri decimali limitati ( $4/16$ ,  $8/16$  e  $12/16$ ), numeri con tre cifre decimali ( $2/16$ ,  $6/16$  e  $10/16$ ) e numeri con quattro cifre decimali ( $1/16$ ,  $3/16$ ,  $5/16$ ,  $7/16$ ,  $9/16$ ,  $10/16$  e  $11/16$ ), ...
- Si possono riconoscere come decimali non limitati i numeri periodici che corrispondono a frazioni i cui denominatori, dopo la semplificazione, contengono almeno un fattore diverso da 2 e 5 (ad esempio  $5/24$ , ma non  $6/24$  che si semplifica in  $1/4$ ).
- Un modo efficace di organizzare il calcolo è quello di lavorare riga per riga:

righe	rosso (D2)	blu (D3)	verde (D>3)	giallo (D periodici)
1, 2, 4, 5, 10, 20, 25	$7 \times 12$	0	0	0
3 e 6	$2 \times 4$	0	0	$2 \times 8$
7, 9, 11	$3 \times 1$	0	0	$3 \times 11$
8	6	6	0	0
12, 15	$2 \times 4$	0	0	$2 \times 8$
13, 17, 19, 21, 23, 26	0	0	0	$6 \times 12$
14, 18, 22	$3 \times 1$	0	0	$3 \times 11$
16	3	3	6	0
24	2	2	0	8
<b>totale</b>	<b>117</b>	<b>11</b>	<b>6</b>	<b>178</b>

Ci sono pertanto 178 caselle colorate in giallo (numeri decimali illimitati), poi 117 caselle in rosso, 11 caselle in blu e, infine, solo 6 caselle in verde (decimali con più di tre cifre decimali, in particolare quattro):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00	11,00	12,00
2	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00
3	0,33	0,67	1,00	1,33	1,67	2,00	2,33	2,67	3,00	3,33	3,67	4,00
4	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
5	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00	2,20	2,40
6	0,17	0,33	0,50	0,67	0,83	1,00	1,17	1,33	1,50	1,67	1,83	2,00
7	0,14	0,29	0,43	0,57	0,71	0,86	1,00	1,14	1,29	1,43	1,57	1,71
8	0,13	0,25	0,38	0,50	0,63	0,75	0,88	1,00	1,13	1,25	1,38	1,50
9	0,11	0,22	0,33	0,44	0,56	0,67	0,78	0,89	1,00	1,11	1,22	1,33
10	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
11	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	0,55	0,64	0,73	0,82	0,91	1,00	1,09
12	0,08	0,17	0,25	0,33	0,42	0,50	0,58	0,67	0,75	0,83	0,92	1,00
13	0,08	0,15	0,23	0,31	0,38	0,46	0,54	0,62	0,69	0,77	0,85	0,92
14	0,07	0,14	0,21	0,29	0,36	0,43	0,50	0,57	0,64	0,71	0,79	0,86
15	0,07	0,13	0,20	0,27	0,33	0,40	0,47	0,53	0,60	0,67	0,73	0,80
16	0,06	0,13	0,19	0,25	0,31	0,38	0,44	0,50	0,56	0,63	0,69	0,75
17	0,06	0,12	0,18	0,24	0,29	0,35	0,41	0,47	0,53	0,59	0,65	0,71
18	0,06	0,11	0,17	0,22	0,28	0,33	0,39	0,44	0,50	0,56	0,61	0,67
19	0,05	0,11	0,16	0,21	0,26	0,32	0,37	0,42	0,47	0,53	0,58	0,63
20	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60
21	0,05	0,10	0,14	0,19	0,24	0,29	0,33	0,38	0,43	0,48	0,52	0,57
22	0,05	0,09	0,14	0,18	0,23	0,27	0,32	0,36	0,41	0,45	0,50	0,55
23	0,04	0,09	0,13	0,17	0,22	0,26	0,30	0,35	0,39	0,43	0,48	0,52
24	0,04	0,08	0,13	0,17	0,21	0,25	0,29	0,33	0,38	0,42	0,46	0,50
25	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28	0,32	0,36	0,40	0,44	0,48
26	0,04	0,08	0,12	0,15	0,19	0,23	0,27	0,31	0,35	0,38	0,42	0,46

#### Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta (da 115 a 117 caselle rosse, 11 blu e 6 verdi) o le 26 linee colorate correttamente.
- 3 Risposta "con alcune imprecisioni" in due dei tre colori (per rosso  $117 \pm 7$  per blu 9 o 10 o 12 o 13, per verde 7 o 8) o colorazione corrispondente esatte  
oppure tre numeri "con alcune imprecisioni" o colorazione corrispondente esatta
- 2 Risposta con due dei tre numeri (da 115 a 119 caselle rosse, 11 blu e 6 verdi) o colorazione corrispondente esatte  
oppure tre numeri "con alcune imprecisioni" o colorazione corrispondente corretta
- 1 Risposta con solo uno dei tre numeri (da 115 a 119 caselle rosse, 11 blu e 6 verdi) o colorazione corrispondente esatta  
oppure due numeri "con alcune imprecisioni" o colorazione corrispondente esatta  
oppure le prime dieci o dodici linee colorate correttamente o con "alcune imprecisioni" ma con una parte della griglia non colorata (a causa della mancanza di tempo)
- 0 Incomprensione del problema (colorazione molto limitata o illeggibile, con errori, foglio bianco, ...)

**Livello:** 8, 9, 10

**Origine:** Gruppo di lavoro "Zero alla Zero" (G0A0)

## 18. PRIMA AZIONE IN BORSA (Cat. 9, 10)

Cristiano è andato a lavorare durante le vacanze scolastiche e ha messo da parte dei risparmi. Decide quindi di piazzare una parte dei suoi soldi in borsa e il suo banchiere gli consiglia di acquistare un'azione della società TrSA (Transalpinia S.A.), specializzata nella produzione di problemi matematici.

Cristiano acquista quindi un'azione TrSA all'inizio di settembre e ne segue lo sviluppo. Alla fine del mese, il suo valore è diminuito del 5%. Un mese dopo, a fine ottobre, il valore dell'azione è sceso dell'8% rispetto a quello di fine settembre. Cristiano è molto deluso.

Alla fine di novembre però, il valore dell'azione è aumentato del 13% rispetto a quello della fine del mese precedente. Cristiano, confortato, pensa che se decide di vendere immediatamente tale azione, non perderà troppi soldi.

Ora c'è esattamente una differenza di 20,25€ tra il prezzo di acquisto all'inizio di settembre, che era un numero intero di euro, e il prezzo di vendita alla fine di novembre.

**Qual è stato il prezzo di acquisto dell'azione TrSA, arrotondato all'euro più vicino? Spiegate come avete trovato la vostra risposta e date tutti i dettagli dei vostri calcoli.**

### ANALISI A PRIORI

#### Compito matematico

Trovare il prezzo iniziale di un'azione che, dopo due ribassi successivi del 5 % e poi dell'8 % e un aumento del 13 %, è variato di 20,25 € rispetto al valore iniziale.

#### Analisi del compito

#### Analisi del compito

- Comprendere che ci sono quattro valori da prendere in considerazione e tre variazioni di valori e che queste sono calcolate ogni volta a partire dal valore precedente: la prima variazione indica che il valore iniziale è diminuito del 5 %, la seconda variazione significa che il valore diminuisce ancora dell'8 % rispetto al secondo valore (dopo un mese). La terza variazione è un aumento del terzo valore del 13 %. (Di conseguenza, bisogna evitare di sommare le tre variazioni percentuali, perché si otterrebbe così una variazione complessiva nulla.  $-5 - 8 + 13 = 0$ )
- Ricordarsi o scoprire che le operazioni «diminuire del 5 %», «diminuire dell'8 %» e «aumentare del 13 %» corrispondono alle operazioni rispettive “ $\times (100 - 5)/100$ ”, “ $\times (100 - 8)/100$ ” e “ $\times (100 + 13)/100$ ” oppure “moltiplicare per 0,95” o “ $95/100$ ”; 0,92” oppure “ $92/100$ ” e “1,13” o “ $113/100$ ”.
- Capire infine che per intraprendere i calcoli occorrerebbe conoscere il prezzo iniziale dell'azione. E' questo che deve essere cercato.
- **Procedere per tentativi passo a passo:** assegnare un prezzo iniziale all'azione partendo ad esempio da 1000 euro, effettuare le tre trasformazioni proporzionali successive di fattori 0,95; 0,92 e 1,13, e poi calcolare la differenza tra il prezzo iniziale e quello finale che deve essere 20,25:

Prezzo iniziale	Prezzo con sconto. 5 %	Prezzo con sconto 8 %	Prezzo con aum. 13 %	Differenza
1000	950	874,00	987,62	12,38
1500	1425	1311,00	1481,43	18,57
1600	1520	1398,40	1580,19	19,81
1630	1548,5	1424,62	1609,82	20,18
1635	1553,25	1428,99	1614,76	20,24
<b>1636</b>	<b>1554,2</b>	<b>1429,86</b>	<b>1615,75</b>	<b>20,25</b>
1637	1555,15	1430,74	1616,73	20,27

- **Procedere per tentativi, globalmente:** Nel caso in cui le trasformazioni siano composte  $0,95 \times 0,92 \times 1,13 = 0,98762$ , la tabella presenterà due colonne in meno. Infine, scegliere il valore del prezzo dell'azione che corrisponde nella tabella a una differenza di 20,25 €, cioè 1636 €.
- **Procedura algebrica** (il valore iniziale è indicato con  $p$ ):  
il valore dopo le tre modifiche ( $P$ ) è:  $P = 0,95 \times 0,92 \times 1,13p = 0,98762p$ ,

La differenza tra le due valori è:  $p - P = p - 0,98762p = p(1 - 0,98762) = 0,01238p$ .

Il valore iniziale  $p$  è la soluzione dell'equazione  $20,25 = 0,01238p$  o  $p = 20,25/0,01238 = 1635,702\dots$  arrotondato a 1636 in euro.

#### Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (1636 €) con spiegazioni chiare e dettagliate (tentativi successivi espressi per esempio con una tabella dei prezzi oppure risoluzione con procedura algebrica)
- 3 Risposta corretta con spiegazioni incomplete (senza tutti i dettagli dei calcoli)  
oppure risposta 1635 o 1637 dovuta a un errore d'approssimazione con spiegazioni chiare e dettagliate
- 2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione  
oppure risposta intera o decimale compresa nell'intervallo [1600; 1650], determinata da tentativi organizzati esplicitati con un errore più o meno importante nell'approssimazione  
oppure risposta errata dovuta ad un errore di calcolo nel calcolare le varie trasformazioni 0,95; 0,92 e 1,13, ma procedura corretta  
Inizio di ricerca coerente (per esempio, alcuni tentativi falliti o che considerino solo una trasformazione)
- 0 Incomprensione del problema oppure utilizzo dell'espressione «5% + 8% - 13% = 0%»

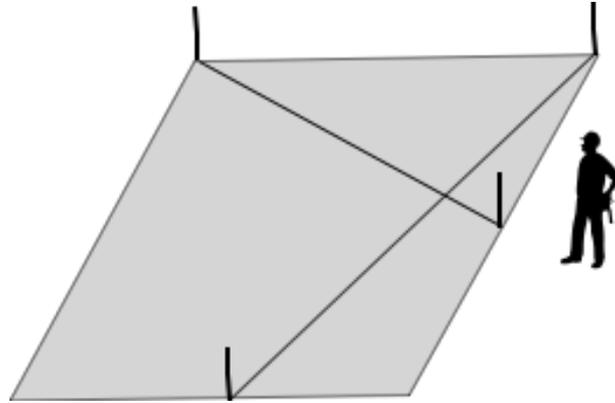
**Livello:** 9, 10

**Origine:** Gruppo di lavoro Calcolo e proporzionalità (GTCP)

## 19. UN APPRENDISTA GEOMETRA (Cat. 9, 10)

Un geometra ha piantato quattro picchetti, due in un vertice di un terreno quadrato e gli altri due nel punto medio di due dei suoi lati. Poi ha attaccato alcuni fili ai piedi di questi picchetti e li ha tesi come indica la figura sottostante.

Il geometra si rivolge poi al suo apprendista e gli chiede se, senza misurare, può dire quanto misurano gli angoli formati dai due fili che si incrociano.



**Rispondete alla domanda del geometra e scrivete le vostre giustificazioni.**

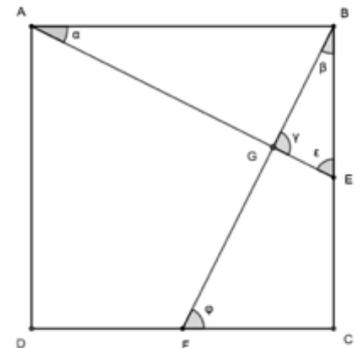
### ANALISI A PRIORI

#### Compito matematico

Trovare la misura degli angoli formati da due segmenti che congiungono un vertice di un quadrato con il punto medio di uno dei suoi lati.

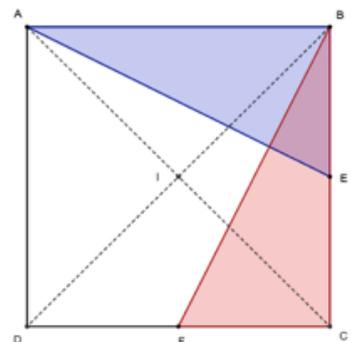
#### Analisi del compito

- Rendersi conto che la figura dell'enunciato è in prospettiva e che è preferibile rifare la figura considerando un quadrato e assegnando lettere ai vertici e agli angoli.
- Riferendosi alla figura qui accanto, considerare i triangoli ABE e BCF rispettivamente rettangoli in B e C e di cui le ipotenuse coincidono con i due fili che si incrociano:
  - questi due triangoli sono rettangoli, quindi precisare che  $\alpha + \varepsilon = 90^\circ$  et  $\beta + \gamma = 90^\circ$  ;
  - stabilire che i due triangoli sono uguali poiché hanno due lati uguali e gli angoli fra essi compresi uguali (primo criterio di uguaglianza);
  - dedurre le seguenti uguaglianze  $\beta = \alpha$  e  $\phi = \varepsilon$ : per l'uguaglianza dei triangoli,
  - dedurre che nel triangolo BGE,  $\beta$  e  $\varepsilon$  sono complementari e che in tal modo il terzo angolo  $\gamma$  del triangolo misura  $90^\circ$ .
  - Concludere che i due segmenti sono perpendicolari e dunque che i quattro angoli misurano 90 gradi.



Oppure

- Considerare la rotazione di centro I (punto di intersezione delle diagonali del terreno) e di ampiezza di  $90^\circ$  (in senso orario, come nella figura qui accanto):
- tener presente che questa rotazione trasforma A in B (proprietà delle diagonali del quadrato);
- tener presente che trasforma E in F (proprietà degli assi della simmetria del quadrato o conservazione dei punti medi per rotazione);
- dedurre che la retta BF è l'immagine della retta AE tramite questa rotazione;
- concludere che queste due rette sono perpendicolari



#### Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (gli angoli formati dai due fili che si incrociano sono angoli retti) con una giustificazione corretta ed esaustiva (sono esplicitate le diverse tappe della giustificazione)
- 3 Risposta corretta, ma una tappa della giustificazione non è esplicitata (un passaggio è dato per scontato)
- 2 Risposta corretta ma due tappe della giustificazione non sono esplicitate

- 1 Successione di constatazioni poco o non giustificate, ma che testimoniano che gli allievi hanno capito qualche tappa del ragionamento
- 0 Incomprensione del problema oppure risposta corretta senza alcuna traccia di giustificazione

**Livello:** 9, 10

**Origine:** Gruppo di lavoro Geometria Piana (GTGP)

**20. LOTTERIE** (Cat. 9, 10)

Due amici, Piero e Sandro, hanno deciso di partecipare a tre lotterie organizzate per beneficenza, acquistando alcuni biglietti. Ogni lotteria ha i biglietti di colore diverso: azzurro, giallo e verde. I biglietti hanno prezzi diversi a seconda del colore e ogni prezzo è espresso in euro con un numero naturale.

La settimana scorsa, Piero ha acquistato un biglietto azzurro, tre gialli e sette verdi per un totale di 44 euro, mentre Sandro ha acquistato un biglietto azzurro, quattro gialli e dieci verdi per un totale di 58 euro.

Oggi, ultimo giorno delle lotterie, entrambi comprano ancora dei biglietti.

- Piero acquista un biglietto azzurro, un biglietto giallo ed un biglietto verde:
- Sandro acquista due biglietti azzurri, tre biglietti gialli e cinque biglietti verdi.

**Quanto spende ciascuno dei due amici nell'ultimo acquisto di biglietti?**

**Spiegate come avete trovato la vostra risposta.**

**ANALISI A PRIORI****Compito matematico**

Dato in  $N$  un sistema di due equazioni di primo grado in tre incognite, determinare il valore numerico di due altre combinazioni a coefficienti naturali delle stesse tre incognite.

**Analisi del compito**

- Comprendere che i biglietti delle tre lotterie hanno prezzi diversi non noti, che si conosce la spesa complessiva per l'acquisto di due diverse quantità di biglietti dei tre tipi e che occorre trovare quanto paga ciascuno dei due amici per l'acquisto di altre due diverse combinazioni dei tre tipi di biglietti.

- Esprimere in forma sintetica le informazioni relative al primo acquisto dei tre biglietti, indicando ad esempio:

$$P_1: B + 3G + 7V = 44 \quad S_1: B + 4G + 10V = 58 \quad (\text{somme note})$$

e il secondo acquisto:

$$P_2: B + G + V = ? \quad S_2: 2B + 3G + 5V = ? \quad (\text{somme incognite}).$$

Dedurre dalla relazione  $S_1$  che  $V$  non può superare 6 perché se  $V = 6$ ,  $10V$  sarà maggiore di 58.

- Procedere per tentativi attribuendo per esempio un valore al biglietto verde (che è quello che è presente in numero maggiore nei due acquisti i cui prezzi sono noti), I valori che si possono assegnare a  $V$  sono dunque 1, 2, 3, 4, 5.

- Se  $V = 1$ , allora  $B + 4G = 48$  e  $G$  può assumere i valori 11, 10, 9, ..., 1; i valori corrispondenti di  $B$  sono 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44.

- Verificare ciascuna terna di valori  $(B, G, 1)$  in  $P_1$ . L'uguaglianza è verificata solo per  $B = 4$  e  $G = 11$ .

- A partire da ciò calcolare i prezzi pagati da Piero e Sandro per il loro secondo acquisto:

$$P_2: B + G + V = 4 + 11 + 1 = 16 \text{ (euro)} \quad S_2: 2B + 3G + 5V = 8 + 33 + 5 = 46 \text{ (euro)}$$

- Procedere analogamente per gli altri valori di  $V$ .

Si ottengono così quattro soluzioni  $(V = 1, G = 11, B = 4)$ ;  $(V = 2, G = 8, B = 6)$ ;  $(V = 3, G = 5, B = 8)$ ;  $(V = 4, G = 2, B = 10)$  che portano tutte a  $P_2: B + G + V = 16$  (euro) e  $S_2: 2B + 3G + 5V = 46$  (euro).

Oppure

- Cercare di combinare le due relazioni note  $S_1$  e  $P_1$  al fine di ottenere un'altra uguaglianza. Sottraendo membro a membro si ottiene  $G + 3V = 14$ .

- Procedere poi per tentativi assegnando successivamente a  $V$  i valori 1, 2, 3, 4 e 5, che portano alle soluzioni

$$(V = 1, G = 11); (V = 2, G = 8); (V = 3, G = 5); (V = 4, G = 2).$$

- Sostituire questi valori in  $S_1$  o  $P_1$  per determinare i valori corrispondenti di  $B$ : 4, 6, 8 e 10

- Determinare successivamente i prezzi pagati da Piero e Sandro per il loro secondo acquisto.

Oppure

- Dopo aver trovato che  $G + 3V = 14$ , si introduce questa relazione nel primo membro di  $S_1$  arrivando a:  
 $A + 4G + 10V = A + G + (3G + 9V) + V = A + G + 3(G + 3V) + V = A + G + (3 \times 14) + V = 58$  da cui ricavare il valore di  $P_2: A + G + V = 58 - (3 \times 14) = 58 - 42 = 16$ .

- Procedere in modo analogo per determinare il valore di  $S_2$ :

$$2A + 3G + 5V = 2A + (G + 3V) + 2G + 2V = (2A + 2G + 2V) + (G + 3V) = 2 \times 16 + 14 = 32 + 14 = 46.$$

Oppure

- Rendersi conto dopo qualche tentativo, che le espressioni  $P_2$  et  $S_2$  si possono ottenere con opportune combinazioni lineari di  $P_1$  e  $S_1$  e che è possibile determinare il prezzo totale corrispondente a ciascuna di esse. Infatti:

$$P_2: B + J + V = 3(B + 3J + 7V) - 2(B + 4J + 10V) = 3P_1 - 2S_1 = 3 \times 44 - 2 \times 58 = 16$$

$$S_2: 2B + 3J + 5V = 5(B + 3J + 7V) - 3(B + 4J + 10V) = 5P_1 - 3S_1 = 5 \times 44 - 3 \times 58 = 46$$

#### Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (Piero spende 16 euro e Sandro spende 46 euro) con spiegazione chiara e completa del procedimento (risoluzione tramite combinazioni e tentativi o sostituzioni, con presenza dei calcoli e verifica dell'invarianza dei due acquisti quando si ottengono con la determinazione dei possibili costi di ciascuno tipo di biglietto)
- 3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara o incompleta (per es. passaggi non ben esplicitati nella procedura per combinazioni e sostituzioni oppure dimenticanza di uno dei quattro casi risolutivi nella procedura per tentativi, ma verificata l'invarianza dei due acquisti)
- 2 Risposta errata dovuta ad un errore di calcolo, ma spiegazione chiara e completa del procedimento oppure risposta corretta ottenuta a partire dalla prima terna di valori trovati per i prezzi di ciascun tipo di biglietto senza considerare le altre tre possibilità
- 1 Inizio di ragionamento corretto (per esempio, tentativi di completamento delle ultime due relazioni utilizzando quelle note o iniziata la procedura per tentativi)
- 0 Incomprensione del problema

**Livello:** 9, 10

**Origine:** Siena