

24° Rally Matematico Transalpino, prima prova

	<i>Titolo</i>	<i>Categorie</i>	<i>Origine</i>	<i>Ambiti</i>
1	Palloncini colorati (I)	3	SI	proporzioni: (3 sta a 24 come 2 sta a x) e somma $24 + x$
2	Le foglie dell'albero	3 4	BB	conteggio a partire da due disegni incompleti
3	Numeri a due o tre cifre	3 4	BE	disposizioni di 3 oggetti presi 1 a 1, 2 a 2 o 3 a 3
4	Oro e pirati	3 4	BE	scomposizioni additive di 54 in 8 termini di cui sei uguali
5	Codice segreto	3 4 5	LU	gioco di "Mastermind" su numeri di tre cifre
6	Palloncini colorati (II)	4 5	SI	due proporzioni: 3 sta a 24 come 2 sta a x , poi 4 sta a 24 come 2 sta a y e somma $24 + 24 + x + y$
7	Giochi con i cubetti	4 5	RZ	Immagini di sovrapposizioni rappresentate in prospettiva
8	Cammelli e dromedari	5 6	5.1	sistema di due equazioni in N
9	La vasca	5 6	MI	scomposizione additiva di 49 in multipli di 3, 4, 5
10	Alberi di Natale a Milano	5 6 7	PR	avvenimenti periodici definiti da multipli comuni di 3, 5, 7
11	Monete	5 6 7 8	FC	sistema di due equazioni in N
12	Tetracubi	6 7 8	UD	riconoscimento di tetracubi diversi visti in prospettiva
13	Tessere magnetiche	6 7 8 9 10	SI	sistema di tre equazioni in N
14	Divisione di un terreno	6 7 8 9 10	FC	divisione di un rettangolo in un rettangolo e una parte equivalente
15	Intersezione	7 8 9 10	SR	intersezione di due rette assegnati due punti per ciascuna
16	Orto quadrato	7 8 9 10	SI	numeri i cui quadrati hanno una differenza di 75
17	La scatola di cubi	8 9 10	16.I	accatastamento di cubi di 1^3 e di 2^3 in una scatola
18	Perimetro e area	9 10	LU	rettangoli con misure uguali di perimetro e area
19	Un numero attraente	9 10	FC	convergenza della successione ricorrente: $u_{n+1} = u_n/2 + 1$

I problemi del RMT sono protetti da diritti di autore.

Per un'utilizzazione in classe deve essere indicata la provenienza del problema inserendo la dicitura "©ARMT".

Per un'utilizzazione commerciale, ci si può mettere in contatto con i coordinatori internazionali attraverso il sito Internet dell'associazione del Rally Matematico Transalpino (<http://www.armtint.org>).

1. PALLONCINI COLORATI (Cat. 3)

Per la festa della scuola, i bambini della classe di Fabiana stanno attaccando sul muro dell'ingresso una fila di palloncini messi uno a fianco all'altro.

I primi 3 palloncini sono blu, accanto ce ne sono 2 rossi, poi di nuovo 3 blu seguiti da 2 rossi... e così di seguito. I bambini continuano ad attaccare i palloncini fino a terminare lo spazio a disposizione. Quando hanno finito, notano che gli ultimi 2 palloncini sono rossi.

Per realizzare questa fila di palloncini hanno utilizzato 24 palloncini blu.

Quanti sono in tutto i palloncini che i bambini hanno attaccato al muro dell'ingresso?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare il numero totale di palloncini di una sequenza periodica di 3 palloncini blu e di 2 palloncini rossi che utilizza 24 palloncini blu.

Analisi del compito

- Immaginare la fila di palloncini, disegnarne eventualmente l'inizio, e capire che il gruppo di 3 palloncini blu e di 2 palloncini rossi si ripete con periodicità.
- Continuare il disegno fino ad avere 24 palloncini blu e 2 palloncini rossi alla fine della fila; poi contare il numero totale di palloncini: 40. (Il non rispetto del vincolo "la fila finisce con 2 palloncini rossi" porterebbe alla risposta errata 38).

Oppure: utilizzare un ragionamento aritmetico, per esempio:

considerare che 24 palloncini blu corrispondono ad una ripetizione di otto volte nella sequenza dei 3 palloncini blu ($8 = 24 \div 3$) e calcolare il numero dei palloncini rossi ($16 = 2 \times 8$).

- Dedurre infine che il totale dei palloncini è $40 = 24 + 16$.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (40 palloncini) con una spiegazione chiara e completa (disegno o calcolo)
- 3 Risposta corretta (40 palloncini) con una rappresentazione poco chiara o incompleta oppure risposta con il numero di palloncini di ogni colore (24 b, 16 r), senza calcolo del totale
- 2 Risposta errata dovuta ad un errore di calcolo o ad uno schema corretto, ma incompleto, per esempio 38 palloncini, (che rappresentano la sequenza organizzata con gli otto gruppi di 3 blu, ma senza gli ultimi 2 rossi) oppure numero corretto dei soli palloncini di colore rosso (16 r)
- 1 Inizio di ricerca appropriato che mette in evidenza la comprensione dell'alternanza dei due tipi di palloncini e della sequenza numerica, completa o no, ma nessuna risposta proposta.
- 0 Incomprensione del problema

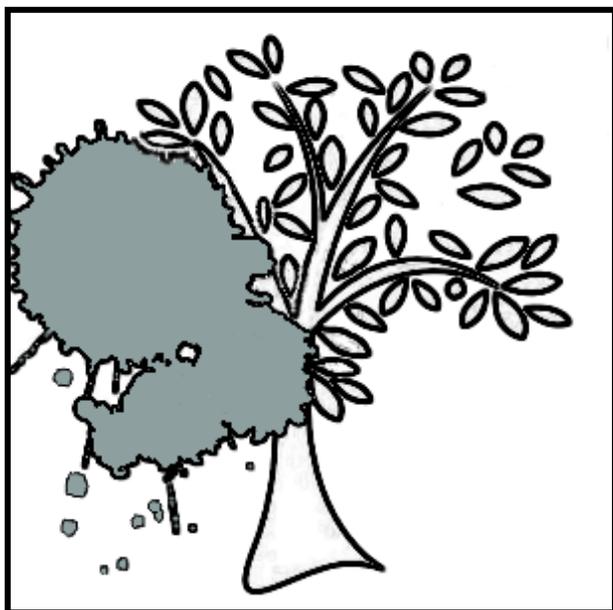
Livello: 3

Origine: Siena

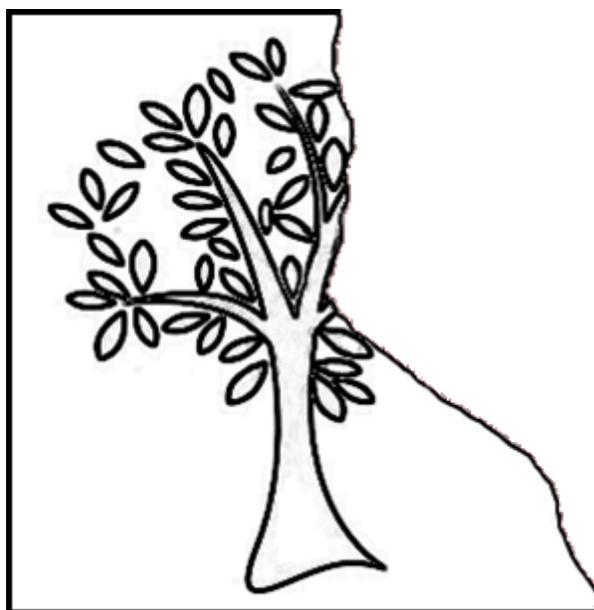
2. LE FOGLIE DELL'ALBERO (Cat. 3, 4)

La maestra ha distribuito lo stesso disegno a Filippo e a Giorgio. Sfortunatamente, Filippo ha fatto una grossa macchia sul suo disegno e Giorgio ha strappato il suo.

Ecco i due disegni:



Filippo



Giorgio

Quante foglie c'erano sul disegno dell'albero distribuito dalla maestra?

Mostrate il lavoro che avete fatto per trovare la risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Contare una quantità di oggetti rappresentati su un disegno a partire da due copie incomplete di questo disegno, sulle quali figurano tutti gli oggetti, alcuni dei quali figurano su tutte e due.

Analisi del compito

- Rendersi conto che si tratta del disegno del medesimo soggetto e che su ognuno dei due fogli è rappresentata parte di esso
- Costatare che tutte le foglie non sono visibili in un solo disegno e che bisognerà passare da un disegno all'altro per contarle tutte, evitando di contare due volte quelle che figurano su tutti e due.
- Contare una a una le foglie di un disegno, poi quelle dell'altro che non sono già state contate sul primo. Ci si può aiutare con dei contrassegni, con una numerazione progressiva, con dei colori... per non dimenticarne nessuna. La difficoltà principale è il controllo delle foglie già presenti sul primo disegno, che si possono eventualmente sbarrare una a una sul secondo.

Oppure: osservare i disegni e constatare che le foglie possono essere classificate in tre categorie:

le foglie nascoste dalla macchia sul disegno di Filippo, ma non sull'altro (20)

le foglie sparite sul disegno strappato di Giorgio, ma non sull'altro (28)

le foglie visibili sui due disegni (20)

Concludere addizionando i tre numeri trovati ($20 + 20 + 28 = 68$).

Oppure: ricostituire l'albero intero sia completando uno dei due disegni, sia decalcando, sia ritagliando e incollando, dopo aver identificato su uno dei disegni la parte che è mancante sull'altro. Contare le foglie sull'albero ricostruito.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (68) con le foglie chiaramente segnate sull'elaborato una a una per il conteggio (contrassegni, numero...) o con l'addizione $20 + 20 + 28$ oppure con un ritaglio e collage o ancora con una frase del tipo "abbiamo contato tutte le foglie senza contare due volte quelle che erano sui due disegni" oppure "abbiamo contato tutte le foglie dei due disegni poi abbiamo tolto una volta quelli che erano su tutti e due" oppure "abbiamo contato tutte le foglie di Filippo, poi quelle che sono sotto la macchia che abbiamo contato sul disegno di Giorgio" ...
- 3 Risposta che si discosta di 1 (67 o 69) dalla risposta corretta con tracce o spiegazioni come per i 4 punti

- 2 Risposta che si discosta di 2 (66 o 70) dalla risposta corretta con tracce o spiegazioni come le precedenti oppure risposta esatta (68) senza nessuna traccia o spiegazione di come si è trovata la risposta
- 1 Risposta che si discosta di 3 o 4 punti (64, 65, 71, 72) oppure aggiunta delle foglie visibili sui due disegni senza togliere le foglie comuni: 88
- 0 Incomprensione del problema o risposta diversa da quelle elencate in precedenza

Livello: 3, 4

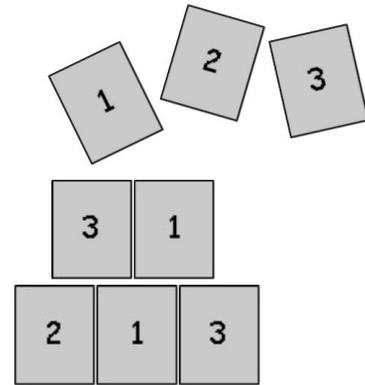
Origine: Bourg en Bresse

3. NUMERI A UNA, DUE O TRE CIFRE (Cat. 3, 4)

Pasqualina ha tre carte sulle quali sono scritte le cifre 1, 2 e 3. Con queste carte si diverte a formare dei numeri.

Per esempio, forma il numero 31 sistemando il 3 e l'1 così:

Oppure il numero 213 disponendo le tre carte così:



Quanti numeri potrà ottenere Pasqualina con una, due o tutte le sue tre carte?

Scriveteli tutti.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare tutti i numeri di una, due o tre cifre formati con una sola delle tre cifre 1, 2, 3 (disposizioni senza ripetizione di 3 oggetti dati, presi 1 a 1, 2 a 2 o 3 a 3).

Analisi del compito

- Capire che i differenti modi di formare un numero dipendono dalle cifre utilizzate e dalla posizione che occupano (centinaia, decine, o unità).
- Capire che ogni cifra può essere utilizzata una sola volta in ogni numero.
- Capire che se si prendono le tre carte una ad una si hanno tre numeri: 1, 2, 3
- Capire che ogni scelta di due o tre cifre permette la scrittura di più numeri diversi.
- Stabilire una strategia che permetta di fare l'inventario sistematico di tutte le disposizioni per non perdere nessuna soluzione. Per esempio,

Per i numeri a due cifre, scelta, per cominciare, «1» come cifra delle decine ci sono due possibilità per la cifra dell'unità: 12 e 13

Stessa cosa con le cifre 2 e 3: 21 e 23; 31 e 32

Per i numeri a tre cifre, scegliere, per cominciare, «1» come cifra delle centinaia e affiancare ad essa i numeri a due cifre che non contengono 1: 123 e 132

Stessa cosa con le cifre 2 e 3: 213 e 231; 312 e 321

- Contare tutti i numeri ottenuti: 15.

Oppure: procedere per tentativi di scrittura di numeri di una, due o tre cifre, assicurandosi delle non ripetizione dei numeri e organizzandoli alla fine per trovare i numeri mancanti.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta e completa (15 numeri: 1, 2, 3, 12, 21, 13, 31, 23, 32, 123, 132, 213, 231, 312, 321)
- 3 Risposta con uno o due errori (per esempio 15 numeri con una dimenticanza e un doppione o 17 numeri con due doppioni, ...)
- 2 Risposta con tre o quattro errori (da 11 a 19 numeri) dovuti a dimenticanze o ripetizioni di più numeri oppure risposta con i 12 numeri diversi di due o tre cifre, senza quelli con una sola cifra oppure risposta con i 27 numeri diversi composti con le tre cifre: 1, 2, 3, 11, 12, 13, 21, 22, 23, ..., 333 (senza tener conto che c'è solo una carta per cifra)
- 1 Risposta sbagliata o incompleta con almeno 4 numeri corretti con possibili dimenticanze o ripetizioni
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4

Origine: Belgio, problema ispirato al problema 7 del 23° RMT.I (Gli anellini)

4. ORO E PIRATI (Cat. 3, 4)

Una banda di pirati, il capitano, il nostromo e sei marinai, si dividono 56 monete d'oro:

- i sei marinai ricevono ciascuno lo stesso numero di monete,
- il nostromo riceve due monete più di un marinaio,
- il capitano si prende quattro monete più del nostromo.

Quante monete riceve ogni pirata?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Scomporre 56 in una somma di otto termini di cui sei sono tutti uguali tra loro, il settimo vale 2 più di ciascuno dei primi sei e l'ottavo supera di 4 quest'ultimo.

Analisi del compito

- Rendersi conto che vi sono otto persone che si spartiscono 56 monete d'oro in modo non equo.
- Rendersi conto che si tratta di completare un'addizione di cui si conosce solo la somma (56), di cui gli otto termini non sono ancora determinati, ma di cui si conoscono le relazioni tra alcuni di essi.
- Procedere per tentativi più o meno organizzati fino ad ottenere la suddivisione 6, 6, 6, 6, 6, 6, 8 e 12 o $6 \times 6 + 8 + 12 = 56$.

Oppure: procedere togliendo 2 e 6, che sono i numeri eccedenti del nostromo e del capitano, da 56, ottenere 48 e dividere poi quest'ultimo numero in 8 parti uguali. Aggiungere al risultato di quest'operazione (6) il 2 e il 6 per ottenere il numero di monete del capitano e del nostromo (8 e 12).

Oppure: dividere le 56 monete in 8 parti di 7 monete e compensare togliendo una moneta dalla parte di ognuno dei sei marinai (che ne avranno 6), e dandone una al nostromo (che ne avrà 8) e le altre cinque al capitano (che ne avrà 12). Le varie strategie possono essere illustrate da rappresentazioni grafiche, più o meno corrette, che vengono però dalla risoluzione aritmetica del problema

- Un errore possibile è di suddividere le 56 monete d'oro in parti uguali tra gli otto pirati, dando 7 monete d'oro a testa.
- Un altro errore è quello di considerare che il capitano riceva solamente 4 monete d'oro più dei marinai.
- Un altro errore è di non basarsi sulle informazioni corrette nel momento della suddivisione delle 48 monete (dividere per 6 che è il numero dei marinai, piuttosto di dividere per 8 che è il numero dei pirati).

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (al capitano 12 monete, al nostromo 8 e 6 a ogni marinaio) con spiegazioni chiare e complete (calcoli: $6 \times 6 + 8 + 12 = 56$ o $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 8 + 12 = 56$, elenco completo dei tentativi fatti ...)
- 3 Risposta corretta con spiegazioni parziali o poco chiare o solamente una verifica (per esempio $6 \times 6 + 8 + 12 = 56$ senza spiegazione di come si sono trovati i vari termini oppure "abbiamo provato e abbiamo trovato ...")
- 2 Risposta corretta senza spiegazioni né giustificazioni
oppure risposta errata dovuta ad un errore di calcolo, con procedura corretta
- 1 Inizio di ricerca coerente
oppure risposta errata dovuta ad una comprensione sbagliata delle condizioni (per esempio, il capitano riceve solamente 4 monete d'oro più di ognuno dei marinai)
oppure risposta errata dovuta ad una cattiva identificazione delle variabili (per esempio, divisione di 48 in 6 parti uguali)
oppure risposta 7 dovuta ad una suddivisione tra i pirati senza presa in conto delle condizioni
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4

Origine: Belgio, ispirato al problema 8 del 23° RMT.I (Il nastro)

5. CODICE SEGRETO (Cat. 3, 4, 5)

Zio Paperone ha scelto un codice per la sua nuova cassaforte.

Per essere sicuro di ricordare il codice, annota queste informazioni nella sua agenda:

“Il mio codice è un numero composto da tre cifre differenti.

Nessuno dei codici qui sotto è quello corretto, ma le frasi scritte accanto ad essi sono vere:

- 134: una sola cifra è corretta ed è al posto giusto
- 734: nessuna cifra è corretta
- 625: nessuna cifra è corretta
- 952: una sola cifra è corretta, ma è al posto sbagliato
- 786: una sola cifra è corretta, ma è al posto sbagliato.”

Qual è il codice scelto dallo zio Paperone?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Trovare un numero di tre cifre a partire da cinque indizi indicanti le cifre “corrette” e/o “messe al posto giusto” (gioco di Mastermind).

Analisi del compito

- Capire che il codice è formato da tre cifre diverse fra loro, che devono essere scelte nell’insieme delle dieci cifre e sistemate nel posto giusto all’interno del codice.
- Tra le strategie possibili la più semplice è quella di eliminare le cifre che, dalla seconda e dalla terza informazione, si sa che non devono essere considerate; cioè bisogna eliminare le cifre 7, 3, 4 e 6, 2, 5 dai cinque codici proposti.
- Si nota allora che resta solo l’1 nel primo codice, al posto giusto: la cifra delle centinaia del codice cercato.
- Si osserva poi che resta solo il 9 nel quarto codice e che, siccome non è al posto giusto, può essere la cifra delle decine o quella delle unità.
- Infine, si nota che resta solo l’8 nel quinto codice e, siccome è nella seconda posizione ed è al posto sbagliato, deve essere in terza posizione, quella delle unità, visto che la prima è già occupata dall’1.
- Concludere che il 9 deve occupare la sola posizione ancora libera, la seconda o quella della decina, e che il codice segreto è 198.

Oppure procedere in parte per deduzioni, in parte per tentativi con numeri di tre cifre, confrontandoli con le informazioni date.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (198) con ragionamento in cui le tappe essenziali siano chiaramente spiegate, per esempio si spiega come si è arrivati a eliminare certe cifre e come si è arrivati a determinare il posto di quelle che restano (facendo riferimento alle informazioni che hanno permesso di dedurlo)
- 3 Risposta corretta con delle spiegazioni incomplete (per esempio menzionare solo le cifre da eliminare o il posto delle cifre da tenere) o imprecise
- 2 Risposta parzialmente corretta con due cifre trovate sulla base di ragionamenti corretti
- 1 Inizio di ragionamento corretto, per esempio l’eliminazione spiegata delle cifre 7, 3, 4 o 6, 2, 5
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4, 5

Origine: Lussemburgo

6. PALLONCINI COLORATI (II) (Cat. 4, 5)

Per la festa della scuola, i bambini della classe di Fabiana hanno attaccato una fila di palloncini, gli uni di fianco agli altri, ad una parete della loro aula e un'altra fila alla parete opposta.

Sulla prima parete, la fila comincia con 3 palloncini blu, poi continua con 2 palloncini rossi, poi ancora 3 blu, seguiti da 2 rossi e così via. La fila di palloncini termina con 2 palloncini rossi.

Sulla seconda parete, la fila comincia con 2 palloncini gialli, poi continua con 4 palloncini verdi, poi 2 palloncini gialli seguiti da 4 verdi e così via. La fila termina con 4 palloncini verdi.

Per realizzare queste file di palloncini, i bambini hanno utilizzato 24 palloncini blu e lo stesso numero di palloncini verdi.

Quanti sono in totale i palloncini appesi alle due pareti dell'aula?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare il numero totale di palloncini di due file disposti secondo delle sequenze periodiche: 3 palloncini blu e 2 palloncini rossi, per la prima fila; 2 palloncini gialli e 4 palloncini verdi, per la seconda fila, sapendo che nella prima ci sono in tutto 24 palloncini blu e nella seconda 24 palloncini verdi.

Analisi del compito

- Immaginare le due file di palloncini, eventualmente disegnandone una prima parte: la prima con un periodo di 3 palloncini blu e 2 palloncini rossi, la seconda con un periodo di 2 palloncini gialli e 4 palloncini verdi.
- Continuare i disegni fino ad avere 24 palloncini del colore designato (blu per la prima fila, verde per la seconda) e terminarle le fila con i palloncini del colore indicato (2 rossi per la prima fila, 4 verdi per la seconda). Poi contare il numero di palloncini: 40 e 36 per un totale di 76 palloncini.

Oppure utilizzare un ragionamento aritmetico, per esempio per la 1^a fila di palloncini:

considerare che 24 palloncini blu corrispondono ad una ripetizione di 8 volte i 3 palloncini blu di una sequenza ($8 = 24 : 3$) e dedurre il numero dei palloncini rossi ($16 = 2 \times 8$).

Per la 2^a fila, lo stesso ragionamento conduce a 6 gruppi costituiti da 4 palloncini verdi ($6 = 24 : 4$) e dunque a 12 palloncini gialli (2×6).

- Dedurre infine che il totale dei palloncini è $76 = (24 + 16) + (24 + 12)$.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (76 palloncini) con una spiegazione chiara e completa (rappresentazione grafica o calcoli)
- 3 Risposta corretta con rappresentazione poco chiara o incompleta, per esempio calcolo su una sola fila di palloncini oppure individuato correttamente il numero dei palloncini di diverso colore (24 blu, 16 rossi, 12 gialli, 24 verdi) o di ogni fila (40 e 36), senza calcolo del totale, ma con una spiegazione chiara
- 2 Risposta sbagliata dovuta ad un errore di calcolo o ad una rappresentazione grafica corretta, ma incompleta oppure risposta con solo il numero dei palloncini rossi (16) e gialli (12)
- 1 Inizio corretto di ricerca, che mostra la comprensione dell'alternarsi dei due tipi di palloncini e della sequenza numerica
- 0 Incomprensione del problema

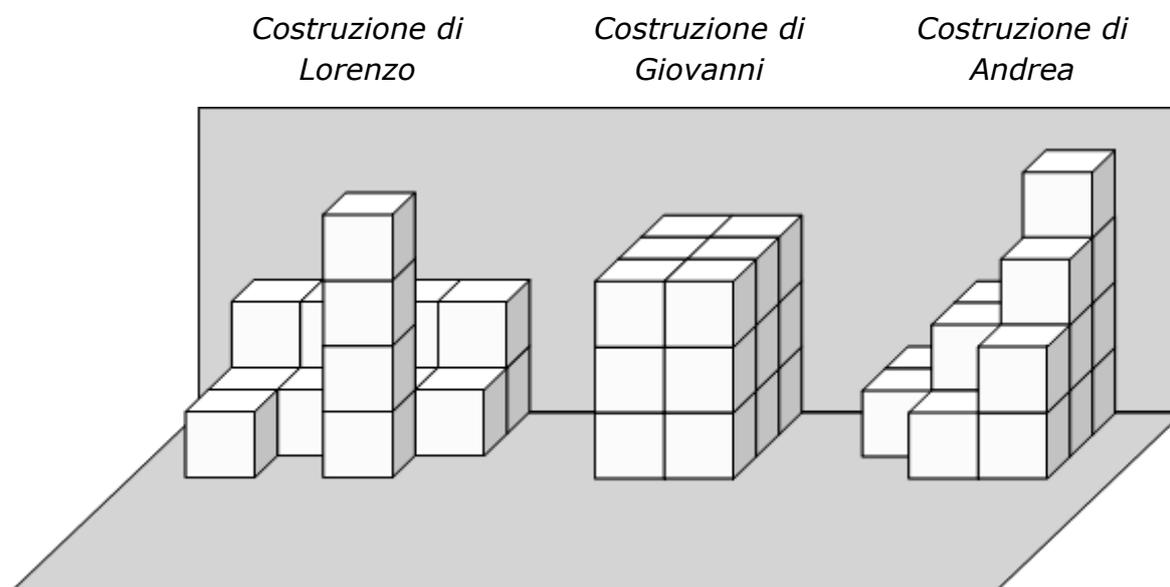
Livello: 4, 5

Origine: Siena

7. GIOCHI CON I CUBETTI (Cat. 4, 5)

Lorenzo, Giovanni e Andrea stanno giocando con dei cubetti.

Ognuno di loro ha realizzato una costruzione appoggiando dei cubetti gli uni sopra gli altri, contro un muro.



**Quanti cubetti ha utilizzato ciascuno di loro per fare la propria costruzione?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.**

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare a partire da una rappresentazione di prospettiva cavaliere il numero dei cubetti necessari alla realizzazione di tre assemblaggi.

Analisi del compito

- Osservare le costruzioni e capire che i singoli cubetti visibili possono mostrare tre, due o una faccia. Capire inoltre che ci sono dei cubetti non visibili, di cui si deve tener conto, che sono rivelati dal fatto che altri si appoggiano su di essi.
- Immaginare o riprodurre le tre costruzioni con materiale presente in classe
- Contare di quanti cubetti è composta ogni costruzione; il conteggio può avvenire sia contando i cubetti uno ad uno, sia utilizzando dei calcoli (costruzione di Lorenzo $3 \times 4 + 4 + 1 = 17$; quella di Giovanni $6 \times 3 = 18$; quella di Andrea $3 \times 3 + 2 \times 3 + 1 = 16$) o calcoli simili.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposte corrette: (Lorenzo 17 cubetti, Giovanni 18, Andrea 16) con spiegazione del procedimento seguito (freccie che indicano i cubetti nascosti, operazioni, dettagli del conteggio per righe o per colonne o spiegazioni simili)
- 3 Risposte corrette senza spiegazioni o con spiegazioni incomplete (per una sola costruzione, per esempio) oppure un solo errore di conteggio in più o in meno su una delle costruzioni,
- 2 Risposta sbagliata con un errore di conteggio in più o in meno su due delle costruzioni
- 1 Risposta sbagliata con errore di conteggio in più o in meno sulle tre costruzioni oppure conteggio solo dei cubetti visibili (14 per ognuna delle tre costruzioni)
- 0 Incomprensione del problema (per esempio conteggio di tutte le facce visibili anche appartenenti allo stesso cubetto Lorenzo 29 cubetti, Giovanni 21, Andrea 24)

Livello: 4, 5

Origine: Rozzano

8. CAMELLI E DROMEDARI (Cat. 5, 6)

Cleopatra ha disegnato dei cammelli e dei dromedari, in tutto ha fatto 23 gobbe e 68 zampe.

Cleopatra sa che i cammelli hanno due gobbe e i dromedari ne hanno solo una.

Poi ha disegnato un uomo in groppa a ciascun cammello.

Quanti uomini ha disegnato Cleopatra in tutto?

Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Determinare due numeri naturali che soggiacciano a due relazioni: la loro somma è un quarto di 68 e il doppio del primo addizionato al secondo è 23, in un contesto di cammelli e dromedari

Analisi del compito¹

Secondo l'analisi a posteriori degli elaborati del problema, risolto nel 5° RMT:

- Appropriarsi della situazione e comprendere che per ciascun cammello si contano due gobbe e quattro zampe e per ciascun dromedario si contano una gobba e quattro zampe
- Tradurre i dati in relazioni numeriche iniziando con il numero degli animali, cammelli e dromedari insieme: $4 \times \dots = 68$ oppure $68 : 4$ e trovare che ci sono 17 animali
- Trovare il numero di ogni tipo di animale sapendo che il numero di tutti gli animali è 17 e la somma delle gobbe (numero dei dromedari e del doppio del numero dei cammelli) è 23
Per risolvere «questo sistema di equazioni» si può procedere per tentativi a caso, per tentativi organizzati, inventariando tutte le coppie di numeri la cui somma è 17, o deduzioni sul tipo di animale: se tutti fossero dromedari ci sarebbero 17 gobbe e ne mancherebbero 6, di conseguenza bisogna rimpiazzare 6 dromedari con 6 cammelli. Dunque ci saranno 6 cammelli e 11 dromedari (verificando $6 + 11 = 17$ e $6 \times 2 + 11 = 23$)
- Senza passare attraverso scritte aritmetiche il problema può essere risolto soltanto con una rappresentazione grafica. Per esempio, dei gruppi di quattro zampe fino ad arrivare a 68 (17 gruppi) una gobba per gruppo e 1 gobba in più in 6 gruppi per arrivare a 23.
- Scrivere la risposta senza dimenticare che la domanda richiede il numero degli uomini disegnati, 6, che corrisponde al numero di cammelli.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (6 uomini) con spiegazioni chiare e complete (disegno esplicito, procedimento o tentativi che mostrino come si è arrivati alla risposta)
- 3 Risposta corretta (6 uomini) con spiegazioni che mostrano soltanto un o due tentativi o soltanto una verifica del tipo $6 + 11 = 17$ e $(6 \times 2) + 11 = 23$
oppure risposta “6 cammelli e 11 dromedari” senza fare riferimento agli uomini con spiegazione completa, schema o tentativi descritti, disegno esplicito
- 2 Risposta corretta, (6 uomini) senza alcuna spiegazione
oppure risposta “6 cammelli e 11 dromedari” senza fare riferimento agli uomini con spiegazione parziale
oppure risposta errata a causa di un errore di calcolo ma con procedura corretta
- 1 Determinazione soltanto del numero totale di animali: 17
oppure più tentativi, ma senza arrivare alla risposta corretta
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6

Origine: 5RMT.I.09

¹ Si riferisce all'analisi a posteriori del problema proposto durante il 5° RMT (vedere Atti Brigue 1997-1998)

9. LA VASCA (Cat. 5, 6)

Carlo desidera riempire la vasca del suo giardino con 49 litri d'acqua.

Per trasportare l'acqua dispone di tre secchi, uno da 3 litri, un altro da 4 litri e l'ultimo da 5 litri.

Carlo vuole fare il minor numero di viaggi possibile, trasportando un solo secchio alla volta, pieno fino all'orlo. Desidera però utilizzare ogni secchio almeno una volta.

Quanti viaggi dovrà fare Carlo, come minimo, per riempire la vasca?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta e dite quante volte potrebbe aver utilizzato ogni tipo di secchio per riempire la vasca.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Scomporre il numero 49 nella somma del minor numero di multipli non nulli di 3, 4, 5

Analisi del compito

- Capire che il problema contiene due vincoli: utilizzare tutti i secchi e fare il minor numero di viaggi possibile
- Rendersi conto che per fare il minor numero di viaggi, Carlo dovrà usare il più possibile i secchi più grandi
- Procedere per tentativi organizzati. Per esempio: se avesse portato 9 secchi da 5 litri avrebbe portato 45 litri; $49 - 45 = 4$; con un secchio da 4 litri avrebbe riempito la vasca, ma non avrebbe utilizzato tutti i secchi, quindi non va bene
- Se avesse portato 8 secchi da 5 litri (40 litri) avrebbe dovuto portare ancora 9 litri ($49 - 40 = 9$) che possono essere portati solo con secchi da 3, ma non avrebbe utilizzato tutti i secchi, quindi non va bene.
- Con 7 secchi da 5 litri (35 litri) restano da portare ancora 14 litri ($49 - 35 = 14$); si possono portare utilizzando due volte il secchio da 4 e due volte quello da 3. In tutto 11 viaggi. ($7 \times 5 + 2 \times 4 + 2 \times 3 = 49$)
- Con 6 da 5 (30) restano da portare ancora 19 litri; si possono portare utilizzando 4 volte il secchio da 4 e 1 volta quello da 3. In tutto 11 viaggi. ($6 \times 5 + 4 \times 4 + 1 \times 3 = 49$)
- Continuare provando ancora con 5 da 5 e 4 da 5 e rendersi conto che il numero di viaggi aumenta sempre più
- Concludere che Carlo ha potuto riempire la vasca in due modi ottimali, facendo in entrambi i casi 11 viaggi

Oppure procedere per tentativi non organizzati, che possono portare ad una soluzione, ma difficilmente permetteranno di trovarle entrambe

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (11 viaggi con le due possibilità $7 \times 5 + 2 \times 4 + 2 \times 3$ o $6 \times 5 + 4 \times 4 + 1 \times 3$) con spiegazione chiara, che evidenzia che 11 è il minor numero possibile di viaggi e che non ci possono essere altre possibilità e/o calcoli dettagliati
- 3 Risposta corretta (11 viaggi con le due possibilità), ma spiegazione da cui non si evidenzia che 11 è il minor numero possibile di viaggi e che non ci sono altre possibilità
- 2 Risposta 11 viaggi con una sola possibilità con spiegazione
oppure risposta corretta (11 viaggi con le due soluzioni complete), ma senza spiegazione
- 1 Risposta 11 viaggi e una possibilità senza spiegazione,
oppure altre soluzioni non ottimali: più di 11 viaggi ma con l'utilizzo di tutti i tipi di secchio
oppure meno di 11 viaggi, ma con l'utilizzo di solo due tipi di secchi
oppure presenza di numerosi tentativi che dimostrano la comprensione dei vincoli (utilizzare i tre recipienti e arrivare a 49)
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6

Origine: Milano

10. ALBERI DI NATALE A MILANO (Cat. 5, 6, 7)

Nello scorso dicembre, in piazza Duomo a Milano, tre alberi di Natale erano illuminati con luci a intermittenza, uno con luci rosse, uno con luci gialle e l'ultimo con luci bianche.

L'albero con le luci rosse si illuminava per otto minuti e stava spento per quattro, poi si illuminava di nuovo per otto minuti e stava spento per quattro, e così di seguito.

L'albero con le luci gialle si illuminava per nove minuti e stava spento per cinque minuti, poi si illuminava e si spegneva di nuovo sempre con lo stesso ritmo.

L'albero con le luci bianche si illuminava per undici minuti e stava spento per sette minuti, poi si illuminava e si spegneva di nuovo sempre con lo stesso ritmo.

Tutti i giorni i tre alberi venivano accesi insieme esattamente alle ore 15:00.

Quante volte, dopo le 15:00 e prima di mezzanotte, i tre alberi si riaccendevano nello stesso momento? E a che ora esattamente?

Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Determinare i momenti in cui tre avvenimenti periodici (di periodo 12, 14, 18 minuti) accadono contemporaneamente dopo una prima coincidenza, alle ore 15:00, fino a mezzanotte

Analisi del compito

- Capire che i tre alberi si illuminano e si spengono regolarmente a partire dalle ore 15, ma con ritmi diversi.
- Determinare il periodo fra due illuminamenti successivi per ognuno dei tre alberi: rispettivamente 12 minuti, 14 minuti e 18 minuti e scrivere i momenti di illuminazione successivi, dopo 12, 24, 36, 48, ... minuti dopo le 15:00 per il primo; dopo 14, 28, 42, 56, ... minuti per il secondo; dopo 18, 36, 54, 72, 90, ... minuti per il terzo e cercare dopo quanti minuti si illuminano contemporaneamente due alberi o direttamente i tre alberi.
- Scrivere la successione dei momenti di illuminazione di ciascun albero (i multipli di 12, di 14 e di 18) fino a scoprire che ce n'è uno comune oppure, utilizzando il linguaggio aritmetico, cercare il minimo comune multiplo di 12, 14 e 18: 252. Trasformare 252 minuti in ore e minuti (4 ore e 12 minuti) e sommare tale risultato all'orario della prima accensione per poter determinare i due momenti della giornata di illuminazione simultanea dopo le ore 15:00: 19:12, 23:24.

Oppure:

Scrivere le tre serie complete degli orari in cui ciascuno dei tre alberi si illumina ed individuare gli orari che compaiono in tutte e tre.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (due volte, alle 19:12 e 23:24) con spiegazione chiara del procedimento seguito
- 3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara
- o risposta "tre volte" che include anche le ore 15.00 con spiegazione chiara
- 2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione
oppure determinati i 252 minuti con spiegazione chiara ma risposta errata a causa di un errore di calcolo nella conversione delle unità in ore e minuti, oppure solo il primo orario esatto (19:12) ed errato il successivo
- 1 Inizio di ragionamento corretto: individuati alcuni multipli comuni senza trovare il minimo comune multiplo
oppure un errore nell'individuazione del minimo comune multiplo
oppure risposta "dopo 252 minuti" senza spiegazione chiara
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6, 7

Origine: Parma

11. MONETE (Cat. 5, 6, 7, 8)

Giulia possiede 20 monete: alcune monete da 1 € e altre da 2 €.

Se sostituisse le sue monete da 1 € con monete da 2 € e le sue monete da 2 € con monete da 1 €, avrebbe 4 € in più.

Quanti euro ha in tutto Giulia con le sue 20 monete?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Risolvere un sistema “elementare” di due equazioni lineari in due incognite con dei numeri naturali in un contesto di scambio di monete.

Analisi del compito

- Capire la situazione. Occorre determinare due numeri: il numero delle monete da 1 € e il numero delle monete da 2 €, per un totale di 20 monete, e non è noto il valore complessivo del denaro. Se si scambiano fra loro i numeri delle monete, il valore totale del denaro aumenterà di 4 €.
- Passare alle relazioni aritmetiche corrispondenti rispettando i vincoli per trovare ogni volta il valore totale (moltiplicazioni per 1 o per 2 e addizioni), poi aggiungere 4 per passare dalla prima alla seconda somma e infine controllare se tale somma si ottiene scambiando i numeri delle monete.
Scelto per esempio un numero di monete da 1 € (7), bisogna calcolare di conseguenza il numero di monete da 2 € ($20 - 7 = 13$), poi calcolare la somma nel primo caso ($(7 \times 1) + (13 \times 2) = 33$), poi la somma che si ottiene invertendo il numero delle monete ($(13 \times 1) + (7 \times 2) = 27$), poi confrontare le due somme e infine controllare se la seconda somma supera di 4 la prima; in questo caso non è così dunque occorre ritentare.
- Si arriverà alla soluzione con la scelta di 12 monete da 1 € e con 8 monete da 2 €: $(12 \times 1) + (8 \times 2) = 28$ e $(8 \times 1) + (12 \times 2) = 32 = 28 + 4$.
- Rendersi conto che sono inutili altri tentativi e scrivere la risposta: Giulia ha $8 \times 2 + 12 \times 1 = 28$ €.
- Per limitare i tentativi ci si può rendere conto, dai primi casi presi in considerazione, che affinché la somma aumenti occorre avere più pezzi da 1 € che da 2 €.

Oppure, per evitare i tentativi occorre rendersi conto che ogni volta che si sostituisce una moneta da 1 € con una moneta da 2 €, si guadagna 1 € sulla somma totale. Si può allora dedurre che per guadagnare 4 euro occorre rimpiazzare quattro monete da 1 € con una moneta da 2 € e che quindi le monete da 1 € sono 4 di più di quelle da 2 €. Allora tolte le monete in più, le 16 monete rimaste si ripartiscono in parti uguali dunque 8 monete da 1 € e 8 monete da 2 €, in questo modo la somma non verrebbe alterata dallo scambio.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (28 euro) con la descrizione della procedura seguita (nel caso di procedura per tentativi organizzati la lista dei tentativi deve mostrare che non è necessario farne altri per determinare un'altra soluzione)
- 3 Risposta corretta con una descrizione non chiara della procedura o una lista non organizzata di tentativi che non permettono di stabilire che la soluzione è unica
oppure risposta corretta con solo la verifica
oppure risposta “12 monete da 1 € e 8 monete da 2 €” senza il calcolo dei 28 €, con descrizione della procedura (come indicato nel punteggio 4)
- 2 Risposta corretta senza spiegazione,
oppure risposta “12 monete da 1 € e 8 monete da 2 €”, senza descrizione della procedura o con solo verifica
- 1 Risposta errata, ma con qualche tentativo che non ha portato alla soluzione
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6, 7, 8

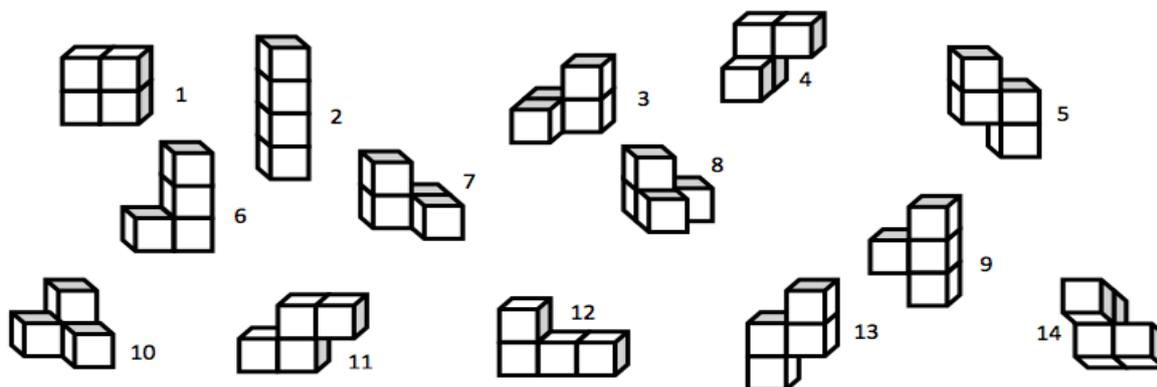
Origine: Franche-Comté

12. TETRACUBI (Cat. 6, 7, 8)

Mauro ha quattro calamite tutte uguali a forma di cubo che mette insieme, faccia contro faccia, per formare dei tetracubi.

Ogni volta che completa un tetracubo lo disegna, poi stacca i quattro cubi per fare un altro tetracubo.

Ecco i suoi disegni:



Riguardando i disegni Mauro si rende conto di aver rappresentato più volte uno stesso tetracubo.

Quanti tetracubi differenti ha disegnato Mauro?

Per ogni tetracubo differente, indicate i numeri dei disegni che lo rappresentano.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Riconoscere, tra 14 disegni di tetracubi, quelli che rappresentano lo stesso tetracubo e fare la lista dei tetracubi differenti.

Analisi del compito

- Osservare i disegni e rendersi conto che alcuni di essi rappresentano una stessa costruzione ma diversamente orientata nello spazio.
- Fare l'inventario dei differenti tetracubi riconoscendo dapprima i più "facili" da identificare.
Per esempio, quelli i cui quattro cubi possono essere disposti su uno stesso piano:
- a) l'allineamento dei 4 cubi, a forma di "I" (2); b) gli allineamenti di 3 cubi a forma di "L" (6 e 12); c) gli allineamenti di 3 cubi a forma di "T" (9); d) due allineamenti secondo piani paralleli di 2 cubi a forma di quadrato (1); e) due allineamenti paralleli di due cubi a forma di "S" (5, 11 e 13).
- Tra i sei tetracubi, i cui quattro cubi non possono essere situati su uno stesso piano,
 - f) due allineamenti secondo piani ortogonali di due cubi (3 e 14)
 - g) due allineamenti secondo piani ortogonali di due cubi (4 e 7)
 - h) un solo allineamento di due cubi: un cubo "centrale" e gli altri tre su tre delle sue facce (8 e 10)

Le categorie f) e g) sono le più difficili da distinguere; i loro tetracubi sono simmetrici rispetto ad un piano, come per esempio una scarpa destra e una scarpa sinistra.

Attribuzione dei punteggi

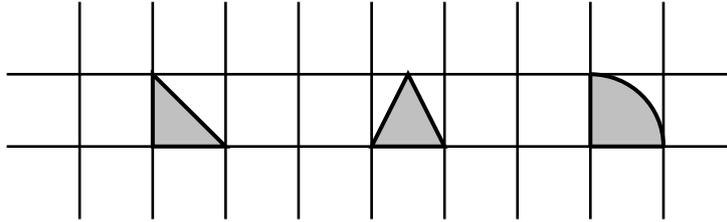
- 4 Risposta corretta (8 tetracubi differenti) e lista completa: 1 – 2 – (3/14) – (4/7) – (5/11/13) – (6/12) – (8/10) – 9
- 3 Risposta corretta (8 tetracubi differenti) con una o due dimenticanze nella lista
- 2 Risposta 7 tetracubi differenti senza distinguere «sinistra e destra»: (3/4/7/14) indicati come lo stesso tetracubo
- 1 Risposta (6 o 9 tetracubi differenti)
- 0 Incomprensione del problema o più di due errori

Livello: 6, 7, 8

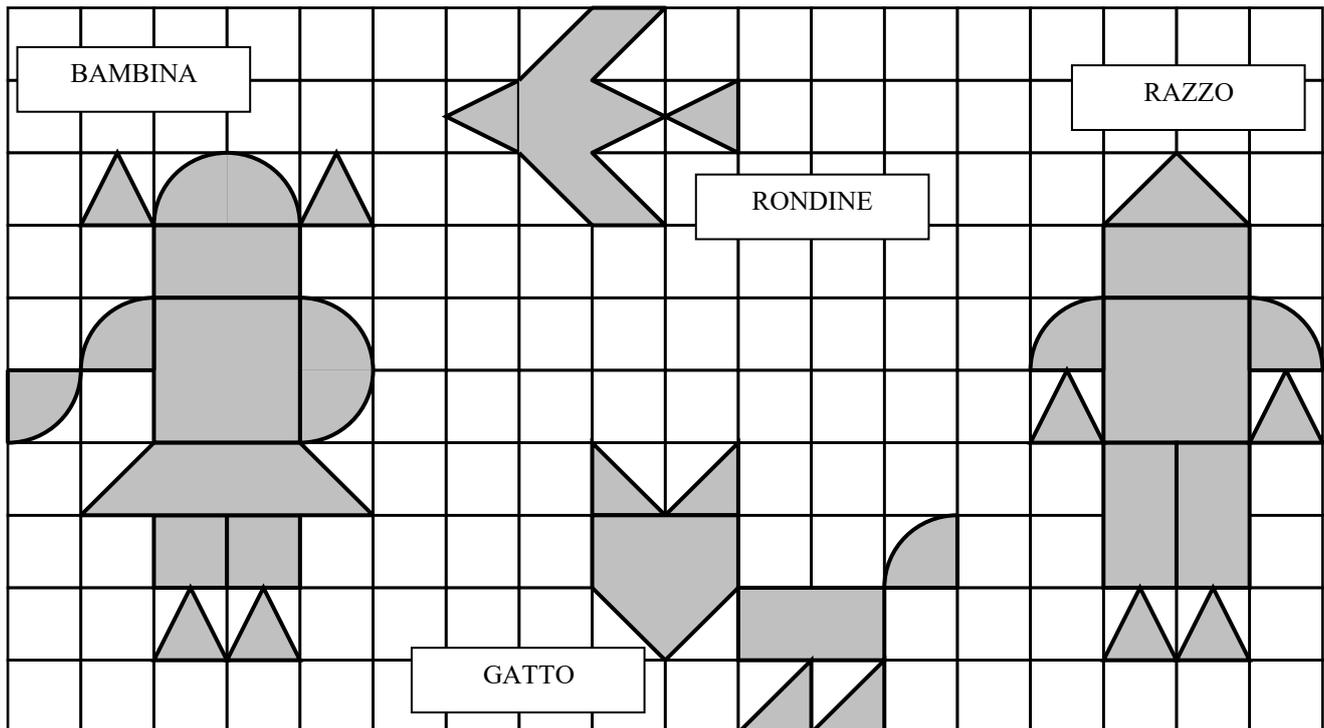
Origine: Udine

13. TESSERE MAGNETICHE (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Per giocare su un pannello metallico su cui è disegnata una quadrettatura, sono state utilizzate solo tessere magnetiche con queste tre forme.



Questi tre tipi di forme sono stati utilizzati per ottenere le figure che vedete riprodotte qui sotto: una BAMBINA, una RONDINE, un GATTO e un RAZZO.



Sono stati spesi:

18,20 € per l'acquisto delle tessere magnetiche che compongono la BAMBINA,

7,80 € per le tessere magnetiche che compongono il GATTO,

15,00 € per quelle del RAZZO.

Quanto si è speso per le tessere magnetiche che compongono la RONDINE?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

A partire da tre composizioni differenti, ottenute usando un certo numero di tessere di tre forme diverse e conoscendo il prezzo in euro di ogni composizione, determinare il costo di una quarta composizione realizzata utilizzando solo due delle tre tipologie di tessere (il che significa risolvere un sistema di tre equazioni lineari in tre incognite)

Analisi del compito

- Osservare le tre tessere distinguendo i due tipi di triangolo: un triangolo rettangolo isoscele, metà di un quadrato della quadrettatura; un triangolo isoscele con base coincidente con un lato della quadrettatura; un settore circolare corrispondente a $\frac{1}{4}$ di cerchio con raggio uguale al lato della quadrettatura.
- Comprendere che occorre esaminare le figure per determinare quante tessere di ciascun tipo sono state utilizzate. Osservare che è necessario utilizzare due pezzi "triangolo rettangolo isoscele" per ottenere l'elemento quadrato delle figure. Accorgersi inoltre, per esempio, che la testa della BAMBINA è formata da due tessere a triangolo isoscele (le

treccine), due tessere a $\frac{1}{4}$ di cerchio, e quattro tessere a forma di triangolo rettangolo isoscele (il rettangolo di due quadretti).

- Descrivere le immagini in base al numero e alla tipologia di tessere utilizzate:
 - BAMBINA: 22 tessere “triangolo rettangolo isoscele”, 6 tessere “quarto di cerchio” e 4 tessere “triangolo isoscele”
 - GATTO: 14 tessere “triangolo rettangolo isoscele”, 1 tessera “quarto di cerchio”
 - RAZZO: 22 tessere “triangolo rettangolo isoscele”, 2 tessere “quarto di cerchio” e 4 tessere “triangolo isoscele”
 - RONDINE: 6 tessere “triangolo rettangolo e isoscele” e 3 tessere “triangolo isoscele”
- Rendersi conto che la differenza di prezzo delle composizioni dipende dal numero e dalla tipologia di tessere utilizzate in ciascuna, e che quindi è necessario passare ad un confronto tra le figure. Comprendere in tal modo che la figura della BAMBINA differisce da quella del RAZZO per avere in più 4 tessere “quarto di cerchio” e ricavare quindi che il costo di una tessera di questo tipo è di 0,80 euro $[(18,20-15,00):4]$. Dalle informazioni sulla figura del gatto ricavare di conseguenza che il costo di una tessera “triangolo rettangolo isoscele” è di 0,50 euro $[(7,80-0,80):14]$.
- Per trovare la spesa per la RONDINE bisogna ancora determinare il prezzo di una tessera a “triangolo isoscele”. Quest’ultimo dato si può ricavare dalle informazioni sulla BAMBINA, o da quelle sul RAZZO, per differenza tra il costo complessivo e quello delle tessere, “triangolo rettangolo e isoscele” e “quarto di cerchio”, di cui già è stato trovato il costo. Si ottiene così che una tessera “triangolo isoscele” costa 0,60 euro. (per es., considerando la bambina il calcolo è dato da: $18,20 - [(11+4,80):4] = 0,60$).
- Dedurre infine che la spesa delle tessere per la rondine è **4,80 euro** $[6 \times 0,50 + 3 \times 0,60]$.

Oppure osservare che il GATTO è costituito solo da pezzi di due tipi, 14 tessere “triangolo rettangolo e isoscele” e solo 1 tessera “quarto di cerchio”. Essendo il costo di 7,80 €, immaginare che ciascun pezzo “triangolo rettangolo isoscele” costi 0,50 € (è evidente che si può ottenere 7 euro con 14 pezzi da 0,50 euro) e che l’altro costi 0,80 €. Verificare poi che, a partire da questi dati, si trova uno stesso prezzo per il pezzo “triangolo isoscele” sia nella BAMBINA che nel RAZZO: 0,60 €. Calcolare quindi il prezzo della RONDINE: 4,80 €.

Oppure; considerando che il triangolo rettangolo è la metà di un quadrato e che la figura GATTO è composta da 7 quadrati ipotizzare che un quadrato costi un euro e il quarto di cerchio costi 0.80. verificare l’ipotesi sulla figura BAMBINA che risulta composta da 11 quadrati, 6 quarti di cerchio e 4 triangoli isosceli. Da ciò $(18,20-15,80):4=0,60$ che è il costo di un triangolo isoscele. Un’ulteriore verifica sulla figura RAZZO confermerà l’ipotesi. Da qui calcolare il costo della figura RONDINE

Oppure (cat. 10) risolvere il sistema

$$(1) 6q + 22tr + 4ti = 18,20$$

$$(2) 1q + 14tr = 7,80$$

$$(3) 2q + 22tr + 4ti = 15 \quad \text{che ha come soluzione } q = 0,80\text{€}, tr = 0,50\text{€} \text{ e } ti = 0,60\text{€}. \text{ Calcolare quindi il prezzo totale dei pezzi della RONDINE che è } 4,80 \text{€}.$$

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (4,80 euro) con spiegazione completa (inventario dei pezzi di ogni figura, descrizione delle tappe, con calcoli successivi del valore dei differenti pezzi)
- 3 Risposta corretta senza spiegazione
oppure, procedura corretta ,ma con un errore di calcolo sia nel conteggio dei pezzi, sia nell’esecuzione di un’operazione con i numeri decimali
- 2 Procedura corretta, ma con più di un errore di calcolo nel conteggio dei pezzi e/o nell’esecuzione di una operazione con i numeri decimali
oppure determinazione corretta del numero dei pezzi di ciascun tipo in ogni figura e inizio corretto delle procedure di calcolo, ma senza arrivare alla conclusione
- 1 Inizio di ragionamento corretto (per esempio determinazione corretta del numero dei pezzi di ciascun tipo per almeno due delle quattro figure)
- 0 Incomprensione del problema

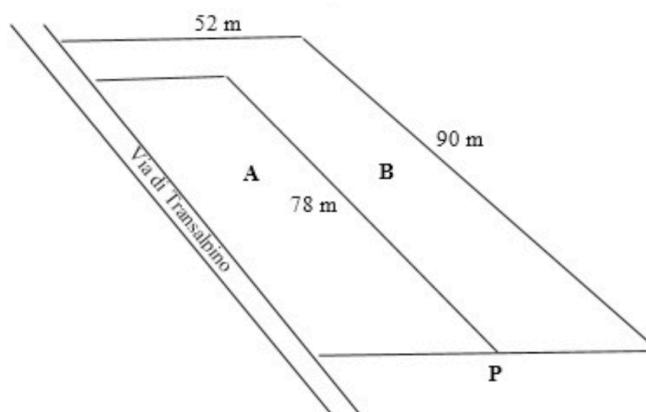
Livello: 6, 7, 8, 9, 10

Origine: Siena

14. DIVISIONE DI UN TERRENO (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Pietro e Maria hanno comprato un terreno rettangolare situato a lato della via di Transalpino e lo hanno fatto dividere in due parti A e B della stessa area.

Per lasciare il passaggio sulla strada alla parte B, il geometra ha diviso il terreno nel seguente modo: la parte A è rettangolare (di 78 m di lunghezza) e la parte B ha la forma di una L.



A quale distanza dalla strada il geometra ha fissato il punto P affinché le due parti abbiano la stessa area?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

A partire da una rappresentazione in prospettiva di due rettangoli con lunghezze assegnate, determinare le loro larghezze in modo tale che l'area del piccolo sia la metà di quella del grande.

Analisi del compito

- Capire che il disegno è uno schema in prospettiva che non permette di fare misurazioni e che la risposta deve essere ottenuta mediante calcoli, che i lati maggiori delle parti A e B sono paralleli alla strada, i lati minori delle parti sono perpendicolari alla strada e che la distanza di P dalla strada è la larghezza di A.
- Costatare che l'area totale si calcola facilmente (è un rettangolo di dimensioni 90 e 52) e che perciò si potrà calcolare l'area di ciascuna delle due parti uguali, perciò di A, che è un rettangolo di cui si conosce la lunghezza e di cui si potrà calcolare la larghezza.
- Effettuare i calcoli corrispondenti: area totale del terreno: $90 \times 52 = 4680$; area di ogni parte: $4680 : 2 = 2340$ (in m^2); larghezza della parte A: $2340 / 78 = 30$ (in m)
- Dedurre che il punto P è posizionato a 30 m dal bordo della via di Transalpino.

Oppure:

- scomporre, per esempio, la parte B in un rettangolo di dimensioni 78 m e 52 m e in un altro, per il passaggio, di 52 m e 12 m ($90 - 78 = 12$), la cui area è: $52 \times 12 = 624$ (in m^2). L'area del rettangolo restante è $78 \times 52 = 4056$ (in m^2).
- Dedurre che l'area di A corrisponde alla metà di quest'ultimo rettangolo di larghezza 26 e alla metà del passaggio di larghezza ($624 : 2$): $78 = 4$ m.

Oppure per via algebrica, esprimere l'area della parte A in funzione della sua larghezza l : $78 l$ poi quella di B $624 + 78 \times (52 - l)$. e ottenere l'equazione in l : $78 l = 624 + 78 \times (52 - l) \Rightarrow l = 30$

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (a 30 m dal bordo della strada oppure 30 m) con una giustificazione completa e chiara (indicazione dei rettangoli con le loro dimensioni, i calcoli dell'area e della larghezza o risoluzione algebrica)
- 3 Risposta corretta (a 30 m dal bordo della strada oppure 30 m) con spiegazioni poco chiare o incomplete (manca qualche operazione; oppure è esplicitata solo la verifica dell'uguaglianza delle aree di A e di B senza indicare come le dimensioni sono state trovate) oppure risposta "30 metri di larghezza per la parte A", senza fare riferimento alla strada, con spiegazioni dettagliate
- 2 Risposta corretta (a 30 m dal bordo della strada oppure 30 m) senza spiegazioni.
- 1 Inizio di ricerca, per esempio calcolata solo l'area delle due parti.
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7, 8, 9, 10

Origine: Franche-Comté

15. INTERSEZIONE (Cat. 7, 8, 9, 10)

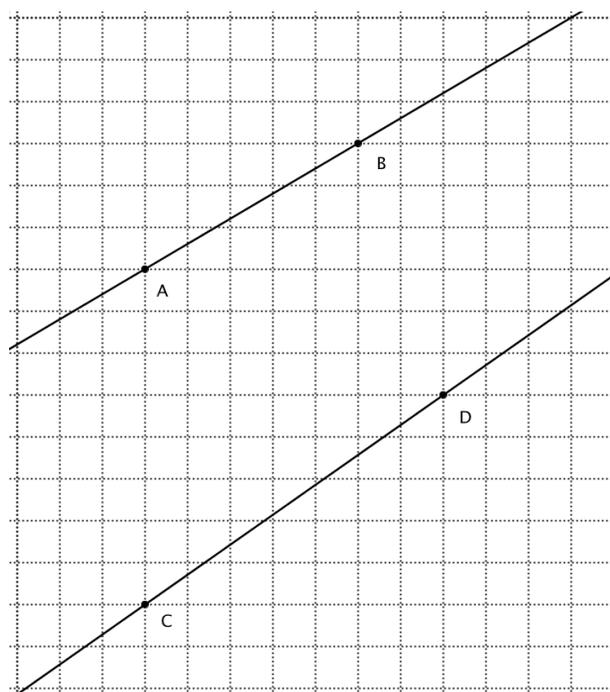
Andrea traccia due rette su un foglio di carta quadrettata: una passante per A e B, l'altra per C e D, come vedete nel disegno.

Egli osserva che se prolungasse queste due rette, su un foglio di carta quadrettata molto più esteso, le due rette si intersecherebbero.

Dove è situato questo punto d'intersezione?

(Date la sua posizione indicando di quanti quadretti ci si deve spostare verso destra e di quanti verso l'alto a partire dal punto C)

Spiegate come l'avete trovato.

**ANALISI A PRIORI****Compito matematico**

Trovare le coordinate del punto d'intersezione di due rette passanti ciascuna per due punti assegnati; i quattro punti si trovano su un foglio quadrettato; l'intersezione si trova fuori dal foglio.

Analisi del compito

- Osservare che la retta AB, a partire da A, si innalza di 3 quadretti per uno spostamento orizzontale verso destra di 5 quadretti e che la retta CD, a partire da C, si innalza di 5 quadretti per uno spostamento orizzontale di 7 quadretti. Osservare inoltre che fra A e C c'è uno scarto di 8 quadretti.
 - A partire da queste informazioni, disegnare le rette su un foglio quadrettato più grande o prolungarle su altri fogli e constatare che questa procedura esige una grande precisione per arrivare a trovare le "coordinate" del punto di intersezione, per esempio segnando progressivamente tutti i punti della retta (AB) che sono sulle intersezioni della quadrettatura (di 5 in 5 secondo le ascisse) e verificandone i punti corrispondenti della retta (CD) della stessa ascissa.
- Oppure: per via aritmetica, calcolare che per uno spostamento verso destra di 35 quadretti (mcm di 5 e 7), la retta (AB) "sale" di 21 quadretti (7 x 3) e la retta (CD) "sale" di 25 quadretti (5 x 5) quindi che le due rette si sono "avvicinate" di 4 quadretti (25 - 21).
- Osservare allora che bisogna dunque ancora spostarsi di 35 quadretti orizzontalmente verso destra affinché le rette si intersechino (poiché i punti A e C sono distanti di 8 quadretti). Il punto di intersezione è quindi a 70 quadretti a "destra" di C e 50 quadretti più "in alto" di C.

Oppure per via algebrica: determinare in un sistema di assi ortogonali, l'intersezione di due rette. Per esempio, con il punto C come origine le equazioni delle rette (CD) e (AB) sono: $y = 5/7x$ et $y = 3/5x + 8$ la cui intersezione è (70; 50).

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (70 quadretti orizzontalmente verso destra e 50 verso l'alto a partire da C) con spiegazione chiara e precisa (disegno, tabella di valori comparativi, sistema di equazioni)
- 3 Risposta corretta con spiegazione insufficiente
oppure risposta errata causata da un errore di calcolo (ad esempio nella risoluzione del sistema di equazioni) ma spiegazione chiara
- 2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione
oppure risposta imprecisa con uno scarto di 1 o 2 quadretti a causa di un disegno poco preciso
- 1 Inizio di ragionamento corretto (abbozzo di una tabella di valori, scrittura delle equazioni, disegno con imprecisione da 3 a 5 quadretti)
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8, 9, 10

Origine: Suisse Romande

16. ORTO QUADRATO (Cat. 7, 8, 9, 10)

Cesare possiede un terreno di forma quadrata. Una parte del terreno, ancora di forma quadrata, è riservata all'orto. L'area della superficie restante è di 75 m^2 .

Quanto potrebbero misurare il lato del terreno e quello dell'orto, sapendo che entrambe le misure sono espresse da numeri interi?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico:**

Trovare le coppie di numeri naturali tali che la differenza dei loro quadrati sia 75, in un contesto di terreni quadrati.

Analisi del compito

- Rappresentarsi i due quadrati sapendo solamente che il secondo è “una parte del primo”, cioè che uno è “interamente” contenuto nel secondo (lati paralleli o no). Superata l'incertezza delle relative posizioni, capire che occorre fare riferimento alle aree non ancora note di due quadrati e ai 75 m^2 della superficie che resta.
- Passare alle relazioni aritmetiche fra queste tre aree e riformulare il problema per la ricerca di due numeri la cui differenza sia 75
- Prendere in conto la formula dell'area del quadrato e l'esigenza di misure intere dei lati per restringere il problema nell'insieme dei numeri naturali alla ricerca di due numeri quadrati la cui differenza sia 75.
- Si può procedere per via aritmetica per tentativi organizzati, per esempio a partire da aree successive del quadrato piccolo 1, 4, 9, 16, 25, calcolare le aree corrispondenti del grande che valgono 75 di più e verificare se possono essere aree di un quadrato: (1 ; 76), (4 ; 79), (9 ; 84), (16 ; 91), (25 ; **100**) oppure $5^2 = 25$; $10^2 = 100$, non fermarsi alla prima soluzione, ma continuare ... (81 ; 156), (100 ; 175), ($11^2 = 121$; **196** = 14^2), ... ($37^2 = 1369$; **1444** = 38^2). Constatere che bisogna fermarsi lì perché la differenza fra due quadrati successivi di numeri maggiori di 38 sarà maggiore di 75.
La procedura per tentativi comporta una ricerca progressiva e un controllo sistematico di ciascuna coppia individuata mediante l'uso della calcolatrice, ma anche la percezione della progressione della differenza fra due quadrati successivi (molto probabilmente la soluzione 37 e 38 non comparirà con questo procedimento né si andrà oltre con i controlli).
- La procedura algebrica consiste nel risolvere l'equazione $x^2 - y^2 = 75$, successivamente nel trasformarla in $(x - y)(x + y) = 75$ e trovare le tre coppie (di divisori di 75) il cui prodotto è 75: 1×75 ; 3×25 e 5×15 . Si determinano così le soluzioni 37 e 38; 11 e 14; 5 e 10. (Come ben sappiamo dispongono di questa procedura solo gli insegnanti oppure gli allievi che hanno familiarità con le equazioni, con i prodotti notevoli, con la fattorizzazione, ...)
- Una procedura può anche essere presa in considerazione a partire da considerazioni geometriche sul quadrato piccolo (di lato a) e sul grande (di lato $a + b$) le cui aree sono rispettivamente a^2 e $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e la cui differenza è rappresentata da un quadrato b^2 e due rettangoli ab . Questa differenza $2ab + b^2$ si può scrivere $b(2a + b) = 75$ per fattorizzazione. Se ne ricavano i tre valori di b (divisori di 75): 1, 3 e 5, che danno i tre valori positivi di a : 37, 11 e 5 e i tre valori corrispondenti di $a + b$: 38, 14 e 10, che danno le misure dei due quadrati: (38 e 37 m; 14 e 11 m, 10 e 5 m).

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta e completa (38 m e 37 m; 14 m e 11 m, 10 m e 5 m) con qualche verifica da cui risulti che non ci sono altre soluzioni
- 3 Risposta corretta completa senza spiegazioni oppure solo le due soluzioni 14 m e 11 m, 10 m e 5 m con spiegazioni chiare
- 2 Trovate due sole possibilità con spiegazione poco chiara
- 1 Inizio di ragionamento corretto oppure individuazione di una sola soluzione
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8, 9, 10

Origine: Siena

17. LA SCATOLA DI CUBI (Cat. 8, 9, 10)

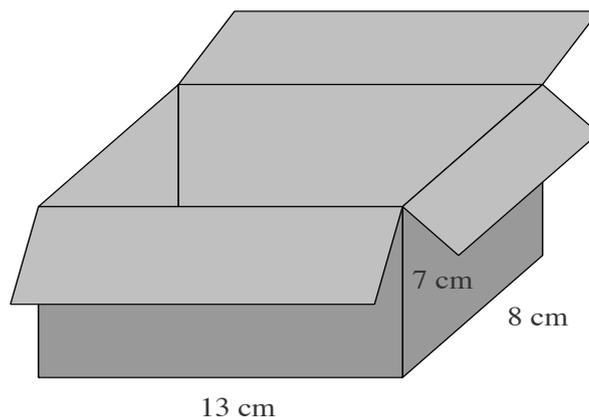
Francesco ha una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo di dimensioni interne 13 cm, 8 cm e 7 cm.

Egli dispone di molti cubi di legno, alcuni con lo spigolo di 2 cm, altri di 1 cm.

Francesco vuole riempire completamente la scatola con il minor numero possibile di cubi.

Quanti cubi di ciascun tipo deve utilizzare?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

**ANALISI A PRIORI****Compito matematico**

Scomporre un parallelepipedo rettangolo di dimensioni date nel numero minimo di cubi di 1 e di 2 cm di spigolo.

Analisi del compito

- Anche se il calcolo del volume della scatola diviso per il volume di un cubo di 2 cm di spigolo dà un risultato intero ($728 : 8 = 91$), rendersi conto che non si può riempire completamente la scatola utilizzando unicamente dei cubi di 2 cm di spigolo.
- Constatere che si possono mettere al massimo 72 cubi di spigolo 2 cm nella scatola ($6 \times 3 \times 4 = 72$) oppure ($12 \times 8 \times 6$): $8 = 72$).
- Rendersi conto che per riempire la scatola si devono aggiungere dei cubi di 1 cm di spigolo in lunghezza e in altezza.
- Si possono prevedere numerosi metodi per trovare il numero dei cubi di 1 cm di spigolo:
calcolare il volume del parallelepipedo (728 cm^3) e quello occupato dai cubi di spigolo 2 cm ($72 \times 8 = 576 \text{ cm}^3$), fare la differenza ($728 - 576$) e trovare 152 cm^3 che è il volume occupato dai cubi di spigolo 1 cm; ricavare che 152 esprime anche il numero di tali cubi;
oppure contare direttamente i cubi di 1 cm di spigolo: l'ultimo strato in altezza (7 è un numero dispari) 13×8 e l'ultima "parete" in lunghezza (13 è un numero dispari) 7×8 e togliendo gli 8 cubi comuni allo strato e alla "parete" $7 \times 8 + 13 \times 8 = 160$; $160 - 8 = 152$.
- Oppure rappresentare uno strato (formato, per esempio, da $6 \times 4 = 24$ cubi di 2 cm di spigolo e da $8 \times 2 = 16$ cubi di 1 cm di spigolo) ripetuto 3 volte, poi un ultimo strato $13 \times 8 = 104$ cubi, per un totale di $16 \times 8 + 104 = 152$ cubi di 1 cm di spigolo.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (72 cubi di 2 cm di spigolo; 152 cubi di 1 cm di spigolo) con spiegazione chiara
- 3 Risposta corretta con spiegazione poco chiara
oppure, procedimento corretto con spiegazione chiara, ma con errori di calcolo (la risposta 160 per il numero dei cubetti di 1 cm di spigolo è da considerare come errore di ragionamento e non come semplice errore di calcolo)
- 2 Risposta corretta per il numero di un solo tipo di cubetti con spiegazione chiara e risposta errata per l'altro
- 1 Trovato correttamente uno solo dei due numeri senza spiegazione
- 0 Incomprensione del problema o risposta "91 e 0"

Livello: 8, 9, 10

Origine: Ripreso dal problema 16.2.12 (cat. 6, 7)

18. PERIMETRO E AREA (Cat. 9, 10)

Il signor Poli colleziona poligoni. Disegna ciascuno di essi su un foglio che poi sistema in una delle sue numerose cartelle.

La cartella "Quadrilateri con quattro angoli retti" inizia con la lista dei poligoni in essa classificati. Poli ha annotato, per ciascun poligono, il suo numero d'ordine, le dimensioni di cui ha preso le misure in cm, il perimetro e l'area che ha calcolato.

Ecco le prime righe della sua lista:

Poligono	Lunghezza dei lati (cm)	Perimetro (cm)	Area (cm ²)
1	10,5 e 2	25	21
2	13 e 13	52	169
3	3 e 1,5	9	4,5
4	10 e 2,5 ☺	25	25
5	... e ... ☺		
6	... e ... ☺☺		
7	... e ... ☺☺☺		

Quando ottiene lo stesso numero nelle due ultime colonne di una medesima riga, è contento e mette un segno:

- mette un ☺, se uno dei due numeri della colonna "lunghezze dei lati" è un numero intero e l'altro non è un numero intero (il poligono numero 4 per esempio);
- mette due ☺☺ se i due numeri della colonna "lunghezze dei lati" sono numeri interi differenti;
- mette tre ☺☺☺ se i due numeri della colonna "lunghezze dei lati" sono uguali.

Completate le tre righe dei poligoni 5, 6 e 7.

(per il poligono 5, ci sono molte soluzioni; è sufficiente metterne una, diversa da quella della quarta riga)

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.**ANALISI A PRIORI****Compito matematico**

Trovare i rettangoli le cui misure del perimetro in cm e le misure dell'area in cm², sono uguali.

Analisi del compito

- Capire che la tabella si riferisce a dei rettangoli, verificare i calcoli per le prime quattro righe, vedere che c'è un quadrato nella seconda... e ricordarsi come si trovano il perimetro e l'area di un rettangolo: $p = 2(a + b)$ e $A = ab$
- Procedere per tentativi in ambito aritmetico con dei rettangoli di cui si fissa una dimensione e si fa variare l'altra: per esempio, se si sceglie 10 (cm) per una dimensione, qualche tentativo conduce alla soluzione (corrispondente al poligono 4 della tabella)

dimensioni, in cm:	10 e 1	10 e 2	10 e 3	10 e 2,5
area, in cm ²	10	20	30	25
perimetro in cm	22	24	26	25
- Procedere per equazioni con dei rettangoli di cui si fissa una dimensione e si fa variare l'altra per esempio, se si sceglie 7, per trovare il rettangolo di cui uno dei lati misura $a = 7$ cm e l'altro è da determinare, si scrive l'equazione $p = 14 + 2b$ e $A = 7b$ da cui si deduce $5b = 14$, da dove $b = 14/5 = 2,8$.
- In modo più generale, in ambito algebrico, scrivere le condizioni $p = 2(a + b)$, $A = ab$ e $p = A$, cosa che dà l'equazione $ab = 2(a + b)$ oppure $b = 2a/(a - 2)$ le cui soluzioni sono, per i valori interi di a :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	-----	-----

b -1 - 6 4 10/3 3 2,8 8/3 18/7 2,5

L'inventario qui sopra dà le dimensioni possibili:

per il poligono 5: (5 ; 10/3), (7 ; 2,8), (8 ; 8/3), (9 ; 18/7), ...

per il poligono 6: (3 ;6) oppure (6 ; 3)

per il poligono 7: (4 ; 4) che si sarebbe potuto anche trovare risolvendo direttamente l'equazione $a^2 = 4a$, ottenuta da $ab = 2(a + b)$ ponendo $a = b$

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (una coppia corretta per il poligono 5; (3 e 6) per il poligono 6 e (4 e 4) per il poligono 7) con spiegazioni chiare e complete: tabella di valori, equazione o lista dei tentativi, o verifica per ciascun poligono
- 3 Risposta corretta (i tre poligoni) senza spiegazioni o spiegazioni solo per uno o due poligoni o risposta corretta per il poligono 5 e per uno degli altri due, con spiegazioni chiare
- 2 Risposta corretta per il poligono 5 e uno degli altri due, senza spiegazioni o risposta corretta per i poligoni 6 e 7 con spiegazioni chiare o risposta corretta per il poligono 5, con spiegazioni
- 1 Inizio di ricerca coerente (un solo poligono)
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: da un'idea del Lussemburgo, rivisto da dm e fj

19. UN NUMERO ATTRAENTE (Cat. 9, 10)

Il professore dice ai suoi allievi:

“Ciascuno di voi scriva una successione di numeri seguendo le seguenti regole.

- Il primo termine è un numero a vostra scelta.
- Per trovare il secondo termine della successione, dividete per 2 il primo e aggiungete 1.
- Per trovare il terzo termine, dividete per 2 il secondo e aggiungete 1.
- Continuate così: per trovare un nuovo termine, dividete il precedente per 2 e aggiungete 1.

Che cosa potete osservare?”

Anna sceglie 50 come primo termine. Ecco l’inizio della sua successione: 50; 26; 14; 8; 5; 3,5; ...

Bernardo sceglie il suo primo termine tra 3 e 10.

Caterina sceglie, come primo termine, un numero non intero compreso fra 0 e 1.

Daniela ha scelto come primo termine un numero negativo.

Ad un certo momento Anna dice:

“La differenza tra due termini successivi della mia successione è sempre più piccola, a me sembra che questi termini si avvicinino ad un numero e che, continuando la mia successione, io possa arrivare vicino a questo numero quanto voglio.”

Bernardo, Caterina e Daniela affermano:

“E’ così anche per noi, anche i termini della nostra successione si avvicinano ad un numero”.

Qual è il numero a cui si avvicinano i termini della successione di Anna?

E i numeri ai quali si avvicinano le successioni di Bernardo, Caterina e Daniela?

Spiegate perché i termini delle quattro successioni sembra che si avvicinino ad un numero al quale ci si può avvicinare quanto si vuole.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Constatate e spiegate la convergenza verso 2 della successione definita per ricorsione: $u_{n+1} = u_n/2 + 1$

Analisi del compito

- Verificare l’inizio della successione di Anna, continuare per constatare che i termini si avvicinano sempre di più a 2
50; 26; 14; 8; 5; 3,5; 2,75; 2,375; 2,1875; 2,09375; 2,046...; 2,023...; 2,011...; 2,005...; ...; 2,000...;
- Costruire la successione di Bernardo, per esempio a partire da 6:
6; 4; 3; 2,5; 2; 25; 2,125; 2,062...; 2,031...; 2,015...; 2,007...; ...; 2,000...
di Caterina, per esempio a partire da 0,5:
0,5; 1,25; ; 1,625; 1,812...; 1,906...; 1,953...; 1,976...; 1,988...; 1,994...; 1,997...; 1,998...; 1,999...; ...
di Daniela, per esempio, a partire da -18:
-18; -8; -3; -0,5; 0,75; 1,375; 1,687...; 1,843...; 1,921...; 1,960...; 1,980...; ...; 1,999...; ...
- Confrontare i risultati e concludere che per ciascuna delle quattro successioni il numero a cui ci si avvicina è 2 e che ogni volta gli scarti fra un numero della successione e 2 vengono divisi per 2
- Ci si può convincere di questa “convergenza verso 2” costruendo altre successioni.
- Per una possibile spiegazione si può indicare con una lettera il numero di partenza, per esempio d, poi calcolare i termini della successione:
 $d; d/2 + 1; d/4 + 1/2 + 1; d/8 + 1/4 + 1/2 + 1; d/16 + 1/8 + 1/4 + 1/2 + 1; d/32 + 1/16 + 1/8 + 1/4 + 1/2 + 1;$

e, per esempio, constatare che il primo elemento di ciascun termine è diviso successivamente per le potenze di 2 ($d/2^n$ al variare di n in \mathbb{N}), e che, per conseguenza, a partire dal 10° termine si avvicinerà al millesimo $d/1024$; $d/2048$; ... cioè trascurabile. Le parti dei termini da prendere in considerazione si limiteranno a $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots + 1/1024 + 1/2048 + \dots$, somma che si avvicina a 2.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta completa (le quattro successioni si avvicinano a 2) con i dettagli delle successioni i cui termini successivi differiscono di meno di un centesimo (fino a 2,00... oppure 1,99...) e una spiegazione per il caso generale basata sull'osservazione che la differenza fra i risultati successivi e 2 è ogni volta divisa per 2 o comparsa della successione $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$
- 3 Risposta completa (le quattro successioni si avvicinano a 2) con i dettagli delle successioni i cui termini successivi differiscono solamente di un decimo (fino a 2,0... oppure 1,9...) con una spiegazione poco chiara per il caso generale
- 2 Risposta completa (le quattro successioni si avvicinano a 2) con solamente due o tre successioni di calcoli ricorrenti oppure risposta "tre successioni si avvicinano a 2" con un errore di calcolo nell'altra o senza averla verificata, con dettagli precisi
- 1 Costruite due o tre successioni, ma senza conclusione
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10**Origine: Franche-Comté**