

22° Rally Matematico Transalpino, prova finale

	<i>Titolo</i>	<i>Categorie</i>	<i>Origine</i>	<i>Ambiti</i>
1	La torta quadrata	3 4	1.F.8	geometria
2	La varicella	3 4	LU	aritmetica
3	Percorsi sui fiammiferi	3 4 5	1.F.10	Combinatoria
4	Il tappeto della Signora Ladoccia	3 4 5	lg-fj	geometria, misure, calcolo
5	Finestre illuminate	3 4 5	SI	Logica
6	Caramelle	4 5 6	PR	aritmetica, combinatoria
7	Tom e Lulù	5 6	LU	aritmetica
8	Il frutteto di zia Maria	5 6 7	AO	Aritmetica
9	Quanti parallelogrammi	5 6 7	LU	Geometria
10	Fette di torta	6 7 8	BB	aritmetica, frazioni
11	Non così semplice	6 7 8	BB	aritmetica, numeri decimali
12	Lascia o triplica	6 7 8 9	LO	Aritmetica
13	L'asino Marcovaldo	7 8 9 10	RV	logica aritmetica
14	I grandi lavoratori	7 8 9 10	LU	Aritmetica
15	Bilancia a molla	8 9 10	FC	funzioni
16	Una nuova macchina	8 9 10	CB	aritmetica, percentuali
17	Boccia da competizione	9 10	FC	Volumi
18	Dopo 2013	9 10	fj	somme di una successione di frazioni
19	La crisi	10	FC	decrescenza esponenziale

I problemi del RMT sono protetti da diritti di autore.

Per un'utilizzazione in classe deve essere indicata la provenienza del problema inserendo la dicitura "©ARMT".

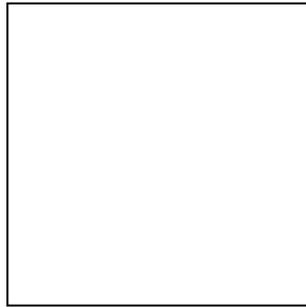
Per un'utilizzazione commerciale, ci si può mettere in contatto con i coordinatori internazionali attraverso il sito Internet dell'Associazione del Rally Matematico Transalpino (www.armtint.org).

1. LA TORTA QUADRATA (Cat. 3, 4)

Quattro bambini si ritrovano per mangiare una torta quadrata.

- Ogni bambino vuole chiaramente avere la stessa quantità di torta degli altri;
- due bambini vogliono una fetta di torta di forma quadrata;
- gli altri due bambini vogliono una fetta di torta di forma triangolare.

Disegnate, su questo quadrato, una suddivisione che possa soddisfare ogni bambino:



ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Dividere un quadrato in quattro parti di area uguale: 2 quadrati, 2 triangoli

Analisi del compito

- Capire i vincoli del problema: dividere il quadrato in quattro parti, due quadrati e due triangoli, di area uguale.
- Strategia per tentativi di quadrati ritagliati, poi di triangoli (probabilmente rettangoli).
- Strategia deduttiva:
- dedurre dai dati che ogni parte quadrata rappresenta $1/4$ del quadrato iniziale;
- capire che per dividere il quadrato iniziale in 4 parti quadrate identiche, bisogna dividere il lato del quadrato in 2 segmenti della stessa lunghezza (*figura 1*)
- capire che bisogna tenere 2 di questi quadrati e trasformare lo spazio occupato dagli altri 2 quadrati in 2 triangoli;
- capire che 2 quadrati adiacenti possono essere divisi in 2 triangoli rettangoli identici (quindi della stessa area di ogni quadrato): la spiegazione non è richiesta (ma un controllo tramite ritaglio e sovrapposizione è possibile), poi fare i disegni corrispondenti (vedi esempio *figura 2*).

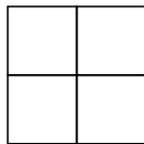


figura 1

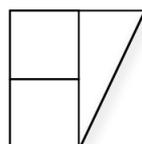


figura 2

- Capire che ogni bambino deve avere l'equivalente di un quadrato. Dividere un quadrato in due semi-quadrati e cercare, come è possibile, di ottenere un triangolo mettendo insieme due semi-quadrati (assemblaggio lungo un lato dell'angolo retto). Si ottiene un triangolo rettangolo isoscele che ha per lato dell'angolo retto una diagonale di un quadrato. Cercare in seguito, come è possibile, sistemare 2 di questi triangoli in un quadrato 2×2

Attribuzione dei punteggi

- 4 Soluzione corretta con disegno preciso e completo
- 3 Soluzione completa con disegno ambiguo (per esempio i triangoli sono evidenti, ma non chiaramente delimitati, figure troppo caricate da tracciati inutili ...)
- 2 La divisione in 4 quadrati è stata realizzata, ma i 2 triangoli non sono stati trovati o sono sbagliati
- 1 Tentativo con dei quadrati o dei triangoli identici, ma ricerca non conclusa oppure divisione in due triangoli rettangoli (mezzi quadrati), senza andare oltre
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4

Origine: 1.F.8

2. LA VARICELLA (Cat. 3, 4)

Nella classe di Anna, ci sono quattro femmine di più dei maschi.

Oggi, a causa di un'epidemia di varicella, la metà dei maschi e la metà delle femmine sono ammalati e non sono venuti a scuola.

In classe, restano solo 14 alunni.

Quante femmine e quanti maschi sono ammalati?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare 2 numeri, la cui somma sia uguale a 14 e la differenza del doppio dei due numeri sia uguale a 4.

Analisi del compito

- Capire i vincoli aritmetici del problema (vedi compito matematico).
- Le strategie seguenti sono più rapide o più economiche se gli alunni si rendono conto che i numeri totali delle femmine e dei maschi sono pari (affinché se ne possa prendere la metà).
- Strategia per prove e correzioni di numeri che rispettano i vincoli enunciati successivamente: prova (ipotesi) che rispetta i 4 alunni di differenza, calcolo della metà di ogni numero (malati o presenti), addizione dei resti e verifica per sapere se questa somma è 14.
- Strategia per inventario dei casi, per esempio cominciando l'elenco da 2 maschi e quindi da 6 (2 + 4) femmine e verifica della 2^a condizione (questa organizzazione può comparire, ma difficilmente sotto forma di tabella), per esempio:

Maschi	Femmine	Metà dei maschi	Metà delle femmine	Somma delle metà
2	6	1	3	4
4	8	2	4	6
6	10	3	5	8
...

L'inventario può arrestarsi quando si raggiunge la somma 14, osservando che il seguito delle somme è crescente.

- Procedere nello stesso modo, ma partendo dagli alunni malati (o presenti) e considerando che ci sono 2 femmine di più dei maschi.
- Capire che in ognuna delle due metà di alunni, il numero delle femmine supera di due il numero dei maschi, poiché sottraendo 2 da 14 si ottiene due volte il numero dei maschi presenti. Di conseguenza, il calcolo $(14 - 2) : 2 = 6$ dà il numero dei maschi presenti e $6 + 2 = 8$ il numero delle femmine presenti.
- Ragionare partendo dal numero iniziale di alunni ($28 = 14 \times 2$). Sottraendo le 4 femmine di più, si ottiene il doppio del numero dei maschi ($24 = 28 - 4$). Dedurre il numero dei maschi ($12 = 24 : 2$) e quello delle femmine ($16 = 12 + 4$), poi il numero dei maschi e delle femmine ammalati (la metà dei numeri precedenti). Questo ragionamento può anche condurre a questa serie di calcoli: $(28 - 4) : 2 = 12$, $12 + 4 = 16$, $12 : 2 = 6$, $16 : 2 = 8$.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Le due risposte corrette (8 femmine ammalate, 6 maschi ammalati) con spiegazioni chiare e dettagliate.
- 3 Una delle due risposte corrette con spiegazioni chiare e dettagliate e l'altra assente o errata (a causa di un errore di calcolo) oppure le due risposte corrette con spiegazione assente o incompleta.
- 2 Procedura corretta, ma risposte errate dovute ad un errore di calcolo oppure risposte che rispettano le quantità totali degli alunni (16 femmine e 12 maschi)
- 1 Inizio di ricerca coerente oppure risposte del tipo "9 femmine e 5 maschi" (totale = 14 e differenza = 4)
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4

Origine: dal problema "Tom e Lulù" Lussemburgo

3. PERCORSI SUI FIAMMIFERI (Cat. 3, 4, 5)

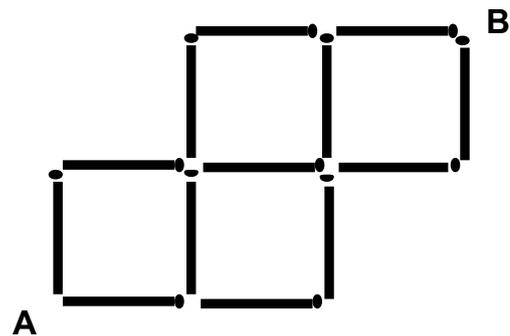
Tre bambini hanno fatto un disegno con i fiammiferi.

Cercano i percorsi più corti che vadano da A a B, immaginando di camminare sui fiammiferi.

Antonio dice: *Ci sono 5 percorsi diversi;*

Berta gli risponde: *Io ne ho trovati 7, due più di te, e non ce ne sono altri;*

Zoe non è d'accordo: *Vi sbagliate, ci sono 10 percorsi diversi*



Tra questi tre bambini, ce n'è uno che ha ragione?

Spiegate perché e mostrate bene come avete fatto per rispondere.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare tutti i percorsi che possono essere tracciati su una porzione di quadrettatura, spostandosi unicamente verso l'alto o verso destra.

Analisi del compito

Rendersi conto che, visti i pareri divergenti, la sfida del problema è di determinare il numero di percorsi diversi, dopo aver constatato che i percorsi più corti sono costituiti da 5 fiammiferi: 3 → e 2 ↑.

- Capire i vincoli del problema e le loro conseguenze: un percorso di 5 fiammiferi può essere realizzato solo spostandosi verso destra o verso l'alto.
- Strategia per tracciati effettivi dei percorsi, senza organizzazione all'inizio, poi con un'organizzazione progressiva, cercando di ottenere dei percorsi diversi da quelli già ottenuti. Bisogna sottolineare che gli otto percorsi, di colore diverso, su uno stesso disegno sono assolutamente illeggibili e che sta agli alunni pensare di tracciare i percorsi su più disegni.

Oppure: scrivere su ogni estremità, a partire da A, il numero di percorsi che ci arrivano e, quando c'è un'intersezione, di calcolare la somma dei due percorsi che ci arrivano.

	2	5	8 (B)
1	2	3	3
0 (A)	1	1	

Oppure: Cambiare modalità utilizzando una codifica del tipo a (verso l'alto) e d (verso destra) e cercare di riprodurre tutte le sequenze di 5 lettere compatibili con la porzione di quadrettatura rappresentata dai fiammiferi. La ricerca di tutte le sequenze può essere organizzata o no. Si può prendere in considerazione una rappresentazione ad albero (con due a e tre d) o semplicemente la ricerca delle permutazioni di $3d$ e $2a$ eliminando quelle che non rispettano i vincoli legati al disegno, per esempio tre d di seguito o due a di seguito all'inizio:

ddada ddaad dadada daadd addda addad adadd

In tutti i casi, terminare contando i percorsi per poter affermare che nessuno dei tre bambini ha ragione.

Attribuzione dei punteggi

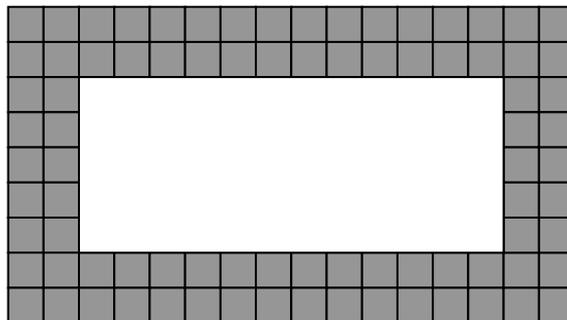
- 4 Risposta corretta (i tre bambini hanno torto perché ci sono 8 percorsi), con tracciati che si distinguono bene o rappresentazione con una serie di simboli
- 3 Risposta corretta (i tre bambini hanno torto perché ci sono 8 percorsi), ma tracciati poco leggibili (tutti sullo stesso disegno) oppure 8 tracciati espliciti, ma risposta "i tre bambini hanno torto" non formulata
- 2 Un dei bambini ha ragione (7 o 10 tracciati) oppure i tre hanno torto con 6 o 7 percorsi tracciati in modo esplicito oppure conteggio di più di 8 percorsi, con almeno 6 percorsi tracciati rispettando i vincoli dell'enunciato (errore di conteggio dovuto a dei tracciati sovrapposti)
- 1 Risposta con 4 o 5 tracciati
- 0 Incomprensione del problema oppure non più di 3 percorsi tracciati

Livello: 3, 4, 5

Origine: 1.F.10

4. IL TAPPETO DELLA SIGNORA LADOC CIA (Cat. 3, 4, 5)

La signora Ladoc cia ha un bel tappeto nella sua stanza da bagno, con due strisce di quadrati grigi sul bordo e una parte centrale bianca. Ecco un disegno del suo tappeto:



Alla signora piacerebbe comperarsi un nuovo tappeto.

Il nuovo tappeto deve avere la stessa lunghezza di quello che ha già.

La larghezza della parte bianca del nuovo tappeto, però, deve essere il doppio della larghezza della parte bianca del primo tappeto.

Desidera, inoltre, che anche il nuovo tappeto abbia due strisce di quadrati grigi sul bordo, come sul primo tappeto.

Quanti quadrati grigi ci saranno sul bordo del nuovo tappeto?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Dato un rettangolo circondato da due strisce di quadrati, trovare quanti quadrati compongono le doppie strisce che circondano un rettangolo della stessa lunghezza del primo e di larghezza doppia.

Analisi del compito

- Capire innanzitutto che la parte bianca del nuovo tappeto raddoppia solo nel senso della larghezza.
- Una prima strategia consiste nel costruire o immaginare il nuovo rettangolo e nel trovare un metodo di conteggio dei quadrati grigi.
 - Per fare questo, dopo aver osservato il disegno, determinare che la parte bianca del nuovo tappeto deve avere il doppio della larghezza dell'altro, ma la stessa lunghezza e quindi che la parte bianca del nuovo tappeto è un rettangolo di 12×10 (cioè 120 quadrati) e che il nuovo tappeto è un rettangolo di 16×14 (cioè 224 quadrati)
- Per determinare il numero di quadrati del bordo, è possibile utilizzare:
 - una procedura di conteggio di tutti i quadrati grigi su un disegno;
 - una procedura di conteggio dei quadrati grigi immaginando, per esempio, il nuovo tappeto circondato da una prima striscia grigia fissata alla parte bianca composta da $12 + 12 + 10 + 10 + 4$ quadrati (in riferimento al «perimetro»), poi da una seconda striscia composta da $14 + 14 + 12 + 12 + 4$ quadrati per un totale di 104 quadrati;
- Una seconda strategia consiste nel contare il numero dei quadrati grigi del primo tappeto (stesse procedure di qui sopra, ciò che dà 84 quadrati) e nel contare i quadrati grigi aggiunti nella «trasformazione» dal tappeto iniziale nel tappeto finale, i quadrati grigi essendo aggiunti solo su ciascuna delle larghezze, cioè 10 quadrati (2 volte 5) per ogni larghezza, dunque in tutto 20 quadrati grigi di più del tappeto iniziale, cioè 104 quadrati ($84 + 20 = 104$).

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (104 quadrati grigi) con spiegazione chiara e completa
- 3 Risposta corretta con una spiegazione incompleta
- 2 Risposta corretta senza spiegazione
oppure risposta errata dovuta a un errore di conteggio o di calcolo
- 1 Inizio di ragionamento corretto che mostra la comprensione del problema
- 0 Incomprensione del problema (per esempio, nuovo tappeto «doppio» dell'intero vecchio tappeto)

Livello: 3, 4, 5

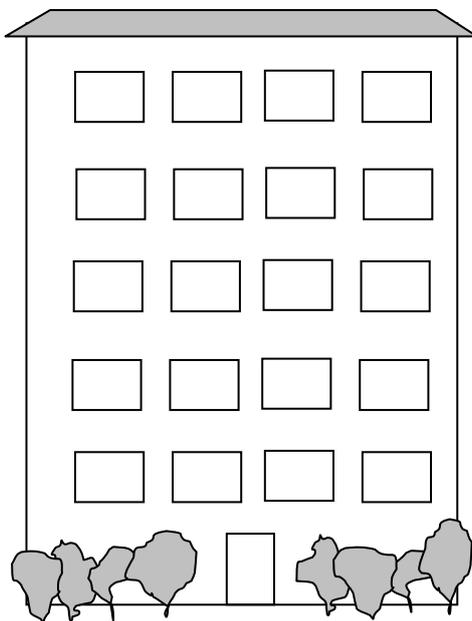
Origine: fj e lg

5. FINESTRE ILLUMINATE (Cat. 3, 4, 5)

È sera. Maria è nella sua camera e guarda la facciata del palazzo che le sta di fronte.

Questo disegno mostra ciò che vede Maria: un palazzo di cinque piani con tante finestre.

Alcune finestre sono illuminate ed altre no.



Maria osserva che:

- Al primo piano ci sono tre finestre illuminate.
- Anche al quarto piano ci sono tre finestre illuminate.
- Nella colonna di sinistra, nel caso di due finestre che stanno vicine, una è illuminata e l'altra no.
- Nella colonna a destra ci sono due finestre illuminate.
- Al quinto piano vi è una sola finestra illuminata.
- Al terzo piano tutte le finestre sono illuminate.
- In tutto ci sono 13 finestre illuminate.

Colorate di giallo le finestre illuminate che vede Maria, nel disegno del palazzo.

Scrivete come avete fatto a riconoscere le finestre illuminate.

ANALISI A PRIORI

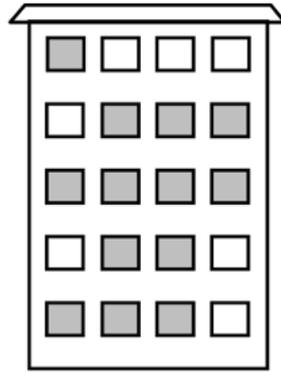
Compito matematico

Ricostruzione di una suddivisione di caselle di una griglia di 5 righe e 4 colonne in due modalità "buio/illuminato" attraverso una catena di deduzioni, a partire da sette affermazioni sul numero delle caselle di una delle due modalità per righe o per colonne.

Analisi del compito

- Comprendere che una sola fra le sette informazioni date permette di determinare in modo univoco lo stato delle finestre, le altre offrono tutte numerose possibilità.
- Iniziare dall'informazione contenuta nel sesto punto che permette di colorare di giallo tutte le finestre del terzo piano. Capire poi, dal terzo punto, che devono essere gialle sia la prima finestra a sinistra del 1° piano che l'analoga del 5°. Da qui è possibile, utilizzando le varie informazioni, percorrere vie diverse per giungere alla soluzione.
Per esempio: dal secondo punto (ci sono tre finestre illuminate anche al quarto piano) colorare di giallo tutte le finestre del 4° piano ad eccezione della prima a sinistra che si sa già essere buia.
Poi, dal quarto punto, concludere che le finestre non gialle della prima colonna a destra restano buie e, dal primo punto, dedurre che si devono colorare di giallo le due finestre centrali del 1° piano.

Infine, con la settima affermazione, che dice che il numero totale di finestre illuminate è 13, si devono colorare di giallo anche le due finestre centrali del 2° piano.

**Attribuzione dei punteggi**

- 4 Colorazione corretta e ben spiegata (per esempio l'ordine con il quale sono state scoperte le finestre illuminate: quelle del terzo piano, poi quelle della colonna di sinistra, ...)
- 3 Colorazione corretta con spiegazione insufficiente o mancante
- 2 11 finestre sono colorate correttamente (non si tiene conto dell'informazione che le finestre illuminate sono 13)
- 1 Inizio di colorazione corretta (colorate bene almeno le finestre del terzo piano e quelle della prima colonna a sinistra)
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4, 5**Origine: Siena**

6. CARMELLE (Cat. 4, 5, 6)

Anna, Bea e Carlo vogliono dividersi le caramelle contenute in un sacchetto.

Decidono che ognuno di loro lancerà un dado e prenderà dal sacchetto tante caramelle quanti sono i punti indicati dal dado.

Dopo che ogni bambino ha lanciato il dado 2 volte, ci sono 10 caramelle in meno nel sacchetto.

Carlo ha avuto più caramelle delle sue amiche.

A quel punto, quante caramelle può avere ogni bambino?

Indicate tutte le possibilità e spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Tra le scomposizioni di 10 in somme di 3 numeri interi superiori o uguali a 2, trovare quelle dove un numero sia maggiore degli due altri

Analisi del compito

- Capire che la somma delle caramelle prese dai tre bambini è 10.
- Osservare che ogni bambino ha avuto almeno due caramelle perché, a ogni lancio, ognuno ottiene almeno un punto.
- Nel caso in cui si parta dalla relazione: «Carlo ha avuto più caramelle delle sue amiche» si può limitare la ricerca, eliminando le suddivisioni nelle quali Carlo avrebbe avuto solo 2 o 3 caramelle, dopo numerose prove o per deduzione:
 - con 4 caramelle a Carlo, restano 6 caramelle per le due bambine: 3 e 3
 - con 5 caramelle a Carlo, restano 5 caramelle per le due bambine: 3 e 2 o 2 e 3
 - con 6 caramelle a Carlo, restano 4 caramelle per le due bambine: 2 e 2
 - con 7 caramelle a Carlo, restano 3 caramelle per le due bambine, ciò che è impossibile.
- Nel caso in cui si cerchi l'inventario di tutte le suddivisioni, si può stabilirlo per tentativi successivi e eliminazione dei doppietti oppure, considerando che ogni bambino non può avere più di 6 caramelle (avendone gli altri due almeno 2), scrivere le 15 scomposizioni di 10 in somme di tre termini compresi tra 2 e 6:

Anna	2	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	5	5	6
Bea	2	3	4	5	6	2	3	4	5	2	3	4	2	3	2
Carlo	6	5	4	3	2	5	4	3	2	4	3	2	3	2	2

e scegliere le quattro che convengono (in grassetto qui sopra)

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta: le quattro possibilità (C 6, B 2, A 2 ; C 5, B 3, A 2 ; C 5, B 2, A 3 ; C 4, B 3, A 3) con una procedura esplicitata
- 3 Le quattro possibilità senza spiegazioni oppure tre delle quattro possibilità, ma con delle spiegazioni chiare
- 2 Tre delle quattro possibilità, senza spiegazione oppure tre delle quattro possibilità (una dimenticanza) e una soluzione che non rispetta i vincoli oppure due delle quattro possibilità con spiegazioni
- 1 Una o due delle quattro possibilità senza spiegazioni
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 4, 5, 6

Origine: Parma

7. TOM E LULÙ (Cat. 5, 6)

Tom gioca con dei gettoni rossi e dei gettoni blu.

Ci sono 12 gettoni rossi di più dei gettoni blu.

Sua sorella Lulù prende la metà dei gettoni rossi e la metà dei gettoni blu.

Tom conta i gettoni rimasti e ne trova 78.

Quanti gettoni rossi e quanti gettoni blu ha preso Lulù?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Trovare 2 numeri, la cui somma sia uguale a 78 e la differenza del doppio dei quali sia uguale a 12.

Analisi del compito

- Capire i vincoli del problema: il numero dei gettoni presi da Lulù è uguale al numero dei gettoni che restano, contati da Tom, la differenza dei due numeri è uguale a 12, la somma delle metà dei due numeri è uguale a 78.
- Le strategie seguenti sono abbastanza rapide o più economiche se gli alunni si rendono conto che il numero di ogni tipo di gettoni deve essere pari, visto che Lulù ne prende la metà.
- Strategia per prove e correzioni di numeri che rispettano i vincoli del problema enunciati successivamente: tentativo (ipotesi) che rispetta i 12 gettoni di differenza, calcolo della metà di ogni numero (gettoni presi da Lulù o che restano), addizione dei resti e verifica per sapere se questa somma è 78.
- Strategia per inventari dei casi, per esempio cominciando il conteggio da 2 per i gettoni blu e quindi da 14 ($2 + 12$) per i gettoni rossi e verifica della seconda condizione (questa organizzazione può apparire, ma sicuramente non sotto forma di tabella). Per esempio:

Gettoni blu	Gettoni rossi	Metà dei blu	Metà dei rossi	Somma delle metà
2	14	1	7	8
4	16	2	8	10
6	18	3	9	12
...

L'inventario può fermarsi quando si raggiunge la somma 78, osservando che la successione delle somme è crescente.

- Procedere nello stesso modo, ma partendo dai gettoni tolti (o rimasti) e considerando che ci sono 6 gettoni restanti rossi di più dei gettoni rimanenti blu.
- Capire che in ognuna delle due metà dei gettoni, il numero di gettoni rossi supera di 6 il numero di gettoni blu, poi che sottraendo 6 da 78 si ottiene il doppio dei gettoni blu. Di conseguenza il calcolo $(78 - 6) : 2 = 36$ dà il numero dei gettoni blu e $36 + 6 = 42$ il numero dei gettoni rossi.
- Ragionare partendo dal numero iniziale dei gettoni ($156 = 78 \times 2$). Sottraendo i 12 gettoni rossi in più, si ottiene il doppio del numero dei gettoni blu ($144 = 156 - 12$). Dedurre il numero dei gettoni blu ($72 = 144 : 2$) e quello dei gettoni rossi ($84 = 72 + 12$), poi il numero dei gettoni presi da Lulù (la metà dei numeri precedenti), questo ragionamento può portare anche alla serie di calcoli: $(156 - 12) : 2 = 72$, $72 + 12 = 84$, $72 : 2 = 36$, $84 : 2 = 42$

Attribuzione dei punteggi

- 4 Le due risposte corrette (36 blu, 42 rosse) con spiegazioni chiare e dettagliate
- 3 Una delle due risposte corrette con spiegazioni chiare e dettagliate e l'altra assente o sbagliata (a causa di un solo errore di calcolo)
oppure le due risposte corrette con spiegazione assente o incompleta
- 2 Risposte sbagliate dovute a un errore di calcolo, ma con una procedura corretta
oppure risposta con le quantità totali dei gettoni (72 blu e 84 rossi)
- 1 Inizio di ricerca coerente
oppure risposta del tipo "45 rossi e 33 blu" (totale = 78 e differenza = 12)
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6

Origine: Lussemburgo

8. IL FRUTTETO DI ZIA MARIA (Cat. 5, 6, 7)

Nel suo frutteto, la zia Maria ha piantato 21 alberi da frutto: meli, susini, albicocchi e ciliegi. Ci sono almeno due alberi di ogni tipo.

Siccome a lei piacciono molto le susine, il numero dei susini è il più grande. È addirittura il doppio del numero dei meli.

Il numero di albicocchi è il doppio di quello dei ciliegi.

Quanti possono essere i susini nel frutteto di zia Maria?

Trovate tutte le risposte possibili.

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Scomposizione del numero 21 nella somma di quattro addendi superiori a 1, che formano due coppie di numeri nelle quali uno dei due termini è il doppio dell'altro.

Analisi del compito

- Capire che ci sono quattro numeri da cercare superiori a 1, la cui somma è 21, suddivisi in due coppie di numeri nelle quali uno dei due termini è il doppio dell'altro.
- Capire che tutte le volte che si fa un tentativo con una coppia di numeri nella quale un termine è il doppio dell'altro, si può sottrarre la somma di questi due numeri da 21 e tentare di scomporre la differenza ottenuta in due numeri di cui uno sia il doppio dell'altro.

Con tentativi e verifiche, ci sono in effetti solo 4 coppie da considerare dopo aver eliminato (2; 1) e le coppie la cui somma è uguale o maggiore di 21 come (14; 7),

(4; 2) dà una differenza di 15 e una nuova coppia (10; 5)

(6; 3), differenza di 12, nuova coppia (8; 4)

(8; 4) differenza di 9, nuova coppia (6; 3)

(10; 5), differenza di 6, nuova coppia (4; 2)

(12; 6) dà una differenza di 3 e una nuova coppia (2; 1) da eliminare.

- Tener conto che i susini sono gli alberi più numerosi per arrivare alla conclusione che ci sono due soluzioni per i susini e i meli: (10; 5) e (8; 4) che conducono rispettivamente ai numeri di albicocchi e di ciliegi (4; 2) e (6; 3).
- Capire infine che nel frutteto di zia Maria ci possono essere 10 susini oppure 8 susini.

Oppure, poiché il numero dei susini è il doppio del numero dei meli, il totale di questi tipi di alberi è un multiplo di 3. La stessa cosa per gli albicocchi e i ciliegi. La somma di questi due multipli di 3 deve essere uguale a 21. I multipli di 3 inferiori a 21 sono: 3; 6; 9; 12; 15 e 18. Di conseguenza, le coppie di numeri da considerare sono 3 (1 + 2) e 18 (12 + 6); 6 (2 + 4) e 15 (10 + 5); 9 (6 + 3) e 12 (4 + 8). La prima coppia non è accettabile perché ci devono essere almeno due alberi per ogni tipo.

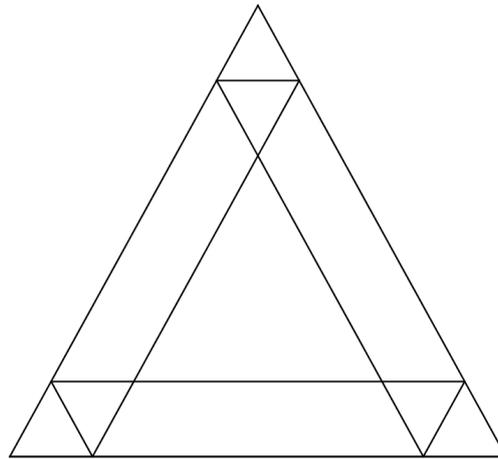
Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposte corrette con le due possibilità (10 susini oppure 8 susini) con spiegazioni chiare delle tappe della ricerca (dettaglio delle coppie, scelte, ...) oppure schema con verifica delle condizioni o altra forma di verifica completa
- 3 Risposte corrette con le due possibilità, ma la procedura non è spiegata chiaramente o è assente o verifica parziale oppure una sola soluzione ben spiegata (ma senza verifica)
- 2 Le due risposte corrette senza alcuna spiegazione o verifica oppure una possibilità con solamente una verifica
- 1 Una possibilità senza spiegazione né verifica oppure inizio di ricerca compatibile (risposte che rispettano almeno due condizioni)
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6, 7

Origine: Val d'Aosta

9. QUANTI PARALLELOGRAMMI! (Cat. 5, 6, 7)



Tutti i triangoli che si possono vedere in questa figura sono equilateri.

Quanti parallelogrammi si possono vedere, in tutto, in questa figura?

Indicate o descrivete i parallelogrammi trovati.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Riconoscimento e conteggio di parallelogrammi in una figura.

Analisi del compito

- Saper riconoscere dei parallelogrammi in una figura, tenendo conto del carattere regolare della figura per identificare i parallelogrammi uguali;
- organizzarsi per non dimenticare nessun parallelogramma e per non contare due volte lo stesso.
- Sfruttare il fatto che in un parallelogramma i lati opposti sono paralleli.
- Scegliere due paia di lati paralleli al fine di formare un quadrilatero che sarà obbligatoriamente un parallelogramma.
- Considerare che il rombo è un parallelogramma.

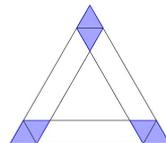
Ci sono evidentemente molti modi di organizzare l'inventario, con numerosi rischi di confusioni o di dimenticanze:

- assegnare una lettera a tutti i vertici della figura (o ai segmenti) e designare i parallelogrammi con questi vertici (o questi segmenti), ciò che porta ad una notazione pesante e lunga, difficile da controllare,
- utilizzare dei colori per ripassare i contorni, cosa che non permette di distinguere i vari segmenti,
- lavorare per tipi di parallelogrammi in un modo diverso da quelli finora descritti, tenendo conto per esempio delle trasformazioni del triangolo equilatero ...

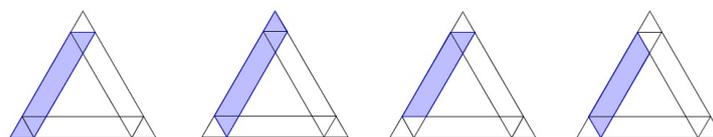
Il compito principale è appunto quello di scegliere la rappresentazione più efficace.

Si arriva a:

- 3 parallelogrammi che sono anche dei rombi (1 famiglia di parallelogrammi)



- 12 parallelogrammi (che non sono dei rombi), cioè 3 famiglie di 4 parallelogrammi, una volta a sinistra come nella figura



una a destra e una in basso.

Ci sono in tutto $3 + 12 = 15$ parallelogrammi.

Attribuzione dei punteggi

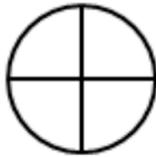
- 4 Risposta completa (15) con descrizione completa (disegno o altre descrizioni)
- 3 Risposta corretta (15) con descrizione poco “leggibile” (per esempio, con colori sopra uno stesso disegno o altre descrizioni che non illustrano tutti i parallelogrammi)
- 2 Risposta (15) senza alcuna descrizione o (13) o (14) con descrizione (una o due dimenticanze) oppure risposta sbagliata (12) per la dimenticanza dei tre parallelogrammi rombi, con descrizione oppure risposta più di 15 per la presenza di altre figure non corrette (es. trapezio non parallelogramma)
- 1 Da 4 a 11 parallelogrammi differenti
- 0 Meno di 4 parallelogrammi o incomprensione del problema

Livello: 5, 6, 7**Origine: Lussemburgo**

10. FETTE DI TORTA (Cat. 6, 7, 8)

Otto amici hanno ordinato sei torte per la merenda. Il pasticcere ha consegnato due torte alle fragole, due torte alle mele e due ai kiwi. Tutte le torte sono della stessa dimensione, ma le torte alle fragole sono già divise in quattro parti uguali, le torte alle mele sono divise in sei parti uguali e quelle ai kiwi divise in otto parti uguali.

Gli otto amici si mettono d'accordo affinché ognuno mangi la stessa quantità di torta, senza dover tagliare altre fette. Ognuno di essi vuole inoltre mangiare due tipi di torta diversi. Siccome sono molto golosi, non rimane nemmeno una fetta di torta.



torte alle fragole

torte alle mele

torte ai kiwi

Come possono essersi suddivisi le fette di torta gli otto amici?

Indicate tutte le possibilità che avete ottenuto e spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Trovare tutte le maniere di ripartire 8 quarti, 12 sestimi e 16 ottavi in otto parti equivalenti, ciascuna costituita da due tipi di frazioni.

Analisi del compito

- Capire che bisogna suddividere le torte in 8 porzioni uguali, prendendo, per ogni porzione, delle fette da due torte.
Ragionamento che utilizza il calcolo sulle frazioni:
- Visto che le 6 torte sono state interamente consumate, ognuno avrà mangiato $\frac{6}{8}$ di torta.
- Bisogna quindi ottenere $\frac{6}{8}$ addizionando sia dei quarti e dei sestimi, sia dei quarti e degli ottavi, sia dei sestimi e degli ottavi.
- Il ragionamento più semplice consiste nel cercare di completare una o più parti di ogni torta per ottenere delle porzioni di $\frac{6}{8}$ (o di $\frac{3}{4}$) di torta.
 - Completare $\frac{1}{4}$ (uguale a $\frac{2}{8}$) con $\frac{4}{8}$ (o $\frac{1}{2}$). Si può avere allora: $\frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{6}$ o $\frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8}$.
 - Completare $2 \times \frac{1}{4}$ (uguale a $\frac{1}{2}$ o $\frac{4}{8}$) con $2 \times \frac{1}{8}$. Quindi $2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8}$.
 - Completare $\frac{1}{6}$ o $\frac{2}{6}$ con degli ottavi per avere $\frac{6}{8}$ non è possibile.
 - Completare $\frac{3}{6}$ (uguale a $\frac{1}{2}$) con degli ottavi è possibile: $3 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{8}$.
- Si possono quindi ottenere $\frac{6}{8}$ di torta in quattro modi diversi, tenendo conto che ogni amico prende solo due tipi di torta:

	Torta alle fragole	Torta alle mele	Torte ai kiwi
Porzione A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	
Porzione B	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$
Porzione C	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		$\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$
Porzione D		$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

- Le 5 ripartizioni possibili tra gli 8 amici derivano dalle combinazioni di queste 4 porzioni:
 - ripartizione 1: 4 persone con A; 4 persone con B
 - ripartizione 2: 3 persone con A; 3 persone con B; 1 persona con C; 1 persona con D
 - ripartizione 3: 2 persone con C; 2 persone con B; 2 persone con A; 2 persone con D
 - ripartizione 4: 1 persona con A; 1 persona con B; 3 persone con C; 3 persone con D
 - ripartizione 5: 4 persone con C; 4 persone con D

Oppure

- Procedere per tentativi più o meno organizzati, a partire dal taglio di tutte le fette di torte. Questa strategia può permettere di trovare una o due ripartizioni, ma probabilmente non tutte le cinque possibili.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Almeno tre ripartizioni esatte, con spiegazioni corrette e senza ripartizioni sbagliate
- 3 Almeno tre ripartizioni esatte senza ripartizioni sbagliate, senza spiegazioni o con spiegazioni parziali oppure due ripartizioni esatte con spiegazioni e nessuna soluzione sbagliata
- 2 Almeno due ripartizioni esatte (senza spiegazioni) e al massimo una ripartizione sbagliata oppure almeno tre ripartizioni esatte (senza spiegazioni) e al massimo due ripartizioni sbagliate
- 1 Una sola ripartizione esatta con eventualmente altre ripartizioni sbagliate
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7, 8

Origine: Bourg en Bresse

11. NON COSÌ SEMPLICE ... (Cat. 6, 7, 8)

L'insegnante di matematica propone alla classe un indovinello.

Utilizzando tre volte il numero 5 e una volta il numero 1 dovete ottenere 24 tramite addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni o divisioni.

Per esempio:

$(5 + 1) \times (5 - 1) = 24$ non va bene perché ci sono due numeri 5 e due numeri 1,

$(5 \times 5) - 1^5 = 24$ non va ancora bene perché 1^5 non è tra le operazioni autorizzate.

Ma vi posso assicurare che c'è una soluzione.

Qual è la soluzione all'indovinello proposto dall'insegnante?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Ottenere 24 partendo da quattro numeri 5, 5, 5 e 1 con le operazioni aritmetiche: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

Analisi del compito

- Effettuare dei tentativi, eventualmente utilizzando una calcolatrice, e convincersi che non c'è soluzione restando nell'insieme dei numeri naturali.
- Provare, partendo da 24, ad aggiungere, togliere o dividere per 5 e ragionare sui numeri ottenuti utilizzando ancora due volte il numero 5 ed una volta il numero 1.

Oppure

- rendersi conto che il solo modo di ottenere un numero decimale con una sola operazione a partire dai numeri 5 e 1 è di dividere 1 per 5, che dà 0,2.
Continuare cercando di ottenere 24 a partire da 0,2 utilizzando due volte il numero 5. Trovare che il solo modo di arrivarci è di effettuare $(5 - 0,2) \times 5 = 4,8 \times 5 = 24$.

Attribuzione dei punteggi

- 4 L'espressione corretta, $(5 - 1/5) \times 5$, con spiegazioni sulla procedura di ricerca
- 3 L'espressione corretta, ma senza spiegazioni
- 2 La buona successione di operazioni ma con un'espressione non corretta (ad esempio, $5 - 1/5 \times 5$)
- 1 Una spiegazione convincente del fatto che non si può arrivare alla soluzione soltanto attraverso numeri interi oppure alcuni tentativi che mostrano una comprensione del problema
- 0 Incomprensione del problema o tentativi errati (non rispettano le condizioni)

Livello: 6, 7, 8

Origine: Bourg en Bresse

12. LASCIA O TRIPLICA (Cat. 6, 7, 8, 9)

Per la sua festa di compleanno, Luisa ha organizzato un gioco di domande e risposte, "Lascia o triplica" e ad ogni partita, i giocatori scommettono un certo numero di gettoni e rispondono ad una domanda.

Le regole del gioco sono le seguenti:

- Se il giocatore dà la risposta corretta alla domanda, vince e riceve il triplo del numero dei gettoni che ha deciso di mettere in gioco.
- Se il giocatore dà la risposta errata, perde tutti i gettoni che aveva messo in gioco.

Paolo decide di giocare a "Lascia o triplica":

metterà in gioco tutti i suoi gettoni e se vincerà darà ogni volta 12 gettoni al suo fratellino Pietro per costituire una riserva e poi rigioccherà una nuova partita con tutti i gettoni che gli restano.

Paolo gioca e vince le sue prime tre partite. Dopo la sua terza partita, ha dato in tutto 36 gettoni a Pietro e gliene restano 87 per la quarta partita.

**Quanti gettoni aveva Paolo prima di cominciare a giocare a "Lascia o triplica"?
Spiegate il vostro ragionamento.**

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Trovare il numero che, trasformato tre volte di seguito dalla funzione "moltiplicare per 3 poi sottrarre 12", dà 87 come risultato.

Analisi del compito

Comprendere che c'è differenza tra il numero di gettoni messi in gioco e il numero di gettoni vinti.

- Per via aritmetica: rendersi conto che prima della seconda e della terza partita Paolo ha 12 gettoni in meno di quelli che ha vinto nella partita precedente. E', quindi, preferibile ragionare partendo dal numero finale (87) di gettoni. Andando a ritroso nel ragionamento, la vincita della terza partita ha fruttato a Paolo $87+12=99$ gettoni. Allora i gettoni che aveva prima della terza partita erano $33 = 99:3$. Analogamente si calcola quanti gettoni Paolo ha dopo la seconda partita: $33+12=45$. Dunque, prima di giocare la sua seconda partita, aveva $45:3=15$ gettoni. Visto che regala 12 gettoni dopo la prima partita, Paolo deve aver vinto $15+12 = 27$ gettoni nella prima partita. Ciò permette di affermare che Paolo aveva $27:3 = 9$ gettoni prima di cominciare la prima partita.
- Per via algebrica:
Sia x il numero dei gettoni che Paolo aveva prima di giocare la prima partita.
Dopo la prima partita, dopo aver dato i gettoni a suo fratello, Paolo aveva $3x - 12$ gettoni.
Dopo la seconda partita, dopo aver dato i gettoni a suo fratello, Paolo aveva $3(3x - 12) - 12$ gettoni.
Dopo la terza partita, dopo aver dato i gettoni a suo fratello, Paolo ha $3[3(3x - 12) - 12] - 12$ gettoni.
L'equazione risolvente è dunque: $3[3(3x - 12) - 12] - 12 = 87$. Si trova $x = 9$.
Per tentativi: partire da una ipotesi sul numero iniziale di gettoni.

Oppure: il numero dei gettoni vinti dopo la prima partita deve essere un multiplo di 3 e maggiore di 12 perché ad esso si deve togliere 12, quindi 15, 18, 21, ... come possibilità. Il numero 27 conduce alla soluzione.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (9 gettoni) con spiegazione chiara e dettaglio dei calcoli
- 3 Risposta corretta, con spiegazione poco chiara o incompleta oppure con sola verifica del risultato finale
- 2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione
oppure risposta errata per un errore di calcolo, ma con spiegazione
- 1 Inizio di ragionamento corretto
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7, 8, 9

Origine: Lodi

13. L'ASINO MARCOVALDO (Cat. 7, 8, 9, 10)

Berto utilizza il suo asino Marcovaldo per trasportare le mele dal suo frutteto al negozio in città, dove saranno vendute. Il negozio dista 30 km dal frutteto e Berto ha prodotto 90 kg di mele.

Marcovaldo è capace di trasportare 30 kg di mele alla volta, ma per ogni chilometro percorso portando mele, ne mangia 1 kg. Non mangia nulla se non è carico.

Berto ha capito che se Marcovaldo fa 30 km in un solo tragitto, partendo con 30 kg, mangerà tutte le mele e non avrà più niente sul dorso quando arriverà al negozio.

Decide allora di organizzare dei depositi tra il frutteto e il negozio.

Per esempio, se in un primo viaggio Berto deposita a metà percorso 15 kg di mele, può fare un secondo viaggio con alla partenza 30 kg e arrivare a metà percorso, per poi caricare i 15 kg del deposito e arrivare con 15 kg al negozio.

Rimarranno allora ancora 30 kg nel frutteto.

Ma Berto può riuscire a portare più mele al negozio organizzando meglio i suoi depositi.

Quanti kg, al massimo, Berto potrà far arrivare al negozio?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Ottimizzare un trasporto di 90 kg su una distanza di 30 km con un trasportatore che sopporta un carico massimo di 30 kg e che consuma 1 kg per km.

Analisi del compito

- Comprendere la situazione e capire perché, se Marcovaldo fa dei tragitti di 30 km in una sola volta, mangerà tutte le mele.
- Rendersi conto che organizzando dei depositi, è possibile portare mele al negozio. Comprendere l'esempio descritto nell'enunciato. Fare dei tentativi come, ad esempio, il seguente con un deposito di mele ogni 10 km:

	partenza	10 km	1° deposito	10 km	2° deposito	10 km	arrivo
1° tragitto: 30 kg	→		20 kg				
2° tragitto: 30 kg	→		20 kg	4°: 30 kg	→	20 kg	6°: 20 kg
3° tragitto: 30 kg	→		20 kg	5°: 30 kg	→	20 kg	7°: 20 kg

In questo esempio, Berto arriva con 20 kg di mele al negozio.

Per uno studio sistematico, comprendere che il peso delle mele mangiate da Marcovaldo non dipende dal carico che porta, ma solo dalla distanza percorsa. Dedurre che è più vantaggioso che Marcovaldo viaggi a pieno carico con 30 kg di mele e minimizzare il numero dei viaggi.

- Ragionare "all'inverso": Marcovaldo deve superare la distanza x tra l'ultimo deposito e il negozio in una sola volta portando 30 kg di mele, ne consegna così $30 - x$.
- Poiché non può lasciare 30 kg di mele in questo ultimo deposito in una sola volta, dovrà percorrere la distanza tra il penultimo deposito e l'ultimo in almeno due volte, partendo ogni volta con al più 30 kg di mele. Durante questi due viaggi, Marcovaldo mangerà quindi la metà di questi 60 kg di mele, cioè 15 kg in ciascun viaggio. La distanza tra questi due depositi è quindi al meglio di 15 km.
- Per depositare 60 kg di mele, Marcovaldo deve fare almeno tre viaggi. Per ottimizzare ne farà esattamente 3. Poiché Marcovaldo ha alla partenza 90 kg di mele da trasportare, può effettivamente fare ciò in 3 viaggi da 30 kg ciascuno. Per consegnare 60 kg di mele, l'asino può mangiare 30 kg di questi 90 kg in tre volte, cioè 10 kg per viaggio. La distanza che separa il frutteto dal primo deposito è allora di 10 km (soluzione ottimale).
- Restano quindi $x = 5$ km che separano il secondo deposito dal negozio e Berto può consegnare $30 - 5 = 25$ kg di mele.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (25 kg di mele, con depositi a 10 km e a 25 km dal frutteto) con la posizione dei depositi e la spiegazione chiara dei viaggi
- 3 Risposta 20 kg di mele con un esempio e spiegazioni più o meno complete e poco chiare oppure risposta corretta 25 kg con spiegazione incompleta
- 2 Risposta 20 kg di mele senza spiegazioni

oppure un altro numero superiore a 15 (ma inferiore a 20) con un ragionamento coerente che indichi la necessità di fare dei depositi per poter consegnare mele al negozio

- 1 Inizio di ragionamento corretto che mostri l'impossibilità di consegnare mele con viaggi di 30 km alla volta
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8, 9, 10

Origine: variante di un problema classico, Riva del Garda

14. I GRANDI LAVORATORI (Cat. 7, 8, 9, 10)

Consultando la sua agenda, Lorenzo ha constatato che 2014 è un anno con 52 domeniche, come è stato il 2013 e come sarà il 2015.

Lorenzo si lamenta e domanda: *Ma quando si avrà un anno con 53 domeniche?*

Il suo amico Gianmarco gli dice:

Non si dovrà attendere molto altro tempo per avere un anno di 53 domeniche, ma io preferisco gli anni con 53 week-end interi (sabato e domenica)!

Quale sarà il prossimo anno con 53 domeniche e quale sarà il prossimo anno con 53 week-end interi?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Determinare le regolarità degli anni che hanno 53 domeniche e quelle che hanno 53 week-end.

Analisi del compito

- Partire dalla constatazione che un anno non bisestile ha 365 giorni e che quindi un anno bisestile ha 366 giorni.
- Determinare il numero delle settimane intere che ci sono in un anno e i giorni restanti, facendo la divisione tra i giorni dell'anno e i giorni di una settimana. Si ha: $365 = 52 \times 7 + 1$ per l'anno non bisestile e $366 = 52 \times 7 + 2$ per l'anno bisestile, stesso risultato che si può osservare avendo a disposizione un calendario.
- Dedurre che un anno non bisestile avrà sei giorni che si ripeteranno 52 volte e un giorno 53 volte, il primo gennaio e il 31 dicembre. Nel 2014 c'è il mercoledì (consultando l'agenda), nel 2015 il giovedì, nel 2016 il venerdì e nel 2017 la domenica (l'anno precedente è stato bisestile e c'è uno spostamento di due giorni).
- Un anno bisestile avrà cinque giorni che si ripeteranno 52 volte e due giorni 53 volte. Per avere un anno con 53 week-end bisogna ricercare tra gli anni bisestili che verranno, quelli che avranno due sabati e due domeniche: nel 2016, due venerdì e due sabati (1 e 2 gennaio e 30 e 31 dicembre), poi con uno spostamento di cinque giorni, 2020 due mercoledì e due giovedì, 2024 due lunedì e due martedì, 2028 due sabati e due domeniche, o due week-end.

Oppure: organizzare la numerazione a partire dai primi e ultimi giorni dell'anno, e rispettare la distanza di un giorno da un anno all'altro o di due giorni dopo il 29 febbraio degli anni bisestili:

	1° gennaio	2 gennaio	30 dicembre	31 dicembre
2014	mercoledì	giovedì	martedì	mercoledì
2015	giovedì (+1)	venerdì (+1)	mercoledì (+1)	giovedì (+1)
2016	venerdì (+1)	sabato (+1)	venerdì (+2)	sabato (+2)
2017	domenica (+2)	lunedì (+2)	sabato (+1)	domenica (+1)
...				
2020	mercoledì (+3)	giovedì (+3)	mercoledì (+4)	giovedì (+4)
2024	lunedì (+5)	martedì (+5)	lunedì (+5)	martedì (+5)
2028	sabato (+5)	domenica (+5)	sabato (+5)	domenica (+5)

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposte corrette (2017 e 2028) con spiegazione completa
- 3 Risposte corrette con spiegazione incompleta
oppure soltanto la risposta 2028 con spiegazione completa (senza la risposta 2017)
- 2 Risposte corrette senza spiegazione
oppure risposte non corrette dovute ad un solo errore (spostamento inesatto) ma spiegazione completa
oppure soltanto la risposta 2017 con spiegazione completa
- 1 Inizio di ragionamento corretto, per esempio la conclusione che l'anno da ricercare dovrà essere un anno bisestile
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8, 9, 10

Origine: Lussemburgo, la e fj

15. BILANCIA A MOLLA (Cat. 8, 9,10)

Una bilancia a molla è costituita da una molla munita di un gancio a una estremità e fissata all'altra estremità ad un supporto. Quando si appende un peso al gancio, la molla si allunga.

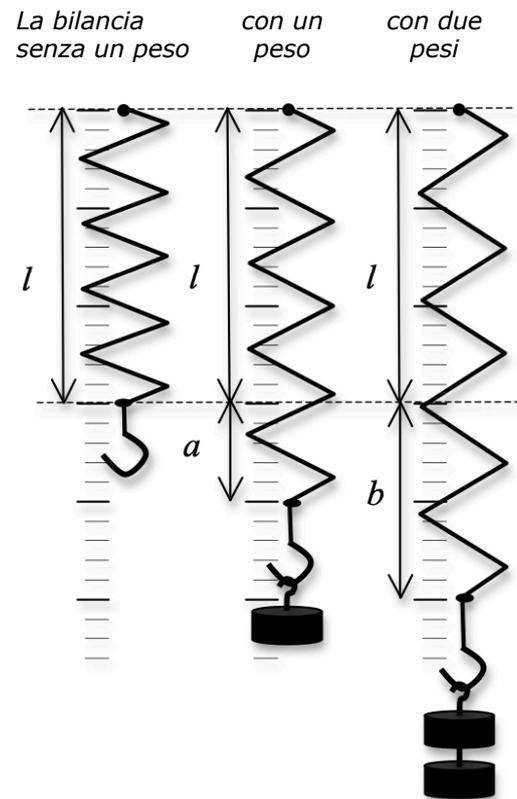
L'allungamento della molla è proporzionale al peso dell'oggetto appeso.

Nello schema qui a fianco la medesima bilancia è rappresentata dapprima senza alcun peso e ha lunghezza l , poi con un peso e si è allungata di a , poi con due pesi e si è allungata di b che è il doppio di a .

La molla di una bilancia A, senza alcun peso, ha una lunghezza di 10 cm. Quando si appende un oggetto del peso di 3 kg, la sua lunghezza diventa di 16 cm.

La molla di una bilancia B ha, senza alcun peso, una lunghezza di 5 cm. Quando si appende un oggetto del peso di 2 kg, la sua lunghezza diventa di 11 cm.

Quando si appende un nuovo oggetto alla bilancia A o quando lo si appende alla bilancia B, le molle delle due bilance hanno la stessa lunghezza.



Trovate il peso di un oggetto tale che le molle delle due bilance A e B abbiano la stessa lunghezza quando è appeso sia all'una e sia all'altra.

Quale lunghezza raggiungeranno le due molle con questo peso?

Spiegate come avete trovato le risposte.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

In un contesto di bilance a molla, il cui allungamento è funzione lineare del peso, determinare il peso per il quale le molle di due bilance in estensione, con rapporti di allungamento diversi, raggiungono la stessa lunghezza.

Analisi del compito

- Comprendere il funzionamento di una bilancia a molla (o dinamometro): la molla, le sue caratteristiche meccaniche, la sua lunghezza, l'allungamento e la relazione di proporzionalità: allungamento = forza \times "coefficiente di allungamento", tra l'allungamento della molla e il peso ad essa sospeso.
- Determinare come cambia la lunghezza di ogni bilancia secondo il peso: lunghezza iniziale + allungamento o lunghezza iniziale + forza \times "coefficiente di allungamento".
- Per la bilancia A, l'allungamento è di $16 - 10 = 6$ (cm) per 3 (chilogrammi forza), dunque il coefficiente è 2 (cm/chilogrammo-forza), mentre per la bilancia B, si ha: $11 - 5 = 6$ (cm) per 2 kg, dunque il coefficiente è 3 (cm/chilogrammo-forza).
- Dedurre le lunghezze delle due molle (in cm) in funzione di un peso P (in chilogrammo-forza): $L = 10 + 2P$ per la bilancia A, $L = 5 + 3P$ per la bilancia B.

Per trovare il peso che permette di ottenere la stessa lunghezza per le due bilance, ci sono diverse maniere di procedere: Con l'algebra: considerare uguali le due lunghezze e ottenere l'equazione in P : $10 + 2P = 5 + 3P$, poi dedurre che il peso P vale 5 kg e che la lunghezza delle bilance A e B è allora 20 cm;

Graficamente nel rappresentare le due funzioni lineari con due rette, individuate da due punti (0, 10) e (3, 16) per A e (0, 5) e (2, 11) per B, la cui intersezione ha per coordinate: $L = 20$ e $P = 5$;

- Con una tabella scrivendo le lunghezze delle molle in funzione dei pesi utilizzando la proporzionalità degli allungamenti:

pesi	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Allungamento della molla A	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Lunghezza della molla A	10	12	14	16	18	20	22	24	26
Allungamento della molla B	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Lunghezza della molla B	5	8	11	14	17	20	23	26	29

Osservare che per un peso di 5 kg, le due molle misurano 20 cm.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposte corrette (5 kg e 20 cm) con spiegazioni chiare e complete
- 3 Risposte corrette con spiegazioni poco chiare o incomplete
- 2 Risposte corrette senza spiegazioni
o mancanza della seconda risposta con spiegazione
- 1 Inizio di ricerca con calcolo corretto delle costanti di proporzionalità delle due molle
o mancanza della seconda risposta senza spiegazione
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: Franche-Comté

16. UNA NUOVA AUTOMOBILE (Cat. 8, 9, 10)

La nuova automobile RMT22 è stata messa in vendita allo stesso prezzo in tutti i paesi.

Un ricco statunitense decide di acquistarne tre da regalare ai suoi nipoti che vivono in paesi diversi.

Una la compra in Italia dove, oltre al prezzo base, paga l'IVA al 21% e un'altra in Francia dove l'IVA è invece al 20%.

Per queste due automobili spende in totale 22 413 euro.

La terza la acquista nel paese di Transalpino, dove paga solamente 10 044 euro, IVA inclusa.

Quale è la percentuale dell'IVA nel paese di Transalpino?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Determinare il prezzo di base di una vettura senza IVA, uguale nei tre paesi, a partire dalle informazioni relative al suo prezzo con IVA in Italia e in Francia e dedurne la percentuale di IVA in Transalpino.

Analisi del compito

- Procedere per tentativi a partire da un costo di base plausibile per l'auto (per esempio 10 000 €). L'applicazione del 21% nel primo caso e del 20 % nel secondo caso, dà un totale di 24 100 € .
- Constatando che il prezzo base è inferiore, fare altri tentativi in modo da ridurre il prezzo di 50 € in 50 €, per esempio, poi finire per effettuare il calcolo con un prezzo di base di 9 300 € .
- Dedurne che l'IVA nel paese di Transalpino arriva a 744 € e che tale valore corrisponde all'8% del costo di base dell'auto ($744 / 9\,300 = 0,08$)

Oppure, utilizzare per l'Italia e la Francia il valore medio di 20,5% di IVA, dividere il prezzo pagato 22 413 € per 2 (prezzo medio di un'auto) e dividere per 1,205 per ottenere il suo prezzo di base: 9300 €.

Oppure, utilizzare un'equazione della forma $x + 0,21x + x + 0,20x = 22\,413$ oppure $1,21x + 1,20x = 22\,413$ e dedurne che $x = 9\,300$ €,

poi, per trovare l'IVA di Transalpino (y), risolve l'equazione $9\,300(1 + y) = 10\,044$ da cui $y = 0,08$ o 8%.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (8%) con spiegazione chiara e completa
- 3 Risposta corretta (8%) con spiegazione incompleta
- 2 Risposta corretta (8%) senza spiegazione
oppure procedura e spiegazione corrette ma errore di calcolo
- 1 Inizio di ragionamento corretto
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: Campobasso

17. BOCCIA DA COMPETIZIONE (cat. 9, 10)

Una boccia da competizione è una sfera cava che ha un peso di 690 g e un diametro di 7,4 cm.

È fatta di acciaio la cui densità è $7,85 \text{ g/cm}^3$.

Calcolate lo spessore dell'acciaio approssimando la misura al mm.

Spiegate il vostro ragionamento e mostrate i calcoli che avete fatto.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Calcolare lo spessore di una sfera cava conoscendo la densità del materiale di cui è costituita, il diametro e il peso della sfera.

Analisi del compito

- Capire le relazioni tra i raggi, i volumi e i pesi dei tre oggetti: la boccia cava, la sfera “esterna”, la sfera “interna”; queste ultime potrebbero essere considerate ipoteticamente come piene per le necessità dei calcoli dei pesi.
- Conoscere e gestire il rapporto tra il volume e il peso (relazione di proporzionalità il cui coefficiente è la densità):
- Conoscere il rapporto tra il raggio e il volume di una sfera (boccia) $V = 4\pi r^3/3$ e saper gestire le approssimazioni che intervengono a partire dal fattore $4\pi/3$.
- ci sono numerose maniere di calcolare i diversi valori dei pesi e dei volumi, a partire dai due rapporti indicati più sotto e a partire dalla relazione additiva: i raggi, i volumi, i pesi della boccia sono rispettivamente la differenza tra quelli della sfera esterna e della sfera interna.

oggetti:	boccia cava	sfera esterna	sfera interna
raggio (cm)	(spessore) x oppure $r + 3,7$	3,7	r oppure $3,7 - x$
volume (cm^3)	$690 : 7,85 \approx 87,9$	$4\pi/3 \times 3,7^3 \approx 212$	$4\pi/3 \times r^3 \approx 124,1$ ($212 - 87,9$)
peso (g)	690	$(4\pi/3 \times 3,7^3) \times 7,85 \approx 1665$	≈ 975 ($1665 - 690$)

Per esempio, una delle procedure più brevi è quella di calcolare il volume della boccia a partire dal suo peso $690 : 7,85 \approx 87,9$, poi il volume della sfera esterna $4\pi/3 \times 3,7^3 \approx 212$ e, per differenza, un'approssimazione del volume della sfera interna $124,1 = 212 - 87,9$ per ottenere un'approssimazione del suo raggio ($124,1 = 4\pi/3 \times r^3 : \approx 3,1$ e trovare lo spessore della boccia tramite la relazione $\approx 0,6 = 3,7 - 3,1$ (in cm).

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposta corretta (0,6 cm) con un ragionamento corretto e i calcoli che portano al risultato
- 3 Risposta corretta (0,6 cm) con spiegazione poco chiara o incompleta oppure risposta (1,2 cm) con spiegazioni chiare ma confusione tra il diametro (7,4) e il raggio (3,7)
- 2 Risposta errata a causa di un errore di calcolo ma procedimento corretto oppure solo calcolo del volume della parte cava
- 1 Inizio di ricerca coerente
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: Franche-Comté

18. DOPO IL 2013!! (Cat. 9, 10)

Eccovi i primi quattro termini di una lunga successione così costruita:

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}; \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \quad \dots$$

Calcolate la somma di questi termini fino al 2013esimo:

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2013} \times \frac{1}{2014}$$

poi moltiplicate il risultato ottenuto per 2014.

Quale numero avete trovato?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Calcolare la somma dei primi 2013 termini della successione $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}; \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \dots$ e moltiplicarla per 2014

Analisi del compito

- Osservare i primi termini della successione, comprendere la regola della costruzione e generalizzare per scoprire il 2013^{esimo} termine: $\frac{1}{2013} \times \frac{1}{2014}$, comprendere che ciascun termine è il prodotto di due frazioni con numeratore 1 e i denominatori sono due numeri uno successivo all'altro e che il termine di ordine n è dato dal prodotto $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1}$

- Passare quindi alla somma: $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \dots$ e rendersi conto che non è possibile scrivere esplicitamente la somma dei 2013 termini della successione e che si deve trovare una regola generalizzabile: si osserva che il primo termine è $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, il secondo $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, il terzo è $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, ... e la somma di altri di questi termini è:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$$

Poi calcolare la successione delle somme parziali almeno dei primi termini e semplificare:

e quindi ottenere la successione: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$

- Constatare che questa nuova successione è composta da frazioni dove il denominatore supera di 1 il numeratore

- Quindi il 2013^{esimo} termine di questa successione sarà $\frac{2013}{2014}$ e il suo prodotto per 2014 sarà 2013

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (2013) con spiegazione chiara o calcoli esplicitati delle somme parziali

3 Risposta corretta (2013) senza spiegazione

2 Risposta errata a causa di un errore di calcolo ma procedimento corretto

oppure per esempio: aver individuato la successione $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$

1 Inizio di ricerca corretta, per esempio calcolate tre o quattro somme parziali con osservazioni

0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: fj

19. LA CRISI (Cat. 10)

Una società è entrata in borsa. Il valore iniziale delle sue azioni era di 100 dollari. A causa della crisi finanziaria, il valore delle azioni è diminuito del 10% durante il primo anno. Gli economisti della società fanno una simulazione supponendo che il valore delle azioni continui a diminuire del 10% ogni anno rispetto al valore che aveva all'inizio dell'anno.

Dopo quanti anni, un'azione perderà più della metà del suo valore iniziale di 100 dollari?

Dopo quanti anni, il valore di un'azione sarà meno di un dollaro?

ANALISI A PRIORI**Compito matematico**

Determinare l'anno in cui una funzione, definita in \mathbb{N} , decrescente: perdere il 10% all'anno, scende sotto la metà del suo valore iniziale.

Analisi del compito

- Comprendere che il valore dell'azione e dell'intero capitale diminuiscono ogni anno del 10%. La risposta «5 anni» è errata.
- Fare dei calcoli successivi per ogni anno e presentarli ad esempio in una tabella come questa:

Anno	Valore inizio anno	10 % del valore	Valore fine anno
1	100	10	90
2	90	9	81
3	81	8,1	72,90
4	72,90	7,29	65,61
5	65,61	6,56	59,05
6	59,05	5,90	53,15
7	53,15	5,31	47,84
8	47,84		

- Dedurre che dopo 7 anni il valore di una azione sarà meno della metà di 100 dollari.
- Il calcolo del numero di anni alla fine dei quali il valore dell'azione sarà meno di un dollaro risulta fastidioso. Osservare, per accelerare i calcoli, che per ottenere il valore alla fine dell'anno k occorre moltiplicare il valore all'inizio dell'anno k per 0,9.
- Se $V = 100$ dollari è il valore iniziale dell'anno 1, allora il valore alla fine dell'anno è $100 \times 0,9$, dopo due anni $100 \times (0,9)^2$ dollari, ... alla fine di k anni $100 \times (0,9)^k$ dollari.
- Dedurre che la condizione da realizzare è $100 \times (0,9)^k < 1$.
- Utilizzare la funzione potenza di una calcolatrice (o di un foglio di calcolo) per trovare $k = 44$.

Attribuzione dei punteggi

- 4 Risposte corrette (7 anni, 44 anni) con spiegazioni chiare o con una tabella e i calcoli indicati
- 3 Risposte corrette con spiegazioni incomplete oppure risposta 7 anni e la moltiplicazione per $(0,9)^k$ indicata senza trovare k
- 2 Risposta 7 anni corretta con spiegazioni chiare
- 1 Inizio di ricerca coerente, ad esempio il calcolo delle somme rimaste per i primi 3 anni
- 0 Incomprensione del problema

Livello: 10

Origine: Gruppo problemi