16° Rally Matematico Transalpino, prova finale

		3	4	5	6	7	8	9	10	Ar	Al	Ge	Mi	LR	Co	sez
1	Perle rosse	3								**x**						PR
2	I puzzle	3	4							**x**		**x**				BB
3	Classi internazionali	3	4							**x**					**x**	LU+PR
4	Quadrato o rettangolo?	3	4	5								**x**	**x**			PU
5	La casa	3	4	5								**x**				FC
6	Il prezzo dei cavoli		4	5						**x**						SR
7	I numeri di Bice		4	5	6					**x**				**x**	**x**	GE
8	Il mercato dei libri			5	6					**x**				**x**		TI
9	Numeri da trovare			5	6	7				**x**					**x**	FC
10	Punti di vista			5	6	7						**x**				FC
11	Il serpente di legno				6	7	8			**x**		**x**				SI
12	L'orologio digitale				6	7	8			**x**			**x**		**x**	GE
13	Composizione di rose				6	7	8	9	10	**x**	**x**					SI
14	Compleanni e candeline					7	8	9	10	**x**	**x**			**x**		SI
15	Frazioni sovrapposte					7	8	9	10	**x**						ISR
16	Cubi nascosti						8	9	10	**x**		**x**				CI
17	Tredici a tavola						8	9	10	**x**						CI
18	Un satellite sopra l'equatore							9	10	**x**		**x**	**x**			FC
19	C'è chi vince e c'è chi perde							9	10	**x**	**x**			**x**		CI

I problemi del RMT sono protetti da diritti di autore.

Per un'utilizzazione in classe deve essere indicata la provenienza del problema inserendo la dicitura "©ARMT".

Per un'utilizzazione commerciale, ci si può mettere in contatto con i coordinatori internazionali attraverso il sito Internet dell'associazione del Rally Matematico Transalpino (www.math-armt.org).

1. **PERLE ROSSE** (Cat. 3)

Martina e Carlotta hanno trovato delle perle gialle, blu e rosse. Decidono di farsi una collana ciascuna e infilano le perle sempre in questo modo: all'inizio una perla gialla, seguita da due perle blu e da tre perle rosse, poi di nuovo, una perla gialla, due blu e tre rosse; e così via.

Le loro due collane finiscono con tre perle rosse.

La collana di Martina ha 14 perle blu.

La collana di Carlotta ha 30 perle in tutto.

Quante perle rosse ci sono nella collana di Martina?

Quante perle rosse ci sono nella collana di Carlotta?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: operazioni con i numeri naturali, proporzionalità

Analisi del compito

- Comprendere che ci sono delle relazioni (di proporzionalità) tra i numeri delle perle di ciascuno dei 3 colori:
  1 giallo corrisponde a 2 blu; 1 giallo corrisponde a 3 rossi; 2 blu corrispondono a 3 rossi.
- A partire da una o due delle relazioni precedenti, stabilire il numero di perle rosse della collana di Martina.
  Per esempio: immaginare la suddivisione di 14 perle blu in 7 gruppi di 2 perle e stabilire 7 gruppi di 3 perle rosse:
  3 x 7 = 21. Oppure passare direttamente alle perle gialle: 14 : 2 = 7 e moltiplicare per tre il numero di perle gialle per trovare le rosse.
- Comprendere anche che c'è una relazione tra il numero totale delle perle e le perle di ciascun colore, notando che ogni sequenza «giallo-blu-rosso» è composta da 6 perle. Le relazioni sono allora 6 perle di una sequenza corrispondono a 1 perla gialla, 2 blu e 3 rosse.
- A partire da una o più relazioni precedenti determinare il numero di perle rosse della collana di Carlotta.
  Per esempio 30 perle formano 5 sequenze di 6 perle (30 : 6) di cui 5 gialle, 10 blu e 15 rosse, oppure le perle rosse sono la metà del numero totale delle perle (relazione 6 a 3) e ci sono15 perle rosse (30 : 2) nella collana di Carlotta.
  Oppure: ottenere le risposte corrette con uno schema o con un disegno delle due collane.

Attribuzione dei punteggi

4 Le due risposte corrette (21 perle rosse per Martina, 15 rosse per Carlotta), con il dettaglio dei calcoli o spiegazione con disegno o schema

3 Le due risposte corrette con spiegazioni incomplete
oppure una sola risposta corretta e una imprecisione per l'altra, con spiegazioni per le due risposte

2 Le due risposte corrette senza nessuna spiegazione
oppure una sola risposta corretta con spiegazione

1 Una sola risposta corretta senza spiegazione

0 Incomprensione del problema

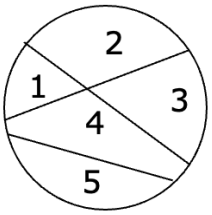
Livello: 3

Origine: Parma

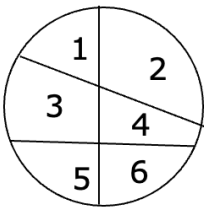
2. I PUZZLE (Cat. 3, 4)

Alcuni bambini tagliano dei dischi di cartoncino per costruire dei puzzle. A questo scopo tracciano dei segmenti all'interno dei dischi congiungendo due punti del bordo del disco (circonferenza).

Tracciando tre segmenti, Carolina ha suddiviso il suo disco per fare un puzzle di 5 pezzi:



Ancora con tre segmenti, Daniele ha ottenuto un pezzo in più. Il suo puzzle ha 6 pezzi:



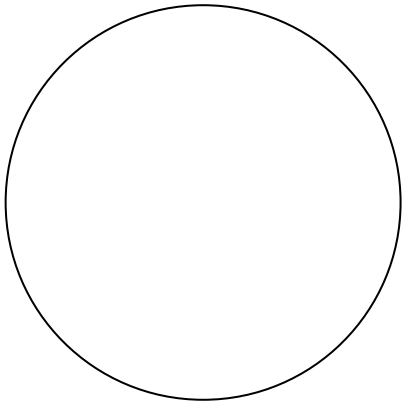
Anche Alberto decide di tracciare 3 segmenti nel suo disco e spera di ottenere più pezzi di Daniele. Barbara traccia 4 segmenti per ottenere un numero maggiore di pezzi.

Qual è il maggior numero di pezzi che può ottenere Alberto?

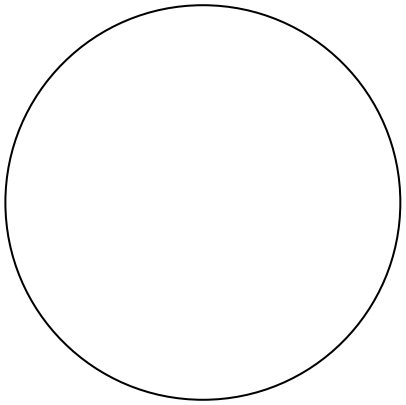
Qual è il maggior numero di pezzi che può ottenere Barbara?

Disegnate il disco di Alberto e quello di Barbara con il maggior numero di pezzi possibile.

Alberto, con 3 segmenti



Barbara, con 4 segmenti



ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

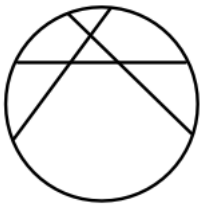
Geometria: cerchio, corde e regioni
Conteggio

Analisi del compito

- Comprendere che bisogna scomporre la superficie del disco tracciando delle corde.
- Analizzare i due esempi e cogliere un legame tra il numero dei punti di intersezione delle corde e il numero delle parti del cerchio.
- Comprendere che ogni nuova corda divide le regioni di cerchio che «attraversa» (regioni formate dalle corde precedenti) in due parti e che, di conseguenza, bisogna cercare di disegnare ogni nuova corda in modo da «attraversare» il maggior numero possibile di regioni del disegno, o di «tagliare» il maggior numero di corde già disegnate.
- Applicare la constatazione precedente: «più grande è il numero di intersezioni delle corde, maggiore è il numero delle regioni» e disegnare le corde successive tentando di «tagliare» tutte quelle che sono già disegnate.

  Osservare ancora che bisogna evitare le intersezioni comuni a più di due corde. Per esempio, 3 corde possono determinare, due a due, tre punti di intersezione. Se esse sono concorrenti, determinano invece un solo punto e di conseguenza viene meno la regione triangolare determinata dalle tre corde.
- Disegnare, per ogni cerchio, le corde in modo ottimale e contare le corrispondenti regioni.

Alberto può ottenere 7 pezzi



Barbara 11 pezzi

Attribuzione dei punteggi

4 Le due suddivisioni ottimali con disegni precisi che permettano un conteggio corretto: 7 e 11

3 Le due suddivisioni ottimali, ma con un errore di conteggio nella suddivisione di Barbara (10 o 12 invece di 11)

2 La suddivisione ottimale di Alberto e la suddivisione di Barbara in 10 pezzi con i rispettivi conteggi esatti, oppure la suddivisione di Alberto in 6 pezzi e quella di Barbara ottimale con i rispettivi conteggi esatti

1 La suddivisione di Alberto ottimale e quella di Barbara in 9 pezzi solamente
oppure la suddivisione di Alberto in 6 pezzi e quella di Barbara in 10 pezzi

0 Incomprensione del problema o suddivisioni e conteggi che presentano più di due "insufficienze"

Livello: 3, 4

Origine: Bourg-en-Bresse

3. CLASSI INTERNAZIONALI (Cat. 3, 4)

La direttrice di una scuola primaria in cui sono iscritti bambini di diverse nazioni, deve formare le classi quinte.

Consulta la lista degli alunni iscritti e vede che ci sono:

13	Italiani	11	Francesi
10	Americani	1	Cinese
8	Svizzeri	7	Tedeschi
9	Marocchini	4	Olandesi

La direttrice vuole formare tre classi aventi lo stesso numero di alunni, lasciando i bambini della stessa nazionalità in una stessa classe.

Descrivete tutti i modi possibili di formare le tre classi.

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: scomposizione di numeri, addizione, divisione
Combinatoria

Analisi del compito

- Calcolare la somma di tutti gli allievi, 63 e dedurre che in ogni classe ci devono essere 21 allievi (63 : 3 = 21)
- Trovare tutte le possibilità di scomposizione del numero 21 in due o più addendi che tenga conto del numero di allievi delle diverse nazionalità:

  con due addendi: 21 = 13 + 8 oppure 21 = 11 + 10;

  con tre addendi: 21 = 9 + 4 + 8 = 13 + 7 + 1 = 7 + 4 + 10 = 11 + 9 + 1

  con quattro addendi: 21 = 9 + 4 + 7 + 1
- Combinare fra loro le scomposizioni precedenti in modo da non ripetere gli stessi numeri in una stessa combinazione e quindi ottenere le tre suddivisioni possibili di alunni nelle classi:

Soluzione	Classe A	Classe B	Classe C
1	11, 10	13, 7, 1	9, 8, 4
2	11, 10	13, 8	9, 7, 4, 1
3	13, 8	10, 7, 4	11, 9, 1

Oppure:

pensare che nella classe in cui ci sono i 13 italiani, gli altri 8 allievi mancanti, per arrivare a 21, possono essere o i 7 tedeschi più il cinese o gli 8 svizzeri. Nel primo caso, nella classe in cui si mettono gli 11 francesi possono essere inseriti solo i 10 americani per arrivare a 21, il che porta alla soluzione 1 (la terza classe non può che essere formata da 8 + 9 + 4). Nel secondo caso (21 = 13 + 8), la classe in cui si mettono gli 11 francesi può essere completata o con i 9 marocchini più il cinese (e si ottiene la soluzione 3) o con i 10 americani e si arriva alla soluzione 2. Poiché non ci sono altri casi possibili, si può concludere che le soluzioni sono solo queste tre.

Attribuzione dei punteggi

4 Le tre soluzioni (vedi tabella) con verifica del fatto che queste soluzioni sono quelle che vanno bene (calcolo o spiegazione del tipo: 63 allievi, 21 per classe e verifica di ogni caso)

3 Le tre soluzioni con spiegazione incompleta
oppure due soluzioni con dettaglio dei calcoli e verifica
oppure quattro soluzioni, perché una è stata considerata due volte

2 Due soluzioni senza spiegazione
oppure una sola soluzione corretta con dettaglio e verifica dei calcoli

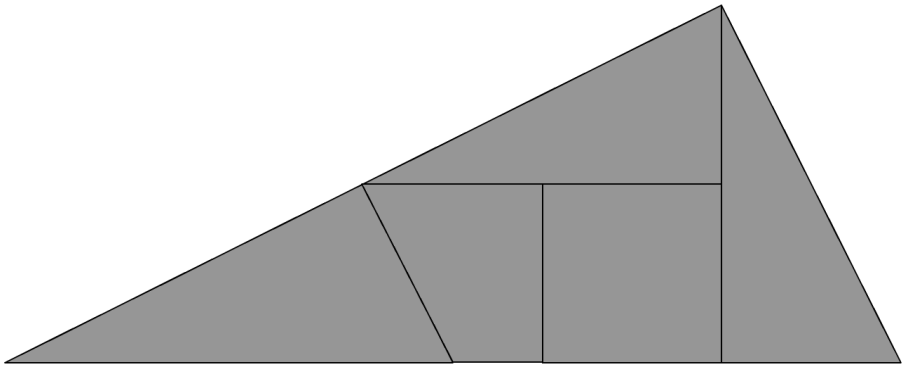
1 Inizio di ricerca corretta (determinazione almeno del numero di allievi per classe) e un tentativo di suddivisione con verifica della eventuale non correttezza

0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4 **Origine: Luxembourg - Parma**

4. QUADRATO O RETTANGOLO? (Cat. 3, 4, 5)

Ecco un puzzle di cinque pezzi, a forma di triangolo.



Francesca dice che si può formare un puzzle quadrato con questi cinque pezzi, senza che si sovrappongano e senza lasciare spazi vuoti.

Giulia dice che, con questi cinque pezzi, si può formare anche un rettangolo non quadrato.

Provate a costruire un quadrato con questi cinque pezzi e mostrate come avete fatto.

Poi provate a costruire un rettangolo non quadrato e spiegate come avete fatto.

ANALISI A PRIORI

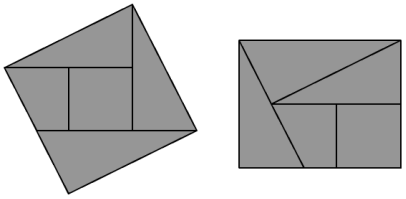
Ambito concettuale

Geometria: manipolazione e osservazione di figure: quadrati, rettangoli e triangoli, angoli
Misura: confronto di lati e angoli

Analisi a priori

- Osservare i cinque pezzi e rendersi conto che se si vogliono ricostruire dei puzzle, bisogna tagliare i pezzi molto precisamente, per poter confrontare i loro lati e i loro angoli.
- Convincersi (esplicitamente o implicitamente, attraverso supposizioni, giustapposizioni o misure) che uno dei pezzi che ha quattro lati è un quadrato, che l'altro ha due angoli retti e due lati uguali a quelli del quadrato; che gli altri tre pezzi sono dei triangoli che hanno un angolo retto (i bambini probabilmente diranno: come quelli del quadrato) e che due tra questi triangoli sono sovrapponibili.
- Procedere per tentativi tagliando i pezzi, traslandoli, ruotandoli e capovolgendoli (identificando in particolare i pezzi che permettono di ottenere angoli retti o delle parallele) …fino ad ottenere il rettangolo e il quadrato.

Per esempio, una rotazione di mezzo giro del «triangolo grande» attorno al vertice destro permette di ottenere il quadrato; una rotazione di mezzo giro del «triangolo grande» attorno al vertice superiore e una traslazione del triangolo di destra permettono di ottenere il rettangolo non quadrato.



Attribuzione dei punteggi

4 Due disegni o assemblaggio dei pezzi tagliati, corretti e precisi in modo da permettere il chiaro riconoscimento dei cinque pezzi

3 Un solo disegno o un solo assemblaggio corretto e l'altra figura approssimativa

2 Un solo disegno o un solo assemblaggio corretto senza soluzione per l'altra figura
oppure due disegni o assemblaggi dove uno o due pezzi non sono riconoscibili o sono imprecisi

1 Solo una figura ricostruita, incompleta o imprecisa

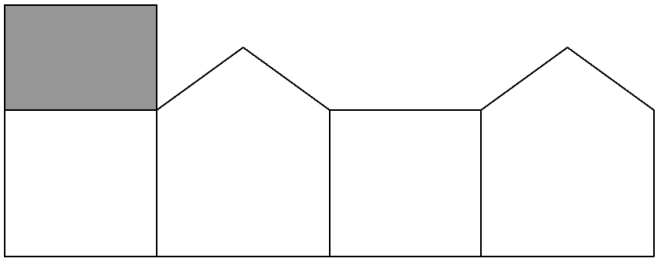
0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4, 5 **Origine: Puglia**

5. LA CASA (Cat. 3, 4, 5)

Giulio vuole costruire una casa piegando e tagliando un foglio di cartoncino.

Ha già disegnato le quattro facciate e una parte di tetto, come rappresentato qui sotto.



Deve ancora disegnare l'altra parte del tetto, che sarà un rettangolo della stessa grandezza di quello che ha già disegnato in grigio.

Giulio scopre che può attaccare il rettangolo in più modi sui lati già disegnati.

In quanti modi diversi Giulio può aggiungere l'altro rettangolo grigio, sul modello già disegnato?

Per ciascun modo trovato, fate un disegno completo della casa con il nuovo rettangolo grigio (potete ricopiare, tagliare, incollare…).

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

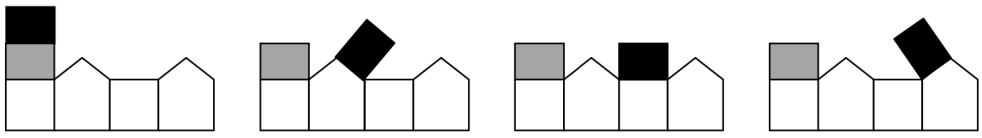
Geometria: legame tra la visione bidimensionale e quella tridimensionale ottenuta per piegamenti, costruzione di un rettangolo

Analisi del compito

- Comprendere che il «modello», che è una figura piana, dovrà essere tagliato e piegato per realizzare la casa e che, con le 4 facce e il pezzo di tetto disegnato sulla figura, non si ricostruisce la casa completa, ma rimane un «buco» che dovrà essere «chiuso» con l'altro pezzo di tetto.
- Individuare i lati del modello proposto sui quali aggiungere il rettangolo che manca ed escludere quelli che porterebbero a sovrapposizioni o che lascerebbero un «buco».

  Oppure: piegare e «chiudere» il modello incompleto, constatare che c'è un «buco» rettangolare e individuare i quattro lati di questo rettangolo come quelli sui quali può essere incollato il pezzo di tetto che manca.
- Trovare le quattro possibilità e, per ciascuna di esse, costruire il rettangolo da aggiungere conservando le sue dimensioni e i suoi angoli retti, in particolare per i casi in cui è da sistemare sui lati «obliqui» del modello.
- Verificare eventualmente le soluzioni mediante ritaglio, piegamento e costruzione effettiva.

I quattro modelli possibili:



Attribuzione dei punteggi

4 Soluzione completa e chiara: i quattro modelli sono disegnati (o incollati) con il rettangolo posizionato correttamente, (non si richiede una precisione nel disegno, ma è necessario che sia riconoscibile il rettangolo, i suoi angoli retti, la lunghezza e la larghezza)

3 Soluzione incompleta: con una sola delle seguenti «inesattezze»: assenza o ripetizione di uno dei modelli, oppure un modello che implica una sovrapposizione di due facce, oppure un modello che lascia un «buco» dovuto ad un errore, oppure ad una grande imprecisione nel disegno dell'ultimo pezzo rettangolare

2 Soluzione incompleta, che presenta solo due delle precedenti «inesattezze»

1 Soluzione incompleta, che presenta tre o quattro delle «inesattezze» precedenti
oppure: un solo modello correttamente disegnato

0 Incomprensione del problema

Livello: 3, 4, 5 **Origine: Franche-Comté**

6. IL PREZZO DEI CAVOLI (Cat. 4, 5)

Marina va al mercato per comperare sei cavoli.

Confronta i prezzi affissi da tre negozianti:

Negoziante A	Negoziante B	Negoziante C
1,50 euro ogni cavolo *tre cavoli al prezzo di due cavoli*	**1,20 euro ogni cavolo** **quattro cavoli al prezzo di tre cavoli**	*1 euro ogni cavolo*

C'è un negoziante dal quale il prezzo dei cavoli è più conveniente quando Marina ne acquista sei?

Spiegate la vostra risposta e dite come avete calcolato il prezzo di sei cavoli presso ciascun negoziante.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: addizione, moltiplicazione
Logica

Analisi del compito

- Leggere i tre cartelli e interpretare le frasi «tre cavoli al prezzo di due cavoli» e «quattro cavoli al prezzo di tre cavoli» del linguaggio pubblicitario.
- Rendersi conto che da A 1 cavolo è gratuito se se ne comperano 3 e che, di conseguenza 2 cavoli sono gratuiti se se ne comperano sei. Trovare per addizione o moltiplicazione il prezzo di quattro cavoli: 6 euro (1,50 + 1,50 + 1,50 + 1,50 o 4 x 1,50 o (1,50 + 1,50) x 2)
- Rendersi conto che da B bisogna approfittare della promozione per acquistare 4 cavoli al prezzo di 3 e poi acquistare altri due cavoli fuori promozione, cosa che porta a pagare 5 cavoli: (3 x 1,20) + 1,20 + 1,20 = 6 (in euro).
- Rendersi conto che da C è sufficiente calcolare il prezzo 6 cavoli: 6 euro, per addizione o per moltiplicazione.
- Confrontare i risultati ottenuti e constatare che sono uguali.
- Formulare la risposta: "Non c'è un negoziante presso cui Marina spenderà meno, perché spenderebbe sempre 6 euro" e giustificare la risposta con i calcoli adeguati.

oppure (eventualmente per coloro che cercano di spendere il meno possibile) con la risposta «No, ma Marina potrebbe acquistare 4 cavoli da B per 3,60 euro e 2 cavoli da C, cosa che in totale le costerebbe 5,60 euro»

Attribuzione dei punteggi

4 Soluzione: No, Marina spende sempre 6 euro con giustificazione completa (con o senza la soluzione a 5,60 euro)

3 Soluzione corretta, con giustificazione incompleta (il costo di 6 euro da ciascun negoziante è indicata, ma la giustificazione non è sufficientemente esplicitata)
oppure soluzione corretta per i negozianti A e C (costo 6 euro), ma errore sul calcolo della spesa da B (moltiplicare per due il prezzo di tre cavoli senza pensare che così Marina avrebbe otto cavoli, oppure considerare il prezzo di 4 per 3 più la sua metà senza rendersi conto che 2 cavoli non rientrano nella promozione)

2 Procedura corretta per i tre negozianti, ma con un errore di calcolo che conduce ad una risposta errata, ma coerente con i calcoli fatti
oppure soluzione corretta senza spiegazione

1 Risposta che non tenga conto delle promozioni, senza errori di calcolo

0 Incomprensione del problema

Livello: 4, 5

Origine: Suisse romande

7. I NUMERI DI BICE (Cat 4, 5, 6)

Francesco ha scritto tutti i numeri di quattro cifre che si formano utilizzando, una volta ciascuna, le cifre 1, 2, 3, 4 (per esempio 2431, 3124, ma non 1443 che ha due volte il "4").

Clara osserva i numeri di Francesco e ricopia tutti quelli nei quali:

- la cifra 1 non è la prima (quella delle migliaia),
- la cifra 2 non è la seconda (quella delle centinaia),
- la cifra 3 non è la terza (quella delle decine),
- la cifra 4, non è la quarta (quella delle unità).

Ricopia per esempio il numero 2341, ... ma non 3124 poiché la quarta cifra è 4.

Bice osserva i numeri di Clara e decide di ricopiare solo quelli pari.

Scrivete tutti i numeri ricopiati da Bice.

Spiegate come li avete trovati

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: distinzione cifra e numero; valore posizionale delle cifre
Combinatoria: permutazioni delle cifre 1, 2, 3, 4 ed altri criteri
Logica: negazione; sistematicità di una ricerca

Analisi del compito

- Appropriarsi della situazione: comprendere che i numeri di Francesco sono i più numerosi, che quelli di Clara sono una parte di quelli di Francesco e che quelli di Bice sono una parte di quelli di Clara.
- Comprendere come sono formati i numeri di Francesco e scriverli in maniera sistematica (ce ne sono 24: 4x3x2x1).
- Fra i numeri precedenti, eliminare tutti quelli che non rispondono alle proprietà dei numeri di Clara (interpretando correttamente le negazioni, tenere in considerazione la lista dei nove numeri: 2143; 2341; 2413 ; 3142; 3412; 3421; 4123; 4312; 4321.
- Fra i numeri precedenti scegliere i pari: 3142, 3412 e 4312.

Oppure: tener conto simultaneamente di tre proprietà, o di due, e procedere per eliminazione al fine di ottenere i numeri di Bice, o eventualmente quelli di Clara. Occorre tuttavia partire da un inventario sistematico, scritto o non, dei numeri di Francesco per essere sicuri di non dimenticare i numeri di Clara o di Bice.

Oppure: considerare che i numeri di Clara cominciano solo per 2, 3 o 4; che quelli di Bice (pari) finiscono con 2 (perché bisogna escludere quelli che finiscono per 4. Concludere che ci sono solo 3142, 3412 e 4312 (4132 non va bene perché la cifra 3 è quella delle decine).

Oppure: procedere senza un metodo sistematico e scoprire poco a poco i diversi numeri, senza essere certi di averli trovati tutti e con il rischio di scrivere più volte uno stesso numero.

Oppure: cominciare con lo scrivere tutti i numeri che non hanno 1 come cifra delle migliaia e continuare con uno dei metodi precedenti.

Attribuzione dei punteggi

4 I tre numeri di Bice (3142, 3412 e 4312) con spiegazioni che mostrino come tutti i numeri siano stati trovati attraverso una ricerca sistematica (per esempio lista organizzata dei numeri di F, C e B)

3 I tre numeri di Bice (3142, 3412 e 4312) con spiegazioni che non permettano di vedere l'esaustività del metodo oppure una sola dimenticanza o ripetizione, ma con spiegazioni che mostrino un metodo efficace

2 I tre numeri di Bice (3142, 3412 e 4312) senza spiegazioni
oppure un solo errore (assenza di un numero, ripetizione di un numero o un numero sbagliato) però con spiegazioni che mostrino un metodo di ricerca efficace

1 Un errore, senza spiegazioni
oppure due errori con una spiegazione

0 Più di due errori o incomprensione del problema

Livello: 4, 5, 6 **Origine: Genova**

8. IL MERCATO DI LIBRI (Cat. 5, 6)

Susy e Lilly, che hanno ricevuto in regalo dai nonni 16,20 euro ciascuna, li mettono insieme e decidono di andare al mercato di libri e DVD. Quel giorno le offerte speciali sono le seguenti:

- Un DVD al prezzo di 3,60 euro. Acquistandone tre puoi acquistarne un altro a metà prezzo.
- Un libro al prezzo di 2,50 euro. Due libri al prezzo di 4 euro.

Prima di tornare a casa Susy e Lilly devono inoltre passare a pagare il gioco che hanno preso la settimana precedente e che costa 6,10 euro.

Susy e Lilly spendono tutti i soldi ricevuti dai nonni.

Che cosa hanno comperato Susy e Lilly al mercato?

Spiegate come avete trovato la risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: addizione, sottrazione e moltiplicazione
Logica: organizzazione di un ragionamento che tenga conto di più condizioni

Analisi del compito

- Capire che Susy e Lilly utilizzano il totale complessivo dei soldi a loro disposizione (32,40 euro).
- Stabilire l'ammontare a disposizione per l'acquisto di libri e DVD: 32,40 – 6,10 = 26,30 in euro.
- Fare un'ipotesi sul numero di DVD acquistati ed esaminare se la totalità della somma restante può essere utilizzata per acquistare solo libri oppure il contrario.

Oppure: determinare in maniera organizzata gli acquisti possibili secondo le offerte speciali (che bisogna saper interpretare correttamente!).

N.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
DVD	3,60	7,20	10,80	12,60	16,20	19,80	23,40	24,20	27,80	-	-	-	-
libri	2,50	4	6,50	8	10,50	12	14,50	16	18,50	20	22,50	24	26,50

e rendersi conto che per ottenere 26,30 euro (parte decimale: 30) si può, ad esempio, constatare che le parti decimali dei prezzi dei DVD e dei libri possono essere rispettivamente solo 80 e 50 e trovare la sola possibilità: 19,80 e 6,50, importi che corrispondono a 6 DVD e 3 libri.

Oppure: procedere per tentativi casuali a trovare gli acquisti.

Attribuzione dei punteggi

4 Soluzione corretta (6 DVD e 3 libri) con spiegazione adeguata
3 Soluzione corretta con spiegazione poco chiara o incompleta
2 Procedura corretta ma un errore di calcolo
1 Risposta sbagliata, ma inizio di ricerca corretto
0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6

Origine: Ticino

9. NUMERI DA TROVARE (Cat. 5, 6, 7)

Giulio esamina il numero 1313 e osserva che:

- se addiziona le sue quattro cifre ottiene 8 (1 + 3 + 1 + 3 = 8),
- se moltiplica le sue quattro cifre ottiene un numero dispari (1 x 3 x 1 x 3 = 9).

Giulio si chiede quanti altri numeri di quattro cifre hanno 8 come somma delle loro cifre e un numero dispari come prodotto delle loro cifre.

Aiutate Giulio a trovare la risposta.

Elencate tutti i numeri che avete trovato.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: somma, prodotto, parità
Combinatoria

Analisi del compito

- Leggere le consegne e comprendere le due condizioni a partire dall'esempio, poi cercare qualche altro numero
- Rendersi conto che alcune cifre non possono far parte dei numeri:
  lo 0, perché è elemento assorbente per la moltiplicazione
  le cifre pari
  le cifre maggiori di 5, perché la somma supererebbe 8
- Con una cifra uguale a 5 ci sono quattro numeri che verificano le due proprietà, perché le altre tre cifre non possono essere che "1". Si ottengono: 1115, 1151, 1511, 5111.
- Con una cifra uguale a 3, per ottenere una somma pari a 8, occorrono un altro "3" e due "1". Si ottengono sei numeri: 1133, 1313, 1331, 3113, 3131, 3311.

Oppure: cercare i numeri possibili per tentativi, senza rendersi conto esplicitamente delle condizioni precedenti e trovare i dieci numeri, ma senza essere sicuri che non ci siano altre soluzioni.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (i nove numeri: 1115, 1151, 1511, 5111, 1133, 1331, 3113, 3131, 3311) con eventualmente anche quello già dato: 1313

3 Risposta incompleta, da sette a otto nuovi numeri, senza risposte sbagliate
oppure i nove numeri con una o due ripetizioni

2 Da quattro a sei nuovi numeri corretti, senza risposte sbagliate

1 Due o tre nuovi numeri corretti con altri sbagliati

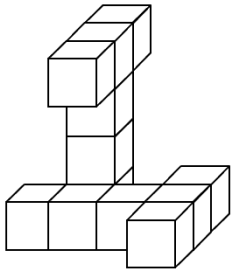
0 Un solo altro nuovo numero corretto o incomprensione del compito

Livello: 5, 6, 7

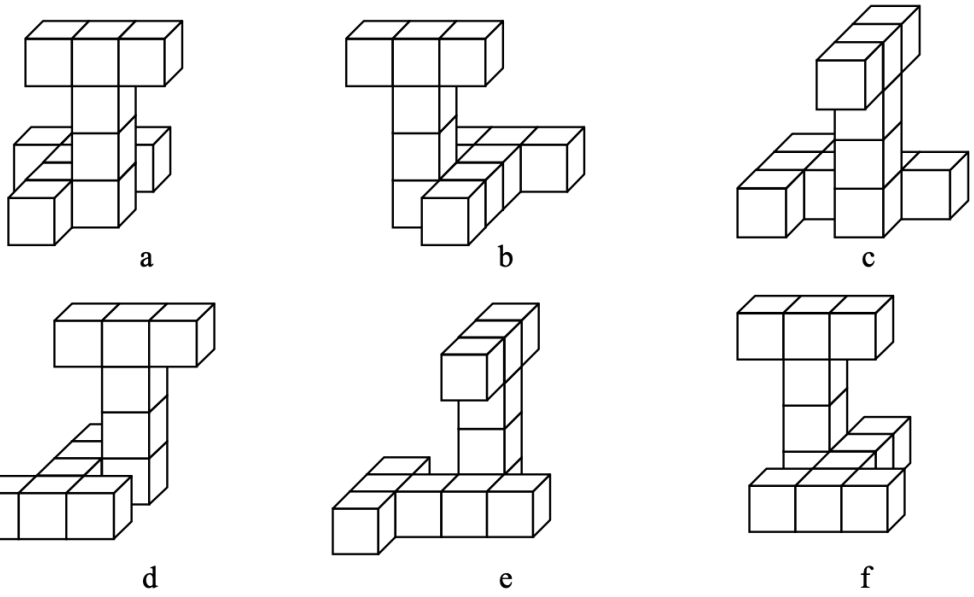
Origine: Franche-Comté

10. PUNTI DI VISTA (Cat. 5, 6, 7)

Andrea ha fatto una costruzione con alcuni cubi. Ecco come si presenta vista di fronte.



Fra i disegni (a, b, c, d, e, f) riportati qui sotto, individuate quelli che rappresentano la costruzione di Andrea e precisate se è vista da dietro, da destra o da sinistra.



ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Geometria nello spazio: immaginare un "policubo", le rotazioni di un solido, assonometria cavaliera

Analisi del compito

- Ruotare mentalmente la costruzione di un quarto o di un mezzo giro rispetto all'osservatore, in senso inverso alla posizione assunta dall'osservatore per osservarla da un altro punto di vista.
- Decomporre la costruzione in elementi più semplici da rappresentarsi mentalmente, in particolare nel pezzo orizzontale e in quello verticale.
- Confrontare l'immagine mentale della costruzione ruotata con ognuno dei disegni.
- Scartare i tre disegni che corrispondono ad una posizione simmetrica scorretta dei due pezzi: a, e, f.
- Indicare le visuali: b = visto da sinistra, c = visto da dietro, d = visto da destra.

Attribuzione dei punteggi

4 Soluzione completa: i tre disegni corretti b, c, d, con ben indicati i punti di vista

3 Indicati correttamente i tre disegni, ma con uno scambio tra i punti di vista (per esempio tra sinistra e destra)

2 Individuati i tre disegni corretti, senza indicazione dei punti di vista o due soli corretti, con i relativi punti di vista

1 Individuato un solo disegno corretto con relativo punto di vista o due disegni corretti con scambio di punti di vista

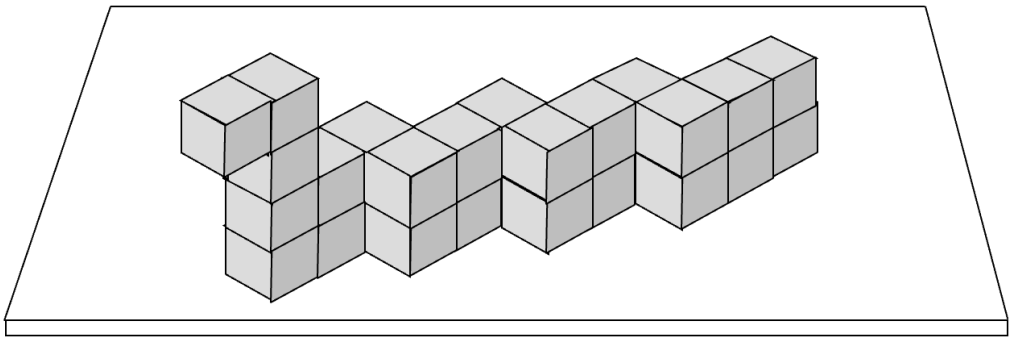
0 Incomprensione del problema

Livello: 5, 6, 7 **Origine: Franche-Comté**

11. IL SERPENTE DI LEGNO (Cat. 6, 7, 8)

Giorgio si diverte a costruire animali utilizzando cubetti di legno. Usa sempre cubetti tutti uguali e poi li incolla tra loro con molta precisione.

Oggi, con 27 cubetti, ha realizzato questo grande serpente che ha appoggiato sulla sua scrivania:



Per rendere più bella la sua costruzione, Giorgio ha dipinto di verde tutta la superficie del serpente che non è a contatto con il piano della scrivania e ha dipinto di giallo quella su cui è appoggiato.

Secondo voi, nel serpente, quante sono le facce dei cubetti dipinte di giallo e quante quelle dipinte di verde?

Spiegate come avete fatto a dare le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Geometria: visualizzazione spaziale; cubo e sue proprietà; superficie di un solido; misura della superficie di un solido rispetto ad una unità di misura
Aritmetica: conteggio; addizione e sottrazione

Analisi del compito

- Constatare che i cubi che si vedono in figura sono 24 e rendersi conto che i 3 che mancano sono nascosti alla vista e si trovano sul retro del serpente (si tratta dei tre cubetti che sostengono gli altri tre di cui si vede soltanto la faccia superiore.
- Comprendere che la superficie del serpente è costituita da quadrati che sono facce dei cubetti con cui è costruito.
- Considerare che i quadrati gialli sono tanti quanti i cubetti che formano la "base" del serpente, cioè quelli appoggiati direttamente sulla scrivania, e sono quindi 12 (9 visibili e 3 nascosti)
- Per contare i quadrati verdi, basta considerare i quadrati che formano la parte di superficie non appoggiata sulla scrivania, aggiungendo a quelli visibili quelli che non si vedono.
- Quelli che si vedono direttamente in figura sono 44.
- Aggiungere poi i quadrati che non sono visibili (per ogni cubetto occorre "immaginarsi" le facce che mancano): a partire dai primi tre cubetti della testa del serpente, si devono aggiungere 6 quadrati; procedendo lungo i primi sei cubetti del corpo, se ne aggiungono altri 8. Continuando ancora lungo il serpente, ce ne sono altri sei per ciascuno dei tre "segmenti" (ognuno di sei cubetti) che formano la parte restante, in tutto quindi altri 18 quadrati.
- Ricavare infine il numero totale dei quadrati verdi: $44 + 6 + 8 + 18 = 76$.
- In alternativa, considerare la superficie laterale visibile (27 quadrati) e dedurne che ce ne sono 27 anche nella faccia laterale non visibile. Aggiungendo i 22 quadrati che costituiscono il dorso, il collo e la testa, si hanno in tutto $2 \times 27 + 22 = 76$ quadrati verdi

Oppure: osservare che ogni cubetto ha 6 facce e che ogni volta che una faccia di un cubetto si sovrappone a quella di un altro, tale faccia quadrata diventa "interna" e non si deve più conteggiare.

- Considerare che il numero totale delle facce quadrate di tutti i 27 cubetti è 162, eseguendo il prodotto 6×27
- Ricavare il numero delle facce quadrate "interne" contando in modo ordinato il numero delle unioni di cubi e raddoppiando tale numero. Per esempio, contare prima le unioni di cubi in "orizzontale" (14), poi quelle in "verticale" (23) ed ottenere così 74, eseguendo le operazioni $(14 + 23) \times 2$

- Ottenere infine il numero dei quadrati verdi del serpente, cioè 76, togliendo da 162 le 74 facce quadrate “interne” e le 12 facce quadrate gialle: (162 – 74) – 12 = 76

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette (12 quadrati gialli; 76 quadrati verdi) con spiegazione esauriente

3 Risposte corrette con spiegazione incompleta o poco chiara

2 Risposte corrette senza alcuna spiegazione, oppure risposta corretta alla prima domanda (12) e un errore di conteggio per la seconda, ma che mostri un modo di procedere sistematico e coerente

1 Solo risposta corretta alla prima domanda (12)

0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7, 8

Origine: Siena

12. L'OROLOGIO DIGITALE (Cat. 6, 7, 8)

Marco, che ha la passione dei numeri, ha nella sua auto un orologio digitale a quattro cifre che indica le ore da 00:00 a 23:59.

Al momento di partire per un lungo viaggio, Marco osserva il suo orologio e nota che i due numeri indicati, quello dei minuti e quello delle ore, sono quadrati di numeri naturali che su un orologio digitale si scrivono nella forma 00, 01, 04, 09, 16, 25, ...

Al ritorno dal viaggio, Marco nota che il suo orologio presenta di nuovo i quadrati di due numeri naturali.

Il computer di bordo gli indica che ha percorso 352 km in 4 ore e 20 minuti.

A che ora Marco può essere rientrato dal suo viaggio?

Spiegate il vostro ragionamento.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica - Misura del tempo - Combinatoria

Analisi del compito

- Comprendere che i numeri dell'orologio si scrivono tutti con due cifre e ammettere le scritture 00, 01, 02 ... come rappresentanti dei numeri 0, 1, 2, ...
- Capire che per le ore i numeri che possono essere quadrati perfetti sono 0, 1, 4, 9, 16, mentre per i minuti sono 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 e che, per poter rispondere alla domanda, sarà necessario fare l'inventario di tutti i casi possibili affiancando i due numeri.
- Si trovano così 5 × 8 = 40 casi possibili esposti nella tabella seguente:

00.00	01:00	04:00	09:00	16:00
00.01	01:01	04:01	09:01	16:01
00.04	01:04	04:04	09:04	16:04
00.09	01:09	04:09	09:09	16:09
00.16	01:16	04:16	09:16	16:16
00.25	01:25	04:25	09:25	16:25
00.36	01:36	04:36	09:36	16:36
00.49	01:49	04:49	09:49	16:49

- Osservare che le righe prima, seconda, terza, quarta, sesta, e settima della tabella vanno scartate perché aggiungendo 20 ai minuti non si ottengono quadrati perfetti. La riga 5 va bene (16 + 20 = 36) così come l'ottava riga (49 +20 = 69 = 60 + 9 cioè 1 ora e 9 minuti)
- Ricercare quali siano le ore che in questa tabella differiscono di 4h 20mn, con una valutazione intuitiva (si vede subito che è verosimile tra la prima e la terza colonna o tra la terza e la quarta) poi attraverso il calcolo per la quinta e l'ottava riga: aggiungendo 4h 20 mn alle ore della prima colonna, si trova 00:16 + 04:20 = 04**:36**;

  e 00:49 + 4:20 = 05:09; e a quelle della terza colonna 04:16 + 04:20 = 08:36; 04:49 + 04:20 = **09:09**.
- Formulare le due risposte: 04:36 e 09:09.

Attribuzione dei punteggi

4 Le due ore possibili del ritorno (04:36 e 09:09) con spiegazioni dettagliate (tabella o lista e tracce dei calcoli) che mostrino come tutte le possibilità siano state esaminate

3 Le due ore possibili del ritorno, 04:36 e 09:09, senza spiegazioni che permettano di vedere come siano state considerate tutte le possibilità
oppure una delle due ore possibili (04:36 probabilmente) con spiegazioni, ma senza aver tenuto in conto l'addizione «con resto» che permette di passare da 04 ore a 09 ore,
oppure ora di partenza al posto di quella di arrivo

2 Una delle risposte possibili con spiegazioni poco chiare,
oppure un ragionamento coerente ma con un errore di calcolo
oppure l'elenco completo delle 40 possibilità

1 Elenco incompleto con almeno 20 possibilità

0 Incomprensione del problema o elenco con meno di 20 possibilità

Livello: 6, 7, 8 **Origine: Genova, C.I.**

13. COMPOSIZIONE DI ROSE (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

La signora Flora, proprietaria di un famoso negozio di fiori, ha preparato per un cliente due bellissime composizioni di rose.

Nella prima composizione, fatta di rose bianche, rose rosse e rose gialle, ha usato 235 rose.

Nella seconda composizione, fatta solo di rose rosse e di rose bianche, ha usato 263 rose.

La signora Flora osserva che:

- il numero di rose bianche è lo stesso in entrambe le composizioni;
- nella prima composizione il numero delle rose gialle è un terzo di quello delle rose rosse;
- nella seconda composizione il numero delle rose rosse è il doppio del numero delle rose rosse della prima composizione.

Secondo voi quante sono le rose di ogni colore presenti in ciascuna composizione?

Spiegate come avete fatto a dare le vostre

ANALISI A PRIORI

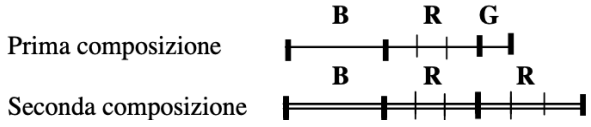
Ambito concettuale

- Aritmetica: le quattro operazioni
- Algebra: avvio al linguaggio algebrico; equazioni e sistemi di equazioni

Analisi del compito

- Considerare la formazione delle due composizioni di rose (di 3 colori la prima e di 2 colori la seconda) e le relazioni esistenti tra il numero delle rose di ciascun colore delle due composizioni.
- Rendersi conto che la differenza tra il numero di rose delle due composizioni non dipende dalle rose bianche.
- Ricavare, usando le informazioni contenute nel testo, che il numero di rose non bianche in entrambe le composizioni si può esprimere in funzione soltanto del numero delle rose gialle: nella prima composizione, infatti, le rose non bianche sono il quadruplo delle gialle (essendo le rosse il triplo delle gialle), mentre nella seconda composizione sono il sestuplo delle gialle (essendo doppio il numero delle rosse rispetto all'altra composizione
- Dedurre che la differenza tra il numero totale di rose delle due composizioni, cioè 28 (263 – 235), è il doppio delle rose gialle e che quindi le rose gialle sono 14.

  Questo ragionamento può essere illustrato con uno schema del tipo:



- da cui si deduce che la differenza tra i numeri di rose nelle due composizioni equivale al doppio delle rose gialle della prima composizione e ai 2/3 delle rose rosse della prima composizione.
- Concludere che nella prima composizione ci sono 14 rose gialle, 42 rose rosse e 179 rose bianche, mentre nella seconda ci sono 84 rose rosse e 179 rose bianche.

Oppure: dopo aver indicato, ad esempio, con B, R e G rispettivamente il numero di rose bianche, rosse e gialle della prima composizione, tradurre in un linguaggio di tipo algebrico le relazioni espresse dal testo:

B + R + G = 235, per la prima composizione, B + 2R = 263, per la seconda composizione.

- Fare la differenza tra il numero di rose delle due composizioni, R – G = 28.
- Poiché R = 3G (dalla seconda condizione dell'enunciato), dedurre che 2G = 28 e quindi che G = 14. Ricavare, di conseguenza, R = 42, da cui B = (235 –14) – 42 = 179, quindi nella prima composizione 179 bianche, 14 gialle e 42 rosse.
- Dedurre che ci sono 2 × 42 = 84 rose rosse per la seconda composizione e 263 – 84 =179 rose bianche.
- Gli studenti delle categorie 9 e 10 potrebbero risolvere il problema con un sistema, ad esempio ponendo b = numero delle rose bianche in ogni mazzo; r = numero delle rose rosse nel primo mazzo, ottenendo:

$$\begin{cases} b + r + \frac{1}{3}r = 235 \\ b + 2r = 263 \end{cases}$$

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta (prima composizione: 14 rose gialle, 42 rose rosse e 179 rose bianche; seconda composizione: 84 rose rosse e 179 rose bianche) con spiegazione esauriente

3 Risposta corretta con spiegazione insufficiente o poco chiara o con solo verifica

2 Risposta corretta senza alcuna spiegazione
oppure risposta errata dovuta ad un errore di calcolo ma ragionamento corretto

1 Inizio di ricerca coerente o tentativi di calcolo che però non tengono conto di una delle condizioni

0 Incomprensione del problema

Livello: 6, 7, 8, 9, 10

Origine: Siena

14. COMPLEANNI E CANDELINE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Luca e Chiara sono fratello e sorella. Quando è nato Luca suo papà festeggiava il proprio trentaseiesimo compleanno, mentre quando è nata Chiara la mamma festeggiava il proprio trentesimo compleanno.

Ci saranno dei compleanni in cui per indicare sulla stessa torta l'età di Luca e quella del papà si potranno utilizzare le medesime due candeline scambiandole semplicemente di posto?

E per Chiara e la mamma?

Giustificate le vostre risposte ed indicate tutti i compleanni in cui è possibile l'utilizzo delle stesse due candeline sulla torta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: cifra-numero, scrittura polinomiale dei numeri in base 10, regolarità della numerazione
Algebra: equazioni in due incognite risolubili in N
Logica: dimostrazione

Analisi del compito

- Comprendere che la differenza fra l'età di Luca e del suo papà è di 36 anni e si mantiene costante, come pure la differenza, 30 anni, fra l'età di Chiara e quella della sua mamma.
- Dedurre, dalla scrittura posizionale in base dieci di un numero di due cifre, che scambiando la cifra delle unità con quella delle decine i numeri che si formano differiscono sempre per un multiplo di 9. Infatti un numero di due cifre **xy**, è esprimibile in forma polinomiale come 10x + y, mentre il numero con le cifre invertite **yx** è esprimibile come 10y + x, quindi la differenza è $10x + y - (10y + x) = 9x - 9y = 9(x - y)$.
- Concludere così che Luca e il suo papà, potranno utilizzare le stesse due candeline, perché la loro differenza di età è 36 che è un multiplo di 9, mentre la mamma e Chiara non lo potranno mai fare perché la loro differenza di età è 30 che non è un multiplo di 9.
- Specificare che lo scambio delle candeline x e y con y e x è possibile ogni volta che la differenza $x - y$ è 4 perché solo così la differenza di età tra Luca e il papà è di 36 anni.
- Elencare i compleanni in cui è possibile lo scambio, scartando eventualmente 04 e 40, perché età inferiori a 10 anni vengono solitamente indicate sulla torta con una sola candelina.

Luca	15	26	37	48	59
Papà	51	62	73	84	95

- Notare che i compleanni con le stesse candeline si ripetono ogni 11 anni perché dovendo mantenere la differenza 4 fra le cifre bisogna aumentare di 1 il valore di ogni cifra che compone il numero e quindi si aumenta di 11 il numero stesso.

Oppure: procedere per tentativi e per la coppia papà - Luca e convincersi, con molti esempi, che per la coppia mamma-Chiara non ci sono possibilità. Ad esempio, partire per il papà da un'età maggiore di 36 anni e trovare che il primo compleanno in cui è possibile lo scambio è 51 per il papà e 15 per Luca. Procedere poi di anno in anno tenendo presente che non bisogna solo effettuare lo scambio fra decine ed unità, ma anche mantenere costante la differenza 36 fra l'età di Luca e quella del papà.

Oppure: impostare l'equazione $10x + y = 10y + x + 36$ dalla quale si ottiene $y = x - 4$. Osservare che per trovare le soluzioni non si possono attribuire valori alla x per i quali y è negativo e che i valori attribuiti devono essere numeri naturali. Procedere quindi sostituendo i valori possibili ad x.

Attribuzione dei punteggi

4 Risposte corrette: ("sì" per Luca - papà: 15-51; 26-62; 37-73; 48-84; 59-95 , eventualmente anche 04-40; "no" per Chiara - mamma) con spiegazione (dimostrazione oppure attraverso tentativi "ragionati", via via sempre più mirati)

3 Risposte corrette con spiegazione poco chiara per entrambe le coppie,
oppure solo elenco per papà-Luca ed impossibilità per la coppia mamma-Chiara supportata da solo due o tre tentativi

2 Risposta corretta senza spiegazione per la coppia papà-Luca e impossibilità per la coppia mamma-Chiara senza spiegazione o con un solo tentativo

1 Inizio di ricerca corretto o elenco incompleto (almeno due) per la coppia papà – Luca

0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8, 9,10

Origine: Siena

15. FRAZIONI SOVRAPPOSTE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Gianni e Lina hanno disposto ciascuno nove numeri su tre righe e tre colonne e hanno inserito sei linee tra due numeri sovrapposti: possono così leggere sei frazioni.

Ecco la disposizione di Gianni $\frac{2}{8}\ \frac{4}{12}\ \frac{6}{9}$ $\frac{10}{16}\ \frac{16}{18}$

ed ecco quella di Lina $\frac{4}{8}\ \frac{3}{6}\ \frac{2}{9}$ $\frac{14}{16}\ \frac{16}{15}$

I ragazzi hanno scelto i loro numeri cercando di rispettare le seguenti regole:

a) i nove numeri sono numeri naturali tutti diversi tra loro;

b) ognuna delle sei frazioni che si possono leggere rappresenta un numero più piccolo di 1;

c) nessuna delle sei frazioni è ridotta ai minimi termini;

d) tutte le frazioni rappresentano numeri diversi fra loro.

Inoltre, Gianni e Lina hanno scelto i nove numeri cercando di fare in modo che il più grande tra essi fosse il più piccolo possibile.

Lina è molto soddisfatta perché il suo numero più grande (16) è minore del più grande dei numeri di Gianni (18).

Ma Gianni le fa osservare che lei non ha rispettato la regola d), poiché 4/8 = 3/6, né la regola c), dato che 2/9 è una frazione ridotta ai minimi termini.

Scegliete anche voi nove numeri rispettando le quattro regole come Gianni, ma in modo che il numero più grande sia minore di 18 e sia il più piccolo possibile.

Scrivete la vostra scelta migliore.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: frazioni, semplificazioni, frazioni equivalenti, numeri primi tra loro

Analisi del compito

- Rendersi conto che non si può scegliere 1 (altrimenti la frazione sarebbe ridotta ai minimi termini), che due numeri sovrapposti devono avere un divisore comune, e che i numeri di una stessa colonna sono ordinati dal più piccolo al più grande.
- Nel corso dei tentativi, notare che bisogna scegliere dei numeri piccoli nella prima riga, che è vantaggioso annotarsi le frazioni semplificate per evitare le frazioni equivalenti, che se si scelgono solo numeri pari, si è sicuri che tutte le frazioni saranno semplificabili, ma non si scenderà al di sotto di 9 x 2 = 18, e così via.
- Partire dunque da 2 e fare man mano l'elenco dei numeri ancora utilizzabili: 3, 4 (non 5) 6, (non 7), 8, 9 (a denominatore del 6), 10, (non 11) 12, (non 13) e 14.

Oppure partire ipotizzando il numero più grande (ad esempio 16) e cercare gli altri seguendo le regole. Provare poi con 15 e con 14 e rendersi infine conto che con 12 non esiste alcuna soluzione.

Ecco qui di seguito qualche soluzione, di cui le prime due non ottimali:

2	4	3
8	6	9
14	16	15

2	4	3
10	8	9
15	14	12

2	3	4
8	6	12
10	9	14

2	3	4
6	12	8
9	14	10

2	3	4
8	9	6
14	12	10

2	3	4
8	9	6
10	12	14

2	3	8
4	9	10
6	12	14

Attribuzione dei punteggi

4 Risposta corretta: disposizione corretta e ottimale di 9 numeri naturali, di cui 14 è il numero più grande utilizzato (è il minimo possibile)

3 Risposta: disposizione non ottimale di 9 numeri naturali, con 15 come numero più grande utilizzato

2 Risposta: disposizione non ottimale di 9 numeri naturali, con 16 come numero più grande utilizzato
oppure risposta (nove numeri) con 14 o 15 come numero più grande utilizzato, ma con una regola non rispettata

1 Risposta (nove numeri) con 14, 15 o 16 come numero più grande utilizzato, ma con due o tre "infrazioni"

0 Incomprensione del problema

Livello: 7, 8, 9, 10 **Origine: Israel**

16. CUBI NASCOSTI (Cat. 8, 9, 10)

Giulia ha 86 cubi bianchi e 34 neri tutti delle stesse dimensioni. Usando tutti i suoi cubi Giulia costruisce un parallelepipedo rettangolo.

Poiché i cubi neri non le piacciono, li mette in modo che non si vedano quando il parallelepipedo è appoggiato sulla sua scrivania di legno.

Quali possono essere le dimensioni del parallelepipedo che Giulia costruisce usando tutti i suoi cubi?

Trovate tutte le possibilità.

Spiegate come avete trovato le risposte.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: moltiplicazione, scomposizione in fattori
Geometria: parallelepipedo rettangolo, volume e facce laterali

Analisi del compito

- Leggere l'enunciato, comprendere che la costruzione dovrà essere composta da 120 (cioè: 86 + 34) cubi e che ci sono più possibilità per le dimensioni del parallelepipedo (le terne di numeri naturali il cui prodotto è 120):

1 x 1x 120; 1 x 2 x 60; ...;

- Comprendere che, se il parallelepipedo è appoggiato, i cubi all'interno dello strato di base non sono visibili, mentre lo sono quelli sullo strato superiore e sulle facce laterali.
- Comprendere che il numero dei cubi non visibili deve essere maggiore o uguale a 34 e dipende dalla faccia che si pensa di appoggiare sulla scrivania. Dipende quindi dal numero di cubi in altezza.
- Rendersi conto che, se si vogliono «nascondere» i cubi neri, il parallelepipedo deve avere almeno 2 cubi in altezza e almeno 3 cubi per le altre due dimensioni.
- Stilare un elenco completo delle costruzioni possibili, calcolando, per ogni parallelepipedo il numero dei cubi non visibili, a seconda dell'altezza scelta ((a – 2) × (b – 2) × (h – 1), dove a e b sono le dimensioni della base e h l'altezza del parallelepipedo):

dimensioni del parallelepipedo	altezza	dimensioni del parallelepipedo non visibile	n° cubi non visibili
2 ×3 × 20	2	1 × 1 × 18	18
2 × 4 × 15	2	1 × 2 × 13	26
2 × 5 × 12	2	1 × 3 × 10	30
2 × 6 × 10	2	1 × 4 × 8	32
3 × 4 × 10	3	2 × 2 × 8	32
3 × 4 × 10	4	1 × 3 × 8	24
3 × 4 × 10	10	1 × 2 × 9	18
3 × 5 × 8	**3**	**2 × 3 × 6**	**36**
3 × 5 × 8	5	1 × 4 × 6	24
3 × 5 × 8	8	1 × 3 × 7	21
4 × 5 × 6	**4**	**3 × 3 × 4**	**36**
4 × 5 × 6	5	2 × 4 × 4	32
4 × 5 × 6	6	2 × 3 × 5	30

- Constatare che ci sono solo due disposizioni che permettono di nascondere tutti i cubi neri:
  il parallelepipedo con 3 cubi in altezza e 5 e 8 per le altre due dimensioni
  il parallelepipedo con 4 cubi in altezza e 5 e 6 per le altre due dimensioni.

Attribuzione dei punteggi

4 Le due soluzioni: 3 × 5 × 8 (altezza 3) e 4 × 5 × 6 (altezza 4), con spiegazioni chiare che mostrino la presa in esame di tutti i casi

3 Le due soluzioni con spiegazioni incomplete

2 Le due soluzioni senza alcuna spiegazione
una sola soluzione con spiegazioni chiare con al massimo altre due terne errate

1 Una soluzione senza spiegazioni o le due terne senza indicare l'altezza o inizio corretto di ricerca

0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9, 10

Origine: C.I.

17. TREDICI A TAVOLA (Cat. 8, 9, 10)

Al termine di un pranzo tra amici al ristorante, il cameriere porta il conto: 192,75 euro.

I tredici amici che hanno pranzato insieme decidono di dividere la spesa in parti uguali. Giulia fa la divisione sulla calcolatrice del suo cellulare e dice:

«Sono 14,82692308 euro a testa. Propongo che ciascuno metta 15 euro sul tavolo».

Matteo, che sa ancora fare le divisioni, scarabocchia sul suo tovagliolo di carta e dice a Giulia:

«La tua calcolatrice non è molto precisa, dato che io ho trovato 14,82692307 e non ho ancora finito».

Antonio, che è velocissimo nei calcoli, dice:

«Matteo ha ragione, l'ottava cifra dopo la virgola è effettivamente 7 e io posso anche dirvi quale sarà, ad esempio, la 2008ª cifra dopo la virgola!».

Dite anche voi qual è la cifra che occupa il posto 2008 dopo la virgola.

Spiegate come l'avete trovata.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: numeri razionali, sviluppi decimali

Analisi del compito

- Appropriarsi della situazione di divisione e verificare le affermazioni di Giulia, Antonio e Matteo.
- Osservare lo sviluppo decimale della divisione 192,75 : 13 su una o più calcolatrici diverse e constatare che ci possono essere delle differenze per le ultime cifre visualizzate e che si può intuire un inizio di regolarità.
- Effettuare la divisione 192,75 : 13 per iscritto e constatare che i «resti» successivi sono: 62,75 in decine; 10,75 in unità; 35 in decimi ; 9 in centesimi, poi 2; 3; 0; 7; 6; 9; 2; ... e notare il periodo 692307 nel quoziente : 14,82**692307**692307**692307**...
- Constatare che il periodo comincia alla 3ª cifra dopo la virgola (quella dei millesimi) e che è costituito da 6 cifre. Dividere quindi 2008 – 2 = 2006 (proprio perché il periodo comincia solo alla terza cifra) per 6 (numero di cifre del periodo) e ottenere di conseguenza 2 come resto che permette di individuare la seconda cifra del periodo, cioè 9, come 2008ª cifra dello sviluppo decimale.

Oppure, osservare che le cifre di posto 3 + 6n = 2 + **1** + 6n sono tutte 6, l'inizio del periodo. Quelle di posto 4 + 6n = 2 + **2** + 6n sono tutte 9, la **seconda** cifra del periodo, quelle di posto 2 + **3** + 6n sono tutte 2, la **terza** cifra del periodo e così via. Quindi per trovare la cifra di posto 2008 = 2 + r + 6n basterà trovare il resto r della divisione di 2008 – 2 = 2006 per 6; 2006 : 6 dà resto **2** e 9, la **seconda** cifra del periodo, sarà la 2008ª cifra.

Oppure, per esempio, addizionare dei multipli di 6 per avvicinarsi a 2008 e si può trovare: 3 + 1800 + 180 + 24 = 2007. La 2007ª cifra sarà 6, la 2008ª sarà 9.

Attribuzione dei punteggi

4 La risposta corretta (la 2008ª cifra dopo la virgola è 9) con una spiegazione che metta in evidenza il periodo e il modo di utilizzarlo per determinare le cifre

3 La risposta corretta con spiegazione poco chiara

2 La risposta corretta senza spiegazione,
oppure un errore nell'indicazione della cifra, ma con spiegazione coerente (scoperta e utilizzo del periodo, ma imprecisione nella posizione della 2008ª cifra)

1 Scoperta del periodo, ma senza utilizzarlo per determinare la 2008ª cifra

0 Incomprensione del problema

Livello: 8, 9 10

Origine: C.I.

18. UN SATELLITE SOPRA L'EQUATORE (Cat. 9, 10)

L'equatore terrestre misura circa 40 000 km, con un'approssimazione di 5 km (cioè la misura è compresa fra 39 995 km e 40 005 km). Un satellite artificiale gira attorno alla Terra in corrispondenza dell'equatore ad un'altezza di 200 km (misure esatte) e impiegando esattamente 2 ore.

Tre ricercatori hanno misurato lo spazio percorso dal satellite e la sua velocità per percorrere un giro completo, ottenendo i seguenti risultati:

Ricercatore Nicolas:	spazio = 41 230 km,	velocità = 20 620 km/h
Ricercatore Christoph:	spazio = 41 256 km,	velocità = 20 627 km/h
Ricercatore Giorgio:	spazio = 41 258 km,	velocità = 20 635 km/h

Quali di queste misure sono corrette, cioè compatibili con l'approssimazione della misura dell'equatore?

Motivate le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Calcolo numerico: operazioni con π e approssimazioni
Geometria: lunghezza della circonferenza
Grandezze: spazio, tempo, velocità e loro unità di misura

Analisi del compito

- Comprendere che la misura dell'equatore non è esatta, ma è dato un intervallo in cui essa è compresa.
- Ricordare la formula che fornisce la lunghezza della circonferenza di raggio R: $2\pi R$, approssimare π (è sufficiente prendere l'approssimazione 3,14).
- Calcolare il raggio R della Terra con la sua incertezza: è compreso tra 39 995 : 2π 6 369 km e 40 005 : 2π 6 370 km (si ottengono valori diversi utilizzando approssimazioni di π diverse da 3,14)
- Osservare che il satellite descrive una circonferenza di raggio R + 200 km.
- Dedurre che lo spazio percorso dal satellite in un giro è compreso tra 6 569 × 2π 41 253 e 6 570 × 2π 41 260 km.
- Calcolare la velocità del satellite, dividendo lo spazio per il tempo. Risulta che è compresa tra 20 626,5 km/h e 20 630 km/h.

Oppure:

- Comprendere che il satellite percorre $2\pi \times 200$ km in più rispetto alla lunghezza dell'equatore, cioè circa 1256 km in più (o 1257 km in più se si approssima π con 3,142 o 3,1416).
- Dedurre che lo spazio percorso dal satellite è compreso fra 41 251 km e 41 261 km (fra 41 252 km e 41 262 km con migliori approssimazioni di π).
- Calcolare la sua velocità e dedurre che è compresa fra 20 625,5 km/h e 20 630,5 km/h (fra 20 626 km/h e 20 631 km/h con migliori approssimazioni di π)
- Concludere che i ricercatori Christoph e Giorgio hanno calcolato correttamente lo spazio e che solo Christoph ha calcolato correttamente la velocità.

Per agevolare la correzione riportiamo la seguente tabella:

Approssimazione di π	400π	Circo min	Circo max	V min	V max
3	1200	41195	41205	20597,5	20602,5
3,1	1240	41235	41245	20617,5	20622,5
3,14	1256	41251	41261	20625,5	20630,5
3,142	1257	41252	41262	20626	20631
3,1416	1257	41252	41262	20626	20631

Attribuzione dei punteggi

4 Le tre risposte corrette (misure corrette di Christoph e Giorgio per lo spazio e di Christoph per la velocità) con giustificazione che le misure sono comprese in determinati intervalli

3 Risposte corrette con motivazione incompleta

2 Risposte corrette senza motivazione
oppure risposta non corretta a causa di un errore di calcolo

oppure due risposte su tre ma con spiegazione

1 Inizio di ragionamento corretto (ricerca di intervalli)

0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: Franche-Comté

19. C'È CHI VINCE E C'È CHI PERDE (Cat. 9, 10)

Alberto, Bernardo e Carlo giocano con le biglie.

Al termine di ogni partita, il ragazzo che ha perso deve dare al vincitore un numero di biglie uguale al numero di biglie che il vincitore aveva già. Il terzo giocatore non vince e non perde biglie.

- Nella prima partita Alberto vince e Carlo perde.
- Nella seconda partita Bernardo vince e Alberto perde.
- Nella terza partita Carlo vince e Bernardo perde.

Dopo queste tre partite ciascun giocatore ha 16 biglie.

Quante biglie aveva ciascuno dei tre ragazzi prima di cominciare a giocare? Spiegate come avete trovato la risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

Aritmetica: operazioni elementari (addizione e sottrazione) con numeri naturali inferiori a 50
Logica: ragionamenti per analisi «a ritroso»
Algebra: equazioni e sistemi

Analisi del compito

- Comprendere le regole di ripartizione (per ogni partita, il numero di biglie di chi vince è raddoppiato e il numero di biglie di chi perde diminuisce del numero di biglie che il vincitore aveva prima della partita) e comprendere che ci sono 48 biglie in tutto.
- Disputare qualche partita ipotetica e scoprire così qualche relazione tra i numeri di biglie dei giocatori. Per esempio,

  ... il numero di biglie di Carlo deve essere 8 prima della terza partita e 8 prima della seconda,

  ... che Carlo deve avere più biglie di Alberto prima della prima partita, ...

  procedere così per tentativi successivi per trovare una situazione di partenza che porti a 16 biglie per ogni giocatore dopo la terza partita (senza sapere che tale situazione è unica).

Oppure: ricostruire, retroattivamente, gli "averi" di ogni giocatore a partire dalla fine della terza partita, cioè da quando ciascuno possiede 16 biglie. Ad esempio, si può procedere nel modo seguente, indicando le situazioni e gli scambi per ogni partita:

	fine 3ª	scambi 3ª	fine 2ª	scambi 2ª	fine 1ª	scambi 1ª	inizio
Alberto	16	0	16	**–12**	28	**+14**	14
Bernardo	16	**– 8**	24	**+12**	12	0	12
Carlo	16	**+ 8**	8	0	8	**–14**	22

Oppure, algebricamente, ricostruire gli scambi, a partire da una situazione iniziale (a; b; c):

dopo la prima partita: (2a; b; c – a), dopo la seconda partita: (2a – b; 2b; c – a),

dopo la terza partita: (2a – b = 16; 2b – (c - a) = 16 ; 2(c – a) = 16) e risolvere il sistema di equazioni.

Attribuzione dei punteggi

4 La risposta completa e corretta (Alberto 14, Bernardo 12, Carlo 22) con spiegazione che mostri l'unicità

3 La risposta completa e corretta, con spiegazione incompleta o trovata per tentativi, senza mostrarne l'unicità

2 La risposta completa e corretta senza alcuna spiegazione
o sola una attribuzione corretta con spiegazione e calcolo coerente

1 Inizio di ricerca con un tentativo che rispetti le regole del gioco

0 Incomprensione del problema

Livello: 9, 10

Origine: C.I.